DE TTK

1949

Matematikai kompetenciák vizsgálata, értékelése, fejlesztése a középiskolai matematikaoktatásban

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző:Téglási Ilona

Témavezető: Dr. Czeglédy István

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi Doktori Tanács

Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2015.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2015 június 12.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy ***Téglási Ilona*** *doktorjelölt 2009- 2015 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.*

Debrecen, 2015. június 12 .

a témavezető aláírása

A doktori értekezés betétlapja

MATEMATIKAI KOMPETENCIÁK VIZSGÁLATA, ÉRTÉKELÉSE, FEJLESZTÉSE A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAOKTATÁSBAN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a ……………………………… tudományágban

Írta: Téglási Ilona, okleveles matematika-fizika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskolája
(Didaktika – szakmódszertan programja) keretében

Témavezető:
Dr. Czeglédy István

A doktori szigorlati bizottság:
elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 20... . ...

Az értekezés bírálói:
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:
elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20... . ...

Tartalomjegyzék:

Hipotézisek, rövid áttekintés

Dolgozatomban a középiskolai korosztály matematikai kompetenciáinak fejlettségét és a hagyományos iskolai teljesítmény értékelést szeretném összehasonlítani. Olyan mérési módszert szeretnék kidolgozni, amelynek segítségével vizsgálni lehet a középiskolai tanulók matematikai kompetenciáit a hagyományos teljesítmény értékeléssel összehasonlítva. A következő kérdésekre szeretnék választ kapni:

1. Milyen összefüggés van a matematikai teljesítmény és a matematikai készségek, képességek fejlettsége között?
2. Hogyan lehet a kettőt összehasonlítani?
3. Milyen következtetéseket lehet levonni az összehasonlításból a tanulók számára a fejlesztendő területek meghatározása érdekében?
4. Hogyan lehet az iskolai értékelésben figyelembe venni a tanulók matematikai kompetenciájának fejlettségét?

A kérdésekkel kapcsolatos hipotéziseim a következők:

1. A matematikai teljesítmény növekedése a matematikai kompetencia fejlettségével korrelációban áll.
2. A matematikai teljesítmény és a kompetencia mérésére kidolgozott hányados alkalmas a tanulók matematikai teljesítő képességének, potenciáljának mérésére.
3. A matematikai kompetencia mind tartalom központú, mind tevékenység alapú, problémacentrikus tanítási stratégiákkal fejleszthető.
4. Új típusú, kompetenciákra fókuszáló szemlélet segít meghatározni a tanárnak a tanulók erősségeit, gyengeségeit, a fejlesztendő területeket.

A feltett kérdések megválaszolásához és a hipotézisek igazolásához először egy általános áttekintést adok a matematikai kompetencia értelmezéséről, a kompetencia alapú oktatás koncepciójáról, annak alapgondolatától a bevezetéséig. Ezután ismertetem azt a felmérést és kutatást, melyet a kérdések megválaszolásához végeztem négy középiskolai évfolyam összesen 278 tanulóján. Évfolyamonként egy-egy 5 feladatból álló feladatlapot készítettem és oldattam meg a tanulókkal. Vizsgáltam a feladatokra adott megoldásaikat mind a hagyományos matematikai teljesítmény, mind egy újfajta kompetencia értékelés szerint. Az eredményekből megállapítottam egy olyan értéket (hányadost), amely szándékaim szerint jól modellezi a tanulók teljesítményének és képességeinek viszonyát. Feltevésem, hogy a kétféle megközelítés egymással korrelációban áll, és a matematikai képességek fejlettségének növekedése a teljesítmény növekedését vonja maga után.
A kétféle értékelés összehasonlítását két osztály (11. és 12. évfolyam) négy témazáró dolgozatánál is elvégeztem. Ennek célja, hogy megmutassam, a kidolgozott mérési módszer hogyan alkalmazható az iskolai oktatásban, és milyen egyedi következtetéseket lehet levonni belőle.
Véleményem szerint a kompetencia alapú oktatási modell bevezetésével át kell alakulnia az iskolai értékelési rendszernek is, mely figyelembe veszi nem csak a teljesítményt, hanem a kompetenciát is. Dolgozatom további részében néhány példát szeretnék bemutatni arra, hogyan lehet a tanulók írásos munkáiból következtetni a matematikai kompetenciákra.

Végezetül néhány következtetést fogalmazok meg a lehetséges fejlesztési irányokról.

A dolgozat egy hosszútávú kutatás kezdetét jelenti. Célja elsősorban a problémák feltárása és olyan vizsgálati módszer kialakítása, mely a közoktatás körülményei között is jól alkalmazható. A fejlesztési módszerek kipróbálása, és azok eredményességének kimutatása további vizsgálatokat igényel, mely túlmutat jelen dolgozat keretein.

Hypotheses, short summary

In my dissertation I would like to compare the advancement of mathematical competences and the traditional school evaluation of mathematical achievement of secondary school students. I would like to develop a measurement method, in which we can examine the secondary school students' mathematical competences in comparison with the achievement. I would like to find the answer to the following questions:

1. What is the connection between mathematical achievement and the advancement of mathematical skills and abilities?
2. How is it possible to compare them?
3. What conclusions can we draw from the comparison to define the areas of further development for the students?
4. How is it possible to take into account the advancement of mathematical competences in school evaluation?

My hypotheses regarding the questions above are:

1. The growth of school achievement is in correlation with the advancement of mathematical competences.
2. The defined qoutient of the mathematical achievement points and the competence points is suitable to measure students' mathematical capacity, potential.
3. We can develop mathematical competences with content based teaching methods as well as activity and problem based teaching strategies.
4. A new point of view, focusing on the competences helps the teacher to find out the students' strengths and weaknesses and to define the fields of development.

To find the answers to these questions and to prove the hypotheses, first I give a general review of the interpretation of mathematical competences, the conception of competence based education from the principles to the introduction. Then I present the survey and research carried out with 278 secondary school students of four grades to answer the hypotheses. I prepared tests with 5 exercises for each grades. I examined the students' solutions according to the traditional school evaluation methods as well as to a new kind of competence evaluation method. From the results of the two different evaluations I defined a value (a quotient), which can model the connection between the students' achievement and competences. According to my assumptions, the two different types of approach is in correlation, and the development of mathematical competences implies the growth of achievement.
I have carried out the above mentioned comparison of the two different types of evaluation also for four school tests of two classes of grades 11 and 12. The aim of this second research is to show how the elaborated evaluation method can be used in school situations, and what conclusions can be drawn from this for some students.
With the introduction of competence based education the school evaluation system should also be transformed so as to take into account the competences as well as the achievement. Henceforth some examples are represented to show how students' mathematical competences can be concluded from their written works.
Finally I draw some conclusions concerning the possible ways of development.

The present work is only the beginning of a long research. The main goal is to reveal some problems and to develop a new examination method, which can also be used in the present circumstances of public education. Testing the development strategies, and the demonstration of their results need further research, which is beyond the frames of the current work.

1. A matematikai kompetenciáról általában – felfogások és értelmezések. A kompetencia fogalom fejlődése

1.1. A kulcskompetenciák és a matematikai kompetencia

A XXI. század első évtizedében az oktatás különböző szintjein nagyon sok szó esik a különböző kompetenciákról, kompetencia alapú oktatásról. Az Európai Bizottság 2000-ben ajánlást adott ki a tagállamok oktatásának fejlesztésére, melyet az Európai Tanács lisszaboni különleges ülésszaka fogalmazott meg. Ebben a tagállamok számára olyan, a tudásalapú társadalom kialakítására alkalmas oktatás bevezetését javasolja, amely dinamikusabb, versenyképesebb munkaerőt, nagyobb foglalkoztatási arányt, erősebb társadalmi kohéziót biztosítva alapját képezheti egy fenntartható fejlődésnek. Ennek megvalósításához új típusú, magas szintű és színvonalú oktatási és képzési rendszert kell kialakítani. Az Európai Bizottság kidolgozta az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciák európai referenciakeretét. Ez tartalmazza az információs és kommunikációs technológiák és egyéb technológiák alkalmazásához szükséges alapvető készségeket, az idegen nyelvi, a vállalkozói, a szociális képességeket, valamint az alapvető írás-olvasási, számolási készséget, a matematikai és természettudományos alapkészségeket, valamint a kultúra befogadásának képességét. Ezután az Európai Tanács barcelonai értekezletén elfogadott egy részletes munkaprogramot a közös célok eléréséhez, melyet 2010-ig kellett kidolgozni. 2006-ban az Európai Parlament és Tanács elfogadta a 2006/962/EK ajánlását (2006. december 18.), az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciák referenciakeretét. [http://eur-lex.europa.eu/legal-content]. Mindeközben más fórumokon is komoly kutatások folytak a sikeres élethez szükséges kulcskompetenciák meghatározásában. Az OECD DeSeCo (Kompetenciák meghatározása és kiválasztása) projektje azt vizsgálta, melyek azok az alapvető kompetenciák, amelyek a sikeres élethez és a jól működő gazdaság és társadalom megteremtéséhez szükségesek. Az ASEM (Ázsia-Európa Találkozó) az egész életen át tartó tanulás szempontjából átfogóan viszgálta az alapvető készségeket és képességeket. Megfogalmazásuk szerint a kompetencia „az egyén képességeinek és szélesebb értelemben vett társadalmi céljainak magasabb szintű integrációját jelenti” [21]. A tantervekben való megjelenését a kompetenciáknak az Eurydice vizsgálta (kereszttantervi kompetenciák). Az alapvető kompetenciák fejlesztésének fontosságára hívta fel a figyelmet az OECD által szervezett PISA (Programme for International Student Assessment) felmérés is, mely 2000-től három évenként a résztvevő országok 15 éves korosztályának vizsgálja a matematikai, szövegértési, természettudományos készségeit és képességeit, valamint a motivációt és a tanulási attitűdöket. Ilyen előzmények után határozták meg, melyek azok a kulcskompetenciák, melyeknek elsajátítására a tagállamok oktatásának különösen nagy hangsúlyt kell fektetnie, és mindezt az egész életen át tartó tanulás szemszögéből nézve kell megvalósítani. A munkacsoport egy nyolc kompetenciából álló referenciakeretet határozott meg. Megközelítésük szerint a kulcskompetencia a készségek, ismeretek, adottságok és attitűdök olyan együttese, mellyel mindenkinek rendelkeznie kell ahhoz, hogy a társadalomba beilleszkedve képes legyen sikeres életet folytatni, személyiségét fejleszteni és a munkaerőpiacon eséllyel elhelyezkedni. Az ajánlás szerint ezeket a kulcskompetenciákat a kötelező oktatás keretein belül kell elsajátítani, és ezek képezik az alapját az egész életen át tartó tanulás képességének - a kulcskompetenciák elengedhetetlenek a változásokhoz való rugalmas alkalmazkodáshoz, a változások befogadásához, saját sorsunk alakításához. A kulcskompetenciák nyolc területe a következő:

- anyanyelvi kompetencia
- idegennyelvi kompetencia
- matematikai, természettudományos és technológiai kompetenciák
- digitális kompetencia
- a tanulás tanulása
- személyközi és állampolgári kompetenciák
- vállalkozói kompetencia
- kulturális kompetencia.

Az EU ajánlása mellett megújulást követelt az is, hogy a PISA felmérések alapján a magyar fiatalok tudása úgy tűnik, lemaradóban van bizonyos fejlett és fejlődő országok fiataljaihoz képest: mint megfogalmazták, tudásuk nem elég modern, a mai kor kihívásainak nem felel meg. Ennek hatására hazánkban is elindultak olyan projektek, melyek az oktatás fejlesztését szolgálták. 2002-ben a Nemzeti Fejlesztési Terv keretében megfogalmazták azokat a kompetenciákat, amelyekre a közoktatásnak különös figyelmet kell fordítani. Már a 2003-as Nemzeti Alaptantervben megjelent a kompetencia fogalma (243/2003(XII:17.) Kormányrendelet), de konkrét formában először a 2007-es Nemzeti Alaptantervben jelentek meg a következőképpen (202/2007(VIII:31.) Kormányrendelet):

- anyanyelvi kommunikáció
- idegennyelvi kommunikáció
- matematikai kompetencia
- természettudományos kompetencia
- digitális kompetencia
- hatékony és önálló tanulás képessége
- szociális és állampolgári kompetencia
- kezdeményezőképesség és vállalkozói kompetencia
- esztétikai-művészeti tudatosság és kifejező képesség.

Mindeközben megindultak a HEFOP (Humán Erőforrás Fejlesztési Operatív Program)-on keresztül a tananyag és módszertani fejlesztő munkák, majd pályázati kereteken belül a kidolgozott programok kipróbálása különböző iskolákban. Mára ennek kézzelfogható eredményei találhatók tankönyvek, segédanyagok, interaktív oldalak, elektronikus tudástárak formájában. A szemlélet elterjedését azonban lassította a pedagógusok egy részének bizonytalansága, elutasító magatartása, a közoktatási folyamatok változásainak nehézkessége, sőt időnként a szülők negatív reakciója is. Minden újdonságot nehéz elfogadni, de ha jól elő van készítve, és alá van támasztva vizsgálatokkal, akkor az megkönnyíti az elfogadást. A közben eltelt évtized alatt a közoktatásban elterjedt a kompetencia fogalma, megtanultuk értelmezni és használni. Nagy tapasztalattal rendelkező oktatási szakembereknek, tanároknak is komoly feladatot jelentett, hogy a kompetencia alapú oktatás fogalmának létjogosultságát elfogadják, és megértsék a kor kihívásait. Tulajdonképpen már korábban is jelen volt oktatásunkban a kompetencia alapú

szemlélet, sok jó tanár tanított ennek szellemében, éppen csak az „elnevezés" hiányzott hozzá. Aki jól értelmezte a matematikatanítás céljait és feladatait, az korábban is fontosnak tartotta a készségek, képességek fejlesztését, a problémacentrikus, gyakorlati életben hasznosítható tudás átadását. Az új szemlélet tulajdonképpen nem a matematikatanítás teljes átstrukturálását kellett hogy jelentse, inkább a hangsúlyok eltolódását a tartalom központú, elméletibb oktatástól a gyakorlatiasabb, fejlesztő szemlélet felé.
Miről is beszélünk tulajdonképpen? A matematikai kompetenciát az OECD a PISA-felmérésekhez kapcsolódóan a következőképpen fogalmazta meg 2000-ben: "A matematikai kompetencia olyan felkészültség, amely alkalmassá tesz a matematikai problémák azonosítására, megértésére, kezelésére, valamint arra, hogy megalapozott véleményt formáljunk a matematikának az egyén jelenlegi és jövőbeni szakmai pályafutásában, magánéletében, családi és társadalmi kapcsolatainak alakításában betöltött szerepéről."[5] Ennek alapján a következő összetevőit határozták meg [17]:

1) matematikai gondolkodás, következtetés
2) matematikai érvelés, bizonyítás
3) matematikai kommunikáció
4) matematikai modellezés
5) problémafelvetés és problémamegoldás
6) reprezentáció
7) szimbolikus és formális nyelv, műveletek
8) eszközök használata.

Ezen összetevők három fejlettségi szinten lehetnek:

a) reproduktív – rutin, sztenderd feladatok végrehajtása, definíciók alkalmazása;
b) konnektív – összetett, de még mindig sztenderd feladatok elvégzése, integráció;
c) reflektív – komplex problémák kezelése, eredeti megközelítés, általánosítás.

Az Európai Bizottság munkacsoportja a következőképpen határozta meg a matematikai kompetenciát: „A legalapvetőbb szinten a matematikai kompetencia az összeadás, kivonás, szorzás, osztás, a százalékok és a törtek használatának képességét foglalja magában fejben és írásban végzett számítások során, különféle mindennapi problémák megoldása céljából. Egy magasabb fejlettségi szinten a matematikai kompetencia a matematikai gondolkodásmód (logikus és térbeli gondolkodás) és a valóság magyarázatára és leírására egyetemesen használt matematikai kifejezésmód (képletek, modellek, geometriai ábrák, görbék, grafikonok) használatára való képesség és készség az adott kontextusnak megfelelően."[21] Emellett megfogalmazta azokat az ismereteket, készségeket és attitűdöket, amelyek a kompetencia keretrendszerét alkotják.

Ismeretek:

- a számok és mértékegységek biztos ismerete és a mindennapi szituációkban való használata, amely a számtani alapműveletek és a matematikai kifejezésmód alapvető formáinak – a grafikonoknak, képleteknek és statisztikáknak – az ismeretét foglalja magában.

- a matematikai kifejezések és fogalmak biztos ismerete a legfontosabb geometriai és algebrai tételeket is beleértve.
- a matematika segítségével megválaszolható kérdésfajták ismerete és megértése.

Készségek és képességek:

- a matematikai kompetencia alapelemeinek (összeadás és kivonás, szorzás és osztás, százalékok és törtek, mértékegységek, stb.) alkalmazása a mindennapi életben felmerülő problémák megközelítése és megoldása során. Például a háztartási költségvetés kezelése (a bevételek és a kiadások kiegyensúlyozása, tervezés, megtakarítás); a vásárlás (árak összehasonlítása, mértékegységek, ár-érték arány ismerete); az utazás és a szabadidő (távolság és utazási idő közötti összefüggés felismerése, pénznemek és árak összehasonlítása).
- a mások által előadott indoklás követése és értékelése, az indoklás alapgondolatának felismerése (különösen bizonyítás esetén).
- a matematikai jelek és képletek használata, a matematika nyelvének dekódolása és értelmezése, valamint a matematika nyelve és a természetes nyelv közötti összefüggések felismerése. A matematika segítségével történő és a matematikáról szóló kommunikáció.
- matematikai gondolkodás és érvelés, a matematikai gondolkodásmód elsajátítása: absztrakció és általánosítás, ha a kérdés megköveteli, matematikai modellezés, azaz modellek elemzése és készítése, meglévő modellek alkalmazása a feltett kérdés megválaszolásához.
- matematikai feladatok, jelenségek és szituációk különféle leírásainak, ábrázolásainak megértése és alkalmazása (jelentés megfejtése, értelmezése és az ábrázolásmódok közötti különbségtétel), valamint a leírás- és ábrázolásmódok közötti választás és váltás az adott helyzet követelményeinek megfelelően.
- a kritikai gondolkodásra való hajlam; különböző matematikai állítások (pl. állítás és feltevés) megkülönböztetése; matematikai bizonyítások megértése, fogalmak alkalmazási körének és korlátainak a felismerése.
- segédeszközök és egyéb eszközök (köztük informatikai eszközök) használata.

A felsorolás nem teljes, nehéz is lenne minden olyan készséget és képességet összegyűjteni, amely kapcsolatban áll a matematikai gondolkodással.

Attitűdök:

- törekvés a „számoktól való félelem” leküzdésére.
- hajlandóság a számtani műveletek használatára a mindennapi munkában és a háztartásban adódó problémák megoldására.
- az igazságnak, mint a matematikai gondolkodás alapjának tisztelete.
- törekvés az állítások alátámasztására, indoklására.
- hajlandóság mások véleményének érvényes (vagy nem érvényes) indokok vagy bizonyítékok alapján történő elfogadására, illetve elutasítására.

Pszichológusok és elméleti pedagógiával foglalkozó szakemberek a matematikai kompetenciát további készségekre és képességekre bontották faktoranalízis és tartalmi elemzés alapján. A következő táblázatban egy lehetséges felosztása található azoknak a gondolkodási, kommunikációs és tudásszerző képességeknek és készségeknek, melyek szükségesek a matematikai problémák megértéséhez és megoldásához:

Készségek	Gondolkodási képességek	Kommunikációs képességek	Tudásszerző képességek	Tanulási képességek
számlálás számolás mennyiségi következtetés becslés mérés mértékegy- ség átváltás szöveges feladat megoldása	rendszerezés kombinativi- tás deduktív következtetés induktív következtetés valószínűségi következtetés érvelés, bizonyítás	relációszókincs szövegértés szövegértelme- zés térlátás, térbeli viszonyok észlelése ábrázolás prezentáció reprezentáció	probléma érzékenység probléma reprezentá- ció eredetiség kreativitás probléma megoldás metakogní- ció	figyelem rész-egész észlelés emlékezet feladattar- tás feladat megoldási sebesség

1. *táblázat: Matematikai készségek és képességek*

A fentiek, ha jól végiggondoljuk, mind valóban fontos összetevői az alkalmazásképes matematikatudásnak, azonban olyan sokrétű, szerteágazó ismeretrendszert jelentenek, hogy talán a matematikát tanítók sem feltétlenül rendelkeznek mindezen képességekkel megfelelő szinten. Egy ilyen felosztás a hétköznapi életben, a matematika tanítása során nagyon nehézkesen alkalmazható, éppen összetettsége miatt. A napi munkához olyan matematikai kompetencia modellre van szükség, amely könnyen értelmezhető és vizsgálható.
A 2006-os PISA jelentésben már a következő megfogalmazást találjuk a matematikai kompetenciára: „Az alkalmazott matematikai műveltség azt jelenti, hogy az egyén felismeri és érti a matematika szerepét a valós világban, jól megalapozott döntéseket hoz, és matematikatudása hozzásegíti ahhoz, hogy saját életének valós problémáit helyesen oldja meg, és a társadalom konstruktív, érdeklődő, megfontolt tagjává váljék."[6.]
Ha más forrásokat vizsgálunk, újabb és újabb megfogalmazásokkal találkozunk. Ez a sokféle hozzáállás egyrészt azt mutatja, hogy a matematikai kompetenciák kutatása nem lezárt terület, szakirodalma még kialakulóban van, az ezen alapuló oktatási formák még fejlesztés alatt állnak. Másrészt éppen ezért elfogadása nem könnyű. Ha lefektetnek néhány (6-8) vezérelvet, ami mentén el lehet indulni egy fejlesztő programmal, akkor az könnyebben követhető. A külföldi szakirodalomban egyre jobban elterjedt az utóbbi években az OECD által megfogalmazott 8 pontból álló meghatározás a három fejlettségi szinttel (ezeket manapság PISA-féle kompetenciáknak nevezik – 14. oldal). Ezek a komponensek érthetőek, nem térnek ki a matematikai műveltség különböző területeire, eléggé általánosak, mégis konkrétak, lefedik a matematikai készségek és képességek teljes spektrumát. Ez a megközelítés jól kezelhető, a faktoranalízis alapján beazonosított sokféle képesség, készség besorolható valamelyik pont alá. Nem szabad azonban figyelmen kívül hagyni azt sem, hogy a készségek, képességek fejlesztését a tananyagba beágyazottan, és nem attól függetlenül kell elérnünk. Ahogyan Csapó Benő írja „a kompetencia … a hozzáértés, a szakértelem, az értelmes, felhasználható tudás megjelölésére szolgál, a tudás különböző elemeinek, az ismereteknek és

képességeknek az összehangolt egységére utal.” Fejlődése során az adott terület ismeret- és készségrendszerének egyre több elemét birtokolja az egyén, és egyben tudása egyre szervezettebbé válik. [26] Az igazi matematikai kompetencia tehát két részből áll: az egyik a tárgyi tudás (tudni mit?), a másik a képességek, készségek összessége (tudni hogyan?). A kettő nem választható el egymástól, véleményem szerint kéz-a-kézben fejleszthető. Dolgozatomban a kompetencia szót a fenti meghatározás értelmében használom, azonban vizsgálataimban helyenként szűkebb értelemben, csak a készségekről és képességekről beszélek – ezért szükséges a kétféle szóhasználat.

1.2. Hagyományos oktatás – kompetencia alapú oktatás

Mielőtt a hagyományos és kompetencia alapú oktatási módszereket összehasonlítjuk, tisztázni kell, miért is tanítunk matematikát. A célok megfogalmazása, kijelölése után lehet a tananyagot és a módszereket meghatározni. Az oktatás tartalmát mindig a társadalmi elvárások határozzák meg, azokat a képességeket, készségeket kell fejleszteni, amelyek az egyén társadalmi beilleszkedéséhez, életének alakításához elengedhetetlenül szükségesek. A tartalmak és módszerek kidolgozásában természetesen figyelembe kell venni a pszichológiai és pedagógiai szempontokat is. A matematika tanítása során nagyon sok olyan pszichés tulajdonságot lehet fejleszteni, amely a társadalmi beilleszkedés, az életvitel fontos része. Ez az egyik legfontosabb nevelési cél. Oktatási célként megfogalmazható, hogy olyan élményeket, képzeteket, ismereteket közvetítsünk a matematika tanítása során, melyek fogalmak, összefüggések, terminológia, műveletek, értelmes cselekvési tervek, egyszerű és összetett alkalmazásának képességeit alakítják ki. A legfontosabb képzési cél, hogy a tanultakat alkotó módon tudják a tanulók használni, jártasságokat alakítsunk ki, olyan személyiség tulajdonságokat, amelyek segítik az egész életen át tartó tanulási folyamatot.[1]
Talán elcsépelten hangzik, de a felgyorsult fejlődés, a társadalom, a technológia gyors változásai új kihívások elé állították a közoktatás szereplőit, amire minél később reagálunk, annál inkább lemaradunk. Németország az első, 2000-es PISA felmérés gyenge eredményét követően olyan, a társadalom széles rétegei által elfogadott és támogatott oktatásfejlesztési munkába kezdett, amelynek eredménye már a következő, három évvel későbbi, majd a 2006-os vizsgálatban is szignifikáns javulást mutatott [5, 6]. Természetesen, a PISA eredményeit, következtetéseit megfelelő kritikával kell szemlélni, és figyelembe kell venni a vizsgálat körülményeit, a mérés filozófiáját és céljait. A PISA nagyon nagy mértékben eltér a korábbi nemzetközi tanulói tudásszint mérésektől (IEA, TIMSS). Célja nem a tananyag elsajátításának, az iskolai tudásnak a mérése, hanem erősen gyakorlatorientált, problémamegoldó gondolkodásra építő alkalmazói ismeretek mérése. Új elemek jelentek meg, melyeket több dimenzióban vizsgált: a tudástartalom, a struktúra mellett a megvalósítandó folyamat jellegzetességei, a tudás, készségek alkalmazásának az összefüggései, annak bemutatása. A matematika feladatokban a tartalmi elemekből hangsúlyosan a mennyiség, a tér, a forma, a változás, a viszony illetve a bizonytalanság jelentek meg. A folyamatok közül a reprodukció, a reflexió, a kapcsolatok felismerése, az általánosítás és az analizálás hatékonyságának vizsgálata jelent meg. Az alkalmazás képes tudás tekintetében azt

célozták meg a feladatok, hogy a tanulók miképp tudják a matematikai ismereteiket hasznosítani az élet, a munka, a tudomány elvárásai között. A megcélzott korosztály (15 évesek) a legtöbb országban a kötelező oktatás utolsó évében jár. Magyarországon ez a korosztály még csak a középfokú oktatás második évét járja - tehát még több évnyi tanulás előtt áll (az 1991-ben és utána születettek számára 18 éves korig kötelező az oktatás – a 9. osztályt 2012/13-as tanévben kezdők számára már felmenő rendszerben újra 16 éves korig) – ezt szintén figyelembe kell venni a következtetések levonásához. Az IEA felmérésekben hazánk több, mint 30 éve részt vesz (8. osztályosok teljesítményét méri). Ez a mérés mind feladataiban, mind mérési módszereiben közelebb áll a magyar oktatási hagyományokhoz. Ezekben a mérésekben tanulóink matematikából egyenletes, jó színvonalú teljesítményt nyújtottak, teljesítményük nem maradt el a nemzetközi átlagtól (az országok rangsorában a középső harmadban helyezkedtünk el). A TIMSS mérésekben, amelyek inkább tananyag központúak, matematikából a nemzetközi átlag felett van a magyar tanulók teljesítménye. A PISA vizsgálatok értékelésénél figyelembe kell venni a magyar oktatási hagyományokat, melyek inkább az elméleti, lexikálisabb tudásra helyezik a hangsúlyt, a feladatmegoldási rutin megszerzésére, a felsőoktatásra való felkészítésre. A PISA jellemzően nem ezt méri, hanem a való életben előforduló problémák matematikai modellezését és a problémamegoldó gondolkodást. Megfigyelhető, hogy azon országok tanulói érték el a legjobb eredményeket, akiknek matematika oktatása ilyen alapokra épít (pl. Finnország, Hollandia) – gyakorlatias, problémacentrikus. A magyar tanulók számára szokatlan volt a feladatok megfogalmazása, a szövegkörnyezet. Az IEA és a TIMSS feladatai sokkal közelebb állnak a magyar tankönyvek és feladatgyűjtemények feladattípusaihoz. Mindenesetre a PISA mérés felhívja a figyelmet néhány olyan jelenségre, amelyet érdemes figyelembe venni az oktatás modernizációja szempontjából: a magyar tanulók gyengébb problémamegoldó képességét, valamint a szövegértés, szövegértelmezés képességét fejleszteni kell, mert ez szoros összefüggést mutat a matematikai teljesítménnyel.

Felmerül a kérdés, vajon mennyire fontos a magyar közoktatás számára az a fajta tudás és képességek, melyeket a PISA mér? Hogyan lehet az oktatás hagyományain úgy változtatni, hogy a régi értékeket megtartsuk, és megfeleljünk a korszerű elvárásoknak? Úgy gondolom, a hagyományos, tartalom központú matematikaoktatásban is nagyon sok olyan értékes momentum van, amelyeket nem szabad eldobni, át kell menteni az új formák és módszerek közé. Ha jól megnézünk régi tankönyveket, feladatgyűjteményeket, sok gyakorlatias szöveges feladattal találkozunk, nem igaz tehát, hogy a gyakorlatias problémák nem voltak jelen a magyar matematikaoktatásban. Ezek a példák ma is éppen olyan jól használhatók a tanítás során, mint régen, csak a szöveget kell aktualizálni a mai viszonyokra. A hazai matematikaoktatás a középiskolában arra törekedett, hogy a matematika minél több területéről szerezzenek ismereteket a tanulók, rutinra tegyenek szert sokféle feladattípus megoldásában, felkészüljenek a felsőoktatásba való belépésre. A tananyag felépítése a matematika, mint tudomány felől a gyakorlati alkalmazás felé halad. Emellett azért nem szabad megfeledkeznünk arról sem, hogy olyan elődök didaktikai elveire is építettük a matematikaoktatásunkat, mint Pólya György, Varga Tamás és Dienes Zoltán, akiknél nagy hangsúlyt kaptak a játékos, tevékenység alapú, problémacentrikus, aktív tanulásra építő módszerek. Ezek elemeiben tehát régóta részét képezték a tantervnek, csak kisebb hangsúllyal. A Nemzeti Alaptanterv 2003-as átdolgozása több olyan területet érintett, amely eddig éveken keresztül fontos része volt a középiskolai tananyagnak és az érettségi vizsgának, de szükségessége megkérdőjelezhető (ilyen például az összetettebb trigonometrikus egyenletek, addíciós tételek témaköre) – ezek az alapkövetelmények közül kikerültek. Ezen változtatások már a modernizáció jeleit mutatták. Valamint az is, hogy olyan területeket pedig beemeltek, amelyek eddig nem, vagy csak érintőlegesen szerepeltek (ilyen például a statisztika és a valószínűségszámítás elemei). A középiskolai tananyagnak ezek a változásai és hangsúly eltolódásai már a 2000-es lisszaboni határozat eredményének tekinthetők, melyek elindították a fejlesztési folyamatokat. Azonban az óraszámok csökkentése, a tanulócsoportok létszámának növekedése, és a hagyományos iskolai keretek megtartása nehezen tette lehetővé, hogy hatékonyan lehessen új módszereket alkalmazni. Az is megnehezíti a hatékony munkát, hogy bár a gyereklétszám évről évre csökkenőben van, az 1990-es évek struktúra átalakításának következményeképpen a gyerekek nagyobb hányada jár érettségit adó középiskolába, mint korábban. Ezekben az iskolákban pedig hagyományosan elméletibb, kevésbé gyakorlatorientált oktatás folyik, mint a szakképző intézményekben. Ezért olyan gyerekek is rákényszerülnek az elméleti ismeretek elsajátítására, akiknek erre kevésbé van igényük, szükségük, és az alapok hiányosságai miatt nem is képesek rá, hogy elsajátítsák. Ez szintén a tananyag átstrukturálásának és a tanulási módszerek változatossá tételének igényét veti fel. Véleményem szerint a magyar matematikaoktatás hagyományaiban benne rejlik a matematikai kompetenciák fejlesztésének lehetősége, csak ki kell aknázni. A kompetencia alapú oktatás megvalósításához azonban az oktatás kereteit és értékelési rendjét is át kell formálni, nem csak a tartalmát és módszereit.

2. Felmérés a matematikai kompetenciákról középiskolai osztályokban. A teljesítmény és a kompetencia összehasonlítása

2.1. A felmérés résztvevői és feladatai

Felmérésem célja az volt, hogy a hagyományos oktatásban részt vevő (bár különböző pályázatok elnyerése folytán részben kompetencia alapú oktatási módszereket kipróbáló) iskolában tanuló középiskolai diákok körében felmérjem, hogy milyen az alkalmazható matematika tudásuk. Ehhez az egri Eszterházy Károly Főiskola Gyakorlóiskolájában, 12 középiskolai osztályban (évfolyamonként 3 osztály) végeztem mérést egy-egy 45 percre kidolgozott feladatlappal, a 2009-2010 tanév során. A felmérésben összesen 278 tanuló vett részt. A gimnáziumi osztályok alaptantervű matematika tananyagot tanulnak, nincs köztük speciális matematikai csoport. Az iskola a rajz és vizuális kommunikáció, az ének-zene és az idegen nyelvek felé orientálódó gyerekeknek nyújt emelt szintű képzést, illetve egy-egy fél osztály évfolyamonként informatikát tanul emelt óraszámban. Matematikából átlagos felkészültséggel rendelkeznek. A mérésben részt vett tanulóknak legalább a fele bejáró vagy kollégista, az emelt szintű rajz vagy ének-zene képzésekre járók között ez az arány még magasabb. A tanulók külön felkészítést erre a felmérésre nem kaptak, a feladatlapot egy matematika órán töltötték ki, melyhez nyújtott segítséget kollégáimnak, Erdős Győzőnének, Pelbárt Zoltánnénak és Lénártné Pintér Katalinnak ezúton is megköszönöm.
Felmérésem nem tekinthető országosan reprezentatívnak, de lokális reprezentativitása, úgy gondolom, van: egy kisvárosi gimnázium teljes spektrumát felöleli a mérés.
A feladatokat részben az Educatio Kht. által kidolgozott „Kompetencia alapú munkatankönyv"-ekből, részben a Nemzeti Tankönyvkiadó középiskolai példatáraiból vettem, és volt olyan feladat is, amelyet az Eszterházy Károly Főiskola matematikatanár mesterképzéses hallgatóinak gyűjtéséből vettem át. A feladatok összegyűjténél az alábbi szempontokat vettem figyelembe:

- gyakorlatias feladatok legyenek,
- lehetőleg sokféle képességet, készséget mérjenek,
- minden évfolyamnál csak olyan ismereteket igényeljenek, amit már előző tanévben, tanévekben megtanultak,
- játékosak, változatosak legyenek,
- egyszerűbb és összetettebb feladatok egyaránt legyenek.

Minden évfolyam tanulói egy 5 feladatból álló feladatlapot kaptak, melyeket 45 perc alatt kellett megoldaniuk. Az idő bőségesen elég kellett hogy legyen még azok számára is, akik nehezebben olvasnak, lassabban haladnak. Mivel a feladatok mind szövegesek voltak, a szövegértési képesség nyilván befolyásolta az eredményt. Azt, hogy egy tanulónak a matematika feladatokban nyújtott teljesítményét mennyire befolyásolja a szövegértés, sajnos egy teszt alapján nem lehet megítélni, csak a folyamatos munka során. Mindenesetre a PISA mérések eredményei azt mutatják, hogy az ilyen típusú feladatokban a szövegértés, szövegértelmezés képességének fejlettsége erősen befolyásolja a teljesítményt [6., 7]. Minden feladatlapon szerepelt feladat, mely a számolási készséget, a logikai készséget, a kombinativitást, a függvényszerű, algoritmikus gondolkodás képességét, a térlátást, a térbeli viszonyok észlelését mérte. A feladatok értékelésénél azt vettem figyelembe, hogy milyen gondolati, számolási egységekben lehet a megoldáshoz eljutni. Kétféle értékelést készítettem a feladatlapokhoz: egy a tanárok által az iskolai gyakorlatban alkalmazott hagyományos teljesítmény értékelést, és egy újszerű kompetencia értékelést. E kettő öszehasonlításával szeretnék választ kapni a hiptézisben feltett kérdésekre, valamint arra, hogy melyek lehetnek a fő fejlesztési irányok, amelyekkel a tanulók matematikai kompetenciái úgy fejleszthetők, hogy az az iskolai matematika teljesítményükben is növekedést eredményezzen. [20]

2.2. A felmérés feladatlapjai évfolyamonként

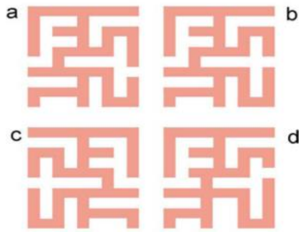
2.2.1. Feladatlap a 9. osztályosoknak

1. Kétkarú mérlegünk van és négyféle súlyunk: 1 dkg, 4dkg, 7 dkg és 10dkg-os. Melyik tömeg nem mérhető le ezek segítségével?
   A: 15 dkg B: 16 dkg C: 19 dkg D:13 dkg.
   Amelyik lemérhető, az hogyan?

2. Julcsi néni egy kis faluban éldegél. Húsvétra a család apraja nagyja meglátogatja. Hogy ne kelljen kapkodnia, elhatározza, hogy a következő hónap elsejétől kezdve egy hónapon keresztül minden nap annyi tojást vesz, amennyi nap már eltelt a hónapból (31 napos a hónap). Hogyan gyarapszik Julcsi néni tojáskészlete?
a) Készíts táblázatot és grafikont a tojások napi gyarapodásáról!
b) Hány nap múlva lesz már legalább 100 tojása?

3. A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve *B* betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen. A család tagjairól még a következőket tudjuk:
   - Csak Bea és Barbara jár teniszezni is és kerékpározni is;
   - Egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem;
   - Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani, sikertelenül.
a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?
   Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.
b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?
   Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.
c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

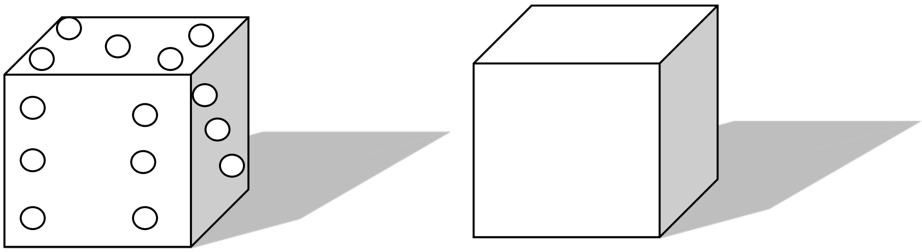
4. Válaszd ki, hogy melyik rajz az ábrán látható pecsét lenyomata a négy közül!



5. Egy 130 méter hosszú tehervonat óránként 42 kilométert tesz meg. Hány perc alatt halad át a 220 méteres alagúton?

2.2.2. Feladatlap a 10. osztályosoknak

1. A képen egy hagyományos dobókockát látsz, melyen a szemközti lapokon lévő pontok összege mindig 7. Rajzold le, milyen képet láthatunk, ha ezt a kockát az óramutató járásával ellentétes irányban 90°-kal elforgatjuk!



2. Egy kereskedő kétféle árucikket vásárolt: inget és pólót. Az inget kétszer annyiért vette, mint a pólót. Az ingeket 15%, a pólókat 20% haszonnal adta el. Így 100-100 darab eladása után 31500 Ft volt a nyeresége.

a) Mennyiért vásárolta és mennyiért adta el a termékeket?
b) Hány százalék volt az összes haszna?

3. Egy hajó hosszának, az árboc magasságának, a kapitánynak és a kisfia életkorának szorzata 303335, mind a négy szám pozitív egész. Hány éves a kapitány?

4. Enikő bankkártyájának négyjegyű PIN kódját a következőképpen titkosítva írja noteszébe:
   - a számban eggyel több az ezres, mint a tízes
   - az ezresek és tízesek számának szorzata megegyezik a százasok és tízesek számának
   szorzatával
   - a szám éppen tizenegyszerese az utolsó három jegyből álló számának
   - a szám a 10 többszöröse.

   Fejtsük meg a kódot!

5. Egy síkságon két torony áll egymástól 60 m távolságra. Az egyik magassága 50 m, a másiké 40 m. A két torony alapját összekötő szakaszon, a tornyok csúcsától egyenlő távolságra van egy kút. Milyen messze van a kút a két torony alapjától?

2.2.3. Feladatlap 11. osztályosoknak

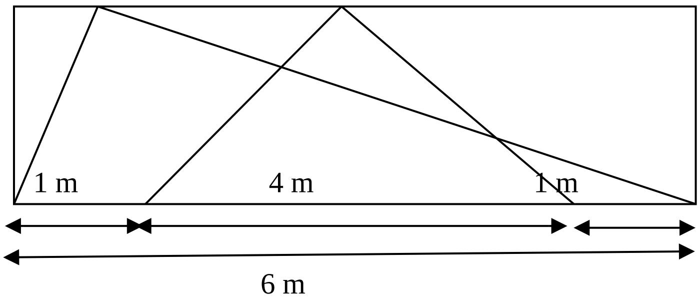
1. Öt jóbarát észrevette, hogy a telefonszámaik olyan 7-jegyű számok, amelyeknek első számjegye 3, mindegyik számjegyük különböző, és az egymás után lenyomott gombok a sakkjáték lóugrásának szabálya szerint követik egymást.

a) Mi az öt telefonszám?

b) Lehet-e ötnél több ilyen telefonszám?

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

2. Feri édesapja a pincéjükbe két 90° nyílásszögű halogén lámpát szeretne felszerelni. Az egyiket a 6 m széles mennyezet közepére, ekkor 1-1 m széles sáv világítás nélkül maradna. A másikat pedig úgy, hogy az egész padlót bevilágítsa. Milyen messze kell felszerelni a másik lámpát az középsőtől, ha a középső a padlón egy 4 m széles részt világít be?



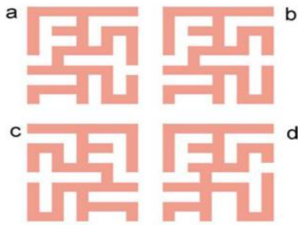
3. Egy nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

a) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság?

Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

b) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

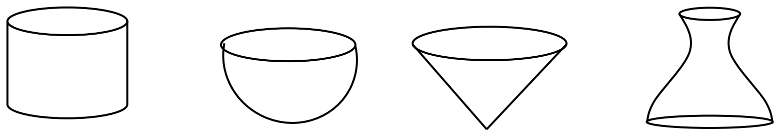
4. Válaszd ki, hogy melyik rajz az ábrán látható pecsét lenyomata a négy közül!



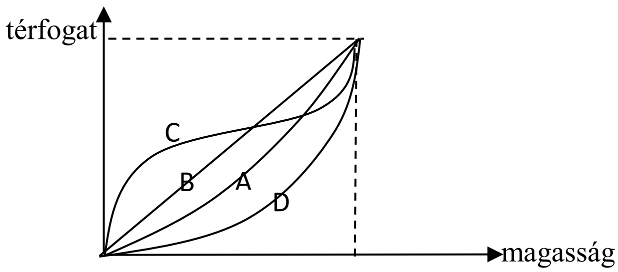
5. Egy 130 méter hosszú tehervonat óránként 42 kilométert tesz meg. Hány perc alatt halad át a 220 méteres alagúton?

2.2.4. Feladatlap a 12. osztályosoknak

1. Négy üres edényünk van, melyeknek a térfogata egyenlő, de alakjuk az ábrán látható. Elkezdjük feltölteni vízzel egyenletesen mind a négyet. Határozd meg, hogy az egyes edényekben melyik grafikon szerint változik a víz magassága az edénybe töltött víz mennyiségének függvényében!



1 - …….   2 - ……...   3 - ………   4 - ……..



2. Zedországban az emberek éves keresetük után a következőképpen adóznak:
- ha az éves kereset nem éri el az 500 zedet, akkor a kereset 20%-a az adó;
- ha a kereset 500 és 1000 zed között van, akkor 100 zed és a kereset 500 zedet meghaladó részének 30%-a az adó;
- ha a kereset 1000 zed fölött van, akkor 250 zed és a kereset 1000 zedet meghaladó részének 40%-a az adó.

a) Hány zed az éves adója annak, akinek a keresete 850 zed?
b) Hány zed az éves adója annak, akinek adózás után 1650 zed marad?
c) Mennyi az éves keresete annak, aki 112 zed adót fizet?

3. Mennyibe kerülne egy ló, ha csak a patkószegekért kellene fizetni a következőképpen: az első patkószegért 1 fillért, és minden következőért kétszer annyit, mint a megelőzőért? Egy patkóhoz 8 szög tartozik.

4. Pityke őrmesterék lefoglaltak néhány magyar bankjegyet, és ötöt elkülönítettek, mivel sejthető volt, hogy közülük kettő hamis. Öt szakértő gyorsan megvizsgálta ezeket a különféle címletű bankjegyeket (ezres, kétezres, ötezres, tízezres és húszezres), és a következő szakvéleményeket adták.
   1. szakértő: a kétezres és az ötezres a hamis.
   2. szakértő: a kétezres és a tízezres nem eredeti.
   3. szakértő: az ötezres és a húszezres hamisítvány.
   4. szakértő: a kétezres és a húszezres nem eredeti.
   5. szakértő: a tízezres és a húszezres hamis.

   Az alaposabb kivizsgálás később kiderítette, hogy az öt bankó közül valóban kettő nem lehet igazi, ráadásul az is kiderült, hogy négy szakértőnek csak „félig" volt igaza, mivel négyük csak az egyik hamisítványt találta el, egyikük viszont mindkettőt eltalálta. Vajon melyik két bankjegy a hamis?

5. Egy derékszögű trapézba kör írható.

a) Mekkora a beleírható kör sugara, ha az alapok hossza 4 cm és 12 cm, a nem derékszögű szár pedig 1 dm?
b) Mekkorák az alapon fekvő szögek?
c) Mekkora területű a trapéz körön kívüli területe? Hány százaléka ez az eredeti trapéz területének?

2.3. A felmérés teljesítmény értékelése

A kitöltött feladatlapokat az előre elkészített javítási útmutató alapján pontoztam, egy-egy gondolati vagy számolási egység 1-1 pontot ért, az érettségi pontozási szabályaihoz hasonlóan. A pontszámokat feladatonként és összegezve egy Excel táblázatba vittem. Az Excel alkalmazásait vettem igénybe a kiértékelésnél: a tanulók összpontszámait, százalékos eredményét, az egyes feladatok eredményeinek átlagát, szórását, és egy-egy évfolyam összpontszámainak átlagát, szórását vizsgáltam. Az összpontszámokról és azok eloszlásáról grafikonokat készítettem. Sajnos, nehézséget okozott az értékelésben az, hogy a hagyományosan eredmény orientált oktatáshoz szokott tanulóink közül néhányan nem vették komolyan a tesztet, mivel úgymond „nem volt tétje". Az ilyen feladatlapokat próbáltam kiszűrni, mert ezek nem a valós tudást reprezentálnák, csak a hozzáállást (amelynek vizsgálata szintén érdekes lenne, de ennek a felmérésnek nem ez volt a fő célja). A 10. évfolyamon találkoztam a legtöbb ilyen „komolytalan" feladatlap kitöltéssel. A teljesítmény értékelésnél a minimum szintet 20%-nál állapítottam meg, az optimális szint a 60% feletti. Ebben is az érettségi értékelési rendjét vettem alapul, amelyben az elégséges szint a 20%, a 60% feletti teljesítmény pedig jó, illetve jeles (az azóta eltelt időben ezek a határok megváltoztak, de a mérés évében még ez volt az érvényes szabály).

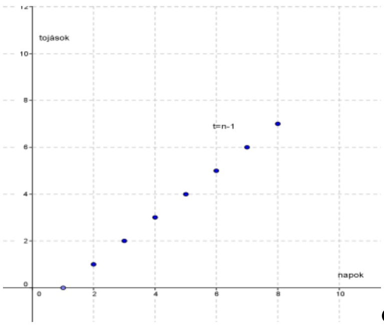
2.3.1. A 9. évfolyam feladatainak megoldása és pontozása

<table>
<tr><th>Feladat</th><th>Megoldás</th><th colspan="2">Teljesítmény pontok</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Nem mérhető ki 19 dkg.
• 15 dkg: egyik oldalon a mérendő súly, a másikon az 1, 4, és 10 dkg-os.
• 16 dkg: egyik oldalon a mérendő súly és az 1 dkg-os, a másikon a 7 és 10 dkg-os.
• 13 dkg: egyik oldalon a mérendő súly és a 4 dkg-os, a másikon a 7 és 10 dkg-os vagy egyik oldalon a mérendő súly és az 1 dkg-os, a másikon a 4 és 10 dkg-os.</td><td>2 pont
2 pont

2 pont

2 pont</td><td>8 pont</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>a)

nap	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	…	31.
tojás	0	1	2	3	4	5	6	…	30

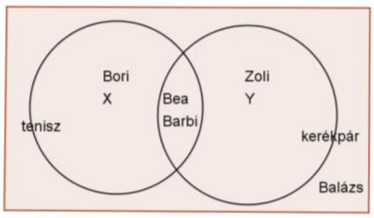


összefüggés: $t = n - 1$
b) $\frac{n(n-1)}{2} \geq 100$, azaz $n(n-1) \geq 200$,
próbálgatással:
$12 \cdot 11 = 132$, $13 \cdot 12 = 156$, $14 \cdot 13 = 182$, $15 \cdot 14 = 210$,
tehát 15 nap múlva már több, mint 100 tojása lesz.</td><td>4 pont

2 pont

2 pont

2 pont

2 pont</td><td>12 pont</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>a) Ábrázoljuk a családtagokat Venn-diagramon:


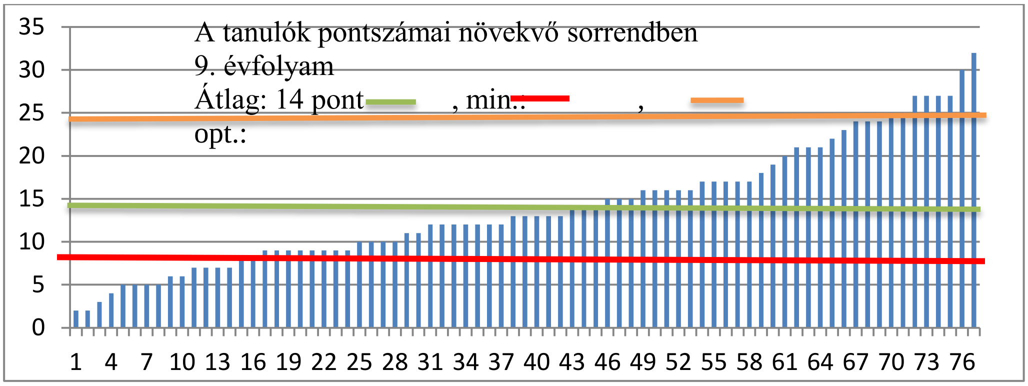
A feltételek alapján legalább 7 fős a Kovács család.
b) A számjegyek 5 és 6 lehetnek, ezek ismétlődhetnek is.
A lehetséges háromjegyű számok száma $2^3 = 8$. (555, 556, 566, 655, 656, 665, 666)Tehát a társaság legfeljebb 8 tagú lehetett.
c) Az ülésrend ABABABAB vagy BABABABA</td><td>4 pont

1 pont
1 pont
2 pont

1 pont
1 pont</td><td>12 pont</td></tr>
</table>

	mintázatú lehet. Az A-val kezdődő nevűek összesen 4! sorrendben ülhetnek, ugyancsak a B-vel kezdődő nevűek. Összesen: 2·4!·4! = 1152-féle ülésrend lehetséges.	2 pont	
4.	A „b” jelű a helyes lenyomat.	3 pont	3 pont
5.	Az alagút és vonat hossza együtt 130m + 220m = 350m =0,35 km. Ennyi utat kell megtennie, hogy átérjen az alagúton. Mivel $t = \frac{s}{v}$ ezért $t = \frac{0,35}{42} = 0,00833(h) = 0,5\ (perc)$ alatt ér át a vonat.	1 pont 2 pont 2 pont	5 pont

2.3.2. A 9. évfolyam feladatlapjainak értékelése



1. ábra: 9. évfolyam feladatlapjának teljesítmény értékelése

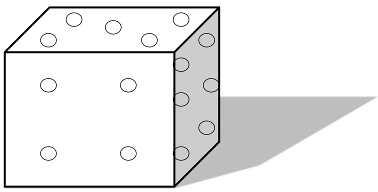
Feladat (pont-szám)	1. (8 p.)	2. (12 p.)	3. (12 p.)	4. (3 p.)	5. (5 p.)	Összesen 40 p.	%
Átlag	3,30 p. (41,25 %)	4,71 p. (39,25%)	3,75 p. (31,25%)	1,44 p. (48%)	0,81 p. (16,2%)	14,01 p.	35,03
Szórás	2,79 p.	3,84 p.	3,03 p.	1,51 p.	1,34 p.	7,05 p.	17,63

2. *táblázat: 9. évfolyam feladatlapjának pontszámai, teljesítmény értékelése*

Látható, hogy a minimális szint (8 pont) alatt a 77 vizsgált tanulóból 14-en teljesítettek, optimális szinten (24 pont), illetve a fölött pedig 11 tanuló. Az átlageredmény (14 pont, amely 35%-ot jelent az összesen 40 pontos feladatlap esetében) közelebb van a minimum teljesítményhez, mint az optimálishoz, ami gyenge összteljesítményt jelent. Az átlag alatt és az átlag felett körülbelül azonos számú tanuló teljesített, a minta mediánja megegyezik az átlaggal. Az egyes feladatok közül legjobb átlageredményt a 4. feladatban érték el a tanulók, amely a térlátást mérte, itt a tanulók közel fele jól válaszolt (csak 3 vagy 0 pontot lehetett elérni). A második legjobb eredményt a 1. feladatban érték el, amely elsősorban a logikus gondolkodást és a számolási készséget mérte. A leggyengébb átlageredményt az 5. feladatban tapasztaltam, ez a függvényszerű gondolkodásra

épül, de a megfogalmazásában fizikai összefüggésre utal, és sokan emiatt neki sem láttak a feladatnak – ez is mutatja, hogy a matematikai ismereteknek más szövegkörnyezetben való alkalmazása már sok tanulónál nehézségekbe ütközik. Mindegyik feladatban nagy volt a pontszámok szórása, ami azt mutatja, hogy az egyéni teljesítmények között nagy különbségek mutatkoztak.
Két olyan tanuló volt a 9. évfolyamon, akinek teljesítménye kimagaslik, 75 és 80 százalékkal, ők különböző osztályokba járnak és matematika tanáruk is más. A leggyengébb teljesítményt nyújtó tanulók is különböző osztályokba járnak. A jobb teljesítményt nyújtó tanulók esetében az iskolai matematika órán nyújtott teljesítményük is a jók között van. Az eredmények tehát nem köthetők egy adott tanárhoz, és annak tanítási módszeréhez.

2.3.3. A 10. évfolyam feladatainak megoldása és pontozása

<table>
<tr><td>Feladat</td><td>Megoldás</td><td colspan="2">Teljesítmény pontok</td></tr>
<tr><td>1.</td><td></td><td>2 pont
2 pont
2 pont

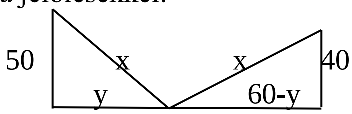
(minden helyes lapra)</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Vételi ár nyereség eladási ár
póló: x 0,2x 1,2x
ing: 2x $0{,}15\cdot 2x=0{,}3x$ $1{,}15\cdot 2x=2{,}3x$
100-100 darab eladása után a nyereség:
$100(0{,}2x + 0{,}3x) = 31500$
$100\cdot 0{,}5x = 31500$
$50x = 31500$
ebből: $x = 630$
a) A pólót 630 Ft-ért vásárolta és $1{,}2\cdot 630= 756$ Ft-ért adta el, az inget 1260 Ft-ért vásárolta és $1{,}15\cdot 1260= 1449$ Ft-ért adta el.
b) 100- 100 db ára: $100\cdot(630 + 1260) = 189000$Ft, ez a 100%
$\frac{31500\cdot 100}{189000} = 16{,}67$ % volt az összes haszna.</td><td>2 pont
2 pont

2 pont

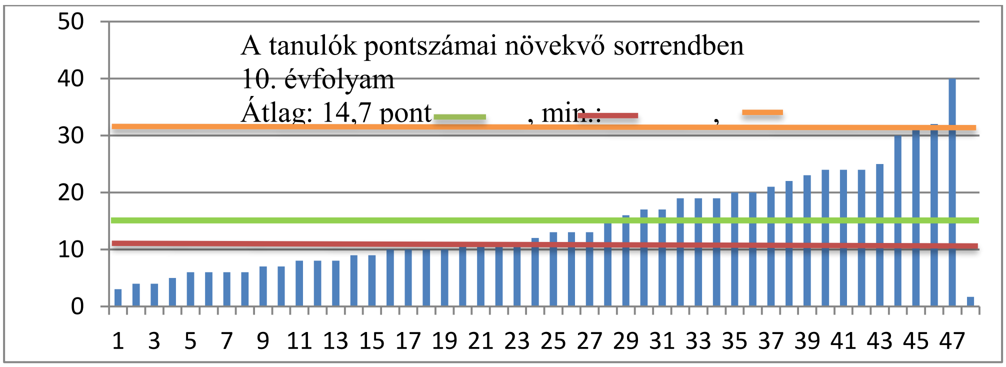
2 pont
2 pont

2 pont</td><td>12 pont</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Legyen h a hajó hossza, m a magassága, k a kapitány életkora, f pedig a fia életkora. Feltétel: $h\cdot m\cdot k\cdot f =303335$
Vegyük a prímtényezős felbontását!
$\begin{array}{r|l} 303335 & 5 \\ 60667 & 19 \\ 3193 & 31 \\ 103 & 103 \\ 1 & \end{array}$
tehát $303335 = 5\cdot 19\cdot 31\cdot 103$.</td><td>2 pont

4 pont</td><td>10 pont</td></tr>
</table>

	A négy szám közül – hétköznapi tapasztalatok alapján – a 31 év lehet a kapitány életkora. (5 év a fia életkora, 19 az árboc magassága és 103 a hajó hossza.)	4 pont	
4.	Mivel a szám osztható 10-zel, az utolsó számjegye csak 0 lehet. A tizesek száma legyen x, a százasoké y, ekkor a feltétel szerint az ezresek száma x+1. A második feltétel szerint $(x+1)x = yx$, amiből $y=x+1$ vagy $x=0$ következik. $x=0$ esetén $y=1$, és a PIN-kód 1100 A harmadik feltétel szerint: $1000(x+1)+100(x+1)+10x=11(100(x+1)+10x)$ $1110x+1100=1210x+1100$ $1110x=1210x$, amiből szintén $x=0$ adódik. Tehát a kód csak 1100 lehet.	1 pont 1 pont 3 pont 2 pont 2 pont 2 pont 1 pont	12 pont
5.	Ábra jelölésekkel:  A két derékszögű háromszögre írjuk fel Pithagorasz tételét: $50^2 + y^2 = x^2$ és $(60-y)^2 + 40^2 = x^2$, amiből $50^2 + y^2 = (60-y)^2 + 40^2$ $2500 + y^2 = 3600 - 120y + y^2 + 1600$ $2500 = 5200 - 120y$ $120y = 2700$ $y = 22{,}5$ Tehát az egyik torony alapjától 22,5 m-re, a másiktól 37,5 m-re van a kút.	4 pont 2 pont 1 pont 1 pont 2 pont 2 pont	12 pont

2.3.4. A 10. évfolyam feladatlapjainak értékelése



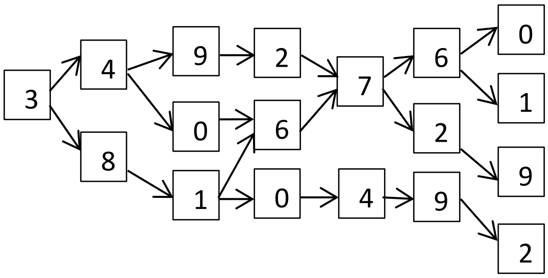
2. ábra: 10. évfolyam feladatlapjának teljesítmény értékelése

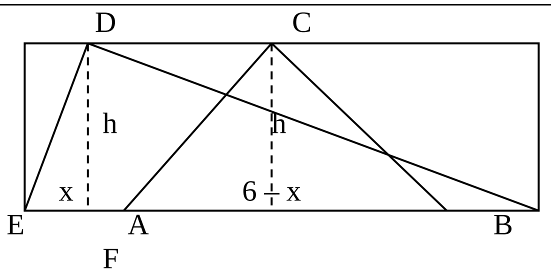
Feladat (pont-szám)	1. (6 p.)	2. (12 p.)	3. (10 p.)	4.(12 p.)	5. (12 p.)	Összesen 52 p.	%
Átlag	5,2 p. (86,67%)	1,7 p. (14,17%)	2,3 p. (23%)	4,0 p. (33,3%)	1,4 p. (11,67%)	14,7 p.	28,2
Szórás	1,69 p.	2,85 p.	3,61 p.	4,47 p.	2,43 p.	8,51 p.	16,36

3. táblázat:10. évfolyam feladatlapjának pontszámi, teljesítmény értékelése

Ezen az évfolyamon érték el a tanulók a leggyengébb teljesítményt, emellett a vizsgált 72 tanulóból csak 47 feladatlapja volt értékelhető, a többiek motivációjával volt probléma, nem vették komolyan a feladatlap kitöltését (csak a nyilvánvalóan komolytalanokat vettem ki). Az átlageredmény is itt a legalacsonyabb, a 14,7 pont mindössze 28%-a az összpontszámnak. Nagyon sok tanuló teljesített a minimális 20% (a grafikonon a piros vonal) alatt, és mindössze 3 tanuló teljesítménye érte el az optimális 60%-ot. A minta mediánja is a minimum szintnél van, ami mutatja, hogy az átlag felett jóval kevesebben teljesítettek, mint az átlag alatt. Ennek a gyenge teljesítménynek egyik oka lehet az is, hogy a 10. évfolyam talán a legkritikusabb időszak a középiskolában: már „otthon érzik magukat" a gimnáziumban, túl vannak egy tanéven, de még nem érzik az érettségi és a továbbtanulás súlyát, nem kellően motiváltak, nem veszik elég komolyan a tanulást. Ezenkívül az is közrejátszik, hogy ennek az évfolyamnak a legheterogénabb az összetétele.
A legjobb eredményt az 1. feladatban érték el a tanulók, ami egyszerű, térlátást mérő feladat volt. A leggyengébb eredményt ezen az évfolyamon az 5. feladatban érték el, ami egy geometriai számítási feladat volt. Itt gyakorlatilag legtöbben csak az ábra elkészítéséig jutottak el, az utána következő számoláshoz már hozzá sem kezdtek. Második leggyengébb átlagot a 2. feladat esetén értek el, pedig az iskolai tananyaghoz ez állt a legközelebb – szöveges feladatból elsőfokú egyenlet felírása és megoldása – itt legnagyobb gondot az értelmezés jelenthetett. Ez a két feladat volt a legösszetettebb az öt feladat között. Ez mutatja a tanulók problémamegoldó gondolkodásának fejletlenségét, ami összecseng a korábban említett PISA mérések következtetéseivel.
Egy tanuló teljesítménye magasan a többi fölé emelkedik, hárman 60% körül teljesítettek, és a többség a minimum környékén. A négy legjobb teljesítményt elérő tanuló matematika órai munkája, érdemjegye is jó. Mind a négyen ugyanabba az osztályba járnak, matematika tanáruk is ugyanaz. A minimum alatt teljesítők között (19 tanuló) már vegyesebb a kép, bár a „legjobbak" osztályából csak 3 tanuló került ebbe a kategóriába, míg a másik két osztályból 8-8 tanuló. Ezen az évfolyamon nagy különbség mutatkozott a teljesítményben az osztályok között, máshol ezt nem tapasztaltam.

2.3.5. A 11. évfolyam feladatainak megoldása és pontozása

<table>
<tr><th>Feladat</th><th>Megoldás</th><th colspan="2">Teljesítmény pontok</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>A feltételeknek megfelelő lehetőségek (a lóugrás szabálya szerint haladva):
3 – 4 – 9 – 2 – 7 – 6 – 0
3 – 4 – 9 – 2 – 7 – 6 – 1
3 – 4 – 0 – 6 – 7 – 2 – 9
3 – 8 – 1 – 6 – 7 – 2 – 9
3 – 8 – 1 – 0 – 4 – 9 – 2
Más nem létezik, mert a lóugrás lépéseit betartva számismétlődés lenne. Indoklás: fagráffal.
</td><td>5 pont (minden helyes telefon-számra)

1 pont</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>

ABCΔ egyenlőszárú derékszögű ⇒h=AB/2=2 m
DEFΔ derékszögű, az EF átfogóhoz tartozó magassága szintén h=2 m, az átmérő két szelete: x és 6 – x hosszúságú.
A magasságtétel alapján: $x(6 - x) = 2^2$
amiből: $x^2 - 6x + 4 = 0$ adódik.
A megoldóképlet felhasználásával: $x_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot4}}{2}$, amiből $x_1 = 3 - \sqrt{5} \cong 0,76$ és $x_2 = 3 + \sqrt{5} \cong 5,24$ következik.
Tehát a másik lámpát a C középponttól 3 – 0,76 = 2,24 m távolságban kell felszerelni.</td><td>Ábra értelmezése: 2 pont

2 pont

2 pont

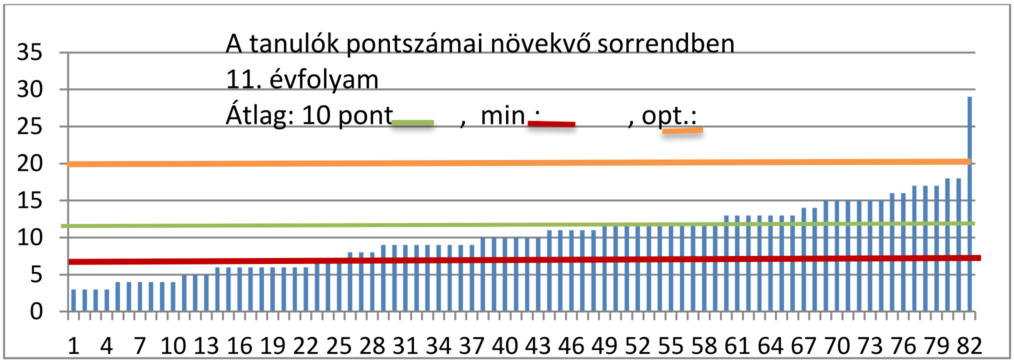
2 pont

2 pont

2 pont</td><td>12 pont</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>b) A számjegyek 5 és 6 lehetnek, ezek ismétlődhetnek is.
A lehetséges háromjegyű számok száma $2^3 = 8$.</td><td>1 pont
2 pont</td><td></td></tr>
</table>

	(555, 556, 566, 655, 656, 665, 666) Tehát a társaság legfeljebb 8 tagú lehetett. c) Az ülésrend ABABABAB vagy BABABABA mintázatú lehet. Az A-val kezdődő nevűek összesen 4! sorrendben ülhetnek, ugyancsak a B-vel kezdődő nevűek. Összesen: 2·4!·4! = 1152-féle ülésrend lehetséges.	1 pont 1 pont 2 pont	7 pont
4.	A „b” jelű a helyes lenyomat.	3 pont	3 pont
5.	Az alagút és vonat hossza együtt 130m + 220m = 350m =0,35 km. Ennyi utat kell megtennie, hogy átérjen az alagúton. Mivel t =s/v = 0,35/42 = 0,00833h = 0,5perc alatt ér át a vonat.	1 pont 2 pont 2 pont	5 pont

2.3.6. A 11. évfolyam feladatlapjainak értékelése



3. ábra: 11. évfolyam feladatlapjának teljesítmény értékelése

Feladat (pont-szám)	1.(6 p.)	2. (12 p.)	3. (7 p.)	4. (3 p.)	5. (5 p.)	Összesen 33 p.	%
Átlag	3,39 p. (56,5%)	0,56 p. (4,67%)	2,98 p. (42,57%)	1,76 p. (58,67%)	1,50 p. (30%)	10,18 p.	30,86
Szórás	2,37 p.	1,51 p.	2,27 p.	1,49 p.	1,97 p.	4,55 p.	13,79

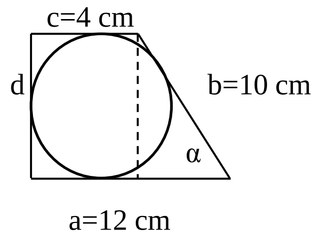
4. *táblázat: 11. évfolyam feladatlapjának pontszámai, teljesítmény értékelése*

A 11. évfolyamon tudtam legtöbb tanulóval (82) kitöltetni a feladatlapot. Ezen az évfolyamon is sokan (22-en) teljesítettek a minimum szint (20%) alatt vagy közelében, és ami rosszabb, hogy az optimális szintet csak 1 tanuló haladta meg, igaz ő minden téren kimagasló teljesítményt szokott nyújtani. Az utána következő legjobb 5 tanuló is csak 50% körüli teljesítményt nyújtott. Átlag (10,18 pont, 30,86%) alatti és átlag feletti pontszámot körülbelül azonos számú tanuló ért el, a minta mediánja gyakorlatilag megegyezik az átlaggal, az is 10 pont. Ezen az évfolyamon viszonylag kisebb volt a pontok szórása feladatonként és összességében is az előző évfolyamokhoz képest.

Legjobb eredményt a tanulók az első feladatban értek el, amely a logikus gondolkodást és a kombinativitást mérte, hasonló eredményt mutat a 4. feladat is, amely a térlátást vizsgálja. Legrosszabbul sikerült a 2. feladat, pedig ez a geometriai számításokat igénylő feladat áll legközelebb az iskolai tananyaghoz. Igaz, ez volt a legösszetettebb az öt feladat között, a legkevesebb támpontot adta a megoldás módjára – tehát újra szembesülhetünk a problémamegoldó gondolkodás gyengeségével. 67 tanulónak lett ez a feladata 0 pontos, és a legmagasabb elért pontszám 8 volt (az adható 12 pontból), amit két tanuló teljesített. Ennek a feladatnak a megfogalmazása a hagyományos feladatgyűjteményekben szereplő feladatokéhoz hasonló volt, mégis nehézséget okozott a legtöbb tanulónak. Elgondolkodtató, hogy talán nem is annyira a tananyag összetételével, az ismeretek frissességével van probléma, hanem a nyelvezettel? A matematika sok gyerek számára azért nehéz, mert „fordítási" problémát jelent: nem tudja a köznapi problémát a matematika nyelvére lefordítani, ezért nem tudja sok esetben megoldani. Ha megkönnyítjük neki az átültetést, akkor a tanult formulákat az adott szituációra már tudja alkalmazni, de nehezen talál rá a sok formula között arra, amely az aktuális problémára alkalmazható. Számomra ez ennek a feladatnak a tanulsága.
A 11. évfolyam pontszámainak eloszlása és a kisebb szórások is azt mutatják, hogy ez az évfolyam sokkal egységesebb, mint a tizedik. Sokkal több az azonos vagy hasonló pontszámot elért tanuló, mintha úgymond „belesimulnának" a tömegbe.

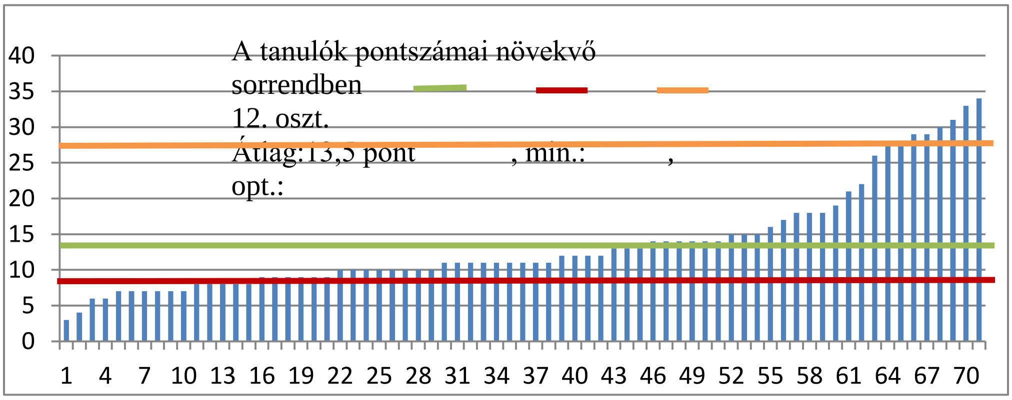
2.3.7. A 12. évfolyam feladatainak megoldása és pontozása

Feladat	Megoldás	Teljesítmény pontok	
1.	1 – B 2 – A 3 – D 4 – C	1-1 pont minden helyes megoldásra	4 pont
2.	a) A kereset 500 és 1000 zed között van, aminek az adója: $100 + 0,3\cdot(850-500) = 100 + 105 = 205$ zed az adó. b) A kereset legyen x zed. Mivel a nettó kereset >1000 zed, ezért adójának számítása: $250 + 0,4\cdot(x-1000)$, és a nettó jövedelem 1650 zed: $x - [250 + 0,4\cdot(x - 1000)] = 1650$ $x - [250 + 0,4x - 400] = 1650$ $x - 250 + 0,4x + 400 = 1650$ $0,6x + 150 = 1650$ $0,6x = 1500$ $x = 2500$ Tehát az adó $2500 - 1650= 850$ zed volt. c) Ha az adó 112 zed, akkor a kereset 500 és 1000 zed között lehet, tehát az adó kiszámítási módja: $100 + 0,3\cdot(x - 500) = 112$	2 pont 1 pont 1 pont 2 pont 2 pont 1 pont 2 pont	12 pont

	100 + 0,3x – 150 = 112 0,3x – 50 = 112 0,3x = 162 x = 540 zed volt a keresete.	1 pont	
3.	Összesen van $4\cdot 8 = 32$ patkószög 1. szög: 1 fillér 2. szög: 2 fillér 3. szög: 4 fillér 4. szög: 8 fillér n. szög: 2^{n-1} fillér (mértani sorozat, $a_1=1$ és $q=2$) Az első 32 tag összege: $S_{32}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{2^{32}-1}{2-1}=2^{32}-1$ Az összeg 4.294.967.295 fillér ≅ 42.949.673 Ft.	1 pont 2 pont 1 pont 2 pont 2 pont	8 pont
4.	Vizsgáljuk meg, melyik szakértő találhatta el mindkét hamis pénzt! Ha az 1. szakértő állítása igaz, akkor a 2., 3. és 4. szakértő egyet talált el, az 5. viszont egyet sem – ez ellentmond a feltételnek. Ha a 2. szakértő állítása igaz, akkor az 1., 4. és 5. szakértő egyet talált el, de 3. egyet sem – ez is ellentmond a feltételnek. Ha a 3. szakértő állítása igaz, akkor az 1., 4. és 5. szakértő egyet talált el, de a 2. egyet sem – ez is ellentmond a feltételnek. Ha a 4. szakértő állítása igaz, akkor a másik négy pontosan egyet talált el, ez megfelel a feltételnek. Ha az 5. szakértő állítása igaz, akkor a 2., 3. és 4. szakértő egyet talált el, de az 1. szakértő egyet sem, ami újra ellentmondás. Tehát: a 4. szakértő találta el mind a két hamis bankjegyet, melyek a 2000 és 20000 forintosak.	1 pont 1 pont 1 pont 1 pont 1 pont 1 pont	6 pont
5.	Ábra:  a) Pithagorasz-tétel a keletkezett derékszögű háromszögre: $d^2 + (a - c)^2 = b^2$ $d^2 + 8^2 = 10^2$ $d^2 = 36$ d=6, ez egyben a beírt kör átmérője, tehát r=3 cm b) Két szög a feltétel szerint 90° - 90°, a másik két	2 pont 1 pont 2 pont 2 pont	16 pont

	szög pedig egymás kiegészítő szögei. A fenti derékszögű háromszögben: $\cos\alpha = \frac{a-c}{b} = \frac{8}{10}$, amiből α = 36,87° és 180°- α= 143,13°, valamint két szöge derékszög. c) A kör területe: $T_{kör} = r^2\pi$ = 28,27 cm^2 A trapéz területe: $T_{trap} = \frac{a+c}{2} \cdot d$ = 48 cm^2 A trapéz körön kívüli területe: $T_{trap} - T_{kör}$ = 19,73 cm^2 Ha 48 cm^2 → 100 % 19,73 cm^2→ x %, akkor $x = \frac{19,73 \cdot 100}{48}$ = 41% a körön kívüli rész területe a trapéz területének.	2 pont 2 pont 1 pont 1 pont 1 pont 2 pont	

2.3.8. A 12. évfolyam feladatlapjainak értékelése



4. ábra: 12. évfolyam feladatlapjának teljesítmény értékelése

Feladat (pont-szám)	1. (4 p.)	2. (12 p.)	3. (8 p.)	4. (6 p.)	5. (16 p.)	Összesen 46 p.	%
Átlag	3,45 p. (86,25%)	1,18 p. (9,83%)	3,44 p. (43%)	2,23 p. (37,17%)	3,32 p. (20,75%)	13,62 p.	29,61
Szórás	1,01 p.	1,45 p.	2,71 p.	1,31 p.	4,77 p.	7,26 p.	15,77

5. *táblázat: 12. évfolyam feladatlapjának pontszámai, teljesítmény értékelése*

A végzős évfolyam átlaga 30% alatt van egy kicsivel, de láthatóan az összpontszámok sokkal szélesebb skálán oszlanak meg, mint a 11. évfolyamon. Ami szomorú, hogy érettségi előtt álló évfolyamból 21 tanuló teljesítménye nem érte el a 20%-ot, optimális eredményt pedig 8 tanuló ért el. Igaz, az érettségi dolgozat nem ilyen jellegű feladatokból áll, sokkal inkább tananyagcentrikus. Az átlag jóval közelebb van a minimális szinthez, mint az optimálishoz, a minta mediánja 11 pont, ami csak 1 ponttal haladja meg a minimálisan elvárhatót. Érdekes módon itt a legjobb 8 tanuló nem az iskolában legjobb teljesítményt mutatók közül került ki.

Úgy tűnik, a középiskola végére már szignifikáns különbség van az iskolai elvárások, és a feladatlap feladattípusai között. Ennek oka az lehet, hogy az utolsó tanévben koncentráltan az érettségi követelményeihez igazodunk a tanítás során, ami ma még inkább a hagyományos oktatási formákra és feladattípusokra épít. Az alacsonyabb évfolyamokon tanulók már gyakrabban találkozhattak a feladatlapon szereplőkhöz hasonló feladatokkal, még akkor is, ha direkt felkészítést erre nem kaptak.
Legjobban az 1. feladat sikerült, amely a térbeli viszonyok felismerését, a térlátást mérte. A leggyengébben sikerült feladat a második volt, mely gyakorlatorientált, számolási készséget, összfüggések felismerését igénylő összetett szöveges feladat volt. Gyengén sikerült még az ötödik geometriai számítási feladat is. Itt sokan csak az ábra felrajzolásáig jutottak el, mégis 10 tanuló teljes, vagy ahhoz közeli megoldást adott. Ez a feladat állt legközelebb az érettségi összetettebb feladataihoz, mind témája, mind megfogalmazása alapján. Szomorú tény, hogy a második feladat, amelynek szintén nagyon gyenge lett az átlaga, olyan témát érintett – adózás – amivel a későbbiek során minden bizonnyal találkozni fognak a tanulók. A tanulók megoldásaiból az látszott, hogy nem igazán értették meg a problémát, mert a legjobb eredményeket elérők is csak az adható pontszám felét kapták erre a feladatra.

2.3.9. A teljesítmény értékelés összegzése

Mind a négy évfolyamon a tanulók gyenge átlagteljesítményt nyújtottak. A 9. évfolyamon volt a legjobb a tanulók teljesítménye 35,03%-kal, és leggyengébben a 10. évfolyamnak sikerült teljesítenie 28,2%-kal (mind a négy évfolyamra nézve az átlagteljesítmény 30,9% volt). Az előzményeket tekintve nem meglepő ez az eredmény:

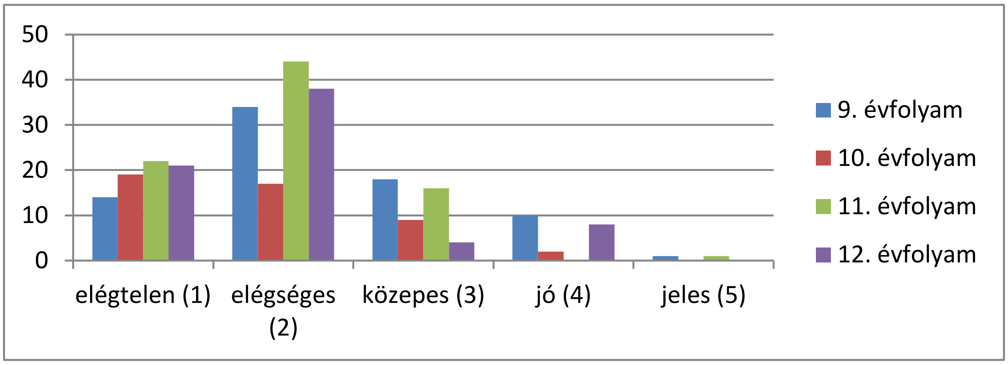
- nem kaptak direkt felkészítést a feladatokra,
- nem volt megjelölve, milyen témakörhöz tartoztak a feladatok,
- számológépen kívül más segédeszközt nem használhattak,
- a feladatlapok kitöltése során tanáraiktól semmilyen segítséget nem kaphattak a tanulók.

A grafikonokról leolvasható, hogy összesen 74 a minimális 20% alatt teljesítők száma, ez a vizsgált minta 26,5%-a – iskolai osztályzatra átváltva ez elégtelen lenne. Az ő iskolai matematika teljesítményük is alacsony, az elégséges szintet éri csak el. Kevés az optimális 60%-ot elérő, illetve meghaladó teljesítmény, mindössze 23 tanuló, ami a minta 8,3%-át teszi ki. Ez a teljesítmény a 4-5 szintnek felel meg az iskolai eredményekben. Ennél azért több olyan tanuló van, akinek iskolai osztályzata matematikából jó vagy jeles. A többség teljesítménye 20% és 60% közötti, ami 2-3 iskolai érdemjegynek felelne meg. Érdekességképpen megvizsgálhatjuk, hogy milyen eloszlása lenne a teljesítménynek iskolai érdemjegyekre átváltva:

0% - 19,9% - elégtelen (1)
20% - 39,9% - elégséges (2)
40% - 59,9% - közepes (3)
60% - 79,9% - jó (4)
80% - 100% - jeles (5) skálázással a következő eredményt kapjuk:

	elégtelen (1)	elégséges (2)	közepes (3)	jó (4)	jeles (5)
9. évfolyam	14 db	34 db	18 db	10 db	1 db
10. évfolyam	19 db	17 db	9 db	2 db	-
11. évfolyam	22 db	44 db	16 db	-	1 db
12. évfolyam	21 db	38 db	4 db	8 db	-

6. *táblázat: teljesítmény értékelés átváltása érdemjegyekre*



5. ábra: A teljesítmény értékelés érdemjegyeinek eloszlása

Persze ez az összehasonlítás kicsit hamis, mert a feladatok megfogalmazása, a kérdésfeltevés módja a legtöbb tanulónak újszerű, szokatlan, és előzetes felkészítés nélküli volt. Ezért a teljesítményük nyilvánvalóan elmaradt a hosszú távú iskolai teljesítményüktől, így nem célszerű ezen egyetlen mérés eredményeit összevetni az egész éves tanulási folyamattal és annak eredményével – mely nem a kompetenciákat, hanem a tananyag elsajátításának szintjét méri. Az első PISA-mérések, és annak nyomán az első kompetencia-mérések hasonlóan „váratlan helyzetbe hozták" a magyar tanulókat, mint ez a felmérés. Ezért nem szabad messzemenő következtetéseket levonni az iskolai teljesítményre vonatkozóan egy kompetenciákat mérő tesztből.

Mind a négy évfolyamra igaz, hogy legjobb eredményt az egyszerű felelet-választós feladatok megoldásában értek el a tanulók (9./4, 10./1, 11./4, 12/1 feladatok). Ezek a feladatok mind a térlátást vizsgálták. Viszonylag jól sikerültek még a logikus gondolkodást, kombinativitást mérő, kevesebb számolást igénylő feladatok is (9./3, 10./4, 11./1, 11./3, 12./3, 12./4 feladatok). A leggyengébb eredményt minden évfolyam esetén valamelyik összetett feladatban érték el a tanulók (9./5, 10./2, 10./5, 11./2, 12./2 feladatok). Ezeknél a feladatoknál a problémamegoldó gondolkodás fejletlensége okozhatta a legtöbb nehézséget. Ennek elemei (többek között) az értő olvasás képessége, az összefüggések megtalálása, a tervezés, a terv végrehajtása és a reflexió. Az összetett feladatok megoldása elmélyülést igényel, és ez a korosztály a könnyen, gyorsan elérhető eredményeket adó feladatokat részesíti előnyben a türelmet, kitartást igénylőkkel szemben. A problémamegoldó gondolkodás az egyik olyan terület, melynek fejlesztése a matematikaoktatás egyik fontos feladata. A felmérés eredményei is azt tükrözik, hogy ezen a területen van még mit tenni.

Az érettségi pontozási útmutatójának megfelelő teljesítmény értékelést tulajdonképpen a matematikai képességek, készségek értékelésével való összehasonlítás miatt végeztem el. Célom annak kiderítése, milyen összefüggés van az iskolai matematikai teljesítmény és a matematikai kompetencák fejlettsége között, ezért az előző értékelést a következő módszerrel szeretném összehasonlítani.

2.4. A felmérés kompetencia értékelése

A közoktatásban egyelőre ritkán jelenik meg a kompetenciák mérése és értékelése. A PISA-felmérések nyomán elindított országos kompetencia mérés hivatott a tanulók tudását, képességeit, készségeit és attitűdjeit vizsgálni két területen: a szövegértésben és a matematikai eszközhasználatban. Ez a méréssorozat országos szinten, évről évre ugyanazon korosztályokat (4, 6, 8, 10 évfolyam) méri, azonos körülmények között, egységesen. A mérés metodikájában és a kiértékelés módjában is a PISA vizsgálatok tendenciáját követi. Így az éves eredmények kiértékelésével a tanulók kompetenciáinak alakulása nyomon követhető. A probléma inkább az, hogy a pedagógusok többsége nincs tisztában azzal, hogy tulajdonképpen mit is mérnek, a kapott eredmény mit jelent a tanár és a diák számára. Nehéz összevetni a kompetencia pontokat az iskolai teljesítménnyel. Sok esetben ezeket össze is keverik. Ezért fontosnak tartom különválasztani a kompetenciák vizsgálatát a teljesítményétől. Ha arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy a feladat megoldása során a tanuló milyen matematikai készségeket, képességeket aktivizált, hogyan állt hozzá a feladat megoldásához, akkor egészen másféle kérdéseket kell feltennünk, mint amikor tisztán a matematikai teljesítményt értékeljük.

2.4.1. A kompetencia értékelés szempontjai

A matematikai kompetencia, mint az első fejezetben kifejtettem, nagyon összetett fogalom. Nehéz olyan szempontrendszert találni, mely lefedi a teljes spektrumát. Az bizonyos, hogy míg a teljesítmény értékelésénél a „tudni mit" jellegű ismeretet értékeljük elsősorban, a kompetencia értékelésénél a hangsúly a „tudni hogyan" jellegű tudáson van. Mivel a kettő egymással átfedésben van, nehezen szétválasztható, ezért nem könnyű megfelelő kérdéseket találni. Igyekeztem olyan módszert keresni, amelyben a lehető legkevesebb közös elem van a teljesítmény értékelése és a kompetenciák értékelése között, annak érdekében, hogy a kétféle értékelés a lehető legnagyobb mértékben elkülönüljön egymástól. A kompetencia vizsgálatát felmérésemben a következő szempontok alapján végeztem:

a) hozzákezd a feladathoz;
b) jól értelmezi a feladatot;
c) van értékelhető a munkájában;
d) készít hozzá ábrát, táblázatot, rendszerezi az adatokat;
e) a megoldás szempontjából használható ábrát, táblázatot, rendszerezést készít;
f) használ (matematikai) jelöléseket;
g) készít tervet;
h) tervszerű a megoldása (még ha terve nem volt is);

i) motivált a feladat megoldására;
j) indokolja állításait;
k) keres ok-okozati összefüggéseket, kapcsolatokat;
l) törekszik zárt formában történő megjelenítésre;
m) törekszik a teljes megoldásra, választ ad a feltett kérdés(ek)re.

A szempontok kiválasztásában támaszkodtam a dr. Czeglédy István által kidolgozott, és miskolci általános iskolákban végzett felmérés módszerére [2]. Minden egyes feladat esetén beazonosítottam, hogy a fenti 13 item közül melyek jelenhetnek meg a megoldás során, hiszen nem egyformán releváns mind a különböző típusú feladatokban. Míg egy összetettebb feladat esetén mind a 13 item értékelhető, addig egy felelet-választós, vagy egyszerű térlátást vizsgáló feladatban csak néhány.
Az egyes feladatokban megjelenő kompetencia itemek évfolyamonként a következők:

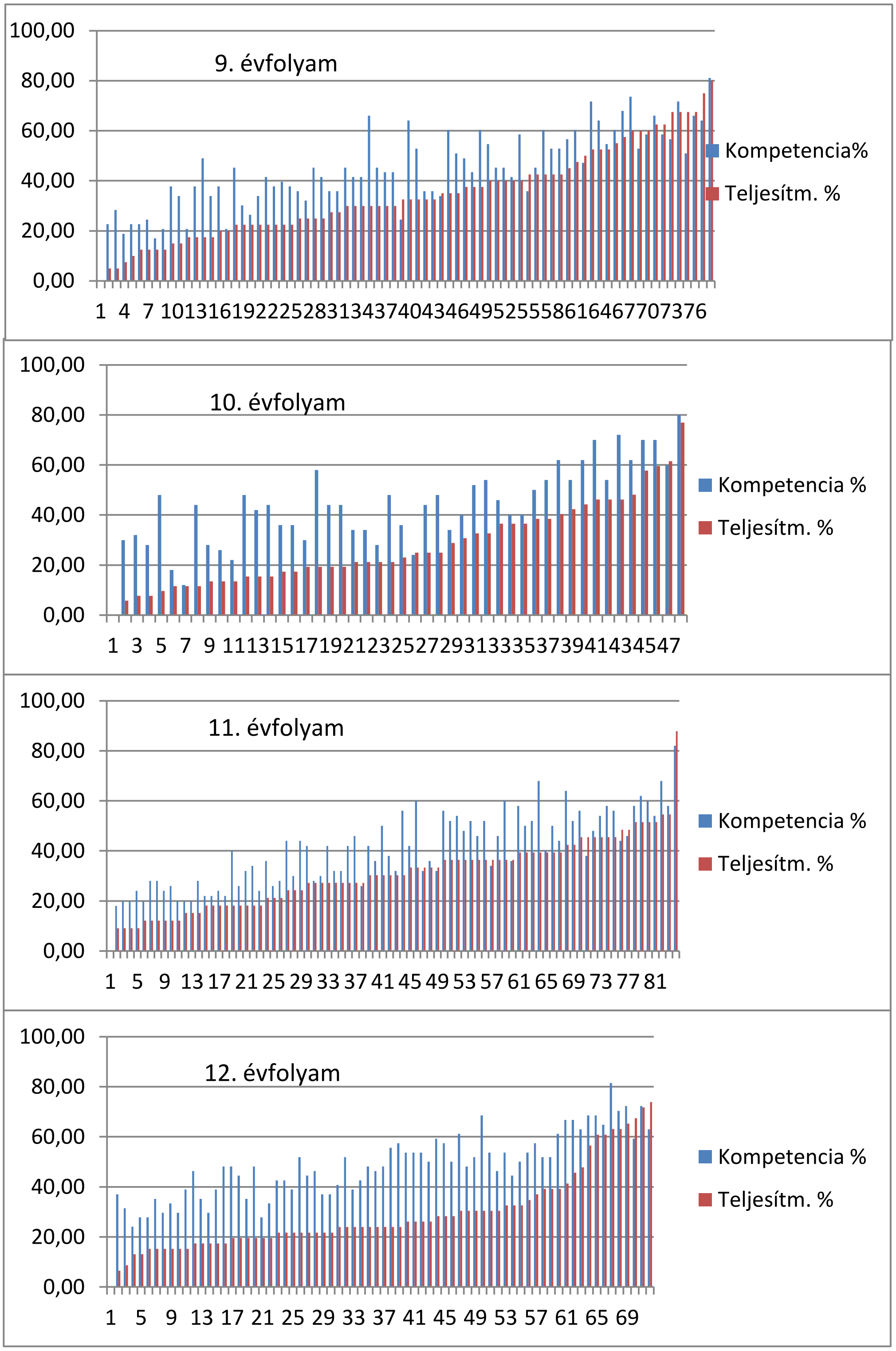
	1.feladat	2.feladat	3.feladat	4.feladat	5.feladat
9.osztály	mérleg egyensúlya	tojások húsvétra	család, társaság, ülésrend	pecsét lenyomata	vonat az alagútban
Összesen: 53 pont	a, b, c, d, e, i, j, k, m (9)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)	a, b, c, i, m (5)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)
10.osztály	dobókocka forgatás	póló és ing eladása	hány éves a kapitány	PIN-kód megfejtése	a kút helye
Összesen: 50 pont	a, b, c, i, m (5)	a, b, c, f, g, h, i, j, k, l, m (11)	a, b, c, g, h, i, j, k, l, m (10)	a, b, c, f, g, h, i, j, k, l, m (11)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)
11.osztály	telefon-számok	lámpák a pincében	baráti társ. és ülésrend	pecsét lenyomata	vonat az alagútban
Összesen: 50 pont	a, b, c, g, h, i, j, k, m (9)	a, b, c, f, g, h, i, k, l, m (10)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)	a, b, c, i, m (5)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)
12.osztály	folyadék az edényekben	Zedország adózása	patkószögek	hamis pénz kiválasztása	érintőtrapéz
Összesen: 54 pont	a, b, c, i, k, m (6)	a, b, c, f, g, h, i, j, k, l, m (11)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l,m (13)	a, b, c, d, e, g, h, i, j, k, m (11)	a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (13)

7. táblázat: kompetencia itemek évfolyamonként és feladatonként

Ezek után a feladat végeredményétől és teljesítmény értékelésétől függetlenül 0 vagy 1 ponttal értékeltem, hogy az adott tanuló munkájában megfigyelhető-e valamely kompetencia item, vagy sem. Ezen szempontok alapján értékelve a feladatlapokat egy-egy Excel táblázatban összesítettem évfolyamonként az egyes

tanulók „kompetenciapontjait”. A kompetenciapontokat grafikonon ábrázoltam. Az összehasonlíthatóság miatt a tanulók ugyanazon sorrendben jelennek meg, mint a teljesítmény értékelés grafikonjain. Az új grafikonokat összehasonlítva a korábbival, szembeötlő a különbség: a teljesítmény értékelésnél elért növekvő pontszámok szerint sorba rendezett tanulók képességpontjainak összege nem mutat egyenletes növekedést.
Mit jelenthet ez? Az iskolai teljesítmény nem egyenesen arányos a kompetenciával? Ahogyan azt tanárként sokszor „érzi” az ember, vannak tanulók, akik a dolgozatokban a képességeik alatt teljesítenek, míg mások esetleg a képességeik felett. Mi lehet annak az oka, ha egy tanuló nem tud a képességeinek megfelelően teljesíteni? Természetesen, erre nagyon sokféle válasz lehetséges: alulmotiváltság, hiányosságok a tudásanyagban, kevés idő, olvasási nehézségek, pillanatnyi állapot, értelem nélküli tanulás (magolás), stb. Az egyes tanulók esetén ezt meg lehet vizsgálni. Célom azonban egy általános kép megalkotása, ami megmutatja, hogy milyen összefüggés van a matematikai teljesítmény és a kompetencia között. Olyan mutatót szeretnék találni, amely alkalmas lehet ennek vizsgálatára.

2.4.2. A kompetencia értékelés eredményei



6. ábra: Képesség és teljesítmény pontok összehasonlítása évfolyamonként

A kapott eredmények alapján elemeztem a tanulók teljesítmény és kompetencia pontjainak az összes elérhető ponthoz viszonyított százalékos értékeit. Megvizsgáltam, vajon a teljesítmény és a kompetencia pontok korrelációban állnak-e egymással? Az egyes évfolyamokra a korrelációs együttható számítását a Pearson-féle képlettel számítottam [27]:

$$r = \frac{\sum(T(i)-\bar{T})\cdot\sum(K(i)-\bar{K})}{\sqrt{\sum(T(i)-\bar{T})^2\cdot\sum(K(i)-\bar{K})^2}},$$

ahol $T(i)$ az egyes tanulók teljesítménypontjainak százalékos értéke, $\bar{T}$ az évfolyam teljesítményének (%) átlaga, $K(i)$ az egyes tanulók kompetencia pontjainak százalékos értéke, $\bar{K}$ pedig az évfolyam kompetencia pontjainak (%) átlaga. Évfolyamokra lebontva a korrelációs együttható értékei a következőképpen alakultak.

	9.évfolyam	10.évfolyam	11.évfolyam	12.évfolyam
$\bar{T}$	35,03	28,2	31,11	29,61
$\bar{K}$	45,01	44,51	40,75	48,85
r	**0,8225**	**0,8046**	**0,8551**	**0,8222**

8. táblázat: Korreláció számítás a teljesítmény és a kompetencia pontok között

Mint látható, minden évfolyamon a korreláció értéke 0,8 fölött van, ami azt jelenti, hogy a teljesítmény nagyon jól korrelál a kompetenciával, ahogyan ezt hipotézisemben feltettem. Tehát az iskolában elért matematikai teljesítményben a matematikai kompetencia fejlettsége megnyilvánul. Miért tapasztaltuk akkor mégis azt, hogy a teljesítmények növekedésével nincs egyenes arányban a kompetencia pontok növekedése? Milyen okokra vezethető vissza, hogy viszonylag sok tanuló „alulteljesít” matematikából?

2.4.3. A potenciál bevezetése

Ennek vizsgálatához vegyük a **teljesítmény- és a kompetenciapontok százalékos értékeinek arányát,** legyen ez:

$$\boxed{\boldsymbol{P} := \frac{\boldsymbol{T}\%}{\boldsymbol{K}\%}.}$$

Úgy gondolom, ez egyfajta **potenciál**t mutat, ami a matematikai kompetenciának a teljesítményben való realizálását jellemzi (ezért választottam a ***P*** jelölést). A hányados értelmezésével, és az egyes tanulók esetén elvégzett elemzéssel talán választ kaphatunk arra, mi lehet a jó vagy gyenge matematikai teljesítmény hátterében. Az egyes tanulók esetén a ***P*** értékét 1-gyel kell összehasonlítani. Milyen következtetéseket lehet levonni ebből?

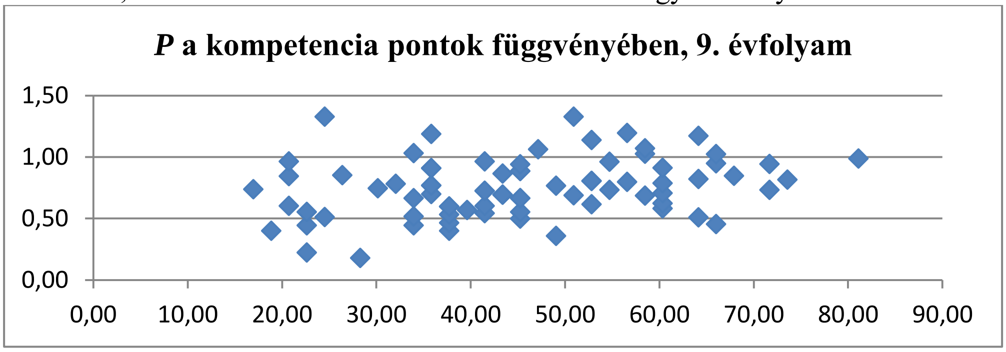
- ha egy tanuló esetében a ***P*** értéke megközelíti az 1-et, az úgy értelmezhető, hogy a matematikai teljesítménye a kompetenciájának megfelelő. Ez nem jelenti azt, hogy esetleg nem szorul fejlesztésre valamiből (gyenge képességpontok és gyenge teljesítmény pontok hányadosa is közelítheti az 1-

- et), – de a pillanatnyi kép, egy felmérő vagy dolgozat esetén azt mutatja, hogy jelenleg „kihozza magából, amit lehet”.
- ha ez az érték esetleg meghaladja az 1-et, akkor a kompetenciája felett teljesített. Felvetődik a kérdés, hogy ez lehetséges-e, és vajon mit jelent? A teljesítmény összetevői nem csak a kompetenciától függnek? A felmérés értékeinek elemzéséből talán erre is adhatunk valamilyen választ.
- ha az érték jócskán elmarad az 1-től, akkor a tanuló a meglévő matematikai kompetenciáját nem tudta kamatoztatni a feladatlap megoldása során, aminek okait fel kell tárni: alulmotiváltság, hiányosságok a tudásanyagban, kevés idő, olvasási nehézségek, pillanatnyi állapot, értelem nélküli tanulás (magolás), stb.

Egy ilyen elemzés sokat segíthet a matematika tanárnak abban, hogy felmérje, tanulói milyen mértékben tudják kompetenciájukat realizálni a feladatok megoldásában, illetve, hogy mely tanulóknak milyen irányú fejlesztése szükséges: egyes képességei hiányosak, vagy a tudása. Minden teljesítmény szinten láthatunk a képességei alatt és felett teljesítő tanulókat is, de a jobb teljesítményt nyújtó tanulók szinte mind „kihozták magukból”, amit lehetett. Ez szintén azt látszik alátámasztani, hogy az iskolai teljesítményben a készségek, képességek mellett a tárgyi tudás is fontos szerepet játszik. Másrészt az, hogy a jobb teljesítményt nyújtó tanulók esetében a ***P*** értéke 1 közelében van (esetenként 1-nél nagyobb értékek is adódtak), azt is jelenti, hogy a hagyományos módszerekkel, ahol a tananyag van a középpontban, lehet a matematikai kompetenciákat fejleszteni – a képességeket együtt a szaktudással. A mérések alapján azt lehet megállapitani, hogy jóval többen teljesítettek kompetenciájuk alatt, mint annak megfelelően, vagy fölötte. Ez azt a feltevést látszik alátámasztani, hogy a képességek fejlesztése önmagában nem elég az iskolai teljesítmény növekedéséhez, a szakmai ismeretek elsajátítása, az értelmes tanulás is fontos az alkalmazásképes tudáshoz – ami a jó értelemben vett matematikai kompetenciát jelenti.

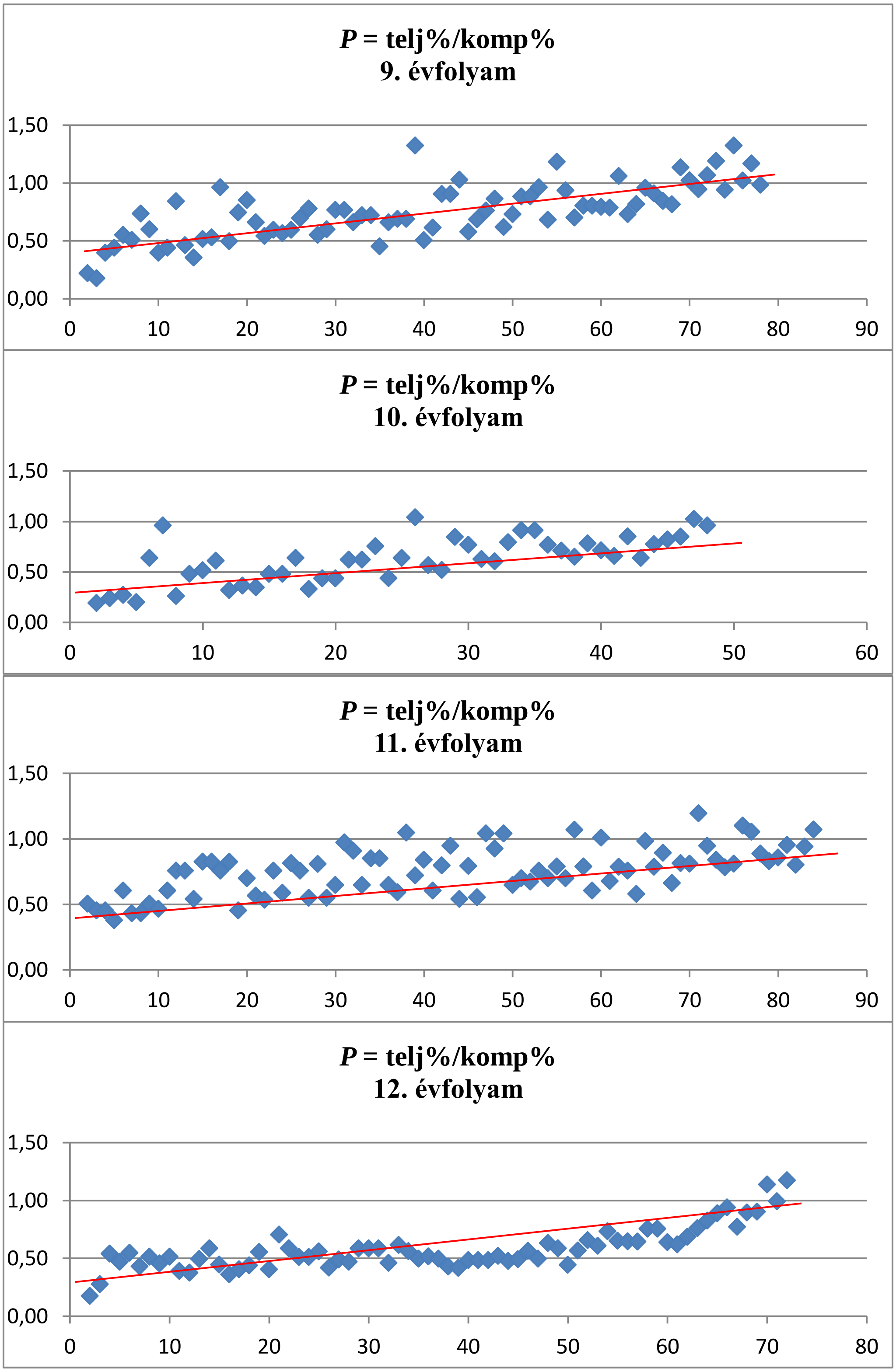
A fenti megfontolások alapján az egyes tanulók ***P*** értékeiből grafikonokat készítettem a mérés eredményei alapján. A mérési eredményeket egy Excel táblázatban rögzítettem, majd a korábbi teljesítmény értékeléssel együtt (6. ábra alapján) kiszámítottam a hányadost tanulónként és évfolyamonként.

Évfolyamonként összehasonlítottam a kompetencia pontok százalékos értékeit a P értékeivel, de itt kimutatható korrelációt nem találtam egyik évfolyamon sem:



7.ábra: P értékei a kompetencia függvényében

A következő grafikonokon a tanulók sorrendje továbbra is a növekvő teljesítmény pontszám szerinti (tehát az előzőekkel megegyezik) – azaz a következő grafikonokon tulajdonképpen ***P***-t a teljesítmény függvényében ábrázoltam:



8.ábra: ***P*** értékének alakulása évfolyamonként és tanulónként a teljesítmény függvényében

A grafikonokon mind a négy évfolyam esetében a $\boldsymbol{P}$ értékének enyhe emelkedése figyelhető meg a teljesítmény pontok emelkedésével. Mit mutat ez az emelkedés? A magasabb $\boldsymbol{P}$ értéket mutató tanulók általában a jobb teljesítményt nyújtók közül kerültek ki – ez azt a korábbi megállapításomat támasztja alá, hogy a jó matematikai teljesítmény eléréséhez a képességek és a tudás együttese szükséges. A gyenge teljesítményt nyújtó tanulók esetében általában a $\boldsymbol{P}$ értéke is alacsonyabb, ami azt mutatja, hogy ahhoz, hogy a tanulók matematikai teljesítménye növekedjen, el kell érni, hogy a kialakított matematikai készségeket, képességeket az adott probléma megoldása esetén képesek legyenek aktivizálni. Ehhez pedig véleményem szerint az adott problémához tartozó matematikai ismeretek értelmes tanulása, az általános problémamegoldó stratégiák elsajátítása és a matematikai modellalkotás képességének fejlesztése vezethet. A grafikonokon néhány esetben találhatunk kiugró $\boldsymbol{P}$ értékeket is a gyengébben teljesítő tanulók között. Mi lehet ezen kiugró értékek oka? Úgy gondolom, ezt tanulónként külön-külön lehetne elemezni. Lehet ez egy egyszeri kiugró teljesítmény, de ha egy tanulónál többszöri értékelés mellett is megmutatkozik, akkor az azt valószínűsíti, hogy kompetenciájának fejlesztésével nála további teljesítmény növekedést lehet elérni. Mikor mondható „jó”-nak a $\boldsymbol{P}$ értéke? Nyilván akkor, ha közel van 1-hez. Mivel ehhez hasonló hányadossal eddig nem találkoztam, ezért nincs hivatkozási alap arra, hogyan milyen értéktől mondhatjuk azt, hogy a tanuló a matematikai kompetenciájának megfelelően teljesít. Ha feltesszük, hogy a 0,8-nél nagyobb értékek esetén már igaz az előző állítás, akkor érdemes megvizsgálni, hogy a felmérés alapján hány tanuló teljesített kompetenciájának megfelelően. A többi évfolyamhoz képest a 12. évfolyam grafikonján látható, hogy a $\boldsymbol{P}$ értéke nagyon sok tanulónál kisebb 0,8-nél – ami gyenge potenciált mutat. Ennek okai talán abban keresendők, hogy a gimnázium utolsó évére a tanulók a matematikának már nagyon sok területével megismerkedtek, sokféle összefüggéssel, ismerettel, struktúrával, algoritmussal, modellel találkoztak, sokkal többel, mint az alacsonyabb évfolyamon tanulók. Ez természetesen megnehezíti a megfelelő modell kiválasztását, ha ehhez támpontot, segítséget nem kapnak – a vizsgálat elvégzésekor pedig kifejezett kérésem volt, hogy a tanulók ilyen jellegű instrukciót ne kapjanak.

Teljesítménye	képességei alatt $\boldsymbol{P < 0,8}$	képességeinek megfelelő $\boldsymbol{0,8 \leq P \leq 1}$	képességeit meghaladó $\boldsymbol{P > 1}$
9. osztály	45 tanuló (59%)	21 tanuló (27%)	11 tanuló (14%)
10. osztály	37 tanuló (78%)	8 tanuló (17%)	2 tanuló (5%)
11. osztály	48 tanuló (58%)	26 tanuló (31%)	9 tanuló (11%)
12. osztály	63 tanuló (89%)	6 tanuló (8%)	2 tanuló (3%)

9. táblázat: a teljesítmény és a képesség pontok arányának alakulása a vizsgált mintában

A fenti táblázat számai azt mutatják, hogy sok tanulónál a képességek nem realizálódnak a feladatmegoldás során matematikai teljesítményként – ezeken az arányokon javítani alapos ismeretekkel, jól strukturált, átgondolt tananyagfelépítéssel, motiválással lehetne. Talán itt is igaz a mondás, hogy a kevesebb néha több. A matematika széles spektrumából kellene kiválasztani azokat a területeket, amelyek a gyakorlati életben előforduló problémák esetében jól alkalmazható ismereteket jelentenek. Ezek alaposabb, mélyebb megismertetésére lenne szükség a matematika oktatásában. Az új ismeretek elsajátításán túl (70-75%-a az óráknak) ma nagyon kevés időt tudunk gyakorlásra, elmélyítésre, problémamegoldásra fordítani, mindössze az összes óraszám 15-20%-át – ezen az arányon kellene változtatni a gyakorlás és a problémamegoldás növekedésének irányába.

2.5. További vizsgálatok, megállapítások

A tanulók teljesítményének és kompetenciájának vizsgálatán túl a kompetencia itemek statisztikai elemzése arra is alkalmas, hogy megvizsgáljuk, mely képességek mutatkoztak meg legkevésbé a feladatmegoldások során. A táblázatokból kiemeltem azokat az itemeket évfolyamonként és feladatonként, amelyek a legkevesebb tanulónál jelentek meg – ezek azok a készségek, képességek, amelyek leginkább fejlesztésre szorulnak:

Év-folyam	Fa	**Itemek megjelenése a tanulóknál (%)**												
Itemek		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
9. (77 tanuló)	1.	90	73	78	22	17	-	-	-	64	52	21	-	27
	2.	93	78	78	88	71	9	16	21	55	26	62	1	21
	3.	97	88	88	40	36	4	14	25	68	31	65	4	32
	4.	100	100	49	-	-	-	-	-	73	-	-	-	56
	5.	75	36	35	16	8	29	14	17	35	16	55	9	18
10. (47 tanuló)	1.	100	91	94	-	-	-	-	-	94	-	-	-	91
	2.	74	49	43	-	-	55	43	30	43	13	64	15	28
	3.	70	60	47	-	-	-	17	30	38	11	57	15	21
	4.	81	72	66	-	-	28	23	23	55	9	62	11	40
	5.	85	74	70	83	72	19	4	4	13	4	13	2	19
11. (83 tanuló)	1.	92	77	78	-	-	-	4	53	69	1	54	-	53
	2.	46	25	18	-	-	23	1	4	5	-	22	2	0
	3.	90	82	78	35	35	2	8	67	67	2	71	27	34
	4.	100	81	59	-	-	-	-	-	80	-	-	-	58
	5.	71	49	43	25	11	35	19	24	39	7	58	22	30
12. (71 tanuló)	1.	100	100	100	-	-	-	-	-	99	-	92	-	99
	2.	79	56	58	-	-	18	6	13	24	4	48	8	15
	3.	97	92	83	4	4	23	42	51	65	17	96	51	61
	4.	94	89	86	11	10	-	7	13	58	7	75	-	28
	5.	87	62	68	83	61	48	10	14	31	6	46	23	20
Itemek átlaga (%)		86	72	66	41	**33**	**24**	**15**	**26**	54	**14**	57	**15**	**38**

10.táblázat: Az egyes kompetencia itemek megjelenése évfolyamonként és feladatonként

A vizsgált kompetencia itemek felsorolása a 38-39. oldalon található.

A fenti táblázat alapján megállapítható, hogy a legnagyobb hiányosságok a következő itemekben jelentek meg:

- indoklás (j) – 14%,
- terv készítése (g) – 15%,
- zárt formában történő megjelenítés (l) – 15%,
- jelölések használata (f) – 24%,
- tervszerű megoldás (h) – 26%,
- megoldás szempontjából releváns ábra, rendszerezés alkalmazása (e) – 33%,
- teljes megoldásra való törekvés (m) – 38%.

Az eredmények azt mutatják, hogy a következő területeken szükséges leginkább a képességek fejlesztése:

- indoklási, bizonyítási képességek fejlesztése (értelmes tanulás)
- összetett feladatok megoldásának tervezése, a terv véghez vitele (általános problémamegoldó gondolkodás),
- köznyelven megfogalmazott feladatok, problémák átültetése matematikai nyelvre (modellalkotás)
- matematikai eszközkészlet alkalmazhatóságára minták, típusfeladatok kidolgozása (problémamegoldó stratégiák),
- feladattartás, türelem, hosszantartó figyelem fejlesztése (memória, tanulási stratégiák).

Ezek a területek leginkább a problémamegoldás és a modellalkotás kompetencia összetevőkhöz tartoznak. Ennek fejlesztésére irányadónak vehetjük Pólya György munkásságát és a heurisztikus tanítási-tanulási módszereket [10., 11]. Pólya modelljében nagyon fontos szerepe van a tervezésnek, a tervszerű megoldásnak és a matematikai modellalkotásnak is. Az indoklási, bizonyítási képességek fejlesztéséhez ezek a módszerek szintén hasznosak lehetnek. Szem előtt kell tartanunk azt is, hogy a matematikát, mint rendszert kell felépíteni, amihez a tananyagot rendszerszemléletben érdemes tanítani – ekkor nagyobb eséllyel lesznek képesek a tanulók a problémához a megfelelő megoldási módot megtalálni [1]. A feladattartás, a türelem, a hosszantartó figyelem fejlesztése már inkább pszichológiai ismereteket igényel a tanártól: fel kell mérni, hogy az adott korosztály mennyi ideig képes a figyelmét egy adott feladatra koncentrálni, és ehhez kell igazítani a feladatok összetettségét. A terhelést pedig fokozatosan növelve lehet fejlődést elérni [13].
A matematikai kompetencia fejlesztéséhez tehát vannak olyan modelljeink, amelyek régóta ismertek és a napi gyakorlatban is alkalmazhatók. Ezeket a módszereket minden matematikatanár tanulta a tanárképzés során, csak fel kell őket idézni, és megfelelően beépíteni a napi rutinba [3].

3. Néhány konkrét témakör teljesítmény és kompetencia mutatóinak összehasonlítása

3.1. A vizsgálat leírása

A hagyományos iskolai dolgozatokat rendszerint az érettségi pontozási útmutatójához hasonlóan, gondolkodási egységekre adott részpontokkal, analitikus módon szoktuk értékelni. Az Eszterházy Károly Gyakorló Iskola két gimnáziumi osztályának (egy 11. és egy 12. évfolyamos), két-két témazáró dolgozatát vettem vizsgálat alá. Mindkét osztály normál matematika tanterv szerint tanul, a tanulók kivétel nélkül középszintű érettségire készülnek fel. Matematika tanáruk Lénártné Pintér Katalin. A dolgozatokat a 2012-13-es tanévben a tanulók valós helyzetben, a tantervnek megfelelő időpontban, egy-egy matematikaórán írták meg. A teljesítmény értékelést a tanárnő végezte az érettségi értékelési szempontjainak megfelelően. A kapott pontokat az iskola értékelési szabályzata szerint váltotta át érdemjegyekre. A kiválasztott témazáró dolgozatok a két évfolyam tananyagában és az érettségiben is fontos szerepet játszanak. A 11. évfolyamon az exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek valamint a trigonometria alkalmazásai (szinusz és koszinusz tétel, egyenletek, egyenlőtlenségek) témakörök dolgozatait értékeltem kompetenciák szempontjából. A 12. évfolyamon a sorozatok témakört és a sík- és térgeometriai számítások témakört vettem vizsgálat alá. Mind a négy dolgozat esetében összehasonlítottam a teljesítményértékelést (amelyet az osztályt tanító nagy gyakorlattal rendelkező tanár készített, és végzett el) az általam használt kompetencia értékelési rendszerrel. Ezek után megvizsgáltam az előző mérés során bevezetett ***P*** értékének alakulását – vajon hogyan viselkedik ez a „potenciál" valós iskolai szituációban.

A kompetencia értékelés szempontrendszere ugyanaz, melyet a korábbi vizsgálatnál is alkalmaztam [2].

A korábban felsorolt (38-39. oldal) 13 item alapján 0 vagy1 pontot adtam, aszerint, hogy az adott item megjelent-e a megoldás során. Természetesen, nem minden feladat esetén lehetett értékelni mind a 13 itemet. Ezért feladatonként külön-külön beazonosítottam, hogy melyek a releváns itemek. Az i) pontot ezen vizsgálatból kihagytam: iskolai dolgozat esetén a motiváció kérdése nem igazán olvasható ki a dolgozatból, lévén az érdemjeggyel történő értékelésnek eleve van egy külső motivációs szerepe, tehát függetlenül a belső motivációtól, a tanulók igyekeznek a rendelkezésre álló idő alatt annyi feladatot megoldani, amennyit csak tudnak. Úgy éreztem, hogy a motiváció hiányát vagy meglétét ilyen körülmények között nemérdemes az értékelési szempontok közé venni, bár a Czeglédy-féle kompetencia szempontrendszernek lényeges része. Mivel a dolgozatok írásánál nem voltam jelen, még „szubjektív" véleményt sem tudtam alkotni a tanulók attitűdjéről. Mind a négy dolgozat esetén az osztály két csoportja más-más feladatlapot kapott (A és B csoport), de a feladattípusok mindkét csoportban ugyanazok voltak.

3.2. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek (11. évfolyam)

A feladatlap első része három egyszerű, a definíció értelmezésével megoldható egyenletet, egyenlőtlenséget tartalmazott. Utána két exponenciális egyenlet következett, majd két logaritmikus egyenlet és egy logaritmikus egyenletrendszer. Mindegyik feladat a középszintű érettségi követelményeinek és elvárásainak megfelelő szintű volt. A feladatlapok a következők voltak:

A csoport	**B csoport**
1./ a) $7^{3x+2} = 49$ b) $\log_{\frac{1}{5}}(4x-2) < -2$ c) $\log_2(3x-4) = 3$	1./ a) $6^{2x+5} = 36$ b) $\log_{\frac{1}{4}}(3x-2) < -2$ c) $\log_3(5x+7) = 3$
2./ $4^x + 2^{x+1} = 80$	2./ $9^x + 3^{x+1} = 108$
3./ $9^{x^2-8x+12} = 1$	3./ $8^{x^2-5x+6} = 1$
4./ $\log_7\left(\log_3(x-15)\right) = 0$	4./ $\log_6\left(\log_3(x-1)\right) = 0$
5./ I. $6 \cdot \lg x + 4 \cdot \lg y = 2$ II. $\underline{3 \cdot \lg x - lgy = 4}$	5./ I. $5 \cdot \lg x - 3 \cdot \lg y = 2$ II. $\underline{2 \cdot \lg x - \lg y = 3}$
6./ $\lg(x+3) + \lg(x-3) = \lg(x+11)$	6./ $\lg(5x) + \lg(x-1) = 1$

11. táblázat: Exponenciális és logaritmikus egyenletek dolgozat feladatai

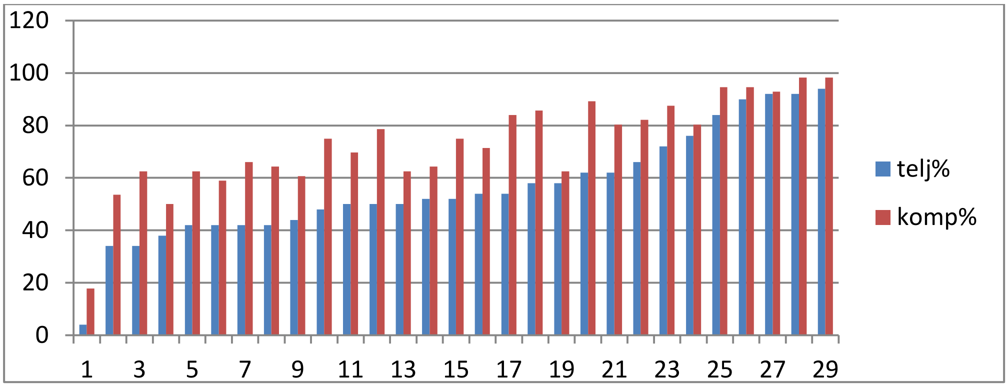
A teljesítmény értékelésénél az osztályt tanító tanárnő, Lénártné Pintér Katalin értékelési és pontozási rendszerét megtartottam, azon nem változtattam. A kompetencia itemek meghatározásánál természetesen figyelembe kellett venni a feladatok típusát. Mivel mind hagyományos, matematikai szimbólumokat tartalmazó, matematikai nyelven megfogalmazott, nem szöveges feladat volt, ezért a d), e), f) és l) pontok vizsgálatának nem volt szerepe a kompetenciaértékelésben (ábrára, adatok rendszerezésére nem volt szükség, a feladat eleve matematikai jeleket használt, a zárt formában való megjelenítés is adott volt). Így a kompetenciaértékelésnél mindegyik feladatra a következő kérdésekre kerestem a választ: a), b), c), h), j), k), m) – a kompetencia pontok tehát feladatonként 0-7 között mozogtak. Természetesen, ha egy tanuló egy feladattal egyáltalán nem foglalkozott, akkor ott a teljesítmény és a kompetencia pontja is 0 lett. Ha már elkezdett foglalkozni egy feladattal, akkor a kompetencia pontja nem biztos, hogy 0, akkor is, ha a teljesítményére 0 pontot kapott.

A feladatlap egyes feladataira adható maximális pontok a következő táblázatban szerepelnek:

Feladat	1a	1b	1c	2	3	4	5	6	Összesen
Teljesítmény pont	4	6	4	8	6	8	8	6	50 pont
Kompetencia pont	7	7	7	7	7	7	7	7	56 pont

12. táblázat: 11. évfolyam, exp-log egyenletek dolgozat pontozása

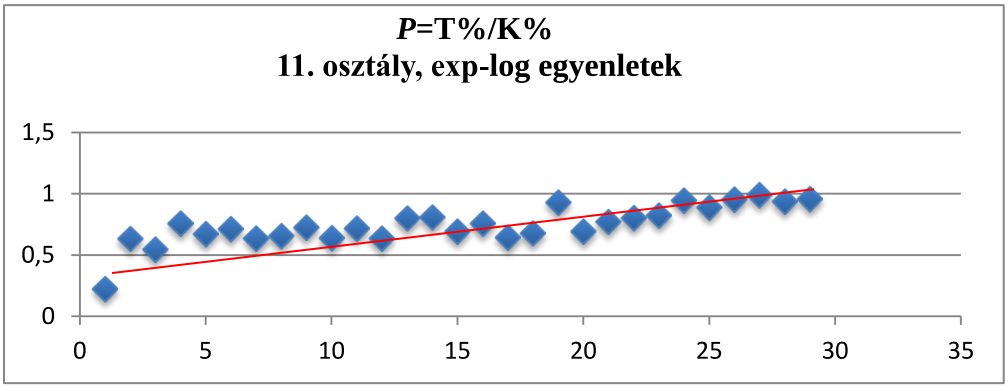
A dolgozatot 29 tanuló írta meg. A teljesítmény értékelés érdemjegyekre való átváltása az iskola értékelési rendjének megfelelő volt:
0-14 pont – elégtelen (1)
15-24 pont – elégséges (2)
25-34 pont – közepes (3)
35-42 pont – jó (4)
43-50 pont – jeles (5)
Az eredmények: 1 tanuló dolgozata lett elégtelen, 7 tanuló dolgozata elégséges, 14 tanuló dolgozata közepes, 3 tanuló ért el jó eredményt és 4 tanuló jelest.
A matematikai teljesítmény átlaga 56,48% lett, a kompetencia pontok átlaga pedig 73,21%. A következő grafikon mutatja a tanulók pontszámait – a korábbi vizsgálatnak megfelelően – a teljesítmény szerint növekvő sorrendbe téve a tanulókat.



9. ábra: 11. osztály, exponenciális és logaritmikus egyenletek dolgozat eredményei

A kompetencia pontok viszonylag magasabb aránya véleményem szerint annak köszönhető, hogy a tanulók igyekeztek minél több feladattal próbálkozni, még ha a feladat megoldása nem is sikerült. A másik ok pedig az lehet, hogy egy ilyen dolgozat esetén a tanulók felkészültek, általában tudják, hogy „mit kell csinálni”, a megoldás sikerét az adott tananyag ismereteinek, módszereinek elsajátítási szintje és az általános matematikai képességeik, készségeik szintje együtt határozzák meg. A vizsgált kompetencia itemek közül az „indoklás” (j), és a „teljes megoldásra törekvés, válaszadás a feltett kérdésre” (m) jelent meg viszonylag kevesebbszer. A feladatokhoz jellemzően hozzákezdtek a tanulók, és általában jól is értelmezték (a témakör friss volt, előtte csak ezzel foglalkoztak, a dolgozatírás összefoglaló óra után került sorra). A gyengébben teljesítő tanulók esetén a tanult összefüggések alkalmazásával voltak leginkább problémák, és a tervszerűség is rájuk volt kevésbé jellemző. A 11. évfolyamra a tanulóknak már el kell sajátítani mindazokat az alapvető matematikai készségeket, képességeket, amelyek alkalmassá teszik őket a hasonló szimbolikus matematikai problémák megoldására –tehát várható volt, hogy a kompetencia pontok átlaga magasabb lesz.

A korábbi felméréshez hasonlóan összehasonlítottam a tanulók teljesítmény és kompetencia pontjainak százalékos arányát (***P***). A kapott értékeket egy grafikonon ábrázoltam, ahol a tanulók az előzőekhez hasonlóan a növekvő teljesítmény pontok szerint helyezkednek el. A kapott ábra nagyon hasonló a korábbi felmérés grafikonjaihoz. Itt is azt tapasztaltam, hogy a ***P*** értéke növekszik a jobb teljesítményt elért tanulók felé haladva. Tehát nem csak egyszeri esetben, a kompetenciák mérésére összeállított feladatlap esetén, hanem egy hagyományos iskolai dolgozatnál is azt láthatjuk, hogy a teljesítmény és a kompetencia nem egyenesen arányos egymással: a jobb teljesítményt elért tanulók jobban tudták kamatoztatni matematikai kompetenciáikat.



10. ábra: 11. osztály exponenciális és logaritmikus egyenletek dolgozat ***P*** értékei tanulónként

Ebben a dolgozatban megvizsgálva a ***P*** értékeit, azt találjuk, hogy 18 tanuló esetén az érték 0,8 alatt van, és csak 11 tanuló esetén éri el, illetve haladja meg a 0,8 értéket, ami korábbi megállapításom alapján „jó”-nak mondható. Tehát a potenciál értelmezése szerint több tanuló teljesített a képességei alatt, mint annak megfelelően. Az is leolvasható a grafikonról, hogy a jó potenciál értékeket elért tanulók jellemzően a jobb teljesítményt mutató tanulók közül kerültek ki (a grafikon jobb oldalán találhatjuk őket). Ez is azt a következtetést támasztja alá, hogy a jobb matematika teljesítmény eléréséhez a képességek, készségek fejlettsége mellett a szaktudás is fontos szerepet játszik. Ahhoz, hogy a tanult összefüggéseket megfelelően, tervszerűen tudja alkalmazni, a korábbi ismereteit és a már kialakult matematikai kompetenciát integrálni kell az új ismeretekkel. Ehhez a megértésen alapuló, rendszerszemléletű tanuláson keresztül vezethet az út.

3.3 Trigonometria alkalmazásai – szinusz és koszinusz tétel, egyenletek (11. évfolyam)

A második vizsgált dolgozat feladatlapja két részből állt. Az első részben három, a szinusz és koszinusz tétel alkalmazását igénylő szöveges feladat volt, míg a második részben négy hagyományos trigonometrikus egyenlet szerepelt (a középszintű érettségi követelményeinek megfelelő nehézségi szintűek). A feladatlap a két csoportra a következő volt:

A csoport	**B csoport**
1./a Egy háromszög területe 201 cm^2. Két oldala 38 cm és 26 cm hosszú. Mekkora a közbezárt szög? Mekkora a harmadik oldal? Mekkorák a háromszög szögei?	1./a Egy háromszög területe 158 cm^2. Két oldala 24 cm és 36 cm hosszú. Mekkora a közbezárt szög? Mekkora a harmadik oldal? Mekkorák a háromszög szögei?
1./b Egy háromszög két oldala 8,5 cm és 11,2 cm hosszú, a nagyobbikkal szemben fekvő szög 65°-os. Mekkorák az ismeretlen szögek és milyen hosszú az ismeretlen oldal?	1./b Egy háromszög két oldala 9 cm és 12 cm hosszú, a nagyobbikkal szemben fekvő szög 67°-os. Mekkorák az ismeretlen szögek és milyen hosszú az ismeretlen oldal?
1./c Egy háromszög oldalai 6,5 cm, 7 cm és 9,5 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szöge?	1./c Egy háromszög oldalai 13 cm, 17,5 cm és 18,5 cm hosszúak. Mekkora a legnagyobb szöge?
2./a $sin^2x - 1 = -\frac{3}{4}$	2./a $-1 + cos^2x = -\frac{3}{4}$
2:/b $3 \cdot cos^2x - 5 \cdot cosx + 2 = 0$	2./b $3 \cdot cos^2x - 2 \cdot cosx - 1 = 0$
2./c $cosx = 0{,}5358$	2./c $sinx = 0{,}9537$
2./d $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	2./d $cosx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. táblázat: Trigonometria alkalmazása dolgozat feladatai

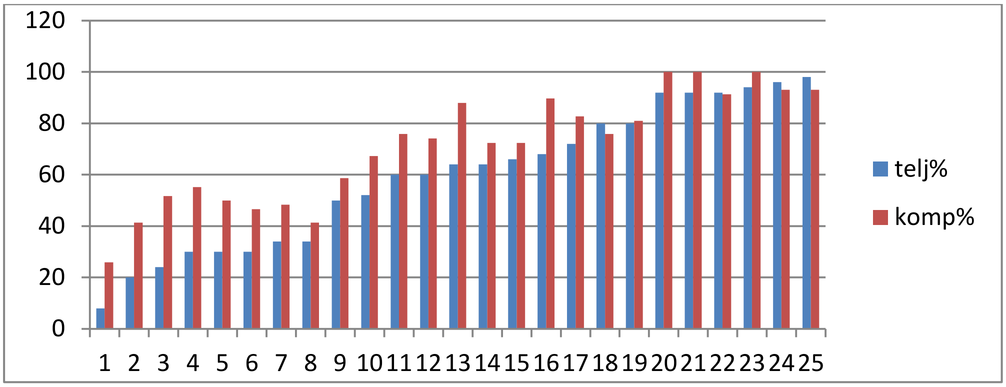
Mivel a szöveges feladatokban több kompetencia item is megjelenhet, azokat az a), b), c), d), e), f), h), k), l), m) itemek szerint vizsgáltam, míg az egyenletek megoldásánál az a), b), c), h), k), l), m) itemeket néztem (az eleve szimbolikus formában megadott feladatban a d), e), f) itemek nem relevánsak). Így az adható kompetencia pontok az első három feladat esetén 0-10 között, míg a második négy feladat esetén 0-7 pont között mozogtak. A teljesítmény pontok esetén továbbra is megtartottam a tanárnő értékelését.

A feladatokra adható maximális pontok a következők:

Feladat	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	Összesen
Teljesítmény pont	10	10	6	8	8	4	6	50 pont
Kompetencia pont	10	10	10	7	7	7	7	58 pont

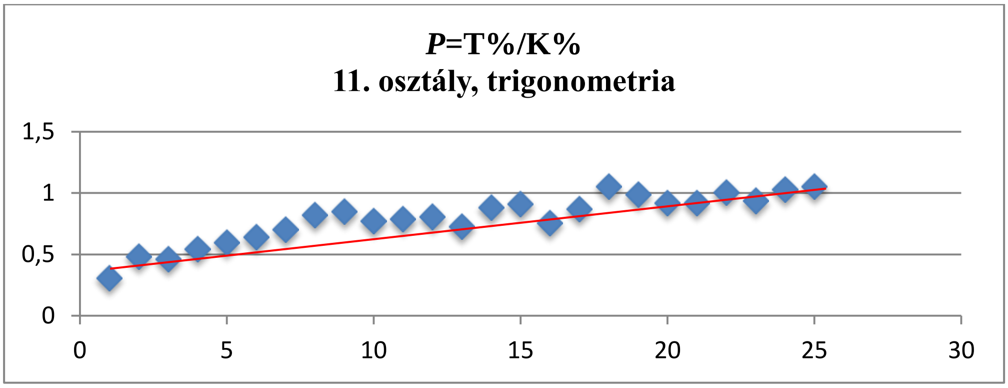
14. táblázat: Trigonometria alkalmazása dolgozat pontozása

Ezt a dolgozatot 25 tanuló írta meg (ugyanaz az osztály, mint az exponenciális – logaritmikus egyenletek dolgozatot). A matematikai teljesítményük átlaga 59,6% volt. A teljesítmény értékelés érdemjegyekre átváltása az előző dolgozattal megegyező volt. Ennek alapján 2 tanuló dolgozata elégtelen, 5 tanuló dolgozata elégséges, 8 tanuló dolgozata közepes, 3 tanulóé jó, és 6 tanulóé pedig jeles lett.
A kompetencia pontok átlaga 71,03%. A következő grafikon mutatja a tanulók pontszámait növekvő teljesítmény pontok szerint sorba rendezve.



11. ábra: 11. évfolyam trigonometria dolgozat eredményei

Itt is tapasztalható a kompetencia pontok magasabb értéke, sokszor a gyenge teljesítményt nyújtó tanulóknál is. Az előzőleg említett okok mellett az is megállapítható, hogy a gyengébb matematikai teljesítmény mögött inkább az adott tananyag elsajátításának hiányosságai állhatnak, mint a matematikai kompetencia gyengesége – például a 12. és 14. számú tanuló esetén, akik viszonylag magas kompetencia pontszámmal csak közepes eredményt értek el. Az ő esetükben rendelkezésre állnak azok a képességek, készségek, módszerek, eljárások, amelyekkel jó eredményt lehet elérni az adott területen, ezért tananyagbeli hiányosságok, számolási hibák, esetleg a figyelem zavarai okozhatják a gyengébb teljesítményt. Természetesen a pontos okokat csak a dolgozatok és a tanulók egyedi vizsgálatával lehet megmondani. A vizsgált kompetencia itemek közül a legtöbb hiányosságot a „tervszerű megoldás" (h) és a „teljes megoldásra törekvés, válaszadás a kérdésre" (m) itemekben tapasztaltam. Általánosságban elmondható, hogy a tanulók minden feladattal foglalkoztak, néhány esettől eltekintve jól értelmezték a feladatot, a matematikai szimbólumokat jól kezelték, ahol szükséges volt, ábrát készítettek. A gyengébb teljesítményt elért tanulóknál több esetben is előfordult, hogy az ábra túl sematikus volt, hiányoztak a jelölések, így nem tudták alkalmazni a megfelelő összefüggéseket a feladat megoldásához. A dolgozat eredményei azt mutatják, hogy megfelelően felkészültek, és a dolgozat jól elő volt készítve. A kétféle értékelés aránya ennél a dolgozatnál is az előzőekhez hasonló emelkedő tendenciát mutat:



12. ábra: 11. osztály, trigonometria dolgozat ***P*** értékei tanulónként

P értéke ennél a dolgozatnál 11 tanuló esetében alacsonyabb 0,8-nél, 14 tanuló esetében 0,8 fölött van, ebből 4 tanulónál az érték meghaladja az 1-et. Utóbbiak matematikai teljesítménye is a legjobbak között van. Ennek a dolgozatnak az eredményei is azt mutatják, hogy a már meglévő matematikai készségeket, képességeket a tanulók akkor tudják a dolgozatban jól alkalmazni, ha az adott területhez tartozó ismeretanyagot összefüggéseiben, a korábbi ismeretekkel integrálva tanulták meg. A pusztán szimbólumok memorizálásával történő rögzítés esetén a problémamegoldás során nehezen tudják a modellt az adott helyzetre alkalmazni. Ez is a korábban megállapított problémamegoldási képességek fejlesztésének szükségességét helyezi előtérbe.

3.4. Számtani és mértani sorozatok (12. évfolyam)

A számtani és mértani sorozatok témakörében egy szintén általános matematika tantervű 12. évfolyamos osztály dolgozatait vizsgáltam. Kétféle feladatlap készült, a dolgozatot 31 tanuló írta meg, ugyancsak a 2012-13-as tanévben. A feladatlapok a következők voltak:

A csoport	**B csoport**
1./ Egy számtani sorozat képzési szabálya $a_n = 4n + 5$. Mennyi az a_{10} és S_{10}?	1./ Egy számtani sorozat képzési szabálya $a_n = 3n + 2$. Mennyi az a_{10} és S_{10} ?
2./ Egy teremben 16 sor szék van. A legelső sorban 24 szék van, és minden sorban 4-gyel több, mint az előtte lévőben. Hány ülőhely van ebben a teremben?	2./ Egy nézőtér első sorában 50 személy ülhet. Hány embernek van helye a nézőtéren, ha 22 sor van, és minden sorban az előzőnél 6-tal több ülőhely van?
3./ Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, kerülete pedig 24 cm. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?	3./ Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, kerülete pedig 48 cm. Mekorák a háromszög oldalai és szögei?

4./ Egy számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az első tagból 1-et elveszünk, a másodikhoz 1-et és a harmadikhoz 21-et hozzáadunk, akkor egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Melyek ezek a sorozatok? Mennyi a „d” és mennyi a „q” értéke?	4./ Egy számtani sorozat első három tagjának összege 27. Ha az első tagból 2-t elveszünk, a másodikból 1-et elveszünk, a harmadikhoz pedig 18-at hozzáadunk, akkor egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Melyek ezek a sorozatok? Mennyi a „d” és mennyi a „q” értéke?
5./ Bankba teszünk 500 000 forintot évi 6,5%-os kamatra. a/ Hány forintot kapunk vissza 8 év múlva? b/ Hány év múlva duplázódik meg a pénzünk? c/ Hány százalék kamatot fizet a bank, ha 500 000 forint betét után 5 év múlva 701 276 forintot kapunk vissza?	5./ Bankba beteszünk 600 000 forintot évi 5,2%-os kamatra. a/ Hány forintot kapunk vissza 10 év múlva? b/ Hány év múlva duplázódik meg a pénzünk? c/ Hány százalék kamatot fizet a bank, ha 600 000 forint betétre 6 év múlva 900 438 forintot kapunk vissza?

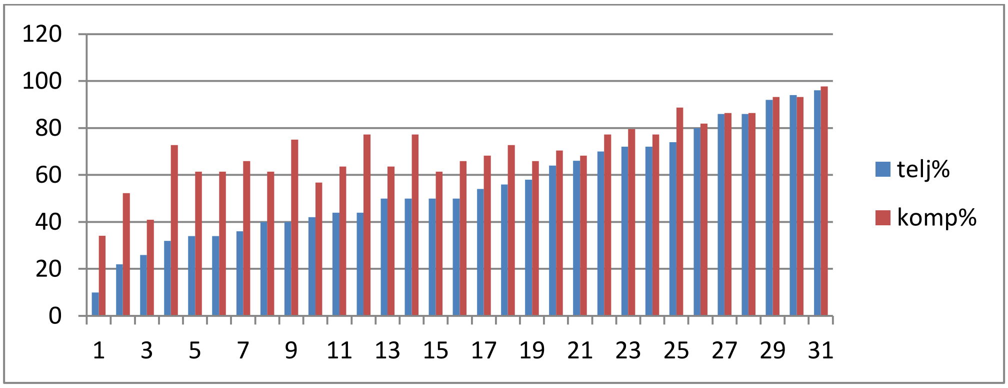
15. táblázat: Sorozatok dolgozat feladatai

Az előzőekhez hasonlóan, a teljesítmény értékelés esetén a tanárnő pontozási rendszerét nem változtattam meg. Az eredmények érdemjegyekre való átváltása is az előző dolgozatokhoz hasonlóan történt.
Mindkét csoportban a dolgozat feladatai közül az első egy szimbolikus formában megadott feladat, ahol a kompetencia itemek közül az a), b), c), h), k), m) itemeket vizsgáltam. A többi négy feladat szöveges, gyakorlati élethez kapcsolódó, itt az a), b), c), d), e), f) h), k), m) itemek megjelenését néztem, valamint a 4. és 5. feladat esetén az l) itemet is relevánsnak éreztem, ezért ott ezt is figyelembe vettem. Így a feladatlap feladatainak maximális pontjai a következőképpen alakultak:

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	Összesen
Teljesítmény pont	6	6	10	12	16	50 pont
Kompetencia pont	6	9	9	10	10	44 pont

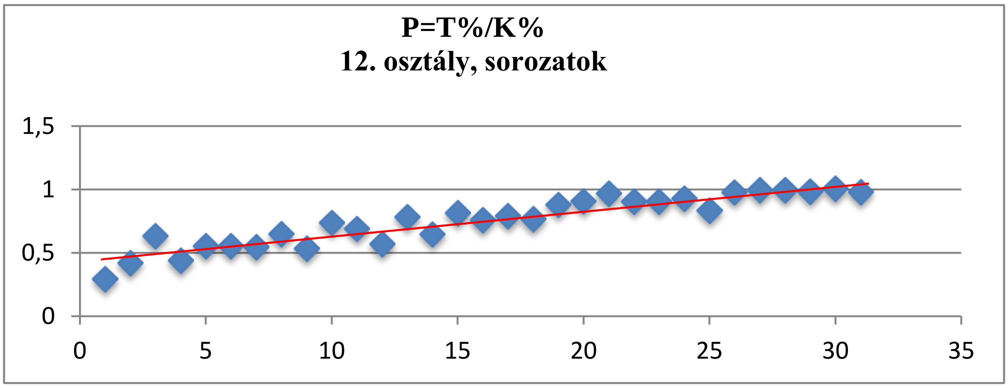
16. táblázat: sorozatok dolgozat pontozása

A dolgozatot megírt 31 tanuló matematikai teljesítményének átlaga 55, 61% lett. Az érdemjegyek megoszlása a következő volt: 3 tanuló írt elégtelen dolgozatot, 9 tanuló elégségest, 8 tanuló dolgozata lett közepes, 6 tanulóé jó és 5 tanulónak sikerült jelesre a dolgozat. A kompetencia pontok átlaga 70,89%. Érettségi előtt álló tanulók esetén nem lehet véletlen, hogy a kompetencia pontok átlaga viszonylag magas. Ekkorra már birtokában kell lenniük mindazoknak a módszereknek, stratégiáknak, eljárásoknak, amelyek képessé teszik őket egy szöveggel megadott, esetleg hétköznapi életből vett problémával foglalkozó feladat matematikai modellezésére. Természetesen a behatárolt témakör, és a típusfeladatok begyakorlása is megkönnyíti ilyen esetekben a megfelelő matematikai modell alkalmazását – ez tehát nem ad információt nekünk arról, hogy a tanulók milyen szinten állnak általában az önálló matematikai modellalkotásban. Az eredmények (továbbra is növekvő teljesítmény szerint sorba rendezve a tanulókat) a következő grafikonon láthatók:



13. ábra: 12. évfolyam sorozatok dolgozat eredményei

Itt is látható, hogy néhány tanulónál viszonylag magasabb kompetencia pontszám mellett közepes vagy gyengébb a teljesítmény pontszáma (pl. 4., 9., 12., 14. sorszámú tanulók esetén). Ez szintén azt mutatja, hogy a módszerek, stratégiák birtokában a gyengébb teljesítményt inkább a tananyagbeli hiányosságok okozzák, mintsem a képességek, készségek hiányosságai. Tehát alapvetően tisztában vannak a tanulók azzal, hogyan kellene megoldani a feladatot, de a képletek, összefüggések hibás felidézése, helytelen alkalmazása, számolási hibák, korábbi ismeretek hiányosságai miatt rossz eredményt kapnak. Ez természetesen bizonyos készségek, képességek hiányosságaival is társulhat, ám önmagában nem ez a legfőbb oka a gyenge teljesítménynek.
A kétféle pontozás aránya ebben az esetben is az előzőekhez hasonló grafikont eredményezett:



14. ábra: 12. osztály, sorozatok dolgozat ***P*** értékei tanulónként

A dolgozatok kompetencia értékelésénél a legkevesebbszer a „teljes megoldásra törekvés” (m) item szerepelt, sokan az egyenlet felírása és megoldása után nem válaszoltak a feltett kérdésekre. A matematikai szimbólumok, jelölések használatával (f), a zárt formában való megjelenítéssel (l) ezeknél a feladatoknál nem volt probléma – erre a korosztályra már a szimbolikus gondolkodás jellemző, ami még a gyengébb teljesítményt elért tanulóknál is megjelent. Szintén nem volt probléma az ábra, táblázat, adatok rendszerezése itemmel (d), azonban a tervszerű megoldás (h) már inkább csak a jobb teljesítményt elért tanulókra volt jellemző. A gyengébb eredményt mutató tanulók többször tévesztettek a megfelelő összefüggés megtalálásában, és a megoldásukra inkább a véletlenszerű számítások voltak jellemzők.

A ***P*** magasabb értékei itt is egyértelműen a jobb teljesítményt elért tanulóknál jelennek meg (a grafikon jobb oldalán). 15 tanuló, tehát gyakorlatilag az osztály fele ért el 0,8 feletti értéket. A jobb teljesítményt nyújtó tanulók esetében tehát megállapítható, hogy képességeik, készségeik megfelelő ismerettel párosulva valóban alkalmazható tudást eredményeztek – véleményem szerint ez lenne a kompetencia alapú matematikaoktatás fő célkitűzése.

3.5. Sík- és térgeometria (12. évfolyam)

A középiskolai tananyagok között ez az utolsó, melyet „új tananyag”-ként tárgyalunk 12. évfolyamon. Az érettségihez közeledve a gyakorló és számonkérő feladatok már egyre jobban az érettségi megfogalmazásának, szintjének megfelelőek. A dolgozatban a tanárnő 6 feladatot tűzött ki, melyek mindegyike szöveges, van köztük matematikai nyelven megfogalmazott, és hétköznapi életből vett példa egyaránt.

A csoport (A feladatok megoldásához készíts vázlatrajzot ahol szükséges!)	**B csoport** (A feladatok megoldásához készíts vázlatrajzot ahol szükséges!)
1./ Egy téglatest éleinek aránya 2:3:5. Térfogata 6480 cm^3. Mekkorák az élei és mennyi a felszíne?	1./ Egy téglatest éleinek aránya 3:4:5. Térfogata 7500 cm^3. Mekkorák az élei és mennyi a felszíne?
2./ Egy szabályos háromszög alapú hasáb alapélei 4 cm hosszúak, magassága kétszer akkora. Mennyi a hasáb térfogata és felszíne?	2./ Egy szabályos háromszög alapú hasáb alapélei 8 cm hosszúak, magassága kétszer akkora. Mennyi a hasáb térfogata és felszíne?
3./ Egy téglalap alakú park egyik oldala 42 m hosszú. Egy út átlósan vezet keresztül a parkon, mely 70 méteres. Hány méter kerítés-anyagot vásároljunk a park körbe kerítéséhez, ha 6,5%-kal többet vásárolunk a számítotthoz képest?	3./ Egy téglalap alakú park egyik oldala 42 m hosszú. Egy út átlósan vezet keresztül a parkon, mely 70 méteres. Hány méter kerítés-anyagot vásároljunk a park körbe kerítéséhez, ha 6,5%-kal többet vásárolunk a számítotthoz képest?
4./ Egy kúp alapkörének átmérője 18 cm hosszú, alkotója 24 cm. Számold ki a	4./ Egy szabályos négyoldalú gúla alapélei 14 cm hosszúak, az oldallap

kúp térfogatát és a kúpba írható gömb sugarát! Mennyi a térfogata a kúppal azonos alapterületű és magasságú hengernek?	magassága 2 dm. Számold ki a gúla térfogatát és a gúlába írható gömb sugarát! Mennyi a térfogata a gúlával azonos alapterületű és magasságú hasábnak?
5./ Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelynek térfogata 904,32 cm^3?	5./ Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelynek térfogata 1436 cm^3?
6./ Egy szimmetrikus trapézt megforgatunk a hosszabbik alapja körül. Számold ki a keletkezett forgástest felszínét és térfogatát! A trapéz alapjai 26 cm és 14 cm hosszúak, szárai pedig 10 cm hosszúak.	6./ Egy szimmetrikus trapézt megforgatunk a hosszabbik alapja körül. Számold ki a keletkezett forgástest felszínét és térfogatát! A trapéz alapjai 24 cm és 12 cm hosszúak, a szárai pedig 10 cm hosszúak.

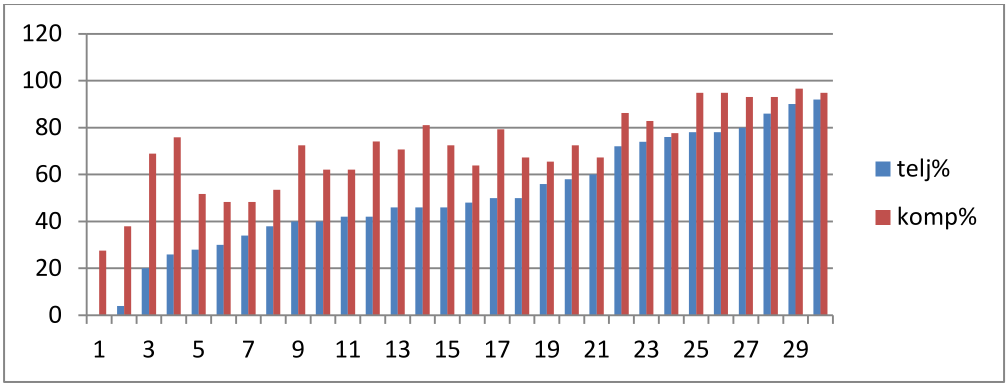
17. táblázat: Sík- és térgeometria dolgozat feladatai

A legtöbb feladat esetében vizsgálhattam a kompetencia itemekből 10-et (a), b), c), d), e), f), h), k), l), m)). Mivel indoklást egyik feladat sem kért, a j) itemre nem vizsgáltam a dolgozatokat. Az 5. feladat esetén az ábra felrajzolása nem igazán segítette volna a feladat megoldását, ezért ott a d), e) pontokat kihagytam (ritka eset egy geometriai feladat esetén, de annyira egyértelmű a szövegezés, hogy a megoldáshoz nincs szükség a gömb felrajzolására). A teljesítmény pontokkal együtt – melyekben szintén nem változtattam meg a tanárnő értékelését – a feladatlap kétféle értékelése a következő volt:

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Összesen
Teljesítmény pont	8	10	6	12	4	10	50 pont
Kompetencia pont	10	10	10	10	8	10	58 pont

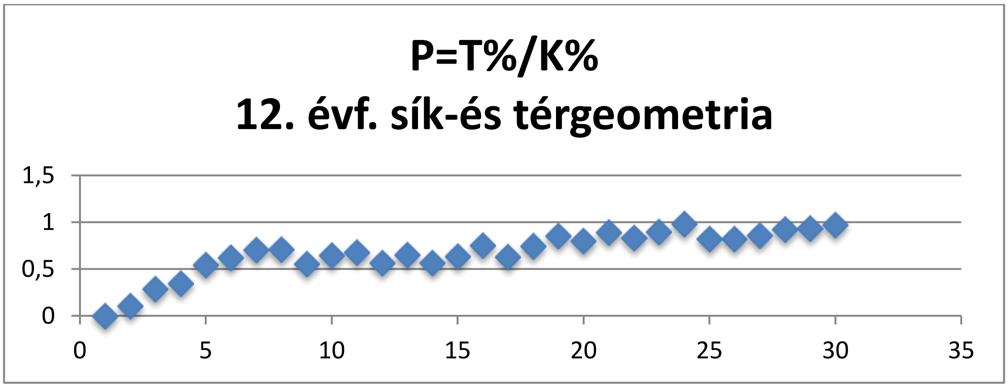
18. táblázat: geometriai számítások dolgozat pontozása

A dolgozatot 30 tanuló írta meg, ugyanaz az osztály, mely az előző, sorozatok témakör dolgozatát. A matematikai teljesítményük átlaga 51% lett. Érdemjegyre átváltva 4 tanuló írt elégtelen dolgozatot, 11 tanuló elégségest, 6-6 tanuló ért el közepes és jó eredményt, míg jelest 3 tanuló kapott. Matematikai teljesítmény szempontjából tehát ez a dolgozat gyengébben sikerült, mint az előző. Ennek oka lehet a több összetettebb feladat, valamint a témakör azon sajátossága, hogy sokféle különböző összefüggés ismeretét feltételezik a feladatok, mélyebb szintű problémamegoldó gondolkodást tételeznek fel. A kompetencia pontok átlaga 71,2%. Itt is elmondható, hogy a viszonylag magas kompetencia pontok azt mutatják, hogy a középiskolai tanulmányok végéhez közeledve, a tanulók egyre jobban tudják, hogyan kell egy matematika feladathoz hozzákezdeni, az adott témakörben milyen elvárások vannak a feladatok megoldásával kapcsolatban. Itt is meghatározó, hogy a tanulók alaposan felkészítés után írták meg a dolgozatot.



15. ábra: 12. évfolyam, sík- és térgeometria dolgozat eredményei

A fenti grafikonról jól látszik, hogy viszonylag magas kompetencia pontszámot értek el olyan tanulók is, akiknek a matematika teljesítménye közepes vagy gyengébb (pl. a 3., 4., 9., 12., 14. 17. tanulók). Ezeknél a tanulóknál érdemes megvizsgálni, hogy mi lehet az oka a gyenge teljesítménynek: több esetben a képletek helytelen felidézése, számolási hibák, a feladat befejezetlensége eredményezte a sikertelenséget (a h), k) m) itemek hiánya). Előfordult az is, hogy egy jó elindulás, ábra, adatok rendszerezése után hiányzott a tervszerű gondolkodás (h), ami ad hoc számolásokat eredményezett, melyek nem voltak értékelhetők. A matematikai teljesítmény gyengesége sokszor korábbi hiányosságokra vezethető vissza. Gyakori hiba volt az ábrák sematikus volta (e), f) itemek), azokon a saját jelölések hiánya, ami azt eredményezte, hogy a „képlet” szokásos jelöléseit használva értelem nélküli számolást végeztek a tanulók.
A dolgozat alapján elkészített grafikon a ***P*** értékéről ugyancsak azt mutatja, hogy a jobb teljesítményt nyújtó tanulóknál ez a hányados magasabb, mint a gyengébb teljesítményt elért tanulóknál. A kompetenciák iskolai teljesítményben való megjelenése tehát attól függ, hogy az elsajátított ismereteket milyen jól tudja alkalmazni a tanuló – ehhez pedig az értelmes tanuláson keresztül vezet az út.



16. ábra: 12. évfolyam, sík- és térgeometria dolgozat ***P*** értékei tanulónként

3.6. Következtetések

Talán szokatlan, hogy a hagyományos iskolai témazáró dolgozatokat matematikai kompetenciák alapján értékeljünk. Mégis úgy gondolom, ez a vizsgálat hasznosnak bizonyult jó néhány kompetenciákkal kapcsolatos kérdés megválaszolására. Míg az első vizsgálat esetén fő célom az volt, hogy hogyan lehet összehasonlítani a hagyományos teljesítmény értékelést a matematikai kompetenciák mérésével, valamint megállapítani, mely matematikai kompetencia komponensek azok, amelyeket fejleszteni kell, hogy a tanulók jobb teljesítményt tudjanak elérni, itt a hangsúly már máson volt: a matematika tanulmányaik végéhez közeledve a tanulók milyen kompetenciákkal rendelkeznek ahhoz, hogy egy matematikai problémát meg tudjanak oldani, és ezeket adott témakörökben hogyan tudják alkalmazni. Úgy gondolom, a magyar közoktatás szerkezetének is jobban megfelel a 11-12. évfolyam vizsgálata kompetenciák szempontjából, mint a 15 éves korosztályé (melyet a PISA vizsgál), mert akkor még csak a középfokú tanulmányaik kezdetén járnak a tanulók, mind tananyagban, mind óraszámban kevesebbet tanultak még más országok hasonló korosztályához képest [28]. A valós iskolai helyzetben a kompetencia értékelés és a matematikai teljesítmények összehasonlítására alkotott ***P*** ugyanolyan tendenciát mutatott mind a négy vizsgált esetben, mint a kompetencia tesztek esetén: a jobb teljesítményt nyújtó tanulók esetében magasabb az érték, mint a gyengébben teljesítők között. Mik azok a lényeges elemek, amelyekben a jobban teljesítők eltérnek a gyengébb eredményt elérőktől? A nagyon gyenge teljesítményt nyújtók esetében nyilván a gyengébb matematikai képességek, készségek nagy mértékben felelősek a rossz teljesítményért. Ez párosulhat hibás tanulási stratégiával, alulmotiváltsággal, ami évek alatt együtt eredményezi a matematikától való elfordulást. Ennek időben való felismerését segíthetik a fentiekhez hasonló vizsgálatok, melyekből a tanulókra egyedi megállapításokat lehet tenni, és a tanár ennek megfelelően készítheti el a differenciált feljesztési terveket. A jobb teljesítmények esetén a motiváció mellett valószínűleg a jobb tanulási stratégiák is hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók kompetenciáikat jobban tudják kamatoztatni az iskolai dolgozatokban. Ezt látszik alátámasztani az a vizsgálat is, melyet magyar kutatók a 2003-as és 2012-es PISA vizsgálatok másodelemzéseként végeztek el [28]. Ebben megállapították, hogy a gyengébb eredményt elért tanulók esetén jellemző a memorizációs, ismétléses tanulási stratégia (esetenként a mélyebb megértés nélkül). A jobban teljesítők esetében azonban már az elaborációs stratégia a jellemzőbb, azaz a meglévő és az új tudás összekapcsolása, a mélyebb megértésen alapuló tanulás. Úgy gondolom, hogy a vizsgálataimban tapasztalt ***P*** növekedésének hátterében is hasonló okok húzódhatnak meg. Azonban biztosat csak akkor lehetne mondani, ha megkérdeztem volna a tanulókat a tanulási, felkészülési módszereikről.

4. Esettanulmányok: matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban

Az előző vizsgálatokból és a szakirodalom elemzéséből is látható, hogy matematikai tudásunk kettős: egyrészt áll olyan ismeretekből, amelyek a matematika, mint rendszer, tudomány alapját képezik, másrészt olyan eljárásokból, gondolkodásmódokból, stratégiákból, amelyek megmutatják, hogyan oldjuk meg a matematikai jellegű problémákat. A kettő szoros összefüggésben áll egymással, egyik sem működik a másik nélkül. [15] Az utóbbi magában foglalja azokat a készségeket, képességeket, amelyek a matematikai kompetencia lényeges részét jelentik. Ehhez társul a szaktudás, az ismeretek összessége, az attitűdök, melyek együtt alkotják a matematikai kompetenciát. A bevezetőben tárgyalt sokféle megközelítés közül a PISA-féle matematikai kompetencia modellt vizsgáljuk meg olyan szempontból, hogy az egyes komponensek milyen gondolkodási képességek és készségek birtoklását jelentik. Az intelligencia faktoranalízise és tartalmi elemzések alapján korábban bemutatott, a matematikai kompetenciára jellemző készségeket és képességeket be lehet sorolni a nyolc komponenshez. Ezek között vannak szorosan a matematikai megismeréshez kapcsolódók, és vannak általánosabb gondolkodási, tanulási, tudásszerző, kommunikációs készségek és képességek is.
Egy lehetséges besorolásuk a következő:

1.	Matematikai gondolkodás:	rendszerezés, kombinativitás, analízis, szintézis, analógiás gondolkodás, logikai következtetés, valószínűségi következtetés
2.	Problémafelvetés és -megoldás:	problémaérzékenység, probléma reprezentáció, szövegértés, szövegértelmezés, eredetiség, hajlékonyság, rugalmasság, transzferálás, divergens és konvergens gondolkodás, feladattartás, kreativitás, tervezés
3.	Modellalkotás:	tervezés, tervszerűség, rész-egész észlelés, összefüggések keresése, asszociatív memória, metakogníció, analógiás gondolkodás
4.	Érvelés, bizonyítás:	deduktív és induktív következtetés, ítélőképesség, igazságérzet, általánosítás, logikai következtetés, ok-okozati viszonyok felismerése
5.	Reprezentáció:	ábrázolás, térlátás, térbeli viszonyok észlelése, transzferálás, prezentáció, rész-egész észlelés
6.	Szimbólumok és formalizmus:	szimbolikus gondolkodás képessége, emlékezet, függvényszerű gondolkodás, algoritmikus gondolkodás, értelmes memória, összefüggések felismerése, asszociatív memória
7.	Matematikai kommunikáció:	relációszókincs, érvelés, önreflexió, metakogníció, narratív memória, szövegértés, szövegértelmezés, figyelem
8.	Matematikai eszközhasználat:	számlálás-számolás készsége, becslés, mennyiségi következtetés, mérés, deduktív és induktív gondolkodás, feladat megoldási sebesség, algoritmikus gondolkodás

19. táblázat: Készségek és képességek besorolása a kompetencia komponenseihez

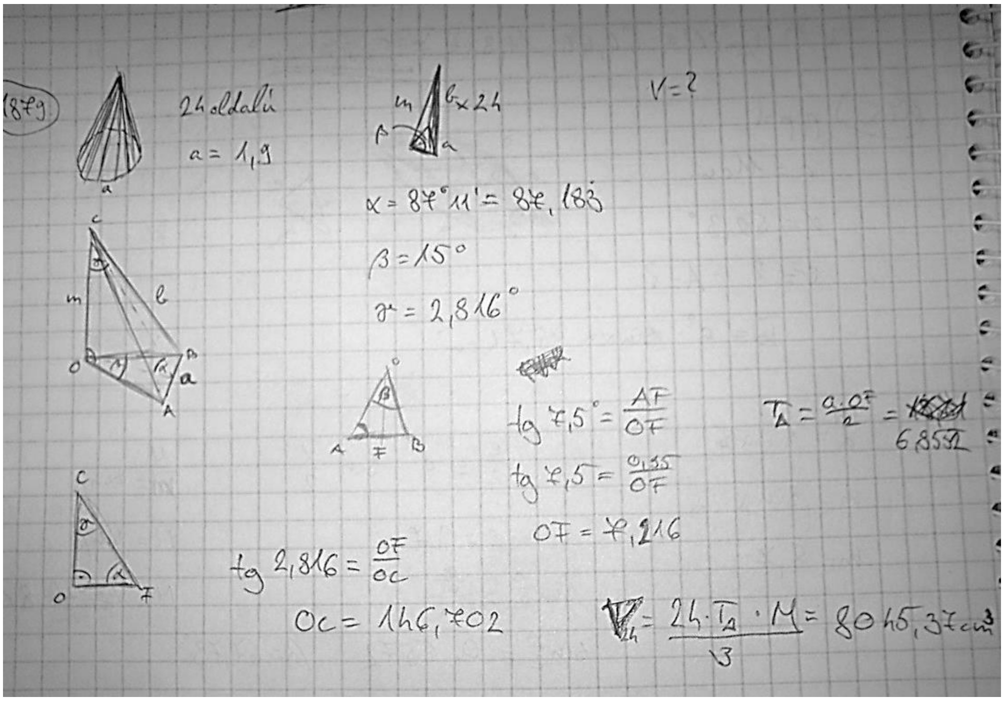
A felsorolás nyilván nem teljes, és azt hiszem, soha nem is lesz teljes. Egy más megközelítésből más készségeket és képességeket is fel lehetne sorolni, esetleg egy-egy képességet több komponens alá is besorolhatunk (mint ahogy én is tettem). Úgy gondolom, minél többet tudunk meg az emberi megismerésről és gondolkodásról annál részletesebb felsorolást adhatunk [19]. Dolgozatom következő részében néhány tanuló írásbeli munkáit szeretném olyan szempontok szerint elemezni, hogy a feladat megoldása során a fenti készségek, képességek közül melyek jelennek meg, és hogyan lehet ezt felismerni. Egy ilyen elemzés hozzásegítheti a matematikatanárt ahhoz, hogy megállapítsa, tanítványa milyen fejlettségi szinten áll, mik az erősségei, a gyengeségei, és meghatározza a szükséges fejlesztési irányokat [29].

4.1. Feladatok elemzése matematikai készségek, képességek szempontjából

Ahhoz, hogy egy ilyen elemzéshez hozzákezdjünk, **„bele kell helyezkednünk a diákjaink elméjébe, és amennyire lehet, megpróbálni megérteni fogalmaik forrásait és erősségeit”** (H. Gardner) [16]. A tapasztalt matematikatanár gyakran érzi azt egy feladat értékelése, egy dolgozat javítása közben, hogy egyik diák (esetleg hibás, nem teljes) megoldása „többet ér”, mint egy másik hasonló megoldás, mert van benne valami, amit nehéz megragadni, mégis értékesebbnek tartjuk. Ez a nehezen körvonalazható valami a matematikai kompetencia, amely akkor is megnyilvánulhat, ha a tanuló tárgyi tudása az adott területen hiányos, vagy számolási hibát vétett. Természetesen az lenne az elérendő cél, hogy a kompetenciák és a tárgyi tudás egyszerre jelenjen meg a megoldásban. A tárgyi tudás mérésére jól bevált módszereink vannak, a matematika érettségi feladatok javítási és pontozási útmutatója ehhez nagyon jó támpontot ad. A tanár fejlesztő munkájához és a tanulók ismereteinek alaposabb felméréséhez azonban meg kell próbálnunk más szemmel (is) nézni a feladatok megoldásait. Fel kell tudni ismerni, hogy a feladatmegoldás, problémamegoldás során milyen készségek, képességek aktivizálódtak, melyek nem (ez segít eldönteni a további fejlesztés irányát is). Természetesen, egy adott feladat vagy probléma nem igényli az összes matematikai jellegű gondolkodási képesség, készség alkalmazását egyszerre – a tanár feladata, hogy beazonosítsa, az adott feladat megoldásához melyek szükségesek. Tanári pályám húsz éve alatt sok és sokféle tanulói feladatmegoldással találkoztam. Ezekből szeretnék néhányat bemutatni, elemezve a bennük megjelenő matematikai kompetenciát – amelyhez a kompetenciák fenti gondolkodási készségek és képességek szerinti felosztását használom. Az elemzés során természetesen figyelni kell arra is, hogy ne „lássunk bele” olyan készségeket, képességet a megoldásba, ami nem jellemző az adott feladatra: nem szabad abba a hibába esni, hogy a tanulót ismerve többet gondoljunk bele a feladatba, mint ami valóban kiolvasható. A feladatok között van órai munka, felmérés, dolgozat feladata – ezt jelzem az adott feladat leírásánál. Mind önálló tanulói munka. A feladatok megoldói középiskolai tanulók, többségük az egri Eszterházy Károly Gyakorló Gimnázium tanulója.

4.1.1. Megoldás elemzése: térgeometria, 12. évfolyam

A feladat: Mekkora annak a szabályos 24-oldalú egyenes gúlának a térfogata, amelynek alapéle 1,9 cm, és az oldallapok alaplappal bezárt szöge 87°11'?

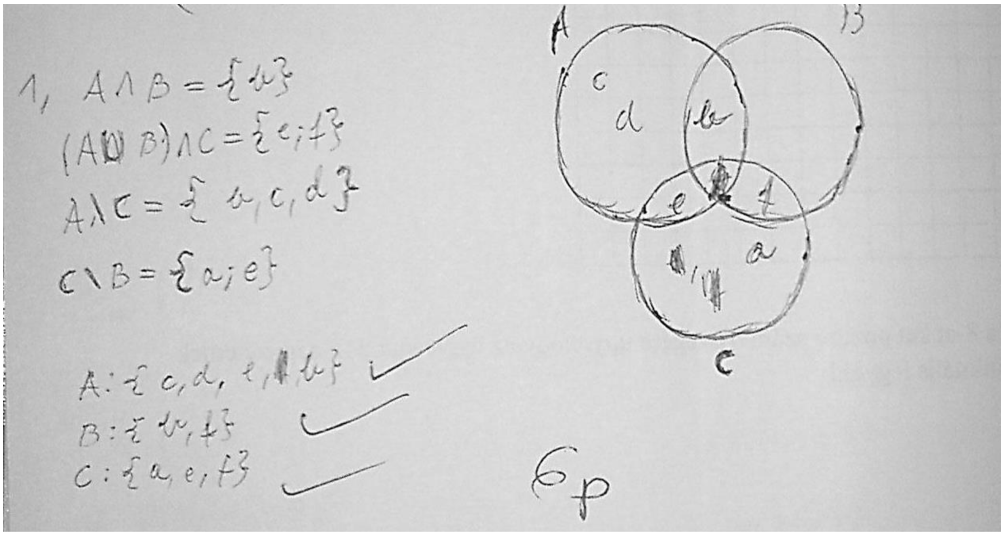


17.ábra: térgeometria feladat, 12. évfolyam

A *17. ábra* egy matematikát emelt szinten tanuló fiú órai munkája. Minden szöveges feladat megoldásának alapja a jó **szövegértés**, **szövegértelmezés**, ennek hiányában a tanulók el sem tudnák kezdeni a feladat megoldását. A térgeometria feladatokhoz szintén fontos a **térlátás**, ami a feladathoz készített ábrák alapján jónak mondható: az elsőként készített ábrán nem látszanak megfelelően az adatok, ezért a tanuló készített egy alkalmasabb nézetet. Jó a **reprezentációs képessége**, az ábrázolás megfelelő a feladat megoldásához, a **jelölések**et célszerűen választotta meg. A tanuló **tervszerű**en dolgozott, jól **használta a matematikai szimbólumokat**, megtalálta a szükséges **összefüggések**et, **mennyiségi következtetései** helyesek (a β és γ szögek meghatározása). A **számológép használatában jártas**, azt célszerűen használta. Fejlett az **analitikus-szintetikus** gondolkodása. Jól látszik a **gyakorlottság** a megoldásban, nincsenek felesleges lépések, jó a **feladattartás**a, választ ad a feltett kérdésre. Mint látjuk, egy ilyen geometria feladat sokféle készséget, képességet mozgósít, melyekkel a tanuló rendelkezik. Természetesen egy jó megoldásról sok információ leolvasható, de a kevésbé látványos megoldásokból is hasznos következtetéseket vonhat le a tanár.

4.1.2. Megoldás elemzése: halmazelmélet, 9. évfolyam

A feladat: Az M:={a; b; c; d; e; f} alaphalmaz A, B, és C részhalmazairól a következőket tudjuk: $A \cap B=\{b\}$, $(A \cup B) \cap C=\{e; f\}$, $A \setminus C=\{b; c; d\}$, $C \setminus B=\{a; e\}$. *Határozza meg az A, B, C halmazokat!*



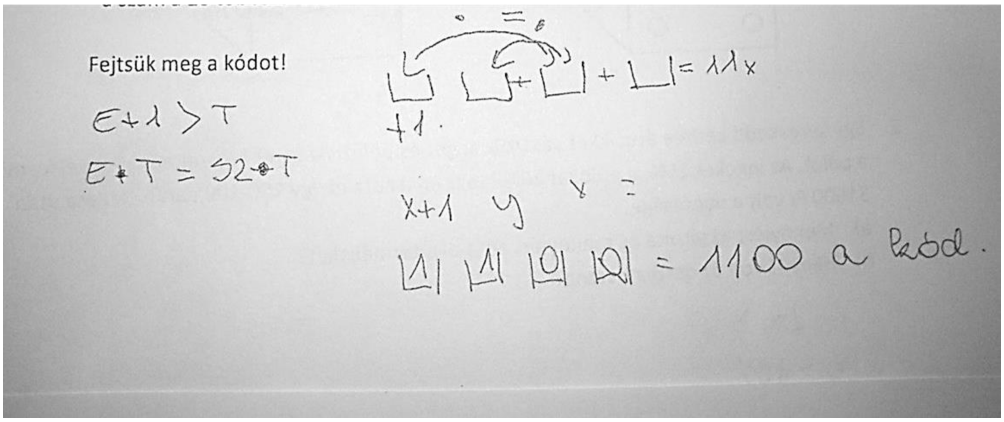
18. ábra: halmazelmélet feladat, 9. évfolyam

A feladat egy iskolai dolgozatban volt kitűzve, a *18. ábra* mutatja az egyik tanuló megoldását. A tanuló helyesen értelmezte a főleg matematikai szimbólumokkal leírt feladatot (**szövegértelmezés**) és megfelelően **reprezentálta**. Az adatok közti **összefüggések**et értette, azokat helyesen **rendszerez**te. Jól használta a **deduktív következtetés**t: a halmazműveletek tulajdonságait helyesen alkalmazta a konrétan megadott halmazokra. Helyesen értelmezte és **alkalmazta a matematikai szimbólumok**at – ez 9. évfolyamon még nem minden tanulóra jellemző. Egy új momentum is megjelent megoldás során: a Venn-diagramban a kisatírozott, először „rossz” helyen megjelenített elemek az **önreflexió** képességét mutatják, és a törekvést a **teljes megoldás**ra. Ez a feladatmegoldás is helyes, és bár kevésbé látványos, mégis jól mutatja a mögötte rejlő gondolkodási folyamatot.

4.1.3. Megoldás elemzése: gondolkodási módszerek, 10. osztály

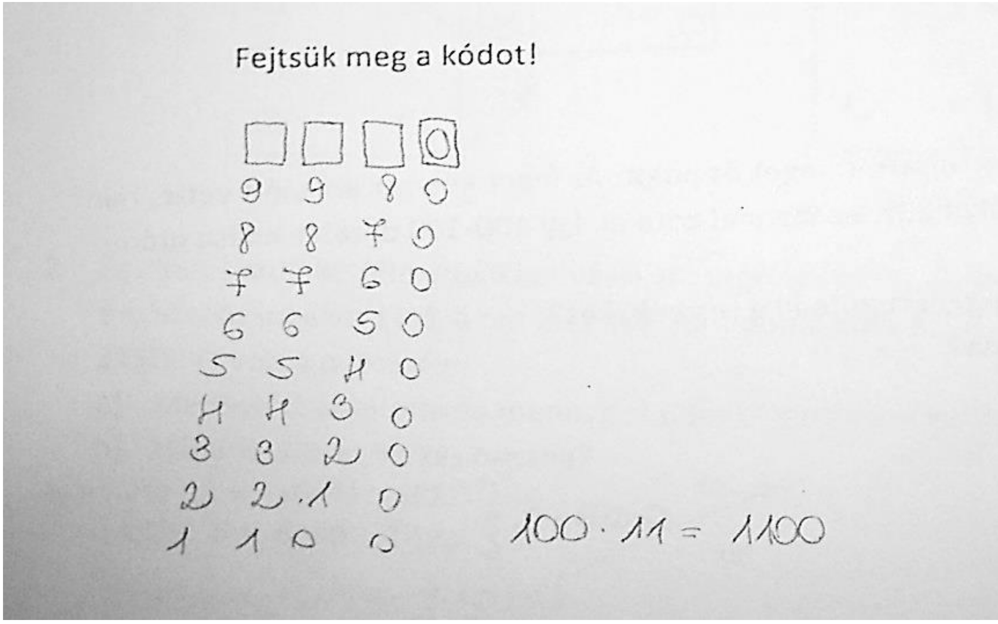
A feladat: Enikő bankkártyájának négyjegyű PIN- kódját a következőképpen titkosítva írja noteszébe:
- a számban eggyel több az ezres, mint a tízes;
- az ezresek és tízesek számának szorzata megegyezik a százasok és tízesek számának szorzatával;
- a szám éppen tizenegyszerese az utolsó három jegyből álló száménak;
- a szám a 10 többszöröse.
Fejtsük meg a kódot!

Ez a feladat az első kompetencia felmérésem egyik feladata volt. Ennek két különböző tanulói megoldását mutatom be. Az első megoldásban *(19. ábra)* nyomon követhető az **összefüggések keresése**, a **szimbolikus gondolkodás** - ugyan még sajátságos egyedi szimbólumokat használ, de ezzel már eléri azt, ami a matematikai szimbólumok egyik fontos szerepe: a gondolkodás megkönnyítése, a munkamemória területeinek felszabadítása. Jól **reprezentálja** a feladatot, **érti és értelmezi a szöveget**, helyes a **logikai következtetése**. Sokkal többet végez „fejben", mint amennyit lejegyez, mégis gondolkodása a leírtak alapján követhető. Bár próbálja a matematikában gyakran használt x és y betűket alkalmazni az ismeretlenek jelölésére, ezeket gyakorlatilag nem használja – de végigviszi a gondolatmenetét, és **választ ad a kérdésre**, a **feladattartása** jó. Amit nem tudunk leolvasni a megoldásból, az éppen az, hogy hogyan szűrte ki a lehetséges esetek közül a helyeset. Az összefüggések felismerése után már nem jutott el a helyes matematikai modellig (jelen esetben az egyenletek felírásáig), tehát modellakotó képessége még fejletlen, nem eléggé gyakorlott. Valószínűsíthető, hogy fejben végiggondolta a konkrét eseteket (tehát induktív következtetést alkalmazhatott), azonban ez már nem került rögzítésre.



19. ábra:PIN-kód megfejtése-1. változat

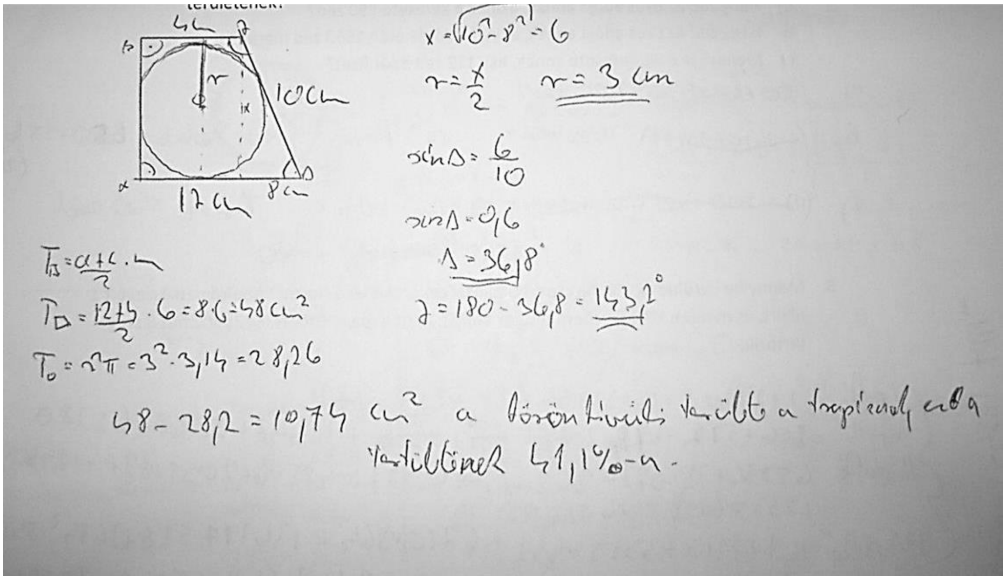
A második megoldása ugyanennek a feladatnak *(20. ábra)* egy teljesen eltérő gondolkodásmódról tanúskodik: ő is jól **értelmez**i a feladat szövegét, de másképpen **reprezentál**ja. Ez a megoldás **tervszerűség**ről, jó **kombinativitás**ról, **összefüggések keresésé**ről és végül helyes **logikai következtetés**ről árulkodik. Az előző tanulóhoz képest sokkal konkrétabb a gondolkodása, szimbolikus gondolkodása még kevésbé fejlett, de **számolási készsége** és feladattartása szintén jó. Valószínűleg tudattalanul, de jól alkalmazta Pólya Györgynek a problémamegoldó gondolkodás folyamatában használt egyik módszerét: hagyjuk el az egyik feltételt, és nézzük az így könnyített feladat lehetséges megoldásait [11]. A „szám tizenegyszerese az utolsó három jegyből álló számnak” feltételt csak a végén vette figyelembe, és így vonta le helyes következtetést. Azt lehet mondani, hogy a konkrét műveletek szintjén a problémamegoldása megfelelő.



20. ábra: PIN-kód megfejtése - második változat

4.1.4. Megoldás elemzése: geometriai számítások, 11. évfolyam

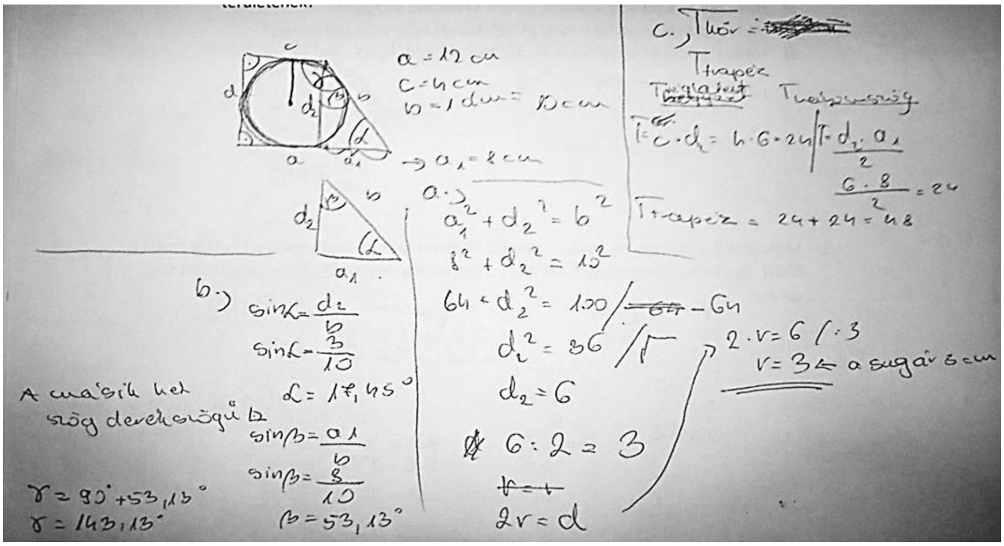
A feladat: Egy derékszögű trapézba kör írható.
a) Mekkora a beleírható kör sugara, ha az alapok hossza 4 cm és 12 cm, a nem derékszögű szár pedig 1 dm?
b) Mekkorák az alapon fekvő szögek?
c) Mekkora a trapéz körön kívüli területe? Hány százaléka ez az eredeti trapéz területének?



21. ábra: derékszögű érintőtrapéz

Ez a feladat szintén az első felmérésemben szerepelt, abból választottam két eltérő gondolkodásmódról és fejlettségi szintről árulkodó megoldást. Az első megoldás a *21. ábrán* látható. A jó **szövegértést** és a **helyes értelmezés**t mutatja a helyes **reprezentáció**, a megoldáshoz jól alkalmazható **ábrázolás**. Az ábrán a jelöléseket célszerűen vezette be. A megoldás nincs túlságosan részletezve, a **tervszerűség** és az **analitikus gondolkodás** mégis nyomon követhető benne: csak a szükséges lépéseket írja, a szükséges számításokat végzi el. Jól választotta ki az **összefüggések**et, azokat **gyakorlott**an alkalmazta (pl. a Pithagorasz-tétel esetében egyből a feladat adataival számolt). **Deduktív következtetés**eket alkalmazott a képletekbe való behelyettesítések során. A **matematikai szimbólumok**at értelmesen használta – a megoldásról látszik a fejlett szimbolikus gondolkodás. Jó a **számolási készsége** és az elektronikus számológépet is megfelelő helyen alkalmazta (**eszközhasználat**). Ez egy „szűkszavú", célratörő, de teljes megoldás, jó a **feladattartás**a, **teljes megoldás**ra törekedett, és a feltett kérdésekre választ adott (az *a)* és *b)* kérdésekre a szokásos kétszeres aláhúzással, a *c)* kérdésre pedig szöveges válasszal). Az utolsó százalékszámítás már nincs részletezve, ezt nyilván számológéppel számolta ki a tanuló, ami szintén a gyakorlottságot mutatja az **eszközhasználat**ban és százalékszámítás összefüggéseinek ismeretében.

Ugyanennek a feladatnak egy másik tanuló által adott megoldását a *22. ábrán* láthatjuk. Elmondhatjuk, hogy ez a tanuló is **jól értelmezte a szöveg**et, és a **reprezentáció**ja is helyes. Az **ábra** és annak **jelölései alkalmasok** a feladat megoldására. Jól megtalálja a szükséges **összefüggések**et, de látszik, hogy az előző megoldónál kevésbé gyakorlott az alkalmazásukban. Több lépésben végzi el a szükséges számításokat. Jó a **számolási készség**e, a **számológép**et is megfelelően kezeli. Az a) rész megoldása helyes, tervszerű és részletes (az alkalmazott összefüggéseket is lejegyezte, 2r=d) A feladat b) részében a szinuszos összefüggésbe rosszul helyettesít be, ezért a kapott szög hibás. A trigonometrikus összefüggésekben való bizonytalanságát mutatja az is, hogy ugyanabból a derékszögű háromszögből kiszámítva a másik hegyesszöget (ami egyébként helyes), nem veszi észre, hogy a kapott két szög összege nem 90°. Itt szembesülhetünk azzal, hogy a **tervezés hiánya** milyen hibákat eredményezhet. Szintén mutatja ez a feladatrész az **önellenőrzés hiányá**t. A *c)* feladatrész megoldásához is hozzákezd, azonban ezt már nem fejezi be. Érdekes a trapéz területének kiszámítása, ami azt mutatja, hogy terület fogalmát helyesen értelmezi: nem a szokásos képlettel számol, hanem a téglalap és a háromszög területének összeadásával határozza meg. **Feladatmegoldása nem teljes**, aminek oka lehet az időhiány (ez volt a feladatlap utolsó feladata), de a tervezés hiányosságai, vagy az, hogy nem tudta felidézni a megfelelő összefüggéseket (kör területe, % számítás). Ebből a megoldásból arra lehet következtetni, hogy a tanuló birtokában van az alapvető készségeknek, képességeknek, amelyekkel el tudja kezdeni a feladatot, de a fent leírt tudásbeli és képességbeli hiányok még fejlesztésre szorulnak.

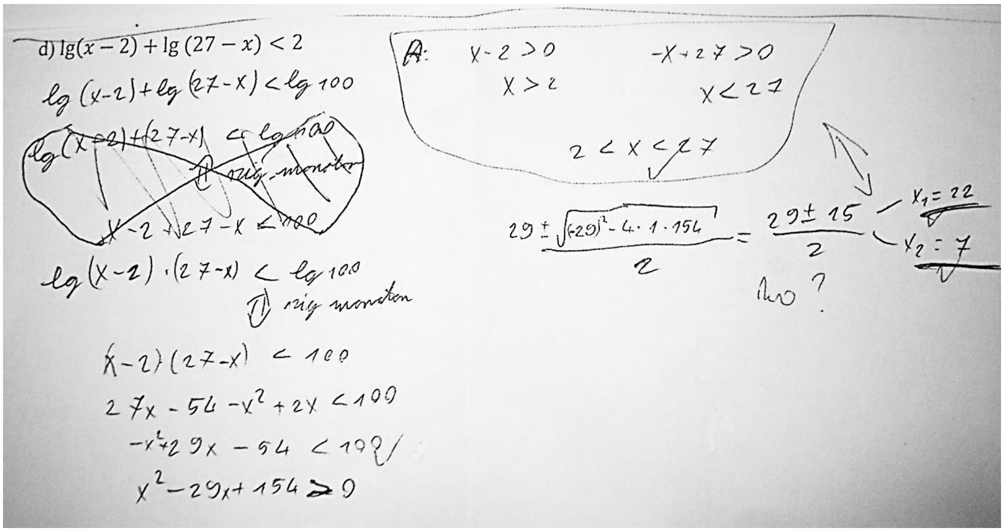


22. ábra:derékszögű érintőtrapéz, második megoldás

4.1.5. Megoldás elemzése: rendszerező összefoglalás, 12. évfolyam

A feladat: Oldd meg a következő egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok lehető legbővebb halmazán, melyen értelmezhető! Add meg az alaphalmazt!

...d) $lg(x-2)+lg(27-x)<2$



23. ábra: logaritmikus egyenlőtlenség

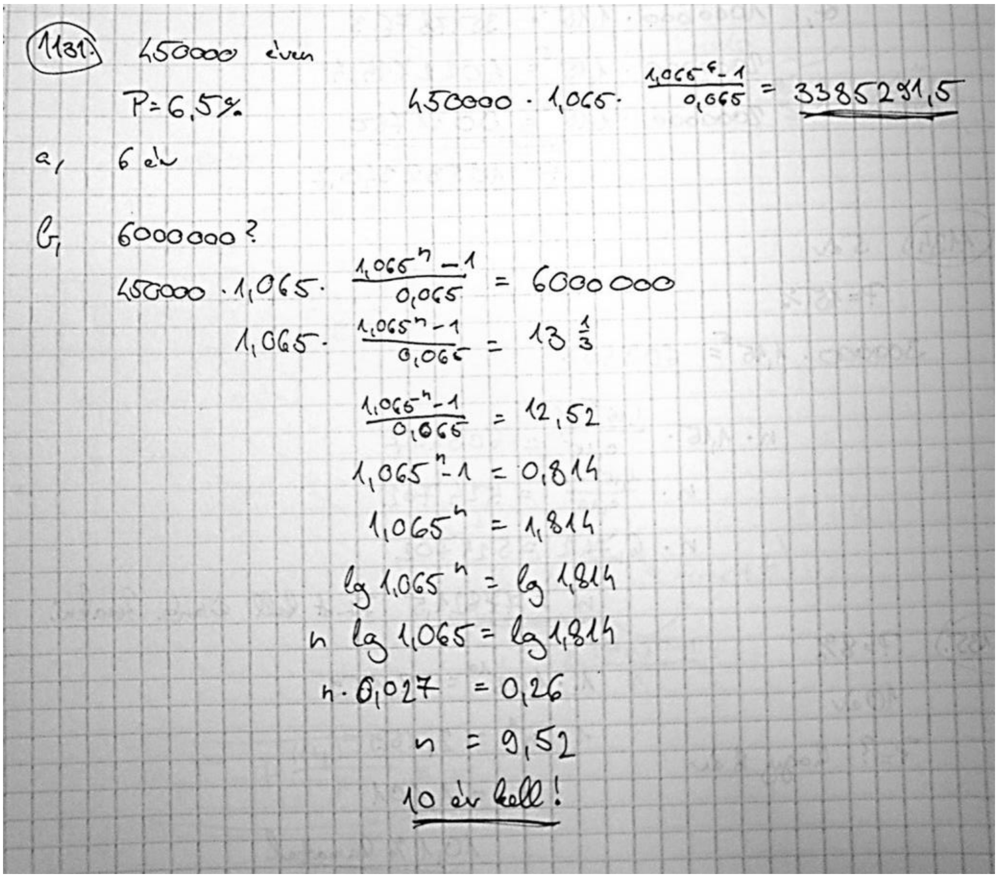
Ez a feladat egy 12. évfolyamos dolgozat feladata volt, melyet a tanulók a rendszerező összefoglalás során, tehát már az érettségire felkészülés időszakában írtak. Bár ez a megoldás sem teljes *(23. ábra)*, mégis nagyon sok matematikai képességről tanúskodik: a **szimbolikus** gondolkodás fejlettségéről és az **algoritmikus gondolkodás**ról, a tanult **összefüggések keresésé**ről, a **számolási készség**ről, a **matematikai eszközhasználat** fejlettségéről. A függvényszerű gondolkodásmód még megjelenik a feladat első részében, de végén már nem. Azt is leolvashatjuk róla, hogy a feladattartása nem elég jó, nem viszi végig a feladatot. Figyelmen kívül hagyja, hogy nem egyenletet, hanem egyenlőtlenséget kell megoldania. **Nem törekszik a teljes megoldásra**, **hiányzik az önreflexió** a végén (bár a feladat elején még jelen volt, ott még javította hibáját). **Hiányzik a tervezés és a tervszerűség** a megoldásból, ezért elmarad a megoldásoknak az alaphalmazzal való összevetése, és a megoldáshalmaz megadása. A feladat ilyen irányú elemzésével tanácsokat tudunk adni a tanulónak arra nézve, hogy mik azok a készségek, képességek, amelyben még fejlődnie kell.

4.1.6. Megoldás elemzése: mértani sorozatok, 12. évfolyam

A feladat: Egy bankbetétbe minden évben 450 000 Ft-ot teszünk be, évi 6,5%-os kamatra.

a) Mennyi pénzünk lesz 6 év múlva?

b) Hány évig kell így tennünk, hogy összegyűljön 6 000 000 Ft?

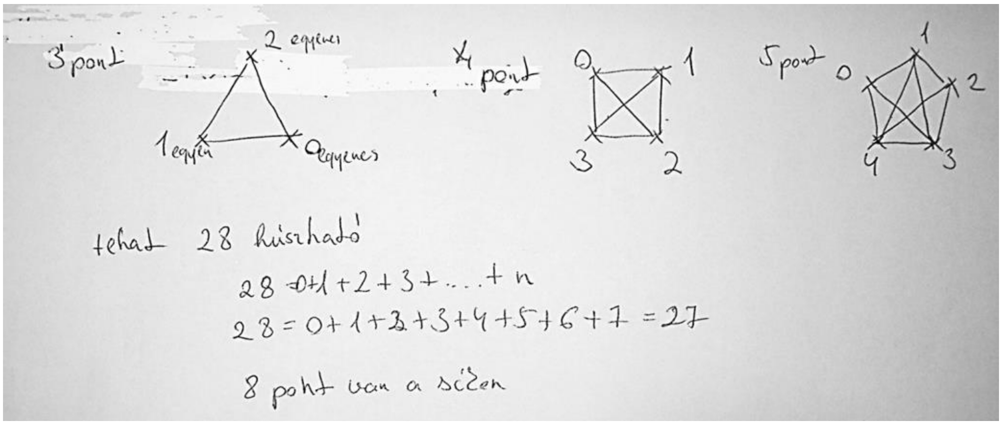


24. ábra: kamatos kamatszámítás

Ez a megoldás (*24. ábra*) egy 12. évfolyamos tanuló órai munkája. Jól **értelmezi** a feladat **szövegét**, és helyesen alkalmazza a szükséges **összefüggéseket**. A feladatmegoldásban a gyakorlottságot mutatja, hogy a „képlet” felírása nélkül, egyből az adatokkal számol (**deduktív gondolkodás**). A megoldás során mégis kétszer is elkövet egy hibát: az összegképletben 1,065-tel való szorzást. A megoldás azonban így is fejlett **szimbolikus gondolkodás**ról árulkodik. Az egyenlet megoldásának menete mutatja az **algoritmikus gondolkodás**t, és a jó **számolási készséget**. Jól alkalmazza a számológépet (**eszközhasználat**). Megoldása **tervszerű**, jó a **feladattartás**a, **választ ad a** feltett **kérdésekre**. Jól alkalmazza a **mennyiségi következtetés**t az évek számának megadásában. Ez azt mutatja, hogy érti a feladatban megadott szituációt, tisztában van a banki kamatszámítás gyakorlatával. Mivel a feladat tanórai munka volt, a gyakorlás során oldották meg, itt az elemzésnek azért van jelentősége, mert rámutatva az elkövetett hibára időben korrigálni lehet, pontosítani a mögötte megbújó fogalom (mértani sorozat első n tagjának összege) megértését, elsajátítását.

4.1.7. Megoldás elemzése: rendszerező összefoglalás, 12. évfolyam

A feladat: Van a síkon valahány pont, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Közöttük összesen 28 egyenes húzható. Hány pontot vettünk?



25. ábra: egyenesek és pontok feladat megoldása

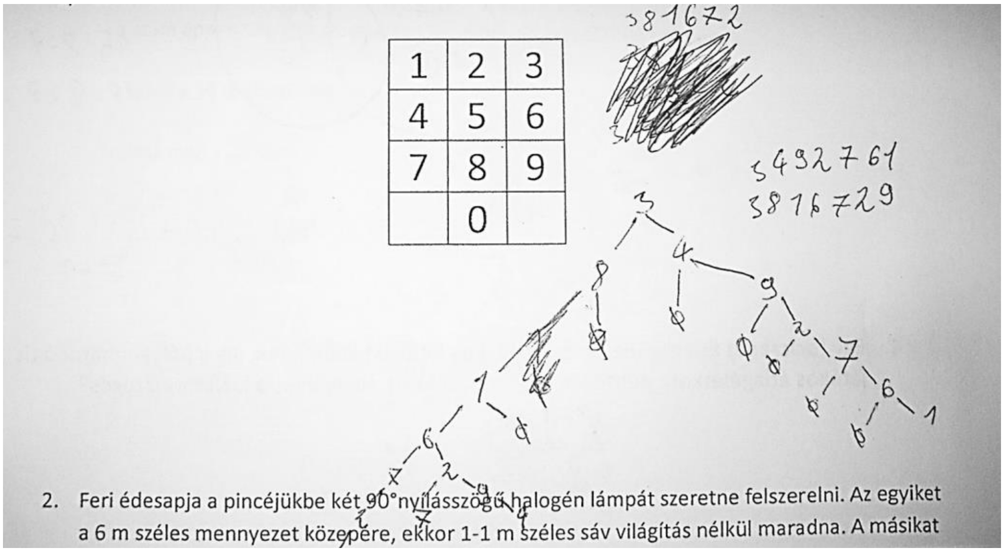
Ez szintén 12. évfolyamon, a rendszerező összefoglalás alkalmával kiadott házi feladat egy feladata volt, melyet a tanulóknak be kellett adni. A feladat megoldása (*25. ábra*) jó **szövegértést, értelmezés**t mutat. A feladat szövegének megfelelő **reprezentációt** keresett a tanuló, ami kicsit ugyan zavaros első ránézésre, de az **induktív gondolkodás és következtetés** leolvasható róla. A hibajavítóval eltüntetett részek azt mutatják, hogy elsőre nem sikerült helyes irányban elindulnia, de az induktív gondolkodás segítségével sikerült a helyes utat megtalálnia. Az indukciót nem vitte végig a teljes általánosításig, hanem maradt a konkrét esetek vizsgálatánál, de abból jól számolt (**számolási készség**) és a **logikai következtetése** is helyes volt. Megoldása **tervszerű**, végigviszi a feladatot, és **választ ad a feltett kérdés**re. A bemutatott megoldást készítő tanuló matematikából nem a legjobbak között volt, de a feladat jó megoldása számára pozitív élményt nyújtott, motivációt adott. Gondolkodása konkrét, a matematikai szimbólumokat gyengén kezeli, nem használja az ide illő algebrai összefüggést, ami ennél a feladatnál még nem okozott problémát. Ha azonban a feladat a probléma általánosítása, akkor ez a gondolkodásmód már nem elegendő. Az, hogy 12. évfolyamon egy tanuló szimbolikus gondolkodása ennyire fejletlen, sajnos nem egyedi példa – gyakran találkozunk ezzel. Ez az összetettebb problémák megoldása esetén hátrányt jelent, és a matematikai kompetenciák közül a matematika nyelvezetével, összefüggéseinek alkalmazásával valamint a modellalkotással kapcsolatos képességek gyengeségét mutatja.

4.1.8. Megoldás elemzése:gondolkodási módszerek, 11. évfolyam

A feladat: Öt jóbarát észrevette, hogy telefonszámaik olyan hétjegyű számok, melyek első számjegye 3, mindegyik számjegyük különböző, és az egymás után lenyomott gombok a sakkjáték lóugrásának szabálya szerint követik egymást.

a) Mi az öt telefonszám,

b) Lehet-e ötnél több ilyen telefonszám? Indokold a választ!

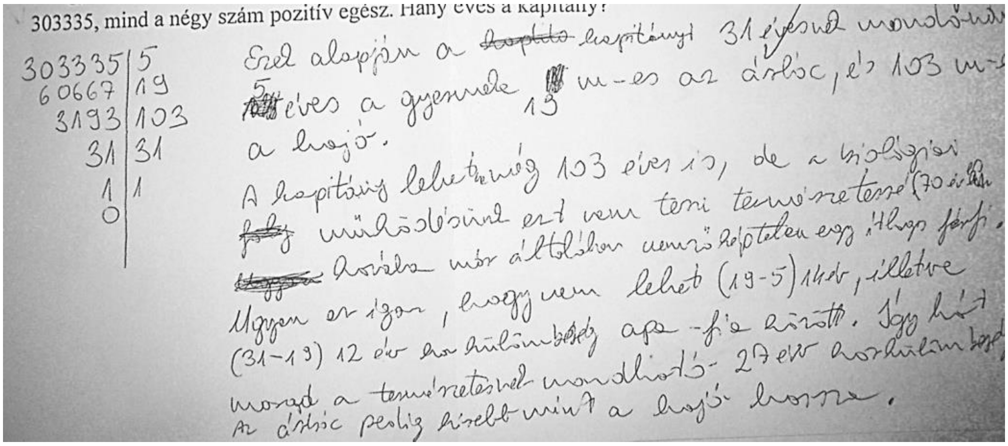


26. ábra: telefonszámok meghatározása feladat megoldása

Ezt a feladatmegoldást szintén az első felmérés feladatlapjai közül választottam, egy 11. évfolyamos fiú megoldása. Bár a feladat megoldása hibás és hiányos, mégis úgy érzem, hogy ez a megoldási mód sokat elárul a tanuló gondolkodásáról. **Jól értelmezte a feladat szövegét**, amit mutat a jobb oldalt felírt két jó telefonszám. Ami miatt kiválasztottam ezt a megoldást, az a **reprezentáció**: a gráf alkalmazása a feladat megoldásában. A felmérés során ezzel a módszerrel egyetlen más tanuló esetén sem találkoztam. Ez azt mutatja, hogy képes a feladat szempontjából releváns matematikai **modell kiválasztására és alkalmazására**. A legtöbb tanuló erre a feladatra csak az öt telefonszám felsorolásával válaszolt, de nem tudta indokolni, hogy miért nincs több lehetőség. Ez a modell viszont alkalmas az **indoklásra** is. A megoldás hiányosságai arra vezethetők vissza, hogy a bal oldali ágon a 6-os szám után tévesztett (7 vagy 0 következhet, nem 7 vagy 2) – ezért nem találta meg az összes lehetséges telefonszámot. A jó modellalkotási képesség sajnos figyelmetlenséggel párosult, ezért nem tudta végigvinni a feladatot, és nem válaszolt a feltett kérdésekre. Gondolkodásában nyomon követhető még a **tervszerűség** és a **kombinativitás**. Az alapvető gondolkodási képességei jók, a figyelmet, a koncentrációt, a feladattartást, a hibák felismerését (önreflexiót) és azok kezelésének képességét kell nála fejleszteni.

4.1.9. Megoldás elemzése: számelmélet, 10. évfolyam

A feladat: Egy hajó hosszának, az árboc magasságának, a kapitány és a kisfia életkorának szorzata 303335, mind a négy szám pozitív egész. Hány éves a kapitány?

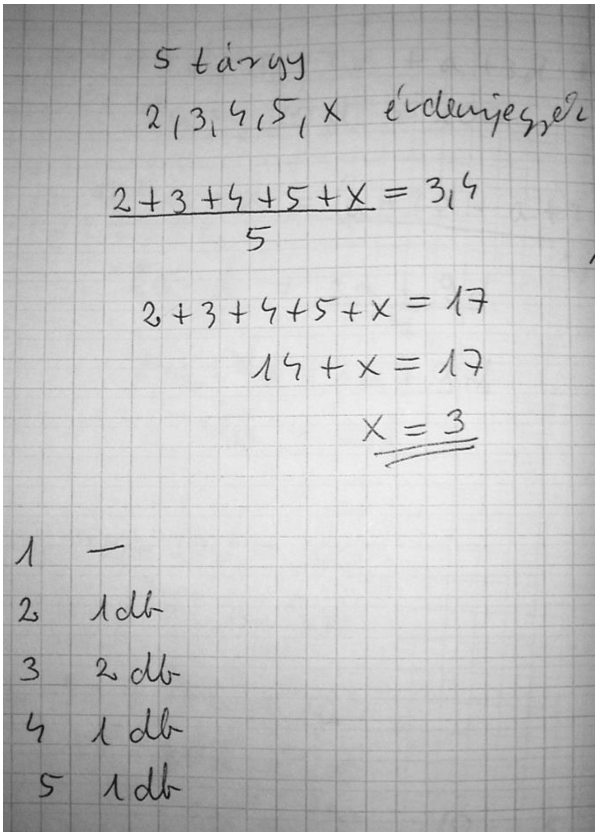


27. ábra: A kapitány életkora feladat megoldása

Ez a feladat szintén a kompetencia felmérés feladatai között szerepelt és az előzőhöz hasonlóan egyedi a vizsgált feladatlapok között (10. évfolyamos fiú megoldása). Ebből a megoldásból is leolvasható a **jó szövegértés, értelmezés**. Helyesen találta meg az alkalmazandó **összefüggés**t (prímtényezőkre bontás), és jól alkalmazta annak **algoritmusát** (bár a prímtényzős felbontás végén a „0” nem helyénvaló!). Jó a **számolási készsége**, és az **eszközhasználata** (számológép). Ami egyedi ebben a megoldásban, az az **érvelés**, amellyel kifejti, hogy a kapott tényezők közül miért éppen a 31 lehet a kapitány életkora. Az érvelésben megnyilvánul a **kombinativitás** (összes lehetőség számba vétele), és a helyes **ítéletalkotás** képessége. Jerome Bruner: Az oktatás kultúrája című könyvében [14] ír a **narratívum**ok szerepéről a tanulási folyamatban – ami ennél a példánál nagyon szépen megmutatkozik: lám, egy számelméleti feladat megoldása során is lehet a történetmesélés, a szituáció írásbeli elemzése révén eljutni a helyes következtetésig! A kompetencia elemek közül jellemző még a megoldásra a **tervszerűség**, és a **feladattartás**, hiszen végiggondolva az összes lehetséges esetet **választ ad a feltett kérdésre** (sőt, még többre is). Úgy gondolom, ez a gondolkodásmód nagyon értékes, mutatja a tanuló problémaérzékenységét. Egy jól kialakított, rendszerezett ismeretrendszerrel párosulva képessé teheti a tanulót az összetett problémák kezelésére, valamint az indoklási, bizonyítási feladatok megoldásának képességére.

4.1.10. Megoldás elemzése: szöveges feladatok egyenletekre, 9. évfolyam

A feladat: Egy diák öt tárgyból érettségizett, az átlageredménye 3,4 lett. Semmiből sem bukott meg, nem volt egynél több kettese, és nem kapott kettőnél több azonos osztályzatot. Milyen osztályzatokat kapott?

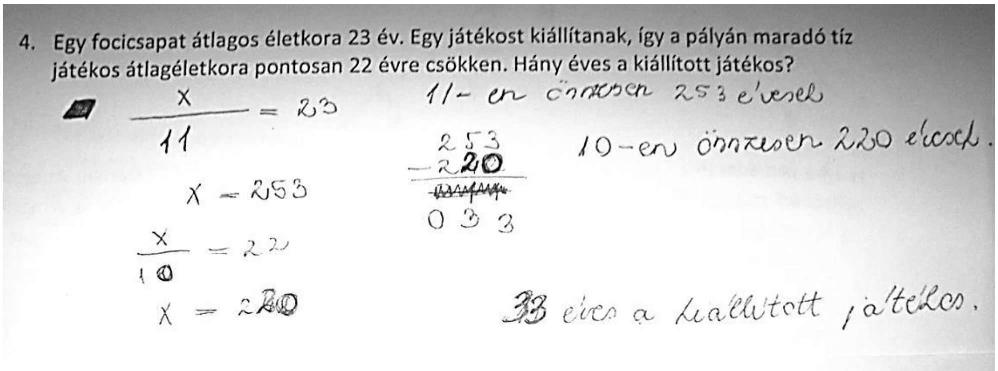


28. ábra:A jegyek átlaga feladat megoldása

Ez a feladat egy 9. évfolyamos tanuló házi feladata volt. A megoldás módjából látszik a helyes **szövegértelmezés**: jól elemezte az explicit és implicit adatokat (**analízis képessége**). Megtalálta a helyes **összefüggés**t (számtani közép), jól írta fel **matematikai szimbólumok**kal. Az **algoritmikus gondolkodás**a és a **számolási készség**e a feladat alapján jónak mondható. Megoldása **tervszerű**, **feladattartása jó, választ ad a feltett kérdésre**. A 9. évfolyamon a matematika tantervnek fontos eleme a szöveges feladatok megoldásának gyakorlása – annak elsajátítása, hogyan lehet a szöveggel megadott információt lefordítani a matematika nyelvére. Ez sok tanulónál nehézséget okoz a magasabb évfolyamokon is, ezért lényeges, hogy az ilyen feladatmegoldásokat értékeljük, mert ez a további fejlődés alapja lehet.

4.1.11. Megoldás elemzése: szöveges feladatok egyenletekre, 9. évfolyam

A feladat: Egy focicsapat játékosainak átlagos életkora 23 év. Egy játékost kiállítanak, így a pályán maradt 10 játékos átlagéletkora pontosan 22 évre csökken. Hány éves a kiállított játékos?

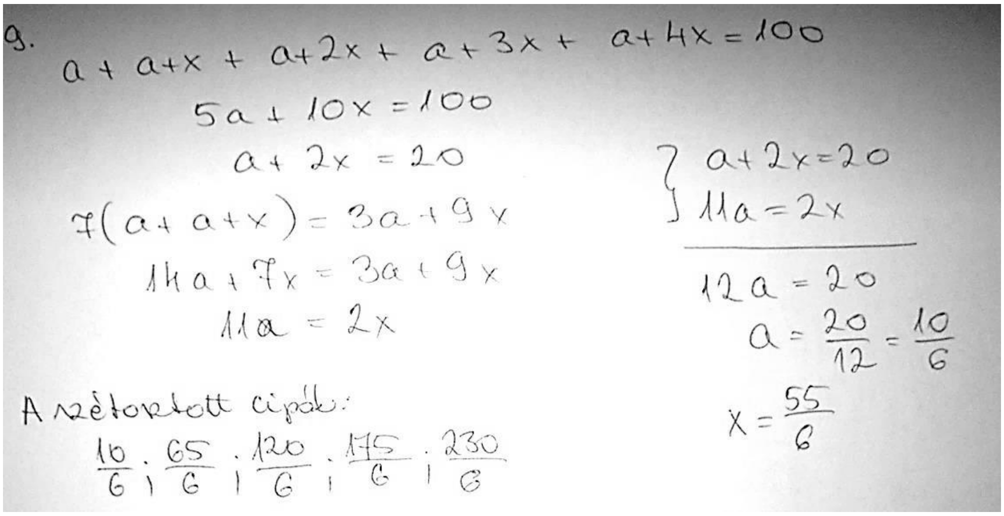


29. ábra: A kiállított játékos életkora feladata megoldása

Ez a feladat beadandó házi feladat volt 9. évfolyamon. Szoros rokonságot mutat a 4.1.10. feladattal. Azonban ez a tanuló más stratégiával oldotta meg a szintén számtani középről szóló feladatot. Mindenekelőtt jó **szövegértési, értelmezési képesség**et mutat a feladat megoldása. Helyesen találta meg a tanuló a feladat szövegében a megoldáshoz szükséges explicit és implicit információkat. Megfelelő **összefüggések**et alkalmaz, és megoldási menetét lépésenként meg is magyarázza (**indoklási képesség**). Megoldásának egyetlen hibája, hogy a feladat két részében ugyanazt a betűt használja különböző változók leírására. Ez nem befolyásolja a végső eredményt, azonban jelezheti a matematikai szimbólumok használatának fejletlenségét. Megoldása **tervszerű**: nagyon egyszerű, elemi számolási részekre bontotta a megoldást (**analízis képessége**), és egyszer tévesztett is, de ezt a hibát tudta korrigálni (**önreflexió képessége**), és így teljes megoldást adott. **Válaszolt a feltett kérdésre, feladattartása jó**. A megoldásból az is látszik, hogy képes **logikusan gondolkodni**, meglátja az összefüggéseket, de szimbolikus gondolkodása még fejletlen. Ebben a korosztályban (a középiskola első évfolyama, 15 évesek) ez még elég sok tanulóra jellemző. Ezen az évfolyamon a matematika tananyagban igen fontos szerepet játszik a matematikai szimbólumok kezelésének elsajátítása, a korábban szemléletes, konkrét példákon alapuló fogalomalkotásból a szimbolikus fogalmak felé tartó átmenet: algebrai kifejezések alkalmazása, egyenlet megoldási módszerek kiszélesítése, stb. Ennek a korosztálynak a gondolkodására még tapasztalataim szerint sok tanulónál a konkrét szakasz jellemző, a Piaget-féle fejlődési elmélet viszont már a szimbolikus gondolkodást feltételezi (12-13 éves kortól) [3].

4.1.12. Megoldás elemzése: rendszerező összefoglalás, 12. évfolyam

A feladat: Hogyan oszthatunk szét öt ember között száz cipót úgy, hogy a második ember ugyanannyival kapjon többet az elsőnél, mint a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél, ha még azt is megkívánjuk, hogy a három nagyobb rész összesen hétszer annyit tegyen ki, mint a két kisebb összege?

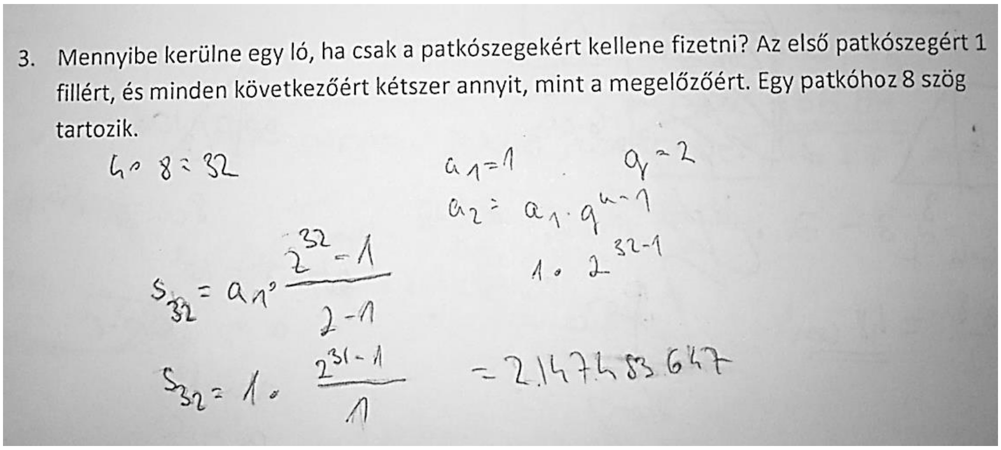


30. ábra: cipók szétosztása feladat megoldása

Ez a feladat 12. évfolyamon beadandó házi feladatként szerepelt a rendszerező összefoglalás során. A bemutatott megoldás **jó szövegértési, értelmezési** képességet mutat. Jól elemzi a szövegben megjelenő információkat (**analízis képessége**) és helyesen **reprezentálja**. A matematikai **szimbólumok**at és a kívánt **összefüggések**et megfelelően alkalmazza. Megoldása „szűkszavú”, nem részletezi, hogy a változók mit jelentenek, a válaszadásból azonban kiderül, hogy tisztában van a jelentésükkel. Az egyenletrendszer megoldásából látszik a jó **algoritmikus gondolkodás**, a jó **számolási készség** (nem ír le minden számolási lépést, de helyesek az eredmények). A feladatot **tervszerű**en vitte végig, **választ adott a feltett kérdésre**. Megoldásából látszik a gyakorlottság, nincsenek felesleges lépések, nem zavarja meg, hogy nem egész megoldásokat kapott. Ami hiányzik a feladatból, az az ellenőrzés, ami azért lett volna kívánatos, mert a kapott eredményekről nem derül ki első ránézésre, hogy helyesek. Érettségi előtt erre mindenképpen fel kell hívni a tanuló figyelmét, hiszen pontokat érhet. A gyakorlott problémamegoldókra sajnos gyakran jellemző a fenti megoldásban is megmutatkozó „szűkszavúság”, a részletek elhanyagolása (mit jelölnek a változók, ellenőrzés). Ennek korrigálására azért van szükség, mert a feladatot javító, értékelő tanár ugyan tudja, hogy milyen választ vár, de egy külső szemlélő számára nem biztos, hogy világos minden lépés.

4.1.13. Megoldás elemzése: mértani sorozatok, 12. évfolyam

A feladat: Mennyibe kerülne egy ló, ha csak a patkószögekért kellene fizetni? Az első patkószögért 1 fillért, és minden következőért kétszer annyit, mint a megelőzőért. Egy patkóhoz 8 szög tartozik.


3. Mennyibe kerülne egy ló, ha csak a patkószegekért kellene fizetni? Az első patkószegért 1 fillért, és minden következőért kétszer annyit, mint a megelőzőért. Egy patkóhoz 8 szög tartozik.

$4 \cdot 8 = 32$ $\quad a_1 = 1 \quad q = 2$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$1 \cdot 2^{32-1}$

$S_{32} = a_1 \cdot \frac{2^{32}-1}{2-1}$

$S_{32} = 1 \cdot \frac{2^{31}-1}{1} = 2.147.483.647$

31. ábra: Patkószöges feladat megoldása

Ez a feladat is a kompetencia felmérésemben szerepelt a 12. évfolyam feladatai között. A *31. ábrán* látható megoldás jó **szövegértési képességek**ről tanúskodik. A tanuló megtalálta a helyes **összefüggés**t, hogy mértani sorozat elemeit kell összeadnia. A matematikai **szimbólumokat** tudja kezelni, bár megoldásában keveredik az általános képlet a sorozat konkrét tagjával. Nem elég következetes a feladat megoldása során, a **tervszerűségben hiányosságok** mutatkoznak. Nem jelöli a 32. tagot ($a_{32} = 1 \cdot 2^{32-1}$), de utána az összegre helyes összefüggést ír le, majd mégis rosszul számol. Nem világos, hogy a $(2^{32} - 1)$ helyett végül miért tér át $(2^{31} - 1)$-gyel való számolásra – erre a tanárnak érdemes rákérdezni. Így végeredménye hibás, és **nem is ad választ a feltett kérdésre**. Ez a megoldás olyan érzést kelt a javító tanárban, hogy lehetett volna akár jó is, de valahol mégis „félrecsúszott”. Ezt a hiányosságot a problémamegoldó gondolkodás fejletlenségében látom: a tervszerűség, a feladattartás, a teljes megoldásra törekvés és az önreflexió hiányában. Ez a példa arra mutat rá, hogy ha a megfelelő összefüggések ismerete, a szaktudás nem párosul jó problémamegoldó képességgel, akkor a megoldás hiányos lesz – ez a megoldás a másik oldalát mutatja annak, hogy a kompetenciákat a szaktudással együtt, azzal párhuzamosan kell fejleszteni.

4.2. Miért tartom fontosnak ezt a látásmódot?

A bemutatott tanulói megoldások csak egy-egy kiragadott példát jelentenek. Bizonyára sok hasonlót látott már az olvasó is, és még sok más példát is lehetne hozni. Célom az volt, hogy megmutassam, nem csak az eredmény „helyessége” szempontjából lehet vizsgálni egy-egy megoldást, hanem a felhasznált matematikai készségek, képességek szempontjából is. Szemléletváltás szükséges az értékelésben is, nemcsak a tanítási módszerekben. A kompetenciák fejlesztését akkor lehet jól végezni, ha a fejlesztő munka eredményét is elemezni tudjuk, nem csak kvantitatív, de kvalitatív módon is. Ez a látásmód lehetőséget ad arra, hogy a további fejlesztés irányát meghatározzuk, felmérjük az erősségeket és a gyengeségeket mind a tanulók munkáiban, mind a saját tanítási gyakorlatunkban. A „szaktudás”, a tananyag elsajátításának mélységén túl így bepillantást nyerhetünk a tanulók gondolkodásmódjába, abba, hogyan alkották meg a tanított fogalmakat magukban. Ahogyan Richard Skemp mondta: „Saját fogalmi rendszert mindenkinek egyedül kell kiépíteni. De a folyamat felgyorsítható, ha a hozzá szükséges anyagok ’kéznél vannak’.”[12] A tanulók írásbeli munkáinak kompetencia alapú szemléletével és elemzésével talán bepillantást nyerhetünk abba, milyen fejlettségen áll a fogalmi rendszerük, szkémáik mennyire kiépültek, mennyire alkalmasak a problémamegoldásra.

Ezt a szemléletváltást már a tanárképzésben el kell kezdeni. Ehhez első lépésként képessé kell tenni a leendő matematikatanárokat arra, hogy tudják elemezni a feladatokat abból a szempontból, hogy milyen képességeket, készségeket fejlesztenek. [15] A kezdő tanár számára talán még fontosabb ennek a szemléletmódnak a tudatosítása, mint a már gyakorlattal rendelkezőknek – hiszen a gyakorlat előbb-utóbb kialakítja a jó tanárban ezt a látásmódot. A gyakorló tanárok számára a kompetenciák fejlesztéséhez hasznos módszerekről, munkaformákról, feladattípusokról vannak továbbképzések, hozzáférhető segédanyagok, de az értékelés átformálására eddig nem került sor. A tanulók által megoldandó és megoldott feladatok ilyen szemléletű elemzése arra is lehetőséget nyújt, hogy a tanár eldöntse, az órán hogyan differenciáljon, milyen csoportokat alakítson ki (annak megfelelően, hogy mely képességeket kell jobban fejleszteni egy-egy tanulónál). Érdemes kipróbálni azt a módszert is, hogy egy adott kompetencia komponensből gyengébb tanulókat és az azon a téren fejlettebb képességekkel rendelkezőket egy csoportba osztva egymást segítve dolgozzanak együtt. A tankönyvek, feladatgyűjtemények feladatait is más szemmel nézzük, ha néhány ilyen elemzést végiggondolunk: jobban oda lehet figyelni arra, hogy olyan feladatokat válasszunk, amelyek többféle matematikai készséget, képességet fejlesztenek. Erre a szűkös időkeret és a nagy mennyiségű tananyag is rákényszeríti a tanárt.[29]

A kvantitatív értékelésben ezt a látásmódot és az ilyen elemzést valóban nehezebb megjeleníteni, mint a matematikai teljesítményt. Hogy mégis hogyan lehet, arra alkalmas módszer a matematikai teljesítmény és a kompetencia összehasonlítása a korábban definiált ***P*** hányados segítségével. Úgy gondolom, hogy egy tanév során néhány témazáró dolgozat, beadandó feladatlap ilyen szempontú kettős értékelése sokkal árnyaltabb képet fest a tanulók fejlődéséről, mint a teljesítmény egyoldalú szemlélete. A matematikai potenciál fejlődésének kimutatása egy tanév során mind a tanulónak, mind a szülőnek pozitív megerősítést jelent. A tanár számára pedig egy újfajta reflexiót a saját munkájának hatékonyságáról.

Nem hanyagolhatjuk el a fenti elemzésekben rejlő motivációs lehetőséget sem – hiszen a matematika tanítása során ennek fokozott szerepe van. A feladatok és munkamódszerek változatossága, valós folyamatokhoz kapcsolódása mellett az értékelés is lehet motiváló hatású – ha személyre szabott, pozitív kicsengésű és a valós fejlődési utat mutatja meg.

5. Összegzés, tanulságok, fejlesztési lehetőségek

5.1. A vizsgálatok célja, mérési módszere

Dolgozatom vizsgálatainak egyik célja az volt, hogy kimutassam a kapcsolatot a matematikai teljesítmény és a matematikai kompetenciák fejlettségének szintje között. Ennek érdekében 278 középiskolai tanuló (9-12. évfolyam) által megoldott feladatlapot értékeltem a matematikai teljesítmény illetve a matematikai kompetencia alapján. Az értékeléshez a teljesítmény esetében az érettségi dolgozatok pontozási útmutatójának megfelelő módszert alkalmaztam, a kompetencia értékelésben pedig dr. Czeglédy István módszerét [2]. Korreláció számítást végeztem a kapott értékekre, és ennek alapján megállapítható, hogy a matematikai teljesítmény és a kompetencia jól korrelál egymással. A kétféle értékelés összehasonlítására bevezettem a ***P*** hányadost, mely az elért teljesítmény pontok (T) és kompetencia pontok (K) százalékos eredményeinek hányadosa. A ***P*** értékének 1-től való eltérésével azt vizsgáltam, hogy a tanulók milyen mértékben tudják kompetenciájukat a feladatmegoldások során matematikai teljesítményre átváltani. A vizsgálat eredménye szerint a hányados értéke mind a négy évfolyam esetén enyhe emelkedő tendenciát mutat a jobb iskolai teljesítményt elért tanulók felé. Elvileg a gyenge teljesítmény és gyenge kompetenciapontok hányadosa is közelíthetné az 1-et, ez azonban mégsem volt jellemző a vizsgált tanulók esetében. Ez az emelkedés azt jelenti, hogy a jobb teljesítményt nyújtó tanulók a matematikai készségeiket, képességeiket jobban tudják kamatoztatni, a tényleges feladatmegoldásokban jobb eredményt érnek el, mint a gyengébb iskolai teljesítményt nyújtó tanulók. A magasabb teljesítménypontok mögött természetesen nem csak a készségek, képességek jelennek meg hanem a tényszerű, a tananyag elsajátításán alapuló tudás is. Úgy gondolom, a mérés eredményeiből le lehet vonni azt a következtetést, hogy a kompetencia fejlesztését és annak iskolai teljesítményben való megjelenését az ismeretek korrekt elsajátításával, megértésen alapuló tanulással együtt lehet jól fejleszteni. A hiányos tudás gátolja a jó feladatmegoldást akkor is, ha az alapvető matematikai készségeknek, képességeknek birtokában van a tanuló. Másrészről: az értelem nélküli, csak reprodukcióra törekvő tanulási módszerekkel a tanulók nem szerzik meg azokat a képességeket, amelyeknek segítségével a matematikai modellt az adott szituációra tudják alkalmazni. A PISA mérések másodelemzéseiből Csullog Krisztina, D. Molnár Éva és Lannert Judit vizsgálták, hogy a tanulási stratégiák milyen hatással vannak a matematikai teljesítményre [28]. Kutatásukban kimutatták, hogy a magyar tanulók többsége memorizálással, ismétléssel tanul matematikát, sokkal kisebb arányban használják az elaborációs (kidolgozó, megértésen, a korábbi ismeretekkel való kapcsolat keresésén alapuló) tanulási stratégiát. A kontroll stratégiát, melynek során a tanulási cél tudatosítása, a tanultak ellenőrzése, az információk közötti összefüggések megtalálása hangsúlyos, azokban az esetekben alkalmazzák nagyobb arányban, amikor a probléma felmérése, megértésre törekvés, illetve egy lényeges fogalom megtalálása a feladat. Vizsgálataik szerint még a PISA mérésekben jobb teljesítményt elért tanulók is gyakran alkalmazzák a memorizálást a matematikatanulásban. Kimutatták, hogy a memorizálás és a matematikai teljesítmény között negatív a kapcsolat. Ez azt jelenti, hogy a tanulási stratégiákban

az elaborációs és kontroll módszereket kell erősíteni ahhoz, hogy a matematikai teljesítmény növekedjen. Úgy gondolom, hogy felmérésem azon eredménye, miszerint a ***P*** értéke növekszik a jobb teljesítményt nyújtó tanulók felé, hasonló következtetést vonhat maga után: a matematikai kompetencia akkor tud igazán jól működni, ha a tudás megértésen alapul, a készségek, képességek akkor tudnak megnyilvánulni, ha az ismereteket nem csak memorizálással, hanem elaborációs és kontroll stratégiákkal sajátítják el a tanulók.
A második mérés során két osztály (11. és 12. évfolyam) évközi dolgozatainak esetében végeztem el az előzőhöz hasonló kompetencia értékelést, és vizsgáltam meg a ***P*** értékének alakulását. A teljesítmény értékelést az osztályt tanító matematikatanárnő végezte, melyen nem változtattam. Ebben az esetben is mind a négy vizsgált dolgozatnál azt az eredményt kaptam, hogy a jobb teljesítményt elért tanulók esetében (itt iskolai dolgozatról lévén szó, a hagyományos 5 fokozatú skálán való értékelés is megtörtént) hasonlóképpen kimutatható a ***P*** hányados értékében az emelkedő tendencia. Mivel ezek a dolgozatok egy-egy konkrét témakör záró dolgozatai, ezért itt természetes módon a tananyag elsajátításán volt a hangsúly, míg az előző mérés esetén a kompetencia volt az elsődleges. A felkészülés is eltérő volt az előző méréshez képest: míg ott nem kaptak direkt felkészítést a tanulók a felmérés feladataira, addig az utóbbi dolgozatok minden esetben közvetlenül az adott tananyag tantervben előírt részén, gyakorló és összefoglaló óra után kerültek megírásra. A feladatok összetételében is jelentős különbségek voltak a két mérés között: míg az elsőben főleg gyakorlati élethez kapcsolódó, vegyes témakörökhöz tartozó feladatok szerepeltek, addig itt koncentráltan az adott tananyaghoz kapcsolódó, jórészt hagyományos matematika feladatok szerepeltek. Így természetesen az eredmények jelentős eltéréseket mutatnak mind a teljesítmény, mind a kompetencia pontok tekintetében. Ezért nem meglepő, hogy az általánosabb, több szöveges feladatot tartalmazó, a matematika több különböző területét átfogó feladatok esetén a pontok átlaga alacsonyabb. A különbségek ellenére úgy érzem, sokat mondóak a kapott eredmények. A következő táblázat a négy dolgozat átlagait mutatja, összehasonlítva az első felmérés 11. és 12. évfolyamos osztályainak eredményével:

	teljesítmény pontok átlaga	kompetencia pontok átlaga	***P*** átlaga
11.évf. kompetencia mérés	31,11%	40,75%	0,76
11.oszt. exp-log egyenl.	56,48%	73,21%	0,77
11.oszt. trigonometria	59,60%	71,03%	0,72
12.évf. kompetencia mérés	29,61%	48,85%	0,61
12.oszt. sorozatok	55,61%	70,89%	0,78
12.oszt. geometria	51,00%	71,21%	0,72

20. táblázat: dolgozatok értékelésének összehasonlítása

A dolgozatok esetében a kompetencia pontok viszonylag magas átlaga azt mutatja, hogy a középiskolai tanulmányaik végére a feladatok megoldásához szükséges készségeknek, képességeknek, megoldási technikáknak jórészt birtokában vannak a tanulók. A teljesítményekben megmutatkozó különbségek és a ***P*** értékének

emelkedése a jobb teljesítmény felé véleményem szerint itt is azt támasztja alá, hogy az értelmes tanulás, és a jól megválasztott tanulási stratégia kulcsfontosságú. Az adott tananyag fogalmainak, összefüggéseinek, pusztán memorizációs technikával való elsajátítása nem segíti elő az összetettebb feladatok problémamegoldó gondolkodást is igénylő kidolgozását. Ahhoz, hogy a kompetenciát jól tudják kamatoztatni a megoldás során, szükséges az ismeretek rendszerezése, integrálása, összefüggésekben látása. Az is jellemző, hogy a kompetencia pontok közül a legkevesebbszer a teljes megoldásra törekvés és a tervszerűség jelent meg ezeknél a dolgozatoknál. Ezen javítani a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésével lehet. Itt újra visszatérhetünk a Pólya-féle modell matematikatanításban való alkalmazásához: nagyobb hangsúlyt kell fektetni a problémamegoldási stratégiák gyakoroltatására. A tanárnak el kell érnie – és ezt csak kitartó, következetes munkával lehet –, hogy a tanulók tudatosan törekedjenek az összetettebb feladatok megoldása során a tervezésre, a tervszerű gondolkodásra. Ez nem csak a matematika feladatok megoldása során hasznosuló képesség, hanem az élet különböző területein előforduló problémák megoldása során is. Ahogy Pólya György mondta: „Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység.” [11]
A két felmérés eredményeinek (9-12. évfolyam általános feladatok és 11-12. évfolyam témazárók) összehasonlításából további következtetéseket lehet levonni a matematikai kompetencia fejlődéséről a középiskolai tanulmányok során. A 11-12. évfolyamon tapasztalt magasabb kompetencia pontok azt mutatják, hogy a magyar közoktatás szerkezetéhez jobban illeszkedne egy olyan készség, képességszint felmérés, amely ebben a korosztályban méri a tanulók matematikai kompetenciáját. A tananyag eloszlása, az óraszámok azt mutatják, hogy pl. a PISA felmérés korosztálya esetén (15 évesek) a magyar gyerekeknek átlagosan kevesebb matematika órájuk volt még, mint a hozzánk hasonló oktatási rendszerű országokban [28] (pl. Csehország, Szlovákia, Lengyelország, Németország). Ez azt erősíti, hogy a matematikai kompetencia nálunk a 10-11-12. évfolyamon még jelentősen növekszik – gondoljunk csak arra, melyek azok az új területei a matematikának, amelyek csak ezeken az évfolyamokon kerülnek sorra: másodfokú egyenletek, trigonometria, koordináta geometria, logaritmus, térgeometriai számítások, stb. Ezek a területek még sok új ismerettel, módszerrel, eljárással, fogalommmal, algoritmussal, alkalmazási lehetőséggel járulnak hozzá tanulóink matematikatudásához. Úgy gondolom, hosszú távon az lenne az elérendő cél, hogy a ***P*** értéke az évek során növekedjen, mert ez azt jelentené, hogy a készségek, képességek fejlesztése és a szaktudás növekedése az iskolai teljesítményben is növekedést eredményez. Ennek igazolásához egy hosszabb távú kutatás lenne szükséges.

5.2. Évfolyamonkénti összehasonlító elemzés

Az első felmérés teljesítmény és kompetencia pontjainak összehasonlítását évfolyamonként a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

évfolyam	teljesítmény pontok átlaga	kompetencia pontok átlaga	***P*** átlaga
9.	35,03%	45,21%	0,77
10.	28,26%	44,51%	0,63
11.	31,11%	40,75%	0,76
12.	29,61%	48,85%	0,61

21. táblázat: felmérés eredményeinek összehasonlítása évfolyamonként

A 9. és 11. évfolyam ***P*** értékének átlaga közel egyenlő, és magasabb, mint a 10. és 12. évfolyam esetében (amelyek szintén hasonló értéket mutatnak). Mivel definícióm szerint a ***P*** értéke gyakorlatilag a 0-1 skálán mozog (1-től magasabb értékek elvétve fordultak elő), ezért a 0,14-0,15 eltérés elég jelentősnek mondható. Mi lehet ennek az oka? Azt látjuk, hogy 10. és 12. évfolyamon legalacsonyabb a teljesítmény pontok átlaga, amit több tényező is okozhatott:

- nehezebb feladatok voltak
- a tanulók számára idegen volt a feladatok szövegezése
- a tanulók összetétele volt eltérő a másik két évfolyamhoz képest

Ezen tényezők mindegyike erdményezhette azt, hogy itt a viszonylag jobb kompetencia pontok gyengébb teljesítményt eredményeztek. Az adható kompetencia itemek számában a dolgozatok között nem volt lényeges különbség (53 – 50 – 50 – 54), azonban a teljesítmény pontok már nagyobb eltérést mutatnak: míg a 9. és 11. évfolyamon 40 illetve 33 pontot lehetett elérni maximálisan, addig a 10. és 12. évfolyamon a maximális pontszám 52 illetve 46 volt. Tehát egyik ok lehet, hogy nem sikerült azonos nehézségi szintű feladatlapokat összeállítanom minden évfolyam esetében. Ezt nagyon nehéz előre kiszűrni, de a fenti különbségek adódhatnak ebből is. A 9. és 11. évfolyam magasabb ***P*** átlagának egy lehetséges magyarázata mögött meghúzódhat az is, hogy ők a mérés megelőző tanév végén (8. és 10. évfolyam májusában) részt vettek az országos kompetencia mérésen, amelynek feladattípusai az általam készített feladatlapok feladataihoz hasonló szövegezésűek – talán ők még jobban emlékeztek ezekre a feladatokra, mint a másik két évfolyam tanulói. Tehát a feladatok szövegezésének ismerős vagy idegen volta is közrejátszhatott a különbségben. Mivel mind a négy évfolyamon 3-3 osztállyal végeztem el a felmérést, mely osztályok minden évfolyamon ugyanolyan képzési típusúak (egy általános ginmáziumi osztály, egy emelt szintű rajz és vizuális kultúrát, illetve emelt szintű ének-zenét tanuló osztály, és egy emelt szintű angolt, illetve emelt szintű informatikát tanuló osztály), ezért a tanulók összetételében lényeges különbség nem mutatható ki. Azonban a korosztályok közötti eltérés is lehet egyik oka a különbségnek. Hosszú távon megfigyelhető, hogy a gimnáziumban a 10. évfolyam (a 16-17 évesek) a legnehezebben kezelhető, a legtöbb problémát okozó időszak. A kamaszkori „kilengések” itt csúcsosodnak ki. A 11-12. évfolyamra a tanulók többsége túljut a lázadás időszakán. Ekkor már nagyobb a tét a tanulásban is: a továbbtanulás, az érettségi fontossá válik, a tanulmányi eredmények szerepe megnő. A felmérésben a 12. évfolyam gyenge teljesítménye mögött már korábban is felvázoltam néhány lehetséges okot: a sokféle tanult összefüggés közül nehéz kiválasztani a megfelelőt. Az is az okok között lehet, hogy ebben az időszakban már inkább az érettségi feladataihoz hasonló feladatok gyakorlása kerül előtérbe. A két-

két évfolyam közötti különbségben véleményem szerint ezen okok mindegyike szerepet játszhatott.
A felmérés egy másik alapgondolata az volt, hogy megvizsgáljam, melyek azok a kompetencia itemek, amelyek a leginkább fejlesztésre szorulnak. A feladatok nagyon különbözők voltak, de a közös értéklési rendszer, az azonos kompetencia itemek miatt alkalmasak arra, hogy kiemeljük a gyengeségeket:

- indoklási képesség (14%)
- terv készítése (15%)
- zárt formában való megjelenítés (15%)
- jelölések használata (24%)
- tervszerűség a megoldásban (26%)
- adatok rendszerezése, alkalmas reprezentáció (ábra, grafikon) (33%)
- teljes megoldásra törekvés, válaszadás a feltett kérdésekre (38%).

Ezek mutatják azokat a kompetencia komponenseket, melyekre nagyobb hangsúlyt kell fektetnünk a tanítás során. Az indoklási képesség fejlesztéséhez a tanult összefüggéseknél nem szabad elhanyagolni a bizonyítások, logikai érvelések, megfontolások szerepét, mert azok elfogadása, beépítése a meglévő gondolati struktúrába egyszerre kognitív és szociális tevékenység. A jól felépített ismeretrendszerre az ok-okozati kapcsolatok széles spektruma jellemző, és ez teszi lehetővé a tudás alkalmazhatóságát is [1., 3.]. A tervezés, a tervszerűség, az adatok rendszerezése, a teljes megoldásra törekvés mind a problémamegoldás elemei, lépései. Tehát ebből a felmérésből is kimutatható a problémamegoldó gondolkodás gyengesége, hasonlóan a PISA mérésekből levont következtetésekhez [5., 6.]. A zárt formában való megjelenítésben és a jelölések használatában megmutatkozó hiányosságok pedig a matematikai szimbólumok kezelésének gyengeségét mutatják, ami adódhat a szimbólumok túl korai bevezetéséből, a reprezentációs módok nem megfelelő megválasztásából [3., 14.]. Jerome Bruner reprezentációs elmélete szerint a fogalomalkotás és ismeretelsajátítás során a gondolkodásunkban 3 szinten jelenik meg egy fogalom: tárgyi, képi és szimbolikus síkon. Ha a tárgyi síkon a fogalom lényeges karaktereit elsajátította a tanuló, akkor a képi síkon indul el a fogalom általánosítása, a modellalkotás, majd ezt követi a szimbolikus síkon való megjelenés. A magyar matematikaoktatás hagyományaiban ez az út inkább csak az általános iskolában jelenik meg. A középiskolai oktatásban az új fogalmak gyakran egyből szimbolikus módon jelennek meg, ritkán előzi meg a képi, még ritkábban a tárgyi sík. Ez azt eredményezheti, hogy a tanuló a hétköznapi szituációban nehezen ismeri fel a tanult matematikai szimbólumokat, mivel az elsajátítás során nem társult az adott fogalomhoz egy gyakorlati életből vett tárgy, tevékenység, szituáció, illetve egy ábra, grafikon. Sokszor értelem nélkül, a már korábban említett memorizációs módszerrel tanulják meg a gyerekek a matematikai szimbólumokat, ezért nem ismerik fel a szövegkörnyezetben a megfelelőségeket. Ez jelenti egyben a kompetencia komponensek között a modellalkotás gyengeségét, amit a szimbólumok fokozatos, megértésen, különböző reprezentációs szinteken keresztüli bevezetésével lehet kiküszöbölni.
Természetesen azt is megnézhetjük, mely itemek jelentek meg leggyakrabban, tehát melyek az erősségek:

- hozzákezd a feladathoz (86%)
- jól értelmezi a feladatot(72%)
- van értékelhető a munkájában (66%)

- ok-okozati kapcsolatokat, összefüggéseket keres (57%)
- motivált a feladat megoldására (54%)

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy a tanulók bíznak abban, hogy meg tudják oldani a feladatot, próbálkoznak, keresik a megoldás lehetőségét akkor is, ha nem tudják azt végigvinni. Ez a megállapítás összecseng a PISA mérések másodelemzésével, amelyre már korábban is utaltam [28], mely szerint a magyar tanulók „matematikai önhatékonysága" magas értékeket mutat a 2003-as és a 2012-es mérések alapján. Azaz bíznak a saját matematikai képességeikben, és abban, hogy meg tudják oldani az adott konkrét feladatot. Ez pozitív viszonyban van a teljesítménnyel, azonban önmagában nem elegendő a jó teljesítmény eléréséhez, megfelelő tudás, kompetencia is szükséges hozzá. Itt el is jutottunk a motiváció kérdéséhez, melyet az i) itemmel jelenítettem meg az első mérésben. Ennek átlaga 54% volt, tehát a tanulók több, mint felénél megfigyelhető volt a feladatmegoldás során, hogy motivációja a megoldásra pozitív: érdekli a feladat, szeretné megoldani, próbálkozik, keresi a megfelelő összefüggéseket (57%), melyekkel eredményt érhet el. Ehhez nyilván hozzájárult a feladatok érdekes szövegezése, olyan szituációk megjelenése, melyek számukra a hétköznapi életből ismerősek lehettek. Nem mindig könnyű azonban olyan valós helyzetet találni, amely egy adott matematikai struktúrát jól leírna. Gyakran találkozhatunk úgy nevezett „álgyakorlatias" problémákkal [32], amelyekben egy ismert matematika feladatra próbálnak „ráhúzni" egy hétköznapi szituációt, de a tanár és a tanuló is érzi, hogy a szituáció erőltetett, a való életben nehezen elképzelhető. Ezt elkerülendő, a tanárnak gondosan mérlegelnie kell, hogy a kiadott feladat mennyire releváns két szempontból is: hogyan illeszkedik a matematika megfelelő fogalomrendszeréhez (mennyire korrekt matematikailag) és a való élethez (mennyire érthető, ismert az adott generáció számára). A feladatok motiváló hatása nem elhanyagolható tényező a modern didaktikai kutatások alapján [33]. Az iskolai dolgozatok esetében a teljesítmény motiváció a magyar oktatási rendszer sajátosságainak köszönhetően (folyamatos értékelés) természetes. Ezért ezt a kérdést a második mérés során nem is tudtam vizsgálni. A dolgozatok érdemjeggyel történő értékelése esetén a tanulók számára jellemzően nem kérdés, hogy meg szeretnék-e oldani a kiadott feladatokat, szinte minden esetben hozzákezdtek a feladatokhoz, keresték a megfelelő összefüggéseket, igyekeztek valamilyen értékelhetőt felmutatni. Hogy próbálkozásaik milyen sikerrel jártak, abban természetesen már jelentős különbségek adódtak, de a külső motivációs tényező ezt a képességet minden bizonnyal kifejlesztette az évek során a magyar közoktatásban szocializálódott tanulókban. A jó problémamegoldó gondolkodás elsajátításhoz azonban nem csak a tesztek, számonkérések során megnyilvánuló motivációra van szükség, hanem a tanulási folyamatban is el kell ezt érni: ez pedig nagyon összetett folyamat, amelynek a következőkben néhány elemét szeretném kiemelni, melyek a kutatásomból következnek.

5.3. Szemléletváltás a tanulói munkák értékelésében

Dolgozatom másik célja az volt, hogy rávilágítsak, hogyan lehet egy új szemlélettel meglátni a matematikai kompetenciát a tanulók munkáiban. A kvantitatív értékelés mellett, amely a matematikatanításban a legelterjedtebb, fel szeretném hívni a kvalitatív, kompetencia szemléletű, emellett objektív értékelésben rejlő motivációs lehetőségre a figyelmet. Ehhez 13 feladat középiskolai tanulók által adott írásbeli megoldását elemeztem a matematikai kompetencia komponenseinek gondolkodási műveletekre való lebontásával. A felmérés kompetencia értékelésében használt itemek tényleges megmutatkozását elemeztem az egyes feladatok megoldásaiban. Több feladatot is az első felmérés megoldásai közül választottam, de volt órai munka, házi feladat és iskolai dolgozat feladata is az elemzettek között. Voltak olyan feladatok is, amelynek két különböző megoldását elemeztem, hogy bemutassam a tanulók gondolkodásmódjának, matematikai kompetenciájuk fejlettségének különbségeit.

Természetesen a felismeréssel nem ér véget a tanár munkája: mindez azt a célt szolgálja, hogy képesek legyünk a tanulókat mind hatékonyabban fejleszteni, képessé tenni őket arra, hogy az iskolai oktatásban és a hétköznapi életben felmerülő matematikai problémákat jó eséllyel helyesen meg tudják oldani. Mivel ma a közoktatásban a különórák lehetősége igen korlátozott, ezt a fejlesztést a tanórákon kell megvalósítani. Olyan módszereket, stratégiákat kell tehát kialakítani, amelyekkel heti 3 vagy 4, negyvenöt perces órában, a kitűzött tananyag megtanításával együtt meg tudjuk ezt valósítani. Ehhez a tanárnak elszántsággal, kitartással és sok kreativitással kell rendelkeznie. A bemutatott tanulói munkák elemzésével arra szerettem volna rámutatni, hogy a matematikai kompetencia fogalmának értelmezésével, elemeinek gondolkodási képességekre, készségekre bontásával hogyan lehet a tanuló kompetenciájának fejlettségi szintjét megállapítani. Ezen kívül az elemzések arra is választ adhatnak a tanárnak, hogy melyek azok a területek, ahol az adott tanuló fejlesztésre szorul, milyen típusú feladatokat érdemes számára kitűzni, hogy a leghatékonyabb legyen a munkánk. Elméletben tudjuk, hogy a tanulók gondolkodásának fejlesztését legjobban adaptívan, az aktuális szinthez igazítva lehet elérni [30]. Azonban itt van egy ellentmondás a tantervekben, többek között a Nemzeti Alaptantervben megfogalmazott közös célok és az oktatás valós színterén az egyéni képességek, készségek, tudásszintek eltérései között. Differenciálás és egységesség ellentmondása ez, amit a tanárnak kell valahogyan feloldani. Véleményem szerint a matematikatanításban az elérendő egységes célokhoz az egyénre szabott fejlesztésen keresztül vezethet az út. Ehhez pedig szükség van a tanulók munkáinak egyedi elemzésére, mert ezáltal lehetséges az adaptív fejlesztés megvalósítása. Gyakran íratunk tanév elején felmérő dolgozatot a gyerekekkel, hogy megállapítsuk, hol állnak az ismeretek elsajátításában, a korábbi tanulmányaikból mi az, ami tartós tudásként beépült, hogy vannak hiányosságok. Azonban ezek a felmérők szintén a tananyagra koncentrálnak, és nem a készségek, képességek vizsgálatára. Sokkal árnyaltabb képet kap a tanár arról, hogy az adott osztály, csoport milyen szinten áll, miben állnak hiányosságaik, ha a hagyományos teljesítmény értékelés mellett a kompetencia pontok alapján is értékeli a tanulók munkáit. Ennek a szemléletnek a következetes és tudatos alkalmazásával talán megvalósítható a közös célok elérése a differenciálás által. Természetesen ennek bizonyításához olyan hosszú távú kutatásra lenne szükség, mely a középiskola négy évfolyamán keresztül végig kíséri egy osztály matematika tananyagának ilyen módon való tanítását és értékelését, összehasonlítva egy hagyományos értékelési módszerekkel haladó osztállyal. Ennek a kutatásnak ez a dolgozat csak az alapjait teszi le, a lehetséges módszereket vázolja fel, hogy a matematika kompetencia alapú oktatását hogyan lehet egy kompetencia szemléletű értékelési rendszerrel kiegészítve hatékonyabban megvalósítani.

5.4. Javaslatok, további fejlesztési irányok

A kompetencia alapú oktatás bevezetéséhez sok hazai és külföldi didaktikával foglalkozó szakember sokféle szempont alapján, különböző megközelítésekkel járult hozzá. Dolgozatomban én az értékelés szempontjából közelítettem meg a kérdést: hogyan lehet az iskolai matematikaoktatásban olyan értékelési módszert alkalmazni, amely hatékony segítséget nyújt a matematikatanárnak ahhoz, hogy a tanulók matematikai komptenciáját fejlessze, és a napi gyakorlatban alkalmazható legyen. Úgy gondolom, a bemutatott mérési módszer alkalmas arra, hogy a matematikatanár árnyaltabb képet kapjon a tanulók matematika tudásáról és képességeiről egyszerre. A kompetencia fogalma nagyon összetett. Dolgozatom elején részletesen tárgyaltam a matematikai kompetencia értelmezését, összetevőit, különböző megközelítéseit. Összegzésképpen megállapíthatjuk, hogy a kompetencia készségek, képességek, szakértelem, tudásbázis, alkalmazható ismeretek összessége együtt. A magyar matematikaoktatás évszázados hagyományain azonban nehezen lehet túllépni: ez a matematikát a tudomány felől közelítve tanítja, és fokozatosan juttatja el a tanulókat az alkalmazáshoz. A matematika tantervünk felépítése gyakorlatilag követi Jerome Bruner tanuláselméletét: a tanítás elsősorban a tudomány fundamentális elveire épít, az alapvető fogalmak, elvek, összefüggések széles skáláját korán bevezeti – a gyerekek gondolkodási fejlettségének megfelelő reprezentációs módon – és a tananyag felépítése spirális [3]. Ezeken az alapokon az oktatáspolitika az utóbbi évek NAT módosításai során sem változtatott, tehát ilyen körülmények között kell megtalálnunk azokat a lehetőségeket, amelyekkel a feltárt problémák kezelhetők. Ebben a megközelítésben benne rejlik a kompetenciák fejlesztésének lehetősége: a spirális felépítés, a különböző reprezentációs szintek, a rendszerszerű látásmód mind alkalmas arra, hogy az egyre szélesebb szaktudással együtt a készségeket és a képességeket is fejlesszük – magán a tananyag elsajátításán keresztül. Azonban a sok elsajátítandó tananyaghoz viszonylag kevés óraszám társul (összehasonlítva más országok matematika óraszámaival), ezért a gyakorlati alkalmazásokra, a problémamegoldás gyakoroltatására sajnos kevés idő jut, illetve sokszor a tanmenet időbeosztásának nyomása miatt elmarad az elmélyítés, az összetett problémamegoldás fázisa. A hazai fejlesztő programok leggyakrabban azt célozzák meg, hogy milyen módszerekkel, technikákkal, feladattípusokkal, munkaformákkal lehet megvalósítani a tanulók matematikai kompetenciájának fejlesztését. Azonban ezek a módszerek gyakran időigényesek, és a gyakorló tanár lassan feloldhatatlan ellentmondásba kerül: hogyan lehet egyszerre elvégezni a tananyagot és fejleszteni a tanulók gondolkodását, problémamegoldó képességét? Hogyan érhető el egyszerre, hogy a kompetenciaméréseken (és esetleg a PISA-mérésen) is jól teljesítsen a tanuló, közben a tanulmányi eredménye is megfelelő legyen és az érettségin is jó eredményt érjen el? Ehhez a tanár hatékonyságát kell növelni, aminek egyik módja a pontos tervezés, a megfelelő szintű feladatok kiválasztása, a differenciálás. Ehhez nyújthat segítséget az értékelés általam javasolt új szemlélete, amely az eredményesség, a matematikai teljesítmény (a szaktudás) mellett a készségek, képességek fejlettségét is vizsgálja. Emellett új módszertani repertoárt is ki kell alakítani a matematikatanárnak, hogy óráit minél változatosabban, ugyanakkor szakszerűen, matematikailag korrekt módon tartsa meg.

5.4.1. Problémaközpontú matematikaoktatás

A módszertani repertoár szélesítésének egyik eszköze lehet a problémamegoldó gondolkodás tudatos fejlesztése: a Pólya-féle modell szélesebb körű alkalmazása a matematikaórákon. Sok didaktikai kutatás foglalkozik ezzel a témával, a Pólya-modell továbbfejlesztésével [34]. Schoenfeld a Pólya-modell kiegészítéseként fontosnak tartja a problémamegoldásban a következő négy területet: eredetek, heurisztika, kontroll és hozzáállás. Eredetek alatt érti az elméleti alapokat, a tanulók matematikai ismereteit, amelyek a problémamegoldás során alkalmazásra kerülnek. Ehhez nem kell sokat hozzátennünk, hiszen a tananyagunk felépítése is ilyen szemléletű: először megtanítjuk a fogalmakat, eljárásokat, algoritmusokat, rutinokat. Természetesen ennek módja, reprezentációja a korosztálytól függ. Alacsonyabb évfolyamokon ebbe beleértjük a szemlélet alapján elfogadott állításokat, összefüggéseket is. Majd a gyakorlás során ezek fokozatosan nehezedő alkalmazására kerül sor. A heurisztikus módszereket a problémamegoldás során sajátítják el a tanulók, mint a problémamegoldás fázisait: ábra, terv, készítése, adatok kigyűjtése, stratégiák a megoldási tervhez, stb. Ennek erősítését, szélesebb körben való alkalmazását a kompetencia pontok elemzése is alátámasztja: gyakran okozott gondot a tervezés, a tervszerűség hiánya, a jelölések hiánya a megoldásban. A kontroll területén fejlesztésre szorul a zárt formában való megjelenítés, valamint a gyakran elhanyagolt ellenőrzés, diszkusszió, más megoldás keresése, általánosítás. Ezekhez temészetesen az kell, hogy a gyakorló órákat ne hanyagoljuk el. Ha pedig már a fogalmak elsajátítása során érdekes, gyakorlatias problémák felvetésével indítunk, még több időt tudunk szakítani a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére. Schoenfeldnél a negyedik terület a hozzállás, amely magában foglalja a tanulók saját magukról alkotott képét, a matematikáról, mint tudományról alkotott képet, a környezetükről, a tananyagról, a feladatról alkotott véleményét. A motiváció kérdése sokrétű, minden gyereket más és más motívumok mozgatnak meg: a tudomány iránti érdeklődés, a kíváncsiság, a hasznosság, a szépség, a tanár tisztelete, stb – ezeket lehetne még sorolni [1]. Mai világunkban a tanulókat olyan sok és sokféle inger – főleg vizuális inger – éri nap mint nap, hogy a matematikatanárnak bizony „pólyai” értelemben nagyon jó kereskedőnek kell lenni, hogy el tudja adni a portékáját. Ezért nem szabad lebecsülni az elektronikus és információs technológiák szerepét, egyre szélesebb körben történő alkalmazását a matematikaórákon. Ehhez sok alkalmas honlap, program, segédeszköz áll rendelkezésre, melyek között értelmesen válogatva kell a matematikatanárnak

megtalálni a helyes egyensúlyt a tényleges manipulatív tevékenységek és a virtuális világ lehetőségei között.
Azonban mai napig a matematikatanítás egyik legalapvetőbb segédeszköze a tankönyv – amely ma már gyakran digitális formában is rendelkezésre áll. Sok éves fejlesztő munkával kialakultak a hazai tankönyvpiacon olyan jól alkalmazható, kompetencia alapú tankönyvcsaládok, amelyek nagy hangsúlyt fektetnek a problémamegoldásra és a gyakorlatias megközelítésre. Jó példák erre a Műszaki Kiadó által kiadott „Gondolkodni jó!” [34] és a Mozaik Kiadó által szerkesztett „Sokszínű matematika” [35] tankönyvcsaládok, melyek évtizedes fejlesztés eredményeképpen alakultak, formálódtak és értek jól használható segédeszközökké. Ezek a tankönyvek igyekeztek megtartani a magyar matematikaoktatás hagyományait, a tudományos, rendszerszerű, spirális felépítést, ugyanakkor alkalmasak a differenciált tanításra, és igyekeznek minden témakörnél a gyakorlati alkalmazásokat, a problémafelvetést, esetleg matematikatörténeti érdekességeket is bevonni a feldolgozásba. Alkalmazhatóságukat jelzi, hogy sok matematikatanár szívesen használta ezeket a tankönyveket – kiegészítve a digitális tartalmakkal és feladatgyűjteményekkel. Kíváncsian várjuk, hogy az új központi tankönyvek is elérik-e majd azt célt, amelyet megvalósítani kívánnak: a tanulók matematikai kompetenciájának fejlesztését, a szaktudást és a képességeket, készségeket párhuzamosan.
Dolgozatom befejezéseképpen két olyan megközelítését szeretném bemutatni a matematikai kompetencia fejlesztésének, amely élményt nyújt a tanulóknak, miközben komoly matematikai tartalmakat közvetít és a fejlesztést úgy próbálja meg elérni, hogy a gyerekek nem érzik kényszernek a matematikával való foglalkozást.

5.4.2. Egy interdiszciplináris megközelítés: vizuális művészeteken keresztül a matematikához

A vizuális művészetek és a matematika kapcsolata évezredekre visszanyúlik, az ókori egyiptomi és görög művészetekig. Építészetükben, díszítő elemeikben számtalan helyen megjelennek a geometriai formák, az arányok, a mintázatok, a szimmetriák, szimmetriacsoportok, és még folytathatnám a felsorolást. A művészet történetében később is sok olyan festőt, képzőművészt találunk, akiknek munkáiban matematikai rendezőelvek jelennek meg. De megjelenik az összefüggés fordítva is: sok matematikus foglalkozik azzal, hogy a matematikát a képzőművészetek eszközeivel tegye látványossá, illetve megtalálja a kapcsolatot a vizuális szépség és a matematika között. Egy 3 éves nemzetközi projekt során alkalmam nyílt betekinteni ebbe a világba, megismerni olyan matematikusokat, akik a képzőművészetet alkalmazzák matematikai munkásságuk során, és olyan képzőművészeket, akiket megihlettek a matematikai struktúrák. A projekt neve: „Visuality & Mathematics: Experimental Education of Mathematics through Visual Arts, Sciences and Playful Activities”.[36] Célja a matematikaoktatáshoz olyan módszerek, tananyagok, kifejlesztése, amelyek jól beilleszthetők a tananyagba és élményszerű, látványos megközelítéssel próbálják közelebb hozni a matematikát a tanulókhoz. A kifejlesztett tananyagok között egyaránt szerepel manipulatív tevékenységre építő, csoportos, páros illetve projekt munkaformában elkészíthető és informatikai eszközökön, programokon (pl. GeoGebrán) alapuló megközelítés. A kifejlesztett tananyagokat, módszereket valós iskolai környezetben is kipróbálták – igaz, nem Magyarországon, hanem a projekt célkitűzésének megfelelően Szerbiában -, és erről attitűd vizsgálat is készült [37]. A visszajelzések mindenesetre azt mutatták, hogy a módszer a részt vevő szerb matematikatanárok körében népszerű volt, és a tanulók is kedvelték, szívesebben foglalkoztak ilyen módon matematikával, mint a hagyományos füzet – tábla – tankönyv módszerrel. A tananyagok, és a kipróbálásuk eredményei elérhetők a projekt hivatalos honlapján: http://vismath.ektf.hu , és szabadon felhasználhatók. A felhasználás egy lehetséges módját szeretném végül bemutatni egy foglakozás leírásával.

5.4.3. Egy lehetséges feldolgozás: tangram típusú játék a matematikaórán

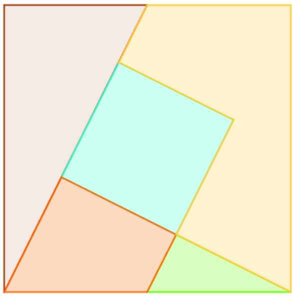
Dienes Zoltán és Varga Tamás óta tudjuk, hogy a matematikát lehet élményszerűen, matematikai struktúrákra alkotott speciális játékok segítségével is tanítani. Ezt a módszert azonban meg is fordíthatjuk. Megvizsgálhatjuk, hogy egyes logikai játékok milyen módon alkalmazhatók a matematikaórákon, mely speciális terület tanításába építhetők be. Ennek is vannak a magyar matematikaoktatásban hagyományai, [38] melyek azonban jellemzően az általános iskolai korosztálynak szólnak. Én egy régi kínai játék, a tangram egy módosított változatát választottam a sokszögek területe és kerülete témakörének tanításához [30]. Gyakran tapasztalható a tanulóknál, hogy a területet, kerületet a képletek mechanikus memorizálásával tanulják, és nincs mögötte valódi megértés. Ez azt eredményezheti, hogy az összetett, vagy a megszokottól eltérő szituációban nem tudják meghatározni egy adott sokszög területét. Ennek kiküszöbölésére, illetve a már meglévő hibás fogalomalkotás javítására lehet alkalmas a következő példa. A 9. évfolyamon, „Háromszögek, négyszögek” témakörbe beépíthető, „Sokszögek területe, kerülete” címmel gyakorlóóraként. A foglalkozás során papírból készített kivágható alakzatokat használunk, a bemutatáshoz pedig a GeoGebra programot – így ötvöződik a régi az újjal. Az órán a tanulók csoportokban dolgoznak, az egyes feladatokat közös megbeszélés, diszkusszió követi. **Az óra menete a következő:**

1. **Bevezetés (5 perc):**

Tanári bemutatás: A régi kínai tangram játékot sokan ismerik, egy négyzet alakzatot hét részre vágunk, és a részekből különböző, csak sziluettel megadott figurákat kell kirakni *(32.ábra)*. A szabály: a részek nem fedhetik egymást, és legalább egy ponton érintkezniük kell. Sokféle formát ismerünk, amely kirakható az eredeti tangram játékból – csak a 19. századi leírásokban több mint 6500 szerepel. (www.tangram-channel.com)

32. ábra: Az eredeti kínai tangram

Ennek a játéknak többféle változata ismert, én a Sam Loyd által készített egyik változatot mutatom be, [38], amely a *33. ábrá*n látható.



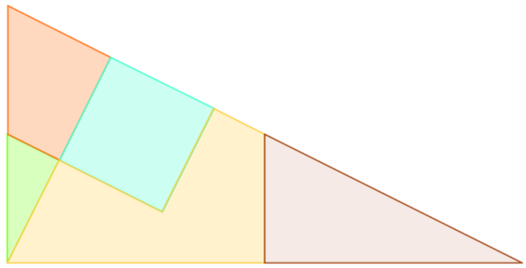
33. ábra: Sam Loyd-féle tangram

A négyzetet 5 részre vágjuk az ábrának megfelelően, és a részek áthelyezésével kell kialakítani átfedések és hézagok nélkül egy derékszögű háromszöget, egy téglalapot, egy paralelogrammát és egy keresztet.
Tanulói tevékenység: A mai órán csoportokban fogtok dolgozni. Ezért alakítsatok 4 fős csoportokat!

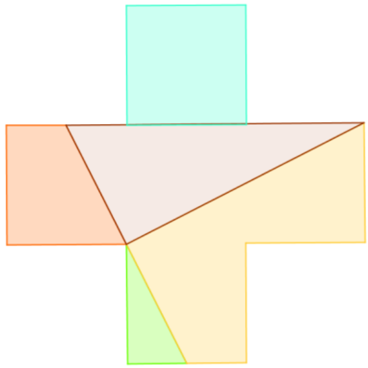
2. Első feladat: a négyzet átdarabolása(8 perc) - csoportmunka:

Tanári tevékenység: A kartonból kivágott és öt részre vágott négyzet darabjainak, valamint a kialakítandó sokszögek sziluettjeinek kiosztása csoportonként. Közben frontálisan megbeszéljük, hogy milyen sokszögekre vágtuk szét a négyzetet, mit jelent a matematikaban egy alakzat „átdarabolása” más alakzattá.
Instrukció: A négyzet darabjaiból alakítsátok ki a másik négy alakzatot !
Tanulói tevékenység: a tanulók kartonból kivágott alakzatokat használnak, közösen próbálják a megadott formákat kialakítani. Ha a csoportok mind elkészültek, akkor egy-egy tanuló csoportonként bemutat a táblánál egy átrakást (ehhez mágneses táblára illeszthető sokszögeket használhatunk).

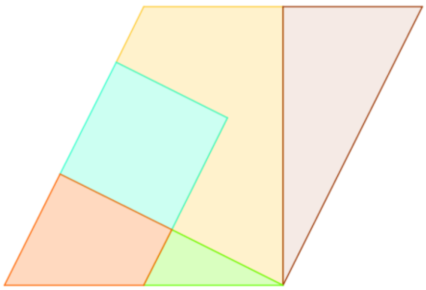
A következő ábrákon *(34-37 ábrák)* láthatók a megoldások:



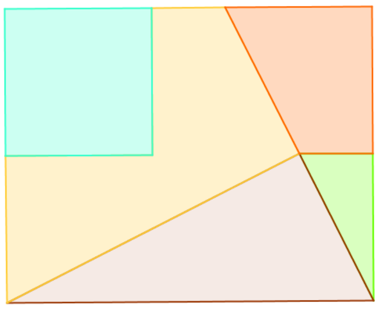
34. ábra: a derékszögű háromszög kialakítása



35. ábra: a téglalap kialakítása



36. ábra: a paralelogramma kialakítása

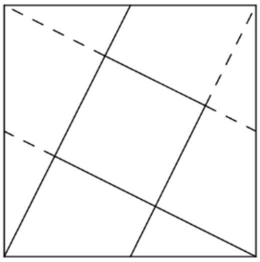


37. ábra: a kereszt kialakítása

Fejlesztendő kompetenciák: a feladat megoldása során a kombinativitás, a térlátás, térbeli viszonyok érzékelése képességek fejleszthetők. A csoportos tevékenység során a kooperativitás, az egymásra figyelés, a munkamegosztás fejleszthető, a bemutatás során a prezentációs képesség.

3. **Második feladat: hogyan szerkeszthetjük meg ezt a feladványt? (5 perc) - frontális és egyéni munka**

Tanári tevékenység: Vizsgáljuk meg, hogy hogyan keletkeztek a részek: próbáljuk meg megszerkeszteni az eredeti felosztását a négyzetnek. Milyen vonalak mentén kellett szétvágni a négyzetet? Milyen nevezetes pontokat kötöttünk össze? A válaszok alapján az oldalak felezőpontjait kell a szemközti oldal megfelelő csúcspontjával összekötni a *38. ábra* alapján (GeoGebra ábra bemutatása). Szerkesszétek meg a füzetetekben az ábrát!



38. ábra: a szétdarabolás szerkesztési ábrája

Végül:a folyamatos vonallal rajzolt szakaszok mentén vágtuk részekre a négyzetet.
Tanulói tevékenység: frontális munkában, brain-storming módszerrel válaszolnak a kérdésekre. A szerkesztési feladatot minden tanuló egyénileg oldja meg a füzetében.
Fejlesztendő kompetenciák: a kérdésekre adott válaszokhoz szükséges az asszociációs memória, prezentációs képesség, a szerkesztési feladatok során a pontos, precíz munkavégzés képessége fejleszthető.

4. **Harmadik feladat: a részek területeinek meghatározása (10 perc) – csoportmunka**

Tanári tevékenység: Az eredeti négyzet területét tekintsük egységnyinek! Csoportonként állapítsátok meg, hogy az egyes részek területe hányadrésze az eredeti területnek! Az eredeti és az átalakított sokszögek is segítségünkre lehetnek abban, hogy megállapítsuk a részek területeit! (csoportonként végigmenve a tanár kérdésekkel segít a meghatározásban: gondoljatok a szerkesztési ábrára; milyen további, egybevágó részekre tudnátok bontani a sokszögeket; hány ilyen egybevágó sokszöggel tudnánk lefedni az eredeti négyzetet és az egyes részeket, stb.)
Tanulói tevékenység: csoportokban dolgozva meghatározzák, hogy a középső kis négyzet területe egy ötöde az eredeti négyzet területének, a nagy derékszögű háromszög egy negyede, a kis derékszögű háromszög egy huszada, a trapéz területe három huszad, míg konkáv hatszög területét törtek összeadásával vagy kivonásával határozhatják meg a tanulók: $1-(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{3}{20})=\frac{7}{20}$, vagy $2\cdot\frac{3}{20}+\frac{1}{20}=\frac{7}{20}$.

Ezután minden csoportból egy tanuló elmond egy-egy rész területét, a többi csoport ellenőrzi, hogy nekik is ugyanaz az eredmény jött-e ki.
Fejlesztendő kompetenciák: az óra ezen részén a területnek egy nagyon fontos tulajdonságára világíthatunk rá, az additivitásra: a részek területeinek összege egyenlő az eredeti területtel. Ezzel együtt a rendszerező képességet, a számolási készséget (törtműveletek), az összefüggések keresését, az asszociatív memóriát, a rész-egész észlelés képességét fejlesztettük.

5. Harmadik feladat: az átalakított alakzatok kerületének meghatározása (12 perc) – csoportmunka

Tanári tevékenység: Fordítsuk most figyelmünket ismét az átalakított sokszögekre! Azt már megállapítottuk, hogy a területük egyenlő. Mi az a geometriai tulajdonság, amiben különböznek? Itt a tanulók többféle tulajdonságot is felsorolhatnak, az alakon kívül előkerülhet a konvex-konkáv fogalom is - addig várjunk a különbségek felsorolásával, amíg a kerület el nem hangzik. Az óra utolsó részében a feladat az egyes alakzatok kerületének meghatározása (csoportonként egy-egy alakzatot sorsoljunk ki a négy alakzat közül) – ha az eredeti négyzet oldalának hossza egységnyi. A tanárnak természetesen nyomon kell követni a csoportok munkáját, kérdésekkel segíteni, rávezetni a megoldás útjára: mit értünk általában egy sokszög kerületén; milyen tétel segítségével tudnátok meghatározni az egyes szakaszok hosszát; találtok-e egyenlő hosszúságúakat az oldalak között; stb.?
Tanulói tevékenység: Ez a probléma sokkal összetettebb gondolkodást igényel, mint a korábbi két feladat. Itt a csoportoknak a szerkesztett ábrából kiindulva meg kell az egyes szakaszok hosszát meghatározni (Pitagorasz tételét és a hasonlóságot felhasználva).Minden csoport egy átalakított sokszög kerületét határozza meg (a derékszögű háromszög, a téglalap, a paralelogramma és a kereszt).
Fejlesztendő kompetenciák: ez a feladat már tervezést, a részfeladatok egymás közti megosztását igényli – jó alkalom a kooperativitás, a problémamegoldó stratégiák gyakoroltatására. A megoldás közben az általános problémamegoldó képességen felül fejlődhet a számolási készség (négyzetgyökös kifejezésekkel való számolás), az asszociációs memória, a rész-egész észlelés, az orientációs készség, a logikus gondolkodás képessége, a következtetés képessége, az analízis – szintézis képessége, az algoritmikus gondolkodás, a prezentáció képessége.

6. Eredmények, az óra lezárása (5 perc)- frontális munka

Tanári tevékenység: Az óra lezárásaként összegezzük az eredményeket és hasonlítsuk össze egymással az egyes alakzatok kerületeit! Csoportonként valaki mutassa be a csoport megoldását! Ügyesen dolgoztatok, remélem, tetszett ez a játék, mutassátok meg barátaitoknak, szüleiteknek is – jó kis gondolkodtató, szórakoztató elfoglaltság lehet baráti társaságban.
Tanulói tevékenység: minden csoportból 1-1 tanuló (lehetőleg olyan, aki eddig még nem szerepelt) megmutatja, hogy a nekik kisorsolt sokszögnek mennyi a kerülete: a derékszögű három kerülete $3 + \sqrt{5}$, a téglalapé $\frac{9\sqrt{5}}{5}$, a paralelogrammáé $2 + \sqrt{5}$, a kereszté pedig $\frac{12\sqrt{5}}{5}$, ha az eredeti négyzet oldala 1 egység.

A felvázolt óra kiindulópontjául egy egyszerű, gondolkodtató logikai játékot választottam, mely alkalmas az érdeklődés felkeltésére, a motiváció megteremtésére. Ennek segítségével néhány nagyon fontos fogalmat elmélyítettünk, miközben változatos készségeket és képességeket fejlesztettünk. A feladatok megoldása során felidéződtek korábbi ismeretek, melyeket új kontextusban alkalmaztunk, új kapcsolatrendszereket építettünk ki, és a problémamegoldó technikákat, stratégiákat is gyakoroltuk. Munkaformákban a feladatmegoldások során a csoportmunkát, a bevezetés és a konklúzió levonása, összegzés során pedig frontális munkát alkalmaztunk. A tanulói tevékenységek pedig a tényleges tárgyakkal végzett manipulatív tevékenységtől a vizuális ábrázoláson keresztül a szimbolikus műveletekig tartottak. Az órán a tanulók aktív részesei a tanulási folyamatnak, amely mélyebb megértést eredményezhet. A felkészülés során az ábrák elkészítéséhez a GeoGebra programot használtam, amely még további lehetőségeket is rejt magában a feldolgozott a témakörrel kapcsolatban. A ma középiskolásai nagyon fogékonyak a számítógépes alkalmazásokra, ezért ha valakit mélyebben érdekel a GeoGebra, akkor otthoni munkára is adhatunk neki az óra anyagával kapcsolatos feladatokat.

5.4.4. Záró gondolatok

Az utolsó fejezet 5.4.2. és 5.4.3. alfejezetei talán kicsit távol állnak a dolgozat fő vonalától, mégis úgy éreztem, hogy korábbi megállapításaimat alátámasztandó, egy olyan óra tervezetét is bemutatom, melynek segítségével a mérések alapján levont következtetések – a fejlesztendő területekről, a fejlesztési irányokról – alátámaszthatók. A bemutatott módszer a tananyagba beilleszthető, sokoldalú fejlesztést tesz lehetővé, változatos tevékenységformákat valósít meg, azt hívatott megmutatni, hogyan lehet egy kreatív gondolatot óratervvé alakítani. Úgy gondolom, a matematika kompetencia alapú oktatása nagyon összetett folyamat, amely a tanári kompetenciáknak is magas szintjét kívánja meg: a matematikának, mint tudománynak magabiztos, alapos ismeretét, a matematikatanulás pedagógiai és pszichológiai alapelveinek ismeretét, jó rendszerező és szervező képességet, kreativitást. Széles módszertani repertoár szükséges a mai gyerekek motiválásához és fejlesztéséhez, mely versenyre tud kelni a televízió, az elektronikus játékok, az internet világának csillogásával. A tanári pálya folyamatos fejlődést jelent, soha nem lezárt, mindig új utakat kereső, kipróbáló. Ez a folyamatos fejlődés, ha stabil tudásbázison alapul, hozhatja el az oktatás kívánt fejlődését.
Mottóul választottam egy régi, de sok esetben ma is érvényes nagy pedagógus szavait:
„Akárhonnan nézzük is, didaktikánknak az legyen a célja, hogy kifürkésszük és felkutassuk az oktatás gyakorlatát, mégpedig azért, hogy a tanároknak minél kevesebbet kelljen tanítaniuk, ugyanakkor a diákoknak minél többet kelljen tanulniuk. E didaktika jegyében az iskolákban legyen egyre kisebb a zűrzavar, ámde legyen egyre nagyobb a szabadság, az öröm, és minderre a valódi fejlődés nyomja rá a bélyegét."(Comenius, 1657)[40]

6. Irodalomjegyzék

1. dr. Czeglédy István – dr. Orosz Gyuláné – dr. Szalontai Tibor – Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I-II. (főiskolai jegyzet, Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2005)
2. dr. Czeglédy István: Teljeskörű matematika tantárgyi képességmérés Miskolc város általános iskoláinak 5. osztályaiban (in: Miskolci Pedagógus - Miskolc Városi Pedagógiai Intézet folyóirata, 2006. 41.sz.)
3. dr. Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába (egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Bp., 2004)
4. Csapó Benő: A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése (Akadémiai Kiadó, Bp., 2003)
5. Vári Péter szerk.: PISA összefoglaló jelentés, 2000 (Oktatási Hivatal, Bp., 2002)
6. PISA összefoglaló jelentés, 2006 (Oktatási Hivatal, Bp., 2007)
7. PISA összefoglaló jelentés, 2009 (Oktatási Hivatal, Bp., 2010)
8. PISA összefoglaló jelentés, 2012 (Oktatási Hivatal, Bp., 2013)
9. Kompetencia alapú matematika tankönyvek középiskolásoknak (Educatio Kht., 2007.)
10. Pólya György: A gondolkodás iskolája (Gondolat Kiadó, 1977)
11. Pólya György: A problémamegoldás iskolája (Tankönyvkiadó, 1968)
12. Richard Skemp: A matematika tanulás pszichológiája (Gondolat Kiadó, 1975)
13. Falus Iván szerk.: Didaktika (Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998)
14. Bruner, Jerome: Az oktatás kultúrája (Gondolat Kiadó, 2004)
15. Czeglédy István: Kompetencia alapú matematikaoktatás (EKF főiskolai jegyzet, 2010)
16. Gardner, Howard: The Unschooled Mind (N.Y. Basic Books, 1991)
17. Niss, Mogens: Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project (http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf), *utolsó letöltés:2015.06.02.*
18. Niss, Mogens: Quantitative Literacy and Mathematical Competencies *(*www.maa.org/ql/pgs215_220.pdf*), utolsó letöltés:2015.06.02.*
19. Pléh Csaba: Bevezetés a megismeréstudományba (Typotex Kiadó, 1998)
20. Téglási Ilona: Mathematical Competencies Examined on Secondary School Students (in: Annales Mathematicae et Informaticae, vol. 37, pp.241-257, 2010 – http://ami.ektf.hu)
21. *Kulcskompetenciák. Egy kialakulóban lévő fogalom a közoktatásban*. Eurydice, 5. vizsgálat, 2000. október (Key Competencies. A developing concept in general compulsory education. Eurydice, Survey 5. October 2000.)
22. *Az európai oktatási és képzési rendszerekkel kapcsolatos célkitűzések nyomon követésének részletes munkaprogramja* (2002/C 142/01). {Detailed Work Programme on the follow-up of the objectives of education and training systems in Europe (2002/C 142/01).}
23. http://www.ofi.hu/tudastar/nemzetkozi-kitekintes/egesz-eleten-at-tarto , *utolsó letöltés:2015.06.02.*

24. *Knowledge and Skills for Life. First results from PISA 2000.* Párizs, OECD, 2001d.
25. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/Information%20brochure/Eurydice_brochure_2011_EN.pdf , *utolsó letöltés:2015.06.02.*
26. Csapó Benő szerk.: Az iskolai tudás (Osiris Kiadó, Bp., 1998)
27. Kiss Margit – Mezősi Károly – Pavlik Oszkárné: Értékelés a pedagógiában (FPI, Budapest, 1998)
28. Csullog Krisztina – D. Molnár Éva – Lannert Judit : A tanulók matematikai teljesítményét befolyásoló motívumok és stratégiák vizsgálata a 2003-as és 2012-es PISA-mérésekben; in: Hatások és különbségek – Másodelemzések a hazai és nemzetközi tanulói képességmérések eredményei alapján (Oktatási Hivatal, Budapest, 2014)
29. Téglási Ilona: Appearance of Mathematical Competencies in Student's Solutions (in: Obrozy Matematiky, Fikizy a Informatiky, vol. 42., pp. 27-36., 2013. Bratislava, Szlovákia)
30. Adventures on Paper – Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics – edited by Kristóf Fenyvesi, Ilona Oláhné Téglási and Ibolya Prokajné Szilágyi (Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2014)
31. M. Nádasi Mária: Adaptivitás az oktatásban (Comenius Bt, Pécs, 2001)
32. Kosztolányi József: A problémamegoldási képességek fejlesztéséről – előadás (Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2012. Január 20-22., Lőcse, Szlovákia)
33. Józsa Krisztián: Az elsajátítási motiváció (Műszaki Kiadó, Budapest, 2007)
34. Czeglédy István – Hajdú Sándor – Hajdú Sándor Zoltán – Kovács András: Matematika 9-12. Gondolkodni jó! (Műszaki Kiadó, Budapest, 2009)
35. Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 9-12. (Mozaik Kiadó, Szeged, 2007)
36. www.vismath.ektf.hu , *utolsó letöltés: 2015.06.02.*
37. Kristóf Fenyvesi - Raine Koskimaa - Ruth Mateus-Berr - Ljiljana Radovic - Djurdjica Takaci - Suncica Zdravkovic - Klelija Zivkovic: Serbian Students' Attitudes towards Mathematics and Mathematical Education Tempus Attitude Survey (TAS) 2013–2014 Report Program (Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2014, 172 p.) https://jyx.jyu.fi/dspace/handle/123456789/44803 *utolsó letöltés: 2015.06.02.*
38. Szendrei Julianna: A játék matematikája (Tankönyvkiadó, Budapest, 1987)
39. Sam Loyd's book of tangrams (Dover Publications Inx, London, 2007)
40. Johannes Amos Comenius: Didactica Magna (Seneca Kiadó, Pécs, 1992)

7. Publikációk és előadások

Cikkek:

1. Ilona Téglási: Mathematical competencies examined on secondary school students
in: Annales Mathematicae et Informaticae, 37/2010 pp. 241-257 – referált folyóirat, HU ISSN 1787-5021 (Eger, EKF, 2010)
2. Ilona Téglási: Appearance of Mathematical Competencies in Students' Solutions
in: Obrozy Matematiky, Fyziky a Informatiky (Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences)1/2013(42) pp. 27-36, ISSN 1335-4981, reviewed in http://www.zentralblatt-math.org/matheduc (Nyitra, 2013)
3. Téglási Ilona: Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban
in: Módszertani Közlemények, 3/2012 pp. 22-29 – a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kara által kiadott folyóirat, ISSN 2063-3734 (Szeged, 2012)
4. Ilona Oláhné Téglási:Tangram-type games and matchstick puzzles (In: Adventures on Paper – Math-art activities for experience-centered education of mathematics, pp. 34-41, ISBN 978-615-5297-25-0, Eger, 2014)
5. Nagyné Fóris Katalin-Oláhné Téglási Ilona: Mestertanárképzés nemzetközi projektben
in: Gyakorlóiskolák V. Országos Módszertani Konferenciája – konferenciakötet pp.294-297, ISBN 978-963-06-8077-6 (Pécs, PTE, 2009)

Konferencia előadások, absztraktok:

1. Gyakorlóiskolák V. Országos Módszertani Konferenciája, 2009. Pécs: Mestertanárképzés nemzetközi projektben (Nagyné Fóris Katalinnal közösen)
2. I. Kárpát-medencei Nemzetközi Módszertani Konferencia, 2010. Kaposvár: Matematikai kompetenciák vizsgálata középiskolai korosztálynál
3. Varga Tamás Módszertani Napok, 2010. Budapest: Mathematical Competencies Examined on Secondary School Students (English Section)
4. Varga Tamás Módszertani Napok, 2011. Budapest: Comments on an Erasmus teacher exchange – what can we learn from the Finnish in teaching mathematics and what can they learn from us? (English Section)
5. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2011. Szatmárnémeti: Matematikai képességek és iskolai teljesítmény összehasonlítása középiskolai korosztálynál
6. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2012. Lőcse, Szlovákia: Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban
7. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2013. Nagyvárad, Románia: Célirányos és fordított irányú gondolkodás a problémamegoldásban és bizonyításokban

8. Competence-based education: experiences, problems, solutions (VE Akadémiai Biz. és TEE közös konf.), 2014, Veszprém: Visual Mathematics in International Cooperation (English Section)
9. AgriaMédia 2014 konferencia, Eger: Vizuális matematika nemzetközi együttműködésben
10. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2015. Novi Sad, Szerbia: SoNetTE – Social Network in Teacher Education; Introducing the book „Adventures on Paper”
11. 4. Nemzetközi Tudományos Módszertani Konferencia, 2015. Szabadka, Szerbia: Logikai játékok szerepe a matematikaoktatásban

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet a dolgozat elkészítéséhez nyújtott segítségükért dr. Czeglédy István témavezetőmnek, akinek hasznos tanácsai és értékes kritikai megjegyzései nélkül nem jöhetett volna létre.
Valamint nagy hálával tartozom az egri Eszterházy Károly Gyakorló Gimnázium tanárainak, Pelbárt Zoltánnénak, Lénártné Pintér Katalinnak, Erdős Győzőnének a felmérés kivitelezéséhez nyújtott segítségükért – hogy rászántak egy-egy matematikaórát, hogy osztályaikkal megírassák a felmérés feladatlapjait. Külön köszönettel tartozom Lénártné Pintér Katalin kolléganőnek azért, hogy rendelkezésemre bocsátotta két osztály négy dolgozatát elemzésemhez.
Köszönöm dr. Kovács Zoltánnak az észrevételeit és építő kritikáját, melyeket az előzetes vita során fejtett ki, és melyek a dolgozat végső formába öntéséhez sok segítséget adtak.
Végül, de nem utolsó sorban köszönetemet fejezem ki azoknak a tanulóknak (nevek felsorolása nélkül), akik hozzájárultak, hogy munkáikat, feladatmegoldásaikat felhasználhassam dolgozatomhoz.

Debrecen, 2015. június 12.

Téglási Ilona