

DEBRECENI EGYETEM  
MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET

# Lineáris algebra

---

Gaál István  
és  
Kozma László

Utánnymás



Debrecen, 2000

## Tartalomjegyzék

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Szabadvektorok és analitikus geometria</b>                   | <b>5</b>  |
| 1.1. A szabadvektor fogalma . . . . .                              | 5         |
| 1.2. A szabadvektorok összeadása és skalárral szorzása . . . . .   | 5         |
| 1.3. Lineáris függőség a szabadvektorok körében . . . . .          | 7         |
| 1.4. Szabadvektorok skaláris szorzata . . . . .                    | 10        |
| 1.5. Szabadvektorok vektoriális szorzata . . . . .                 | 11        |
| 1.6. Szabadvektorok vegyes szorzata . . . . .                      | 15        |
| 1.7. Egyenesek és síkok egyenletei . . . . .                       | 16        |
| <b>2. Determinánsok</b>                                            | <b>21</b> |
| 2.1. A determináns értelmezése . . . . .                           | 21        |
| 2.2. A determináns elemi tulajdonságai . . . . .                   | 23        |
| 2.3. A determináns kifejtése . . . . .                             | 27        |
| 2.4. Eliminációs módszer determinánsok kiszámítására . . . . .     | 31        |
| 2.5. Laplace-féle kifejtési tétel . . . . .                        | 32        |
| <b>3. Mátrixok</b>                                                 | <b>35</b> |
| 3.1. Alapműveletek mátrixokkal . . . . .                           | 35        |
| 3.2. Mátrixok inverze . . . . .                                    | 38        |
| 3.3. Inverz mátrix kiszámítása eliminációs módszerrel . . . . .    | 39        |
| 3.4. Mátrixműveletek néhány további tulajdonsága . . . . .         | 40        |
| <b>4. Vektorterek</b>                                              | <b>43</b> |
| 4.1. Vektortér fogalma . . . . .                                   | 43        |
| 4.2. Alterek . . . . .                                             | 44        |
| 4.3. Lineáris függőség, függetlenség, bázis, dimenzió . . . . .    | 47        |
| 4.4. Vektorterek lineáris leképezései . . . . .                    | 50        |
| 4.5. Bázis és koordináta transzformáció . . . . .                  | 52        |
| 4.6. Vektorrendszer rangja, mátrix rangja . . . . .                | 53        |
| 4.7. Mátrix rangjának kiszámítása eliminációs módszerrel . . . . . | 55        |
| 4.8. Alterek összege és direkt összege . . . . .                   | 56        |
| 4.9. Vektorterek faktorterei . . . . .                             | 57        |
| <b>5. Lineáris egyenletrendszerek</b>                              | <b>61</b> |
| 5.1. Általános tulajdonságok . . . . .                             | 61        |
| 5.2. Gauss-féle eliminációs módszer . . . . .                      | 65        |
| <b>6. Lineáris leképezések és transzformációk</b>                  | <b>69</b> |
| 6.1. Vektorterek lineáris leképezései . . . . .                    | 69        |
| 6.2. Lineáris transzformációk . . . . .                            | 70        |
| 6.3. Hasonló mátrixok . . . . .                                    | 75        |
| 6.4. Automorfizmusok . . . . .                                     | 76        |
| 6.5. Lineáris transzformáció invariáns alterei . . . . .           | 77        |

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| <b>7. Lineáris transzformációk spektrálmélete</b>            | <b>79</b>  |
| 7.1. Sajátérték, sajátvektor . . . . .                       | 79         |
| 7.2. Karakterisztikus polinom . . . . .                      | 81         |
| 7.3. Lineáris transzformációk spektruma . . . . .            | 83         |
| 7.4. Nilpotens operátorok . . . . .                          | 85         |
| 7.5. Jordán-féle normálforma . . . . .                       | 88         |
| <b>8. Véges dimenziós terek formái</b>                       | <b>91</b>  |
| 8.1. Lineáris formák . . . . .                               | 91         |
| 8.2. Bilineáris formák . . . . .                             | 93         |
| 8.3. Kanonikus alak . . . . .                                | 96         |
| <b>9. Euklideszi és unitér terek</b>                         | <b>103</b> |
| 9.1. Az euklideszi tér fogalma . . . . .                     | 103        |
| 9.2. Ortogonalitás . . . . .                                 | 105        |
| 9.3. Unitér terek . . . . .                                  | 110        |
| <b>10. Transzformációk belső szorzatos tereken</b>           | <b>115</b> |
| 10.1. Formák előállítása belső szorzattal . . . . .          | 115        |
| 10.2. Transzformációk adjungálása . . . . .                  | 116        |
| 10.3. Önadjungált transzformációk . . . . .                  | 119        |
| 10.4. Ortogonális és unitér transzformációk . . . . .        | 122        |
| 10.5. Euklideszi terek ortogonális transzformációi . . . . . | 125        |
| 10.6. Unitér terek normális transzformációi . . . . .        | 127        |
| 10.7. Transzformációk polárfelbontása . . . . .              | 128        |
| <b>11. Másodrendű görbék és felületek</b>                    | <b>131</b> |
| 11.1. Másodrendű görbék a valós síkon . . . . .              | 131        |
| 11.2. Valós másodrendű hiperfelületek . . . . .              | 136        |
| <b>12. Függelék</b>                                          | <b>141</b> |
| 12.1. Algebrai alapfogalmak . . . . .                        | 141        |
| 12.2. Alapvető tudnivalók permutációkról . . . . .           | 144        |
| 12.3. MAPLE: lineáris algebrai programcsomag . . . . .       | 147        |
| 12.3.1 A Maple általános használata . . . . .                | 147        |
| 12.3.2 Alapvető utasításelemek . . . . .                     | 150        |
| 12.3.3 Lineáris algebra programcsomag . . . . .              | 151        |