

**Geodesic loops with non-solvable  
left translation groups  
on 3-dimensional reductive spaces**

DOKTORI (Ph.D.) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Figula Ágota

**Debreceni Egyetem**

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Debrecen, 2003

# Contents

A disszertáció magyar tézisei	1
Introduction	10
1 Left A-loops and geodesic loops	11
2 Left A-loops as sections in semisimple Lie groups	13
3 3-dimensional left A-loops corresponding to 4-dimensional non-solvable Lie groups	15
4 3-dimensional left A-loops belonging to 5-dimensional non-solvable Lie groups	17
5 3-dimensional left A-loops with 6-dimensional non-solvable Lie groups	18
References	21
List of papers of the author	24

## A disszertáció magyar tézisei

### Geodetikus loopok 3-dimenziós nem feloldható reduktív homogén tereken

Ebben a disszertációban 3-dimenziós majdnem differenciálható bal A-loopokat vizsgálunk. Egy  $G$  kommutatív csoport fontos jellemvonása, hogy az összes kommutátora  $[a, b] = (ba)^{-1}ab$ ; ( $a, b \in G$ ) a csoport egységelemével egyezik meg. Ez a tulajdonság erősen támaszkodik az asszociativitás törvényére. Így loopokra ez a tény radikálisan változik. Ez az észrevétel vezette Bruckot, Paiget, Belousovot azon  $L$  loopok kutatásához, melyekben az

$$x \mapsto [(ba)^{-1}(a(bx))]$$

leképezések minden  $a, b \in L$  esetén automorfizmusai  $L$ -nek ([4], [2]). Az ilyen tulajdonságú loopokat bal A-loopoknak nevezték el utalva a balról történő szorzásra és az automorfizmus kifejezésre. A majdnem differenciálható bal A-loopok differenciálgeometriai szempontból is nagyon jelentősek.

Kikkawa [19]-ben megmutatta, hogy osztályuk szoros kapcsolatban áll a reduktív terek osztályával, melyek a differenciálgeometria lényeges objektumai ([23], [12]). Továbbá minden majdnem differenciálható erősen bal alternatív lokális  $L$  bal A-loop egy lokális geodetikus loop az  $L$ -hez tartozó reduktív tér kanonikus konnexiójára vonatkozóan ([29]), azaz az  $L$  differenciálható sokaságon a loopszorzás a következőképpen értelmezhető

$$x \cdot y = \exp_x \circ \tau_{e,x} \circ \exp_e^{-1}(y),$$

ahol  $e$  jelöli az  $L$  loop egységelemét,  $\exp$  az exponenciális leképezést és  $\tau_{e,x}$  pedig érintő vektoroknak a párhuzamos eltolását az  $e$  és  $x$  pontokat összekötő geodetikus mentén.

A legkisebb összefüggő majdnem differenciálható nem-asszociatív bal A-loopok 2-dimenziós sokaságokon realizálhatók. A 2-dimenziós globális bal A-loopoknak pontosan két izotópia osztálya létezik. Az egyik osztályba egyedül egy valódi Bruck loop tartozik, mely a hiperbolikus sík geodetikus loopja ([29], 22. fejezet). A másik izotópia osztály egy reprezentálója az a két dimenziós Bruck loop mely az  $E$  pszeudo-euklideszi affin síkon van értelmezve. A bal translációi által topologikusan generált csoportja az összefüggő komponense a pszeudo-euklideszi mozgások csoportjának, a loop elemei pedig a pozitív meredekségű egyenesek  $E$ -ben ([29], 25. fejezet).

Ebben a dolgozatban osztályozzuk az összes olyan 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható globális bal A-loopokat, melyek bal translációi által topologikusan generált csoportja nem feloldható Lie csoport.

A disszertáció első fejezete összefoglalja azokat a fogalmakat, összefüggéseket és eszközöket, melyeket az osztályozás során használunk. Ebben a dolgozatban a loopok elméletét a csoportelmélet keretében tárgyaljuk követve Nagy és Strambach által [29]-ban kidolgozott terminológiát. **1.1**-ben bemutatjuk a loopok és a csoportok erősen tranzitív szelései közötti kapcsolatokat. Minden  $L$  loop tekinthető egy olyan  $\sigma : G/H \rightarrow G$  szelés képeként egy  $G$  csoportban, mely a következő tulajdonságokat teljesíti: a  $\sigma(G/H)$  képhalmaz erősen tranzitívan hat a  $G/H$  faktortéren, azaz minden  $xH$  és  $yH$  bal oldali mellékosztályhoz létezik pontosan egy  $z$  eleme  $\sigma(G/H)$ -nak melyre teljesül  $zxH = yH$ ,  $\sigma(G/H)$  generálja a  $G$  csoportot és  $\sigma(H) = 1 \in G$ . Ha  $H$  olyan részcsoportha  $G$ -nek, mely nem tartalmazza  $G$  triviálistól különböző normálosztóját, akkor a  $G$  csoport az  $L$  loop bal translációi által topologikusan generált csoportja és a  $H$  részcsoportha az  $L$  loop egységelemének a stabilizátora. Egy ilyen loop bal A-loop, ha a  $\sigma(G/H)$  részhalmaz invariáns marad a  $H$  elemeivel való konjugálással szemben.

Egy összefüggő majdnem differenciálható  $L$  bal A-loopnak a bal translációi által topologikusan generált  $G$  csoport egy összefüggő Lie csoport (cf. [26]; [29], Proposition 5.20. p. 75) és  $L$  előállítható a  $G$  csoportnak és a  $H$  részcsoportha egy differenciálható  $\sigma : G/H \rightarrow G$  szelése által. Így ebben a disszertációban Lie csoportok erősen tranzitív differenciálható szeléseit vizsgáljuk differenciálgeometriai és Lie elméleti módszerekkel. Jelölje  $\mathfrak{g}$  illetve  $\mathfrak{h}$  a  $G$  csoportnak illetve a  $H$  részcsoporthjának a Lie algebráját. Az  $L$ -hez tartozó  $\sigma$  szelés képének az  $1 \in G$  pontbeli  $\mathfrak{m} = T_1\sigma(G/H)$  érintőtere generálja a  $\mathfrak{g}$  Lie algebrát, komplementer a  $\mathfrak{h}$  Lie algebrához és rendelkezik a  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$  tulajdonsággal. Ennélfogva a  $G/H$  homogén tér redukált az  $\mathfrak{m}$  részterre vonatkozóan (cf. [30] Chapter II, p. 41; [23] Vol II, p. 190). A  $\mathfrak{m}$  részter ellátva az  $(X, Y) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \mapsto [X, Y]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$  bináris és az  $(X, Y, Z) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \mapsto [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] \in \mathfrak{m}$  ternáris műveletekkel egy Lie hármas algebrát alkot és a  $\mathfrak{g}$  Lie algebra izomorf ennek a Lie hármas algebrának a sztandard burkoló Lie algebrájához. Könnyű belátni, hogy ha egy Lie hármas algebra  $n$ -dimenziós akkor a sztandard burkoló Lie algebrájának a dimenziója legfeljebb  $n + \frac{n(n-1)}{2}$ .

A 3-dimenziós bal A-loopokat a következő eljárás szerint osztályozzuk: Tekintjük az összes 4, 5 vagy 6-dimenziós nem feloldható Lie csoportot. Ezen  $G$  csoportoknak meghatározzuk az összes olyan  $H$  részcsoporthját, mely nem tartalmazza  $G$  triviálistól különböző normálosztóját és amelyre teljesül  $\dim G - \dim H = 3$ . Először meghatározzuk a  $G/H$  három dimenziós redukált tereket, azaz minden rögzített  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  pár esetén megkeressük a  $\mathfrak{g}$  Lie algebra összes olyan 3-dimenziós  $\mathfrak{m}$  részterét, mely komplementer a  $\mathfrak{h}$  részalgebrához, generálja a  $\mathfrak{g}$  Lie algebrát és teljesíti a  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$  relációt.

Egy ilyen  $\mathfrak{m}$  komplementert redukívnek hívunk és az exponenciális képe definiál egy differenciálható lokális  $\sigma$  szelést a  $G$  egységelemének egy  $U$  környezetében úgy, hogy  $\exp \mathfrak{m} = \sigma(G/H)$ .

Az  $\mathfrak{m}$  redukív résztegek exponenciális képeinek meghatározásához szükségünk van az  $sl_2(\mathbb{R})$ ,  $sl_2(\mathbb{C})$ ,  $su_2(\mathbb{C})$  Lie algebrák exponenciális leképezéseinek ismeretére. **1.2**-ben ezekkel a leképezésekkel foglalkozunk. Hilgert és Hofmann [13]-ben az  $\exp : sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$  exponenciális leképezésre a következő explicit formulát találták:

$$\exp X = C(k(X)) I + S(k(X)) X,$$

ahol

$$C(x) = \begin{cases} \cosh \sqrt{x} & 0 \leq x \text{ esetén,} \\ \cos \sqrt{-x} & 0 > x \text{ esetén,} \end{cases} \quad S(x) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} & 0 \leq x \text{ esetén,} \\ \frac{\sin \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & 0 > x \text{ esetén,} \end{cases} \quad \text{és}$$

$k(X)$  a Cartan-Killing forma értéke  $X$ -en.

Általánosítva ezt a formulát azt kapjuk, hogy az

$$X_1 = \lambda_1 K + \lambda_2 T + \lambda_3 U + \lambda_4 iK + \lambda_5 iT + \lambda_6 iU \in sl_2(\mathbb{C})$$

valamint az

$$X_2 = \lambda_1 U + \lambda_2 iK + \lambda_3 iT \in su_2(\mathbb{C})$$

elemek exponenciális leképezés általi képe

$$\exp X_i = C(k_{\mathbb{C}}(X_i)) I + S(k_{\mathbb{C}}(X_i)) X_i, \quad i = 1, 2,$$

ahol

$k_{\mathbb{C}}(X_1) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_6^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 - \lambda_5^2 + i(2\lambda_1\lambda_4 + 2\lambda_2\lambda_5 - 2\lambda_3\lambda_6)$ ,  
mely a komplex Cartan-Killing forma értéke az  $X_1 \in sl_2(\mathbb{C})$  elemen és

$$k_{\mathbb{C}}(X_2) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2,$$

valamint  $C(z) = \cosh \sqrt{z}$ ,  $S(z) = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$  minden  $z$  komplex számra.

A globális majdnem differenciálható bal A-loopok osztályozása lényegesen különbözik a lokális bal A-loopok osztályozásától, melyek Lie csoportok lokális szeléseiként állíthatók elő. A kérdés, hogy egy lokális loop milyen feltételek mellett ágyazható be egy globálisba, egy nehéz probléma. Kuzmin, Kerzman és Nagy bebizonyították, hogy minden lokális differenciálható Moufang loop egyértelműen beágyazható egy egyszerűen összefüggő globálisba ([24], [17], [28]). De bal A-loopokra ez már nem igaz. Ezért az osztályozás következő lépéseként meg kell vizsgálni, hogy a kapott lokális szelések közül melyik terjeszthető ki differenciálhatóan az egész  $G/H$  faktortéren értelmezett globális szeléssé. Ha az  $\exp \mathfrak{m}$  sokaság képe egy  $\sigma : G/H \rightarrow G$  globális szelésnek ekkor a  $G$  csoport minden  $g$  eleme egyértelműen előállítható egy  $g = mh$  szorzatként, ahol  $m \in \exp \mathfrak{m}$  és  $h \in H$ . Továbbá  $\mathfrak{m}$  nem tartalmaz olyan elemet, mely eleme  $Ad_g \mathfrak{h}$ -nak valamely  $g \in G$ -re.

**1.3**-ban felsoroljuk az összes 4, 5 és 6-dimenziós nem feloldható Lie csoportokat. Állításokat fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy ezen Lie csoportok közül melyik fordulhat elő egy 3-dimenziós majdnem differenciálható  $L$  bal  $A$ -loop bal translációi által topologikusan generált csoportjaként. Megadjuk a lehetséges  $G$  csoportok olyan  $H$  részcsoportjait, mely az  $L$  loop egységeleme stabilizátorának választható. Eredményeinket a disszertáció 3. 4. 5. 6. és 7. állításaiban fogalmaztuk meg.

**3. Állítás** *Legyen  $L$  egy loop,  $G$  az  $L$  loop bal translációi által topologikusan generált csoport és  $H$  az  $L$  loop egységelemének a stabilizátora  $G$ -ben. Ha a  $G$  és a  $H$  csoportok a  $G = G_1 \times G_2$  és  $H = H_1 \times H_2$  direkt szorzatok és  $H_i \subset G_i$   $i = 1, 2$ , akkor az  $L$  loop előáll két loop  $L_1$  és  $L_2$  direkt szorzataként, ahol az  $L_i$   $i = 1, 2$  részloop izomorf egy olyan  $L_i^*$  loophoz, melynek a bal translációi által topologikusan generált csoportja éppen  $G_i$  és az  $e \in L_i^*$  elem stabilizátora a  $H_i$  részcsoport.*

*Nem létezik olyan 3-dimenziós  $L$  bal  $A$ -loop, amely egy 1-dimenziós és egy 2-dimenziós bal  $A$ -loopnak a direkt szorzata és az  $L$  bal translációi által topologikusan generált csoportja egy 5 vagy 6-dimenziós Lie csoport.*

Topológiai okokból a következő  $(G, H)$  párok nem fordulhatnak elő egy majdnem differenciálható 3-dimenziós  $L$  bal  $A$ -loop bal translációi által generált  $G$  csoportjaként és az  $e \in L$  egységelem  $H$  stabilizátoraként.

**4. Állítás** *Ha  $L$  egy összefüggő majdnem differenciálható 3-dimenziós bal  $A$ -loop, ekkor a  $(G, H)$  párok nem lehetnek a következők:*

a)  $G = SL_2(\mathbb{C})$  és  $H \in \{U_0, U_1\}$  illetve  $G = PSL_2(\mathbb{C})$  és  $H$  az  $U_0/\mathbb{Z}_2$  vagy az  $U_1/\mathbb{Z}_2$  részcsoport, ahol

$$U_r = \left\{ \begin{pmatrix} z & (r-1)w \\ -(r+1)\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}; |z|^2 + (r^2-1)|w|^2 = 1 \right\}.$$

b)  $G$  lokálisan izomorf az  $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  csoporthoz és  $H$  tetszőleges 1-dimenziós részcsoportja  $G$ -nek.

c)  $G$  az  $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$  csoport, mely az összefüggő komponense a 3-dimenziós euklideszi tér mozgáscsoportjának és  $H$  előáll az  $\mathbb{R}^3$  egy 2-dimenziós transláció csoportjának  $SO_3(\mathbb{R})$  egy 1-dimenziós rotáció csoportjával való félig-direkt szorzataként.

d)  $G = SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ , és  $H$  tetszőleges 3-dimenziós részcsoportja  $G$ -nek.

e)  $G = SL_2(\mathbb{C})$  és  $H = W_r$  valamint  $G = PSL_2(\mathbb{C})$  és  $H = W_r\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$ , ahol

$$W_r = \left\{ \begin{pmatrix} \exp((ri-1)x) & 0 \\ z & \exp(-(ri-1)x) \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \right\}, r \in \mathbb{R}.$$

A következő megállapítások olyan  $G$  Lie csoportokra vonatkoznak, melyek direkt szorzatai 2 részcsoportnak úgy, hogy az egyik faktoruk lokálisan izomorf

az  $SO_3(\mathbb{R})$  vagy a  $PSL_2(\mathbb{R})$  Lie csoporthoz. Csoportelméleti eszközökkel a következő eredményeket kapjuk:

**5. Állítás** Legyen  $G = G_1 \times G_2$  egy 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható  $L$  bal  $A$ -loopnak a bal translációi által topologikusan generált csoportja úgy, hogy a  $G_i$   $i = 1, 2$  faktorok kvázi-egyszerű Lie csoportok. Ekkor a következő esetek lehetségesek: a  $G_1$  és a  $G_2$  csoport is izomorf  $PSL_2(\mathbb{R})$ -hez és az  $e \in L$  elemnek a  $H$  stabilizátora vagy a

$$(i) \quad H_1 = \{(x, x) \mid x \in PSL_2(\mathbb{R})\}$$

vagy a

$$(ii) \quad H_2 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b_1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b_2 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right); a > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

részcsoport.

**6. Állítás** Legyen  $G = G_1 \times G_2$  egy 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható  $L$  bal  $A$ -loopnak a bal translációi által topologikusan generált csoportja úgy, hogy a  $G_1$  csoport lokálisan izomorf  $PSL_2(\mathbb{R})$ -hez vagy  $SO_3(\mathbb{R})$ -hez és  $G_2$  egy nem triviális kommutatív Lie csoport. Ekkor a következő esetek fordulhatnak elő:

1)  $L$  a hiperbolikus síkloopnak egy 1-dimenziós Lie csoporttal való direkt szorzata.

2)  $G$  izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  csoporthoz és  $H$  az  $\{(x, \varphi(x))\}$  részcsoport, ahol  $\varphi$  egy monomorfizmus a  $PSL_2(\mathbb{R})$ -nek az  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$  vagy az

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\} \text{ 1-dimenziós részcsoportjából } \mathbb{R}\text{-be.}$$

3)  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  úgy, hogy  $H = \{(x, \varphi(x))\}$ , ahol  $\varphi$  egy monomorfizmus  $PSL_2(\mathbb{R})$  egy kompakt részcsoportjából  $SO_2(\mathbb{R})$ -be.

4)  $G$  lokálisan izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  csoporthoz és

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, a \right); a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**7. Állítás** Legyen  $G = G_1 \times G_2$  egy 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható  $L$  bal  $A$ -loopnak a bal translációi által topologikusan generált csoportja úgy, hogy a  $G_1$  csoport lokálisan izomorf egy 3-dimenziós egyszerű Lie csoporthoz és  $G_2$  egy feloldható nem kommutatív Lie csoport. Ekkor a következő esetek fordulhatnak elő:

1)  $G$  izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_2$  csoporthoz, ahol  $\mathcal{L}_2 = \{ax + b \mid a > 0, b \in \mathbb{R}\}$  és az  $e \in L$  elem stabilizátora a következő részcsoportok egyike

$$a) \quad H \cong \left\{ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right), a > 0, b \in \mathbb{R} \right\},$$

$$b) H \cong \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^z & b \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), z, b \in \mathbb{R} \right\},$$

c)  $H \cong \{(\varphi(x), x) \mid x \in \mathcal{L}_2\}$ , ahol  $\varphi$  egy monomorfizmus,

2 A)  $G$  lokálisan izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times G_2$  csoporthoz, ahol  $G_2$  a 3-dimenziós nem kommutatív nilpotens Lie csoport és az  $e \in L$  elem stabilizátora a

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, g(c + k a, 0, l a) \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

részcsoporthoz, ahol  $k \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  adott paraméterek.

2 B)  $G$  lokálisan izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times G_2$  csoporthoz, ahol  $G_2$  az  $\mathcal{L}_2 \times \mathbb{R}$  3-dimenziós Lie csoport és az  $L$  loop  $e$  egységelemének a stabilizátora

$$H_1 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & la \\ 0 & e^{c+ka} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol  $k, l$  adott valós számok, úgy hogy  $l \neq 0$ , vagy

$$H_2 = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c + la & c + ka \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol  $k, l$  adott valós számokkal.

2 C)  $G$  lokálisan izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times G_2$  direkt szorzathoz, ahol  $G_2$  az a 3-dimenziós feloldható Lie csoport, melynek pontosan kettő 1-dimenziós normálosztója van és

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c + la & c + ka \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol  $k, l$  adott valós számok.

2 D)  $G$  lokálisan izomorf  $PSL_2(\mathbb{R}) \times G_2$ -höz, ahol  $G_2$  az a 3-dimenziós feloldható Lie csoport, melynek pontosan egy 1-dimenziós normálosztója van és az  $L$  loop egységelemének a  $H$  stabilizátora a

$$\left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c + ka & la \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, k \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

részcsoporthoz.

2 F)  $G$  lokálisan izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times G_2$  csoporthoz, ahol  $G_2$  lokálisan

izomorf az euklideszi sík irányítástartó mozgásainak a csoportjához és a  $H$  stabilizátor a következő alakú:

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c+ka & la & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right), a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

ahol  $k \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Az 1. fejezet egy fontos eredménye:

**8. Következmény** *Nem létezik az  $S^3$  vagy a  $P^3$  kompakt terekhez homeomorf globális bal  $A$ -loop.*

A 2. 3. 4. és 5. fejezetekben rendre megvizsgáljuk az előző állítások által megengedett  $G$  Lie csoportokat és az eddig nem vizsgált félig-direkt szorzatokat. Alkalmazva az osztályozási eljárásunkat megmutatjuk, hogy pontosan 5 osztálya létezik a 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható globális bal  $A$ -loopoknak, melyeknek a bal translációi által topologikusan generált csoportja nem feloldható és jellemezzük a hozzájuk kapcsolódó differenciálgeometriai struktúrákat. Az összes többi  $(G, H)$  pár esetén rendre bebizonyítjuk, hogy az exponenciális leképezés általi képe a lehetséges  $\mathfrak{m}$  redukzív résztereknek nem terjeszthető ki differenciálhatóan az egész  $G/H$  faktortérre. Ugyanis az  $\mathfrak{m}$  redukzív komplementer vagy tartalmaz olyan elemet, mely konjugált a  $\mathfrak{h}$  Lie algebra egy eleméhez, vagy létezik olyan  $g \in G$  elem, mely nem egyértelműen áll elő egy  $m \in \exp \mathfrak{m}$  elem és egy  $h \in H$  elem szorzataként.

A 2. fejezetben osztályozzuk az összes olyan 3-dimenziós majdnem differenciálható bal  $A$ -loopokat, melyeknek a bal translációik által topologikusan generált csoportja egy egyszerű vagy féligegyszerű Lie csoport. A fejezet legfontosabb eredményeit a következő tétel foglalja össze:

**9. Tétel** *Pontosan egy  $\mathcal{C}$  osztálya létezik a 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható bal  $A$ -loopoknak úgy, hogy a bal translációik által topologikusan generált csoportjuk egy egyszerű vagy féligegyszerű Lie csoport. Ezen osztály loopjainak bal translációi által topologikusan generált csoportja izomorf a  $PSL_2(\mathbb{C})$  egyszerű Lie csoporthoz és a loopok egységelemének a stabilizátora izomorf  $SO_3(\mathbb{R})$ -hez. Ennek az osztálynak minden loopja egy a valós paraméterrel jellemezhető. Az  $L_a$  és  $L_{-a}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) loopok egy teljes izomorfia osztályt alkotnak, sőt ez egy teljes izotópia osztály is, mivel ezen*

loopok izomorfia osztályai megegyeznek az izotópia osztályokkal. Jelölje  $\nabla_a$  a  $G/H$  redukzív homogén térnek az  $\mathfrak{m}_a = T_1\sigma_a(G/H)$  redukzív komplementerre vonatkozó kanonikus konnexitást. Az  $L_a$  loop izomorf a  $\nabla_a$  kanonikus konnexitáshoz tartozó geodetikus looppal. A  $\mathcal{C}$  osztály egyetlen Bruck loopja a 0 paraméterhez tartozó hiperbolikus térloop  $L_0$ . Az  $L_0$  differenciálható sokaság  $1 \in G$  pontbeli  $\mathfrak{m}_0 = T_1L_0$  érintőtere merőleges a  $H = SO_3(\mathbb{R})$  stabilizátor  $\mathfrak{h}$  Lie algebrájához a  $\mathfrak{g}$  Lie algebra Cartan-Killing formájára vonatkozóan. Az  $L_0$  loop elemei a hiperbolikus szimmetrikus tér pontjai és a loopszorzás a következőképpen adható meg  $x \cdot y = \tau_{e,x}(y)$ , ahol  $\tau_{e,x}$  az  $e$  pontot az  $x$ -be vivő hiperbolikus eltolás.

A 3. fejezetben olyan 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható bal A-loopokat vizsgálunk, melyek egy 4-dimenziós nem feloldható Lie csoport differenciálható szeléseiként állnak elő. Eredményeink a következők:

**10. Tétel** *Pontosan három  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  és  $\mathcal{C}_3$ -mal jelölt izotópia osztálya létezik az olyan 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható bal A-loopoknak, melyeknek a bal translációik által generált csoport egy 4-dimenziós Lie csoport. A  $\mathcal{C}_1$  illetve a  $\mathcal{C}_2$  osztály minden loopja előáll egy a hiperbolikus síkloop-hoz izomorf loopnak a valós számok additív csoportjával illetve az 1-dimenziós ortogonális csoporttal való direkt szorzataként. Ezek a loopok differenciálható Bruck loopok. A  $\mathcal{C}_1$  osztály loopjainak a bal translációi által topologikusan generált csoportja izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  Lie csoporthoz, míg a  $\mathcal{C}_2$  osztály loopjainak a bal translációi által topologikusan generált csoportja izomorf a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  Lie csoporthoz. Ezen loopok egységelemének a stabilizátora izomorf  $SO_2(\mathbb{R})$ -hez. A  $\mathcal{C}_3$  osztályba izomorfia erejéig csak az  $SO_2(\mathbb{R})$  ortogonális csoportnak a hiperbolikus síkloop általi  $L$  Scheerer kiterjesztése tartozik. Ez a loop egy 3-dimenziós differenciálható Bol loop. Az  $L$  loop bal translációi által topologikusan generált csoportja a  $PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  Lie csoport és az egységelemének a stabilizátora a  $H = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in SO_2(\mathbb{R})\}$  csoport, ahol  $\varphi$  egy monomorfizmus.*

A 4. fejezetben keresve az összes olyan 3-dimenziós bal A-loopokat, melyeknek a bal translációi által topologikusan generált csoport egy 5-dimenziós nem feloldható Lie csoport a következő tételt bizonyítjuk be:

**11. Tétel** *Nem létezik olyan 3-dimenziós majdnem differenciálható globális bal A-loop, melynek a bal translációi által topologikusan generált csoportja 5-dimenziós nem feloldható Lie csoport.*

Végezetül az 5. fejezetben meghatározzuk az összes olyan 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható bal A-loopokat, melyeknek a bal translációi által topologikusan generált csoport egy 6-dimenziós nem féligegyszerű

és nem feloldható Lie csoport. A lehetséges  $\mathfrak{m}$  redukzív komplementerek exponenciális képének globális beágyazhatóságát vizsgálva kapjuk a következő osztályozási tételt:

**12. Tétel:** *Pontosan két izomorfia osztálya létezik a 3-dimenziós összefüggő majdnem differenciálható bal A-loopoknak 6-dimenziós nem féligegyszerű és nem feloldható bal transláció csoporttal és ezek az izomorfia osztályok megegyeznek az izotópia osztályokkal.*

*Továbbá ezen loopok bal translációi által topologikusan generált csoportja a  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$  Lie csoport, ahol a  $PSL_2(\mathbb{R})$  csoport hatása  $\mathbb{R}^3$ -on éppen  $PSL_2(\mathbb{R})$  adjugált hatása az  $sl_2(\mathbb{R})$  Lie algebrán és a loopok egységelemének a  $H$  stabilizátora a*

$$\left\{ \left( \pm \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right); t \in [0, 2\pi), x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

*részcsoporth. Ezen loopok mindegyike két valós  $(a, b)$  paraméterrel jellemezhetőek. Az egyik izomorfia osztályba a  $(b_1, 0)$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$  paraméterekhez tartozó  $L_{b_1, 0}$  Bruck loopok tartoznak és az  $L_{0, 0} = \hat{L}_0$  pseudo-euklideszi térloop választható ezen osztályok reprezentálójaként. A másik izomorfia osztály az  $L_{b_1, b_2}$ ,  $b_2 \neq 0$  bal A-loopokból áll és reprezentálójaként az  $L_{0, 1} = \hat{L}_1$  loop választható. A  $\hat{L}_0$  és az  $\hat{L}_1$  loopok az  $E(2, 1)$  pseudo-euklideszi affin téren realizálhatók, hiszen a bal translációik által topologikusan generált csoport az összefüggő komponense a pseudo-euklideszi mozgások csoportjának. Ezen loopok elemei a pseudo-euklideszi tér azon síkjai, melyeken az euklideszi norma van bevezetve, viszont a bal translációjuk halmazai különbözőek. Az  $\hat{L}_0$  illetve az  $\hat{L}_1$  loop izomorf az  $E(2, 1)$  pseudo-euklideszi térbeli  $\mathfrak{m}_{0, 0} = T_1[\hat{\sigma}_0(G/H)]$  illetve  $\mathfrak{m}_{0, 1} = T_1[\hat{\sigma}_1(G/H)]$  redukzív komplementerre és a  $\nabla_0$  illetve a  $\nabla_1$  kanonikus konnexióra vonatkozó geodetikus loophoz.*

## Introduction

An important characteristic of commutative groups  $G$  is the fact that their commutators  $(ba)^{-1}ab$  for all  $a, b \in G$  are the identity of  $G$ . But this fact depends strongly on the associative law. For loops which are structures with a binary multiplication having up to associativity the same properties as groups this behaviour changes radically. This observation led to a broader research of loops  $L$  in which the mapping  $x \mapsto [(ba)^{-1}(a(bx))]$  is an automorphism of  $L$  (cf. [4], [2]). These loops have been called left A-loops.

According to [29] we treat the almost differentiable left A-loops as images of global differentiable sharply transitive sections  $\sigma : G/H \rightarrow G$  for a Lie group  $G$  such that the subset  $\sigma(G/H)$  is invariant under the conjugation with the elements of  $H$ . Here  $G$  denote the group topologically generated by the left translations  $\{\lambda_x, x \in L\}$  of  $L$  and  $H$  is the stabilizer of the identity of  $L$  in  $G$ .

In case of a left A-loop  $L$  the tangential space  $\mathfrak{m} = T_1\sigma(G/H)$  of the image of the section  $\sigma$  at  $1 \in G$  can be provided with a binary and a ternary multiplication and yields a Lie triple algebra (cf. [36], [19], Definition 7.1, p. 173). Since the Lie triple algebras correspond to affine reductive spaces, which are essential objects in the main stream of differential geometry (cf. [23], [12]), there is a strong connection between the theory of differential left A-loops and the theory of affine reductive homogeneous spaces (cf. [20]). In particular the theory of connected differentiable Bruck loops (which form a subclass of the class of left A-loops) is essentially the theory of affine symmetric spaces (cf. [29], Section 11). Moreover every almost differentiable strongly left alternative local left A-loop  $L$  is a geodesic local loop of the canonical connection  $\nabla$  of the reductive homogeneous space  $G/H$  corresponding to  $L$  (cf. [29], Proposition 5.21, p. 76).

The smallest connected almost differentiable non-associative left A-loops are realized on 2-dimensional manifolds. There exist precisely two isotopism classes of 2-dimensional global left A-loops. In the one class lies only the hyperbolic plane loop which is related to the hyperbolic symmetric plane (cf. [29], Section 22). As a representative  $L$  of the other isotopism class may be chosen the 2-dimensional Bruck loop which is realized on the pseudo-euclidean affine plane  $E$  such that the group topologically generated by its left translations is the connected component of the group of pseudo-euclidean motions and the elements of  $L$  are the lines of positive slope in  $E$  (cf. [29], Section 25).

Our aim in this paper is to classify the 3-dimensional connected almost differentiable global left A-loops, which have a non-solvable Lie group as the group topologically generated by their left translations.

In contrast to local almost differentiable left A-loop, which can be represented as local sections in non-solvable Lie groups  $G$  we will show that there are only five classes of global almost differentiable left A-loops with  $G$  as the group topologically generated by the left translations. These left A-loops are in strong relation to geometries on 3-dimensional manifolds.

Using the present theory of almost differentiable left A-loops it is not difficult to prove that  $G$  is four, five or six dimensional. First we classify the 3-dimensional reductive spaces  $G/H$ , this means we determine all complements  $\mathfrak{m}$  of the Lie algebra  $\mathfrak{h}$  of  $H$  in the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  such that  $\mathfrak{m}$  generates  $\mathfrak{g}$  and satisfies the relation  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ . Such a complement is called reductive. For every strongly left alternative left A-loop the exponential image of the tangential space  $\mathfrak{m} = T_H\sigma(G/H)$  is contained in  $\sigma(G/H)$ . Hence the exponential image of a reductive complement  $\mathfrak{m}$  defines a local differentiable section  $\sigma : G/H \rightarrow G$ . Then we investigate which of these local sections can be extended to a global one. The submanifold  $\exp \mathfrak{m}$  can be extended to a global section if and only if  $\exp \mathfrak{m}$  forms a system of representatives for the cosets  $\{xH \mid x \in G\}$  in  $G$  and  $\exp \mathfrak{m}$  does not contain any element conjugate to an element of  $H$ .

## 1 Left A-loops and geodesic loops

In this section we collect notions, tools and results, which we use in the later investigation.

**1.1** A set  $L$  with a binary operation  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  is called a loop if there exists an element  $e \in L$  such that  $x = e \cdot x = x \cdot e$  holds for all  $x \in L$  and the equations  $a \cdot y = b$  and  $x \cdot a = b$  have precisely one solution which we denote by  $y = a \setminus b$  and  $x = b / a$ . The left translation  $\lambda_a : y \mapsto a \cdot y : L \rightarrow L$  is a bijection of  $L$  for any  $a \in L$ .

A loop is called a left A-loop if each mapping  $\lambda_{x,y} = \lambda_{xy}^{-1} \lambda_x \lambda_y : L \rightarrow L$  is an automorphism of  $L$ .

The connection among loops and sharply transitive sections in groups is described as follows: Let  $G$  be the group generated by the left translations of a loop  $L$  and let  $H$  be the stabilizer of  $e \in L$  in the group  $G$ . The left translations of  $L$  form a subset of  $G$  acting on the cosets  $\{xH; x \in G\}$  such that for any given cosets  $aH, bH$  there exists precisely one left translation  $\lambda_z$  with  $\lambda_z aH = bH$ .

Conversely let  $G$  be a group,  $H$  be a subgroup containing no normal non-trivial subgroup of  $G$  and  $\sigma : G/H \rightarrow G$  be a section such that  $\sigma$  satisfies the following conditions:

1. The image  $\sigma(G/H)$  forms a subset of  $G$  with  $\sigma(H) = 1 \in G$ .

2.  $\sigma(G/H)$  generates  $G$ .
3.  $\sigma(G/H)$  acts sharply transitively on the space  $G/H$  of the left cosets  $\{xH, x \in G\}$ , i.e. to any  $xH, yH$  there exists precisely one  $z \in \sigma(G/H)$  with  $zxH = yH$  (cf. [29], p. 18).

Then the multiplication on the factor space  $G/H$  defined by  $xH * yH = \sigma(xH)yH$  yields a loop  $L(\sigma)$ . This loop is a left A-loop if and only if the subset  $\sigma(G/H)$  is invariant under the conjugation with the elements of  $H$ .

If  $L$  is a connected almost differentiable left A-loop, then the group  $G$  topologically generated by the left translations of  $L$  is a connected Lie group (cf. [26]; [29], Proposition 5.20. p. 75), the stabilizer  $H$  of  $e \in L$  is a connected subgroup of  $G$  containing no non-trivial normal subgroup of  $G$  and we may describe  $L$  by a differentiable section  $\sigma$ . Hence in this work we investigate sharply transitive differentiable sections in Lie groups using methods of differential geometry and Lie theory. Let  $(\mathfrak{g}, [., .])$  be the Lie algebra of  $G$ . Denote by  $\mathfrak{h}$  the Lie algebra of the stabilizer  $H$  of  $e \in L$  in  $G$  and by  $\mathfrak{m} = T_1\sigma(G/H)$  the tangent space at  $1 \in G$  of the image of the section  $\sigma : G/H \rightarrow G$  corresponding to the left A-loop  $L$ . Then the tangential object  $\mathfrak{m}$  of  $L$  is a complement to  $\mathfrak{h}$ , generates  $\mathfrak{g}$  and satisfies the relation  $ad(\mathfrak{h})\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$  (cf. [29], Proposition 5.20. p. 75). This means the homogeneous space  $G/H$  is reductive with respect to the subspace  $\mathfrak{m}$  (cf. [30] Chapter II, p. 41; [23] Vol II, p. 190). The subspace  $\mathfrak{m}$  with the binary operation  $(X, Y) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \mapsto [X, Y]_{\mathfrak{m}} \in \mathfrak{m}$  and the ternary operation  $(X, Y, Z) \in \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \mapsto [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z] \in \mathfrak{m}$  yields a Lie triple algebra and the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  is isomorphic to its standard enveloping Lie algebra. If a Lie triple algebra is  $n$ -dimensional then the dimension of its standard enveloping Lie algebra is at most  $n + \frac{n(n-1)}{2}$ .

We want to classify all 3-dimensional connected left A-loops, which are given as differentiable sharply transitive sections  $\sigma$  in a non-solvable Lie group  $G$  such that  $\exp T_1\sigma(G/H) \subseteq \sigma(G/H)$ . For the classification we proceed in the following way:

- 1) We consider all non-solvable Lie groups  $G$  with  $4 \leq \dim G \leq 6$  and every subgroup  $H$  of  $G$  with  $\dim H = \dim G - 3$ .
- 2) We determine all complements  $\mathfrak{m}$  to  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$  with the properties  $\mathfrak{m}$  generates  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ , and  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ . Such a complement is called reductive.
- 3) We compute the exponential image of these complements  $\mathfrak{m}$ . Every  $\exp \mathfrak{m}$  is the image of a local section  $\sigma : G/H \rightarrow G$  and yields a local loop  $L$ .

To do it we have to determine the fundamental formula for the exponential function of the Lie algebras  $sl_2(\mathbb{R})$ ,  $sl_2(\mathbb{C})$ ,  $su_2(\mathbb{C})$ . The fundamental formula of  $\exp : sl_2(\mathbb{R}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$  is given in [13]. In 1.2 we generalize this result and we give the explicit form for the exponential function of  $sl_2(\mathbb{C})$  as well

as of  $su_2(\mathbb{C})$ . The fundamental formula of  $\exp : sl_2(\mathbb{C}) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$  is:

$$\exp X = C(k(X)) I + S(k(X)) X,$$

where  $k(X)$  denotes the complex Cartan-Killing form of the element  $X \in sl_2(\mathbb{C})$ ,  $C(z) = \cosh \sqrt{z}$ ,  $S(z) = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$  for all  $z \in \mathbb{C}$ .

4) Finally we investigate which of the local sections can be extended to a global one.

If  $\exp \mathfrak{m}$  is the image of a global section  $\sigma : G/H \rightarrow G$  then every element  $g \in G$  can be uniquely represented as a product  $g = mh$  with  $m \in \exp \mathfrak{m}$  and  $h \in H$  and  $\mathfrak{m}$  does not contain any element of  $Ad_g \mathfrak{h}$  for some  $g \in G$ .

In **1.3** we list all 4, 5 and 6-dimensional non-solvable Lie groups. Using topological and group theoretical tools we discuss which of these Lie groups can occur as the group  $G$  topologically generated by the left translations of a 3-dimensional almost differentiable left A-loop  $L$ . We give also the corresponding subgroup  $H$ , which can be chosen as the stabilizer of  $e \in L$  in  $G$ . Our results are summarized in Propositions 3. 4. 5. 6. and 7. of the dissertation.

An important result of this section is

**Corollary 1.** *There is no global left A-loop  $L$  homeomorphic to the compact space  $S^3$  or  $P^3$ .*

In the sections 2, 3, 4, 5 using our classification process we prove that there are only 5 classes of 3-dimensional connected almost differentiable global left A-loops with non-solvable left translation groups and we describe the differential geometric structures associated naturally with them.

## 2 Left A-loops as sections in semisimple Lie groups

In this section we classify all 3-dimensional connected strongly left alternative almost differentiable left A-loops having semisimple Lie groups as their left translation groups.

If  $G$  is a direct product of quasi-simple Lie groups according to Proposition 5 it is sufficient to consider the following two cases:

- 1)  $G \cong PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$  and  $H_1 = \{(x, x) \mid x \in PSL_2(\mathbb{R})\}$ .
- 2)  $G \cong PSL_2(\mathbb{R}) \times PSL_2(\mathbb{R})$  and  $H_2$  has the form

$$H_2 = \left\{ \left( \left( \begin{array}{cc} a & b_1 \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} a & b_2 \\ 0 & a^{-1} \end{array} \right) \right); a > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Now let  $G$  be locally isomorphic to the group  $PSL_2(\mathbb{C})$ . According to ([1], pp. 273-278) there are 4 conjugacy classes of the 3-dimensional subgroups of  $G = SL_2(\mathbb{C})$ , which we denote by  $W_r, U_0, U_1$  and  $SU_2(\mathbb{C})$ . We know from Proposition 4 that there is no 3-dimensional almost differentiable left A-loop  $L$  such that the group  $G$  topologically generated by the left translations of  $L$  is the group  $SL_2(\mathbb{C})$  and the stabilizer  $H$  of  $e \in L$  in  $G$  is one of the subgroups  $U_0, U_1, W_r$  or  $G$  is the group  $PSL_2(\mathbb{C})$  and  $H$  is  $U_0/\mathbb{Z}_2, U_1/\mathbb{Z}_2, W_r\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$ . Since  $SU_2(\mathbb{C})$  contains central elements  $\neq 1$  of  $SL_2(\mathbb{C})$  we have to discuss the following case

3)  $G$  is isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{C})$  and  $H$  is isomorphic to  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Now we deal with the case 1). Any reductive complement  $\mathfrak{m}$  to the Lie algebra  $\mathfrak{h}_1$  of  $H_1$  in  $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R}) \oplus sl_2(\mathbb{R})$  has the form

$$\mathfrak{m} = \{(X, \lambda X); X \in sl_2(\mathbb{R})\},$$

where  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ . We prove that the section  $\sigma : G/H \rightarrow G$  such that

$$\exp \mathfrak{m} = \{(\exp X, (\exp X)^\lambda); X \in sl_2(\mathbb{R})\}$$

is contained in  $\sigma(G/H)$  is not sharply transitive. Therefore there is no left A-loop corresponding to this section  $\sigma$ .

Considering the case 2) we verify that there is no reductive complement  $\mathfrak{m}$  to the Lie algebra  $\mathfrak{h}_2$  in  $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R}) \oplus sl_2(\mathbb{R})$ . This means there is no left A-loop belonging to the pair  $(G, H_2)$ .

In the third case the coset space  $G/H$  is a Riemannian manifold homeomorphic to  $\mathbb{R}^3$ . According to 1.2 let  $\{K, T, U, iK, iT, iU\}$  be a real basis of  $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{C})$ . The Lie algebra of the stabilizer  $H$  is  $\mathfrak{h} = \langle U, iT, iK \rangle$ , and for all  $a \in \mathbb{R}$  we obtain a 3-dimensional complement

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_a = \langle T + aiT, iU - aU, K + aiK \rangle,$$

with the properties  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$  and  $\mathfrak{m}$  generates  $\mathfrak{g}$ .

Our investigation shows that the loops  $L_a$  such that  $T_1 L_a = \mathfrak{m}_a$  are global left A-loops, and there is a strong connection between these global left A-loops  $L_a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  and the hyperbolic geometry. The group topologically generated by the left translations of every loop  $L_a$  is the connected component of the group of the hyperbolic motions. These loops are realized on the 3-dimensional hyperbolic space  $H_3$ , such that the elements of  $L_a$  are the points of  $H_3$ . Denote by  $\nabla_a$  the canonical connection of the reductive homogeneous space  $G/H$  belonging to the subspace  $\mathfrak{m}_a$ . The geodesics through  $e \in L_a$  with respect to  $\nabla_a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  are independent from the parameter  $a$  and there are unique geodesics joining  $e$  with any other points  $x \in L_a$ . Therefore the multiplication of  $L_a$  is given by

$$x * y = \exp_x \tau_{e,x} \exp_e^{-1}(y),$$

where  $\tau_{e,x}$  is the parallel translation, which depends from the parameter  $a$ . Main results of this section are summarized as follows:

**Theorem 9.** *There is a class  $\mathcal{C}$  of the 3-dimensional connected almost differentiable left A-loops  $L$  such that the group  $G$  generated by the left translations  $\{\lambda_x; x \in L\}$  is a semisimple Lie group. The group  $G$  is isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{C})$  and the stabilizer  $H$  of  $e \in L$  in  $G$  is isomorphic to  $SO_3(\mathbb{R})$ . Any loop in this class  $\mathcal{C}$  can be represented by a real parameter  $a$ . The loops  $L_a$  and  $L_{-a}$  form a full isomorphism class, which is even a full isotopism class too. In  $\mathcal{C}$  only the hyperbolic space loop  $L_0$  is a Bruck loop. This loop  $L_0$  is realized on the hyperbolic symmetric space by the multiplication  $x \cdot y = \tau_{e,x}(y)$ , where  $\tau_{e,x}$  is the hyperbolic translation moving  $e$  onto  $x$ . The tangent space  $T_1\Lambda$  of the set  $\Lambda$  of the left translations of the loop  $L_0$  at the identity  $1 \in G$  is the plane  $\mathfrak{m}_0$  through 0 in the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  of  $G$  such that  $\mathfrak{m}_0$  is orthogonal to the 3-dimensional Lie algebra  $\mathfrak{h}$  of  $H$  with respect to the Cartan-Killing form of  $\mathfrak{g}$ . Any loop  $L_a$  with  $a \geq 0$  is isomorphic to the geodesic loop of the reductive homogeneous space  $G/H$  with respect to the reductive complement  $\mathfrak{m}_a = T_1[\sigma_a(G/H)]$  and the corresponding canonical invariant connection  $\nabla_a$ .*

### 3 3-dimensional left A-loops corresponding to 4-dimensional non-solvable Lie groups

In this section we deal with 3-dimensional connected almost differentiable global left A-loops  $L$  having a 4-dimensional non-solvable Lie group  $G$  as the group topologically generated by their left translations.

According to Proposition 6 we have to investigate the cases

- (i)  $G$  is isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  and  $H = \{(x, \varphi(x))\}$ , where  $\varphi$  is a monomorphism from the 1-dimensional subgroup  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$  or from  $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, a > 0 \right\}$  of  $PSL_2(\mathbb{R})$  onto  $\mathbb{R}$ .
- (ii)  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  such that  $H = \{(x, \varphi(x))\}$ , where  $\varphi$  is a monomorphism from a maximal compact subgroup of  $PSL_2(\mathbb{R})$  onto  $SO_2(\mathbb{R})$ .

We prove that the Lie algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ , where  $\mathfrak{a}$  is isomorphic to  $sl_2(\mathbb{R})$  and  $\mathfrak{b}$  is the 1-dimensional Lie algebra, is reductive with a subalgebra  $\mathfrak{h}$  not contained in  $\mathfrak{a}$  and a 3-dimensional complementary subspace  $\mathfrak{m}$  generating  $\mathfrak{g}$  if one of the following cases occurs:

- (i)  $\mathfrak{h} = \langle (K, e_4) \rangle$  and  $\mathfrak{m}_a = \langle (U, 0), (T, 0), (aK, (1+a)e_4) \rangle$ , where  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$   
(ii)  $\mathfrak{h} = \langle (U + T, 2e_4) \rangle$  and  $\mathfrak{m}_b = \langle (U + T, 0), (K, 0), (U, 2be_4) \rangle$ , where  
 $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
(iii)  $\mathfrak{h} = \langle (U, e_4) \rangle$  and  $\mathfrak{m}_c = \langle (K, 0), (T, 0), (cU, (1+c)e_4) \rangle$ , where  
 $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Here is  $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  is a real basis of  $sl_2(\mathbb{R})$  and  $e_4$  is the basis element of  $\mathfrak{b}$ .

We verify that in the case (i), moreover for all  $b > 0$  in the case (ii) and for all  $c < -1$  in the case (iii) the subspaces  $\mathfrak{m}$  contain elements, which are conjugate to elements of the corresponding Lie algebra  $\mathfrak{h}$ . Our computation shows that for all  $b < 0$  the element  $g = (\pm I, 6\pi b)$  of  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  can be represented in two different way as the product  $g = mh$  with  $m \in \exp \mathfrak{m}_b$  and  $h \in H$ , and for all  $c > -1$ ,  $c \neq 0$  the element  $g = \left( \pm I, \begin{pmatrix} \cos \frac{k}{c} & \sin \frac{k}{c} \\ -\sin \frac{k}{c} & \cos \frac{k}{c} \end{pmatrix} \right)$  of  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$ , where  $k \in \mathbb{Z}$  such

that  $k > \sqrt{4\pi^2(1+c)^2}$  can be written in two different way as the product  $g = m h$  with  $m \in \exp \mathfrak{m}_c$  and  $h \in H$ .

Only for the parameter  $c = 0$  we obtain a global left A-loop  $L_0$  which is also a global Bol loop. This loop  $L_0$  is the unique Scheerer extension of the Lie group  $SO_2(\mathbb{R})$  by the hyperbolic plane loop (cf. [29], Section 2).

Summarizing our discussion we have:

**Theorem 10.** *There are precisely three isotopism classes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  of connected almost differentiable left A-loops with dimension 3 such that the group  $G$  topologically generated by their left translations is a 4-dimensional non-solvable Lie group.*

*Every loop in the class  $\mathcal{C}_1$ , respectively  $\mathcal{C}_2$  is the direct product of a 2-dimensional loop isomorphic to the hyperbolic plane loop with the Lie group  $\mathbb{R}$ , respectively  $SO_2(\mathbb{R})$ . These loops are differentiable Bruck loops. In the first class the group  $G$  is isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ , in the second class the group  $G$  is isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  and in both classes the stabilizer of the identity of these loops is isomorphic to  $SO_2(\mathbb{R})$ .*

*In the class  $\mathcal{C}_3$  is contained up to isomorphisms only the Scheerer extension  $L$  of the Lie group  $SO_2(\mathbb{R})$  by the hyperbolic plane loop. The group  $G$  topologically generated by the left translations of  $L$  is the direct product  $PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2(\mathbb{R})$  and the stabilizer  $H$  of  $e \in L$  in  $G$  is the group  $H = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in SO_2(\mathbb{R})\}$ , where  $\varphi$  is a monomorphism from a compact subgroup of  $PSL_2(\mathbb{R})$  onto  $SO_2(\mathbb{R})$ .*

## 4 3-dimensional left A-loops belonging to 5-dimensional non-solvable Lie groups

In this section we determine the 3-dimensional connected almost differentiable global left A-loops having a 5-dimensional non-solvable Lie group  $G$  as the group topologically generated by the left translations of  $L$ .

According to Propositions 6 and 7 we have to investigate the following cases:

1)  $G$  is locally isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  and  $H$  is locally isomorphic to

$$\left\{ \left( \left( \begin{pmatrix} e^a & b \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}, a \right), a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

2)  $G \cong PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_2$  and

$$\text{a) } H \cong \left\{ \left( \left( \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right), a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{b) } H \cong \left\{ \left( \left( \begin{pmatrix} e^z & b \\ 0 & e^{-z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), z, b \in \mathbb{R} \right\}$$

c)  $H \cong \{(\varphi(x), x) | x \in \mathcal{L}_2\}$ , where  $\varphi$  is a monomorphism from  $\mathcal{L}_2$  onto a 2-dimensional subgroup of  $PSL_2(\mathbb{R})$ ,

3)  $G$  is locally isomorphic to the semidirect product  $PSL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ , which is the connected component of the group for area preserving affinities of  $\mathbb{R}^2$ .

In the cases 1, 2 we prove that there is no proper subspaces  $\mathfrak{m}$  such that  $\mathfrak{m}$  generates the Lie algebra  $\mathfrak{g}$  and for  $\mathfrak{m}$  the relations  $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ , and  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$  holds.

In the third case we show that there are 3 conjugacy classes of 2-dimensional subgroups  $H$  of  $G$  containing no non-trivial normal subgroup of  $G$ . Moreover, we prove that only in the case

$$H = \left\{ \left( \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, u \in \mathbb{R} \right\}$$

exists a unique reductive complement  $\mathfrak{m}$  to the Lie algebra  $\mathfrak{h}$  of  $H$  in  $\mathfrak{g}$ . Since this 2-dimensional connected subgroup  $H$  contains a 1-dimensional translation group and  $\mathfrak{m}$  contains elements corresponding to translations the submanifold  $\exp \mathfrak{m}$  contains elements conjugate to elements of  $H$ .

This consideration yields the following

**Theorem 11.** *There is no 3-dimensional connected almost differentiable global left A-loop  $L$  having a 5-dimensional non-solvable Lie group as the group topologically generated by its left translations.*

## 5 3-dimensional left A-loops with 6-dimensional non-solvable Lie groups

This section is devoted to study of the non-solvable and non-semisimple Lie groups with dimensional 6 and to seek for all 3-dimensional connected almost differentiable left A-loops such that the group topologically generated by their left translations is one of these Lie groups.

According to the Propositions 6 and 7 we have to discuss the cases 2 A, 2 B, 2 C, 2 D, 2 F in the Proposition 7 and the cases that

- $\alpha$ )  $G$  is locally isomorphic to  $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ ,
- $\beta$ )  $G$  is the group  $PGL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ , which is the group for orientation preserving affinities of  $\mathbb{R}^2$ ,
- $\gamma$ )  $G$  is locally isomorphic to  $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ , which is the connected component of the euclidean motion group of  $\mathbb{R}^3$ .

We consider the Lie algebras  $\mathfrak{g}$  of  $G$  and the corresponding Lie algebras  $\mathfrak{h}$  of  $H$  in the cases 2A, 2B, 2C, 2D and 2F. We verify that there are no reductive complements  $\mathfrak{m}$  to  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$  in these cases. Hence there is no 3-dimensional almost differentiable left A-loop such that the group topologically generated by its left translations is the direct product  $G = G_1 \times G_2$ , where  $G_1 = PSL_2(\mathbb{R})$  and  $G_2$  is one of the 3-dimensional solvable non-abelian Lie groups.

Now we deal with the case that  $G = PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ . We verify that there are 6 conjugacy classes of 3-dimensional subgroups  $H$  of  $G$  containing no normal non-trivial subgroup of  $G$ . We prove that only in the case

$$H = \left\{ \left( \pm \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right); t \in [0, 2\pi), x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

we obtain global almost differentiable left A-loops.

For all  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  we obtain a reductive complement  $\mathfrak{m}$  to  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$  which has the following shape

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{b_1, b_2} = \langle e_1, e_2 + b_1 e_6 + b_2 e_5, e_3 - b_2 e_6 + b_1 e_5 \rangle,$$

where  $\{e_i, i = 1, \dots, 6\}$  is a real basis of the Lie algebra  $\mathfrak{g} = sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ . We prove that the loops  $L_{b_1, b_2}$  corresponding to the complements  $\mathfrak{m}_{b_1, b_2}$  form two isomorphism classes which are also the isotopism classes of these loops. Since the loop  $\hat{L}_0$  belonging to the complement  $\mathfrak{m}_{0,0}$  can be chosen as a representative of the one isomorphism class and the loop  $\hat{L}_1$  belonging to the complement  $\mathfrak{m}_{0,1}$  as a representative of the other isomorphism class we

compute the exponential image of the subspaces  $\mathfrak{m}_{0,0}$  and  $\mathfrak{m}_{0,1}$ . We show that each element  $g \in G$  can be uniquely represented as a product  $g = mh$  with  $m \in \exp \mathfrak{m}_{0,0}$  respectively  $m \in \exp \mathfrak{m}_{0,1}$  and  $h \in H$  and the submanifolds  $\exp \mathfrak{m}_{0,0}$  and  $\exp \mathfrak{m}_{0,1}$  operate sharply transitively on  $G/H$ . Therefore we see that  $\exp \mathfrak{m}_{0,0}$  and  $\exp \mathfrak{m}_{0,1}$  are images of global sharply transitive sections  $\sigma_0$  and  $\sigma_1$  such that  $\sigma_0(G/H) = \exp \mathfrak{m}_{0,0}$  and  $\sigma_1(G/H) = \exp \mathfrak{m}_{0,1}$ . Hence the loops  $\hat{L}_0$  and  $\hat{L}_1$  are 3-dimensional global almost differentiable left A-loops.

In the case  $\beta$ ) we can identify the group  $G$  as the group of matrices

$$\left\{ g(u, v, a, b, c, d) = \begin{pmatrix} 1 & u & v \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}; u, v, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0 \right\}.$$

First we determine the conjugacy classes of the 3-dimensional subgroups  $H$  of  $G$ , such that  $H$  does not contain any non-trivial normal subgroup of  $G$ . We prove that there are precisely 6 conjugacy classes with the above conditions. Looking for reductive subspaces in these cases we obtain that only in the case

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, a > 0, c > 0, u \in \mathbb{R} \right\}$$

there is a unique proper subspace such that  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ . But this complement contains an element which is conjugate to an element of  $\mathfrak{h}$ . Therefore there is no 3-dimensional almost differentiable left A-loop corresponding to the group  $PGL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ .

Now we consider the case that  $G$  is locally isomorphic to  $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ . Since there exist precisely two conjugacy classes of the 3-dimensional subgroups  $H$  of  $G$  containing no non-trivial normal subgroup of  $G$  according to Proposition 4 c) in section 1 we have to discuss only the case that

$$H = \{(a, 0), a \in SO_3(\mathbb{R})\}.$$

In this case we verify that there is precisely one class of the reductive complements  $\mathfrak{m}$  to  $\mathfrak{h}$  in  $\mathfrak{g}$ , which depends on a parameter  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Moreover we prove that every loop  $L_a$  belonging to the complement  $\mathfrak{m}_a$  is isomorphic to the loop  $L_1$  corresponding to the complement  $\mathfrak{m}_1$ . Since we find elements of the Lie group  $G$ , which cannot be uniquely represented as a product of  $m \in \exp \mathfrak{m}_1$  and  $h \in H$ , the loop  $L_1$  is not global 3-dimensional left A-loop. Hence there is no global 3-dimensional left A-loop as section in the group  $SO_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$ .

The main results we formulate in the following theorem:

**Theorem 12.** *There is only one class  $\mathcal{C}$  of the 3-dimensional connected almost differentiable left A-loops  $L$  such that the group  $G$  topologically generated by the left translations  $\{\lambda_x; x \in L\}$  is a 6-dimensional non-semisimple and non-solvable Lie group. The group  $G$  is isomorphic to the semidirect product  $PSL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ , where the action of  $PSL_2(\mathbb{R})$  on  $\mathbb{R}^3$  is the adjoint action of  $PSL_2(\mathbb{R})$  on its Lie algebra, and the stabilizer of the identity of the loops in  $\mathcal{C}$  is the 3-dimensional subgroup of  $G$*

$$\left\{ \left( \pm \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x & y \\ y & x \end{pmatrix} \right); t \in [0, 2\pi), x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

*Any loop in the class  $\mathcal{C}$  can be characterized by two real parameters  $a, b$  and form precisely two isomorphism classes which are the isotopism classes too. In the one isomorphism class are the Bruck loops  $L_{b_1,0}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$  and the pseudo-euclidean space loop  $L_{0,0} = \hat{L}_0$  may be chosen as a representative of this isomorphism class. The other isomorphism class consists of left A-loops  $L_{b_1,b_2}$  with  $b_2 \neq 0$  has as a representative the loop  $L_{0,1} = \hat{L}_1$ . The loops  $\hat{L}_0$  and  $\hat{L}_1$  are realized on the pseudo-euclidean affine space  $E(2,1)$  such that the group topologically generated by their left translations is the connected component of the group of pseudo-euclidean motions. The elements of these loops are the planes on which the euclidean metric is induced, but the sets of left translations differ. Both loops are isomorphic to the geodesic loops of the pseudo-euclidean space  $G/H = E(2,1)$  with respect to the reductive complements  $\mathfrak{m}_{0,i} = T_1[\hat{\sigma}_i(G/H)]$  and the corresponding canonical invariant connection  $\nabla_i$  for  $i = 0, 1$ .*

## References

- [1] T. Asoh, *On smooth  $SL(2, C)$  actions on 3-manifolds*, Osaka J. Math. **24** (1987), 271-298.
- [2] V. D. Belousov, *Foundations of the Theory of Quasigroups and Loops*, (Russian), Izdat. Nauka, Moscow, 1976.
- [3] W. Benz, *Geometrische transformationen unter besonderer Berücksichtigung der Lorenztransformationen*, BI Wissenschaftsverlag Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 1992.
- [4] R. H. Bruck and Lowell J. Paige, *Loops whose inner mappings are automorphisms*, Annals of Math. **63**, Nr 2. (1956), 308-323.
- [5] W. Fenchel, *Elementary geometry in hyperbolic space*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1989.
- [6] Á. Figula, *Geodesic loops*, Journal of Lie Theory, **10** (2000), 455-461.
- [7] Á. Figula, *3-dimensional Bol loops as sections in non-solvable Lie groups*, accepted for publication in Forum Math.
- [8] Á. Figula, *3-dimensional loops on non-solvable reductive spaces*, accepted for publication in Advances in Geometry.
- [9] H. Freudenthal and H. de Vries, *Linear Lie Groups*, Academic Press, New York 1970.
- [10] O. Giering, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Friedr. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1982.
- [11] M. Hausner and J.T. Schwarz, *Lie Groups Lie Algebras*, Notes on Mathematics and Its Applications, Gordon and Breach Science Publishers, New York 1968.
- [12] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York 1962.
- [13] J. Hilgert and K. H. Hofmann, *Old and new on  $SL(2)$* , Manusc. Math. **54** (1985), 17-52.
- [14] J. Hilgert and K. H. Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-algebren*, Friedr. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1991.

- [15] K. Iwasawa, *On some types of topological groups*, Ann. Math. **50** (1949), 507-558.
- [16] N. Jacobson, *Lie algebras*, Wiley Interscience Publishers, New York 1962.
- [17] F.S. Kerdman, *Moufang loops in the large* (Russian). Algebra i Logika **18** (1979), 523-555.
- [18] H. Kiechle, *Theory of K-Loops*, Lecture Notes in Mathematics. 1778. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [19] M. Kikkawa, *Geometry of homogeneous Lie loops*, Hiroshima Math. J. **5** (1975) no. 2, 141-179.
- [20] M. Kikkawa, *On locally reductive spaces and tangent algebras*, Mem. Fac. Lit. Sci. Shiname Univ. Nat. Sci. **5** (1972), 1-13.
- [21] M. Kikkawa, *Geometry of homogeneous left Lie loops and tangent Lie triple algebras*, Mem. Fac. Sci. Engr. Shiname Univ. **32**, (1999), 57-68.
- [22] F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Verlag von Julius Springer, 1928.
- [23] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol I and Vol II, Wiley Interscience Publishers, New York, London, Sydney 1963, 1969.
- [24] E.N. Kuz'min, *The connection between Malcev algebras and analytic Moufang loops* (Russian). Algebra i Logika **10** (1971), no.1, 3-22.
- [25] O. Loos, *Symmetric Spaces*, Vol I and Vol II. Benjamin, New York 1969, 1970.
- [26] P. O. Mikheev and L. V. Sabinin, *Quasigroups and Differential Geometry*, Chapter XII in *Quasigroups and Loops: Theory and Applications* (O. Chein, H.O. Pflugfelder and J.D.H. Smith), Sigma Series in Pure Math. 8, Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, 357-430.
- [27] D. Montgomery and L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, Wiley Interscience Publishers, New York 1955
- [28] P.T. Nagy, *Extension of local loop isomorphism*, Monatsh. Math. **112** (1991), 221-225.

- [29] P.T. Nagy and K. Strambach, *Loops in groups theory and Lie theory*, de Gruyter Expositions in Mathematics. 35. Berlin, New York, 2002.
- [30] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33-65.
- [31] L.V. Sabinin, *Smooth quasigroups and loops*, Math. Appl. 492, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.
- [32] H. Salzmann, *Zur Klassifikation topologischer Ebenen*, III. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. **28** (1965), 250-261.
- [33] H. Salzmann, *Kompakte Ebenen mit einfacher Kollineationsgruppe*, Arch. Math. **13**, (1962), 98-109.
- [34] H. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, and M. Stroppel, *Compact projective planes*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1995.
- [35] J. Tits, *Liesche Gruppen und Algebren*, Hochschultext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983.
- [36] K. Yamaguti, *On the Lie triple systems and its generalization*, J. Sci. Hiroshima Univ. A, **21** (1958), 155-160.
- [37] J.A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, McGraw-Hill, New York 1967.

## List of papers of the author

Á. Figula, *Geodesic loops*, Journal of Lie Theory, **10** (2000), 455-461.

Á. Figula, *3-dimensional Bol loops corresponding to non-solvable Lie groups*, Ph.D. thesis, University of Erlangen-Nürnberg, (2003), 1-62.

Á. Figula, *3-dimensional Bol loops as sections in non-solvable Lie groups*, accepted for publication in Forum Math.

Á. Figula, *3-dimensional loops on non-solvable reductive spaces*, accepted for publication in Advances in Geometry.

Á. Figula and K. Strambach, *Affine extensions of loops*, submitted for publication in Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.

## List of conference talks of the author

1. Á. Figula, *3-dimensionale links A-Loops*, Seminar of Sophus Lie, Greifswald, 2001. június 15-16.

2. Á. Figula, *Dreidimensionale links A-Loops, deren Linkstranslationen eine halbeinfache Liegruppe erzeugen*, Gruppen und topologischen Gruppen, Wien, 2001. szeptember 20-22.

3. Á. Figula, *3-dimensionale Bol Loops*, 29. Arbeitstagung über Algebra und Geometrie, Berlin, 2002. február 17-22.

4. Á. Figula, *3-dimenziós Bol loopok osztályozása*, Debrecen-Szeged Geometriai Hétvége, Szeged, 2002. március 22-24.

5. Á. Figula, *Geodesic Bol loops on non-euclidean spaces*, Janos Bolyai Conference on Hyperbolic Geometry, Budapest, 2002. július 8-12.