Debreceni Egyetem

Informatika Kar

ELLIPTIKUS EGYENLETEK MEGOLDÁSA VÉGESELEM MÓDSZERREL

Témavezető:
Dr Baran Ágnes
egyetemi adjunktus

Készítette:
Szuetta Judit
informatika tanár

Debrecen
2010

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetet mondok témavezetőmnek, Dr Baran Ágnesnek a dolgozat készítése során nyújtott segítő munkájáért, azért, hogy mindig irányt mutatott a tudomány útvesztőjében, és nem utolsó sorban végtelen türelméért.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Fizikai jelenségek matematikai modellezésekor gyakran parciális differenciálegyenletek felírására kerül sor. Ilyen például a hullámegyenlet, mely homogén közegben terjedő hullámszerű mozgást ír le; a hővezetés egyenlete, mely a hő terjedését írja le homogén közegben; a Schrödinger-egyenlet, mellyel részecske állapotok különböző tulajdonságai határozhatók meg vagy a rezgő húr probléma. Az említett példákból is következtethetünk arra, hogy a műszaki- és természettudományokban fontos szerepet töltenek be az ott gyakran előforduló másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek.

Elliptikus egyenletek olyan fizikai jelenségek modellezésénél fordulnak elő, melyek egyensúlyi állapotokat írnak le, illetve az idő nem befolyásoló tényező.

A dolgozat elliptikus differenciálegyenletek, elsősorban a Poisson–egyenlet numerikus megoldását ismerteti a többféle megoldási eljárás közül kiválasztott végeselem módszerrel. Az elliptikus egyenletek megoldása – ezen belül a Poisson–egyenleté – igen fontos feladat, hiszen a parabolikus differenciálegyenletek is elliptikus egyenletekre vezethetők vissza azok numerikus megoldásához, mindemellett a Poisson- egyenlettel többféle fizikai jelenség modellezhető (pl: vékony rudak csavarása; mágneses tér vagy elektrosztatikus mező potenciálja; gázok illetve folyadékok áramlása; a hővezetési egyenlet, ha a hőmérséklet nem függ az időtől).

A végeselem módszernek a mérnöki munkában nagyon sok alkalmazási területe van (például repülőgép- és autóiparban). Néhány modern végeselem program különböző szimulációs munkakörnyezetet is tartalmaz. Egy rendszer modellezéséhez és elemzéséhez hatékony segítséget nyújthat a szimuláció, a különböző (esetleg extrém) környezeti paraméterek beállítása. Nem beszélve arról, hogy egy ilyen software segítségével tervezett virtuális prototípus tesztelésének, módosításának a költsége, a tér- és az időigénye, valamint a munkaerőigénye jóval kevesebb, mint egy fizikailag megvalósítotté.

A végeselem módszer összefoglalva a következő lépésekből áll:

- A kitűzött peremérték feladatról egy alkalmasan kiválasztott Hilbert–térben áttérünk a variációs egyenletre.

- Ennek létezik egyértelmű, stabil (ún. általánosított) megoldása
- A variációs feladat közelítő megoldásához a kiválasztott Hilbert–térről annak egy végesdimenziós alterére térünk át. Ebben az altérben szintén létezik egyértelmű, stabil megoldás, és a Céa-lemma alapján a diszkrét feladat közelítő megoldásának eltérése a pontos megoldástól nem nagyobb mint a legjobb közelítésé.
- A diszkrét feladat ekvivalens egy lineáris egyenletrendszerrel, melynek mátrixa szimmetrikus és pozitív definit.

A dolgozatban ezen lépések végrehajtásához szükséges elméleti ismeretek feldolgozására kerül sor, ennek gyakorlati megvalósítása a MATLAB rendszer segítségével történik. A dolgozat szerves részét képező `ellip_megold.m` program elsőfajú peremfeltétellel adott Poisson–egyenlet u megoldását szolgáltatja bármely f (adott) függvény esetén az egységnégyzeten – melynek diszkretizációjához T6 elemeket használunk.

Parciális differenciálegyenletek

Parciális differenciálegyenlet alatt olyan differenciálegyenletet értünk, melyet egy ismeretlen többváltozós függvény parciális deriváltjai ismeretében –esetleg kezdeti feltételek mellett- írunk fel.

Parciális differenciálegyenlet rendjén a benne szereplő parciális deriváltak maximális rendjét értjük.

A főrészében lineáris másodrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja:

$$\sum_{i,j} A_{ij}(x_1,...,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + F(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

ahol $u:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ és $i, j = 1,...,n$

Konstans együtthatós az egyenlet, ha a parciális deriváltak együtthatói nem függenek az $x_1,...,x_n$ változóktól. Ebben az esetben a független változók egy homogén lineáris transzformációjával az egyenlet a következő, egyszerűbb alakra hozható:

$$\sum_i c_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + F(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0 \quad (n \in \mathbf{N} \text{ és } i = 1,...,n),$$

ahol $c_i \in \{-1,0,1\}$.

A c_i együtthatók értékétől függően a következő csoportokba sorolhatjuk a parciális differenciálegyenleteket:

1. Elliptikus differenciálegyenletről beszélünk, ha bármely *i*-re $c_i = 1$.
2. Hiperbolikus differenciálegyenletről beszélünk, ha bármely *i*-re $c_i \neq 0$ és az egyik együttható előjele különbözik az összes többiétől.
3. Parabolikus differenciálegyenletről beszélünk, ha a c_i együtthatók közül pontosan egy nulla, a többi azonos előjelű. [5]

A Poisson-egyenlet

A Poisson-egyenlet

$$\Delta u + f = 0,$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, és adott $f : \Omega \to \mathbf{R}$ függvény esetén keressük az $u : \Omega \to \mathbf{R}$ függvényt. Δ a Laplace-operátort jelöli.

A kétdimenziós Laplace-operátor:

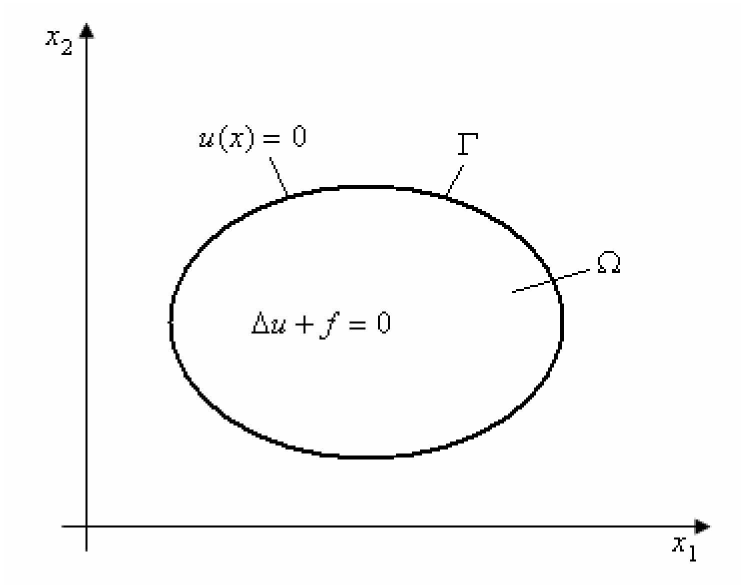
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Elliptikus egyenleteket legtöbbször valamilyen peremfeltétel mellett oldunk meg. A Poisson-egyenlet peremérték feladata:

$$\begin{aligned} \Delta u + f &= 0 \qquad x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \qquad \text{ha } x \in \Gamma \end{aligned}$$

ahol Γ az Ω tartomány pereme.

Ha $g(x) \equiv 0$, akkor homogén peremfeltételekről beszélünk.



Az adott Ω tartomány Γ peremén meg kell adnunk a keresett megoldás értékét, a tartomány belsejében érvényes a differenciálegyenlet, és ez határozza meg a megoldást.

Megfelelő feltételek – az Ω tartomány Γ peremének Lipschitz-folytonossága és a differenciáloperátor egyenletes elliptikussága – mellett egy ilyen feladat megoldása létezik, egyértelmű és folytonosan függ a feladat adataitól. A peremérték feladat korrekt kitűzésű, ha rendelkezik az egzisztenciához, az unicitáshoz és a stabilitáshoz szükséges tulajdonságokkal.

Definíció: (Lipschitz-folytonos perem)

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ korlátos tartomány. Az Ω tartomány Γ pereme Lipschitz-folytonos, ha van olyan véges lefedése nyílt $\mathbf{R}^n$-beli környezetekből, melyek mindegyikében, alkalmasan választott lokális koordinátarendszerben a perem egyenlete $x_n = \phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ alakú, ahol $\phi : \mathbf{R}^{n\text{-}1} \to \mathbf{R}$ Lipschitz-folytonos. [3]

Megjegyzés: Az n-dimenziós gömb és az n-dimenziós kocka is ilyen peremmel rendelkezik. Így feladatunkban - ahol Ω két dimenziós téglalap tartomány – a peremre teljesül a Lipschitz-folytonossági feltétel.

Definíció: (egyenletes elliptikusság)

Egy differenciáloperátort egyenletesen elliptikusnak nevezünk Ω-ban, ha az együtthatóiból összeállított $A = A(x)$ mátrix egyenletesen pozitív definit, azaz az euklideszi skalárszorzatban pozitív k_0 konstanssal teljesül

$$(A(x)\xi, \xi) \geq k_0 |\xi|^2 \text{, minden } \xi \in \mathbf{R}^n \text{-re és minden } x \in \Omega \text{-ra. [3]}$$

A Poisson-egyenletben szereplő Δ differenciáloperátor esetén az együtthatómátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

így $(A(x)\xi, \xi) = (\xi, \xi) = |\xi|^2$, ami k_0=1 mellett éppen az operátor elliptikusságát eredményezi.

Definíció: Azt mondjuk, hogy a

$$\begin{aligned} \Delta u + f &= 0 \qquad x \in \Omega \\ u(x) &= g(x) \qquad \text{ha } x \in \Gamma \end{aligned}$$

peremérték feladatnak van klasszikus megoldása, ha létezik olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvény, mely kielégíti az egyenletet és a hozzá tartozó peremfeltételt. [3]

Megjegyzés: A fenti definícióban az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ követelmény $u \in C^2(\overline{\Omega})$ helyett azt fejezi ki, hogy a második deriváltakra csak a tartomány belsejében van szükség, míg a peremfeltételek miatt $u \in C(\overline{\Omega})$-ra számítunk.

A variációs feladat

A homogén Poisson-egyenlet fenti megfogalmazásáról áttérünk az úgynevezett gyenge vagy variációs egyenletre. Ehhez szükséges a parciális integrálás tétele (kétdimenzióban):

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_\Gamma u \cdot v \cdot n_i \, ds - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartomány, $u, v : \Omega \to \mathbf{R}$, Γ a tartomány pereme, n a perem kifelé mutató normális vektora: $n = (n_1, n_2)$ és $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$

Tekintsük a Poisson-egyenlet homogén peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & & x \in \Omega \\ u(x) &= 0 & & \text{ha } x \in \Gamma \end{aligned}$$

A

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = f(x)$$

egyenletet szorozzuk meg egy olyan $v(x)$ úgynevezett tesztfüggvénnyel, mely az Ω tartományon folytonosan differenciálható és kielégíti a homogén peremfeltételeket (azaz $v(x) = 0,$ ha $x \in \Gamma$ teljesül), majd a kapott

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \cdot v(x) = f(x) v(x)$$

egyenletet integráljuk Ω felett:

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \cdot v(x) \, dx = \int_\Omega f(x) v(x) \, dx$$

Az egyenlet bal oldala:

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \cdot v(x)\, dx = -\left(\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} v(x)\, dx + \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} v(x)\, dx \right)$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} v(x)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot v(x) \cdot n_1\, ds - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1}\, dx$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} v(x)\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot v(x) \cdot n_2\, ds - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx$$

Mivel $v(x) = 0,$ ha $x \in \Gamma$, a peremen vett integrálok eltűnnek:

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} v(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1}\, dx$$

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} v(x)\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx$$

Így

$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) \cdot v(x)\, dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx$$

Ezért az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a(u,v) := \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx$$

$$\varphi(v) := \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

Egy alkalmasan kiválasztott V Hilbert-térben a fenti jelölések mellett a peremérték feladatról áttérhetünk a következő egyenletre:

Keresünk olyan $u \in V$ -t, hogy

$a(u,v) = \varphi(v)$, minden $v \in V$ esetén

Ezt nevezzük gyenge vagy variációs megfogalmazásnak.

Szoboljev-terek

L_p-terek: Legyen $1 \leq p < \infty$ valós szám, $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ az X mérhető halmazon a μ mértékre nézve p-edik hatványon integrálható függvények halmaza.

$f, g \in L_p$ esetén $f = g$ akkor és csak akkor, ha $f(x) = g(x)$ majdnem minden $x \in X$-re.

Az L_p-beli norma: ha $f \in L_p$, akkor

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

A $p = 2$ esetben L_2 a négyzetesen integrálható függvények tere, mely az

$$(f, g) = \int_X f \cdot \overline{g} \, d\mu$$

skaláris szorzattal Hilbert-tér.

Hilbert-tér: Egy X halmazt Hilbert-térnek nevezünk, ha az X belsőszorzattal ellátott lineáris tér teljes (a belsőszorzatból származó norma által indukált metrikával).

Legyen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ olyan nyílt összefüggő halmaz, melynek $\Gamma = \partial\Omega$ határa szakaszonként sima. A Soboljev-terek az $L_2(\Omega, \lambda)$ terekből származtathatók (itt λ a Lebesgue-mérték).

$L_2(\Omega, \lambda)$ az Ω fölött négyzetesen integrálható valós függvények tere.

Két függvényt, $f, g \in L_2$-t azonosnak tekintünk, ha egy Lebesgue-szerint nullmértékű halmaztól eltekintve minden $x \in X$ esetén $f(x) = g(x)$ teljesül.

$L_2(\Omega, \lambda)$ egy Hilbert-tér a következő skalárszorzattal

$$(f, g)_0 := (f, g)_{L_2} = \int_\Omega f(x) \cdot g(x) \, dx$$

és a megfelelő, belsőszorzatból származó normával:

$$\|u\|_0 = \sqrt{(u, u)_0} \,.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $f \in L_2(\Omega)$ függvény α-adrendű általánosított deriváltja, vagy Szoboljev-féle deriváltja a $g = \partial^\alpha f$, $g \in L_2(\Omega)$ függvény, ha teljesül

$$(\varphi, g)_0 = (-1)^{|\alpha|} (\partial^\alpha \varphi, f)_0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \text{ [5]}$$

Megjegyzés:

1. Itt $C^\infty(\Omega)$ jelöli az akárhányszor differenciálható függvények terét, $C_0^\infty(\Omega)$ pedig azon $C^\infty(\Omega)$-beli függvények, melyek csak Ω egy kompakt részhalmazán nem tűnnek el.
2. Ha egy függvény differenciálható a klasszikus értelemben, akkor létezik a Szoboljev-deriváltja is, és a két derivált megegyezik.

Definíció: Legyen $m \geq 0$ egész szám adott, és jelölje $H^m(\Omega)$ azon $f \in L_2(\Omega)$ függvények halmazát, melyeknek létezik a $\partial^\alpha f$ Szoboljev-féle derivátja minden $|\alpha| \leq m$ esetén.

$H^m(\Omega)$ -n a következő skalárszorzatot definiálhatjuk:

$$(f, g)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_0$$

amelyből a következő norma származik:

$$\|f\|_m := \sqrt{(f, f)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L_2(\Omega)}^2}\,.$$

Az

$$|u|_m := \sqrt{\sum_{|\alpha| = m} \|\partial^\alpha f\|_{L_2(\Omega)}^2}$$

függvény félnormát definiál $H^m(\Omega)$ -n.

$H^m(\Omega)$ -t Szoboljev-térnek nevezzük. [6]

Megjegyzés: $H^m(\Omega)$ teljes a $\|\cdot\|_m$ normával, így Hilbert-tér.

Definíció: Azon $H^m(\Omega)$ -beli függvények halmazát, amelyeknek a nyoma 0 Γ -n $H_0^m(\Omega)$ -val jelöljük.

Megjegyzés: Ha Ω korlátos, akkor $|\cdot|_m$ norma $H_0^m(\Omega)$ -n (amely ekvivalens $\|\cdot\|_m$ -val).

A variációs feladat megoldhatósága

A továbbiakban a $H^m(\Omega)$, illetve a $H_0^m(\Omega)$ terekre lesz szükségünk. Az előző fejezetben leírtak alapján:

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_\Omega u^2\, dx}\,,$$

$$|u|_1 = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx\,,$$

$$\|u\|_1 = \sqrt{|u|_1^2 + \|u\|_0^2}\,.$$

Ekkor $\|\cdot\|_1$ normát definiál $H^1(\Omega)$-n, míg $|\cdot|_1$ félnorma. Ha Ω korlátos, akkor $|\cdot|_1$ norma $H_0^1(\Omega)$-n.

A variációs feladatban válasszuk a $V = H_0^1(\Omega)$ Hilbert-teret. Így olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt keresünk, melyre

$$a(u,v) = \varphi(v) \text{ teljesül } \forall v \in H_0^1 \text{ esetén.}$$

A variációs egyenletben szereplő $a(u,v)$ kifejezés $V \times V$ -n definiált funkcionál:

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \to \mathbf{R}\,.$$

Az a bilineáris:

- mindkét változójában additív és homogén:

$$a(u+\alpha\cdot v, w) = \int_\Omega \frac{\partial(u+\alpha\cdot v)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial(u+\alpha\cdot v)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + \alpha\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\, dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) + \alpha\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) dx =$$

$$= a(u,w) + \alpha\cdot a(v,w)$$

$$a(u, v+\alpha\cdot w) = a(u,v) + \alpha\cdot a(u,w)$$

minden $\alpha \in \mathbf{R}$ -re, és minden $u, v, w \in H_0^1$-re.

Az a korlátos (vagyis folytonos):

létezik olyan $M \in \mathbf{R}$, hogy

$$|\,a(u,v)\,| \leq M\|u\|_1\|v\|_1$$

Az a szimmetrikus:

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_2}\, dx = \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx = a(v,u)$$

és V-elliptikus:

létezik olyan $m > 0$ konstans, hogy

$$a(u,u) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 dx \geq m\|v\|_1 \text{ minden } v \in H_0^1 \text{ esetén.}$$

A $\varphi(v)$ kifejezés lineáris funkcionál:

- φ additív és homogén a v argumentumában:

$$\varphi(v + \alpha \cdot w) = \int_\Omega f(x) \cdot [v(x) + \alpha \cdot w(x)]\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx + \alpha \cdot \int_\Omega f(x) w(x)\, dx =$$

$$= \varphi(v) + \alpha \cdot \varphi(w) \text{ minden } v, w \in H_0^1\text{-re és } \alpha \in \mathbf{R}\text{-re.}$$

A φ korlátos:

$$|\varphi(v)| \leq \|f\|_0 \|v\|_0$$

Tétel: (variációs feladat megoldásának egzisztenciája, unicitása, stabilitása)

Legyen az $a(u,v) = \varphi(v)$ ($\forall\, v \in V$) variációs feladatban V Hilbert-tér a $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot,\cdot)_V}$ normával, az a bilineáris forma szimmetrikus és V-elliptikus, φ lineáris funkcionál V-n. Ekkor a variációs feladatnak pontosan egy általánosított megoldása van, mely eleget tesz a következő stabilitási becslésnek:

$$\|u\|_v \leq \frac{\|\varphi\|}{m}. \text{ [2]}$$

Véges elemek

A variációs feladat numerikus megoldása során az $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományt fel fogjuk osztani véges sok résztartományra, és minden résztartomány fölött egy adott fokszámú polinommal közelítjük a keresett $u:\Omega \to \mathbf{R}^2$ függvényt.

Definíció: Legyen $T_h = \{\Omega_i,\ i=1,\ldots,M\}$ az Ω tartomány egy felosztása háromszögekre vagy négyszögekre. A T_h felosztást Ω egy triangulációjának hívjuk, ha teljesülnek a következő feltételek:

a) $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{M} \overline{\Omega}_i$

b) ha $\Omega_i \cap \Omega_j$ pontosan egy pontot tartalmaz, akkor az Ω_i és Ω_j közös csúcspontja,

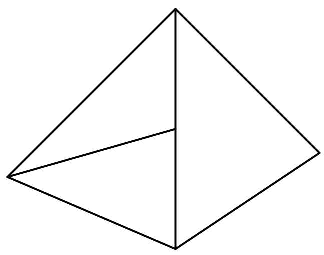
c) ha $i \neq j$ és $\Omega_i \cap \Omega_j$ egynél több pontot tartalmaz, akkor $\Omega_i \cap \Omega_j$ az Ω_i és Ω_j közös oldala. [6]

Megjegyzés:

1. Ilyen felosztás akkor létezik, ha az $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartomány Γ pereme töröttvonal.
2. A $T_h = \{\Omega_i,\ i=1,\ldots,M\}$ felosztást triangulációnak nevezzük, még akkor is, ha Ω_i-k nem háromszögek.

A továbbiakban csak háromszöges elemekkel foglakozunk.

A fenti definíció kizárja, hogy a felosztás során valamelyik háromszög csúcspontja egy másik háromszög oldalának belső pontja legyen:

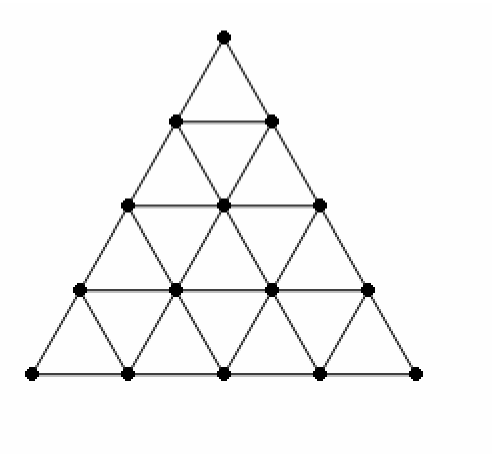


Miután az Ω poligonális tartományt felosztottuk háromszögekre, minden háromszög fölött egy adott fokszámú – esetünkben másodfokú – polinommal fogjuk az u függvényt közelíteni.

Egy kétváltozós k-adfokú polinomnak $\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ szabad paramétere van. Ez azt jelenti, hogy egy háromszög fölött alkalmasan megválasztott $\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ darab pontban előírva egy k-adfokú polinom értékét az egyértelműen megadható.

Egy ilyen alkalmas pontrendszert kapunk, ha a háromszög minden oldalát $k+1$ ponttal k egyenlő részre osztjuk úgy, hogy a szélső pontok a háromszög csúcsai; majd a szomszédos oldalak megfelelő osztópontjait összekötjük. Az oldalakon felvett pontok, illetve a szakaszok metszéspontjai $\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$ darab pontot határoznak meg.

Például $k=4$ esetén:



Ezen pontokban előírva egy kétváltozós k-adfokú polinom értékeit a polinom egyértelműen definiált a háromszög fölött. A polinom a háromszög tetszőleges oldalára leszűkítve egy egyváltozós, k-adfokú polinom lesz, amelyet az adott oldalon felvett $(k+1)$ darab pontban előírt értéke egyértelműen meghatároz. Ez azt jelenti, hogy két szomszédos háromszög közös oldalán ugyanazokat a helyettesítési értékeket előírva az egyes háromszögek fölött adott polinomok számára a két polinom meg fog egyezni a közös oldalon. Így elérhető, hogy a trianguláció háromszögein elemenként definiált polinom folytonos legyen az egész tartomány fölött.

Definíció: Azokat a lineáris funkcionálokat, melyek megadják az egyes csomópontokban a függvényértékeket, szabadsági fokoknak nevezzük. [3]

Az Ω_i-hez tartozó szabadsági fokok halmaza: $\psi_i = \{\psi^k,\ x^k \in \Omega_i\}$, illetve a lokális számozás esetén: $\psi_i = \{\psi^{i,1},...,\psi^{i,m_i}\}$ [3]

Megjegyzés:

1. Egy x^k csomóponthoz hozzárendelt ψ^k lineáris funkcionál, mint szabadsági fok esetén:

$$\psi^k(u) = u(x^k)$$

2. Szabadsági fok lehet függvényérték és a deriváltak értékei is.
Lagrange-típusú elemről beszélünk, ha a szabadsági fokok mind függvényértékek. Mi Lagrange-típusú elemekkel fogunk foglalkozni.

Minden ψ^k szabadsági fokhoz rendeljünk hozzá egy $w_k \in V$ függvényt a következők szerint:

- w_k leszűkítése Ω_i-re legyen $p_{i,k}$ polinom
- minden egyes Ω_i-n $P(\Omega_i)$ a $\{p_{i,k}\}$ polinomok lineáris halmaza, és ha az Ω_i-hez tartozó csomópontok halmaza

$$\{x^{i,1},...,x^{i,m_i}\} = \{x^{k_1},...,x^{k_{m_i}}\}$$

  akkor a

$$p_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i} p_{i,k_j}(x)\alpha_{ij}$$

  által definiált $P(\Omega_i)$-beli polinom α_{ij} együtthatói egyértelműen meg legyenek határozva
- ha $x^{k_1},...,x^{k_s}$ az Ω_i egy tetszőleges rögzített oldalán lévő csomópontok, akkor a

$$q_i(x) = \sum_{j=1}^{s} p_{i,k_j}(x)\alpha_{ij}$$

  polinom egyértelműen meg legyen határozva Ω_i oldalán a $\{\psi^{k_1}(q_i),...,\psi^{k_s}(q_i)\}$ értékek megadása után.

Ha $\psi^m(w_k) = \delta_{mk}$, akkor a V_h végeselem tér bázisa éppen $\{w_1,...,w_l\}$.

Definíció: Véges elemnek nevezünk egy $\{\Omega_i, \psi_i, P(\Omega_i)\}$ hármast. [3]

A T6 elem

Osszuk fel az $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ tartományt véges sok $\Omega_i = \Delta_i$ háromszögre, úgy hogy a háromszögek teljesítsék a trianguláció definíciójában szereplő feltételeket.

A csomópontok a háromszög csúcsai: $x^{i,1}, x^{i,2}, x^{i,3}$, valamint az oldalfelező pontok:

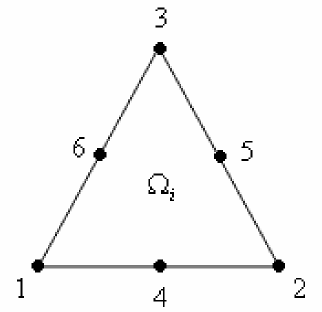
$$x^{i,4} = \frac{1}{2}\left(x^{i,1} + x^{i,2}\right),\; x^{i,5} = \frac{1}{2}\left(x^{i,2} + x^{i,3}\right),\; x^{i,6} = \frac{1}{2}\left(x^{i,1} + x^{i,3}\right)$$

$P(\Omega_i) = P_2(\Delta_i)$, a Δ_i felett definiált másodfokú polinomok tere (azaz a 6 szabadsági fokkal rendelkező, $a_{i,1} + a_{i,2}x_1 + a_{i,3}x_2 + a_{i,4}x_1x_2 + a_{i,5}x_1^2 + a_{i,6}x_2^2 = u(x^i)$ alakú polinomok).

A lineáris funkcionálok:

$$\psi_i = \left\{ \psi^{i,j} \,\middle|\, \psi^{i,j}(p) = p(x^{i,j}),\quad p \in P_2(\Delta_i),\quad 0 \le j \le 6 \right\}.$$

Egy ilyen másodrendű háromszögelemet T6-tal jelölünk.

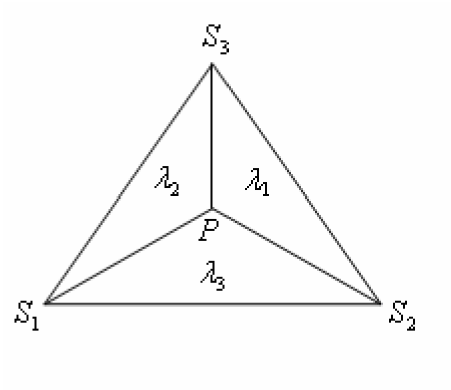


A w_l bázisfüggvények leszűkítése Δ_i-re, azaz a $p_{i,l}$ polinomok a legegyszerűbben a háromszög λ_1, λ_2, λ_3 baricentrikus koordinátáinak segítségével adható meg.

Definíció: Legyen Δ egy háromszög, jelölje $S_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ a háromszög csúcsait. Legyen továbbá $P = (x, y)$ a háromszög egy pontja. Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-ra

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

teljesül, akkor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-at a P pont baricentrikus koordinátáinak nevezzük a Δ háromszögben. [1]



A defínicióban szereplő mátrix determinánsa egyenlő a Δ háromszög területének kétszeresével:

$$|\Delta| = \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + x_3 y_1 - y_3 x_1\right)$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_2 x_3 - y_3 x_1 - y_1 x_2 = 2|\Delta|$$

Megjegyzés: A baricentrikus koordináták használatával a háromszög fölött definiált polinomok a háromszögek helyzetétől függetlenül írhatók föl.

A fentieknek megfelelően a T6 elem lokális bázisfüggvényei:

$x^{i,1}$-hez $p_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$

$x^{i,2}$-höz $p_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$

$x^{i,3}$-hoz $p_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$

$x^{i,4}$-hez $p_4 = 4\lambda_1\lambda_2$

$x^{i,5}$-höz $p_5 = 4\lambda_2\lambda_3$

$x^{i,6}$-hoz $p_6 = 4\lambda_1\lambda_3$ tartozik.

Megjegyzés:

1. Ezen függvényekre teljesül, hogy a nekik megfelelő $x^{i,j}$ pontban értékük 1, míg a többi $x^{i,j}$ pontban nulla.
2. A V_h végeselem tér w_l bázisfüggvényei folytonosak a szomszédos háromszögek közös oldalán keresztül is, hiszen $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

A Δ háromszög fölött definiált polinomok integráljainak kiszámítását a következő Lemma írja le.

Lemma: ([8]) Legyen $\Delta \in T_h$ egy tetszőleges háromszög, és jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ a Δ-beli baricentrikus koordinátákat. Ekkor

$$\int_{\Delta} \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \, dxdy = 2|\Delta| \frac{k!\, l!\, m!}{(\mathrm{k}+\mathrm{l}+\mathrm{m}+2)!}.$$

A diszkrét egyenlet

A variációs feladat közelítő megoldásához a $V = H_0^1$ helyett, annak egy $V_h \subset V$ véges n-dimenziós alterét választjuk.

V_h egy bázisa legyen $\{v_1,..,v_n\}$, ekkor $u_h \in V_h$ pontosan akkor, ha:

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

teljesül, ahol $y_1,...,y_n$ keresett.

Ezek után a variációs feladat diszkrét megfogalmazása a következő:

Olyan $u_h \in V_h$ függvényt keresünk, melyre

$a(u_h, v_h) = \varphi(v_h)$ teljesül minden $v_h \in V_h$ esetén.

Megjegyzés: Miután V_h a V Hilbert-tér altere, maga is Hilbert-tér a $\|\cdot\|_V$ normával, így az a és φ funkcionálok megtartják V-beli tulajdonságaikat V_h-ban. Ezért a variációs feladat megoldására vonatkozó tétel érvényes V_h-ban, azaz a közelítő $u_h \in V_h$ megoldás létezik, egyértelmű és stabil.

A diszkrét feladat megoldása legyen u_h, a variációs feladaté pedig u. Ekkor minden $v_h \in V_h \subset V$ esetén:

$$\left.\begin{aligned} a(u, v_h) &= \varphi(v_h) \\ a(u_h, v_h) &= \varphi(v_h) \end{aligned}\right\}$$

azaz

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \,.$$

Ez azt jelenti, hogy az $u - u_h$ hiba ortogonális a V_h altérre az $\sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ skalárszorzatban, pontosabban az u_h közelítő megoldás az u általánosított megoldás legjobb a-normájú közelítése V_h-ban.

Megjegyzés: Egy Hilbert-térben egyértelműen létezik a legjobb közelítés, és annak meghatározása a fent említett ortogonalitási tulajdonsággal történhet.

Az *a*-norma és a *V*-norma ekvivalensek, de általában a $(\cdot,\cdot)_V$ skalárszorzatban nincs szó ortogonalitásról.

Lemma: (Céa-lemma)

Legyen az $a(u,v)$ $V \times V$ -n definiált bilineáris funkcionál *V*-ben pozitív definit (azaz szimmetrikus és V-elliptikus). Ekkor a végeselem módszer hibája egy konstans szorzótól eltekintve ugyanakkora, mint a legjobb közelítésé. [2]

A numerikus megoldáshoz a $\{v_1,...,v_n\}$ V_h-beli bázis segítségével a

$$a(u_h, v_h) = \varphi(v_h) \text{ (minden } v_h \in V_h \text{ esetén)}$$

diszkrét feladat átfogalmazható a következővé:

$$a(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i, v_j) = \varphi(v_j) \text{, ahol } j = 1,...,n$$

amiből

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot a(v_i, v_j) = \varphi(v_j) \text{, ahol } j = 1,...,n$$

azaz az

$$Ay = b,$$

$y_1,...,y_n$ ismeretlenekre felírt lineáris egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = a(v_i, v_j)$$

Megjegyzés: A lineáris egyenletrendszer $A = (a_{ij})$ mátrixa szimmetrikus és pozitív definit, amely tulajdonságokat az a bilineáris funkcionáltól – és így az eredeti feladattól – örököl. [2]

A feladat végeselem megoldása

Tekintsük a

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \qquad && x \in \Omega \\
u(x) &= 0 \qquad && \text{ha } x \in \Gamma
\end{aligned}
$$

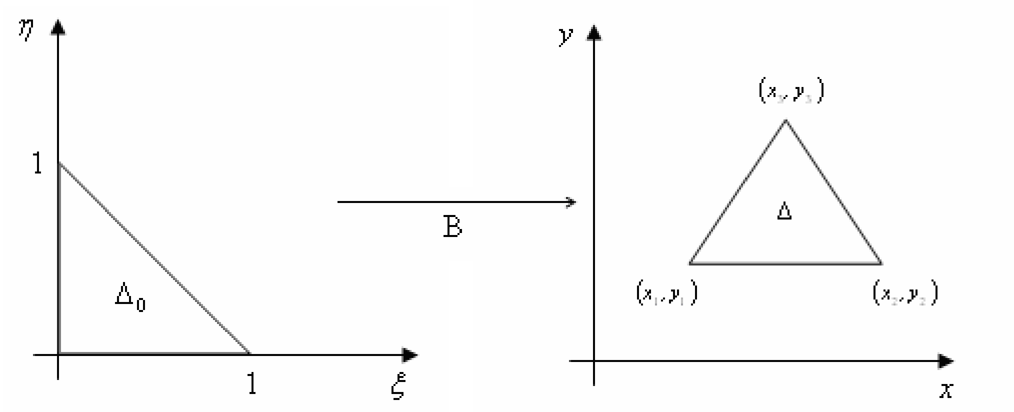
homogén Poisson-egyenletet az egységnégyzeten.

A gyakorlati megvalósításhoz:

- Kiválasztjuk a V_h tér háromszögenként másodfokú polinomokból álló bázisát
- Felépítjük az A mátrixot
- A jobboldali vektor komponenseit kiszámítjuk numerikus integrálással
- Megoldjuk a keletkezett lineáris egyenletrendszert
- A kapott y megoldási vektor szolgáltatja a diszkrét feladat közelítő megoldását.

Végezzük el a tartomány diszkretizációját a trianguláció definíciójában szereplő feltételeknek eleget tevő T6 háromszög elemekkel. Adjuk meg a T6 elemhez tartozó bázist.

Ehhez vizsgáljuk meg a B lineáris leképezést, mely a következő Δ_0, úgynevezett standard háromszöget transzformálja tetszőleges Δ háromszöggé:



Ekkor

$$
\mathrm{B}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$

ahol

$$
\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}
$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix} y_3 - y_1 & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

ahol $\det(B) = 2|\Delta|$, a háromszög területének kétszerese.

Az *A* mátrix elemeinek kiszámításához szükséges az integráltranszformációs formula:

$$\int_\Delta \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} q(x,y)\,dxdy = \det(B)\int_{\Delta_0}\left(\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\cdot p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

illetve

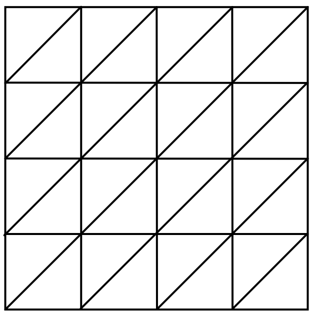
$$\int_\Delta \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} q(x,y)\,dxdy = \det(B)\int_{\Delta_0}\left(\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\cdot p(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

ahol

$$v(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$$
$$p(\xi,\eta) = q(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)).$$

Az egységnégyzet standard triangulációja:

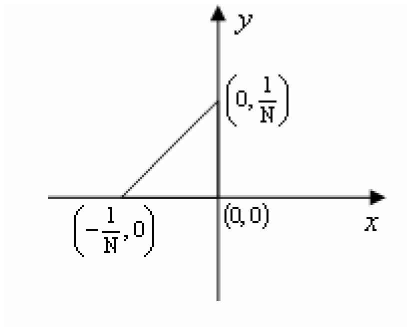
Felosztjuk az egységnégyzetet N^2 darab egybevágó kisebb négyzetre, majd minden kapott négyzetet az DNY-ÉK irányú átlójával két háromszögre:



N=4 esetén a standard trianguláció

Ekkor kétféle háromszöggel van dolgunk:

Az első típus a $(0,0)$, $\left(0, \frac{1}{N}\right)$, $\left(-\frac{1}{N}, 0\right)$ csúcspontú háromszögből eltolással kapható háromszögek.



Itt a B leképezés mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

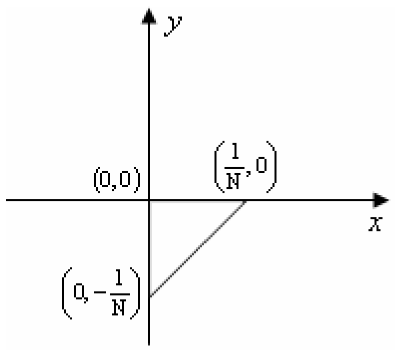
Ekkor

$$\det(B) = \frac{1}{N^2}$$

és

$$B^{-1} = N \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A második típusú háromszögek a $(0,0)$, $\left(\frac{1}{N}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{1}{N}\right)$ csúcspontú háromszögből eltolással kapható háromszögek.



Ebben az esetben a B leképezés mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

továbbá

$$\det(\mathrm{B}) = \frac{1}{\mathrm{N}^2}$$

és

$$\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{N} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ha Δ egy első típusú háromszög, akkor az integráltranszformációs formula alapján:

$$a(u_i, u_j) = \int_{\Delta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \det(\mathrm{B}) \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}^2} \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \cdot (-\mathrm{N}) \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \cdot (-\mathrm{N}) \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \cdot \mathrm{N} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \cdot 0 \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \cdot \mathrm{N} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \cdot 0 \right) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}^2} \int_{\Delta_0} \mathrm{N}^2 \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial v_j}{\partial \eta} + \mathrm{N}^2 \frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta .$$

Ha Δ egy második típusú háromszög, akkor:

$$a(u_i, u_j) = \int_{\Delta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \det(\mathrm{B}) \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}^2} \int_{\Delta_0} \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v_i}{\partial \eta} \cdot \mathrm{N} \right) \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v_j}{\partial \eta} \cdot \mathrm{N} \right) +$$

$$+\left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi}\cdot(-\mathrm{N})+\frac{\partial v_i}{\partial \eta}\cdot 0\right)\cdot\left(\frac{\partial v_j}{\partial \xi}\cdot(-\mathrm{N})+\frac{\partial v_j}{\partial \eta}\cdot 0\right)d\xi d\eta =$$

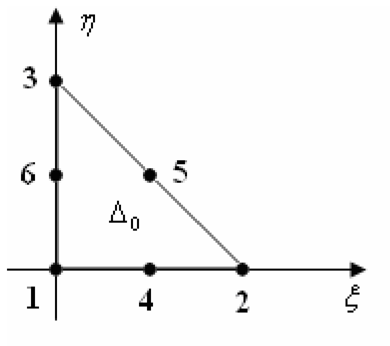
$$=\frac{1}{\mathrm{N}^2}\int_{\Delta_0}\mathrm{N}^2\frac{\partial v_i}{\partial \eta}\frac{\partial v_j}{\partial \eta}+\mathrm{N}^2\frac{\partial v_i}{\partial \xi}\frac{\partial v_j}{\partial \xi}\,d\xi d\eta=\int_{\Delta_0}\left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi}\frac{\partial v_j}{\partial \xi}+\frac{\partial v_i}{\partial \eta}\frac{\partial v_j}{\partial \eta}\right)d\xi d\eta\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a lineáris egyenletrendszer A alapmátrixának felírásához azt az A_{loc} lokális mátrixot kell meghatározni, melynek a_{ij} elemei

$$a_{ij}=\int_{\Delta_0}\left(\frac{\partial p_i}{\partial \xi}\frac{\partial p_j}{\partial \xi}+\frac{\partial p_i}{\partial \eta}\frac{\partial p_j}{\partial \eta}\right)d\xi\, d\eta\ \ (i,j=1,\ldots,6),$$

ahol a p_i $(i=1,\ldots,6)$ függvények a referencia háromszög fölött definiált másodfokú polinomok.

A Δ_0 referencia háromszög baricentrikus koordinátái:



$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\1\end{pmatrix},\text{ azaz }\lambda_1=1-\xi-\eta,\ \lambda_2=\xi,\ \lambda_3=\eta\,.$$

Így a Δ_0 fölött definiált polinomok:

$$p_1=\lambda_1(2\lambda_1-1)=(1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)$$
$$p_2=\lambda_2(2\lambda_2-1)=\xi(2\xi-1)$$
$$p_3=\lambda_3(2\lambda_3-1)=\eta(2\eta-1)$$
$$p_4=4\lambda_1\lambda_2=4(1-\xi-\eta)\xi$$
$$p_5=4\lambda_2\lambda_3=4\xi\eta$$
$$p_6=4\lambda_1\lambda_3=4(1-\xi-\eta)\eta$$

A referencia háromszög fölött adott bázisfüggvények parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} = \frac{\partial[(1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)]}{\partial \xi} = \frac{\partial\left[1-3\xi-3\eta+2\xi^2+4\xi\eta+2\eta^2\right]}{\partial \xi} =$$

$$= 4\xi+4\eta-3 = 4\lambda_2+4\lambda_3-3$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} = \frac{\partial[(1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta)]}{\partial \eta} = \frac{\partial\left[1-3\xi-3\eta+2\xi^2+4\xi\eta+2\eta^2\right]}{\partial \eta} =$$

$$= 4\xi+4\eta-3 = 4\lambda_2+4\lambda_3-3$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = \frac{\partial[\xi\,(2\xi-1)]}{\partial \xi} = \frac{\partial\left[2\xi^2-\xi\right]}{\partial \xi} = 4\xi-1 = 4\lambda_2-1$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \eta} = \frac{\partial[\xi\,(2\xi-1)]}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \xi} = \frac{\partial[\eta\,(2\eta\text{-}1)]}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \eta} = \frac{\partial[\eta\,(2\eta-1)]}{\partial \eta} = \frac{\partial\left[2\eta^2-\eta\right]}{\partial \eta} = 4\eta-1 = 4\lambda_3-1$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial \xi} = \frac{\partial[4(1-\xi-\eta)\,\xi]}{\partial \xi} = \frac{\partial\left[4\xi-4\xi^2-4\xi\eta\right]}{\partial \xi} = 4-8\xi-4\eta = 4\lambda_1-4\lambda_2$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial \eta} = \frac{\partial[4(1-\xi-\eta)\,\xi]}{\partial \eta} = \frac{\partial\left[4\xi-4\xi^2-4\xi\eta\right]}{\partial \eta} = -4\xi = -4\lambda_2$$

$$\frac{\partial p_5}{\partial \xi} = \frac{\partial[4\xi\eta]}{\partial \xi} = 4\eta = 4\lambda_3$$

$$\frac{\partial p_5}{\partial \eta} = \frac{\partial[4\xi\eta]}{\partial \eta} = 4\xi = 4\lambda_2$$

$$\frac{\partial p_6}{\partial \xi} = \frac{\partial[4(1-\xi-\eta)\,\eta]}{\partial \xi} = \frac{\partial\left[4\eta-4\xi\eta-4\eta^2\right]}{\partial \xi} = -4\eta = -4\lambda_3$$

$$\frac{\partial p_6}{\partial \eta} = \frac{\partial[4(1-\xi-\eta)\,\eta]}{\partial \eta} = \frac{\partial\left[4\eta-4\xi\eta-4\eta^2\right]}{\partial \eta} = 4-4\xi-8\eta = 4\lambda_1-4\lambda_3$$

Az A_{loc} lokális mátrix szimmetrikus, így elegendő a felső háromszöghöz tartozó a_{ij} elemeket kiszámolni:

$$a_{ij} = a\left(p_i, p_j\right)\ (i, j = 1,\ldots,6)$$

$$a_{11} = \int_{\Delta_0} \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\ d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)^2 + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)^2\ d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} 32\lambda_2^2 + 32\lambda_3^2 + 64\lambda_2\lambda_3 - 48\lambda_2 - 48\lambda_3 + 18\ d\xi d\eta =$$

$$= 2\cdot|\Delta_0|\left(32\frac{2!}{(2+2)!} + 32\frac{2!}{(2+2)!} + 64\frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 48\frac{1!}{(1+2)!} - 48\frac{1!}{(1+2)!} + 18\frac{0!}{2!}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3} = 1$$

$$a_{12} = \int_{\Delta_0} \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta}\frac{\partial p_2}{\partial \eta}\ d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot(4\lambda_2 - 1) + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot 0\ d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} 16\lambda_2^2 - 16\lambda_2 + 16\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_3 + 3\ d\xi d\eta =$$

$$= 2\cdot|\Delta_0|\left(16\cdot\frac{2!}{(2+2)!} - 16\cdot\frac{1!}{(1+2)!} + 16\cdot\frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 4\cdot\frac{1!}{(1+2)!} + 3\cdot\frac{0!}{(0+2)!}\right) = \frac{1}{6}$$

$$a_{13} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot 0 + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot(4\lambda_3 - 1)\ d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} 16\lambda_3^2 - 16\lambda_3 + 16\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_2 + 3\ d\xi\, d\ =$$

$$= 2\cdot|\Delta_0|\left(16\cdot\frac{2!}{(2+2)!} - 16\cdot\frac{1!}{(1+2)!} + 16\cdot\frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 4\cdot\frac{1!}{(1+2)!} + 3\cdot\frac{0!}{(0+2)!}\right) = \frac{1}{6}$$

$$a_{14} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot(4\lambda_1 - 4\lambda_2) + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot(-4\lambda_2)\ d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} 16\lambda_1\lambda_2 + 16\lambda_1\lambda_3 - 32\lambda_2\lambda_3 - 32\lambda_2^2 - 12\lambda_1 + 24\lambda_2\ d\xi d\eta =$$

$$= 2\cdot|\Delta_0|\left(16\cdot\frac{1!1!}{(1+1+2)!} + 16\cdot\frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 32\cdot\frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 32\cdot\frac{2!}{(2+2)!} - \right.$$

$$\left. -12\cdot\frac{1!}{(1+2)!} + 24\cdot\frac{1!}{(1+2)!}\right. = -\frac{2}{3}$$

$$a_{15} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot 4\lambda_3 + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3)\cdot 4\lambda_2\ d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} 16\lambda_2^2 + 16\lambda_3^2 + 32\lambda_2\lambda_3 - 12\lambda_2 - 12\lambda_3\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 32 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 12 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} - 12 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{16} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3) \cdot (-4\lambda_3) + (4\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3) \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_3) \; d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\Delta_0} (-32\lambda_3^2 + 16\lambda_1\lambda_2 + 16\lambda_1\lambda_3 - 32\lambda_2\lambda_3 - 12\lambda_1 + 24\lambda_3) \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(-32 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} + 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - \right.$$

$$\left. - 32 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 12 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} + 24 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$a_{22} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 - 1)^2 + 0^2 \; d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} 16\lambda_2^2 - 8\lambda_2 + 1 \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} - 8 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} + \frac{0!}{(0+2)!} \right) = \frac{1}{2}$$

$$a_{23} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_1 - 1) \cdot 0 + 0 \cdot (4\lambda_3 - 1) \; d\xi d\eta = 0$$

$$a_{24} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 - 1) \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_2) + 0 \cdot (-4\lambda_2) \; d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} 16\lambda_1\lambda_2 - 16\lambda_2^2 - 4\lambda_1 + 4\lambda_2 \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} - 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} + 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$a_{25} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 - 1) \cdot 4\lambda_3 + 0 \cdot 4\lambda_2 \; d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} 16\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_3 \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{26} = \int_{\Delta_0} (4\lambda_2 - 1)(-4\lambda_3) + 0 \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_3) \; d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} (-16\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_3) \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(-16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} + 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{33} = \int_{\Delta_0} 0^2 + (4\lambda_3 - 1)^2 \; d\xi d\eta = \int_{\Delta_0} 16\lambda_3^2 - 8\lambda_3 + 1 \; d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} - 8 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} + \frac{0!}{(0+2)!} \right) = \frac{1}{2}$$

$$a_{34} = \int\limits_{\Delta_0} 0 \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_2) + (4\lambda_3 - 1) \cdot (-4\lambda_2)\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} (-16\lambda_2\lambda_3 + 4\lambda_2)\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(-16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} + 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{35} = \int\limits_{\Delta_0} 0 \cdot 4\lambda_3 + (4\lambda_3 - 1) \cdot 4\lambda_2\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_2\lambda_3 - 4\lambda_2\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{36} = \int\limits_{\Delta_0} 0 \cdot (-4\lambda_3) + (4\lambda_3 - 1) \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_3)\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_1\lambda_3 - 16\lambda_3^2 + 4\lambda_1 - 4\lambda_3\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} - 4 \cdot \frac{1!}{(1+2)!} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$a_{44} = \int\limits_{\Delta_0} (4\lambda_1 - 4\lambda_2)^2 + (-4\lambda_2)^2\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_1^2 + 32\lambda_2^2 - 32\lambda_1\lambda_2\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 32 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} - 32 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} \right) = \frac{8}{3}$$

$$a_{45} = \int\limits_{\Delta_0} (4\lambda_1 - 4\lambda_2) \cdot 4\lambda_3 + (-4\lambda_2) \cdot 4\lambda_2\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_1\lambda_3 - 16\lambda_2\lambda_3 - 16\lambda_2^2\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} \right) = -\frac{4}{3}$$

$$a_{46} = \int\limits_{\Delta_0} (4\lambda_1 - 4\lambda_2) \cdot (-4\lambda_3) + (-4\lambda_2) \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_3)\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 32\lambda_2\lambda_3 - 16\lambda_1\lambda_2 - 16\lambda_1\lambda_3\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(32 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} \right) = 0$$

$$a_{55} = \int\limits_{\Delta_0} (4\lambda_3)^2 + (4\lambda_2)^2\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_2^2 + 16\lambda_3^2\ d\xi d\eta = 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} \right) = \frac{8}{3}$$

$$a_{56} = \int\limits_{\Delta_0} 4\lambda_3 \cdot (-4\lambda_3) + 4\lambda_2 \cdot (4\lambda_1 - 4\lambda_3)\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_1\lambda_2 - 16\lambda_2\lambda_3 - 16\lambda_3^2\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} - 16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} \right) = -\frac{4}{3}$$

$$a_{66} = \int\limits_{\Delta_0} (-4\lambda_3)^2 + (4\lambda_1 - 4\lambda_3)^2\ d\xi d\eta = \int\limits_{\Delta_0} 16\lambda_1^2 + 32\lambda_3^2 - 32\lambda_1\lambda_3\ d\xi d\eta =$$

$$= 2 \cdot |\Delta_0| \left(16 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} + 32 \cdot \frac{2!}{(2+2)!} - 32 \cdot \frac{1!1!}{(1+1+2)!} \right) = \frac{8}{3}$$

$$A_{loc} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszer felírásához szükséges

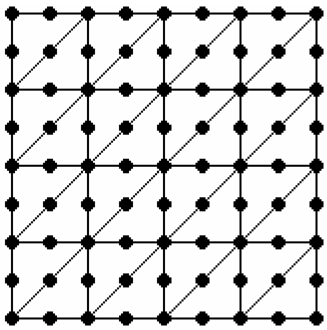
$$\varphi(v_j) = \int_{\Omega} f(x) v_j(x)\, dx \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

integrálok meghatározásához a következő kubatúra képletet használjuk:

$$\int_{\Omega} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Delta_i} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{m} |\Delta_i| \frac{f_{i1} + f_{i2} + f_{i3}}{3},$$

ahol $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ az Ω egy triangulációja, f_{i1}, f_{i2}, f_{i3} az f függvény helyettesítési értékei a Δ_i háromszög oldalfelező pontjaiban. [1]

Ha az egységnégyzet standard triangulációjakor a négyzet oldalait N egyenlő részre osztjuk, akkor a V_h tér leírásához $n = (2N+1)^2$ függvényt használunk. Ezek a kis háromszögek csúcspontjaihoz és oldalfelező pontjaihoz rendelt függvények, minden v_i függvény ezen pontok közül pontosan egyben vesz fel nullától különböző értéket: 1-et.



N= 4 esetén az ábrán látható pontokhoz tartozó v_i függvényekre van szükség.

Az $\int_\Omega f(x)v_j(x)\,dx$ integrálok közelítésénél a kubatúra képlet alapján az $f(x)v_j(x)$ függvényeknek a háromszögek oldalfelező pontjaiban felvett helyettesítési értékeivel dolgozunk.

$$\int_{\Delta_i} f(x)v_j(x)\,dx \approx \frac{|\Delta_i|}{3}\left(f_{i_1}v_{i_1} + f_{i_2}v_{i_2} + f_{i_3}v_{i_3}\right),$$

ahol $f_{i_1}v_{i_1}, f_{i_2}v_{i_2}, f_{i_3}v_{i_3}$ a Δ_i háromszög oldalfelező pontjaiban az $f(x)v_j(x)$ helyettesítési értéke.

Ha a v_j függvény valamelyik háromszög csúcspontjához tartozik, akkor értéke az összes oldalfelező pontban 0. Ha v_j valamelyik háromszög egyik oldalfelező pontjához tartozik, akkor itt az értéke 1, a másik két oldalfelező pontban pedig 0. Így az integrálközelítő összeg értéke egy ilyen háromszög fölött $\frac{|\Delta|}{3}f_j$, ahol f_j az f függvény azon oldalfelező pontbeli értéke, melyben v_j nem tűnik el., $|\Delta|$ a kis háromszög területe. A négyzet belsejében elhelyezkedő oldalfelező pontok két háromszöghöz is tartoznak, így az Ω fölötti integrálközelítő összeg ilyen v_j függvény esetén $\frac{2\cdot|\Delta|}{3}f_j$, míg a peremen elhelyezkedő felezőpontok esetén $\frac{|\Delta|}{3}f_j$.

Az inhomogén peremfeltétellel adott feladatot a diszkrét megoldás során homogén peremfeltétellel adott feladatra vezetjük vissza. Ha a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\left(n = (2N+1)^2\right)$ függvényeket két csoportra osztjuk aszerint, hogy belső- ($v_i, i \in I_b$) vagy perempontokhoz

($v_i, i \in I_p$) tartoznak – ahol $I_b \cup I_p = \{1, 2, \ldots, (2N+1)^2\}$, akkor a keresett $u_h = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ függvény

$$u_h = \sum_{i \in I_b} y_i v_i + \sum_{i \in I_p} y_i v_i$$

alakba írható, ahol a perempontokban ismert az u_h függvény értéke.

Az $Ay = b$ lineáris egyenletrendszer felírásánál figyelmen kívül hagyjuk a peremfeltételt, majd az y vektor perempontbeli ($i \in I_p$) koordinátái helyett a g függvény azokban felvett helyettesítési értékeit írjuk. Ekkor az y ismeretlen vektor néhány koordinátája már adott, az ezeknek megfelelő tagokat az egyenletrendszer jobboldalára rendezzük, majd az $i \in I_p$ indexű sorokat elhagyjuk a rendszerből. A kapott egyenletrendszer megoldása után a keresett y vektort kapjuk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Stoyan Gisbert-Takó Galina: Numerikus módszerek I., *ELTE-TypoTEX, Budapest, 2002*

[2] Stoyan Gisbert-Takó Galina: Numerikus módszerek II., *ELTE-TypoTEX, Budapest, 1995*

[3] Stoyan Gisbert-Takó Galina: Numerikus módszerek III., *ELTE-TypoTEX, Budapest, 1997*

[4] Stoyan Gisbert: MATLAB, *Typotex, Budapest, 2008*

[5] J. N Bronstein, K. A Szemangyejev, G. Musiol, H. Mühlig: Matematikai kézikönyv, *TypoTEX, Budapest, 2000*

[6] Braess, Dietrich: Finite elements, Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics, *Cambridge University Press, 2007*

[7] S. Brenner, R. L. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 2nd edition, *Springer, 2005*

[8] Grundman, Maller: Invariant integration formulas for the n-simplex by combinatorical methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis 15, 282-290*

[9] http://www.mathworks.com