ELOSZLÁSI ÉS APPROXIMÁCIÓS PROBLÉMÁK

doktori (PhD) értekezés

Molnár Sándor

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2004.

NYILATKOZATOK

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és számítástudomány doktori iskola Diofantikus és konstruktív számelmélet programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2004. március 30.

Molnár Sándor
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Molnár Sándor doktorjelölt 2002 – 2004 között a fent megnevezett Doktori Iskola Diofantikus és Konstruktív Számelmélet programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2004. március 30.

Dr. Pintér Ákos
témavezető

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatunk két fejezetből áll, melyek témájukat tekintve csatlakoznak egymáshoz. A lineáris rekurzív sorozatok értekezésünk fő témáját jelentik, két általános tétel kivételével ezekkel foglalkozunk.

Az első fejezetben modulo 1 eloszlási kérdéseket vizsgálunk. Valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozatok esetében kézenfekvő a mod 1 eloszlások tanulmányozása. Egész értékű G_n sorozatok esetén az f valós függvénnyel képzett $f(G_n)$ sorozatok eloszlásával foglalkozunk. Külön figyelmet fordítunk a lineáris rekurzív sorozatok tagjainak hányadosából képzett sorozatok eloszlására, mivel ezek a sorozatok a diofantoszi approximációban fontos szerepet játszanak.

A második fejezet témája a valós másodfokú algebrai számok és komplex értékű másodfokú algebrai számok abszolút értékének diofantoszi approximációja. Az approximáció során a következő szempontokból minél többet igyekszünk figyelembe venni. Olyan approximáló sorozatokat tartunk ideálisnak, melyek:

- Explicit alakban adottak,
- A lánctörtképzési procedúrától függetlenül fellelhetők,
- Az approximáció alapegyenlőtlenségében k=2 és a konstans a lehető legnagyobb
- Minden olyan törtet tartalmaz, mely az előző feltételt kielégíti.

A feltételek első három pontját minden valós másodfokú algebrai egészre és minden komplex másodfokú algebrai egész abszolút értékére (ha ez nem racionális) tudjuk teljesíteni. Megadunk azonban végtelen sok olyan másodfokú algebrai számot is, melyekhez mind a négy feltételt teljesítő sorozatot elő tudunk állítani.

A dolgozat elkészítése során munkám hatékony segítéséért ezúton is szeretném kifejezni köszönetemet mindenek előtt témavezetőmnek, Dr. Pintér Ákosnak. Köszönöm továbbá Győry Kálmán professzor úrnak, hogy munkámat mindvégig figyelemmel kísérte, valamint Kiss Péter professzor úrnak, hogy pályámon elindított.

Fogalmak és jelölések

Lineáris rekurzív sorozatok:

Másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük a

(1) $$G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \qquad (n \geq 0)$$

formulával és az $A, B, G_0, G_1 \in \mathbf{Z}$ paraméterekkel definiált sorozatot, ahol $AB \neq 0$ és $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$ feltételek teljesülnek. Az A, B, G_0, G_1 paraméterekkel definiált másodrendű lineáris rekurzív sorozatot $G = (G_n)_{n=1}^{\infty} = G(A, B, G_0, G_1)$ módokon fogjuk jelölni. A következő speciális esetekre az alábbi jelöléseket fogjuk alkalmazni. Ha $A = B = G_1 = 1$ és $G_0 = 0$, akkor az ismert Fibonacci sorozatot kapjuk és ezt $F = (F_n)_{n=1}^{\infty} = F(1,1,0,1)$ – gyel jelöljük és röviden csak F sorozatnak mondjuk. R sorozatról beszélünk, ha $R_0 = G_0 = 0, \quad R_1 = G_1 = 1, \quad A, B \in \mathbf{Z} \quad (A; B \neq 0)$: $R = R(A, B, 0, 1)$. Az $A, B \in \mathbf{Z}$, $(A; B \neq 0)$ $V_0 = 2, V_1 = A$ paraméterekkel értelmezett $V = V(A, B, 2, A)$ sorozat az un. Lucas sorozat.

Ha a másodrendű lineáris rekurzív sorozat definíciójában a A, B, G_0, G_1 paraméterek értékeinek valós számokat engedünk meg, akkor a valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozat értelmezését kapjuk.

A másodrendű lineáris rekurzív sorozatoknak és a valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozatoknak egy ismert tulajdonsága, hogy tagjaik az úgynevezett Binet-formula segítségével zárt alakba írhatók. Ehhez a karakterisztikus polinom zérushelyeit használjuk fel. A $G(A, B, G_0, G_1)$ sorozat karakterisztikus polinomjának a $P(x) = x^2 - Ax - B$ polinomot, karakterisztikus egyenletének a $x^2 - Ax - B = 0$ egyenletet nevezzük. A karakterisztikus polinom zérushelyeit dolgozatunkban mindvégig α – val és β – val fogjuk jelölni, mégpedig az $|\alpha| \geq |\beta|$ relációnak megfelelően. A konvergenciával kapcsolatos tulajdonságok miatt, ha $|\alpha| > |\beta|$, akkor az α – t domináns gyökként fogjuk emlegetni. A karakterisztikus polinom $D = A^2 + 4B$ diszkriminánsát a rövidebb fogalmazhatóság érdekében egyidejűleg a sorozat diszkriminánsának is fogjuk nevezni.

Ha $\alpha \neq \beta$, akkor minden nem negatív n egész számra érvényes a

(2) $$G_n = a\alpha^n - b\beta^n \qquad (n \geq 0)$$

összefüggés, ahol

(3) $$a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta} \quad \text{és} \quad b = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha - \beta} .$$

A (2) formulát nevezzük Binet-formulának.

Gyakran szokás eltekinteni az $A, B, G_0, G_1 \in \mathbf{Z}$ feltételektől, megengedvén, hogy a paraméterek racionális vagy valós számok legyenek. Mi is fogunk dolgozatunkban valós értékű lineáris rekurzív sorozatokkal foglalkozni. Főként ilyenkor jut jelentős szerephez az alábbi fogalom: A G sorozatot nem degenerált másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük, ha α / β nem egységgyök és $a \cdot b \neq 0$.

Dolgozatunkban, a továbbiakban mindig érvényesnek tekintjük, hogy ha mást nem mondunk, a G sorozat másodrendű lineáris rekurzív sorozatot, az F sorozat a Fibonacci sorozatot, az R és V sorozat az előzőekben leírt sorozatokat jelöli.

A k – ad rendű $G = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ lineáris rekurzív sorozatot a

$$G_n = A_1 G_{n-1} + A_2 G_{n-2} + \ldots + A_k G_{n-k} \qquad (n \geq k \geq 2)$$

rekurzióval definiáljuk, ahol a G_j kezdőértékek és a A_{j+1} $(j = 0, 1, \ldots k-1)$ együtthatók adott racionális egészek. Ha a paraméterek értékeinek valós számokat engedünk meg, akkor valós értékű k – ad rendű sorozatot kapunk.

Modulo 1 eloszlások:

A modulo 1 eloszlásokkal kapcsolatos témakörben az L. KUIPERS és H. NIEDERREITER [19] monográfia, a diofantikus approximáció témakörben pedig a J. W. S. CASSELS [2] könyv fogalom rendszerét fogjuk alkalmazni. A jelöléseknél viszont praktikus okokból időnként eltérünk az említett könyvek jelölésrendszerétől. Ennek megfelelően:

Ha $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ egy valós számsorozat, N egy pozitív egész szám és $E \subseteq I = [0,1)$, akkor az $A(E; N; \omega)$ – val jelöljük az ω sorozat azon a_n tagjainak a számát, melyekre $n \leq N$ és $\{a_n\} \in E$ teljesül, ahol $\{y\}$ jelöli az y valós szám törtrészét.

Megjegyezzük, hogy a $\{\}$ szimbólumot halmazzárójelként is fogjuk használni, de törekszünk arra, hogy a jelentése mindig egyértelmű legyen.

Ha nem okoz félreértést, mert például egy adott fogalomban vagy tételben csak egyetlen sorozat szerepel, akkor $A([a,b); N; \omega)$ helyett röviden csak $A([a,b); N)$ – et írunk.

Mint ismeretes az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot modulo 1 egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha minden olyan a, b számpárra, melyre $0 \leq a < b \leq 1$ teljesül, érvényes a

(4) $$\lim_{N\to\infty} \frac{A([a,b);N;\omega)}{N} = b-a$$

egyenlőség. Azt, hogy egy ω sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású – az angol elnevezés alapján – úgy fogjuk rövidíteni, hogy ω u. d. mod 1 .

Ha az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ számsorozathoz minden $0 \le x \le 1$ valós szám esetén létezik a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([0,x);N;\omega)}{N}$$

határérték, akkor a

(5) $$g: g(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{A([0,x);N;\omega)}{N}, \qquad 0 \le x \le 1$$

függvényt az ω sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének (röviden a. d. f. mod 1) nevezzük.

Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_N$ a valós számoknak egy véges sorozata. A

(6) $$D_N = D_N(a_1,a_2,\ldots,a_N) = \sup_{0\le\alpha<\beta\le 1} \left| \frac{A([\alpha,\beta);N)}{N} - (\beta-\alpha) \right|$$

értéket az adott sorozat diszkrepanciájának nevezzük, ahol $A([\alpha,\beta);N)$ jelöli azon a_i elemek számát $(1 \le i \le N)$, amelyekre $\{a_i\} \in [\alpha,\beta)$ teljesül.
A szokásoknak megfelelően diszkrepanciáról beszélünk akkor is ha (6) helyett

(7) $$D_N^* = D_N^*(a_1,a_2,\ldots,a_N) = \sup_{0<\alpha\le 1} \left| \frac{A([0,\alpha);N)}{N} - \alpha \right|$$

relációt írunk.
A két érték között a

$$D_N^* \le D_N \le 2D_N^*$$

egyenlőtlenségek érvényesek.

Annak eldöntésére, hogy egy sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású – e vagy sem, gyakran a Weyl kritériumot használjuk: Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csakis akkor egyenletes eloszlású modulo 1, ha minden $h \ne 0$ egész számra

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \ .$$

A $[0,1]$ intervallumot önmagára leképező f függvényt egyenletes eloszlást megtartó függvénynek (az angol uniform distribution preserve elnevezés alapján u. d. p. függvénynek) nevezzük, ha minden modulo 1 egyenletes eloszlású $\xi = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatra az $\eta = \left(f(\{a_n\})\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat is modulo 1 egyenletes eloszlású sorozat.

Egyik tételünkben szükségünk lesz a Jordan-féle külső mértékre, valamint a mindenütt sűrű halmaz fogalmára.
Legyen H a valós számok halmazának egy korlátos részhalmaza. Fedjük le a H halmazt az $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\ldots,[a_n,b_n]$ véges sok intervallummal. Az összes ilyen lefedésre kiterjesztett $m^*(H) = \inf \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ értéket a H halmaz Jordan-féle külső mértékének nevezzük.
Az I intervallum H részhalmaza mindenütt sűrű az I intervallumban, ha az I bármely pontjának tetszőleges környezete tartalmazza H – nak pontját.

Algebrai számok:

Az α komplex szám algebrai szám, ha létezik olyan racionális együtthatós nem nulla P polinom, melyre $P(\alpha) = 0$.
Az α algebrai szám definiáló polinomja az a minimális fokú, racionális együtthatós normált polinom, melynek α gyöke.
Az α algebrai szám foka (fokszáma) a definiáló polinomjának a foka.
Egy algebrai számot algebrai egésznek nevezünk, ha definiáló polinomja egész együtthatós polinom.
Az α algebrai szám nevezőjén (denominátorán) azt a legkisebb U pozitív egész számot értjük, melyre $U\alpha$ egy algebrai egész szám.
Az α algebrai szám definiáló polinomjának gyökei az α konjugáltjai.

Dolgozatunk első részében szerephez jutnak a Pisot – Vijajaraghavan (röviden PV) számok.
Az $\alpha > 1$ valós algebrai egész számot PV számnak nevezzük, ha valamennyi α – tól különböző konjugáltjának abszolút értéke egynél kisebb.

Legyen ϑ egy komplex szám, **Q** pedig a racionális számtest. A komplex számtestnek azt a legszűkebb résztestét, amely ϑ – t és **Q** – t tartalmazza, a **Q** testnek ϑ – val való egyszerű bővítésének nevezzük, és $\mathbf{Q}(\vartheta)$ – val jelöljük. Ha ϑ egy algebrai szám, akkor egyszerű algebrai bővítésről beszélünk.

A lánctörtekkel kapcsolatos fogalmak és jelölések:

Jelölje $[x]$ az x valós szám egész részét, $\{x\}$ pedig a tört részét. Legyen α egy valós szám és tekintsük a következő algoritmust. Legyen

$$c_0 = [\alpha] \text{ és } \alpha_1 = \{\alpha\}, \text{ ekkor } \alpha = c_0 + \alpha_1$$

Ha $\alpha_1 \neq 0$, akkor legyen

$$c_1 = \left[\frac{1}{\alpha_1}\right] \text{ és } \alpha_2 = \left\{\frac{1}{\alpha_1}\right\}, \text{ ekkor } \alpha = c_0 + \alpha_1 = c_0 + \frac{1}{c_1 + \alpha_2}$$

Ha $\alpha_2 \neq 0$, akkor $\frac{1}{\alpha_2}$ egész és tört részét képezzük, és így tovább. Általában, ha a $c_0, c_1, \ldots, c_n$ és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ értékeket már meghatároztuk és $\alpha_{n+1} \neq 0$, akkor legyen

$$c_{n+1} = \left[\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right] \text{ és } \alpha_{n+2} = \left\{\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right\}.$$

Az

$$\alpha = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{\ddots \; c_n + \cfrac{1}{c_{n+1} + \alpha_{n+2}}}}}$$

többemeletes törtet lánctörtnek nevezzük, és $L(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}, \alpha_{n+2})$ – vel jelöljük. Ha $\alpha_{n+2} = 0$ akkor az eljárás véget ért. A $c_0, c_1, c_2, \ldots$ egész számokat az α szám lánctört jegyeinek nevezzük.

Ismeretes, hogy az α valós szám lánctört jegyeinek a sorozata akkor és csak akkor véges, ha α racionális szám.

Legyenek az α irracionális szám lánctört jegyei $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Az α lánctörtalakjának szeleteit dolgozatunkban végig h_n / k_n – nel fogjuk jelölni: $L(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = h_n / k_n$, ahol $h_n > 0$, $(h_n, k_n) = 1$ és $n \in \mathbf{N}$.

Fontos ismeret, hogy a lánctörtalak véges szeletei származtathatók az alábbi rekurzióval.

Legyenek $c_0, c_1, c_2, \ldots$ tetszőleges egész számok, ahol $c_i > 0$, ha $i \geq 1$. Legyen

$$h_0 = c_0, \qquad h_1 = c_1 c_0 + 1, \qquad h_n = c_n h_{n-1} + h_{n-2},$$
$$k_0 = 1, \qquad k_1 = c_1, \qquad k_n = c_n k_{n-1} + k_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

Ekkor

$$L(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{h_n}{k_n}$$

és

$$\frac{h_n}{k_n} - \frac{h_{n-1}}{k_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{k_{n-1}k_n} \ ,$$

továbbá

$$(h_n, k_n) = 1 \quad \text{és} \quad n > 0 \quad \text{esetén} \quad k_n < k_{n+1} \ .$$

A h_n / k_n értékeket az $L(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \dots)$ szám konvergenseinek nevezzük.

Az α valós számnak a hozzá legközelebb eső egész számtól mért távolságát $\|\alpha\|$ – val jelöljük: ha $k \in \mathbf{Z}$ – re $k \le \alpha < k+1$, akkor $\|\alpha\| = \min\{|\alpha - k|, |k+1-\alpha|\}$.

Az α valós számnak a p/q tört $(p, q \in \mathbf{Z})$ legjobb approximációs törtje, ha minden $0 < q_1 < q \quad (q_1 \in \mathbf{Z})$ esetén

$$\|q\alpha\| < \|q_1\alpha\| \ .$$

Ha egy $\xi = (p_n / q_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat minden egyes tagja az α irracionális számnak legjobb approximációs törtje, akkor legjobban approximáló sorozatról beszélünk. Ekkor nyílván $\lim_{n\to\infty} p_n / q_n = \alpha$.

Pell egyenletnek az

(8) $$x^2 - D y^2 = 1$$

diofantikus egyenletet nevezzük, ahol D egy pozitív egész, de nem négyzetszám. A (8) Pell egyenletnek azt az (egyértelműen meghatározott) (ξ, η) megoldását, amelyre $\xi > 0$, $\eta > 0$ és $\xi + \eta\sqrt{D}$ minimális, alapmegoldásnak nevezzük. Az alapmegoldásból hatványozással az összes megoldás származtatható.

Modulo 1 eloszlások

A lineáris rekurzív sorozatokat a Fibonacci sorozat általánosításaként vezették be. Alapértelmezésben a tagjai egész számok. Ezért, ha a G lineáris rekurzív sorozat eloszlása szóba jön, természetszerűen a mod m eloszlásokhoz (m > 1 egész szám) asszociálunk. Ha viszont képezzük a szomszédos tagok hányadosaiból álló $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot, vagy egy tetszőleges f valós függvénnyel (melynek értelmezési tartományába G elemei beletartoznak) az $f(G_n)$ sorozatot, akkor a mod 1 eloszlások és bizonyos konvergencia vizsgálatok – melyek pl. a diofantikus approximációhoz kellenek – azonnal érdekessé válnak.
Ha a G sorozat definiáló paraméterei között nem egész valós számokat is megengedünk, akkor ez ugyanilyen természetességgel indokolja a mod 1 eloszlások és a konvergencia tanulmányozását.
A témakörnek igen kiterjedt szakirodalma van. Az eredmények közül most csakis azokat említjük meg, melyek dolgozatunk témájával közvetlen kapcsolatban vannak.
Például KISS PÉTER [11] és MÁTYÁS FERENC [22] a G_{n+i}/G_n (i rögzített) típusú hányadosok konvergenciájára vonatkozó állítások segítségével bizonyítottak diofantikus approximációval kapcsolatos tételeket. W. GERDES [5] eltekintett attól, hogy a G sorozat kezdő értékei és az A, B konstansai egész számok legyenek, helyette tetszőleges valós számokat megengedett. Meghatározta a $G_0, G_1, A, B \in \boldsymbol{R}$ és $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \geq 0)$ esetén a $\left(G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergenciájának feltételét. Eredménye szerint ahhoz, hogy a G sorozat konvergens legyen, az (A, B) számpárnak egy általa meghatározott síkbeli tartományba kell esnie.
Tételét ő maga, W. GERDES [6] – ban általánosította harmadrendű lineáris rekurzív sorozatokra.

R. L. DUNCAN [3] és L. KUIPERS [17] a $\left(\log F_n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozatról megmutatták, hogy mod 1 egyenletes eloszlású (ahol F_n a Fibonacci sorozat n – edik elemét, a log a természetes logaritmust jelöli). Ezt az állítást L. KUIPERS [18] általánosította tetszőleges $b>1, b \in \mathbf{N}$ alapú logaritmusra.

M. B. LEVIN és I. E. SPARLINSZKIJ [21] olyan valós paramétereket konstruáltak, amelyekkel képzett G sorozat mod 1 egyenletes eloszlású.

KISS PÉTER és R. F. TICHY [13] meghatározták a $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényét abban az esetben, ha a G másodrendű lineáris rekurzív sorozat karakterisztikus polinomjának a diszkriminánsa negatív. Eredményüket MOLNÁR SÁNDOR [29] általánosította $\left(G_{n+k}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatokra, ahol k zérustól különböző rögzített egész számot jelöl.

C. PISOT klasszikus [32] dolgozata alapján nyilvánvaló a szoros kapcsolat a $\left(\mu\lambda^n\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat $(\mu,\lambda\in\mathbf{R})$ mod 1 eloszlása, és a $\left(xG_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 eloszlása (ahol G egy k – ad rendű lineáris rekurzív sorozat) között.
Kiss Péterrel közös dolgozatunkban, KISS PÉTER és MOLNÁR SÁNDOR [23] - ben két tételt bizonyítottunk az $\left(xG_n\right)_{n=0}^{\infty}$ (ahol G egy k – ad rendű lineáris rekurzív sorozat) modulo 1 eloszlásával kapcsolatban. Ezeket a tételeket jelen dolgozatban nem szerepeltetjük, de megemlítjük, hogy az egyik tételben és egy következményben végtelen sok olyan $x\in\mathbf{R}$ illetve $y\in\mathbf{R}$ számot adtunk meg, melyekkel az $\left(xG_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású [0, 1 [– ben , illetve $\left(yG_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak végtelen sok torlódási pontja van mod 1 , de nem mindenütt sűrű [0, 1 [– ben.

Olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozatokat is kereshetünk, melyek valós paraméterekkel vannak definiálva és mod 1 mindenütt sűrűek a [0, 1 [– intervallumban. R. F. TICHY [36] megmutatta, hogy kontínuum sok valós értékű másodrendű lineáris rekurzív sorozat van pozitív diszkriminánssal, melyekre teljesül, hogy $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ mod 1 mindenütt sűrű, a [0, 1 [intervallumon, de $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ nem egyenletes eloszlású mod 1. MOLNÁR SÁNDOR [26] az alábbi tétellel ugyanezt igazolta negatív diszkriminánsú sorozatokra.

1. TÉTEL: *Legyen* A *egy valós szám, melyre* $-2<A<2$ *és*

$$\Theta=\frac{1}{2\pi}\arccos(A/2)$$

irracionális.
Legyen $B=-1,\ G_1\neq 0,\ G_0, G_1\in\boldsymbol{R}$ *és legyen* $G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n$ *, ha* $n\geq 0$.
Ha a Binet formulában szereplő $a=\dfrac{G_1-G_0\beta}{\alpha-\beta}$ *konstanssal az* $r_1=2|a|\geq 2$ *egész szám, akkor* $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a [0, 1 [intervallumban.*

A következő tétel megfogalmazásához néhány jelölést vezetünk be. Legyen n egy egész szám és legyen r_1 az előző tételben bevezetett érték: $r_1=2|a|=2\left|\dfrac{G_1-G_0\beta}{\alpha-\beta}\right|$.

Legyen

$$K_n=\begin{cases} n, & \text{ha} \quad n\geq 0 \\ \max\{n,-r_1\}, & \text{ha} \quad n<0 \end{cases}$$

és

$$L_n(x)=\begin{cases} \min\ \{n+x, r_1\}, & \text{ha } n\geq 0, \\ \max\{n+x,-r_1\}, & \text{ha } n<0 \end{cases},$$

ahol $0 \leq x \leq 1$

Ezen jelölések alkalmazásával bizonyítjuk a következőt:

2. TÉTEL: *Legyen A egy valós szám, melyre $-2 < A < 2$ és*

$$\Theta=\frac{1}{2\pi}\arccos(A/2)$$

irracionális. Legyen $B=-1$, $G_1\neq 0$, $G_0, G_1\in \boldsymbol{R}$. Ekkor a

$$G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n \qquad (n\geq 0)$$

lineáris rekurzív sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]}\left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right)-\arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right)\right) \quad , \quad 0\leq x\leq 1 \ .$$

1. KÖVETKEZMÉNY: Kontínuum sok valós értékű lineáris rekurzív sorozat van negatív diszkriminánssal, amely modulo 1 mindenütt sűrű, de nem egyenletes eloszlású a [0, 1 [intervallumon.

M. B. GREGORI és J. M. METZGER [8] a $\lim_{n\to\infty}\sin(u_n x\pi)$ határértéket vizsgálták, ahol x egy valós számot, $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ pedig egy Fibonacci típusú sorozatot jelöl, vagyis egy olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozatot, amelyben A = B = 1 és u_0, u_1 tetszőleges egész számok (de természetesen nem mindkettő nulla): $u=(u_n)_{n=0}^{\infty}=u(1,1,u_0,u_1)$. Bizonyították, hogy ez a határérték akkor és csakis akkor létezik, ha x eleme a $\mathbf{Q}\left(\sqrt{5}\right)$ test egy – általuk meghatározott – speciális részhalmazának. Továbbá ilyenkor szükségszerűen $\lim_{n\to\infty}\sin(u_n x\pi)=0$ teljesül.

M. B. Gregori és J. M. Metzger idézett eredményét [24] – ben általánosítottuk $G(A,1,G_0,G_1)$ sorozatokra (A, G_0, G_1 egész számok). Ekkor már a határérték nem feltétlenül nulla. Mielőtt az állítást pontosan ismertetnénk, az alábbiakat bocsátjuk előre.

Ha csak azokat az x valós számokat keressük, melyekkel a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)=0$ egyenlőség teljesül, akkor eredményesen használhatjuk a Pisot – Vijayaraghavan számokkal, vagyis a PV számokkal kapcsolatos ismereteket (vö. J. W. S. CASSELS [2] 133 – 134 old.).

Viszont, ha a G sorozat nem Fibonacci típusú a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$ határérték különbözhet zérustól, ezért más megfontolásokra is szükség van. Ezzel együtt érdemes a határérték tárgyalását azzal elkezdeni, hogy eldöntjük, a G sorozat karakterisztikus polinomjának domináns zérushelye PV szám, vagy nem. Bizonyítható például, hogy az $|a|>|\beta|>1$ esetén, a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$ létezése maga után vonja, hogy x racionális szám. Ugyanez érvényes, ha α és β komplex számok. Ha viszont α PV szám, akkor már az x lehet irracionális szám is, de ebben az esetben is csak az $x\in \mathbf{Q}(\alpha)$ feltételt teljesítő irracionális szám jöhet szóba.

A [24] - beli módszer minden olyan G sorozatra működik, melynek egyik gyöke PV szám, de a szerteágazó esetek nehezen formalizálhatók, ezért nem írjuk le általánosságban. Továbbá konkrét esetekben olyankor is eredményre vezethet, ha a karakterisztikus polinom zérushelyei között nincs PV szám. Megemlítjük, hogy az alkalmazhatóságot egy konkrét esetben a $G(4,3,G_0,G_1)$ sorozatra egy korábbi dolgozatban illusztráltuk, MOLNÁR SÁNDOR [25].

Elöljáróban megjegyezzük, hogy a probléma nem azonos az $(xG_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mod 1 konvergenciájának problémájával. Például ha $A=10, B=1, G_0=1, G_1=4$ és $x=1/5$, akkor páros n – re $\{xG_n\}=1/5$, míg páratlan n –re $\{xG_n\}=4/5$, ezért $(xG_n)_{n=0}^{\infty}$ mod 1 nem konvergens, de a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$ létezik ($=\sin(\pi/5)$).

Másrészről ha $A=7, B=1, G_0=G_1=1$ *és* $x=1/7$, akkor $\lim_{n\to\infty}\{xG_n\}=1/7$, de az n = 3k + 2 alakú számokra $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)=-\sin(\pi/7)$, míg minden más esetben $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin(\pi/7)$ adódik.

Most az alábbi, [24] - beli tételünket idézzük:

3. TÉTEL: *Legyen a G másodrendű lineáris rekurzív sorozat az A, B, G_0, G_1 egész számokkal és a $G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n$ $(n\ge 0)$ rekurzióval definiálva. Tegyük fel, hogy $A\neq 0, B=1$ és $G_0^2+G_1^2\neq 0$. Jelöljön x egy valós számot. A*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$$

határérték akkor és csak akkor létezik, ha

(9)
$$x=\frac{2(c_1-c_2\beta)+(d_1-d_2\beta)}{(G_1-G_0\beta)\cdot\alpha^e}$$

ahol c_1, c_2 *és e tetszőleges egész számokat jelölnek, továbbá ha* A *páratlan szám, akkor tetszőleges* k *egész számmal,* $d_1, d_2 \in \{2k/A;\ 1-2k/A\}$*, míg ha* A *páros szám, akkor tetszőleges* k *egész számmal* $d_1 = d_2 = 2k/A$ *vagy ha* $A \mid 2k$ *akkor páros* A *esetén is* $d_1, d_2 \in \{2k/A;\ 1-2k/A\}$

Ha x *a fenti formának eleget tesz, akkor* $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x \pi) = \sin(2k\pi/A)$

A [27] – ben bevezettük az f invariáns eloszlású sorozat fogalmát.

DEFINÍCIÓ: Legyenek $\omega = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ és $\xi = (f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ valós számsorozatok, ahol f egy valós függvény Ha az ω és a ξ sorozatoknak egyaránt létezik a mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényük (a.d.f. mod 1) és ezek a függvények egymással egyenlők, akkor az ω sorozatot modulo 1 f invariáns eloszlásúnak nevezzük. (a továbbiakban az angol i.d. mod 1 to f rövidítést alkalmazzuk).

Példák:

1. Ha Θ egy pozitív irracionális szám, akkor az $\omega = (n\Theta)_{n=0}^{\infty}$ és a $\xi = \left(\sqrt{n\Theta}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok egyaránt mod 1 egyenletes eloszlásúak, ezért mindkettőhöz van a.d.f. mod 1 és ezek azonosak: $F(x) = x$, $0 \le x \le 1$. Az $\omega = (n\Theta)_{n=0}^{\infty}$ sorozat négyzetgyök invariáns eloszlású sorozat mod 1 .
2. Ismerünk olyan eseteket is, amikor a sorozathoz van a.d.f. mod 1 , a sorozat nem egyenletes eloszlású mod 1 , de valamely f függvénnyel f invariáns eloszlású mod 1 . A [29] – ben megadtuk annak feltételét, hogy a G lineáris rekurzív sorozattal képzett $(G_{n+1}/G_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 $f(x) = 1/x$ invariáns eloszlású legyen. Az ilyen sorozatokat modulo 1 reciprokinvariáns eloszlásúnak is szoktuk nevezni.
3. Vannak olyan függvények is pl. $f_1(x) = \{x\}$ vagy $f_2(x) = x + k$, akol k egy egész szám, melyekre nézve minden olyan valós számsorozat, melynek van mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye, modulo 1 invariáns eloszlású. Ha viszont a k nem egész számot jelöl, akkor nem minden a.d.f. mod 1 – gyel rendelkező sorozat f_2 invariáns eloszlású mod 1 , de a mod 1 egyenletes eloszlású sorozatok ekkor is f_2 invariáns eloszlásúak mod 1 .

Vegyük észre, hogy éppen azok az f valós függvények az egyenletes eloszlást megőrző (u.d.p.) függvények, melyek a $[0,1]$ intervallumot a $[0,1]$ intervallumra képezik le és bármely mod 1 egyenletes eloszlású sorozat tagjai törtrészéből álló sorozat f invariáns eloszlású mod 1 .

Az u.d.p. függvények számos tulajdonságát megtalálhatjuk pl. S. PORUBSKY, T. SALÁT, és O. STRAUCH [33] dolgozatában.

A továbbiakban három tételt fogalmazunk meg a mod 1 f invariáns eloszlású sorozatokra. Ehhez néhány jelölésre van szükségünk. Azokat a függvényeket, melyeknek értelmezési tartománya és értékkészlete egyaránt valós számokból áll, a továbbiakban röviden csak valós függvényeknek fogjuk nevezni, mellőzve a pontosabb, de hosszabb valós – valós függvény elnevezést.

Az f valós függvény értelmezési tartományát D_f - el jelöljük. A graf f halmazt, mint ismeretes, az alábbi formulával értelmezzük:

$$\text{graf } f = \{(x, y) | x \in D_f,\ y = f(x)\} .$$

Ebből a graf f mod 1 halmaz az x és y koordináták mod 1 redukálásával származtatható, vagyis:

$$\text{graf } f \bmod 1 = \{(x, y) | \exists k, i \in \mathbf{Z},\ x + k \in D_f,\ y + i = f(x + k) \quad \text{és} \quad 0 \le x, y < 1\}$$

Bizonyítjuk az alábbi tételeket:

4. TÉTEL: *Legyen az f valós értékű függvény értelmezve a $D_f \subseteq \boldsymbol{R}$ halmazon és legyenek az F és G a $[0,1]$ intervallumon értelmezett nem csökkenő valós függvények. Legyen továbbá $F(0) = G(0) = 0$ és $F(1) = G(1) = 1$.*

Akkor és csakis akkor létezik bármely F és G függvényhez olyan $\omega = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ valós számsorozat, melyre ω mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F és $\xi = \left(f(a_n)\right)_{n=0}^{\infty}$ mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye G, ha graf f *mod 1 mindenütt sűrű a $0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$ egységnégyzeten.*

Ebből F = G helyettesítéssel adódik:

2. KÖVETKEZMÉNY: Ha f egy olyan valós függvény, melynek *graf f* mod 1 halmaza mindenütt sűrű a $0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$ egységnégyzeten, akkor minden, a $[0,1]$ intervallumon nemcsökkenő F(0) = 0 és F(1) = 1 feltételek szerinti valós F függvényhez létezik ω valós számsorozat, melynek mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F, és ω f invariáns eloszlású mod 1 .

5. TÉTEL: *Legyen f egy valós függvény. Akkor és csakis akkor létezik olyan mod 1 egyenletes eloszlású ω számsorozat mely f invariáns eloszlású modulo 1 , ha a $[0,1[$ intervallum tetszőleges véges sok páronként diszjunkt $[a_1, b_1[, [a_2, b_2[, \ldots, [a_s, b_s[$ részintervallumára*

(10) $$m^*\left(\left\{ y \,\middle|\, \exists k, \exists x \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in graf\ f \bmod 1 \right\}\right) \geq \sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i)$$

(11) $$m^*\left(\left\{ x \,\middle|\, \exists k, \exists y \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in graf\ f \bmod 1 \right\}\right) \geq \sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i)$$

teljesül, ahol $m^*(H)$ *jelöli a* H *halmaz Jordan – féle külső mértékét.*

MEGJEGYZÉS: Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4. tétel feltételeit a sin, cos, tg, ctg és bármely olyan folytonos periodikus függvény kielégíti, melynek periódushossza irracionális szám és értékkészlete olyan intervallum, melynek hossza legalább 1. Ezek a függvények az 5. tétel feltételeit szintén kielégítik. Az $f(x)=1/x$, $x \neq 0$ függvény eleget tesz az 5. tétel feltételrendszerének.

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy a G lineáris rekurzív sorozattal képzett $\omega=(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat mikor mod 1 reciprok invariáns eloszlású. Ehhez szükségünk lesz a nevezett sorozat és annak reciprokának mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényére. Ha a G sorozat karakterisztikus polinomjának zérushelyei valós számok, akkor viszonylag egyszerű esettel állunk szemben. Bonyolultabb a helyzet, ha a G sorozat karakterisztikus polinomjának zérushelyei komplex számok, vagyis a diszkrimináns értéke negatív.
Negatív diszkrimináns esetére, KISS PÉTER és R. F. TICHY [13] meghatározták a $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényét . Most a $(G_{n+k}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ esetre általánosítjuk eredményüket, ezt követően adjuk meg annak szükséges és elegendő feltételét, hogy $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat reciprokinvariáns eloszlású legyen mod 1. Rögzített $0 \leq x \leq 1$ esetén a következő jelölést alkalmazzuk:

$$\chi : \chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 \leq \{y\} < x \leq 1, \\ 0 & \text{ha} \quad x \leq \{y\} \end{cases} .$$

6. TÉTEL: *Legyen a* $G=(G_n)_{n=0}^{\infty}$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a* $G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n \quad (n \geq 0)$ *formulával, az* A, B *zérustól különböző valós számokkal és a* G_0, G_1 *valós kezdő értékekkel, melyekre* $G_0^2+G_1^2 \neq 0$.

Legyen a $D=A^2+4B$ *diszkrimináns negatív és legyen* $k \neq 0$ *tetszőleges egész szám.*

Ha a $\Theta=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{-D}}{A}$ *irracionális szám, akkor az* $\omega=\left(G_{n+k}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *sorozatnak van modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye és az*

(12) $H(x)=H_1(x-\{c\})+H_1(\{c\})$

ahol

(13) $$H_1(x)=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi|d|)-\cos(2\pi x)}$$

továbbá

$c=r^k\cos(k\pi\Theta)$, $d=-r^k\sin(k\pi\Theta)$ *és*

$r=|\alpha|=\left|\left(A+\sqrt{A^2+4B}\right)/2\right|$.

Érvényes továbbá az

$$\left|\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\chi\left(x,\frac{G_{n+k}}{G_n}\right)-\int_0^1\chi(x,c+d\tan(\pi(y+\omega))dy\right|\le$$

$$\le 4\cdot\left(\sqrt{\left|r^k\sin(k\pi\Theta)\right|}\right)\cdot\sqrt{\Delta_N}+6\Delta_N$$

becslés, ahol $\Delta_N=\Delta_N(\Theta n)=D^*_N(\Theta n)$ *a* $(\Theta n)_{n=1}^{\infty}$ *sorozat diszkrepanciáját jelöli.*

7. TÉTEL*: Legyen a* $G=(G_n)_{n=0}^{\infty}$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a* $G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n$, $(n\ge 0)$ *formulával, az A, B zérustól különböző valós számokkal és a* G_0, G_1 *valós kezdő értékekkel, melyekre* $G_0^2+G_1^2\neq 0$. *Legyen a* $D=A^2+4B$ *diszkriminánsnegatív.*

Az $\omega=\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *sorozat akkor és csakis akkor reciprokinvariáns eloszlású* $\bmod 1$, *ha* $B=-1$.

8.TÉTEL: *Legyen a* $G=(G_n)_{n=0}^{\infty}$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a* $G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n$, $(n\ge 0)$ *formulával, az A, B zérustól különböző egész számokkal és a* G_0, G_1 *egész kezdő értékekkel, melyekre* $G_0^2+G_1^2\neq 0$. *Legyen a* $D=A^2+4B$ *diszkriminánspozitív.*

Az $\omega=\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *sorozat akkor és csakis akkor reciprokinvariáns eloszlású* $\bmod 1$, *ha* $B=1$.

Másodfokú valós algebrai számok approximációja másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak hányadosával

Mint ismeretes, bármely másodfokú valós algebrai t számra a

(14) $$\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

egyenlőtlenségnek végtelen sok $p, q \in \mathbf{Z}$ megoldása van. A lánctörteknél szokásosan alkalmazott jelölések szerinti

(15) $$\frac{h_n}{k_n} = r_n = L(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad n \in \mathbf{N}$$

megoldása a (14) egyenlőtlenségnek. Ha az

(16) $$\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

egyenlőtlenség megoldásait keressük, ezeket kivétel nélkül az említett (15) halmazban találjuk.
Az alapproblémát az

(17) $$\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c\, q^k}$$

egyenlőtlenség jelenti, ahol c és k pozitív valós számok és $p, q \in \mathbf{Z}$.

Ebben k értéke $k = 2$ – ig, a c értéke $c = \sqrt{5}$ – ig javítható, az

(18) $$\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}\, q^2}$$

egyenlőtlenségnek bármely t valós irracionális algebrai szám esetén végtelen sok megoldása van.
Az, hogy k maximális értéke (17) – ben $k = 2$, azt jelenti, hogy tetszőleges pozitív ε estén az

$$\left| t - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c\, q^{2+\varepsilon}}$$

egyenlőtlenségnek egyetlen t valós algebrai szám esetén sincs végtelen sok megoldása $(t \neq 0)$, bármely pozitív szám is legyen a c. Ezzel szemben az, hogy c maximális értéke $c=\sqrt{5}$, azt jelenti, hogy tetszőleges pozitív ε estén van olyan t valós irracionális algebrai szám, melyre az

$$\left| t-\frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$$

egyenlőtlenségnek nincs végtelen sok $p,q \in \mathbf{Z}$ megoldása. Ezen számok közül legismertebb az $(1+\sqrt{5})/2$.

A (17) egyenlőtlenséggel kapcsolatban a már említettekhez képest több elindulási irány ismeretes.
Egyrészről nyilvánvaló, hogy hiba lenne olyan éles határvonalat húzni, hogy az $\left| t-\frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c\,q^2}$ egyenlőtlenség $c = 1-$ re érdekes, $c = 0{,}99-$ dal pedig nem is foglalkozunk. Ez annál is inkább így van, mert a $c = 1-$ hez tartozó (14) egyenlőtlenségnek sincs minden megoldása (15) – ben. Ebben a témakörben két eredményt emelünk ki.

- Ha az (14) egyenlőtlenség fennáll, akkor valamely n pozitív egész számmal és a (15) –beli jelölésekkel, $p/q=(j\,h_n+h_{n-1})/(j\,k_n+k_{n-1})$ teljesül, ahol j = 0, 1 vagy c_{n+1} (lásd: LANG [20]).

- R.T.WORLEY [35] a (17) egyenlőtlenségben $k = 2$ választás mellett a $0 < c < 2$ feltételt írta elő. Ebben a témában szép eredményeket ért el. Megadott három formulát , melyek közül a p/q valamelyiknek szükségszerűen eleget tesz, bármelyik megoldása legyen is a p/q az $\left| t-\frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c\,q^2}$ egyenlőtlenségnek.

A másik, ezzel ellentétes tendencia $k = 2$ választás mellett $c \geq \sqrt{5}$ esetén megadni az $\{r_n \mid r_n = h_n/k_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ (15) halmaz egy végtelen részhalmazát, mellyel (17) teljesül. A $c \geq \sqrt{5}$ megválasztása, mint tudjuk távolról sem önkényes, maximuma a t számtól függ. J. W. S. CASSELS [2] p. 24. szerint, ha pl. a másodrendű valós algebrai egész szám definiáló egyenlete $x^2 - Ax - B = 0$, akkor $c_{\max} \leq \sqrt{A^2+4B} = \sqrt{D}$.
Itt lényegében arról van szó, hogy egyes algebrai számokat sikerült $k = 2$ feltétel mellett az elképzelhető legjobb c konstanssal approximálni, konkrét sorozat

segítségével (best approximáló sorozat). Ez a konkrét sorozat nyílván csakis (15) részsorozata lehet.
A kutatások egy harmadik irányát képezi, amikor konkrét algebrai számot approximálunk konkrét sorozattal, $0<k\le 2$ feltétel szerint. Ez az eset azért lehet érdekes, mert itt az approximáció általában a bonyolult lánctört előállítási rekurzív procedúrát megkerülve, gyakran explicite adott sorozattal történik.

Az utóbb említett két irányban Kiss Péter, egri professzor kutatásai messze kiemelkedőek. Kiss Péter (később munkatársaival közösen) elsősorban lineáris rekurzív sorozatok szomszédos tagjainak hányadosával ért el szép eredményeket a témakörben.

- KISS PÉTER [11] egyrészről az R(A, B, 0, 1) lineáris rekurzív sorozatra, melyre $AB\neq 0$, $A^2+4B>0$ bizonyította, hogy α -val jelölve a sorozat karakterisztikus polinomjának domináns zérushelyét az $\left|\alpha-\frac{R_{n+1}}{R_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{A^2+4B\ R_n^2}}$ egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok n-re, ha $|B|=1$. Másrészt megmutatta, ha p/q -ra $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{A^2+4\,B\,q^2}}$ érvényes, akkor p/q benne van az R_{n+1}/R_n , $n\in\mathbf{N}$ halmazban.

- Olyan sorozatokra, melyekre $|B|\neq 1$ Kiss Péter és Sinka Zsolt (P. KISS és ZS. SINKA [16]) megadták annak feltételét, hogy $\left|\alpha-\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|<\frac{1}{c\left|G_n\right|^k}$ végtelen sok n-re teljesüljön, ahol $AB\neq 0$, és $A^2+4B>0$ feltételek továbbra is érvényesek. Itt a k értéke egy logaritmus formulával van megadva és értékére $0<k<2$ igaz, ha $|B|\neq 1$ teljesül, pontosabban $0<k\le k_0=2-(\log|B|)/\log|\alpha|$.

- J. P. JONES és P. KISS [9] a másodrendű lineáris rekurzív sorozat pozitív $D=A^2+4B>0$ diszkriminánsának négyzetgyökét approximálták a $V(A,B,2,A)$ Lucas sorozat, és az $R(A,B,0,1)$ R sorozat V_n/R_n hányadosával. Akkor és csak akkor kaptak legjobban approximáló sorozatot, ha a B definiáló konstansra az $|B|=1$ teljesül.

- P. J. GRABNER , P. KISS AND R. F. TICHY [7] negatív diszkrimináns esetén approximálták a $\sqrt{|D|}$ számot, valamint a karakterisztikus gyök $|\alpha|$ abszolút értékét $1/n$ nagyságrendben. Azt kapták, hogy az $\left|\sqrt{|D|} - \left|\frac{V_n}{R_n}\right|\right| < \frac{2\sqrt{|D|}}{n}$ egyenlőtlenségnek végtelen sok megoldása van. A Baker módszer felhasználásával igazolták, hogy alkalmas k pozitív konstanssal, „elég nagy n – re ”már $\left|\sqrt{|D|} - \left|\frac{V_n}{R_n}\right|\right| > \frac{1}{n^k}$ teljesül.

Ha a t valós másodfokú algebrai számot egy konkrét sorozattal approximáljuk előfordulhat, hogy az approximáló sorozat éppen a t szám konvergensei (15) sorozatának egy végtelen részsorozata.
Valós másodfokú algebrai szám konkrét racionális számsorozattal való approximálását optimálisnak tekinthetjük, ha

(i) Az $\omega = (G_n / H_n)_{n=1}^{\infty}$ approximáló sorozat zárt alakban adott

(ii) Az ω – t a lánctörtektől függetlenül állítjuk elő

(iii) Az $\left|t - \frac{G_n}{H_n}\right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$ egyenlőtlenségben $k=2$ és $c = c_{\max} = c_{\max}(t)$, ($c_{\max}$ jelöli azt a legnagyobb valós számot, mellyel a (17) – nek k=2 esetén végtelen sok megoldása van).

(iv) Az ω sorozat minden olyan p/q törtet tartalmaz, melyre $\left|t - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{c_{\max} \cdot q^2}$ fennáll.

Ez azt jelenti, hogy a lánctörtektől függetlenül képzett, zárt alakban adott sorozattal kiválogatjuk a (15) konvergensek közül a „legjobban approximáló tagokat”.

A problémára a Kiss Péterék olyan és csakis olyan t algebrai egészekre adták meg a választ, melyek definiáló egyenleteiben $|B| = 1$, vagyis amelyek a

$t^2 - At \pm 1 = 0$ egyenletek valamelyikének tesznek eleget. Ekkor a diszkriminánsok $D = A^2 \pm 4$ alakúak, és mint ismeretes $\sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq \pm 2}}^{\infty} \frac{1}{i^2 \pm 4} < \infty$.

Azokkal a valós másodfokú algebrai számokkal, melyek nem algebrai egészek, Kiss Péterék nem foglalkoztak.

Azok a valós másodfokú algebrai számok, melyek nem algebrai egészek, approximációs szempontból nyilvánvalóan megközelíthetőek az alábbi módon is:

Ha t egy másodfokú algebrai szám, de nem algebrai egész, akkor a denominátorral (jelöljük U – val) szorozva másodfokú algebrai egészet kapunk. Jelöljük ezt α-val. Az α-t approximálhatjuk az α definiáló egyenletében szereplő B értékétől függően KISS PÉTER [11] – beli tételével $\left|\alpha - \frac{R_{n+1}}{R_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B}\ R_n^2}$ egyenlőtlenség szerint (ha $|B| = 1$) , vagy P. KISS és ZS. SINKA [16] – beli tételével $\left|\alpha - \frac{G_{n+1}}{G_n}\right| < \frac{1}{c|G_n|^k}$ szerint (ha $|B| \neq 1$) , az ott megadott c és k értékekkel. Az aktuális egyenlőtlenséget az U denominátorral végigosztva a $t = \alpha / U$ approximációját kapjuk. Ekkor az első esetben az approximációs konstans leromlik, az $U\sqrt{A^2 + 4B} \cdot R_n^2 = \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{U}(UR_n)^2$ egyenlőség miatt U – ad részére. A második esetben $k > 1$ esetén romlik a konstans, $0 < k < 1$ esetén javul. Ekkor viszont egyrészt az approximáció fokára jócskán ráfér a javítás, másrészt $k \neq 2$ esetén a konstans, mint ismeretes kevésbé jut fontos szerephez.

Ebből kiindulva a t valós másodfokú algebrai szám approximációja helyett valós másodfokú algebrai egészekkel képzett $\mathbf{Q}(\alpha)$ egyszerű testbővítések elemeinek közvetlen approximációjával kezdtünk el foglalkozni. Első ránézésre az irracionális algebrai, de nem algebrai egész számokról az előbb mondottak szerint ez logikátlannak tűnhet, de mindjárt alátámasztjuk a létjogosultságát. Ekkor az approximáló sorozatot az α - hoz tartozó R sorozat felhasználásával készített $\xi = (R_{n+1} / R_n)_{n=0}^{\infty}$ alakban nyílván nem kereshetjük, hisz' ennek határértéke maga a karakterisztikus polinom domináns zérushelye, α lesz. Ha a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok között keressük a megoldást, a $\mathbf{Q}(\alpha)$ elemeit $\omega = (G_{n+1} / H_n)_{n=0}^{\infty}$ alakú sorozatokkal [1] van esélyünk jól approximálni, ahol az α

[1] Természetesen $\omega = (G_n / H_n)_{n=0}^{\infty}$ ugyanúgy alkalmas, de tiszteletből, szándékosan a Kiss Péter tételeihez formailag közel álló alakot választottuk.

algebrai egész definiáló polinomja egyben a G és H sorozatok közös definiáló polinomja is. A kezdőértékek (G_0, G_1, H_0, H_1) alkalmas megválasztásával érhető el, hogy az ω határértéke az előre adott $t \in \mathbf{Q}(\alpha)$ legyen.
Ezt a koncepciót erősíti meg Kiss Péter (P. KISS [12]) dolgozata is, mely szerint a valós másodfokú algebrai szám konvergenseinek sorozata mindig véges sok olyan sorozatra bontható, melyek másodrendű lineáris rekurzív sorozatok hányadosaként állnak elő. Ebben a dolgozatában Kiss Péter nem foglalkozik ezen részsorozatok approximációinak minőségével, továbbá természetszerűleg fel sem veti ezen sorozatoknak a lánctörtképzési procedúrától független előállítási lehetőségét.

Mivel bármely t valós másodfokú algebrai számhoz végtelen sok α valós másodfokú algebrai egész szám van, melyre $t \in \mathbf{Q}(\alpha)$, ezért még ha egy t algebrai egészet helyezünk is el egy másik másodfokú valós algebrai egész által létrehozott tesbővítésben, $t \in \mathbf{Q}(\alpha^*)$, még akkor is van esélyünk a [16] –belinél magasabb approximációs fokokat találni.
Az, hogy ez nem egyszerűen esély, hanem realitás, a MOLNÁR SÁNDOR [28] –dolgozat példáiból derül ki.

A MOLNÁR SÁNDOR ([28], [30]) dolgozatok tételeivel a következőket tudjuk elvégezni.

- Bármely valós másodfokú algebrai egész számhoz (speciálisan $t = \sqrt{D}$ – hez is) meg tudunk adni (i), (ii) és (iii) feltételeknek is eleget tevő legjobban approximáló sorozatot.
- Bármely nem valós (komplex) másodfokú algebrai egész szám abszolút értékéhez, ha az nem racionális szám, meg tudunk adni (i), (ii) és (iii) feltételeknek is eleget tevő legjobban approximáló sorozatot.
- Bármely valós másodfokú algebrai számhoz meg tudunk adni olyan k = 2 szerinti approximáló sorozatot, amely az (i) és (ii) feltételeket teljesíti (az (iii) – ben a $c = c_{\max}(t)$ feltételt többnyire nem tudjuk garantálni, ha az approximálandó szám nem algebrai egész).
- Bármely nem valós másodfokú algebrai szám abszolút értékéhez, ha az nem racionális szám, meg tudunk adni olyan $k = 2$ szerinti approximáló sorozatot, amely az (i) és (ii) feltételeket teljesíti. Az (iii) – ben a $k = 2$ feltételt mindig, a $c = c_{\max}(t)$ feltételt többnyire nem tudjuk garantálni, ha a szóban forgó szám abszolút értéke nem algebrai egész.
- Bármely olyan valós másodfokú algebrai számhoz, melyet denominátorával megszorozva olyan algebrai egészet kapunk, melynek $x^2 - Ax - B = 0$

minimál egyenletében $|B|=1$, meg tudunk adni az (i), (ii), (iii) és (iv) (tehát mind a négy) feltételt kielégítő approximáló sorozatot.

- A valós másodfokú algebrai, de nem algebrai egész számok egy „széles" osztálya esetén (i), (ii) és (iii) feltételek szerinti approximáló sorozatot. Ezek körvonalazását a tételek megfogalmazása előtt ésszerűtlen lenne elvégezni, azt követően célszerű elvégezni oszthatósági feltételek segítségével.

A tételek megfogalmazása előtt még egy megjegyzést teszünk az (i) → (iv) kívánalomrendszerhez.
Nem mindenáron fogunk törekedni mind a négy feltételt kielégítő approximáló sorozatot megadni.
Ha például az $17x^2+56x-23=0$ egyenlet $\alpha=\left(-56+\sqrt{3527}\right)/34$ gyökét akarjuk approximálni, akkor erre a célra az (i) és (iii) feltételeket egyaránt teljesítő approximáló sorozatnak a $G^*(63, 1, 2, 129)$ és $H^*(63, 1, 5, 314)$ sorozatokkal, valamint a $G^{**}(63, 1, 7, 440)$ és a $H^{**}(63, 1, 17, 1071)$ sorozatokkal képezhető $\xi=\left(G^*_{2n}/H^*_{2n}\right)_{n=0}^{\infty}$ valamint az $\omega=\left(G^{**}_{2n}/H^{**}_{2n}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok mindegyike megfelel. A két sorozat fésűs egyesítésével előálló sorozat (iv) feltételt is teljesíti. Csakhogy az (ii) feltételt nem teljesítettük a sorozatok megtalálása során. Ilyen döntési helyzetben a továbbiakban mindig az (ii) feltételt fogjuk preferálni, akár az (iii) feltétel rovására is.
Már említettük, hogy lehet mind a négy feltételt egyidejűleg teljesíteni. Például a $t=\left(1+\sqrt{5}\right)/6$ másodfokú algebrai, de nem algebrai egész számot a $G(7,-1,0,1)$ és a $H(7,-1,2,13)$ sorozatokból képzett $\omega=\left(G_{n+1}/H_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat mind a négy feltételt teljesítve approximálja. (Ennek belátásához a következőket kell felhasználni: Egyrészről F-el jelölve a Fibonacci sorozatot, a $G_n=\frac{1}{3}\cdot F_{4n}$ és $H_{n-1}=F_{4n-1}$ egyenlőségek miatt $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{6}-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{45}\cdot H_n^2}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{F_{4n+4}}{F_{4n+3}}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\cdot F_{4n+3}^2}$ igaz, másrészről $\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\cdot q^2}$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan k egész szám, mellyel $\frac{p}{q}=\frac{F_{2k}}{F_{2k-1}}$. Ezen kívül vegyük figyelembe, hogy $3\mid F_n$ akkor és csak akkor, ha $4\mid n$.)

Most az alábbi tételeket bizonyítjuk:

9. TÉTEL: *Legyenek az* A *és* B *olyan racionális egész számok, melyekre* $AB \neq 0$ *és* $D = A^2 + 4B > 0$ *nem teljes négyzet. Jelölje* α *és* β *az* $x^2 - Ax - B = 0$ *egyenlet két gyökét, ahol* $|\alpha| > |\beta|$. *Legyen az* $s, q > 0$, $p \neq 0$ *és* r *egész számokkal* $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha$. *Definiáljuk a* c_0 *számot az* $c_0 = \frac{\sqrt{A^2 + 4B}}{|pq|s^2}$ *egyenlőséggel és jelöljön* c *egy pozitív számot.*

A $G(A, B, qr, psB)$ *és* $H(A, B, 0, qsB)$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c\,H_n^2}$$

egyenlőtlenség

(i) *akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok egész* n *értékre, ha* $|B| = 1$ *és* $c \leq c_0$,

(ii) *akkor és csakis akkor teljesül minden* n *egész számra, ha* $B = -1$ *és* $c \leq c_0$.

10. TÉTEL: *Legyenek az* A *és* B *olyan racionális egész számok, melyekre* $AB \neq 0$ *és* $D = A^2 + 4B > 0$ *nem teljes négyzet. Jelölje* α *és* β *az* $x^2 - Ax - B = 0$ *egyenlet két gyökét, ahol* $|\alpha| > |\beta|$. *Legyen az* $s, q > 0$, $p \neq 0$ *és* r *egész számokkal* $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha$. *Definiáljuk a* k_0 *és* c_0 *számokat az* $k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|}$ *és* $c_0 = \left|\frac{\sqrt{D}}{qsB}\right|^{k_0 - 1} \cdot \frac{1}{|psB|}$ *egyenlőségekkel és jelöljön* c *egy pozitív számot.*

A $G(A, B, qr, psB)$ *és* $H(A, B, 0, qsB)$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c\,|H_n|^k}$$

egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok egész n *értékre, ha:*

(i) $k < k_0$, *vagy*

(ii) $k = k_0$ *és* $c < c_0$, *vagy*

(iii) $k = k_0$, $c = c_0$ *és* $B > 0$, *vagy*

(iv) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ *és* $k_0 > 1$.

(Megjegyezzük, hogy $k_0 > 0$, mivel $|B| = |\alpha\,\beta| < \alpha^2$.)

Most néhány példával illusztráljuk, hogyan lehet a $\mathbf{Q}(\alpha)$ elemeinek approximálásával jobb eredményt elérni, mint amit a [16] dolgozat felkínál.

PÉLDÁK:

1. PÉLDA: t = α valós másodfokú algebrai egész.
Legyen $G(4,19,G_0,G_1)$, ahol $G_0, G_1 \in \mathbf{Z}$ és legyen G_0 és G_1 közül legalább egy nem nulla. A karakterisztikus egyenlet $x^2-4x-19=0$ és $\alpha=(4+\sqrt{92})/2$. Ha a $t=\alpha$ szám approximációját [16] szerint a $\omega=\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozattal képezzük, akkor $k_0=2-\log 19/\log\alpha=0{,}463484\,5713...$ adódik.

A $92=A^2+4B$ egyenlőséget végtelen sok A és B segítségével felírhatjuk:
$...,2^2+4\cdot 22, 4^2+4\cdot 19, 6^2+4\cdot 14, 8^2+4\cdot 7, 10^2-4\cdot 2, 12^2-4\cdot 13,...$
Ha a $|B|$ minimális értékét választjuk $\alpha_1=\left(10+\sqrt{100-8}\right)/2 \Rightarrow A=10$, $B=-2$ és $\alpha\in\mathbf{Q}(\alpha_1)$, $\alpha=\alpha_1-3$ következik. Az approximációt a 10.tételünkkel végezve $G(10,-2,-3,-2)$, $H(10,-2,0,-2)$, és így $k_0=2-\log|-2|/\log|\alpha_1|=1{,}696\,248\,791...$.

2. PÉLDA: t = α valós másodfokú algebrai, de nem algebrai egész szám.

Legyen t a $36x^2-894x+1399=0$ egyenlet domináns gyöke ($|t|>|\bar{t}|$) . Az $x^2-894x+36\cdot 1399=x^2-894x+50364=0$ egyenlet gyökeit jelöljük a_1 -el és β_1 -el.

Mivel $t=\frac{1}{36}\alpha_1$, vagyis $t\in\mathbf{Q}(\alpha_1)$, ezért a 10.tétellel tudjuk approximálni a t számot: $k_0=2-\log|B|/\log|\alpha_1|=0{,}390\,207\,431\,2...$, $c_0=0{,}002\,251\,014...$.

Most alkalmas testbővítésbe való befoglalással javítunk az eredményen.
Mivel $D=894^2-4\cdot 36\cdot 1399=2^2\cdot 3^4\cdot(43^2-4)$, $\sqrt{D}=2\cdot 3^2\cdot\sqrt{(43^2-4)}$, ezért az $x^2-43x+1=0$ egyenlet α gyökével is igaz, hogy $t\in\mathbf{Q}(\alpha)$
Ezt felhasználva, $t=\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\alpha$ továbbá $G(43,-1,10,-3)$, $H(43,-1,0,-6)$. Ha a G_{n+1}/H_n hányadossal approximálunk $k_0=2$, $c_0=2{,}386\,303\,511$ ...értékeket kapjuk, vagyis $c_0>\sqrt{5}$ és így végtelen sok n egész számra teljesül az $\left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|<\frac{1}{c_0 H_n^2}<\frac{1}{\sqrt{5}H_n^2}$ egyenlőtlenség.

3. PÉLDA: $t=\alpha_1$ nem valós másodfokú algebrai egész szám.

Legyen az α_1 minimál egyenlete $x^2+3x+10=0$. Ekkor $|\alpha_1|=\left|\left(-3+i\sqrt{31}\right)/2\right|=\sqrt{10}$ adódik.

Így $|\alpha_1|=\sqrt{10}=\left(6+\sqrt{36+4}\right)/2-3 \Rightarrow |\alpha_1|\in \boldsymbol{Q}(\alpha)$ következik, ahol α az $x^2-6x-1=0$ egyenletnek a domináns gyöke, továbbá $|\alpha_1|=\alpha-3$.

A $G(6,1,-3,1)$ és $H(6,1,0,1)$ sorozatokkal számolva $k_0=2$ és $c_0=\sqrt{40}$ és így az elképzelhető legjobb approximációt kapjuk: $\left||\alpha_1|-\left|\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|\right|<\frac{1}{2\sqrt{10}\,H_n^2}$.

4. PÉLDA: $t=\alpha_1$ nem valós másodfokú algebrai, de nem algebrai egész szám.

Legyen az a_1 minimál egyenlete $4x^2+5x+6=0$. Ekkor $|a_1|=\left|\frac{-5-\sqrt{25-96}}{8}\right|$

és $|\alpha_1|=\frac{\sqrt{24}}{4}=\frac{1}{2}\,\frac{+4+\sqrt{4^2+4\cdot 2}}{2}-1=\frac{1}{2}\alpha-1$ következik, ahol α – val az $x^2-4x-2=0$ egyenlet domináns gyökét jelöltük. Így a 10.TÉTEL – ben A = 4, B = 2, G(4,2,-2,2) és H(4,2,0,4) értékekkel számolunk.

$k_0=2-\log|-2|/\log|\alpha|=1{,}535669821...$, $c_0=0{,}557356911 5...$ értékeket kapjuk, mely javítható, mert a G_{n+1}/H_n hányadosokban egyszerűsíteni lehet. Az egyszerűsítés után a $G^*(4,2,-1,1)$ és $H^*(4,2,0,2)$, $k_0^*=k_0$, $c_0^*=2^{k_0}\cdot c_0=1{,}615905914...$ értékeket kapjuk.

Az előző négy példában esetenként nagyon jó, egyszer az elképzelhető legjobb approximációval találkoztunk. Az alkalmazási lehetőséget áttekintettük, de a legjobb approximációkhoz többnyire csak véletlenül, vagy az un. „tenyésztett" feladatok kapcsán jutunk. Ezt a problémát küszöböli ki a következő három tételünk.

11. TÉTEL: *Legyenek az* A *,*B *és* U *olyan racionális egész számok, melyekre* $ABU \neq 0$ *és* $D = A^2 + 4BU > 0$ *nem teljes négyzet. Jelölje* σ *és* ρ *az* $Ux^2 - Ax - B = 0$ *egyenlet két gyökét, ahol* $|\sigma| > |\rho|$. *Legyen az* $s, q > 0, p \neq 0$ *és* r *egész számokkal* $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\sigma$.

Definiáljuk a k_0 *és* c_0 *számokat az* $k_0 = 2 - \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|}$ *és* $c_0 = \left|\frac{\sqrt{D}}{qsBU}\right|^{k_0 - 1} \cdot \frac{1}{|psB|}$ *egyenlőségekkel és jelöljenek* k *és* c *pozitív számokat.* A $G(A, BU, qr, psB)$ *és* $H(A, BU, 0, qsBU)$ *másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal felírt*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

egyenlőtlenség akkor és csakis akkor teljesül végtelen sok egész n *értékre, ha:*

(i) $k < k_0$ *, vagy*

(ii) $k = k_0$ *és* $c < c_0$ *, vagy*

(iii) $k = k_0$ *,* $c = c_0$ *és* $UB > 0$ *, vagy*

(iv) $k = k_0$ *,* $c = c_0$ *,* $UB < 0$ *és* $k_0 > 1$.

(Megjegyezzük, hogy $k_0 > 0$, tekintve, hogy $|\sigma|^2 > |\sigma\rho| = |B/U| \Rightarrow |\sigma U|^2 > |BU|$ $\Rightarrow 2 > \log|BU| / \log|\sigma U|$.)

12. TÉTEL: *Legyen* t *egy valós másodfokú algebrai egész szám. Legyen* t *definiáló polinomja* $P(x) = x^2 - Ax - B$. *Jelölje az* $\eta^2 - (A^2 + 4B)\xi^2 = 1$ *Pell egyenlet alapmegoldását* (ξ_0, η_0).

Ha $t = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, *akkor* $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ *és* $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ *esetén, míg ha* $t = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, *akkor* $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ *és* $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ *esetén minden pozitív egész* n *–re teljesül az*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} \cdot H_n^2}$$ *egyenlőtlenség.*

3. KÖVETKEZMÉNY: Legyen a k pozitív egész, de nem teljes négyzet. Legyen az $\eta^2 - 4k\eta = 1$ Pell egyenlet alapmegoldása (ξ_0, η_0). A $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ és a $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal az

$$\left| \sqrt{k} - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{k} \cdot H_n^2}$$

minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül.

4. KÖVETKEZMÉNY: Legyen t másodfokú algebrai egész nem valós (komplex) szám. $P(x) = x^2 - Ax - B$ definiáló polinommal és legyen $|t| \notin \mathbf{Q}$.

Jelölje az $\eta^2 - 4B\,\xi^2 = 1$ Pell egyenlet alapmegoldását (ξ_0, η_0). A $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ és a $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatokkal az

$$\left| |t| - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{2\sqrt{-B} \cdot H_n^2} \le \frac{1}{\sqrt{-(A^2 + 4B)} \cdot H_n^2}$$

minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén teljesül.

13. TÉTEL: *Legyen t egy valós másodfokú algebrai, de nem algebrai egész szám. Legyen t definiáló polinomja $P(x) = Ux^2 - Ax - B$, $(|U| > 1, A, B \in Z)$ Jelölje az $\eta^2 - (A^2 + 4BU)\xi^2 = 1$ Pell egyenlet alapmegoldását (ξ_0, η_0). Ha $t = \left(A + \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$ esetén, míg ha $t = \left(A - \sqrt{A^2 + 4BU} \right) / 2U$, akkor $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ és $H(2\eta_0, -1, 0, -2U\xi_0)$ esetén minden pozitív egész n –re teljesül az*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{|U|}{\sqrt{A^2 + 4BU} \cdot H_n^2}$$

egyenlőtlenség.

Megjegyzés: Ha a 12. tételben és a 13. tételben valamint a 3. következményben és 4. következményben a Pell egyenlet alapmegoldása helyett Pell egyenlet megoldását mondunk, az állítások igazak maradnak, de az úgy előálló sorozatok mindig csak részsorozatait (szűkebb halmazt) adják az eredeti verzióban megadottaknak.
A 12. tételben valamint a 3. következményben és 4. következményben szereplő konstansok értéke a lehető legjobb lásd: J. W .S. CASSELS [2] p. 24.

A TÉTELEK BIZONYÍTÁSA

Az 1. TÉTEL bizonyítása:

Ha $D = A^2 + 4B < 0$, akkor a (2) Binet-formulában szereplő α és β valamint a és b komplex számok és felírhatók

(19) $$\alpha = r e^{i2\pi\Theta} \qquad \beta = r e^{-i2\pi\Theta}$$

valamint

(20) $$a = \frac{1}{2} r_1 e^{i2\pi\omega} \qquad b = -\frac{1}{2} r_1 e^{-i2\pi\omega}$$

alakban, ahol

$$0 < \Theta = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-D}}{A} < \frac{1}{2} ,$$

$$0 < \omega = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{AG_0 - 2G_1}{G_0\sqrt{-D}} < \frac{1}{2}$$

és r, r_1 pozitív valós számok ($r_1 \neq 0$ és így $a \neq 0, b \neq 0$. Az $r_1 \neq 0$ ugyanis az $r_1 = 0$, ellentmondana a $D < 0$ feltételnek.)

Legyen $(G_n)_{n=0}^{\infty}$ az 1.Tétel feltételeit kielégítő sorozat. Az 1.Tételben $D < 0$, ezért a (2) Binet formula és a (3) alapján

(21) $$G_n = \frac{1}{2} r_1 r^n \cdot e^{i2\pi(\omega + n\Theta)} + \frac{1}{2} r_1 r^n \cdot e^{-i2\pi(\omega + n\Theta)}$$
$$= r_1 r^n \cos(2\pi(\omega + n\Theta)) ,$$

ahol

$$r = |\alpha| = \left| \frac{A + \sqrt{A^2 - 4}}{2} \right| = \left| \frac{A + i\sqrt{4 - A^2}}{2} \right| = 1 .$$

Ezt figyelembe véve (21) – ből

(22) $$G_n = r_1 \cos(2\pi(\omega + n\Theta))$$

adódik.

Legyen $C \in [0,1)$. Mivel $r_1 \geq 2$, ezért létezik olyan $d \in [0,1)$, melyre $\cos(2\pi d) = C / r_1$ érvényes.

A Θ irracionális szám, ezért mint ismeretes az

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (\omega + n\Theta)_{n=0}^{\infty}$$

sorozat egyenletes eloszlású mod 1. Ekkor viszont mod 1 mindenütt sűrű a $[0,1)$ intervallumban, s így ki lehet választani olyan $\left(\omega + n_j \Theta\right)_{j=0}^{\infty}$ részsorozatát, amely modulo 1 konvergál d – hez. De akkor a

$$\left(G_{n_j}\right)_{j=0}^{\infty} = \left(r_1 \cos(2\pi(\omega + n_j\Theta))\right)_{j=1}^{\infty}$$

sorozat konvergál a fentebb tetszőlegesen választott C számhoz, amiért is a C számnak tetszőleges pozitív környezetében van a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak eleme, tehát $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ mindenütt sűrű a $[0,1)$ intervallumban. De akkor modulo 1 is sűrű.

Bizonyítjuk azonban, hogy modulo 1 nem egyenletes eloszlású. Ehhez felhasználjuk a Weyl kritériumot.

H. Weyl közismert dolgozatában , H. WEYL [34] – ben bizonyította, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csakis akkor egyenletes eloszlású modulo 1 , ha

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\{x_n\}) = \int_0^1 f(x)\,dx \tag{23}$$

teljesül minden olyan valós változós, valós vagy komplex értékű folytonos f függvényre, melynek periódushossza 1 . Minthogy az összes folytonos 1 periódusú függvény egyenletesen approximálható trigonometrikus polinomokkal, ebből következik a Weyl kritérium: Az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat akkor és csakis akkor egyenletes eloszlású modulo 1 , ha

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \tag{24}$$

minden $h \neq 0$ egész számra igaz.

Mivel Θ egy irracionális szám, ezért az $\left(\omega + n\Theta\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat egyenletes eloszlású modulo 1 , s így a (23) relációt alkalmazhatjuk az

$$f(x) = e^{2\pi i h r_1 \cos(2\pi x)}$$

függvényre és így (24) bal oldalára

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h G_n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h r_1 \cos(2\pi(\omega + n\Theta))}$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i h r_1 \cos(2\pi x)}\, dx$$

adódik.
De $h \neq 0$ esetén könnyen belátható, hogy

$$\int_0^1 e^{2\pi i h r_1 \cos(2\pi x)}\, dx \neq 0 ,$$

ezért a $\left(G_n\right)_{n=0}^{\infty} = \left(r_1 \cos\left(2\pi\,(\omega + n\Theta)\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat nem egyenletes eloszlású modulo 1.

A 2. TÉTEL bizonyítása

A $\mu = \left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényének a $0 \le x \le 1$ helyen felvett értéke definíció szerint:

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A\left([0,x); N; \mu\right) .$$

Jelöljük Ψ –vel a

$$\Psi\colon \Psi\left([a,b)\,;\, y\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad y \in [a,b), \\ 0, & \text{ha} \quad y \notin [a,b) \end{cases}$$

karakterisztikus függvényt. Használjuk a G_n (22) – beli alakját, jelöljük $\{y\}$ – nal az y valós szám törtrészét, így a $0 \le x \le 1$ számra

$$F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A\left([0,x); N;\, r_1 \cos\left(2\pi\,(\omega + n\Theta)\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \Psi\left([0,x); \{r_1 \cos(2\pi\,(\omega + n\Theta)\}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]} \Psi\left([j, j+x);\, r_1 \cos(2\pi\,(\omega + n\Theta))\right)\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1} \Psi\left([j, j+x)\,;\, r_1 \cos(2\pi(\omega + n\Theta))\right)\right)$$

$$+\ \Psi\left([[r_1],\min\{[r_1]+x,r_1\});\ r_1\cos(2\pi(\omega+n\Theta)\right)$$

$$+\ \Psi\left([-r_1,\max\{-r_1,[-r_1]+x\});\ r_1\cos(2\pi(\omega+n\Theta))\right)\Bigg)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}2\left(\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1}\Psi\left(\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j+x}{r_1},\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{j}{r_1}\right);\{\omega+n\Theta\}\right)\right.$$

$$+\ \Psi\left(\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1},\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{[r_1]}{r_1}\right);\{\omega+n\Theta\}\right)$$

$$+\ \Psi\left(\left[\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1},\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{-r_1}{r_1}\right);\{\omega+n\Theta\}\right)\Bigg).$$

Mivel a Θ irracionális szám, ezért $(\omega+n\Theta)_{n=0}^{\infty}$ egyenletes eloszlású modulo 1, így

$$\begin{aligned}F(x)=&\sum_{j=[-r_1]+1}^{[r_1]-1}\left(\frac{1}{\pi}\arccos\frac{j}{r_1}-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{j+x}{r_1}\right)\\&+\frac{1}{\pi}\arccos\frac{[r_1]}{r_1}-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\min\{[r_1]+x,r_1\}}{r_1}\\&+\frac{1}{\pi}\arccos\frac{-r_1}{r_1}-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\max\{-r_1,[-r_1]+x\}}{r_1}\\&=\sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]}\left(\frac{1}{\pi}\arccos\frac{K_j}{r_1}-\frac{1}{\pi}\arccos\frac{L_j(x)}{r_1}\right).\end{aligned}$$

Ezzel a 2 Tételt igazoltuk.

A 1. KÖVETKEZMÉNY bizonyítása:

A (3) és (20) relációkból

$$r_1=2\cdot\left|\frac{G_1-\beta G_0}{\alpha-\beta}\right|$$

következik.

Ha $G_0=0$, $G_1=j\cdot|\alpha-\beta|$, ahol $j\geq 1$ egész szám, akkor $r_1=2j\geq 2$ egész szám lesz.

Nyilvánvalóan kontinuum sok $A \in \mathbf{R}$ szám létezik a $-2 < A < 2$ és $\Theta = \frac{1}{2\pi}\arccos(A/2)$ irracionális feltételekkel, ezért az 1. Tétel feltételei kontinuum sok olyan G sorozatra teljesülnek, melynek diszkriminánsa: $D = A^2 - 4$ negatív, s ez az
1. Következményt igazolja.

A 3. TÉTEL bizonyítása:

Legyenek az x és q valós számok olyanok, melyekkel teljesül a

(25) $$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = sin(q\pi)$$

egyenlőség. Nem megy az általánosság rovására, ha feltételezzük, hogy $-\frac{1}{2} \le q \le \frac{1}{2}$.

Definiáljuk a g_n' sorozatot az

$$G_n x \equiv g_n' \qquad (\text{mod } 2)$$

kongruenciával és a $-1 < g_n' \le 1$ egyenlőtlenségrendszerrel. A (25) konvergencia miatt tetszőlegesen kicsiny pozitív ε valós számhoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $n \ge N$ esetén,
ha $q \ge 0$, akkor az

(26) $$\left| g_n' - q \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad q \ge 0 ,$$

vagy

(27) $$\left| g_n' - (1-q) \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad q \ge 0 ,$$

míg ha $q < 0$, akkor az

(28) $$\left| g_n' - q \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad q < 0 ,$$

vagy

(29) $$\left| g_n' - (-1-q) \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad q < 0$$

egyenlőtlenségek érvényesek, mivel $\sin(q\pi) = \sin((1-q)\pi)$ illetve $\sin(q\pi) = \sin((-1-q)\pi)$ egyenlőtlenségek igazak aszerint, hogy $0 \le q \le \frac{1}{2}$, illetve $-\frac{1}{2} \le q < 0$ feltételek közül melyik teljesül.

Ha a $|q| \ne \frac{1}{2}$ esetén az ε számot a

$$0<\varepsilon<\min\left\{\left|\frac{q-(1-q)}{2}\right|,\left|\frac{q-(-1-q)}{2}\right|\right\}$$

feltétel teljesülésével választjuk, akkor bármely $n\geq N=N(\varepsilon)$ esetén a (26), (27), (28) és (29) relációk közül pontosan egy teljesül.

Legyen $n\geq N$. Ha $|q|=\frac{1}{2}$, akkor legyen $g_n=q$. Ha viszont $|q|\neq\frac{1}{2}$, akkor legyen $g_n=q,\ 1-q,\ q,$ illetve $-1-q$ aszerint, hogy a (26), (27), (28) illetve (29) egyenlőtlenség rendszer teljesül.

A g_n' és a g_n sorozatok definíciójának következtében $n\geq N$ – re alkalmas p_n egész számmal teljesül a

(30) $$G_n x=2p_n+g_n'=2p_n+g_n+r_n$$

egyenlőség, ahol az r_n – et éppen a (30) – al definiáltuk, és nyilvánvalóan $|r_n|=|g_n'-g_n|<\varepsilon$ következik. Ekkor viszont $|r_n|\to 0$, ha $n\to\infty$. Ebből, és a $G_{n+2}-AG_{n+1}-BG_n=0$ azonosságból adódik, hogy az

(31) $$S_n=2p_{n+2}+g_{n+2}-A(2p_{n+1}+g_{n+1})-B(2p_n-g_n)=$$
$$=G_{n+2}x-r_{n+2}-A(G_{n+1}x-r_{n+1})-B(G_n x-r_n)=-(r_{n+2}-Ar_{n+1}-Br_n)$$

sorozat nullához tart, ha $n\to\infty$.

De mivel a g_i – nek csak két különböző értéke lehet, a p_i számok egészek, így $n\geq N$ esetén az S_n törtrésze csak véges sok értéket vehet fel. Így aztán

(32) $$S_n=0 \qquad \text{ha} \quad n\geq n_0\geq N\,.$$

A (31) és (32) egyenlőségekből látszik, hogy a $(2p_n+g_n)_{n=n_0}^{\infty}$ és az $(r_n)_{n=n_0}^{\infty}$ sorozatok másodrendű lineáris rekurzív sorozatok, x^2-Ax-1 karakterisztikus polinommal, és így a Binet-formula felhasználásával az $n\geq n_0$ értékekre

$$2p_n+g_n=a_1\alpha^{n-n_0}-b_1\beta^{n-n_0}$$

és

$$r_n=a_2\alpha^{n-n_0}-b_2\beta^{n-n_0}=-b_2\beta^{n-n_0}$$

összefüggéseket kapjuk. Itt felhasználtuk, hogy az $|\alpha|>|\beta|$, valamint az $|r_n|\to 0$, ha $n\to\infty$ maga után vonja az $a_2=0$ egyenlőséget.

Írjuk be a konkrét értékeket a (30) egyenlőségbe és akkor az

$$(a\alpha^n-b\beta^n)x=a_1\alpha^{n-n_0}-b_1\beta^{n-n_0}-b_2\beta^{n-n_0}$$

relációt kapjuk, amiből az

$$(\alpha / \beta)^{n-n_0}\,(a \times \alpha^{n_0} - a_1) = b \times \beta^{n_0} - b_1 - b_2$$

egyenlőség következik.

A jobboldalon egy konstans van, viszont az $\left|(\alpha/\beta)^{n-n_0}\right| \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ekkor viszont $(a \times \alpha^{n_0} - a_1) = 0$. Fejezzük ki az x – et és helyettesítsük be az a és a_1 konkrét értékét:

$$(33) \qquad x = \frac{a_1}{a \cdot \alpha^{n_0}} = \frac{2p_{n+1} + g_{n_0+1} - (2p_{n_0} + g_{n_0}\beta)}{(G_1 - G_0\beta) \cdot \alpha^{n_0}} = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (g_{n_0+1} - g_{n_0}\beta)}{(G_1 - G_0\beta) \cdot \alpha^{n_0}} \,,$$

ahol c_1 és c_2 egész számokat jelölnek.

A most következőkben meg fogjuk mutatni, hogy q eleget tesz a $2k/A$ vagy az $1 - 2k/A$ formának.

Mivel $\left(2p_n + g_n\right)_{n=n_0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozat $x^2 - Ax - 1$ karakterisztikus polinommal, ezért $i \geq n_0$ –ra valamely t_i egész számmal

$$(34) \qquad g_{i+2} = Ag_{i+1} + g_i + 2t_i \,.$$

A $\sin((-1-q)\pi) = \sin[((1-q)-2)\pi)] = \sin((1-q)\pi)$ következtében feltételezhetjük, hogy $g_j = q$ vagy $g_j = 1-q$, $(j = n_0, n_{0+1}, n_{0+2}, \ldots)$.

Ezeket figyelembe véve a (g_{n+2}, g_{n+1}, g_n) számhármasnak tetszőleges $n \geq n_0$ estén csak nyolc különböző értéke lehet:

(i) (q, q, q) ,
(ii) $(1-q, 1-q, 1-q)$,
(iii) $(q, 1-q, q)$,
(iv) $(1-q, q, 1-q)$,
(v) $(q, q, 1-q)$,
(vi) $(q, 1-q, 1-q)$,
(vii) $(1-q, 1-q, q)$,
(viii) $(1-q, q, q)$.

A (i) esetben az (34) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$q = Aq + q + 2t_n \,,$$

amiből $q = 2k/A$ következik alkalmas egész számmal.

Az (ii), (iii) és (iv) esetekben teljesen hasonlóan kapjuk a q – ra , hogy rendre $q = 1 - 2k/A$, $q = 1 - 2k/A$ és $q = 2k/A$.

A (v) esetben a $g_{n+2} = q$, $g_{n+1} = q$ és $g_n = 1 - q$ értékeket behelyettesítve az (34) – be az adódik, hogy $q = (2k + 1)/(A - 2)$, ahol k egy egész szám, továbbá $A - 2 \neq 0$, tekintve, hogy $2k + 1$ soha nem lehet nulla, amikor k egy egész szám. A $(g_n)_{n=n_0}^{\infty}$ sorozat következő eleme $g_{n+3} = q$ vagy $g_{n+3} = 1 - q$. De $g_{n+3} = q$ az (i) esetre vezet, ezért feltételezhetjük, hogy $g_{n+3} = 1 - q$. Ha az $(1 - q, q, q)$ számhármast helyettesítjük (34) – be, akkor az $q = (2h + 1)/(A + 2)$ összefüggéshez jutunk, ahol h egy egész szám és az előzőekhez hasonlóan $A + 2 \neq 0$, mert $2h + 1 \neq 0$. Így aztán ebben az esetben, vagyis a (v) esetén

$$q = \frac{2h + 1}{A + 2} = \frac{2k + 1}{A - 2} ,$$

ami maga után vonja a

$$2h + 1 = 2k + 1 + 4 \cdot \frac{2k + 1}{A - 2} = 2k + 1 + 4q$$

egyenlőséget.

Mivel $-1/2 \leq q \leq 1/2$ érvényes, ezért az előzőből $q = \pm 1/2$ adódik, továbbá szintén onnan kapjuk, hogy A egy páros szám, sőt a $4 \mid A$ reláció is érvényes. Ebben az esetben tehát A egy $4k$ alakú szám és q eleget tesz a $q = \pm 2k/A$ formának.

A (vi) , (vii) és (viii) esetekben hasonlóan lehet megmutatni, hogy valamely k egész számmal $q = 2k/A$ vagy $q = 1 - 2k/A$.

Mivel $\sin((2k/A)\pi) = \sin((1 - 2k/A)\pi)$ ezért a határérték minden egyes esetben a 3. Tételben mondottak szerint alakul és így a (33) értelmében

$$x = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (d_1 - d_2\beta)}{(G_1 - G_0\beta)\alpha^e} ,$$

ahol c_1, c_2 és e tetszőleges egész számok és $d_1, d_2 \in \{2k/A, 1 - 2k/A\}$, valamely k egész számmal.

Most meg fogjuk mutatni, hogy a feltételeink elégségesek. Tekintsük a $(\sin(G_n x\pi))_{n=0}^{\infty}$ sorozatot. Az $x = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (d_1 - d_2\beta)}{(G_1 - G_0\beta)\alpha^e}$ kifejezésben legyenek c_1, c_2 és e egész számok és valamely k egész számmal legyen

$d_i = 2k/A$ vagy $d_i = 1 - 2k/A$ $(i = 1, 2)$. Használjuk fel az $\alpha + \beta = A$ azonosságot. Valamely c_3 egész számmal x eleget tesz az alábbi formulának:

$$x = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (d_1 - d_2\beta)}{(G_1 - G_0\beta)\alpha^e} = \frac{2(c_3 + c_2\alpha) + d_1 - Ad_2 + d_2\alpha}{(G_1 - G_0\beta)\alpha^e} .$$

Felhasználva a $G_n = a\alpha^n - b\beta^n$ Binet formulát és az

$$a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta} \neq 0$$

relációt, azt kapjuk, hogy

$$G_n x = axa^n - bx\beta^n = 2c_3\frac{\alpha^{n-e} - \beta^{n-e}}{\alpha - \beta} + 2c_2\frac{\alpha^{n-e+1} - \beta^{n-e+1}}{\alpha - \beta}$$

$$- Ad_2\frac{\alpha^{n-e} - \beta^{n-e}}{\alpha - \beta} + d_1\frac{\alpha^{n-e} - \beta^{n-e}}{\alpha - \beta} + d_2\frac{\alpha^{n-e+1} - \beta^{n-e+1}}{\alpha - \beta}$$

$$- bx\beta^n + (2c_3 + 2c_2\beta - Ad_2 + d_1 + d_2\beta)\frac{\beta^{n-e}}{\alpha - \beta} .$$

Ebben a kifejezésben az $\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} = R_m$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak, az $R(A,1,0,1)$ sorozatnak az m – edik eleme, ezért az értékei, az $R = \left(R_m\right)_{m=0}^{\infty}$ elemei egész számok. Továbbá d_1 és d_2 racionális számok és a $|\beta| < 1$ következtében a $\beta^n \to 0$, ha $n \to \infty$. Ezekből és abból, hogy $\sin(r\pi) = \sin((1-r)\pi)$ az következik, hogy a $(\sin(G_n x\pi))_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak akkor és csakis akkor létezik a határértéke, ha az „elegendően nagy" n egész számokra

$$H_n \equiv - Ad_2 R_n + d_1 R_n + d_2 R_{n+1} \equiv r \quad \text{vagy} \quad 1 - r \pmod 2 ,$$

ahol r egy rögzített racionális szám. Ekkor a határérték: $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin(r\pi)$

A továbbiakban szükségünk lesz az $R(A,1,0,1)$ sorozat néhány tulajdonságára. Tetszőleges nem negatív m egész számra érvényes

$$R_{2m} \equiv 0 \pmod A$$

és

$$R_{2m+1} \equiv 1 \pmod A ,$$

amiből következik tetszőleges nem negatív n egész számra az

(35) $$R_n + R_{n+1} = t_1 A + 1 \ ,$$

tetszőleges pozitív páratlan számra az

(36) $$R_n - R_{n+1} = t_2 A + 1 \ ,$$

és tetszőleges nem negatív páros számra az

(37) $$R_n - R_{n+1} = t_3 A - 1$$

egyenlőség, ahol t_1, t_2 és t_3 alkalmas egész számokat jelölnek.

Ha A egy páros szám, akkor az $R(A,1,0,1)$ sorozatra

(38) $$R_{2n} \equiv 0 \pmod 2$$

és

(39) $$R_{2n+1} \equiv 1 \pmod 2 \ ,$$

míg ha A páratlan szám, akkor

(40) $$R_{3n} \equiv 0 \pmod 2$$

és

(41) $$R_{3n\pm1} \equiv 1 \pmod 2$$

teljesül minden nem negatív n egész számra.

Ezek egyrészt ismert tulajdonságok, másrészt bizonyításuk egyszerűen elvégezhető.

Legyen most először $d_1 = d_2 = 2k/A$. Ekkor $-Ad_2 R_n \equiv 0 \pmod 2$, így aztán a (35) felhasználásával tetszőleges nem negatív n egész számra igaz a

$$H_n \equiv \frac{2k}{A}(R_n + R_{n+1}) \equiv \frac{2k}{A} \pmod 2$$

kongruencia. A $d_1 = d_2 = 2k/A$ esetben ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n \times \pi) = \sin\left(\frac{2k\pi}{A}\right) .$$

A $d_1 = 2k/A$, $d_2 = 1 - 2k/A$ esetben

$$H_n \equiv -A\left(1 - \frac{2k}{A}\right)R_n + \frac{2k}{A}R_n + \left(1 - \frac{2k}{A}\right)R_{n+1}$$

$$\equiv -AR_n + R_{n+1} + \frac{2k}{A}\left(R_n - R_{n+1}\right) \pmod 2 \ .$$

Ha A páros, akkor $-AR_n \equiv 0 \pmod 2$, és az (36), (37), (38) és (39) relációkat felhasználva páratlan n – re

$$H_n \equiv \frac{2k}{A} \pmod 2$$

míg páros n – re

$$H_n \equiv 1 - \frac{2k}{A} \pmod 2 \ ,$$

így

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin((2k/A)\pi) = \sin((1-2k/A)\pi) \ .$$

Ha viszont A páratlan egész szám, akkor a (36) , (40) és (41) figyelembevételével az $n = 6t + 1$ alakú számokra

$$H_n \equiv \frac{2k}{A} \pmod 2 \ ,$$

az $n = 6t + 3$ alakú számokra viszont

$$H_n \equiv 1 + \frac{2k}{A} \pmod 2$$

és így páratlan A számok esetén a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$ határérték csak akkor létezik, ha $2k/A$ egész szám (ekkor a $q = 0$ érvényes).

A $d_1 = 1 - 2k/A$, $d_2 = 2k/A$ az előző esettel teljesen analóg módon tárgyalható, ezért itt csak a $d_1 = 1 - 2k/A$, $d_2 = 1 - 2k/A$ esettel foglalkozunk.

$$H_n \equiv -A\left(1 - \frac{2k}{A}\right)R_n + \left(1 - \frac{2k}{A}\right)\left(R_n + R_{n+1}\right)$$

$$\equiv -AR_n + R_n + R_{n+1} - \frac{2k}{A}\left(R_n + R_{n+1}\right) \pmod 2 \ .$$

Ha A páros szám, akkor a (35) , (38) és (39) felhasználásával bármely nemnegatív n egész számra igaz a

$$H_n \equiv 1 - \frac{2k}{A} \pmod 2$$

reláció, és így

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin\left(\left(1 - \frac{2k}{A}\right)\pi\right) = \sin\left(\frac{2k}{A}\pi\right) \ .$$

Ha A páratlan szám, akkor a $-A \cdot R_n + R_n \equiv 0 \pmod 2$ és $R_n + R_{n+1} \equiv 1 \pmod A$ bármely nem negatív n egész számra igaz, így minden n – re

$$H_n \equiv R_{n+1} - \frac{2k}{A} \pmod 2 .$$

Ebből az következik, hogy az $n = 3t - 1$ alakú egészekre

$$H_n \equiv -\frac{2k}{A} \pmod 2 ,$$

az $n = 3t$ és az $n = 3t + 1$ alakú számokra viszont

$$H_n \equiv 1 - \frac{2k}{A} \pmod 2 .$$

Így aztán a $\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$ határérték akkor és csakis akkor létezik, ha

$$\sin\left(-\frac{2k\pi}{A}\right) = \sin\left(\left(1 - \frac{2k}{A}\right)\pi\right)$$

vagyis ha a $2k/A$ egy egész szám.

Ezzel a 3. TÉTEL – t bebizonyítottuk.

A 4. TÉTEL bizonyítása

Tegyük fel, hogy a graf f mod 1 halmaz mindenütt sűrű a $0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$ egységnégyzeten. Legyenek az F és G nemcsökkenő függvények definiálva a $[0,1]$ zárt intervallumon úgy, hogy az $F(0)=G(0)=0$ és az $F(1)=G(1)=1$ feltételek teljesüljenek. Ismeretes, hogy ilyen feltételek esetén (KUIPERS és NIEDERREITER [19] pp. 138 – 139) létezik a $[0,1)$ itervallum csupa különböző eleméből álló $\sigma=(c_n)_{n=1}^{\infty}$ illetve $\varrho=(d_n)_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat, melynek mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F illetve G. Bontsuk fel a σ sorozatot blokkokra oly módon, hogy a k – adik blokk $(k = 1,2,3,\dots)$ pontosan azokat az elemeket tartalmazza, melyekre a $\frac{(k-1)k}{2} < n \le \frac{k(k+1)}{2}$ feltételek teljesülnek. A k – adik blokknak éppen k darab eleme van, melyeket – mivel különbözőek – nagyság szerint sorba tudjuk rendezni: $\alpha_1^{(k)} < \alpha_2^{(k)} < \dots < \alpha_k^{(k)}$. Teljesen hasonlóan bontsuk fel most a ϱ sorozatot blokkokra. A k – adik blokk azon d_n elemeket tartalmazza, melyek a $\frac{(k-1)k}{2} < n \le \frac{k(k+1)}{2}$ feltételeket kielégítik. A k – adik blokk elemeit most is növekvően rendezzük át és bevezetjük ezekre a $\beta_1^{(k)} < \beta_2^{(k)} < \dots < \beta_k^{(k)}$ jelölést. Mivel

a graf f mod 1 halmaz mindenütt sűrű a $0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$ egységnégyzeten, ezért léteznek a graf f mod 1 halmaznak olyan $P_j^{(k)}(x_j^{(k)}, y_j^{(k)})$ pontjai, melyekre az $\alpha_j^{(k)} < x_j^{(k)} < \alpha_{j+1}^{(k)}$ és a $\beta_j^{(k)} < y_j^{(k)} < \beta_{j+1}^{(k)}$ feltételek teljesülnek minden olyan j egész számra, melyre $1 \le j \le k-1$, továbbá $\alpha_k^{(k)} < x_k^{(k)} < 1$ és $\beta_k^{(k)} < y_k^{(k)} < 1$.

Ezek felhasználásával most definiáljuk a $\xi = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ és a $\mu = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatokat:

$$\xi:\ x_1^{(1)},\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}, \ldots$$

és

$$\mu:\ y_1^{(1)},\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, y_3^{(3)}, \ldots, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_k^{(k)}, \ldots\ .$$

Most megmutatjuk, hogy a ξ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye létezik, és az éppen F.

Mindenekelőtt a tetszőleges $0 \le \alpha < 1$ valós számra igazoljuk a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k(k+1)} A\left([0,\alpha);\ \frac{k(k+1)}{2};\ \xi\right) \le k = F(\alpha)$$

összefüggést.

Hasonlítsuk össze a σ és a ξ sorozatok k – adik blokkjait. A σ sorozat k – adik blokkjának $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_k^{(k)}$ – nak vagy ugyanannyi, vagy egyel több eleme van a $[0,\alpha)$ intervallumban, mint a ξ sorozat k – adik blokkjának, $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ – nak.

Így aztán

$$0 \le A\left([0,\alpha);\ \frac{k(k+1)}{2};\ \sigma\right) - A\left([0,\alpha);\ \frac{k(k+1)}{2};\ \xi\right) \le k\ ,$$

amiből

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k(k+1)} A\left([0,\alpha);\ \frac{k(k+1)}{2};\ \sigma\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k(k+1)} A\left([0,\alpha);\ \frac{k(k+1)}{2};\ \xi\right) = F(\alpha)$$

következik.

Legyen N egy pozitív egész szám, és definiáljuk a k egész számot a

$$\frac{k(k+1)}{2} \le N < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

egyenlőtlenségekkel. Ekkor viszont a

$$0 \le A\left([0,\alpha);N;\xi\right) - A\left([0,\alpha);\frac{k(k+1)}{2};\xi\right) \le k+1$$

összefüggést figyelembe véve írhatjuk, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left([0,\alpha);N;\xi\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2}{k(k+1)}A\left([0,\alpha);\frac{k(k+1)}{2};\xi\right) = F(\alpha)$$

Így aztán az F függvény valóban a $\xi = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye.

Hasonlóan lehet igazolni, hogy a G függvény a μ sorozat a.d.f. mod 1 – e . A bizonyítást most nem részletezzük.

Mivel $P_n(v_n, z_n) \in$ graf f mod 1 , ezért tetszőleges n pozitív egész számhoz léteznek olyan s_n és t_n egész számok, melyekkel $f(v_n + s_n) = z_n + t_n$.

Az F valamint a G függvények modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvényei az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (v_n + s_n)_{n=1}^{\infty}$ valamint a $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty} = (z_n + t_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatoknak, amivel a feltételek elégséges voltát beláttuk.

Most a feltételek szükségességét fogjuk igazolni.

Tegyük fel indirekt, hogy a graf f mod 1 halmaz nem mindenütt sűrű a $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ egységnégyzeten. Akkor van olyan $P_0(x_0, y_0)$ pont az egységnégyzetben $(0 < x_0, y_0 < 1)$ és olyan pozitív r valós szám , mellyel a P_0 pont r sugarú környezetében a graf f mod 1 halmaznak egyetlen pontja sem található. Válasszuk meg az r értékét olyan kicsinynek, hogy a P_0 pont r sugarú környezete teljes egészében a $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ egységnégyzetbe essen. Definiáljuk most az F illetve G függvényeket az alábbiak szerint:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le x \le x_0, \\ 1, & \text{ha } x_0 < x \le 1, \end{cases}$$

illetve

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le y \le y_0, \\ 1, & \text{ha } y_0 < y \le 1 \quad . \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy nem léteznek olyan $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ és $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ sorozatok, melyekkel az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat a.d.f. mod 1 – e F és a $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ sorozat a.d.f. mod 1 – e G függvény lenne. Ekkor ugyanis ha az $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot úgy választjuk, hogy mod 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye F legyen, és képezzük a $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, akkor

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left(\left[x_0, x_0+\frac{r}{2}\right);\ N\ ;\omega\right)=1$$

és

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left(\left[y_0, y_0+\frac{r}{2}\right);\ N\ ;\varphi\right)=0$$

érvényes, és ezért a $\varphi=\left(f(a_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak az a.d.f. mod 1 – e nem lehet a G függvény. Ezzel az ellentmondással a tételünk bizonyítása teljes.

Az 5. TÉTEL bizonyítása:

Először a feltételek szükségességét fogjuk bizonyítani.

Legyen f egy valós függvény és legyen $\omega=(u_n)_{n=1}^{\infty}$ egy olyan modulo 1 egyenletes eloszlású sorozat, melyre $\varphi=(f(u_n))_{n=1}^{\infty}$ sorozat szintén u.d. mod 1. Legyenek az $[a_1,b_1),[a_2,b_2),\ldots,[a_s,b_s)$ intervallumok a $[0,1)$ intervallumnak olyan részintervallumai, melyekre a $0\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_s<b_s<1$ és legyen

$$H_1=\left\{y\,\middle|\,\exists i,\exists x\in[a_i,b_i)\ ;(x,y)\in\text{graf } f \bmod 1\right\}$$

és

$$H_2=\left\{x\,\middle|\,\exists i,\exists y\in[a_i,b_i)\ ;(x,y)\in\text{graf } f \bmod 1\right\}.$$

Tegyük fel, hogy

$$m^*(H_1)<\sum_{i=1}^{s}(b_i-a_i),$$

ahol $m^*(H)$ a H halmaz Jordan féle külső mértékét jelöli.
Akkor létezik a $[0,1)$ intervallumnak véges sok $[c_1,d_1),[c_2,d_2),\ldots,[c_k,d_k)$ részintervalluma, melyek lefedik a H_1 halmazt és a hosszaik összegére teljesül a

$$\sum_{i=1}^{k}(d_i-c_i)<\sum_{j=1}^{s}(b_j-a_j)$$

reláció.
Minthogy az ω sorozat u.d. mod 1 , ezért a j = 1, 2, . . . , s értékekre

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left([a_j,b_j)\ ;N\ ;\omega\right)=b_j-a_j$$

és így mivel az $[a_j,b_j)$ intervallumok (j = 1, 2, . . . , s) páronként diszjunktak,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left(\bigcup_{j=1}^{s}[a_j,b_j)\,;N\,;\omega\right)=\sum_{j=1}^{s}(b_j-a_j)$$

adódik.

Feltételeink szerint az $\{u_n\}\in[a_i,b_i)$ relációból $f(u_n)\in H_1$ következik, ezért azt kapjuk, hogy

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}A\left([c_i,d_i)\,;N\,;\varphi\right)\geq\sum_{j=1}^{s}(b_j-a_j)>\sum_{i=1}^{k}(d_i-c_i)\ .$$

Ezekből következik, hogy van olyan i_0 index, melyre

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A\left([c_{i_0},d_{i_0})\,;N\,;\varphi\right)>d_{i_0}-c_{i_0}\,.$$

Akkor viszont a $\varphi=\left(f(u_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ sorozat nem modulo 1 egyenletes eloszlású. Ez az ellentmondás az (10) reláció szükséges voltát igazolja. A (11) reláció szükségessége analóg módon látható be.

Legyen most az f egy olyan valós függvény, mely eleget tesz a tétel feltételeinek. Bontsuk fel a $0\leq x<1,\ 0\leq y<1$ egységnégyzetet k^2 darab $\Gamma_{i,j}^{(k)}$ tartományra úgy, hogy a $\Gamma_{i,j}^{(k)}$, $1\leq i,j\leq k$ pontosan azokat az (x,y) pontokat tartalmazza, melyekre az $\frac{i-1}{k}\leq x<\frac{i}{k}$ és $\frac{j-1}{k}\leq y<\frac{j}{k}$ relációk érvényesek. Az egységnégyzetnek ez a partícionálása és az f függvény definiálnak egy $k\times k$ típusú $\Gamma^{(k)}$ mátrixot, melynek $\gamma_{i,j}$, $1\leq i,j\leq k$ elemei:

$\gamma_{i,j}=1$ ha van olyan $(x,y)\in\Gamma_{i,j}^{(k)}$ melyre $(x,y)\in\operatorname{graf} f \bmod 1$, továbbá $\gamma_{i,j}=0$ ha minden $(x,y)\in\Gamma_{i,j}^{(k)}$ esetén $(x,y)\notin\operatorname{graf} f \bmod 1$.

Az (10) és (11) fennállása miatt a $\Gamma^{(k)}$ mátrix bármely s darab oszlopához létezik s darab sor, úgy hogy közülük minden egyes sornak van legalább egy nem zérus közös eleme az s darab oszlop valamelyikével, továbbá bármelyik s darab sorhoz létezik s darab oszlop úgy, hogy ezen oszlopok mindegyikének van az s sor közül legalább egyel közös nem zérus eleme. Ezért ki tudunk választani a $\Gamma^{(k)}$ mátrix elemei közül k darab $\gamma_{i,j}=1$ elemet melyek különböző sorokban és különböző oszlopokban helyezkednek el. Ezekhez a $\gamma_{i,j}$ elemekhez válasszunk a $\Gamma_{i,j}^{(k)}$ tartományokból olyan $(x_{i,j}^{(k)},y_{i,j}^{(k)})$ pontokat, melyekre

$(x_{i,j}^{(k)}, y_{i,j}^{(k)}) \in \text{graf } f \bmod 1$ teljesül. A Nyilvánvalóan különböző $x_{i,j}^{(k)}$ számoknak legyen

$$\omega_1^{(k)} < \omega_2^{(k)} < \ , \ldots , \ < \omega_k^{(k)}$$

a nagyság szerinti elrendezettje.
Jelöljük rendre

$$\delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots, \delta_k^{(k)}$$

–val a megfelelő y értékek sorozatát. A $\text{graf } f \bmod 1$ halmaz definíciója miatt léteznek olyan $p_{i,j}^{(k)}, q_{i,j}^{(k)}$ egész számok, melyekkel

$$(x_{i,j}^{(k)} + p_{i,j}^{(k)} \ , \ y_{i,j}^{(k)} + q_{i,j}^{(k)}) \in \text{graf } f \ .$$

Minden $\omega_t^{(k)}$ érték (t = 1, 2, . . . , k) azonos valamelyik $x_{i,j}^{(k)}$ értékkel, így definiálhatjuk az $u_t^{(k)}$ számokat az $u_t^{(k)} = x_{i,j}^{(k)} + p_{i,j}^{(k)}$ formulával, ahol $x_{i,j}^{(k)} = \omega_t^{(k)}$ és $p_{i,j}^{(k)}$ azonos a fentebb mondottakkal.

Tekintsük az

(42) $$u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_1^{(3)}, u_2^{(3)}, u_3^{(3)}, \ldots, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_k^{(k)}, \ldots$$

és a

(43) $$\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}, \delta_2^{(2)}, \delta_1^{(3)}, \delta_2^{(3)}, \delta_3^{(3)}, \ldots, \delta_1^{(k)}, \delta_2^{(k)}, \ldots, \delta_k^{(k)}, \ldots$$

sorozatokat. Jelöljük a (42) sorozat n – edik elemét u_n – el, a (43) sorozat n – edik elemét δ_n – el. Meg fogjuk mutatni, hogy az $\omega = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ és a $\varphi = (f(u_n))_{n=1}^{\infty}$ sorozatok egyaránt modulo 1 egyenletes eloszlású sorozatok.

Tekintsük most azt a $\mu = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, melynek tagjai

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$$

A $\mu = (\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat mod 1 egyenletes eloszlású (vö.: L. KUIPERS and H. NIEDERREITER [19] p. 7, Problem 1. 13). Bontsuk most fel blokkokra a μ, ω, φ sorozatokat úgy, hogy az m – edik blokk azon elemeket tartalmazza, melyek indexeire az $\frac{(m-1)m}{2} < n < \frac{m(m+1)}{2}$ relációk teljesülnek. A sorozatainkra definíciói szerint

$$\mu_1^{(m)} \le \omega_1^{(m)} < \mu_2^{(m)} \le \omega_2^{(m)} < \ldots \ \mu_m^{(m)} \le \omega_m^{(m)}$$

és

$$\mu_1^{(m)} \le \delta_{i_1}^{(m)} < \mu_2^{(m)} \le \delta_{i_2}^{(m)} < \ldots \ \mu_m^{(m)} \le \delta_{i_m}^{(m)}$$

következik, ahol $\mu_i^{(m)}$ a μ sorozat m – edik blokkjának i – edik eleme, és $i_1, i_2, \ldots, i_m$ az (1, 2, . . . , m) elemeknek egy permutációja, tehát $\delta_{i_1}^{(m)}, \delta_{i_2}^{(m)}, \ldots, \delta_{i_m}^{(m)}$ egy permutációja a φ sorozat mod 1 redukáltja m – edik blokkjának.

Legyen N (> 2) egy egész szám, és legyen a k természetes szám definiálva a $\frac{k(k+1)}{2} \le N < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ formulával. A $0 < \alpha \le 1$ feltételek szerinti α számhoz jelöljük $A(\alpha, m, \zeta)$ – vel a $\zeta = (\zeta_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat azon ζ_n elemeinek a számát, melyek a ζ sorozat m – edik blokkjában találhatók, továbbá a $0 \le \zeta_n < \alpha$ feltételeket is teljesítik. Akkor

$$A(\alpha\ ,\ m\ ,\ \mu) - A(\alpha\ ,\ m\ ,\ \omega) = 0 \ \text{ vagy } \ 1$$

és

$$A(\alpha\ ,\ m\ ,\ \mu) - A(\alpha\ ,\ m\ ,\ \varphi) = 0 \ \text{ vagy } \ 1$$

érvényes m = 1, 2, . . . , k esetén. Hasonló relációkat írhatunk fel a μ és ω sorozatokra, ha a k – adik blokk utolsó elemétől az N – edik elemig található elemeket tekintjük.

Viszont a $\delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat nincs átrendezve nagyság szerint, így csak azt írhatjuk, hogy

$$0 \le A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \mu) - A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \omega) \le k+1$$

és

$$0 \le A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \mu) - A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \varphi) \le k+k+1\ .$$

Ezekből

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \omega) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \mu)$$

és

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \varphi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} A([0,\alpha)\ ;\ N\ ;\ \mu)$$

következik.

Mivel a μ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású, ezért az ω és a φ sorozatok is modulo 1 egyenletes eloszlású sorozatok, amivel a tételünk bizonyítása teljes.

A 6. TÉTEL bizonyítása:

A $[0,x)$ intervallumhoz tartozó karakterisztikus függvényt jelöljük χ – vel:

$$\chi : \chi(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 \le \{y\} < x \le 1, \\ 0, & \text{ha} \quad x \le \{y\}. \end{cases}$$

Ezen jelöléssel az $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye

$$F: F(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(x,a_n) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \quad ,$$

ha ez a határérték létezik.

A $D_N^*(a_n)$ diszkrepancia pedig

$$\Delta_N(a_n) = D_N^*(a_n) = \sup_{0<x\le 1} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi(x,a_n) - x \right| .$$

Technikai megfontolások miatt ebben a bizonyításban a Θ és az r_1 nem ugyanazt jelöli, mint amit az 1. és 2. tétel bizonyításában jelölt.

Legyen a G egy olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozat mely kielégíti a 6. tétel feltételeit. A Θ egy írracionális szám, ezért sorozatunk nem degenerált. Kiss Péter [10] – ben bizonyította, hogy a G nemdegenerált sorozat maximum egy zéruselemet tartalmaz. Egyetlen elem nem releváns a modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvény szempontjából, ezért az általánosság csorbítása nélkül feltételezhetjük, hogy $G_n \neq 0$, ha $n \ge 0$.

Mivel $D = A^2 + 4B < 0$ az (2) – ben α és β valamint a és $-b$ komplex konjugalt számok, ezért

(44) $\alpha = r\exp(i\pi\Theta)$, $\beta = r\exp(-i\pi\Theta)$

és

(45) $a = r_1\exp(i\pi\omega)$, $b = -r_1\exp(-i\pi\omega)$,

ahol exp x a természetes alapú exponenciális függvényt jelöli,

$$0 < \Theta = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{-D}}{A} < 1 \quad , \quad \omega = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{AG_0 - 2G_1}{G_0\sqrt{-D}}$$

és r, r_1 pozitív valós számok ($r_1 \neq 0$ ugyanis $D < 0$) és így $a \cdot b \neq 0$ is érvényes .

A (2) Binet-formula, (44) és (45) felhasználásával minden $n \ge \max\{0,-k\} = n_0$ természetes számra

$$\frac{G_{n+k}}{G_n} = \frac{r_1 r^{n+k}\exp(i\pi(\omega+(n+k)\Theta)) + r_1 r^{n+k}\exp(-i\pi(\omega+(n+k)\Theta)}{r_1 r^n\exp(i\pi(\omega+n\Theta)) + r_1 r^n\exp(-i\pi(\omega+n\Theta))}$$

$$= r^k \frac{\cos(\pi(\omega+(n+k)\Theta))}{\cos(\pi\ (\omega+n\ \Theta))} = r^k(\cos(\pi k\Theta)-\sin(\pi k\Theta)\cdot\tan(\pi(\omega+n\Theta))) =$$

$$= c+d\tan(\pi(\omega+n\Theta))$$

adódik, ahol $c=r^k\cos(k\pi\Theta)$, $d=-r^k\sin(k\pi\Theta)$ n – től független, zérustól különböző valós számok.

Definiáljuk a tetszőleges $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ valós számhoz a Φ függvényt:

$$\Phi:\Phi(y)=\begin{cases}\operatorname{tg}(\pi y), & \text{ha } \{y\}\le\frac{1}{2}-\varepsilon \text{ vagy } \frac{1}{2}+\varepsilon\le\{y\},\\ \frac{-c}{d}, & \text{ha } \frac{1}{2}-\varepsilon<y<\frac{1}{2}+\varepsilon\ .\end{cases} \tag{46}$$

Legyen továbbá

$$\begin{cases}\Psi_1(x,y)=\chi(x,c+d\,tg(\pi(y+\omega))),\\ \Psi_2(x,y)=\chi(x,c+d\,\Phi(y+\omega))\ .\end{cases} \tag{47}$$

A Ψ_1 és Ψ_2 függvények argumentumaiban található egységnyi periódushosszú $c+d\operatorname{tg}(\pi(y+\omega))$ és $c+d\,\Phi(y+\omega)$ függvények egy periódushosszon belül csak egy 2ε hosszúságú intervallumon különböznek egymástól. Valamely $0\le\delta_1\le1$ számmal

$$\int_0^1[\Psi_2(x,y)-\Psi_1(x,y)]\,dy=2\delta_1\varepsilon \tag{48}$$

érvényes. Az

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}[\Psi_1(x,n\Theta)-\Psi_2(x,n\Theta)]$$

különbség nagyságának becsléséhez az $(n\Theta)_{n=1}^{\infty}$ mod 1 egyenletes eloszlású sorozat $\Delta_N=\Delta_N(n\Theta)$ diszkrepanciájára is szükség van.

(49) $$\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}[\Psi_1(x,n\Theta)-\Psi_2(x,n\Theta)]=2\delta_2\varepsilon+2\delta_3\Delta_N\ ,$$

ahol $-1\le\delta_2\le 0$ és $|\delta_3|\le 1$.

Akkor viszont a (48) és (49) egyenlőségeket összeadva és átrendezve

(50) $$\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\Psi_1(x,n\Theta)-\int_0^1\Psi_1(x,y)dy$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\Psi_2(x,n\Theta)-\int_0^1\Psi_2(x,y)dy+2\delta_4\varepsilon+2\delta_3\Delta_N\ .$$

ahol $\left|\delta_4\right|\le 1$.

A $\Psi_2: y\to\Psi_2(x,y)$ függvény (rögzített x esetén) a [0, 1] intervallumon korlátos változású, melynek V „változására" felső becslést adunk.

A Ψ_2 a véges sok szakadási pont kivételével konstans (0 vagy 1). A szakadási pontok számára könnyű felső korlátot adni:

$$4\cdot\left(1+\left|d\right|\mathrm{tg}(\pi(\frac{1}{2}-\varepsilon))\right)\le 4\cdot\left(1+\frac{\left|d\right|}{\sin(\pi\varepsilon)}\right)\le 4\cdot\left(1+\frac{\left|d\right|}{2\varepsilon}\right)$$

Ezeket figyelembe véve

(51) $$V\le 4\cdot\left(\frac{\left|d\right|}{2\varepsilon}+1\right).$$

Alkalmazhatjuk a Koksma egyenlőtlenséget (L. KUIPERS and H. NIEDERREITER [19], 143. old.)

(52) $$\left|\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\Psi_2(x,n\Theta)-\int_0^1\Psi_2(x,y)dy\right|\le V\Delta_N\le 4\Delta_N\left(\frac{\left|d\right|}{2\varepsilon}+1\right)$$

Az (50) és (52) relációkból tetszőleges $0<\varepsilon<1/2$ – re

$$\left|\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\Psi_1(x,n\Theta)-\int_0^1\Psi_1(x,y)\,dy\right|$$

$$\le 4\Delta_N\left(\frac{|d|}{2\varepsilon}+1\right)+2\Delta_N+2\varepsilon=\Delta_N\left(\frac{2|d|}{\varepsilon}+6\right)+2\varepsilon\ .$$

A $\xi=(n\Theta)_{n=1}^{\infty}$ sorozat u. d. mod 1, ezért $\Delta_N\to 0$ $(N\to\infty)$. Alkalmasan választott N_0 esetén $\left(|d|\Delta_N\right)^{1/2}<\frac{1}{2}$, ha $N>N_0$, ezért $\varepsilon=\left(|d|\Delta_N\right)^{1/2}$ választással $N>N_0$ esetén $0<\varepsilon<1/2$ teljesül. Ekkor

(53) $$\left|\frac{1}{N}\cdot\sum_{n=n_0}^{N+n_0-1}\Psi_1(x,n\Theta)-\int_0^1\Psi_1(x,y)\,dy\right|$$

$$\le 4|d|^{1/2}\Delta_N{}^{1/2}+6\Delta_N=4\cdot\left(\sqrt{\left|r^k\sin(k\pi\Theta)\right|}\right)\sqrt{\Delta_N}+6\Delta_N\ .$$

Most kiszámoljuk a

(54) $$H(x)=\int_0^1\chi(x,c+d\,\mathrm{tg}(\pi(y+\omega))\,dy=\int_{-1/2}^{1/2}\chi(x,c+d\,\mathrm{tg}(\pi(y+\omega))\,dy$$

integrál értékét a $c=0$ esetben.
Az $u=d\,\mathrm{tg}(\pi y)$ helyettesítés után a

(55) $$H_2(x)=\frac{|d|}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(x,u)}{d^2+u^2}\,du\qquad 0\le x\le 1$$

összefüggésre jutunk.
Használjuk fel a χ karakterisztikus függvény

$$\chi(x,u)=x+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi mx)}{m}\cos(2\pi mu)$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos(2\pi mx)}{m}\sin(2\pi mu)$$

Fourier sorát és az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m u)}{d^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{|d|}\exp(-2\pi m|d|) \quad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi m u)}{d^2+u^2}\,du = 0$$

integrál formulákat (ld. H. B. DWIGHT [4]) .

Lebesgue konvergencia tételét alkalmazzuk, felcserélhetjük az integrálás és az összegzés sorrendjét, és így

$$H_2(x)=x+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi m x)}{m}\exp(-2\pi m|d|)=x+\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{m}$$

adódik, ahol $w=\exp(2\pi(-|d|+ix))$.

A $-|d|<0$ miatt $|w|<1$ és $\mathrm{Re}(1-w)>0$ következik, amiért is

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w^m}{m}=-\log(1-w)$$

Az $\Im(1-w)=\exp(-2\pi|d|)\sin(2\pi x)$ és

$\Re(1-w)=1-\exp(-2\pi|d|)\cos(2\pi x)$ relációkból az

$$H_2(x)=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\exp(-2\pi|d|)\sin(2\pi x)}{1-\exp(-2\pi|d|)\cos(2\pi x)}$$
$$=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi|d|)-\cos(2\pi x)}.$$

egyenlőség következik.

Legyen most

$$H_1: H_1(x)=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi|d|)-\cos(2\pi x)} \quad , \quad x\in\mathbf{R}$$

Felhasználva a $H_1(-x)=-H_1(x)$,valamint a

$H(x)=H_1(x-\{c\})-H_1(\{-c\})=H_1(x-\{c\})+H_1(\{c\})$ összefüggéseket, a tétel bizonyítása teljes lesz.

A 7. TÉTEL bizonyítása:

Legyen a G egy olyan sorozat, mely a 7. Tétel feltételeit kielégíti. Akkor a $(G_{n+1}/G_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye a [13] szerint

$$F(x)=F_1(x-\{A/2\})+F_1(\{A/2\}),$$

ahol

$$F_1(x)=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp(\pi\sqrt{-D})-\cos(2\pi x)}.$$

Érvényes az

$$\omega=(G_n/G_{n+1})_{n=o}^{\infty}=(G_{n-1}/G_n)_{n=1}^{\infty}=\xi$$

összefüggés és ezért az ω és ξ sorozatok esetén az a.d.f. mod 1 egyaránt létezik és azonos. Használhatjuk az 6. TÉTEL eredményét $k=-1$ helyettesítéssel.

Ha viszont, $k=-1$ akkor $c=r^{-1}\cos(-\pi\Theta)=\frac{r\cos(\pi\Theta)}{r^2}=-\frac{A}{2B}$ és

$$d=-r^{-1}\sin(-\pi\Theta)=\frac{r\sin(\pi\Theta)}{r^2}=-\frac{\sqrt{-D}}{2B}.$$

Így $H(x)=H_1(x-\{-A/2B\})+H_1(\{-A/2B\})$,

ahol $H_1(x)=x+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp\left(\pi\sqrt{-D}/(-B)\right)-\cos(2\pi x)}$ $(x\in\mathbf{R})$.

Most meg fogjuk határozni annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az

(56) $F(x)=H(x)\quad 0\le x\le 1$

egyenlőség fennálljon.

Mindenekelőtt kiszámoljuk az F és H függvények deriváltját:

(57) $$F'(x)=1+2\cdot\frac{E_1\cos(2\pi(x-\{A/2\}))-1}{E_1^2-2E_1\cos(2\pi(x-\{A/2\}))+1}$$

és

(58) $$H'(x)=1+2\cdot\frac{E_2\cos(2\pi(x-\{-A/(2B)\}))-1}{E_2^2-2E_2\cos(2\pi(x-\{-A/(2B)\}))+1}$$

adódik, ahol

$$E_1=\exp(\pi\sqrt{-D}\,)\quad\text{és}\quad E_2=\exp(\pi\sqrt{-D}/(-B)).$$

Az F' függvénynek az $\{A/2\}$ pontban, a H' függvénynek az $\{-A/(2B)\}$ pontban van a maximuma. De a (56) értelmében $F' = H'$. Ez viszont csak úgy lehet, ha $\{A/2\} = \{-A/(2B)\}$.

Ezt a közös értéket jelöljük x_0 – lal : $x_0 = \{A/2\} = \{-A/(2B)\}$.

Ekkor

$$F(x_0) = F_1(0) + F_1(\{A/2\}) = F_1(\{A/2\})$$

és

$$H(x_0) = H_1(0) + H_1(\{-A/(2B)\}) = H_1(\{-A/(2B)\}) \ .$$

Másrészről ezekből $\{A/2\} = \{-A/(2B)\}$ miatt

$$F_1(\{A/2\}) = H_1(\{A/2\})$$

következik, ami maga után vonja az

$$\exp\left(\pi\sqrt{-D}\right) = \exp\left(\pi\sqrt{-D}/(-B)\right)$$

egyenlőséget, így az exp függvény kölcsönösen egyértelmű tulajdonságát felhasználva $B = -1$.

Ha viszont $B = -1$, az $F(x)=H(x)$ $0 \le x \le 1$ triviálisan igaz. A $B = -1$ feltétel tehát a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 reciprokinvariáns eloszlású legyen.

Ezzel 7. TÉTELT bebizonyítottuk.

A 8. TÉTEL bizonyítása:

A tételben szereplő G sorozat karakterisztikus polinomjának α és β zérushelyére tételezzük fel az $|\alpha| \ge |\beta|$ relációt. A 8. Tétel feltételei szerint D > 0, ezért $|\alpha| > |\beta|$. Az $\alpha\beta = -B \in \mathbf{Z}$ és a $B \ne 0$ – ból $|\alpha| > 1$ következik.

Akkor viszont a $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ és $\left(G_n/G_{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ egyaránt konvergens (F. MÁTYÁS [22]).

Nevezetesen,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\alpha^{n+1} - b\beta^{n+1}}{a\alpha^n - b\beta^n} = \lim_{n\to\infty}\alpha\cdot\frac{1-(b/a)(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(b/a)(\beta/\alpha)^n} = \alpha$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{G_{n+1}}=\frac{1}{\alpha}.$$

Ez utóbbi két határértékből az következik, hogy a $(G_{n+1}/G_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat csak akkor lehet reciprokinvariáns eloszlású modulo 1 , ha $\alpha\equiv 1/\alpha \pmod 1$.
Ha $\alpha>1$, akkor $0<(1/\alpha)<1$, ezért létezik olyan c pozitív egész szám , melyre $\alpha-c=1/\alpha$.
Ha az egyenletet megszorozzuk α – val azt kapjuk, hogy

(59) $\alpha^2-c\alpha-1=0$.

Ha viszont $\alpha<-1$, akkor $-1<(1/\alpha)<0$, és így

(60) $\alpha^2-(c-1)\alpha-1=0$ ahol $c\in\mathbf{Z}$.

Van tehát olyan A egész szám, hogy α az

(61) $x^2-Ax-1=0$

egyenletnek a gyöke.

A 8. tétel feltételei szerint a G sorozat paraméterei egész számok, és a (61) $\alpha>1$ és $\alpha<-1$ esetén egyaránt a G sorozat karakterisztikus egyenlete, amiből látható, hogy a $B=1$ feltétel szükséges feltétel.

Egyszerű számolással belátható, hogy ha $|\alpha|>1$ és $B=1$, a $(G_{n+1}/G_n)_{n=0}^{\infty}$ és a $(G_n/G_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ sorozatok mindegyike alternálva közelít a határértékéhez, tehát annál felváltva nagyobb, illetve kisebb.
Akkor viszont mindkét sorozatnak létezik a modulo 1 aszimptotikus eloszlásfüggvénye és az mindkét esetben

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } 0\le x<\{\alpha\},\\ 1/2, & \text{ha } x=\{\alpha\},\\ 1, & \text{ha } \{\alpha\}<x\le 1.\end{cases}$$

Ezzel a 8. tételt bizonyítottuk.

A 9. TÉTEL bizonyítása:

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az $|B|=1$ egy szükséges feltétel. A karakterisztikus polinom zérushelyeit jelöljük $\alpha-$ val és $\beta-$ val, az $|\alpha| \geq |\beta|$ relációnak megfelelően.
A (2) alapján teljesül, hogy $G_n = a_1\alpha^n - b_1\beta^n$ és $H_n = a\alpha^n - b\beta^n$, ahol

$$a_1 = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha-\beta}, \quad b_1 = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha-\beta}, \quad a = \frac{H_1 - H_0\beta}{\alpha-\beta}, \quad b = \frac{H_1 - H_0\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Most a $D \neq 0$ miatt $|\alpha|>|\beta|$, ezért

$$t - \frac{G_{n+1}}{H_n} = t - \frac{a_1\alpha^{n+1} - b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n - b\beta^n} = \frac{a\,t\,\alpha^n - a_1\alpha^{n+1} - b\,t\,\beta^n + b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n - b\beta^n}$$

$$= \frac{at - a_1\alpha - (bt - b_1\beta)(\beta/\alpha)^n}{a - b(\beta/\alpha)^n} \to \frac{at - a_1\alpha}{a}, \quad \text{ha} \quad n \to \infty .$$

Másrészt, $0 \leq \left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c\,H_n^2} \quad \Rightarrow \quad t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$, ugyanis $|\alpha| > 1$ miatt $H_n^2 \to \infty \quad (n \to \infty)$.

Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet, ezért $\frac{at - a_1\alpha}{a} = 0$, vagyis

(62) $$at - a_1\alpha = 0 .$$

(Egyszerű számolással könnyen belátható, hogy a 9. tétel – ben szereplő sorozatokra az (62) teljesül.)
Ebből az következik, hogy

(63) $$t - \frac{G_{n+1}}{H_n} = \frac{-b\,t\,\beta^n + b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n - b\beta^n} .$$

Szorozzuk meg az $\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c\,H_n^2}$ egyenlőtlenséget H_n^2- vel majd használjuk fel a (63) – at, akkor a

(64) $$\frac{1}{c} > \left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| \cdot H_n^2 = \left| \frac{-b\,t\,\beta^n + b_1\,\beta^{n+1}}{a\,\alpha^n - b\beta^n} \right| \left(a\,\alpha^n - b\beta^n\right)^2$$

$$= \left| \left(b\,t\,\beta^n - b_1\,\beta^{n+1}\right)\left(a\,\alpha^n - b\beta^n\right) \right| = \left| (\alpha\beta)^n \right| \left| bt - b_1\beta \right| \left| a - b(\beta/\alpha)^n \right|$$

relációkat kapjuk.

A $bt - b_1\beta \neq 0$, ugyanis a $bt - b_1\beta = 0$ (64) értelmében maga után vonja a $t = \frac{G_{n+1}}{H_n} \in \mathbf{Q}$ összefüggést, amit a tételünk feltételei nem engednek meg. A $\lim_{n\to\infty} \left(a - b(\beta/\alpha)^n\right) = a$ és $bt - b_1\beta$ = konstans érvényes. A (64) végtelen sok n egészre teljesül és ezért $\left|(\alpha\beta)^n\right| = \left|(\alpha\beta)\right|^n = \left|-B\right|^n = 1$, vagyis $\left|B\right| = 1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $\left|B\right| = 1$ reláció a tételünk szükséges feltételét jelenti.

Megjegyezzük, hogy a $\left|B\right| = 1-$ből $\left|\beta\right| < 1$ következik.

Legyen most $\left|B\right| = 1$.

Ha a (64) – ben elvégezzük a beszorzásokat, akkor

$$\frac{1}{c} > \left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| \cdot H_n^2 = \left| \left(bt - b_1\beta\right) \right| \left| a\left(-B\right)^n - b\beta^{2n} \right|$$

adódik.

Ha a H_n sorozatnak az 9. tétel – ben szereplő $H(A, B, 0, qsB)$ alakját felhasználjuk, akkor

$a = \frac{H_1 - H_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{H_1}{\alpha - \beta}$, $b = \frac{H_1 - H_0\alpha}{\alpha - \beta} = \frac{H_1}{\alpha - \beta}$, és így (62)– ből $t = \frac{a_1\alpha}{a}$.

Akkor

(65) $$\frac{1}{c} > \left| \left(b\,\frac{a_1\alpha}{a} - b_1\beta \right) \right| \left| a\left(-B\right)^n - b\beta^{2n} \right| = \left| a_1\alpha - b_1\beta \right| \left| a\left(-B\right)^n - b\beta^{2n} \right|$$

$$= \left| G_1 \right| \left| a\left(-B\right)^n - b\beta^{2n} \right| = \left|G_1\right| \left| \frac{H_1(-B)^n - H_1\beta^{2n}}{\alpha - \beta} \right| = \left| \frac{G_1\,H_1}{\alpha - \beta} \right| \left| (-B)^n - \beta^{2n} \right|$$

$$= \begin{cases} \left|\frac{G_1 H_1}{\sqrt{D}}\right| \left|1-\beta^{2n}\right| = \left|\frac{|pq|s^2}{\sqrt{D}}\right| \left|1-\beta^{2n}\right| & , \text{ ha } B=-1 , \\ \left|\frac{G_1 H_1}{\sqrt{D}}\right| \left|(-1)^n-\beta^{2n}\right| = \left|\frac{|pq|s^2}{\sqrt{D}}\right| \left|(-1)^n-\beta^{2n}\right| & , \text{ ha } B=1 , \end{cases}$$

ahol $\sqrt{D} = \sqrt{A^2+4B}$.

Ha $B=-1$, (65) akkor és csak akkor teljesül minden egész n – re, ha

$$c \le \frac{\sqrt{D}}{|pq|s^2} = \frac{\sqrt{A^2-4}}{|pq|s^2} = c_0$$

Ha $B=1$ az (65) akkor és csak akkor teljesül végtelen sok egész n – re, ha $c \le \frac{\sqrt{D}}{|pq|s^2} = \frac{\sqrt{A^2+4}}{|pq|s^2} = c_0$ (Ha $c \le c_0$, akkor (65) minden nemnegatív páros számra teljesül).

Mivel a tétel második részét a $|B|=1$ feltétel mellett bizonyítottuk, a 9. tétel feltételeinek szükséges és elégséges voltát beláttuk.

A 10. TÉTEL bizonyítása

Jelölje α és β az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet két gyökét, ahol $|\alpha| \ge |\beta|$. A (2) és a (3) formulák alapján

$$G_{n+1} = a_1\alpha^{n+1} - b_1\beta^{n+1} \quad \text{és} \quad H_n = a\alpha^n - b\beta^n$$

minden $n \ge 0$ egész számra érvényes, ahol

$$a_1 = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha-\beta} = \frac{psB - qr\beta}{\alpha-\beta} , \qquad b_1 = \frac{psB - qr\alpha}{\alpha-\beta}$$

és

$$a = \frac{qsB - 0\beta}{\alpha-\beta} = \frac{qsB}{\alpha-\beta} , \qquad b = \frac{qsB}{\alpha-\beta} .$$

Tegyük fel, hogy valamely $n > 0$ egész számmal és c valamint k pozitív valós számokkal

(66) $$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c\left|H_n\right|^k}$$

érvényes.
Helyettesítsük be a sorozatok explicit értékeit és használjuk fel a

(67) $$a\,t - a_1\,\alpha = \frac{qsB}{\alpha-\beta}\left(\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\alpha\right) - \frac{psB-qr\beta}{\alpha-\beta} = 0$$

egyenlőséget. Akkor a (66) – ból

$$\left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = \left|t-\frac{a_1\alpha^{n+1}-b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n-b\beta^n}\right| = \left|\frac{(at-a_1\alpha)\alpha^n-(bt-b_1\beta)\beta^n}{a\alpha^n-b\beta^n}\right| = \left|\frac{(bt-b_1\beta)\beta^n}{H_n}\right|$$

következik.

És mivel most a H sorozat konkrét alakja miatt $a=b$, a (66) egyenlőtlenség a következő alakot ölti:

(68) $$1 > c\left|H_n\right|^k \cdot \left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = c\left|H_n\right|^{k-1}\left|(bt-b_1\beta)\beta^n\right|$$

$$= c\left|a\,\alpha^n\right|^{k-1}\left|1-\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^{k-1} \cdot \left|\beta^n\right|\left|b\,t-b_1\beta\right|$$

$$= c\left|a\right|^{k-1}\left(\left|\alpha\right|^{k-1}\left|\beta\right|\right)^n\left|b\,t-b_1\,\beta\right|\left|1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^{k-1}.$$

A diszkrimináns pozitív, ezért $|\beta/\alpha|<1$ és az $\alpha\beta = -B$ összefüggés miatt a (68) egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet végtelen sok n pozitív egész számra, ha $\left|\beta\right|\left|\alpha\right|^{k-1} = \left|B\right|\left|\alpha\right|^{k-2} \le 1$, vagyis, ha $k \le 2 - \log\left|B\right| / \log\left|\alpha\right| = k_0$, továbbá a $k = k_0$ esetben még azt is feltételezzük, hogy a $c \le \frac{1}{\left|a\right|^{k_0-1}\left|b\,t-b_1\,\beta\right|}$ is érvényes.

A (67) relációból és az $a=b$ egyenlőségből az

$$\left|b\,t-b_1\,\beta\right| = \left|b\frac{a_1\alpha}{a}-b_1\,\beta\right| = \left|a_1\alpha-b_1\,\beta\right| = \left|G_1\right| = \left|p\,s\,B\right|$$

adódik.

Használjuk fel továbbá az $\alpha-\beta=\sqrt{D}$ azonosságot, így a

$$c \le \left|\frac{\sqrt{D}}{qsB}\right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psB|} = c_0$$

relációhoz jutunk.

Mivel B és $\frac{\beta}{\alpha}$ előjele különböző, ezért a a (68) értelmében (66) pontosan akkor teljesül végtelen sok n pozitív egész számra, ha

(v) $k < k_0$ vagy

(vi) $k = k_0$ és $c < c_0$, vagy

(vii) $k = k_0$, $c = c_0$ és $B > 0$ vagy

(viii) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ és $k_0 > 1$.

A 11. TÉTEL bizonyítása:

Jelölje α és β az $x^2 - Ax - UB = 0$ egyenlet két gyökét, ahol $|\alpha| > |\beta|$. Ekkor $\sigma = \alpha / U$.

A (2) és (3) értelmében minden $n \ge 0$ egész számra

$$G_{n+1} = a_1 \alpha^{n+1} - b_1 \beta^{n+1} \quad \text{és} \quad H_n = a\alpha^n - b\beta^n ,$$

ahol

$$a_1 = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{psB - qr\beta}{\alpha - \beta} , \qquad b_1 = \frac{psB - qr\alpha}{\alpha - \beta} ,$$

$$a = \frac{qsBU - 0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{qsBU}{\alpha - \beta} , \qquad b = \frac{qsBU}{\alpha - \beta} .$$

Tegyük fel, hogy az $n > 0$ egész számmal, valamint a c és k pozitív valós számokkal

(69) $$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

teljesül.

Felhasználva a

(70) $$at - a_1\alpha = \frac{qsBU}{\alpha - \beta}\left(\frac{r}{s} + \frac{p}{q}\frac{\alpha}{U}\right) - \frac{psB - qr\beta}{\alpha - \beta}\alpha = 0$$

egyenlőséget és behelyettesítve a sorozatok tagjainak explicit értékeit, azt kapjuk, hogy

$$\left| t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = \left| t-\frac{a_1\alpha^{n+1}-b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n-b\beta^n}\right| = \left|\frac{(at-a_1\alpha)\alpha^n-(bt-b_1\beta)\beta^n}{a\alpha^n-b\beta^n}\right| = \left|\frac{(bt-b_1\beta)\beta^n}{H_n}\right| .$$

Az $a = b$ alkalmazása után (69) az

(71)
$$1 > c\left|H_n\right|^k \cdot \left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = c\left|H_n\right|^{k-1}\left|(bt-b_1\beta)\beta^n\right|$$
$$= c\left|a\alpha^n\right|^{k-1}\left|1-\frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^{k-1} \cdot \left|\beta^n\right|\left|bt-b_1\beta\right|$$
$$= c\left|a\right|^{k-1}\left(\left|\alpha\right|^{k-1}\left|\beta\right|\right)^n\left|bt-b_1\beta\right|\left|1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^{k-1}$$

alakot ölti.

A $\left|\beta/\alpha\right|<1$, $\alpha\cdot\beta=-BU$ és $bt-b_1\beta \neq 0$ (ugyanis a $bt-b_1\beta=0$ maga után vonná a $t=(G_{n+1}/H_n)\in\mathbf{Q}$ összefüggést, amit a tétel feltételrendszere nem enged meg). A (71) egyenlőtlenség csak akkor teljesül végtelen sok n pozitív egész számra, ha $\left|\beta\right|\left|\alpha\right|^{k-1}=\left|BU\right|\left|\alpha\right|^{k-2}\le 1$, vagyis ha $k\le 2-\frac{\log\left|BU\right|}{\log\left|\alpha\right|}=2-\frac{\log\left|BU\right|}{\log\left|\sigma U\right|}=k_0$, továbbá a $k=k_0$ esetben még azt is feltételezzük, hogy $c\le\frac{1}{\left|a\right|^{k_0-1}\left|bt-b_1\beta\right|}$.

A (70) – ből , az $a = b$ egyenlőségből és (2) – ből

$$\left|bt-b_1\beta\right| = \left|b\frac{a_1\alpha}{a}-b_1\beta\right| = \left|a_1\alpha-b_1\beta\right| = \left|G_1\right| = \left|psB\right| .$$

következik.

Ha felhasználjuk az $\alpha-\beta=\sqrt{D}$ összefüggést, a

$$c \le \left|\frac{\sqrt{D}}{qsBU}\right|^{k_0-1}\cdot\frac{1}{\left|psB\right|} = c_0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Mivel UB és β/α előjele különböző, ezért a (71) alapján az adódik, hogy (69) pontosan akkor teljesül végtelen sok n egész számra, ha

(i) $k<k_0$ vagy

(ii) $k=k_0$ és $c<c_0$, vagy

(iii) $k=k_0$, $c=c_0$ és $UB>0$, vagy

(iv) $k=k_0$, $c=c_0$, $UB<0$ és $k_0>1$.

A 12. TÉTEL bizonyítása

A bizonyítást csak a $t=\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}$ esetben végezzük el (a $t=\frac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2}$ eset analóg módon tárgyalható).

Legyen az $x^2-(2\eta_0)x+1=0$ egyenlet két gyöke α és β $\left(|\alpha|\geq|\beta|\right)$. Mivel $\eta_0>0$ ezért $\alpha=\frac{2\eta_0+\sqrt{(2\eta_0)^2-4}}{2}$ és $\beta=\frac{2\eta_0-\sqrt{(2\eta_0)^2-4}}{2}$ érvényes.

A $t=\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}$ törtet $2\xi_0$ – lal bővítve és átalakítva

(72)
$$t=\frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2}=\frac{A}{2}+\frac{\sqrt{A^2+4B}}{2}$$
$$=\frac{A}{2}+\frac{1}{2\xi_0}\frac{\sqrt{(A^2+4B)\xi_0{}^2\,4}}{2}=\frac{A}{2}+\frac{1}{2\xi_0}\frac{\sqrt{(\eta_0^2-1)4}}{2}$$
$$=\frac{A}{2}+\frac{1}{2\xi_0}\frac{-2\eta_0+2\eta_0+\sqrt{(2\eta_0)^2-4}}{2}$$
$$=\frac{A}{2}-\frac{\eta_0}{2\xi_0}+\frac{1}{2\xi_0}\alpha=\frac{A\xi_0-\eta_0}{2\xi_0}+\frac{1}{2\xi_0}\alpha$$

adódik.

Használjuk a (72) – ből kiolvasható $p=1$, $q=2\xi_0$, $r=A\xi_0-\eta_0$ és $s=2\xi_0$ értékeket.

Alkalmazhatjuk a 9. Tételt a $G^*(2\eta_0,-1,2\xi_0(A\xi_0-\eta_0),-2\xi_0)$ és a $H^*(2\eta_0,-1,0,-4\xi_0^2)$ sorozatokkal.

A G^* és a H^* sorozatok közös D^* diszkriminánsára

$$\sqrt{D^*}=\sqrt{(2\eta_0)^2-4}=\sqrt{(A^2+4B)(2\xi_0)^2}=|2\xi_0|\sqrt{A^2+4B}$$

teljesül.

A $G_n^* = 2\xi_0 G_n$ és $H_n^* = 2\xi_0 H_n$, $n \in \mathbf{N}$ sorozatokkal, a 9. tételből az

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| = \left| t - \frac{2\xi_0\, G_{n+1}}{2\xi_0\, H_n} \right| = \left| t - \frac{G_{n+1}^*}{H_n^*} \right| < \frac{|pq|\, s^2}{\sqrt{D^*}\left(H_n^*\right)^2}$$

$$= \frac{|2\xi_0|(2\xi_0)^2}{\sqrt{A^2+4B}\;|2\xi_0|\;(2\xi_0\, H_n)^2} = \frac{1}{\sqrt{A^2+4B}\, H_n^2} ,$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amivel az 12. tételt bebizonyítottuk.

A 13. TÉTEL bizonyítása

A bizonyítást csak a $t = \frac{A+\sqrt{A^2+4B}}{2U}$ esetben végezzük el (a $t = \frac{A-\sqrt{A^2+4B}}{2U}$ eset analóg módon tárgyalható).

Legyen az $x^2 - (2\eta_0)x + 1 = 0$ egyenlet két gyöke α és β $\left(|\alpha| \geq |\beta| \right)$. Mivel $\eta_0 > 0$, $\alpha = \frac{2\eta_0 + \sqrt{(2\eta_0)^2 - 4}}{2}$ és $\beta = \frac{2\eta_0 - \sqrt{(2\eta_0)^2 - 4}}{2}$ érvényes.

Végezzük el ugyanazt az átalakítást, amit az előző tételben elvégeztünk, akkor a

(73) $$t = \frac{A+\sqrt{A^2+4BU}}{2U} = \frac{A\xi_0 - \eta_0}{2U\xi_0} + \frac{1}{2U\xi_0}\alpha$$

relációt kapjuk.

A (73) – ból kiolvasható $p=1$, $q = 2U\xi_0$, $r = A\xi_0 - \eta_0$ és $s = 2U\xi_0$ értékekkel, valamint a $G^*(2\eta_0, -1, 2U\xi_0(A\xi_0 - \eta_0), -2U\xi_0)$ és $H^*(2\eta_0, -1, 0, -4U^2\xi_0^2)$ sorozatokkal alkalmazhatjuk a 9. tételt.

Vegyük figyelembe a $G_n^* = 2U\xi_0 G_n$, $H_n^* = 2U\xi_0 H_n$, $n \in N$ egyenlőségeket.

A G^* és a H^* sorozatok közös D^* diszkriminánsára érvényes

$$\sqrt{D^*} = \sqrt{(2\eta_0)^2 - 4} = \sqrt{\left(A^2 + 4BU\right)\xi_0^2 \cdot 4} = |2\xi_0|\sqrt{A^2+4BU}$$

összefüggés felhasználásával a 9.tétel alkalmazásának eredményeképpen az

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| = \left| t - \frac{2U\xi_0 \, G_{n+1}}{2U\xi_0 \, H_n} \right| = \left| t - \frac{G^*_{n+1}}{H^*_n} \right| < \frac{|pq| s^2}{\sqrt{D^*} \left(H^*_n \right)^2}$$

$$= \frac{|2U \xi_0| (2U \xi_0)^2}{|2\xi_0| \sqrt{A^2 + 4BU} \ (2U\xi_0 \, H_n)^2} = \frac{|U|}{\sqrt{A^2 + 4BU} \, H_n^2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amivel a 13.tételt bizonyítottuk.

A 3. KÖVETKEZMÉNY bizonyítása

Alkalmazzuk a 12. tételt a

$$t = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{4k}}{2} = \frac{0 + \sqrt{0^2 + 4k}}{2} \quad .$$

számra, melynek definiáló polinomja: $P(x) = x^2 - 0x - k$.

A 4. KÖVETKEZMÉNY bizonyítása

Ha $t = \alpha = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2} = \frac{A + i\sqrt{-\left(A^2 + 4B\right)}}{2}$, akkor alkalmazhatjuk a 3.következményt a $|t| = \sqrt{\frac{A^2 - \left(A^2 + 4B\right)}{4}} = \sqrt{-B} \notin \mathbf{Q}$ számra.

Summary:

On the distribution modulo 1 of sequences

Let $G=G(A,B,G_0,G_1)=(G_n)_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recursive sequence of rational integers defined by the recursion

$$G_{n+2}=AG_{n+1}+BG_n \qquad (n\geq 0)\ ,$$

where A, B and the initial terms G_0, G_1 are fixed integers, with restrictions $AB\neq 0$, $D=A^2+4B\neq 0$ and not both G_0 and G_1 are zero.

It is well-known that the terms of G can be written in the form

$$G_n=a\alpha^n-b\beta^n,$$

where α and β are the roots of the characteristic polynomial x^2-Ax-B of the sequence G and $a=\dfrac{G_1-G_0\beta}{\alpha-\beta}$, $b=\dfrac{G_1-G_0\alpha}{\alpha-\beta}$ (see e.g. [31], p.91).

Throughout this paper we assume that $|\alpha|\geq|\beta|$ and the sequence G is non-degenerate, i.e. α/β is not a root of unity and $ab\neq 0$. If $G_0=0$ we may also suppose that $G_n\neq 0$ for n > 0 since in [10] it was proved that a non-degenerate sequence G has at most one zero term and after a movement of indices this condition can be fulfilled. G sequence can be defined in a similarly way if the parameters are real numbers.

In the following we shall use the terminology and notation of L. KUIPERS and H. NIEDERREITER [19] adapted to suit our purposes.

Let $\omega=(x_n)_{n=1}^{\infty}$, be a given sequence of real numbers. For a positive integer N and a subset E of [0, 1), let the counting function $A(E;N;\omega)$ be defined as the number of terms x_n, $1\leq n\leq N$, for which $\{x_n\}\in E$.

We need the following known definitions.

DEFINITION 1: The sequence $\omega=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ of real numbers is said to be uniformly distributed modulo 1 (abbreviated by u. d. mod 1) if for every pair (a,b) of real numbers with $0\leq a<b\leq 1$ we have

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A([a,b);N;\omega)}{N}=b-a$$

DEFINITION 2: The sequence $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ is said to have asymptotic distribution function modulo 1(abbreviated by a.d.f. mod 1) F if

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A([0,x);N;\omega)}{N} = F(x) \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1.$$

R. F. TICHY [35] showed that there are infinitely many linear recursive sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval but they are not uniformly distributed, if the parameters A, B, G_0, G_1 of the sequence G are real numbers. However, the characteristic polynomials of the sequences in Tichy 's construction have positive discriminants: $D = A^2 + 4B > 0$. In [26] we extended this result to sequences having negative discriminants furthermore we gave the asymptotic distribution functions, too. The following two theorems show our results.

THEOREM 1: *Let* A *be a real number with restrictions* $-2 < A < 2$ *and* $\Theta = \frac{1}{2\pi}\arccos(A/2)$ *is an irrational number. Let* $B = -1,\ G_1 \neq 0,\ G_0, G_1 \in \boldsymbol{R}$ *and let* $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \ge 0)$.

If $r_1 = 2|a| = 2\left|\frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta}\right| \ge 2$ *is an integer then* G *is everywhere dense modulo 1 on the unit interval* $[0,1)$ *but it is not uniformly distributed.*

We need the following notations. Let n be an integer and let r_1 as in theorem 1. We denote

$$K_n = \begin{cases} n, & \text{if} \quad n \ge 0, \\ \max\{n, -r_1\}, & \text{if} \quad n < 0 \end{cases}$$

and

$$L_n(x) = \begin{cases} \min\{n+x, r_1\}, & \text{if} \quad n \ge 0, \\ \max\{n+x, -r_1\}, & \text{if} \quad n < 0 \end{cases},$$

where $0 \le x \le 1$.
We have:

THEOREM 2: *Let* A *be a real number with restrictions* $-2 < A < 2$ *and* $\Theta = \frac{1}{2\pi}\arccos(A/2)$ *is an irrational number. Let* $B = -1,\ G_1 \neq 0,\ G_0, G_1 \in \boldsymbol{R}$ *and let* $G_{n+2} = AG_{n+1} + BG_n \quad (n \ge 0)$.
The sequence G *has asymptotic distribution function modulo 1* F*, where*

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=[-r_1]}^{[r_1]}\left(\arccos\left(\frac{K_j}{r_1}\right)-\arccos\left(\frac{L_j(x)}{r_1}\right)\right) \qquad 0\le x\le 1\ .$$

COROLLARY 1: There are infinitely many linear recursive sequences G which are everywhere dense modulo 1 on the unit interval $[0,1)$ but they are not uniformly distributed, if the parameters A,B,G_0,G_1 of the sequence G are real numbers and the characteristic polynomials of the sequences have negative discriminants: $D=A^2+4B<0$.

Some limit properties of the linear recurrences were studied by several authors. For example P. KISS [11] and F. MÁTYÁS [22] investigated the limit $\lim_{n\to\infty} G_{n+i}/G_n$ for fixed i and they gave the best rational approximation of the limit in the case $|B|=1$. W. GERDES [5] gave the condition for the existence of the limit $\lim_{n\to\infty} G_n$, if the parameters A,B,G_0,G_1 of the sequence G are real numbers. In [6] this result is extended to third order recurrences.

In the case $A=B=1$, the sequence G of integers is called Fibonacci-type sequence and we denote its terms by $u_0,u_1,u_2,...$

M. B. GREGORY and J. M. METZGER [8] investigated the limit

$\lim_{n\to\infty}\sin(u_n x\pi)$,

where x is a fixed real number. They have showed that if the limit exists then it must be zero and x is a number of the quadratic number field $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

In [24] we generalized the results of Gregory and Metzger for more general second order linear recurrences. If we look for x for which

$$\lim_{n\to\infty}\sin(G_n x\pi)=0,$$

we can use the results on Pisot-Vijayaraghavan numbers (see J. W. S. CASSELS [2]). But we shall show that the limit can be not only zero in general.

We note that the problem is not identical with the problem of studying the convergence of the sequence $(\{G_n x\})_{n=0}^{\infty}$, where $\{y\}$ is the fractional part of y. Namely, for example, in the case $A=10, B=1$ $G_0=1, G_1=4$ and $x=1/5$ we have $\{G_n x\}=1/5$ for even n and $\{G_n x\}=4/5$ for odd n, thus $\lim_{n\to\infty}\sin(G_n x\pi)=\sin(\pi/5)$ but $\lim_{n\to\infty}\{G_n x\}$ does not exist. Another example: if

$A = 7, B = 1$ $G_0 = G_1 = 1$ and $x = 1/7$, then $\lim_{n\to\infty} \{G_n x\} = 1/7$, but $\sin(G_n x\pi) = -\sin(\pi/7)$ for integers of the form $n = 3k + 2$ and $\sin(G_n x\pi) = \sin(\pi/7)$ for other n's.
We prove the following theorem.

THEOREM 3: *Let G be a second order recurrence defined by integers A, B, G_0 and G_1 with restriction $A \neq 0, B = 1$ and $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$. Let x be a real number. The limit*

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$$

exists if and only if x has the form

$$x = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (d_1 - d_2\beta)}{(G_1 - G_0\beta)\cdot a^e},$$

where c_1, c_2, e are arbitrary integers, $d_1, d_2 \in \{2k/A;\ 1 - 2k/A\}$ with some integer k if A is an even number, and $d_1 = d_2 = 2k/A$ with some integer k or $d_1, d_2 \in \{2k/A;\ 1 - 2k/A\}$ with integer k for which $2k/A$ is an integer, if A is odd. If x has this form then

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin(2k\pi/A).$$

Suppose that a sequence ω has a. d. f. mod 1 which is F. If f is a real valued function, defined at the terms of ω, and the sequence $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ also has a.d.f. mod 1, then, in general, the two distribution functions are distinct. E.g. if $\omega = (n\Theta)_{n=1}^{\infty}$, where Θ is an irrational number, and $f(x) = \cos x$ or $f(x) = 1/x$, then the a.d.f. mod 1 of ω is different from the a.d.f. mod 1 of the sequence $\xi = (\cos n\Theta)_{n=1}^{\infty}$. Another most striking example is the following one: The sequence $\omega = (F_n)_{n=1}^{\infty}$ of the Fibonacci numbers has a non-continuous a.d.f. mod 1 but the a.d.f. mod 1 of the sequence $\xi = (\log F_n)_{n=1}^{\infty}$ is continuous, see L. KUIPERS [17]. (The sequence of the Fibonacci numbers is a second order linear recurrence defined by the constants $A = B = F_1 = 1$ and $F_0 = 0$.) However, there are sequences ω and functions f such that the sequences $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ have the same a. d. f. mod 1.
We introduce a definition.

DEFINITION 3: Let $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ be sequences of real numbers, where f is a real – valued function. If the sequences ω and ξ have a.d.f. mod 1 and these functions are identical, then we say that ω is an f invariant distributed sequence modulo 1 (abbreviated by i.d. mod 1 to f).

EXAMPLES 1: If Θ is a positive irrational number, then the sequences $\omega = (n\Theta)_{n=1}^{\infty}$ and $\xi = \left(\sqrt{n\Theta}\right)_{n=1}^{\infty}$ are u.d. mod 1 and they have common asymptotic distribution function mod 1 $(F(x) = x)$. Thus ω is a square root invariant distributed sequence mod 1 .

2: We know sequences also having a.d.f. mod 1 which are not uniformly distributed mod 1 but they are invariant distributed to a function. In this paper we will give conditions for second – order linear recurrences G such that the sequence $\omega = (G_n / G_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ to be invariant distributed to the function $f(x) = 1/x$ (we say reciprocal invariant).

3: There are functions, e.g. $f_1(x) = \{x\}$ or $f_2(x) = x + k$, where k is an integer, such that any sequence of real numbers, which has a.d.f mod 1 , is invariant distributed mod 1 to these functions. But if a real number c is not integer, then not every sequences is invariant distributed mod 1 to the function $f_3(x) = x + c$, but each uniformly distributed sequence mod 1 is i.d. mod 1 to f_3 .

The functions f that map the interval $[0,1]$ into itself and any uniformly distributed sequence mod 1 is invariant distributed mod 1to f are called uniform distributed preserving function (u.d.p.). Some results for u.d.p. functions can be found in S. PORUBSKI, T. SALÁT and O. STRAUCH [33].

We prove four theorems for mod 1 invariant distributed sequences. We need some notations.

For a real valued function f we denote its domain of definition by D_f, furthermore the set graph f is defined by

$$\text{graph } f = \{(x, y) | x \in D_f, y = f(x)\}$$

We write graph f mod 1 instead of graph f if we reduce the coordinates x, y mod 1:

$$\text{graph } f \bmod 1 = \{(x, y) | \exists k, i \in \mathbf{Z}, x + k \in D_f, y + i = f(x + k) \text{ and } 0 \le x, y < 1\}.$$

THEOREM 4*: Let f be a real-valued function with $D_f \subseteq \boldsymbol{R}$ and let F and G be non – decreasing functions defined on the interval $[0,1]$ such that $F(0) = G(0) = 0$ and $F(1) = G(1) = 1$. For any such functions F and G there exists a sequence $\omega = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ of*

real numbers, such that the asymptotic distribution function mod 1 of ω *is* F *and the a.d.f. mod 1 of the sequence* $\varphi = (f(a_n))_{n=1}^{\infty}$ *is* G *if and only if* graph f mod 1 *is everywhere dense on the unit square* $0 \le x < 1,\ 0 \le y < 1$.

From this theorem , with $F = G$, we obtain

COROLLARY 2: If f is a real-valued function such that graph f mod 1 is everywhere dense on the unit square, then for every nondecreasing function F, for which $F(0) = 0$ and $F(1) = 1$, there exists a sequence ω of real numbers such that F is the asymptotic distribution function modulo 1 of ω and ω is mod 1 f invariant distributed.

THEOREM 5: *Let* f *be a real – valued function. There exists a sequence* $\omega = (u_n)_{n=1}^{\infty}$ *of real numbers, which is uniformly distributed mod 1 and* f *invariant distributed mod 1 if and only if for any pairwise disjunct finitely many subintervals* $[a_1, b_1[, [a_2, b_2[, \ldots, [a_s, b_s[$ *of* $[0,1[$

$$m^*\left(\left\{ y \,\middle|\, \exists k, \exists x \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graph } f \bmod 1 \right\}\right) \ge \sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i)$$

and

$$m^*\left(\left\{ x \,\middle|\, \exists k, \exists y \in [a_k, b_k[\Rightarrow (x, y) \in \text{graph } f \bmod 1 \right\}\right) \ge \sum_{i=1}^{s} (b_i - a_i)\ ,$$

where $m^*(H)$ *denotes the Jordan outer measure of the set* H.

NOTES: It is easy to check that the conditions of Theorem 4 for the function f are satisfied by the functions sin, cos, tg, ctg, and by any continuous periodic function for which the period length is irrational and the range of this function is an interval of length at least one. These functions satisfy also the conditions of Theorem 5, moreover, the function $1/x$ also satisfies the conditions.

P. KISS and R. F. TICHY in [13] investigated the asymptotic distribution function modulo 1 of the sequence $\left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ when D < 0 . Their theorem can be extended to any sequence $\left(G_{n+k}/G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ where $k \neq 0$ integer number. In [29] we proved

THEOREM 6: *Let* $G = \left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ *be a linear recurring sequence defined by* $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$, $(n>1)$ *with non-zero real coefficients* A,B, *real initial values* G_0, G_1 *(not both* G_0 *and* G_1 *are zero) and with negative discriminant* $D = A^2 + 4B$. *Let*

$k \neq 0$ be an integer number. If the number $\Theta = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sqrt{-D}}{A}$ is irrational, then the asymptotic distribution function modulo 1 of the sequence $\left(G_{n+k}/G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ is given by

$$H(x) = H_1\left(x - \{c\}\right) + H_1\left(\{c\}\right)$$

with

$$H_1(x) = x + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{\sin(2\pi x)}{\exp(2\pi|d|) - \cos(2\pi x)},$$

where $c = r^k\cos(k\pi\Theta)$, $d = -r^k\sin(k\pi\Theta)$ and $r = |\alpha| = \left|\left(A + \sqrt{A^2 + 4B}\right)/2\right|$.

THEOREM 7: *Let $G = \left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ be a non-degenerate second order linear recursive sequence defined by $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$, $(n > 1)$ with non-zero real coefficients A,B , real initial values G_0, G_1 (where $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$) and negative discriminant $D = A^2 + 4B$.*
The sequence $\omega = \left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ is reciprocal invariant distributed modulo 1 if and only if $B = -1$.

THEOREM 8: *Let $G = \left(G_n\right)_{n=0}^{\infty}$ be a non-degenerate second order linear recursive sequence defined by the recursion $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$, $(n > 1)$ with non-zero integer coefficients A,B integer initial values G_0, G_1 (where $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$) and with positive discriminant $D = A^2 + 4B$.*
The sequence $\omega = \left(G_{n+1}/G_n\right)_{n=1}^{\infty}$ is reciprocal invariant distributed modulo 1 if and only if $B = 1$.

On the approximation of quadratic algebraic numbers by the quotients of terms of linear recurrences

Let $G=G(A,B,G_0,G_1)=(G_n)_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recursive sequence of rational integers defined by the recursion

$$G_n = A\,G_{n-1} + B\,G_{n-2} \qquad (n>1)\ ,$$

where A, B and the initial terms G_0, G_1 are fixed integers, with restrictions $AB\neq 0$, $D=A^2+4B\neq 0$ and not both G_0 and G_1 are zero.

It is well-known that there are connections between the diophantine approximation of real quadratic algebraic numbers and second order linear recurrences. For example, we know that the inequality

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{F_{n+1}}{F_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,F_n^2}$$

holds for infinitely many n , where $F_1, F_2, F_3, \ldots$ denote the Fibonacci numbers. We shall deal with similar inequalities for arbitrary real quadratic algebraic integers, permitting the numerators and denominators of the approximating fractions belong to different second order linear recurrences.

In the case $D=A^2+4B>0$, the roots of the characteristic polynomial are real, $|\alpha|>|\beta|$, and $(\beta/\alpha)^n \to 0$ as $n\to\infty$ and so by (1) $\lim_{n\to\infty} G_{n+1}/G_n=\alpha$ follows. (F. MÁTYÁS, [22])

Several authors have dealt with the approximation of real quadratic algebraic integer α using the sequence G_{n+1} / G_n . For example, P. KISS ([11]) proved that the inequality $\left|\alpha-\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|<\frac{1}{G_n^2}$ is fulfilled for infinitely many integers n if and only if $|B|=1$, when $G_0=0$ and $G_1=1$.

Furthermore , if $|B|=1$, then the solutions $\frac{p}{q}$ of the inequality $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{D}\,q^2}$ have the form G_{n+1}/G_n.

Thereby P. Kiss generalized an important property of the number $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and the Fibonacci sequence to other irrational numbers and the respective linear recursive sequences. In [16], P. KISS and Zs. SINKA, determined the values of $k\le 2$ and $c>0$ for $|B|\neq 1$ so that the inequality $\left|\alpha-\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|<\frac{1}{c|G_n|^k}$ had infinitely many solutions.

If $D<0$, then α and β are non real complex numbers with $|\alpha|=|\beta|$ and by (1) we have

$\frac{G_{n+1}}{G_n}=\frac{1-(b/a)(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(b/a)(\beta/\alpha)^{n}}\cdot\alpha$. But $|\beta/\alpha|=1$, thus $\lim_{n\to\infty}\frac{G_{n+1}}{G_n}$ does not even exist. The approximation of $|\alpha|$ by rationals of the form $|G_{n+1}/G_n|$ was considered e.g. in [16],[14] and [15]. In [16] it is proved that if G is a non-degenerate second order linear recurrence with $D<0$ and the initial values $G_0=0, G_1=1$, then there exists a constant $c_1>0$, depending only on the sequence G, such that $\left||\alpha|-\left|\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|\right|<\frac{c_1}{n}$ for infinitely many n .

The case when $D>0$ has been studied by a larger number of authors since it is more important, thus several results are known in this case. For example, in [7],[9] , $\sqrt{D}$ was approximated with the quotients of the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers.

In [12], P. Kiss divided the set of the convergents of the real quadratic algebraic number t into finite disjunct subsets so that the subsets could be generated by the quotient G_n/H_n of the terms of second order linear recurrences. He did not study the connections between the constants defining the number t and those defining the sequences G and H , or the constants of the approximation.

In [11] the root α of the polynomial x^2-Ax-B was not approximated by the rationals of the form G_{n+1}/G_n but by G_{n+1}/H_n, where H_n is a term of an appropriately chosen second order linear recursive sequence H.

We gave a better approximation for $|\alpha|$ if D < 0, and for α in the most cases if $D>0$, than it was given by the authors in [16]. This can be achieved by the approximation of the numbers of the quadratic number field $\mathbf{Q}(\alpha^*)$ when $D^*>0$. This can be done since there exists infinitely many quadratic algebraic integers α^* for any quadratic real algebraic number α, so that $\alpha\in\mathbf{Q}(\alpha^*)$

Using α^*–s, different approximation qualities can be reached. We saw in [28] that the root of the characteristic polynomial x^2-Ax-B can often be better approximated by an appropriate G^*_{n+1}/H^*_n than by G_{n+1}/G_n, as described in [16].

We attach second order linear recurrences G and H to any quadratic algebraic integer t to fulfil the inequality

$$\left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|<\frac{1}{\sqrt{D}\,H_n^2},$$

for all n, where $c=\sqrt{D}$ is the possible best constant which gives infinitely many solutions for the inequality $\left|t-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{cq^2}$ (see p.24 of [2]).

Essentially, we give an appropriate partial sequence of the convergents of t in explicit form, where we use Binet's formula instead of the continued fraction process.

In the corollaries, we approximate $\sqrt{k}$ with the best constant to second degree, where k is an arbitrary integer but not a perfect square, or the absolute value of any complex quadratic algebraic integer, when the absolute value is not a rational number. In Theorem 13, we give approximation to second degree but not with the best constant to arbitrary quadratic algebraic numbers, which are not algebraic integers.

We have:

THEOREM 9: *Let A and B be rational integers with the restrictions $AB\neq 0$ and $D=A^2+4B>0$ is not a perfect square. Denote the roots of equation $x^2-Ax-B=0$ by α and β, where $|\alpha|>|\beta|$. Let $t=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\alpha\in\mathbf{Q}(\alpha)$ with integers s, q>0, $p\neq 0$ and r.*

Define the number c_0 by $c_0=\frac{\sqrt{A^2+4B}}{|pq|s^2}$ and let c be a positive real number. Then with linear recurrences $G(A,B,qr,psB)$ and $H(A,B,0,qsB)$, the inequality

$$\left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|<\frac{1}{cH_n^2}$$

(i) *holds for infinitely many integer* n *if and only if* $|B|=1$ *and* $c \le c_0$,

(ii) *holds for all positive integer* n *if and only if* $B=-1$ *and* $c \le c_0$.

If we want to approximate a quadratic real algebraic number, which is not an algebraic integer i.e. the root α of the equality $Ux^2-Ax-B=0$, where $U, A, B \in \mathbf{Z}$ and $|U|>1$, then the zero of $f(x)=x^2-Ax-UB=0$ is suitably applicable for α^* since it results the same field extension. That is why our next theorem may be of interest.

THEOREM 10: *Let* A *and* B *be rational integers with the restrictions* $AB \neq 0$ *and* $D=A^2+4B>0$ *is not a perfect square. Denote the roots of equation* $x^2-Ax-B=0$ *by* α *and* β *, where* $|\alpha|>|\beta|$. *Let* $t=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\alpha \in \boldsymbol{Q}(\alpha)$ *with integers s, q>0,* $p \neq 0$ *and r. Define the numbers* k_0 *and* c_0 *by* $k_0=2-\frac{\log|B|}{\log|\alpha|}$ *and* $c_0=\left|\frac{\sqrt{D}}{qsB}\right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psB|}$ *and let* c *be a positive real number. Then with linear recurrences* $G(A,B,qr,psB)$ *and* $H(A,B,0,qsB)$ *the inequality*

$$\left| t-\frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

holds for infinitely many integers n *if and only if*

(ix) $k<k_0$, *or*

(x) $k=k_0$ *and* $c<c_0$, *or*

(xi) $k=k_0$, $c=c_0$ *and* $B>0$, *or*

(xii) $k=k_0$, $c=c_0$, $B<0$ *and* $k_0>1$.

(Note that $k_0>0$ since $|B|=|\alpha\beta|<\alpha^2$.)

THEOREM 11: *Let A, B and* U *be rational integers with the restrictions* $ABU \neq 0$ *and* $D=A^2+4BU>0$ *is not a perfect square. Denote* σ *and* ρ *the roots of the equation* $Ux^2-Ax-B=0$, *where* $|\sigma|>|\rho|$. *Let* $t=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\sigma \in \mathbf{Q}(\sigma)$ *with integers s, q>0,* $p \neq 0$ *and r. Define the numbers* k_0 *and* c_0 *by*

$$k_0 = 2 - \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|} \qquad \text{and} \qquad c_0 = \left|\frac{\sqrt{D}}{qsBU^2}\right|^{k_0 - 1} \cdot \frac{1}{|psBU|}$$

and let k *and* c *be positive real numbers. Then with linear recurrences* $G(A, BU, qrU, psBU)$ *and* $H(A, BU, 0, qsBU^2)$ *the inequality*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

holds for infinitely many integers n *if and only if one of the following conditions holds:*

(i) $k < k_0$ *and* c *is arbitrary,*

(ii) $k = k_0$ *and* $c < c_0$,

(iii) $k = k_0$, $c = c_0$ *and* $B > 0$,

(iv) $k = k_0$, $c = c_0$, $B < 0$ *and* $k_0 > 1$.

(Note that $k_0 > 0$ since $|\sigma|^2 > |\sigma\rho| = \left|\frac{B}{U}\right| \Rightarrow |\sigma U|^2 > |BU| \Rightarrow 2 > \frac{\log|BU|}{\log|\sigma U|}$.)

THEOREM 12: *Let* t *be a real quadratic algebraic integer. Let the polynomial defining* t *be* $P(x) = x^2 - Ax - B$. *Denote the basic solution of the Pell equation* $\eta^2 - (A^2 + 4B)\xi^2 = 1$ *with* (ξ_0, η_0).

If $t = \frac{A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, *then with the sequences* $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 - \eta_0, -1)$ *and* $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ *or if* $t = \frac{A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$, *then with the sequences* $G(2\eta_0, -1, A\xi_0 + \eta_0, 1)$ *and* $H(2\eta_0, -1, 0, -2\xi_0)$ *the inequality*

$$\left| t - \frac{G_{n+1}}{H_n} \right| < \frac{1}{\sqrt{A^2 + 4B} \cdot H_n^2}$$

holds for all positive integers n .

COROLLARY 3: Let k be a positive integer but not a perfect square. Let the basic solution of the Pell equation $\eta^2 - 4k\xi^2 = 1$ be (ξ_0, η_0). With the second order linear recurrences $G(2\eta_0, -1, \eta_0, 1)$ and $H(2\eta_0, -1, 0, 2\xi_0)$ the inequality

$$\left|\sqrt{k}-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = \left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{2\sqrt{k}\cdot H_n^2}$$

holds for all $n \in \mathrm{N}^+$

COROLLARY 4: Let t be a not real quadratic algebraic integer with the defining polynomial $P(x)=x^2-Ax-B$ and let $|t| \notin \mathbf{Q}$.

Let the basic solution of the Pell equation $\eta^2-4B\xi^2=1$ be (ξ_0,η_0). With the second order linear recurring sequences $G(2\eta_0,-1,\eta_0,1)$ and $H(2\eta_0,-1,0,2\xi_0)$ the inequality

$$\left|\,|t|-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{2\sqrt{-B}\cdot H_n^2} \le \frac{1}{\sqrt{-(A^2+4B)}\cdot H_n^2}$$

holds for all $n \in \mathbf{N}^+$

THEOREM 13: *Let t be a quadratic algebraic but not algebraic integer with the defining polynomial* $P(x)=Ux^2-Ax-B, \quad (|U|>1, A, B \in \boldsymbol{Z})$.

Denote the basic solution of the Pell equation $\eta^2-(A^2+4BU)\xi^2=1$ *by* (ξ_0,η_0).

If $t=\left(A+\sqrt{A^2+4BU}\right)/2\mathrm{U}$ *, then with the sequences* $G(2\eta_0,-1,A\xi_0-\eta_0,-1)$ *and* $H(2\eta_0,-1,0,-2U\xi_0)$ *or if* $t=\left(A-\sqrt{A^2+4BU}\right)/2\mathrm{U}$ *, then with the sequences* $G(2\eta_0,-1,A\xi_0+\eta_0,1)$ *and* $H(2\eta_0,-1,0,-2U\xi_0)$ *the inequality*

$$\left|t-\frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{|U|}{\sqrt{A^2+4BU}\cdot H_n^2}$$

holds for all positive integer n .

Note: If we use an other solution instead of the basic solution of the Pell equation in Theorem 12 or 13, or Corollary 3 or 4, then statements will hold true but the above sequences will be subsequences of the was given in the original version.
The constants in Theorem 12, Corollary 3 and Corollary 4 are the possible best. (See J. W. S. CASSELS [2] p. 24.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] **J. L BROWN JR. and R. L. DUNCAN, Modulo one uniform distribution of certain Fibonacci related sequences**, Fibonacci Quart. 10 (1972), 277 – 280, 294. MR 46 # 3426.

[2] **J.W.S. CASSELS, An introduction to diophantine approximation**, Cambridge Univ. Press. New York, 1957. Mr 19 – 396.

[3] **R.L. DUNCAN, An application of uniform distribution of the Fibonacci numbers**, Fibonacci Quart., 5 (1967), 137 – 140.

[4] **H. B. DWIGHT, Tables of integrals and other mathematical data**, 4th edition, Macmillan Company, 1961.

[5] **W. GERDES, Convergent generalized Fibonacci sequences**, Fibonacci Quart. 15 (1977), 156 – 160. MR 56 # 237

[6] **W. GERDES, Generalized tribonacci numbers and their convergent sequences**, Fibonacci Quart. 16 (1978), 269 – 275. MR 80a: 10019

[7] **P.J. GRABNER, P. KISS and R.F. TICHY, Diophantine Approximation in Terms of Linear Recurrent Sequences**, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings Vol. 15, 1995 pp. 187 – 195.

[8] **M. B. GREGORI and J. M. METZGER, Fibonacci sine sequences**, Fibonacci Quart. 16 (1978) 119 – 120. MR 58 # 16588

[9] **J.P. JONES and P. KISS, Some Diophantine Approximation Results Concerning Linear Recurrences**, Math. Slovaca, 42 (1992) No. 5, 583 – 591

[10] **P.KISS, Zero terms in second order linear recurrences**, Math. Sem. Notes (Kobe Univ.) , 7 (1979), 145-152. MR 80j:10015

[11] **P. KISS, A Diophantine approximative property of the second order linear recurrences**, Period. Math. Hungar.,11 (1980), 281-287. MR 82k:10034

[12] **P. KISS, On second order recurrences and continued fractions**, Bull. Malaysian Math. Soc. (2) 5 (1982) pp. 33 – 41.

[13] **P. KISS and R. F. TICHY, Distribution of the ratios of the terms of a second order linear recurrence**, Indag Math., 48 (1986), 79 – 86.

[14] **P. KISS and R. F. TICHY, A discrepancy problem with applications to linear recurrences I.,** Proc. Japan Acad. 65,No. 5 (1989) 135-138. MR 90j:11060a

[15] **P. KISS and R. F. TICHY, A discrepancy problem with applications to linear recurrences II.,** Proc. Japan Acad. 65, No, 6 (1989), 191-194. MR 90j: 11060b

[16] **P. KISS and Zs. SINKA On the ratios of the terms of second order linear recurrences**, Period. Math. Hungar., 23 (1991), 139-143.

[17] **L. KUIPERS, Remark on a paper by R. L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the logarithms of the Fibonacci numbers**, Fibonacci Quart. 7 (1969) , 456 – 466, 473.

[18] L. KUIPERS, A property of the Fibonacci sequence F_m , m=0,1,… Fibonacci Quart., 20 (1982) , 112 – 113.

[19] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, Wiley, New York, 1974.

[20] LANG, Introduction to diophantine approximation, Wesley, 1966.

[21] M. B. LEVIN and I. E SPARLINSKY, The uniform distribution of fractional part of recurrent sequences (orosz nyelven) , Usp. Mat. Nauk., 34 (1979), no.3 (207), 203 – 204.

[22] F. MÁTYÁS, Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok elemeinek hányadosáról (On the quotients of the elements of linear recursive sequences of second order), Mat. Lapok 27(1976/79), 379-389. (In Hungarian) MR 82m: 10020

[23] S. H. –MOLNÁR, and P. KISS, On distribution of linear recurrences modulo 1, Studia Sci. Math. Hungarica, 17.(1982), 113 – 127.

[24] S. H. –MOLNÁR, Sine sequence of second order linear recurrences, Periodica Math. Hungarica, 14 (3 – 4), (1983), pp. 259 – 267.

[25] S. H. –MOLNÁR, Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak szinuszairól, Acta Acad. Paed Agriensis – Nova Series XVII: (1984) 825 – 833.

[26] S. H. –MOLNÁR, Lineáris rekurzív sorozatok egy eloszlási tulajdonságáról, Acta Acad. Paed Agriensis, XVIII/11, Matematika (1987) 3 – 15.

[27] S. H. –MOLNÁR, Sequences and their transforms with identical asymptotic distribution function modulo 1, Studia Sci. Math. Hungarica, 29 (1994), 315 – 322.

[28] S. H. – MOLNÁR, Approximation by quotients of terms of second order linear recursive sequences of integers, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 28 (2001) pp. 21 – 26

[29] S. H. –MOLNÁR, Reciprocal invariant distributed sequences constructed by second order linear recurrences, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 30 (2003) 101 – 108.

[30] S. H. –MOLNÁR, On The Diophantine Approximation of Real Quadratic Algebraic Numbers, to appear

[31] I. NIVEN and H.S ZUCKERMAN, An introduction to the theory of numbers, Wiley, New York, 1960. MR 22 # 5605

[32] C. Pisot, Répartition (mod 1) des puissances successives des nombres reels, Comment Math. Helv. 19 (1946), 153 – 160. MR 8 – 194.

[33] S. PORUBSKI, T. SALÁT and O. STRAUCH Transformations that preserve uniform distribution, Acta Arith. 49 (1988), 459 – 479 MR 89m:11072

[34] H.WEYL, Über die Gelichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Ann. 77. (1916),313 – 352.

[35] R. T. WORLEY, Estimating $|\alpha - p/q|$, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 31 (1981), 202 – 206.

[36] R. F. Tichy, On the asymptotic distribution of linear recurrence sequences. Fibonacci numbers and their applications (Patras, 1984), 273 – 291, Math. Appl., 28, Reidel, Dordrecht, 1986.

Publikációs jegyzék

Referált számelméleti publikációk

1. **On distribution of linear recurrences modulo 1,** Studia Sci. Math. Hungar.,17.(1982) pp.113-127. (Kiss Péterrel közösen)
2. **Sine sequence of second order linear recurrences,** Period Math. Hungar. 14. (1983) pp.259-267.
3. **Egészoldalú derékszögű háromszögek szögeiről,** Matematikai lapok 32. (1984) pp. 137-141.
4. **Sequences and their transzforms with identical asimptotic distribution function modulo 1,** Studia Math. Hungar. 29.(1994) pp. 315-322.
5. **Approximation by quotients of terms of second order linear recursive sequences of integers,** Acta Acad. Paed.Agriensis,Sectio Math. 28. (2001) pp. 21-26.
6. **Reciprocal invariant distributed sequences constructed by second order linear recurrences,** Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 30 (2003) 101 – 108.
7. **On the Diophantine approximation of real quadratic algebraic numbers,** to appear

Lektorált számelméleti publikációk

8. **Néhány lineáris függetlenségi és eloszlási problémáról,** egyetemi doktori értekezés, Debrecen, 1982.
9. **Háromszögek szögeinek lineáris függetlenségéről,** HSMTF. Tud. Közleményei XVI. (1982) pp. 567-574.
10. **Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok tagjainak szinuszairól,** HSMTF. Tud. Közleményei XVII. (1984) pp. 825-833.
11. **Lineáris rekurzív sorozatok egy eloszlási tulajdonságáról,** HSMTF. Tud. Közleményei XVIII.(1987) pp. 3-15.

Egyéb, a felsőoktatási tananyaggal kapcsolatos publikációk:

1. **Beszámoló a tanárképző főiskolák 1985. Évi matematika versenyéről,** A Matematika Tanítása,1986.3. (Mátyás Ferenccel közösen).
2. **Példatár az operációszámítás c. tankönyvhöz,** PSzF. 1991. Szerkesztő és szerző (szerzőtársakkal közösen).
3. **Matematika példatár** (társszerzőkkel közösen, szerk. Szelezsán János) LSI. Bp.1994.
4. **Többdimenziós eloszlások,** (főiskolai távoktatási jegyzet) PSzF.Bp..1996.
5. **Mintakollekciók a valószínűségszámításhoz,** (főiskolai távoktatási jegyzet) Bp.1997.

Konferenciákon tartott előadások

Számelméleti előadások

1. **On the distribution of Fibonacci type sequences modulo 1,** Csebokszári 1981.
2. **On the distribution of $f(G_n)$ modulo 1.,** Egri Számelmélet Konferencia 1993.
3. **Valós másodfokú algebrai számok diofantikus approximációja,** BGF Tudomány Napja, Híd Kelet és Nyugat Között c. konferenciája, Budapest, 2002.

Matematika történeti előadás:

4. **Grassmann és a spiritiszták,** a Főiskolák XXIV. Matematikai Fizikai és Számítástechnikai Konferenciájának Plenáris Ülése, Kaposvár 2000.

ELOSZLÁSI ÉS APPROXIMÁCIÓS PROBLÉMÁK

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Molnár Sándor okleveles középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és számítástudományok doktori iskolája
(Diofantikus és konstruktív számelmélet programja) keretében

Témavezető: Dr. Pintér Ákos

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. ……	……
tagok:	Dr. ……	……
	Dr. ……	……

A doktori szigorlat időpontja: 200… . …… … .

Az értekezés bírálói:

Dr. ……	……
Dr. ……	……
Dr. ……	……

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ……	……
tagok:	Dr. ……	……
	Dr. ……	……
	Dr. ……	……
	Dr. ……	……

Az értekezés védésének időpontja: 200… . …… … .