DE TTK

1949

Függvényegyenletek és csoporthatások; szubkvadratikus függvények

egyetemi doktori (PhD) értekezés

Kézi Csaba Gábor

Témavezetők: Dr. Bessenyei Mihály és Dr. Gilányi Attila

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI DOKTORI TANÁCS
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

Debrecen, 2014.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2014.

. . . .
Kézi Csaba Gábor
jelölt

Tanúsítjuk, hogy Kézi Csaba Gábor doktorjelölt 2008-2011 között a fent megnevezett doktori program keretében irányításunkkal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasoljuk.

Debrecen, 2014.

. . . .
Dr. Bessenyei Mihály
témavezető

. . . .
Dr. Gilányi Attila
témavezető

Függvényegyenletek és csoporthatások; szubkvadratikus függvények

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Kézi Csaba Gábor okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és
-egyenlőtlenségek doktori programja keretében

Témavezetők: Dr. Bessenyei Mihály és Dr. Gilányi Attila

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 201… .... …

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 201… .... …

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőimnek, Dr. Bessenyei Mihálynak és Dr. Gilányi Attilának, akik időt és fáradságot nem kímélve segítették munkámat.

Ugyancsak köszönettel tartozom az Analízis Tanszék minden oktatójának, különös tekintettel a Doktori Iskola vezetőjének, Dr. Páles Zsoltnak.

Köszönettel tartozom általános és középsikolai matematika tanáraimnak, Veressné Szentléleky Klára tanárnőnek és Szabóné Gólya Irén tanárnőnek, akik kiváló didaktikai készséggel rendelkezve szerettették meg velem a matematikát.

Végül, de nem utolsó sorban köszönettel tartozom családomnak, akik végig támogattak és olyan nyugodt hátteret biztosítottak számomra, hogy minden erőmmel a dolgozat elkészítésére tudjak koncentrálni.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Jelen doktori értekezés öt fejezetből áll. Az első négy fejezet a *függvényegyenletek és csoporthatások* témakört dolgozza fel, az utolsó fejezet *szubkvadratikus függvényekkel* foglalkozik.

A függvényegyenletek kulcsfontosságú szerepet töltenek be a matematika különböző ágaiban, mint például a matematikai analízisben, a geometriában, az információelméletben. Ezen túlmenően a matematikán kívül más tudományterületeken (a fizikában, biológiában, közgazdaságtanban, pszichológiában, szociológiában) is számos probléma megoldásánál találkozhatunk függvényegyenletekkel.

A függvényegyenletek elméletének első rendszerezése, összefoglalása Aczél János [13] könyvében található. Ez a könyv a 60-as évekig elért legfontosabb eredményeknek egy átfogó ismertetését adja. Különböző függvényegyenletek megoldási módszereivel azóta is sokan foglalkoztak és foglalkoznak. A függvényegyenletek alkalmazásait tárgyaló könyvek közül kiemelkedő fontosságúak a [28] és a [31] alkotások. Előbbi a műszaki, utóbbi a közgazdaságtani alkalmazásokra helyezi a hangsúlyt. A függvényegyenletek iránt érdeklődők számos, az adott témában megjelent könyvet tanulmányozhatnak. A teljesség igény nélkül utalunk a [39], [40], [41] művekre.

A függvényegyenletek az utóbbi időben helyet kaptak a közép-, sőt általános iskolai versenyeken is, amint ezt a Középiskolai Matematikai Lapok (KÖMAL), a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, a PUTNAM amerikai matematika verseny, az Országos Középiskolai Tanulmányiverseny (OKTV) feladatai mutatják. Sőt, szakköri feldolgozásra szánt kiadványok részben vagy teljes egészében e területekhez kapcsolódó módszerek bemutatását tűzik ki célul. Ilyen például Small híres könyve [51], Brodskii és Slipenko népszerű kiadványa [27], vagy Lajkó egyetemi jegyzete [42].

A versenyfeladatok szintjén megjelenő egyenletek egyik jellegzetes típusa egyetlen ismeretlen függvényt tartalmaz, amely többféle argumentummal szerepel. A megoldás alapgondolata az argumentumok újrahelyettesítése, amivel az egyenletből olyan egyenletrendszer kapható, amely elemi eszközökkel megoldható. Érdemes megemlíteni, hogy hasonló típusú egyenletekkel – bár más összefüggésben – Babbage úttörő dolgozatai [15], [16], [17], [18], [19] szintén foglalkoznak.

Jelen értekezés első részének motivációját pontosan az említett versenyfeladatok, valamint Babbage idevágó munkássága adja. Vizsgálatunk középpontjában az

$$F \circ \big(f \circ g_1, \ldots, f \circ g_r, \mathrm{id}\big) = 0 \tag{1}$$

egyenlet áll, ahol $F\colon \mathbb{R}^{r+1} \to \mathbb{R}$, valamint $g_1, \ldots, g_r\colon H \to H$ adott függvények és $H \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz. Természetesen ilyen általánosságban nincs remény az ismeretlen f függvény meghatározására, vagy akár csak létezésének/egyértelműségének igazolására. Ezért minden esetben feltesszük, hogy $g_1, \ldots, g_r$ csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve. Ekkor az (1) egyenletet a g_k elemekkel komponálva, r darab (nemlineáris) egyenlet nyerhető, melyben r darab ismeretlen, nevezetesen az $f \circ g_k$ függvények szerepelnek. Ilyen feltételek mellett az első vizsgálatok Presić nevéhez kötődnek [45], [46]. Az értekezés első fejezetében az így kapott egyenletrendszer megoldhatóságát vizsgáljuk, (lokális) egzisztencia és unicitási tételeket adva ezen keresztül az (1) egyenlet megoldására is.

A helyettesítő függvényekre szabott feltétel sejteti, hogy a vizsgálatokban szerepet kap a csoportelmélet. Kiderül az is, hogy sokkal mélyebb szinten, mint ahogyan azt az imént ismertetett elemi módszer alapján várnánk. Mivel ezek a gondolatok minden, az (1) egyenlet vizsgálatához kötődő alfejezetben megjelennek, ezért az értekezés rövid csoportelméleti összefoglalással indul. Ebben a fejezetben függvénycsoportokkal kapcsolatos, későbbiekben felhasznált eredmények szintén helyet kaptak.

A disszertáció második fejezetében feltesszük, hogy az (1) egyenletben szereplő F függvény lineáris az első r változójában és az ismertnek feltételezett együtthatók adott függvények. Ebben az esetben a helyettesítések után lineáris egyenletrendszer adódik, amely a Cramer-szabály segítségével megoldható. Az ismeretlen f függvényre a – nem-elfajuló esetben – globális egzisztencia és unicitási tételt, sőt reprezentációt kapunk. Felmerül azonban a „kompatibilitás" kérdése. Valójában ugyanis az $f_k = f \circ g_k$ függvényekre kapunk megoldást, amelyekre a csoport elemeinek hatása további kényszert jelent. Ha például g_1 a csoport neutrális eleme az (1) egyenletben, f_1 pedig az $f \circ g_1$-re kapott megoldás, akkor $f_k = f_1 \circ g_k$ kell, hogy teljesüljön. Emiatt a lineáris algebra módszerei mellett az absztrakt csoportelmélet elemi módszerei is szükségesek. A kompatibilitást a megoldásra kapott reprezentáció és a determinánsok permutációtulajdonságai biztosítják. A fejezetben közölt eredmények a [26] dolgozatban jelentek meg, stabilitási résszel kiegészítve Bessenyei [23] vizsgálatait.

A harmadik fejezetben az (1) egyenlet $F = G - h$ alakban adott, ahol $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ismert függvények. Ekkor a megoldási módszert az inverzfüggvény-tétel jelenti. Azonban ezen tétel alkalmazásához szükséges megadni egy pontot és annak képét, ami esetünkben azt jelenti, hogy elő kell írni alkalmas $f \circ g_k(\xi) = \eta_k$ feltételeket. Ezen feltételek megadása viszont nem történhet akárhogyan: előfordulhat ugyanis, hogy a $g_k(\xi)$ értékek bizonyos k indexek esetén megegyeznek, így az ezekhez tartozó η_k értékek sem különbözhetnek. Szükséges tehát a $\{g_1 \ldots, g_r\}$ függvénycsoport „finom struktúráját" felderíteni, amihez a kulcsot az absztrakt algebra egyik közismert eredménye, az orbit-stabilizátor tétel jelenti. A kompatibilitási feltétel teljesülése szintén ezen tétel, és egyszerű algebrai módszerek következménye. A fejezet teljes egészében a [26] cikkre támaszkodik.

A negyedik fejezet általános alakjában vizsgálja az (1) egyenletet. A legfontosabb eszközt most az implicitfüggvény-tétel jelenti. A korábban említett módszerek közül helyettesítést és a kezdetiérték feltételek kijelölését ugyanúgy és ugyanolyan célból továbbra is megtartjuk. Az újdonságot és egyben a nehézséget a kompatibilitás ellenőrzése jelenti a megoldás reprezentációjának teljes hiánya miatt. Az áthidaló megoldást a differenciálegyenletek elméletéből ismert globális egzisztencia és unicitási tétel jelenti. Kiderül ugyanis, hogy a helyettesítésekkel kapott és a kompatibilitásra felírt egyenletrendszerből ugyanaz a Cauchy-feladat származtatható. A fejezet fő tétele és annak alkalmazásai a [25] dolgozatban kaptak helyet.

A harmadik és negyedik fejezet fő eredményei, az alkalmazott technikák sajátosságait tükrözve, csupán lokális egzisztencia és unicitási eredmények. A harmadik fejezetben vizsgált egyenlet speciálisabb ugyan a következő fejezetben vizsgáltnál, azonban kevesebb regularitást elegendő megkövetelni.

A disszertáció ötödik fejezetének fő eredménye a szakirodalomban vizsgált kétféle szubkvadratikus függvényfogalom összehasonlítása. Az egyik definíció a konkáv függvények azon geometriai jelentésének egy módosítása, miszerint minden differenciálható konkáv függvény érintője a függvénygörbe fölött halad. Pontosabban, azt mondjuk, hogy az $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ függvény *erősen szubkvadratikus*, ha minden $x \geq 0$ esetén létezik olyan $c_x \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y-x) + f(|y-x|) \qquad (y \geq 0). \tag{2}$$

A másik fogalom a normanégyzet egyenlet „egyenlőtlenség” változata. Ennek megfelelően azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *gyengén szubkvadratikus*, ha teljesül az

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

egyenlőtlenség. A fejezetben áttekintjük a szubkvadratikus függvények ismert, főbb tulajdonságait, majd a [35] cikkünkre támaszkodva az említett két fogalom közötti kapcsolatot tisztázzuk. Bár látszólag igen távolálló definíciókról van szó, mégis megmutatható, hogy van közöttük összefüggés, mely indokolni fogja az általunk bevezetett „erős”, illetve „gyenge” elnevezéseket is. Látható azonban, hogy a vizsgált függvények értelmezési tartománya nem egyezik meg, így természetes módon adódik, hogy tekintsük az erősen szubkvadratikus függvények kiterjesztését, és vizsgáljuk az így adódó függvények gyengén szubkvadratikus függvényekkel való kapcsolatát is. Ebben a szakaszban bevezetünk és megvizsgálunk egy harmadik egyenlőtlenséget, mely az előzőekhez szorosan kapcsolódik. Az ismertetett eredményeket a [35] cikkben publikáltuk. Velünk párhuzamosan S. Abramovich és K. Troczka-Pawelec is végzett hasonló vizsgálatokat.

Mindketten megmutatták, hogy ha egy függvény erősen szubkvadratikus, akkor gyengén szubkvadratikus is, azonban az állítás megfordítás nem igaz. Ezen eredményeket a [3] és a [52] cikkekben közölték. A [3] dolgozatban megjelenik ugyan az erősen szubkvadratikus függvények páros kiterjesztése, azonban az állítások igazolása más eszközökkel történik, mint a [35] cikkünkben. A gyengén szubkvadratikus függvényekhez kapcsolódó, jelen disszertáció ötödik fejezetében vizsgált „további" egyenlőtlenségek a [3], [52] publikációk egyikében sem szerepelnek.

1. **Csoportelméleti háttér**

Ebben a szakaszban egyrészt bevezetünk néhány olyan jelölést, amit a következő fejezetekben használni fogunk, másrészt összefoglaljuk azokat a csoportelméleti eszközöket, amelyekre szükségünk lesz a főtételeink bizonyításához. Többek között megvizsgáljuk azon függvényeket, melyek csoportot alkotnak a függvénykompozíció műveletével, illetve leírjuk ezen függvények legfontosabb tulajdonságait. Az ebben a szakaszban szereplő lemmák elsősorban a [25] cikk eredményein alapulnak.

Legyen H a valós számok halmazának egy nem üres részhalmaza és tegyük föl, hogy a $g_1, \dots, g_r \colon H \to H$ függvények csoportot alkotnak a kompozíció műveletére nézve. Ezt a csoportot a továbbiakban jelölje $G(H)$.

Ha $g \in G(H)$, akkor g-nek az önmagával vett k-szoros kompozíciószorzatát g^k módon jelöljük. Nyilván $g^k \in G(H)$.

A következő lemmából kiderül, hogy a szigorúan monoton függvényekből álló csoport nagyon "szegényes" struktúrát alkot.

1.1. **Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres halmaz, $G(H)$ szigorúan monoton függvényekből álló csoport. Ha $G(H)$ véges, akkor legfeljebb kételemű.*

Bizonyítás: Legyen g a csoport identikus elemétől különböző tetszőleges elem, amennyiben ilyen létezik. Jelölje r a g elem rendjét és tegyük fel, hogy $t \in H$ olyan, melyre $g(t) \neq t$ teljesül. Indirekt módon bebizonyítjuk, hogy g nem szigorúan monoton növekvő.

- Ha $t < g\,(t)$ teljesül, akkor ezt az egyenlőtlenséget iterálva kapjuk, hogy
$$t < g(t) < g^2(t) < \cdots < g^r(t) = t,$$
ami ellentmondás.
- Ha $t > g(t)$, akkor az előbbihez hasonlóan
$$t > g(t) > g^2(t) > \cdots < g^r(t) = t$$
szintén ellentmondásra jutunk.

Tehát minden, az identitástól különböző $G(H)$-beli elem szigorúan monoton csökkenő, következésképpen ha g és h olyan elemei a $G(H)$ csoportnak, hogy közülük egyik sem az identitás, akkor g és h^{-1} szigorúan monoton csökkenőek. Ekkor azonban $g \circ h^{-1}$ szigorúan monoton növekvő, vagyis $g \circ h^{-1} = \mathrm{id}$, így $g = h$. ■

A következő lemmában igazoljuk, hogy minden véges csoport reprezentálható (folytonos vagy differenciálható) függvények csoportjaként. Ez az észrevétel teszi indokolttá tételeink algebrai feltételeinek nagyfokú általánosságát.

1.2. **Lemma.** *Ha G egy véges csoport, akkor létezik olyan $H \subset \mathbb{R}$ nyílt halmaz és C^∞-osztályú függvények csoportja úgy, hogy $G \simeq G(H)$.*

Bizonyítás: Elegendő megmutatni, hogy $G(H)$ izomorf az r-edrendű S_r szimmetrikus csoporttal, ugyanis a Cayley-tétel szerint minden csoport beágyazható egy szimmetrikus csoportba, pontosabban minden csoport izomorf egy szimmetrikus csoport részcsoportjával. Legyenek

$$I_1, \ldots, I_r \subseteq \mathbb{R}$$

diszjunkt, nyílt intervallumok és legyen

$$H = \bigcup_{i=1}^{r} I_i.$$

Legyenek továbbá $h_{i,j} \colon I_i \to I_j$ monoton növekvő lineáris izomorfizmusok I_i és I_j között. Minden $\pi \colon \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$ permutáció esetén definiáljuk a

$$g_\pi \colon H \to H, \quad g_\pi(t) = h_{i,\pi(i)}(t) \qquad (t \in I_i)$$

függvényeket. Ekkor

$$g_\pi \in C^\infty(H)$$

és

$$G(H) = (\{g_\pi \mid \pi \in S_r\}, \circ)$$

csoportot alkot, mely izomorf az S_r szimmetrikus csoporttal. ■

1.3. **Definíció.** Legyen H a valós számok halmazának egy nem üres részhalmaza. A H halmaz egy ξ elemének *orbit*ja, más néven *pályá*ja a

$$\{g(\xi) \,|\, g \in G(H)\}$$

halmaz. A $\xi \in H$ elem *stabilizátor*án azokat a $G(H)$-beli elemeket értjük, melyek a ξ elemet fixen hagyják, azaz ξ stabilizátora

$$G_\xi(H) := \{g \in G(H) \mid g(\xi) = \xi\}\,.$$

A következő lemmánk az úgynevezett orbit-stabilizátor tétel, amely számunkra kulcsfontosságú szerepet fog játszani a későbbikben.

1.4. **Lemma.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres halmaz, $G(H)$ függvénycsoport, $\xi \in H$ tetszőleges. Ekkor $G_\xi(H)$ részcsoportja $G(H)$-nak. Tekintsük a $G(H)$ csoport $G_\xi(H)$ szerinti baloldali mellékosztályait. Ekkor a $G(H)$-beli g és h elemek pontosan akkor tartoznak ugyanabba a mellékosztályba, ha $g(\xi) = h(\xi)$, azaz ξ orbitjának elemszáma egyenlő ξ stabilizátorának $G(H)$-beli indexével.*

Bizonyítás: Legyen $g, h \in G_\xi(H)$ tetszőleges. Ekkor $g(\xi) = \xi$ és $h(\xi) = \xi$, így

$$g \circ h(\xi) = \xi \text{ és } g^{-1}(\xi) = \xi.$$

Tehát $G_\xi(H)$ zárt a csoportműveletre nézve, így részcsoportja $G(H)$-nak. A tétel második állításának bizonyításához legyen $h_1, h_2 \in hG_\xi(H)$. Ekkor léteznek olyan $g_1, g_2 \in G(H)$ elemek, melyre teljesül, hogy

$$h_1 = h \circ g_1 \text{ és } h_2 = h \circ g_2,$$

így

$$h_1(\xi) = h \circ g_1(\xi) = h(\xi) = h \circ g_2(\xi) = h_2(\xi).$$

A megfordításhoz tegyük fel, hogy

$$h_1(\xi) = h_2(\xi)$$

és legyen $g := h_1^{-1} \circ h_2$. Ekkor $g \in G_\xi(H)$, amiből következik, hogy

$$h_2 \in h_1 G_\xi(H).$$

Ezzel a bizonyítás teljes. ∎

Legyen $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ egy tetszőleges csoport, s definiáljuk a $*$ műveletet az $L = \{1, \ldots, r\}$ indexhalmazon a következő módon:

$i * j = k$ pontosan akkor, ha $g_i g_j = g_k$. Azonnal adódik az alábbi állítás:

1.5. **Lemma.** *A fenti feltételek és jelölések mellett $(L, *)$ csoport és a $\varphi(g_i) = i$ módon értelmezett $\varphi\colon G \to L$ leképezés izomorfizmus. Továbbá, rögzített $j \in L$ esetén a $\psi(i) = j * i$ leképezés automorfizmus L-en.*

Legyen $\xi \in H$ és tegyük fel, hogy ξ-nek a $G(H)$-beli stabilizátora m elemű, mégpedig

$$G_\xi(H) = \{g_{kn+1} \mid k = 0, \ldots, m-1\}.$$

Ekkor az (1.4) lemma miatt a $G_\xi(H)$ stabilizátor részcsoportja a $G(H)$ csoportnak. Tegyük föl, hogy ez a részcsoport n tagú osztályozást származtat, melynek reprezentációja legyen $\{g_1, \ldots, g_n\}$. A Lagrange-tétel miatt ekkor $|G(H)| = mn$. Az általánosság sérelme nélkül a továbbiakban az alábbi táblázat szerint indexelünk:

$$\begin{array}{|c||cccccc|}
\hline
\circ & g_1 & g_{n+1} & \cdots & g_{kn+1} & \cdots & g_{(m-1)n+1} \\
\hline\hline
g_1 & g_1 & g_{n+1} & \cdots & g_{kn+1} & \cdots & g_{(m-1)n+1} \\
g_2 & g_2 & g_{n+2} & \cdots & g_{kn+2} & \cdots & g_{(m-1)n+2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_l & g_l & g_{n+l} & \cdots & g_{kn+l} & \cdots & g_{(m-1)n+l} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
g_n & g_n & g_{2n} & \cdots & g_{(k+1)n} & \cdots & g_{mn} \\
\hline
\end{array}. \tag{4}$$

Ha minden elemet kiértékelünk a ξ helyen, akkor soronként az értékek megegyeznek, ugyanis ezek az elemek a $G(H)$ csoport $G_\xi(H)$-beli bal oldali mellékosztályának reprezentánsai; az oszloponként kapott ξ-beli értékek pedig páronként különbözők. A $*$ művelet definíciója szerint

$$l * (kn+1) = kn + l \qquad (l = 1, \ldots, n;\ k = 0, \ldots, m-1).$$

Ezt felhasználva $g_i(\xi) = g_j(\xi)$ pontosan akkor, ha $i \equiv j \pmod n$. A (4) táblázat az indexhalmazon adott műveletre átírva tehát az alábbi:

$$\begin{array}{|c||cccccc|}
\hline
* & 1 & n+1 & \dots & kn+1 & \dots & (m-1)n+1 \\
\hline
\hline
1 & 1 & n+1 & \dots & kn+1 & \dots & (m-1)n+1 \\
2 & 2 & n+2 & \dots & kn+2 & \dots & (m-1)n+2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l & l & n+l & \dots & kn+l & \dots & (m-1)n+l \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
n & n & 2n & \dots & (k+1)n & \dots & mn \\
\hline
\end{array}.$$

Mind a főtételek megfogalmazását, mind pedig azok bizonyítását nagyban megkönnyíti és áttekinthetővé teszi a következő jelölés. Legyen $x \in \mathbb{R}^{|L|}$ az $x = (x_1, \dots, x_r)$ koordinátákkal adott, s legyen $i \in \{1, \dots, r\}$ rögzített index. Jelölje ekkor x_{*i} azt a vektort, melynek j-edik komponense x_{j*i}, azaz

$$x_{*i} := (x_{1*i}, \dots, x_{n*i}).$$

Az (1.5) lemma szerint a $*i$ leképezés automorfizmus az indexhalmazon, így speciálisan bijektív. Vagyis, $*i$ a vektorok koordinátáit permutálja.

2. **Lineáris függvényegyenletek és csoporthatások**

Az utóbbi időben a különböző matematikaversenyek feladatai között gyakran találkozhatunk függvényegyenletekkel. Például a Középiskolai Matematikai Lapok (KÖMAL), a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, a PUTNAM amerikai matematika verseny, az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) feladatai között előfordulnak ilyen típusfeladatok. Ezen példák jelentős része az (1) egyenlet speciális esete, amikor F az első r változójában lineáris, azaz

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k(t) f \circ g_k(t) = h(t). \tag{5}$$

Ebben a szakaszban (5) általános megoldását adjuk meg abban az esetben, amikor az egyenlet nem-elfajuló rendszert származtat. Az (5) egyenletet ilyen feltételek mellett Bessenyei vizsgálta [23]; vizsgálatait jelen szakasz fő tételével tettük teljessé, s publikáltuk a [26] cikkben.

A soron következő feladat 2004-ben az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen szerepelt. Legyen k olyan valós szám, amelyre teljesül, hogy $0 < k^2 \neq 1$. Határozzuk meg az összes olyan függvényt ($f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$), amely eleget tesz az alábbi függvényegyenletnek:

$$f(t) + kt^2 f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{t+1}.$$

A feladatban szereplő egyenlet és az abból $t \to 1/t$ helyettesítéssel kapott új egyenlet f értékeire az alábbi kétismeretlenes, inhomogén lineáris egyenletrendszert származtatja:

$$\begin{array}{rcrcl} f(t) & + & kt^2 f\left(\frac{1}{t}\right) & = & \frac{t}{t+1} \\ \frac{k}{t^2} f(t) & + & f\left(\frac{1}{t}\right) & = & \frac{1}{t+1}. \end{array}$$

Jelölje D az alapmátrix determinánsát:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & kt^2 \\ \frac{k}{t^2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - k^2.$$

Legyenek D_1, illetve D_2 azok a determinánsok, melyeket a D-ből úgy kapunk meg, hogy annak első illetve második oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő értékekből képzett oszlopvektorral helyettesítünk. Ekkor

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{t}{t+1} & kt^2 \\ \frac{1}{t+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{t - kt^2}{t+1}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{t+1} \\ \frac{k}{t^2} & \frac{1}{t+1} \end{vmatrix} = \frac{t-k}{t(t+1)}.$$

Mivel $k^2 \neq 1$, ezért az alapmátrix nem szinguláris. A Cramer-szabály alapján tehát az ismeretlenek a D_1 és D, illetve a D_2 és D determinánsok hányadosaként állnak elő az alábbi módon:

$$f(t) = \frac{t - kt^2}{(1-k^2)(t+1)};$$

$$f\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{t-k}{(1-k^2)t(t+1)}.$$

Visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a kapott f valóban megoldás.

A vázolt módszerrel kapcsolatban sajnos fölmerül egy olyan probléma, amelyet általános esetben is tudnunk kell kezelni, ugyanis az ismertetett eljárás csak annyit mond, hogy ha létezik megoldás, akkor az hogyan áll elő; arról külön meg kell bizonyosodni, hogy a kapott reprezentációk valóban megoldások. Ez a konkrét esetekben egyszerű visszahelyettesítéssel ellenőrizhető. Teljesen általános körülmények között azonban a visszahelyettesítés az úgynevezett *kompatibilitási problémával* egyenértékű. Jelölje f_k a helyettesítéssel kapott $f \circ g_k$ ismeretlent; ekkor azt kell eldönteni, hogy teljesülnek-e az $f_k = f_1 \circ g_k$ kompatibilitási egyenletek vagy sem. Itt feltesszük, hogy $g_1 = \mathrm{id}$. Ez az előző példában egyszerűen ellenőrizhető: azt kell csupán megmutatni, hogy a kapott megoldáscsalád *kompatibilis* a következő értelemben: ha az $f(t)$ jobb oldalán szereplő kifejezésben t helyére $1/t$-et írunk, akkor éppen a második egyenlet jobb oldalát kapjuk. Valóban, mint azt a következő egyszerű számolás mutatja,

$$\frac{\frac{1}{t} - \frac{k}{t^2}}{(1-k^2)\big(\frac{1}{t}+1\big)} = \frac{\frac{t-k}{t^2}}{(1-k^2)\frac{t+1}{t}} = \frac{t-k}{(1-k^2)t(t+1)}.$$

Ezen részben, mivel az egyenletünk lineáris, ezért a kompatibilitási probléma teljesen általánosan is egyszerűen kezelhető a determinánsok permutáció-tulajdonságait felhasználva.

2.1. **Példa.** Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ egy nem üres, origóra szimmetrikus halmaz, és legyenek $\alpha, \beta, h \colon H \to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyekre

$$\alpha(t)\alpha(-t) \neq \beta(t)\beta(-t) \qquad (t \in H)$$

teljesül. Ekkor létezik pontosan egy $f \colon H \to \mathbb{R}$ függvény, mely teljesíti az

$$\alpha(t)f(t) + \beta(t)f(-t) = h(t)$$

függvényegyenletet.
Legyen $u(t) := f(t)$ és $v(t) := f(-t)$. Helyettesítsünk t helyére $-t$-t. Ez megengedett a H halmaz szimmetria tulajdonsága miatt. Ekkor az alábbi inhomogén, lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\alpha(t)u(t) + \beta(t)v(t) = h(t);$$
$$\beta(-t)u(t) + \alpha(-t)v(t) = h(-t).$$

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa

$$D(t) = \alpha(t)\alpha(-t) - \beta(t)\beta(-t),$$

amely feltételeink miatt nem szinguláris. Így a Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$u(t) = \frac{1}{D(t)} \begin{vmatrix} h(t) & \beta(t) \\ h(-t) & \alpha(-t) \end{vmatrix} = \frac{h(t)\alpha(-t) - h(-t)\beta(t)}{\alpha(t)\alpha(-t) - \beta(t)\beta(-t)},$$

valamint

$$v(t) = \frac{1}{D(t)} \begin{vmatrix} \alpha(t) & h(t) \\ \beta(-t) & h(-t) \end{vmatrix} = \frac{h(-t)\alpha(t) - h(t)\beta(-t)}{\alpha(t)\alpha(-t) - \beta(t)\beta(-t)}$$

Tehát, ha létezik f megoldás, akkor szükségképpen $f = u$. Visszahelyettesítéssel azonnal ellenőrizhető, hogy az f-re íly módon kapott előállítás valóban megoldást ad.

Az (5) egyenlet megoldása során helyettesítésekkel az egyenletből újabb egyenleteket kapunk. Mivel az eredeti függvényegyenlet lineáris volt, ezért ilyenkor egy lineáris egyenletrendszer adódik. Ha ennek alapmátrixa reguláris, akkor a Cramer-szabállyal megkapjuk az eredeti függvényegyenlet megoldását.

A következőkben ismertetjük jelen szakasz fő eredményét. Emlékeztetünk arra, hogy a használt jelöléseket a csoportelméleti részben rögzítettük.

2.2. **Tétel.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz, legyenek továbbá*

$$g_1, \dots, g_r \colon H \to H$$

olyan függvények, melyek a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, valamint legyenek

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r; h \colon H \to \mathbb{R}$$

adottak. Tegyük fel, hogy az

$$A := [\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i] \tag{6}$$

mátrix determinánsa nem nulla a H halmazon. Jelölje A_h azt a mátrixot, melyet A-ból kapunk oly módon, hogy annak első oszlopát a $(h \circ g_1, \dots, h \circ g_r)$ vektorral helyettesítjük. Ekkor az

$$f = \frac{\det A_h}{\det A}$$

módon definiált függvény egyértelmű megoldása az (5) *egyenletnek H-n.*
Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi \colon H \to \mathbb{R}$ eleget tesz az

$$\Big| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k(t) \varphi \circ g_k(t) - h(t) \Big| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenségnek. Ekkor teljesül az

$$|f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon \|A^{-1}(t)\|_\infty$$

összefüggés.

Bizonyítás: Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy g_1 a csoport neutrális eleme. Az (5) egyenlet mindkét oldalát komponáljuk rendre a $g_1, \dots, g_r$ helyettesítő függvényekkel. Ekkor az

$$\begin{array}{ccccc}
(\alpha_1 \circ g_1) f \circ g_{1*1} + (\alpha_2 \circ g_1) f \circ g_{2*1} + & \cdots & + (\alpha_r \circ g_1) f \circ g_{r*1} & = & h \circ g_1 \\
(\alpha_1 \circ g_2) f \circ g_{1*2} + (\alpha_2 \circ g_2) f \circ g_{2*2} + & \cdots & + (\alpha_r \circ g_2) f \circ g_{r*2} & = & h \circ g_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
(\alpha_1 \circ g_r) f \circ g_{1*r} + (\alpha_2 \circ g_r) f \circ g_{2*r} + & \cdots & + (\alpha_r \circ g_r) f \circ g_{r*r} & = & h \circ g_r
\end{array}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A $*$ művelet definíciója szerint az előbbi egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{array}{ccccc}
(\alpha_{1*1^{-1}} \circ g_1) f \circ g_1 + (\alpha_{2*1^{-1}} \circ g_1) f \circ g_2 + & \cdots & + (\alpha_{r*1^{-1}} \circ g_1) f \circ g_r & = & h \circ g_1 \\
(\alpha_{1*2^{-1}} \circ g_2) f \circ g_1 + (\alpha_{2*2^{-1}} \circ g_2) f \circ g_2 + & \cdots & + (\alpha_{r*2^{-1}} \circ g_2) f \circ g_r & = & h \circ g_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
(\alpha_{1*r^{-1}} \circ g_r) f \circ g_1 + (\alpha_{2*r^{-1}} \circ g_r) f \circ g_2 + & \cdots & + (\alpha_{r*r^{-1}} \circ g_r) f \circ g_r & = & h \circ g_r
\end{array}$$

egyenletrendszerrel, melynek együtthatómátrixa pontosan a (6) formula szerint adott. Ennek determinánsa a tétel feltételei miatt nem nulla a H halmazon. Vezessük be az $f_k \colon H \to \mathbb{R}$ függvényeket az

$$f_k := \frac{\det A_k}{\det A} \qquad (k = 1, \dots, r)$$

definíció szerint, ahol A_k azt a mátrixot jelöli, melyet az A mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak k-adik oszlopát rendre a

$$h \circ g_1, \dots, h \circ g_r$$

elemekkel helyettesítjük. Megmutatjuk, hogy $f := f_1$ egyértelmű megoldása az (5) egyenletnek. Ehhez ellenőriznünk kell, hogy H-n teljesülnek az $f_1 \circ g_k = f_k$ kompatibilitási egyenletek. Meghatározzuk $f_1 \circ g_k$-t:

$$\det A_1 \circ g_k = \begin{vmatrix} h \circ g_1 \circ g_k & \alpha_{2*1^{-1}} \circ g_1 \circ g_k & \dots & \alpha_{r*1^{-1}} \circ g_1 \circ g_k \\ h \circ g_2 \circ g_k & \alpha_{2*2^{-1}} \circ g_2 \circ g_k & \dots & \alpha_{r*2^{-1}} \circ g_2 \circ g_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h \circ g_r \circ g_k & \alpha_{2*r^{-1}} \circ g_r \circ g_k & \dots & \alpha_{r*r^{-1}} \circ g_r \circ g_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h \circ g_{1*k} & \alpha_{2*1^{-1}} \circ g_{1*k} & \dots & \alpha_{r*1^{-1}} \circ g_{1*k} \\ h \circ g_{2*k} & \alpha_{2*2^{-1}} \circ g_{2*k} & \dots & \alpha_{r*2^{-1}} \circ g_{2*k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h \circ g_{r*k} & \alpha_{2*r^{-1}} \circ g_{r*k} & \dots & \alpha_{r*r^{-1}} \circ g_{r*k} \end{vmatrix}.$$

Rendezzük át a sorokat úgy, hogy az első oszlopban a természetes sorrendet kapjuk. Ehhez keressük azt a j indexet, melyre $j * k = l$ teljesül. Ebből $j = l * k^{-1}$ adódik. Ezután felhasználva azt a tényt, miszerint

$$l^{-1} * k^{-1} = (k * l)^{-1}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} h \circ g_1 & \alpha_{2*1^{-1}*k^{-1}} \circ g_1 & \dots & \alpha_{r*1^{-1}*k^{-1}} \circ g_1 \\ h \circ g_2 & \alpha_{2*2^{-1}*k^{-1}} \circ g_2 & \dots & \alpha_{r*2^{-1}*k^{-1}} \circ g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h \circ g_r & \alpha_{2*r^{-1}*k^{-1}} \circ g_r & \dots & \alpha_{r*r^{-1}*k^{-1}} \circ g_r \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} h \circ g_1 & \alpha_{2*(k*1)^{-1}} \circ g_1 & \dots & \alpha_{r*(k*1)^{-1}} \circ g_1 \\ h \circ g_2 & \alpha_{2*(k*2)^{-1}} \circ g_2 & \dots & \alpha_{r*(k*2)^{-1}} \circ g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h \circ g_r & \alpha_{2*(k*r)^{-1}} \circ g_r & \dots & \alpha_{r*(k*r)^{-1}} \circ g_r \end{vmatrix}.$$

Tehát a $\det A_1 \circ g_k$ determinánsnak és a $\det A_k$ determinánsak ugyanazok az oszlopai, azaz ezen determinánsok abszolútértékei megegyeznek. Ugyanígy megmutatható, hogy a $\det A$ és $\det A \circ g_k$ determinánsok abszolútértéke megegyezik, így $\det A \circ g_k$ nem-szinguláris a H halmazon. Világos továbbá az is, hogy az A_k mátrixból az $A_1 \circ g_k$ mátrixot ugyanazok a sor illetve oszlop permutációk származtatják, mint amelyek az A mátrixból az $A \circ g_k$ mátrixot. Ezzel a kívánt kompatibilitási egyenlőséget kaptuk:

$$f_1 \circ g_k := \frac{\det A_1 \circ g_k}{\det A \circ g_k} = \frac{\det A_k}{\det A} = f_k.$$

Azonnal látható az is, hogy f_1 megoldása az (5) egyenletnek.

A második állítás bizonyításához vezessük be az alábbi módon értelmezett $\varepsilon\colon H \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$\varepsilon(t) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\varphi \circ g_k(t) - h(t).$$

Ekkor φ teljesíti az (5) egyenletet h helyett $(h+\varepsilon)$-al és a φ-re szabott stabilitási egyenlőtlenség miatt minden $t \in H$ esetén $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. A tétel első állítása értelmében tehát

$$f(t) = \frac{\det A_h(t)}{\det A(t)}, \qquad \varphi(t) = \frac{\det A_{h+\varepsilon}(t)}{\det A(t)},$$

ahol A_g azt a mátrixot jelöli, melyet A-ból úgy kapunk meg, hogy annak első oszlopát a $(g \circ g_1, \ldots, g \circ g_r)$ vektorral helyettesítjük. Alkalmazva a $g \to \det A_g$ leképezés linearitását, a mátrixok inverzének előállítására vonatkozó ismert formulát, végül a $\|\cdot\|_\infty$ mátrixnorma definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|f(t) - \varphi(t)| &= \frac{|\det A_h(t) - \det A_{h+\varepsilon}(t)|}{|\det A(t)|} = \frac{|\det A_\varepsilon(t)|}{|\det A(t)|} \\
&= \frac{1}{|\det A(t)|}\Big|\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k+1}\det A_{1,k}(t)\varepsilon \circ g_k(t)\Big| \\
&\leq \frac{1}{|\det A(t)|}\sum_{k=1}^{r}\big|\varepsilon \circ g_k(t)\big| \cdot \big|(-1)^{k+1}\det A_{1,k}(t)\big| \\
&\leq \varepsilon \sum_{k=1}^{r}\left|\frac{(-1)^{k+1}\det A_{1,k}(t)}{\det A(t)}\right| \\
&= \varepsilon\|A^{-1}(t)\|_\infty,
\end{aligned}$$

amivel éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséghez jutunk. ■

A következőkben néhány példával illusztráljuk az előző tétel állítását.

2.3. **Példa.** Igazoljuk, hogy ha az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ függvény teljesíti az

$$f\left(\frac{3t+1}{t-3}\right)=2f(t)+3$$

függvényegyenletet, akkor f szükségképpen konstans függvény!
Azonnal látható, hogy az ismeretlen f függvény argumentumában szereplő kifejezések kételemű ciklikus csoportot alkotnak a kompozíció műveletével. Így t helyére a $(3t+1)/(t-3)$ kifejezést írva, az alábbi kétismeretlenes, inhomogén lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 2f(t) &- f\left(\tfrac{3t+1}{t-3}\right) &= -3\\ f(t) &- 2f\left(\tfrac{3t+1}{t-3}\right) &= 3. \end{aligned}$$

Jelölje D a lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsát:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3.$$

Jelölje D_1, illetve D_2 azokat a determinánsokat, melyeket D-ből úgy kapunk meg, hogy annak első, illetve második oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő vektorral helyettesítjük. Ekkor

$$D_1=\begin{vmatrix} -3 & -1\\ 3 & -2 \end{vmatrix}=9,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -3\\ 1 & 3 \end{vmatrix}=9.$$

A Cramer-szabályt alkalmazva, figyelembe véve a fentieket, azonnal adódik, hogy a fenti egyenletrendszer megoldáscsaládját csakis az azonosan -3 függvény alkothatja. A kompatibilitás nyilvánvalóan teljesül, vagyis az eredeti egyenlet megoldása az $f(t)=-3$ függvény.

2.4. **Példa.** Keressük meg az $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}$

$$t^2f(t)+f\left(\frac{t-1}{t}\right)=t^2 \tag{7}$$

függvényegyenlet összes megoldását!
Tekintsük a

$$g_1(t)=t,\quad g_2(t)=(t-1)/t,\quad g_3(t)=1/(1-t)$$

csoportelemeket és komponáljuk az egyenlet mindkét oldalát rendre a $g_1,\ g_2,\ g_3$ függvényekkel. Ekkor a

$$\begin{array}{rcrcrcl} g_1^2(t)f\big(g_1(t)\big) & + & f\big(g_2(t)\big) & & & = & g_1^2(t) \\ & & g_2^2(t)f\big(g_2(t)\big) & + & f\big(g_3(t)\big) & = & g_2^2(t) \\ f\big(g_1(t)\big) & + & & & g_3^2(t)f\big(g_3(t)\big) & = & g_3^2(t) \end{array}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$f\big(g_k(t)\big) \qquad (k = 1, 2, 3)$$

az ismeretlenek. Az előbbi lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsát jelölje D, továbbá legyen D_1 annak a mátrixnak a determinánsa, melyet a D-ből úgy kapunk meg, hogy annak első oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra cseréljük ki. Ekkor a g_1, g_2, g_3 elemek definícióját felhasználva:

$$D = \begin{vmatrix} t^2 & 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 & 1 \\ 1 & 0 & \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 \end{vmatrix} = 2,$$

valamint

$$D_1 = \begin{vmatrix} t^2 & 1 & 0 \\ \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 & \left(\frac{t-1}{t}\right)^2 & 1 \\ \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 & 0 & \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 \end{vmatrix} = \frac{t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t - 1}{t^2(t-1)^2}.$$

A Cramer szabályt alkalmazva, a D_1 és D determinánsok hányadosa adja az egyenletrendszer f megoldását:

$$f(t) = \frac{D_1}{D} = \frac{t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t - 1}{2t^2(t-1)^2},$$

amit visszahelyettesítve az eredeti (7) egyenletbe azt kapjuk, hogy f valóban megoldás.

2.5. **Példa.** Keressük meg az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(t) + f\left(\frac{t-1}{t}\right) = 1 + t. \tag{8}$$

függvényegyenlet összes megoldását!
Tekintsük a

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = (t-1)/t, \quad g_3(t) = 1/(1-t)$$

csoportelemeket és komponáljuk a (8) egyenlet mindkét oldalát a g_1, g_2, g_3 függvényekkel. Mivel ezek az elemek ciklikus csoportot alkotnak, ezért az

$$\begin{array}{ccccccc} f\big(g_1(t)\big) & + & f\big(g_2(t)\big) & & & = & 1+t \\ & & f\big(g_2(t)\big) & + & f\big(g_3(t)\big) & = & (2t-1)/t \\ f\big(g_1(t)\big) & + & & & f\big(g_3(t)\big) & = & (2-t)/t \end{array}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ahol az ismeretlenek $f\big(g_k(t)\big)$. Egyszerű számolással megkapható, hogy ezen lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa 2, így a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$f(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1+t & 1 & 0 \\ (2t-1)/t & 1 & 1 \\ (2-t)/t & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{t^2-2t+3}{2t}.$$

Behelyettesítve az eredeti (8) egyenletbe látható, hogy a kapott függvény valóban megoldás.

3. Nemlineáris explicit függvényegyenletek

Ebben a fejezetben, melynek eredményeit a [24] és a [25] cikkekben közöltük, vizsgálatunk középpontjában az (1) egyenlet explicit változata áll, vagyis, amikor az utolsó, ismeretlen függvényt tartalmazó tag kifejezhető:

$$F\big(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_r(t)\big) = h(t). \tag{9}$$

A következőkben egy példán keresztül bemutatjuk a fő tételünkben alkalmazott kulcsgondolatokat.

3.1. **Példa.** Igazoljuk, hogy létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és olyan $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti az alábbi függvényegyenletet:

$$3f(t) + f^2(1-t) = 4t^2 - 2t - 2.$$

Legyen $g_1(t) := t$ és $g_2(t) = 1 - t$. Ekkor $\{g_1, g_2\}$ kételemű ciklikus csoport, és a csoportelemeknek $t_0 = 1/2$ közös fixpontja. A fenti függvényegyenletbe az $a := f(t_0)$ értéket helyettesítve azt kapjuk, hogy $3a + a^2 = -2$. Innen egyszerű számolással adódik, hogy $f(t_0)$ lehetséges értéke vagy -1, vagy pedig -2.

Vizsgáljuk elsőként az $f(t_0) = -1$ esetet. Ekkor a $t \to (1-t)$ helyettesítéssel és az $u := f(t)$, illetve $v = f(1-t)$ választásokkal élve, tekintsük az alábbi függvényeket:

$$\Psi(u,v) := \begin{pmatrix} 3u + v^2 \\ 3v + u^2 \end{pmatrix}, \qquad h(t) := \begin{pmatrix} 4t^2 - 2t - 2 \\ 4t^2 - 6t \end{pmatrix}.$$

Ekkor nyilván

$$\Psi(-1,-1) := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad h(t_0) := \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Világos, ekkor az eredeti egyenlet és az abból helyettesítéssel kapott új egyenlet a $\Psi\big(f(t), f(1-t)\big) = h(t)$ nemlineáris egyenletrendszerrel és az ehhez kapcsolódó $\Psi(-1,-1) = h(t_0)$ feltétellel ekvivalens. Megmutatjuk, hogy ennek az egyenletrendszernek létezik kompatibilis megoldáscsaládja. Nyilván Ψ folytonosan differenciálható. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy

$$\Psi'(u,v) = \begin{bmatrix} 3 & 2v \\ 2u & 3 \end{bmatrix}.$$

Azaz $\det \Psi'(-1,-1) = 5 \neq 0$. Így, az inverzfüggvény-tétel szerint, létezik a $(-1,-1)$ pontnak U és a $h(t_0) = (-2,-2)$ pontnak V környezete úgy, hogy $\Psi\colon U \to V$ diffeomorfizmus, speciálisan, bijekció. Másrészt, h folytonossága miatt, van olyan J környezete t_0-nak, hogy $h(J) \subset V$. Legyen most $I := g_1(J) \cap g_2(J)$. Ekkor I olyan nyílt környezete t_0-nak, amely invariáns a g_1 és g_2 csoportelemek hatására nézve, és $h(I) \subset V$. Legyen $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned} f_1(t) &:= \mathrm{pr}_1 \circ \Psi^{-1} \circ h(t) \\ f_2(t) &:= \mathrm{pr}_2 \circ \Psi^{-1} \circ h(t), \end{aligned}$$

ahol pr_k jelöli $\mathbb{R}^2$ k-adik projekcióját $\mathbb{R}$-re; azaz, $\mathrm{pr}_1(u,v) := u$ illetve $\mathrm{pr}_2(u,v) := v$. Megmutatjuk, hogy az $f := f_1$ választással az eredeti függvényegyenlet megoldását kapjuk. Figyelembe véve a fönti definíciókat, $\Psi(f_1(t), f_2(t)) = h(t)$ fönnáll, ha $t \in I$. Elegendő tehát azt igazolni, hogy az $f_2(t) = f_1 \circ g_2(t)$ kompatibilitási egyenlet teljesül, ha $t \in I$. Alkalmazva Ψ konstrukcióját:

$$\begin{aligned} \Psi(f_2(t), f_1(t)) &= \begin{bmatrix} 3f_2(t) + f_1^2(t) \\ f_2^2(t) + 3f_1(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4t^2 - 6t \\ 4t^2 - 2t - 2 \end{bmatrix} = h \circ g_2(t). \end{aligned}$$

A fenti egyenlet t_0 választással a $\Psi(-1,-1) = h(t_0)$ összefüggést adja, így (f_2, f_1) folytonossága miatt van olyan környezete t_0-nak, hogy e környezetre szorítkozva (f_2, f_1) benne van az U környezetben. Az általánosság csorbítása nélkül föltehető, hogy ez a környezet éppen az I intervallum. (Egyébként helyettesítsük I-t a szóbanforgó környezet és I metszetével.) Másrészt, közvetlen helyettesítéssel kapjuk, hogy $\Psi(f_1 \circ g_2(t), f_2 \circ g_2(t)) = h \circ g_2(t)$. (Ez a helyettesítés most is megtehető, I invarianciája miatt.) Vagyis,

$$\Psi(f_2(t), f_1(t)) = \Psi(f_1 \circ g_2(t), f_2 \circ g_2(t))$$

teljesül, ha $t \in I$. Azonban t ilyen választása mellett Ψ bijektív, vagyis az argumentumok szükségképpen megegyeznek. Innen az első komponensek összehasonlításával kapjuk a kívánt kompatibilitási feltételt.

Mivel az $f(t_0) := -2$ eset teljesen hasonlóan tárgyalható, ezért a következőképp foglalhatjuk össze vizsgálataink eredményét: létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, amely tartalmazza a $t_0 = 1/2$ pontot, és amelyen megadható pontosan két folytonos függvény, amely eleget tesz a feladatban szereplő egyenletnek. Az egyik függvény t_0-ban -1-et, a másik pedig -2-t vesz föl értékül.

A következőkben a (9) függvényegyenlet egy általános megoldását fogjuk megadni. Amint azt a bevezető példa mutatja, az analízis eszköztárából az inverzfüggvény-tétel kulcsszerephez jut. Azonban ebben egy pontot a képével együtt ismertnek tételezünk fel. Esetünkben ez azt jelenti, hogy (9) mellé kezdetiérték feltételek szükségesek. E feltételeket azonban nem írhatjuk elő tetszőlegesen, hiszen előfordulhat, hogy a ξ pontot a g_i és g_j csoportelemek ugyanoda képezik, ám ekkor az $f\big(g_i(\xi)\big)$ és $f\big(g_j(\xi)\big)$ értékek meg kell, hogy egyezzenek. Szükséges tehát a helyettesítések csoportjának finomabb struktúráját ismerni. E struktúra feltérképezését az algebra eszköztára teszi lehetővé úgy, amint ezt az (1.4) lemma leírja.

A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $r = m \cdot n$, ahol m jelöli a csoport ξ-beli stabilizátorának elemszámát, n pedig a stabilizátor indexét. Feltesszük továbbá azt is, hogy $G(H)$ műveleti táblázata (4) szerint adott. Ekkor (9) helyett az alábbi problémát tekintjük:

$$F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) = h(t), \tag{10}$$

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l. \tag{11}$$

Ismét emlékeztetünk arra, hogy minden további segédfogalmat és jelölést az első szakaszban rögzítettünk. A szokásos módon, ha A egy adott mátrix, akkor a_{ij} jelöli az i-edik sorának j-edik elemét. Az $\mathcal{M}_r$ fogja jelölni az $r \times r$-es négyzetes mátrixok halmazát. Ha A egy kvadratikus mátrix, akkor A_{*i} jelöli azt a mátrixot, melynek sorait és oszlopait a $*i$ permutáció szerint rendezzük át.

3.2. **Tétel.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *táblázat szerint. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $h\colon H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \qquad (i = 1, \dots, mn)$$

Definiáljuk az $A\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ leképezést az alábbi módon:

$$A(x) := [\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})].$$

Ha A reguláris a p pontban és $G_\xi(H)$ részhalmaza a $Z\big(G(H)\big)$ centrumnak, akkor létezik egy ξ-t tartalmazó, $G(H)$-invariáns nyílt $H_0 \subset H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amely teljesíti a (10) *egyenletet.*

Bizonyítás: Az (1.4) lemma szerint, ha a (4) táblázat adott, akkor

$$G_\xi(H) = \{g_{kn+1} \mid k = 0, \dots, m-1\},$$

ami ekvivalens a (10) egyenletben szabott kezdetiérték feltételek teljesülésével. Ekkor a $G_\xi(H)$ szerinti baloldali mellékosztályok reprezentánsai $\{g_1, \dots, g_n\}$.

Jelölje h_g azt a függvényt, melynek komponensei rendre

$$h \circ g_1, \dots, h \circ g_{mn}$$

és definiáljuk a $\Psi\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$ leképezést a

$$\Psi(x) := [F(x_{*i})]$$

formula szerint. Ekkor

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi)$$

miatt $\Psi(p) = h_g(\xi)$ is teljesül. Mivel Ψ függvény folytonosan differenciálható, a $*$ művelet definíciója és a láncszabály miatt

$$\Psi'(p) = [\partial_{j*i^{-1}} F(p_{*i})] = A(p).$$

A tétel feltételeiből adódóan, ezen utóbbi kifejezés nem szinguláris H-n, így az inverzfüggvény-tétel értelmében van olyan U környezete

p-nek és V környezete $h_g(\xi)$-nek, hogy $\Psi\colon U \to V$ diffeomorfizmus. Mivel h és g_k folytonos függvények, ezért létezik olyan ξ-t tartalmazó I nyílt intervallum, hogy $h_g(t) \in V$ minden $t \in I$ esetén. A $g_i(I) = g_j^{-1}(I)$ előállítás miatt (ahol $j = i^{-1}$), figyelembe véve a $G(H)$ halmaz elemeinek folytonosságát, a $g_i(I)$ halmazok nyíltak. Definiáljuk a

$$H_0 := \bigcup_{l=1}^{n} \bigcap_{k=0}^{m-1} g_{kn+l}(I)$$

halmazt. Ekkor H_0 nem üres, nyílt részhalmaza I-nek, mely tartalmazza ξ-t és a konstrukciónak köszönhetően invariáns a $G(H)$ elemeinek hatására nézve. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy H_0 pontosan n komponensből áll, azaz a

$$\bigcap_{k=0}^{m-1} g_{kn+1}(I), \dots, \bigcap_{k=0}^{m-1} g_{kn+n}(I)$$

halmazok páronként diszjunktak. Tekintsük az $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$,

$$f|_{g_i(I)} := f_i \circ g_i^{-1}$$

módon értelmezett függvényt, ahol

$$f_i(t) := \mathrm{pr}_i \circ \Psi^{-1} \circ h_g(t) \qquad (t \in g_i(I))$$

és pr_i jelöli az i-edik projekciót $\mathbb{R}^{mn}$-ről $\mathbb{R}$-re. Megmutatjuk, hogy az

$$\{f_i \mid i = 1, \dots, mn\}$$

halmaz kompatibilis. Ehhez elegendő ellenőrizni, hogy

$$f_{kn+l} = f_l \circ g_{kn+1}$$

teljesül. Tekintsük I-n a

$$h_g = \Psi(f_1, \dots, f_{mn})$$

szerinti átrendezését f_i-nek. Mivel $G_\xi(H)$ része $G(H)$ centrumának, ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h \circ g_l \circ g_{kn+1} &= h \circ g_{l*(kn+1)} \\ &= \Psi_{l*(kn+1)}(f_1, \dots, f_{mn}) \\ &= F(f_{1*l*(kn+1)}, \dots, f_{mn*l*(kn+1)}) \\ &= F(f_{1*(kn+1)*l}, \dots, f_{mn*(kn+1)*l}), \end{aligned}$$

azaz

$$h_g \circ g_{kn+1} = \Psi(f_{1*(kn+1)}, \dots, f_{mn*(kn+1)})$$

teljesül I-n. A jobb oldalon szereplő belső függvény folytonos, így létezik ξ-nek olyan környezete, hogy minden olyan t-re, amely az említett környezetből való

$$(f_{1*l}(t), \dots, f_{mn*l}(t)) \in U.$$

Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy ez a környezet éppen I. (Ellenkező esetben ugyanis, vegyük a környezet I-vel való nem üres metszetét.) Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\Psi^{-1} \circ h_g \circ g_{kn+1} = (f_{1*(kn+1)}, \dots, f_{n*(kn+1)}).$$

A bal oldal l-edik projekciója definíció szerint

$$f_l \circ g_{kn+1},$$

míg a jobb oldal l-edik projekciója éppen

$$f_{l*(kn+1)} = f_{kn+l},$$

amivel ellenőriztük az említett kompatibilitást. A konstrukcióból adódóan nyilvánvaló, hogy a

$$\Psi(f_1, \dots, f_{mn}) = h_g$$

egyenletrendszer első tagja éppen (9), amivel a bizonyítás teljes. ∎

Most két egyszerű példával illusztráljuk a (3.2) tétel állítását.

3.3. **Példa.** Mutassuk meg, hogy létezik egy $1/2$-et tartalmazó J intervallum és egy $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(1/2) = 0$ fönnáll, s amely teljesíti az alábbi egyenletet:

$$f(t) + tf(1-t) = 2t - 1.$$

A (3.2) tétel jelöléseit alkalmazva

$$F(u,v) = u + tv, \quad h(t) = 2t - 1.$$

Ekkor

$$F(v,u) = v + (1-t)u,$$

így

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \partial_{1*1^{-1}} F(x_{1*1,2*1}) & \partial_{2*1^{-1}} F(x_{1*1,2*1}) \\ \partial_{1*2^{-1}} F(x_{1*2,2*2}) & \partial_{2*2^{-2}} F(x_{1*2,2*2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A mátrix determinánsa $t^2 - t + 1$, ami nem szinguláris $\mathbb{R}$-en, így teljesülnek a (3.2) tétel feltételei, tehát a függvényegyenlet lokális egyértelműen megoldható.

Vegyük észre, hogy az egyenletünk lineáris, így alkalmazható az előző fejezet fő tétele is. Sőt, az előző lokális megoldáshoz képest mindenütt értelmezett, globálisan egyértelmű megoldás létezését állíthatjuk. Legyen $g_1(t) = t$, $g_2(t) = 1 - t$. Komponáljuk az előbbi egyenlet mindkét oldalát g_1-el, majd g_2-vel. Ekkor az

$$\begin{aligned} f\bigl(g_1(t)\bigr) + g_1(t) f\bigl(g_2(t)\bigr) &= 2g_1(t) - 1 \\ g_2(t) f\bigl(g_1(t)\bigr) + f\bigl(g_2(t)\bigr) &= 2g_2(t) - 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk, ami ekvivalens az

$$\begin{aligned} f\bigl(t\bigr) + t f\bigl(1-t\bigr) &= 2t - 1 \\ (1-t) f\bigl(t\bigr) + f\bigl(1-t\bigr) &= 2(1-t) - 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel. Az ismeretlenek az

$$f_1 := f \circ g_1 \quad \text{és} \quad f_2 := f \circ g_2$$

függvények. Ekkor az alapmátrix determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix} = t^2 - t + 1,$$

ami nem szinguláris $\mathbb{R}$-en. Kiszámolva a

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2t-1 & t \\ 1-t & 1 \end{vmatrix} = 2t^2 + t - 1$$

és

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2t-1 \\ 1-t & 1-2t \end{vmatrix} = 2t^2 - 5t + 2$$

determinánsokat, a Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$f_1(t) = \frac{D_1}{D} = \frac{2t^2 + t - 1}{t^2 - t + 1}$$

és

$$f_2(t) = \frac{D_2}{D} = \frac{2t^2 - 5t + 2}{t^2 - t + 1}.$$

Teljesül továbbá, hogy

$$\begin{aligned} f_1 \circ g_2 = f_1(1-t) &= \frac{2(1-t)^2 + (1-t) - 1}{(1-t)^2 - (1-t) + 1} \\ &= \frac{2t^2 - 5t + 2}{t^2 - t + 1} = f_2(t), \end{aligned}$$

amivel ellenőriztük a kompatibilitást.

3.4. **Példa.** Mutassuk meg, hogy létezik egy, az $1/2$-et tartalmazó J intervallum és egy $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(1/2) = 0$ fennáll, és teljesíti az alábbi függvényegyenletet:

$$(f^2(t) + 2)\exp(f(1-t)) = 2\sin(t\pi).$$

Egyszerű számolással adódik, hogy $f(1/2) = 0$ választással a fönti egyenlet valóban teljesül. Legyen $g_1(t) = t$, $g_2(t) = 1-t$. Definiáljuk továbbá az $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és a $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket az alábbi módon:

$$F(u,v) := (u^2 + 2)\exp(v), \qquad h(t) := 2\sin(t\pi).$$

Ekkor

$$F(v,u) = (v^2 + 2)\exp(u).$$

A (3.2) tétel jelöléseit megtartva

$$\begin{aligned} A(u,v) &= \begin{pmatrix} \partial_{1*1^{-1}} F(x_{1*1,2*1}) & \partial_{2*1^{-1}} F(x_{1*1,2*1}) \\ \partial_{1*2^{-1}} F(x_{1*2,2*2}) & \partial_{2*2^{-2}} F(x_{1*2,2*2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u\exp(v) & (u^2+2)\exp(v) \\ (v^2+2)\exp(u) & 2v\exp(u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

így $\det A(0,0) = -4 \neq 0$. A (3.2) tételben szereplő stabilizátor jelen esetben $\{g_1, g_2\}$, ami a teljes csoport. Másrészt a csoport kommutatív, így a centruma is a teljes csoport, tehát a szóbanforgó tételben szereplő

$$G_\xi(H) \subset Z\big(G(H)\big)$$

feltétel biztosított, így a függvényegyenlet lokálisan egyértelműen megoldható.

4. Nemlineáris implicit függvényegyenletek

Ebben a fejezetben, melynek eredményeit a [25] és a [26] cikkekben közöltük, vizsgálatunk középpontjában az (1) függvényegyenlet áll. A címben szereplő „implicit" jelző részben a megoldáshoz használt módszerre utal, részben pedig kifejezi azt, hogy az előző fejezettel ellentétben az utolsó változó explicit leválaszthatóságát most nem követeljük meg.

A következőkben egy példán keresztül bemutatjuk a fő tételünkben alkalmazott kulcsgondolatokat.

4.1. **Példa.** Legyen I olyan nyílt intervallum, hogy $0 \in I$, továbbá legyen $F\colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre $F(0,0,0) = 0$ teljesül. Definiáljuk az $A\colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathcal{M}$,

$$A(u,v,t) := \begin{bmatrix} \partial_1 F(u,v,t) & \partial_2 F(u,v,t) \\ \partial_2 F(v,u,-t) & \partial_1 F(v,u,-t) \end{bmatrix},$$

illetve a $B\colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$

$$B(u,v,t) := \begin{bmatrix} \partial_3 F(u,v,t) \\ -\partial_3 F(v,u,-t) \end{bmatrix}$$

leképezéseket. Ha A reguláris $(0,0,0)$-ban és $(u,v) \to A^{-1}B(u,v,t)$ Lipschitz a $(0,0,0)$ pont valamely környezetében, akkor van olyan $J \subset I$ intervallum, hogy $0 \in J$, és létezik pontosan egy olyan $f\colon J \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $f(0) = 0$, és minden $t \in J$ esetén

$$F(f(t), f(-t), t) = 0.$$

Az állítás igazolásához definiáljuk a $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$ leképezést az alábbi formulával:

$$\Psi(u,v,t) := \begin{bmatrix} F(u,v,t) \\ F(v,u,-t) \end{bmatrix}.$$

Azonnal látható, hogy $\Psi(0,0,0) = (0,0)$, továbbá, Ψ differenciálható, és az első változó szerinti parciális deriváltjára

$$D_1\Psi(u,v,t) = A(u,v,t)$$

teljesül. Mivel $A(0,0,0)$ reguláris és A folytonos, ezért van olyan környezete a $(0,0,0)$ pontnak, hogy ezen környezeten $A^{-1}B$ létezik és folytonos. Így, az implicitfüggvény-tétel szerint, van olyan U környezete a $(0,0,0)$-nak, W környezete a 0-nak, és van olyan

$$\Psi = (\varphi_1, \varphi_2) \colon W \to \mathbb{R}^2$$

folytonosan differenciálható függvény, hogy $\varphi(0) = (0,0)$ továbbá minden $t \in W$ esetén $(\varphi(t), t) \in U$ és

$$\Psi(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t) = (0,0).$$

Legyen $J := W \cap (-W)$. Ekkor J nem üres, nyílt intervallum, hiszen olyan nyílt intervallumok metszete, amelyek tartalmazzák a nullát. Az is világos, hogy ha $t \in J$ akkor $-t \in J$. A fönti egyenlet első sora éppen az $F(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t) = 0$ összefüggést adja. Megmutatjuk, hogy ekkor szükségképpen $\varphi_2(t) = \varphi_1(-t)$ teljesül minden $t \in J$ esetén. Differenciálva az $F(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t) = 0$, illetve az $F(\varphi_2(t), \varphi_1(t), -t) = 0$ egyenleteket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_1 F(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t)\varphi_1'(t) + \partial_2 F(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t)\varphi_2'(t) \\ + \partial_3 F(\varphi_1(t), \varphi_2(t), t) = 0, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \partial_1 F(\varphi_2(t), \varphi_1(t), -t)\varphi_2'(t) + \partial_2 F(\varphi_2(t), \varphi_1(t), -t)\varphi_1'(t) \\ + \partial_3 F(\varphi_2(t), \varphi_1(t), -t) = 0. \end{aligned}$$

Figyelembe véve A és B definícióját ezek az egyenletek az alábbi ekvivalens mátrixos alakba írhatók át:

$$A(\varphi(t), t)\varphi'(t) = B(\varphi(t), t).$$

Megmutatjuk, hogy $\psi(t) := (\varphi_2(-t), \varphi_1(-t))$ eleget tesz ugyanennek a differenciálegyenletnek. A t helyére $-t$-t írva (ami J választása miatt megengedett), továbbá (-1)-el szorozva,

$$-A(\varphi(-t), -t)\varphi'(-t) = -B(\varphi(-t), -t).$$

A bal oldal első egyenlete, a láncszabályt és ψ értelmezését felhasználva, az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&\partial_1 F(\varphi_1(-t), \varphi_2(-t), -t)(-\varphi_1'(-t)) \\
+&\partial_2 F(\varphi_1(-t), \varphi_2(-t), -t)(-\varphi_2'(-t)) \\
=&\partial_1 F(\psi_2(t), \psi_1(t), -t)\psi_2'(t) + \partial_2 F(\psi_2(t), \psi_1(t), -t)\psi_1'(t).
\end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk a bal oldal második egyenletére, hogy

$$\begin{aligned}
&\partial_2 F(\varphi_2(-t), \varphi_1(-t), t)(-\varphi_1'(-t)) \\
+&\partial_1 F(\varphi_2(-t), \varphi_1(-t), t)(-\varphi_2'(-t)) \\
=&\partial_2 F(\psi_1(t), \psi_2(t), t)\psi_2'(t) + \partial_1 F(\psi_1(t), \psi_2(t), t)\psi_1'(t).
\end{aligned}$$

A jobb oldali tagok ugyanígy alakíthatók:

$$\begin{aligned}
-\partial_3 F(\varphi_1(-t), \varphi_2(-t), -t) &= -\partial_3 F(\psi_2(t), \psi_1(t), -t); \\
\partial_3 F(\varphi_2(-t), \varphi_1(-t), t) &= \partial_3 F(\psi_1(t), \psi_2(t), t).
\end{aligned}$$

Megcserélve az egyenletek és a baloldali tagok sorrendjét, éppen a kívánt összefüggést kapjuk:

$$A(\psi(t), t)\psi'(t) = B(\psi(t), t).$$

Nyilvánvalóan $\varphi(0) = \psi(0)$, vagyis, mind φ, mind ψ eleget tesz az

$$y'(t) = A^{-1}B(t, y(t))$$

differenciálegyenletre vonatkozó $y(0) = (0, 0)$ kezdetiérték problémának a J intervallumon. Azonban itt a jobb oldal folytonos, második változójában Lipschitz, tehát létezik pontosan egy megoldása. Vagyis, $\varphi = \psi$; az első komponensek összehasonlításából épp a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

Végezetül, definiáljuk az $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvényt az $f := \varphi_1$ formulával. Ekkor az előzőek miatt egyrészt

$$f(-t) = \varphi_2(t),$$

másrészt a $(\varphi(t), t) = (0, 0)$ implicit egyenletrendszer első sora mutatja, hogy $F(f(t), f(-t), t) = 0$ teljesül a J intervallumon.

A következőkben megadjuk az (1) egyenlet általános megoldását. Az előző fejezetben részletesen kifejtett okok miatt (melynek megismétlésétől itt most eltekintünk), az implicit egyenlethez kezdetiértékeket csatolunk az alábbiak szerint:

$$F(f \circ g_1(t), \ldots, f \circ g_{mn}(t), t) = 0, \tag{12}$$

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l. \tag{13}$$

Feltesszük ismét, hogy a műveletek a (4) szerint adottak, és emlékeztetünk az első, valamint az előző fejezetek jelöléseire.

A főtétel bizonyítása alapvetően két esetre bontható aszerint, hogy milyen a $G_\xi(H)$ stabilizátor szerkezete. Ha a stabilizátor triviális (azaz csak a csoport egységelemét tartalmazza), akkor az implicitfüggvény-tétel garantálja a megoldás létezését. Abból, hogy a csoportelemek ξ-beli értékei páronként különböznek, következik a kompatibilitás teljesülése. Ha a $G_\xi(H)$ stabilizátor nem triviális, akkor az előző esettel ellentétben a kompatibilitást nem garantálja a konstrukció. Ekkor a kompatibilitás ellenőrzésében a differenciálegyenletek elméletéből ismert globális egzisztencia és unicitás tétel játssza a főszerepet, amint azt a bevezető példában is láthattuk.

4.2. **Tétel.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és*

$$G(H) = \{g_1, \ldots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \ldots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre minden $i = 1, \ldots, mn$ esetén teljesül, hogy

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = 0.$$

Definiáljuk az $A\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ és $B\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$ leképezéseket az

$$\begin{aligned} A(x,t) &:= \big[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i}, g_i(t))\big], \\ B(x,t) &:= \big[\partial_{mn+1} F(x_{*i}, g_i(t)) g_i'(t)\big] \end{aligned}$$

formula szerint. Tegyük fel, hogy A reguláris a (p, ξ) pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \to A^{-1}B(x,t)$ leképezés Lipschitz a (p, ξ) egy környezetében, akkor létezik egy $G(H)$-invariáns, nyílt,

ξ-t tartalmazó $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott differenciálható $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz a (12) *egyenletnek.*

Bizonyítás: Az (1.4) lemma szerint, ha a (4) táblázat adott, akkor

$$G_\xi(H) = \{g_{kn+1} \mid k = 0, \ldots, m-1\},$$

ami ekvivalens a (12) egyenletben szabott kezdetiérték feltételek teljesülésével. Ekkor a $G_\xi(H)$ szerinti baloldali mellékosztályok reprezentánsai $g_1, \ldots, g_n$. Legyen

$$\Psi(x,t) := \big[F(x_{*i}, g_i(t))\big].$$

Ekkor $\Psi\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{mn}$ folytonosan differenciálható, továbbá az

$$F(p_{*i}, \xi) = 0$$

feltétel miatt $\Psi(p, \xi) = 0$. A $*$ művelet definíciója és a láncszabály szerint

$$D_1\Psi(p,\xi) = \big[\partial_{j*i^{-1}} F(p_{*i}, g_i(\xi))\big] = A(p,\xi).$$

A tétel feltételeiből adódóan $A(p,\xi)$ nem szinguláris, így az implicitfüggvény- tétel szerint létezik (p,ξ)-nek U, ξ-nek V környezete, valamint létezik egy és csak egy $\Phi\colon V \to \mathbb{R}^{mn}$ függvény, melyre teljesülnek az alábbi tulajdonságok

- $(\Phi(t), t) \in U$ minden $t \in V$ esetén
- $\Psi(\Phi(t), t) = 0$ minden $t \in V$ esetén
- $\Phi(\xi) = p$
- Φ folytonosan differenciálható.

Legyen

$$H_0 := \bigcup_{l=1}^{n} \bigcap_{k=0}^{m-1} g_{kn+l}(V).$$

Mivel $g_i(V) = g_j^{-1}(V)$ minden $j = i^{-1}$ esetén és $G(H)$ elemei folytonosak, ezért a $g_i(V)$ halmazok nyíltak. Ha

$$l \in \{1, \ldots, n\}$$

rögzített, akkor a

$$g_l(\xi) \in g_{kn+l}(V)$$

tulajdonságból adódóan H_0 nem üres. Továbbá a konstrukció miatt H_0 invariáns a $G(H)$ elemeinek hatására. Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy H_0-nak n eleme van, azaz a $\cap_{k=0}^{m-1} g_{kn+l}(V)$ halmazok páronként diszjunktak minden $j = 1, \dots, n$ esetén.

Tegyük fel először, hogy $m = 1$, azaz a $G_\xi(H)$ stabilizátor triviális részcsoportja $G(H)$-nak. Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy U és az a környezet, ahol A^{-1} létezik megegyeznek (ellenkező esetben ugyanis tekintsük a nem üres metszetüket).

Definiáljuk az $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f|_{g_i(V)} := \Phi_i \circ g_i^{-1}$$

előírás szerint. A H_0 halmaz struktúrája biztosítja, hogy f a keresett függvény. Másrészt, szintén a konstrukcióból adódóan nem lép fel kompatibilitási probléma, továbbá f valóban megoldása a (12) egyenletnek H_0-on.

Tegyük fel, hogy $m \geq 2$ és válasszuk meg az U környezetet úgy, hogy $A^{-1}B$ létezzen és folytonos legyen U-n. A következőkben megmutatjuk, hogy a

$$\Phi_{kn+l} = \Phi_l \circ g_{kn+1}$$

kompatibilitási egyenletek teljesülnek. Ehhez először felírunk egy olyan differenciálegyenletet, melynek megoldása a Φ függvény a V halmazon. A

$$\Psi\big(\Phi(t), t\big) = 0$$

implicit egyenletben szereplő függvények folytonosan differenciálhatóak V-n, így differenciálva, majd alkalmazva a láncszabályt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{mn} \partial_j F(\Phi_{*i}, g_i)\Phi'_{j*i} + \partial_{mn+1} F(\Phi_{*i}, g_i) g'_i \\ &= \sum_{j=1}^{mn} \partial_{j*i^{-1}} F(\Phi_{*i}, g_i)\Phi'_j + \partial_{mn+1} F(\Phi_{*i}, g_i) g'_i. \end{aligned}$$

Az A mátrix és a B vektor definíciója szerint, az előbbi egyenletek az alábbi elsőrendű implicit differenciálegyenletként írhatók fel

$$A\big(\Phi(t), t\big)\Phi'(t) + B\big(\Phi(t), t\big) = 0. \tag{14}$$

Igazolni fogjuk, hogy a

$$\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}$$

függvények eleget tesznek ugyanannak a differenciálegyenletnek. Komponáljuk a (14) egyenletet g_{kn+1}-el. Megjegyezzük, hogy H_0 konstrukciója miatt ez a helyettesítés megengedett. Ezután szorozzuk mindkét oldalt g'_{kn+1}-el. Ekkor

$$A\big(\Phi\circ g_{kn+1}, g_{kn+1}\big)(\Phi'\circ g_{kn+1})g'_{kn+1}+B\big(\Phi\circ g_{kn+1}, g_{kn+1}\big)g'_{kn+1} = 0. \tag{15}$$

adódik. A láncszabály miatt

$$(\Phi' \circ g_{kn+1})g'_{kn+1} = (\Phi \circ g_{kn+1})' = \big((\Phi_{*(kn+1)^{-1}}) \circ g_{kn+1}\big)'_{*(kn+1)}.$$

Hasonlóan kapjuk a

$$B_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big)$$

vektor i-edik komponensét:

$$\begin{aligned} &\partial_{mn+1}F(\Phi_{*i*(kn+1)^{-1}*(kn+1)} \circ g_{kn+1}, g_{i*(kn+1)})g'_{i*(kn+1)} \\ &= \partial_{mn+1}F(\Phi_{*i} \circ g_{kn+1}, g_i \circ g)(g_i \circ g_{kn+1})' \\ &= \partial_{mn+1}F(\Phi_{*i} \circ g_{kn+1}, g_i \circ g)(g'_i \circ g_{kn+1})g'_{kn+1}. \end{aligned}$$

Így

$$B\big(\Phi \circ g_{kn+1}, g_{kn+1}\big)g'_{kn+1} = B_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big). \tag{16}$$

Végül kiszámoljuk az

$$A_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big)$$

mátrix (i, j) indexű elemét. A $*$ művelet asszociativitása miatt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial_{(j*(kn+1))*(i*(kn+1))^{-1}}F\big(\Phi_{*i*(kn+1)^{-1}*(kn+1)} \circ g_{kn+1}, g_{i*(kn+1)}\big) \\ = \partial_{j*i^{-1}}F(\Phi_{*i} \circ g_{kn+1}, g_i \circ g_{kn+1}); \end{aligned}$$

vagy ezzel ekvivalens módon

$$A\big(\Phi \circ g_{kn+1}, g_{kn+1}\big) = A_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big) \tag{17}$$

adódik. A (15) egyenletbe a (16) és (17) formulák szerint visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}$$

eleget tesz az alábbi differenciálegyenletnek:

$$\begin{aligned} 0 &= A_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big)\left(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}\right)'_{*(kn+1)} \\ &\quad + B_{*(kn+1)}\big(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}, \mathrm{id}\big). \end{aligned}$$

Azonban ez az egyenlet (14)-ből is megkapható a $*(kn+1)$ permutáció alkalmazásával, így

$$\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}$$

megoldása a (14) egyenletnek.
Másrészt mivel $G_\xi(H)$ részcsoportja a $G(H)$ csoportnak, ezért minden $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ esetén létezik olyan $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ úgy, hogy $(kn+1)^{-1} = rn+1$. A p definíciójának figyelembevételével, és az (4) táblázat alapján

$$\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}(\xi) = \Phi_{*(kn+1)^{-1}}(\xi) = p_{*(rn+1)} = p.$$

A (14) egyenlet a

$$\Phi'(t) = -A^{-1}B(\Phi(t), t)$$

alakba írható át, a $\Phi(\xi) = p$ kezdetiérték feltétel mellett. A globális egzisztencia és unicitás tétel miatt adódik, hogy teljesül a

$$\Phi = \Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}$$

egyenlet az U halmazon. Összehasonlítva a $(kn+l)$-edik komponenseket, éppen a bizonyítandó kompatibilitási feltételekhez jutunk:

$$\begin{aligned} \Phi_{kn+l} &= \left(\Phi_{*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1}\right)_{kn+l} = \Phi_{(kn+l)*(kn+1)^{-1}} \circ g_{kn+1} \\ &= \Phi_l \circ g_{kn+1}. \end{aligned}$$

Végezetül, definiáljuk az

$$f\colon H_0 \to \mathbb{R}, \quad f(t) := \Phi_l \circ g_{kn+l}^{-1}(t), \qquad \big(t \in \cap_{k=0}^{m-1} g_{kn+l}(V)\big)$$

függvényt! Ekkor, figyelembe véve az előbbi kompatibilitási egyenleteket, $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ jól definiált. Másrészt a

$$\Psi\big(\Phi(t), t\big) = 0 \quad \text{és} \quad \Psi\big(\Phi(\xi), \xi\big) = 0$$

implicit egyenletek első sorai mutatják, hogy (12) teljesül a H_0 halmazon. ■

Az alábbiakban az előbb ismertetett tétel két következményét ismertetjük. Az elsőben F lineáris függvény. A (3.2) tétel jelöléseit megtartva, az $A(x,t)$ mátrix csak a második változótól függ, így az $x \to A(x,t)$ leképezés Lipschitz tulajdonsága azonnal adódik. Ez a következmény hasonló állítást fogalmaz meg, mint a második fejezet fő tétele, azonban ez egy „gyengébb” állítás, mivel itt a regularitási feltételek erősebbek.

Ez azt jelenti, hogy a függvényegyenlet explicit. Érdemes megjegyezni, hogy az erre az esetre vonatkozó, korábban tárgyalt (3.2) tétel regularitási feltételei gyengébbek ugyan, az algebraiak azonban erősebbek: a stabilizátor és a centrum kapcsolatáról semmit sem követelünk meg.

4.3. **Következmény.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és*

$$G(H) = \{g_1, \ldots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyenek*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn} \colon H \to \mathbb{R}$$

folytonos függvények, továbbá legyen $h\colon H \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Definiáljuk az alábbi mátrixot:

$$D(t) := \left[\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i(t)\right].$$

Ha D reguláris a ξ pontban, akkor létezik egy ξ-t tartalmazó $G(H)$-invariáns, nyílt $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$\alpha_1 f \circ g_1 + \cdots + \alpha_{mn} f \circ g_{mn} = h$$

egyenletnek.

Bizonyítás: Az előbbi tétel jelöléseit megtartva, legyen

$$F(x_1, \ldots, x_{mn}, t) := \sum_{k=1}^{mn} \alpha_k(t) x_k - h(t).$$

Mivel $A(x,t) =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1*1^{-1}} \circ g_1(t) & \alpha_{2*1^{-1}} \circ g_1(t) & \dots & \alpha_{mn*1^{-1}} \circ g_1(t) \\ \alpha_{1*2^{-1}} \circ g_2(t) & \alpha_{2*2^{-2}} \circ g_2(t) & \dots & \alpha_{mn*2^{-1}} \circ g_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1*(mn)^{-1}} \circ g_{mn}(t) & \alpha_{2*(mn)^{-1}} \circ g_{mn}(t) & \dots & \alpha_{mn*(mn)^{-1}} \circ g_{mn} \end{pmatrix},$$

ezért $A(x,t) = D(t)$ és így az $A(x,t)$ mátrix (p,ξ) pontbeli regularitása miatt $D(t)$ reguláris ξ-ben. Mivel $B(x,t)$ nem függ x-től, ezért az $x \to A^{-1}B(x,t)$ leképezés konstans, így Lipschitz. Legyen

$$p := D^{-1}(\xi)h_g(\xi),$$

ahol h_g azt a vektort jelöli, melynek komponensei $h \circ g_1, \dots, h \circ g_{mn}$. A p pont megválasztása miatt

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = \sum_{j=1}^{mn} \alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i(t) - h \circ g_i(\xi),$$

ami a $D(\xi)p = h_g(\xi)$ egyenletrendszer i-edik egyenlete. Megmutatjuk, hogy a p pont koordinátái n-hosszúságú blokkonként ismétlődnek.

Legyen $k \in \{0, \dots, m-1\}$ rögzített. Ekkor

$$\begin{aligned} \left(D_{*(kn+1)}(\xi)\right)_{i,j} &= \alpha_{(j*(kn+1))*(i*(kn+1))^{-1}} \circ g_{i*(kn+1)}(\xi) \\ &= \alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i(\xi) = \left(D(\xi)\right)_{i,j}. \end{aligned}$$

A középső egyenlet azért teljesül, mert i és $i*(kn+1)$ ugyanabba a $G_\xi(H)$-szerinti mellékosztályba tartoznak, azaz

$$D_{*(kn+1)}(\xi) = D(\xi).$$

Hasonlóan, teljesül az is, hogy

$$(h_g)_{*(kn+1)}(\xi) = h_g(\xi).$$

Másrészt, a

$$D(\xi)p = h_g(\xi)$$

egyenletrendszer ekvivalens a

$$D_{*(kn+1)}(\xi)p_{*(kn+1)} = (h_g)_{*(kn+1)}(\xi)$$

egyenletrendszerrel (ugyanis, ha egy lineáris egyenletrendszer oszlopait felcseréljük, akkor a sorok ugyanezen permutáció szerint fognak változni), így p és $p_{*(kn+1)}$ megoldása ugyanannak az egyenletrendszernek. Tehát $p = p_{*(kn+1)}$. Így teljesülnek az előbbi tétel feltételei, amivel az állítást igazoltuk. ■

A második következményben a vizsgált egyenlet nem lineáris, de az $A(x, t)$ mátrix csak az első változótól függ.

4.4. **Következmény.** *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és legyen $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi)) \qquad (i = 1, \dots, mn)$$

teljesül. Tegyük föl, hogy a $D\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$,

$$D(x) := \big[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})\big]$$

leképezés reguláris a p pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \to D^{-1}(x)$ leképzés Lipschitz a p környezetében, akkor létezik egy $G(H)$-invariáns, ξ-t tartalmazó, $H_0 \subseteq H$ nyílt halmaz és egy egyértelműen meghatározott, differenciálható $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l$$

feltételnek és teljesíti az

$$F\big(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)\big) = h(t)$$

függvényegyenletet.

Bizonyítás: Legyen $G(x, t) := F(x) - h(t)$. Ekkor $A(x, t) = D(x)$. Továbbá a

$$G(p_{*k}, \xi) = 0$$

egyenlet pontosan akkor áll fenn, ha

$$F(p_{*k}) = h(g_k(\xi)) \qquad (k = 1, \dots, mn)$$

teljesül. Az $x \to A^{-1}B(x, t)$ leképzés Lipschitz tulajdonsága miatt teljesülnek az előbbi tétel feltételei, amivel az állítást igazoltuk. ■

Végezetül egy példával illusztráljuk a (4.2) tétel állítását.

4.5. **Példa.** Mutassuk meg, hogy létezik az $1/2$-et tartalmazó J intervallum és egy $f\colon J \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $f(1/2) = 0$ fönnáll, és teljesül az alábbi függvényegyenlet:

$$\sinh(f(t)) + \cosh(f(1-t)) - \exp(2t-1) = 0.$$

Közvetlen számolással kapjuk, hogy $f(1/2) = 0$ választás kielégíti az egyenletet. Definiáljuk továbbá az $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$F(u,v,t) := \sinh(u) + \cosh(v) - \exp(2t-1).$$

Ekkor

$$F(v,u,1-t) = \sinh(v) + \cosh(u) - \exp(1-2t).$$

A (4.2) tétel jelöléseit megtartva, az ott szereplő A mátrix jelen esetben:

$$A(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh(u) & \sinh(v) \\ \sinh(u) & \cosh(v) \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix nem szinguláris a $(0,0)$ pontban, ugyanis

$$\det A(0,0) = \begin{vmatrix} \cosh(0) & \sinh(0) \\ \sinh(0) & \cosh(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

A (4.2) tételben szereplő stabilizátor jelen esetben $\{g_1, g_2\}$, ami a teljes csoport. Másrészt

$$\det A(u,v) = \cosh(u)\cosh(v) - \sinh(u)\sinh(v) = \cosh(u+v),$$

ami sehol sem nulla, így az A mátrix nem szinguláris; inverze

$$A^{-1} = \frac{1}{\cosh(u+v)} \begin{pmatrix} \cosh(v) & -\sinh(v) \\ -\sinh(u) & \cosh(u) \end{pmatrix}.$$

A B vektor:

$$B = \begin{pmatrix} -2\exp(1-t) \\ 2\exp(1-t) \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva $A^{-1}B =$

$$= \frac{1}{\cosh(u+v)} \begin{pmatrix} -2\cosh(v)\exp(1-t) - 2\sinh(v)\exp(1-t) \\ 2\sinh(u)\exp(1-t) + 2\cosh(u)\exp(1-t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\exp(1-t)}{\cosh(u+v)} \begin{pmatrix} -2\cosh(v) - 2\sinh(v) \\ 2\sinh(u) + 2\cosh(u) \end{pmatrix},$$

így az $A^{-1}B$ leképzés Lipschitz, következésképpen teljesülnek a (4.2) tétel feltételei. Létezik tehát az egyenletnek lokálisan egyértelmű megoldása.

5. Szubkvadratikus függvények

Az utóbbi években számos matematikus foglalkozott szubkvadratikus függvényekkel. Kétféle értelemben vett szubkvadratikus függvényt is tekintettek: erősen szubkvadratikus és gyengén szubkvadratikus függvényeket. Az értekezés ezen fejezetének fő célja a két fogalom közötti kapcsolat tisztázása, valamint egy harmadik, az előző fogalmakhoz kapcsolódó egyenlőtlenség vizsgálata. Annak érdekében, hogy egy átfogó képet kapjunk az említett fogalmakról, a fejezet elején ismertetjük az egyes definíciókat, példával illusztráljuk azokat, valamint leírjuk a szubkvadratikus függvények legfontosabb tulajdonságait.

Az erősen szubkvadratikus függvények definíciója a konkáv függvények geometriai interpretációjának egy módosítása. Közismert tény, hogy ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv, akkor minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan c_x valós szám, hogy $f(y)-f(x) \leq c_x(y-x)$. Ha a függvény differenciálható is, akkor $c_x = f'(x)$, ami azt jelenti, hogy minden differenciálható konkáv függvény érintője a „függvénygörbe fölött halad”. Ehhez kapcsolódóan Shosana Abramovich, Graham Jameson és Gord Sinnamon a [8] és a [9] cikkekben vezette be az alábbi fogalmat:

5.1. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ függvény *erősen szubkvadratikus*, ha minden $x \geq 0$ esetén van olyan $c_x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y-x) + f(|y-x|) \qquad (y \geq 0). \tag{18}$$

Az $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ függvényt *erősen szuperkvadratikus*nak nevezzük, ha minden $x \geq 0$ esetén van olyan $c_x \in \mathbb{R}$, melyre

$$f(y) - f(x) \geq c_x(y-x) + f(|y-x|) \qquad (y \geq 0).$$

A fenti egyenlőtlenségek vizsgálatával foglalkozott többek között S. Abramovich, S. Banić, J. Barić, G. Jameson, M. Matić, J. A. Oguntuase, L. E. Persson, J. Pečarić, G. Sinnamon, S. Varošanec az [1], [5], [10], [11], [12], [20], [22], [44] cikkekben.

Azonnal látható, hogy f pontosan akkor erősen szuperkvadratikus, ha $-f$ erősen szubkvadratikus, ezért a továbbiakban csak az erősen szubkvadratikus függvényekkel foglalkozunk.

A következőkben néhány egyszerű példát adunk erősen szubkvadratikus függvényekre, majd az erősen szubkvadratikus függvények fontosabb elemi tulajdonságát ismertetjük. Ezek megtalálhatóak például S. Abramovich, G. Jameson és G. Sinnamon [8] cikkében.

5.2. **Példák.**

(1) Egyszerű számolás mutatja, hogy $c \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ esetén az $f(x) = cx^2 + b$ függvény erősen szubkvadratikus.

(2) Az $f(x) = x^p$ függvény erősen szubkvadratikus, ha $0 \leq p \leq 2$.

(3) Az $f(x) = -\mathrm{sh}x$ függvény erősen szubkvadratikus.

5.3. **Megjegyzések.**

(1) A gyengén szubkvadratikus függvények definíciója alapján látható, hogy gyengén szubkvadratikus függvények nemnegatív skalárokkal vett lineáris kombinációja szintén gyengén szubkvadratikus. Ezen tulajdonság felhasználásával a fenti példákból újabb példákat konstruálhatunk.

(2) Az (5.1) definícióból azonnal adódik, hogy ha az f függvény erősen szubkvadratikus és minden $x \geq 0$ esetén $f(x) \leq 0$, akkor $f(y) - f(x) \leq c_x(y - x)$, ami azzal ekvivalens, hogy f konkáv.

(3) A (18) egyenlőtlenségből $x = y = 0$ választással kapjuk, hogy ha az $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ függvény erősen szubkvadratikus, akkor

$$f(0) \geq 0.$$

Könnyen igazolható, hogy ha az $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ függvény erősen szubkvadratikus, akkor

$$f(kx) \leq k^2 f(x) \qquad (x \in [0, \infty[, k \in \mathbb{N}).$$

(4) Egyszerű számolással adódik, hogy ha $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ differenciálható erősen szubkvadratikus függvény és teljesül, hogy $f(0) = f'(0) = 0$, akkor minden $x > 0$ valós szám esetén $c_x = f'(x)$.

Azokat az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek eleget tesznek

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenletnek, kvadratikus függvényeknek nevezzük. Az előbbi egyenlet a szakirodalomban normanégyzet egyenlet, illetve Jordan-von Neumann egyenlet, illetve paralelogramma azonosságként is ismert. Amennyiben az „egyenlőség-jel” helyett „$\leq$” vagy „$\geq$” jelet írunk, úgy (az addtitív függvényekből nyert szubadditív, illetve szuperadditív terminusok mintájára) a gyengén szubkvadratikus, illetve gyengén szuperkvadratikus függvények fogalmához jutunk.

5.4. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *gyengén szubkvadratikus*, ha

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}). \tag{19}$$

Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *gyengén szuperkvadratikus*nak nevezzük, ha

$$f(x+y) + f(x-y) \geq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Azonnal látható, hogy egy f függvény pontosan akkor gyengén szubkvadratikus, ha $-f$ gyengén szuperkvadratikus.

A fenti egyenlőtlenségek vizsgálatával foglalkozott többek között Z. Kominek, K. Troczka–Pawelec, W. Smajdor és A. Gilányi a [34], [38], [50], [52] dolgozatokban.

Az alábbiakban néhány egyszerű példával illusztráljuk a gyengén szubkvadratikus függvények fogalmát, majd leírjuk az előbb definiált egyenlőtlenségek néhány egyszerű tulajdonságát. Ezek megtalálhatóak, többek között, A. Gilányi és K. Troczka-Pawelec [34] cikkében, valamint Z. Kominek és K. Troczka [38] dolgozatában.

5.5. **Példák.**

(1) Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, valamint $b \geq 0$. Ekkor az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = cx^2 + b$$

függvény gyengén szubkvadratikus.

(2) Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, valamint $b \geq 0$. Ekkor az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c|x| + b$$

függvény gyengén szubkvadratikus.

(3) Legyenek b és d nem negatív konstansok úgy, hogy $d \leq 3b$. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{ha } x \neq 0 \\ d, & \text{ha } x = 0, \end{cases},$$

függvény, gyengén szubkvadratikus.

5.6. **Megjegyzések.**

(1) A gyengén szubkvadratikus függvények definíciója alapján látható, hogy gyengén szubkvadratikus függvények nemnegatív skalárokkal vett lineáris kombinációja szintén gyengén szubkvadratikus. Ezen tulajdonság felhasználásával a fenti példákból újabb példákat konstruálhatunk.

(2) Minden nem-pozitív, gyengén szubkvadratikus függvény Jensen-konkáv, továbbá ha f korlátos is $\mathbb{R}$ egy nem üres, nyílt részhalmazán, akkor folytonos és így konkáv.

(3) Ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény gyengén szubkvadratikus, akkor a (19) egyenlőtlenségből $x = y = 0$ választással azt kapjuk, hogy

$$f(0) \geq 0.$$

Teljes indukcióval igazolható, hogy ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény gyengén szubkvadratikus, akkor minden k természetes szám esetén

$$f(kx) \leq k^2 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A következőkben a fentiekben bevezetett erősen szubkvadratikus és gyengén szubkvadratikus függvények közötti kapcsolatot vizsgáljuk. A kétféle szubkvadratika fogalom közötti kapcsolat vizsgálatának kérdése a 2007-ben Noszvajon rendezett „Conference on Inequalities and Applications ’07” konferencián merült fel [32]. Az alábbiakban ismertetett eredményeket a [35] cikkben publikáltuk. Velünk párhuzamosan S. Abramovich és K. Troczka-Pawelec is végzett hasonló vizsgálatokat. Mindketten megmutatták, hogy ha egy függvény erősen szubkvadratikus, akkor gyengén szubkvadratikus is, azonban az állítás megfordítás nem igaz. Ezen eredményeket a [3] és az [52] cikkekben közölték.

5.7. **Lemma.** *Ha* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *erősen szubkvadratikus függvény, akkor teljesül az*

$$f(x+y)+f(x-y)\le 2f(x)+2f(y) \qquad (x\ge y\ge 0). \tag{20}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus függvény, továbbá $\bar{x}$ és $\bar{y}$ olyan valós számok, melyekre $\bar{x}\ge\bar{y}\ge 0$ teljesül. Mivel f erősen szubkvadratikus, ezért definíció szerint minden $x\ge 0$ esetén van olyan $c_x\in\mathbb{R}$ valós szám, hogy

$$f(y)-f(x)\le c_x(y-x)+f(|y-x|) \qquad (y\ge 0).$$

Ebben az egyenlőtlenségben az y helyére $\bar{x}-\bar{y}$-t, majd $\bar{x}+\bar{y}$-t írva az

$$f(\bar{x}-\bar{y})-f(\bar{x})\le c_{\bar{x}}(-\bar{y})+f(\bar{y})$$

és az

$$f(\bar{x}+\bar{y})-f(\bar{x})\le c_{\bar{x}}\bar{y}+f(\bar{y})$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Ezeket összeadva, majd a kapott formulát rendezve

$$f(\bar{x}+\bar{y})+f(\bar{x}-\bar{y})\le 2f(\bar{x})+2f(\bar{y}),$$

adódik, ami a bizonyítandó állítás. ■

Mivel az erősen szubkvadratikus függvények értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, a gyengén szubkvadratikus függvények értelmezési tartománya pedig a teljes valós számok halmaza, ezért a további vizsgálathoz célszerű az erősen szubkvadratikus függvények értelmezési tartományát kiterjeszteni a valós számok halmazára.

5.8. **Tétel.** *Ha* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *erősen szubkvadratikus függvény, akkor az* $\bar{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{ha } x \geq 0 \\ f(-x), & \textit{ha } x < 0 \end{cases} \tag{21}$$

definiált páros kiterjesztése gyengén szubkvadratikus.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy ha az $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$ függvény eleget tesz a (20) egyenlőtlenségnek, akkor az $\bar{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ páros kiterjesztése gyengén szubkvadratikus. Tegyük föl, hogy $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$ teljesíti a (20) egyenlőtlenséget és legyen $\bar{x}\in\mathbb{R}$, valamint $\bar{y}\in\mathbb{R}$ adottak.

- Ha $\bar{x}\geq\bar{y}\geq 0$, akkor a (20) egyenlőtlenségből azonnal adódik az állítás.
- Ha $\bar{y}\geq\bar{x}\geq 0$, akkor a (20) egyenlőtlenségben az $x=\bar{y}$ és az $y=\bar{x}$ helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

  $$f(\bar{x}+\bar{y})+f(\bar{y}-\bar{x})\leq 2f(\bar{x})+2f(\bar{y}).$$

  Felhasználva az $\bar{f}$ függvény definícióját

  $$\bar{f}(x+y)+\bar{f}(x-y)\leq 2\bar{f}(x)+2\bar{f}(y) \qquad (x,y\geq 0) \tag{22}$$

  adódik.
- Ha $\bar{x}<0$ és $\bar{y}<0$, akkor a (22) egyenlőtlenségben az $x=-\bar{x}$ és $y=-\bar{y}$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

  $$\bar{f}(-\bar{x}-\bar{y})+\bar{f}(-\bar{x}+\bar{y})\leq 2\bar{f}(-\bar{x})+2\bar{f}(-\bar{y}),$$

  azaz

  $$\bar{f}\big(-(\bar{x}+\bar{y})\big)+\bar{f}\big(-(\bar{x}-\bar{y})\big)\leq 2\bar{f}(-\bar{x})+2\bar{f}(-\bar{y}),$$

  ami figyelembe véve az $\bar{f}$ párosságát, azt jelenti, hogy

  $$\bar{f}(\bar{x}+\bar{y})+\bar{f}(\bar{x}-\bar{y})\leq 2\bar{f}(\bar{x})+2\bar{f}(\bar{y}), \tag{23}$$

  azaz (19) teljesül minden $\bar{x}<0$ és $\bar{y}<0$ esetén.
- Ha $\bar{x}<0$ és $\bar{y}\geq 0$, akkor a (23) egyenlőtlenségben az $x=-\bar{x}$ és $y=\bar{y}$ helyettesítéseket végrehajtva

  $$\bar{f}(-\bar{x}+\bar{y})+\bar{f}(-\bar{x}-\bar{y})\leq 2\bar{f}(-\bar{x})+2\bar{f}(\bar{y}),$$

azaz

$$\bar{f}\big(-(\bar{x}-\bar{y})\big)+\bar{f}\big(-(\bar{x}+\bar{y})\big)\le 2\bar{f}(-\bar{x})+2\bar{f}(\bar{y})$$

adódik, ami az $\bar{f}$ párossága miatt azt jelenti, hogy teljesül a (19) egyenlőtlenség.

- Végül, ha $\bar{x}\ge 0$ és $\bar{y}<0$, akkor a (22) egyenlőtlenségben az $x=\bar{x}$ és $y=-\bar{y}$ helyettesítéssel az előbbi esethez hasonlóan azt kapjuk, hogy teljesül (19).

Ezzel megmutattuk, hogy ha az $f\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$ függvény eleget tesz a (20) egyenlőtlenségnek, akkor az $\bar{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ha } x\ge 0\\ f(-x), & \text{ha } x<0\end{cases}$$

kiterjesztése gyengén szubkvadratikus. Ekkor az (5.7) lemmát alkalmazva adódik a tétel állítása. ∎

5.9. **Megjegyzés.** Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, azaz van olyan $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gyengén szubkvadratikus függvény, melynek a $[0,\infty[$ intervallumra való leszűkítése nem erősen szubkvadratikus. Tekintsük az $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 3, & \text{ha } x=0\\ 1, & \text{ha } x\ne 0\end{cases}\tag{24}$$

függvényt. Ekkor f gyengén szubkvadratikus. Másrészt, ha $x=1$ és $y=3$ a (18) egyenlőtlenségben, akkor

$$f(3)-f(1)\le c_1\cdot 2+f(2),$$

ami az f definícióját figyelembe véve azt jelenti, hogy

$$1-1\le 2c_1+1,$$

így $c_1\ge -1/2$. Ugyanakkor, ha $x=1$ és $y=0$ a (18) egyenlőtlenségben, akkor

$$f(0)-f(1)\le c_1\cdot(-1)+f(1),$$

ami az f definícióját figyelembe véve azt jelenti, hogy

$$3-1\le -c_1+1,$$

így $c_1 \leq -1$, ami ellentmond annak, hogy $c_1 \geq -1/2$, tehát f nem erősen szubkvadratikus.

A következőkben az erősen szubkvadratikus és gyengén szubkvadratikus függvényekhez kapcsolódóan újabb egyenlőtlenségeket vezetünk be, melyeknek megvizsgáljuk a kapcsolatát az erősen szubkvadratikus és gyengén szubkvadratikus függvényekkel.

5.10. **Tétel.** *Ha* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *erősen szubkvadratikus függvény, akkor eleget tesz az*

$$f(x+y)+f(|x-y|) \leq 2f(x)+2f(y) \qquad (x,y\geq 0) \tag{25}$$

egyenlőtlenségnek.

Bizonyítás: Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$. Az f függvény pontosan akkor tesz eleget a (20) egyenlőtlenségnek, ha eleget tesz a (25) egyenlőtlenségnek, ugyanis ha $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ eleget tesz a (25)-nek, akkor (20) teljesül.
Másrészt, ha $x \geq y$, akkor a (20) egyenlőtlenségből következik (25). Végül, ha $x < y$, akkor a (20) egyenlőtlenségben megcserélve x és y szerepét a (25) egyenlőtlenség adódik. Az 5.7 tétel alkalmazásával kapjuk a tétel állítását. ∎

5.11. **Megjegyzés.** Az 5.10 tétel megfordítása nem igaz. A (24) pontban definiált függvény teljesíti a (25) egyenlőtlenséget, de nem erősen szubkvadratikus.

5.12. **Tétel.** *Ha* $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ *erősen szubkvadratikus függvény, akkor az* $\bar{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (21) *módon definiált páros kiterjesztése teljesíti az*

$$\bar{f}(x+y)+\bar{f}(|x-y|) \leq 2\bar{f}(x)+2\bar{f}(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}) \tag{26}$$

egyenlőtlenséget.

Bizonyítás: Legyen $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus. Az 5.10 tétel szerint f eleget tesz a (25) egyenlőtlenségnek. Legyen f páros kiterjesztése $\bar{f}$, továbbá $\bar{x}\in\mathbb{R}$ és $\bar{y}\in\mathbb{R}$ rögzített.

- Ha $\bar{x} \geq 0$ és $\bar{y} \geq 0$, akkor nyilvánvalóan teljesül a (26) egyenlőtlenség.

- Ha $\bar{x} < 0$ és $\bar{y} < 0$, akkor (25)-ben az $x = -\bar{x}$ és $y = -\bar{y}$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy
$$f(-\bar{x}-\bar{y}) + f(|-\bar{x}+\bar{y}|) \leq 2f(-\bar{x}) + 2f(-\bar{y}),$$
így
$$f\big(-(\bar{x}+\bar{y})\big) + f(|\bar{x}-\bar{y}|) \leq 2f(-\bar{x}) + 2f(-\bar{y}),$$
ami $\bar{f}$ párossága miatt azt jelenti, hogy teljesül (26).
- Ha $\bar{x} < 0$ és $\bar{y} \geq 0$, akkor (25)-ben $x = -\bar{x}$ és $y = \bar{y}$ helyettesítéssel
$$f(-\bar{x}+\bar{y}) + f(|-\bar{x}-\bar{y}|) \leq 2f(-\bar{x}) + 2f(\bar{y}) \tag{27}$$
adódik. Ha $|\bar{x}| \leq |\bar{y}|$, akkor $-\bar{x}+\bar{y} = |\bar{x}-\bar{y}|$ és $|-\bar{x}-\bar{y}| = \bar{x}+\bar{y}$, másrészt $\bar{f}$ párossága miatt $f(-\bar{x}) = f(\bar{x})$, így a (27) egyenlőtlenségből az kapjuk, hogy
$$f(|\bar{x}-\bar{y}|) + f(\bar{x}+\bar{y}) \leq 2f(\bar{x}) + 2f(\bar{y}), \tag{28}$$
azaz teljesül a (26) egyenlőtlenség. Ha $|\bar{x}| > |\bar{y}|$, akkor $-\bar{x}+\bar{y} = |\bar{x}-\bar{y}|$ és $|-\bar{x}-\bar{y}| = -(\bar{x}+\bar{y})$, így $\bar{f}$ párosságát felhasználva (28) adódik, tehát (26) teljesül.
- Végezetül, ha $\bar{x} \geq 0$ és $\bar{y} < 0$, akkor (25)-ben $x = \bar{x}$ és $y = -\bar{y}$ helyettesítést végrehajtva adódik az állítás.

Ezzel az állítást igazoltuk. ∎

5.13. **Tétel.** *Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gyengén szubkvadratikus függvény, akkor telesíti az*
$$f(x+y) + f(|x-y|) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{29}$$
egyenlőtlenséget.

Bizonyítás: Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gyengén szubkvadratikus függvény és $\bar{x}$ és $\bar{y}$ rögzített valós számok. Ha $\bar{x} \geq \bar{y}$, akkor teljesül a (19) egyenlőtlenség, így (29) is fennáll. Ha $\bar{x} < \bar{y}$, akkor (19)-ben $\bar{x} = y$ és $\bar{y} = x$ helyettesítéssel (29) adódik. ∎

5.14. **Megjegyzés.** Az 5.13 tétel megfordítása nem igaz.
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ 4, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

teljesíti a (29) egyenlőtlenséget. Azonban, ha a (19) egyenlőtlenségbe az $x = 1$ és $y = 2$ helyettesítéssel élünk, akkor

$$f(3) + f(-1) \leq 2f(1) + 2f(2)$$

adódik, amiből f definíciója miatt azt kapjuk, hogy

$$4 + 1 \leq 2 + 2,$$

azaz $5 \leq 4$, így f nem gyengén szubkvadratikus.

Összefoglalás

A doktori disszertáció öt fejezetből áll. Az első négy fejezet lineáris és nem lineáris függvényegyenletekkel foglalkozik. Az utolsó fejezetben leírjuk a szubkvadratikus függvények főbb tulajdonságait, és tisztázzuk a két fogalom kapcsolatát.

Az *első fejezet* egy csoportelméleti összefoglalója azoknak a tételeknek, amelyekre a következő három fejezetben szükségünk van. Ugyanitt történik a későbbiekben használt jelölésrendszer rögzítése. Ebben a szakaszban az egyik legfontosabb állítás az orbit-stabilizátor tétel, amely kulcsfontosságú szerepet játszik a következő fejezetek fő tételeiben.

A *második fejezet*ben a

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f \circ g_k = h$$

alakú lineáris függvényegyenlet általános megoldását határozzuk meg. Itt $g_1, \ldots, g_r$ a valós számok halmazának egy részhalmazán értelmezett olyan függvények, melyek a függvénykompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, valamint $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ és h az előbb említett halmazon értelmezett adott, valós értékű függvények. Ezen egyenletek megoldása során az $f \circ g_k$ helyettesítésekkel az egyenletből újabb egyenleteket kapunk. Mivel az eredeti függvényegyenlet lineáris volt, ezért ilyenkor egy lineáris egyenletrendszerhez jutunk, így alkalmas regularitási feltétel mellett, például a Cramer-szabály alkalmazásával az egyenletrendszer megoldható lesz. A fenti függvényegyenletre egy stabilitási állítást is megfogalmazunk. Fő tételünk az alábbi módon hangzik:

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres halmaz, legyenek továbbá*

$$g_1, \ldots, g_r \colon H \to H$$

olyan függvények, melyek a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, valamint legyenek

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r; h \colon H \to \mathbb{R}$$

adottak. Tegyük fel, hogy az

$$A := [\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i]$$

mátrix determinánsa nem nulla a H halmazon. Jelölje A_h azt a mátrixot, melyet A-ból kapunk oly módon, hogy annak első oszlopát a $(h \circ g_1, \ldots, h \circ g_r)$ vektorral helyettesítjük. Ekkor az

$$f = \frac{\det A_h}{\det A}$$

módon definiált függvény egyértelmű megoldása a

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f \circ g_k = h$$

egyenletnek H-n. Tegyük fel továbbá, hogy $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ eleget tesz az

$$\Big| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi \circ g_k - h \Big| \leq \varepsilon.$$

egyenlőtlenségnek. Ekkor teljesül az

$$|f - \varphi| \leq \varepsilon \|A^{-1}\|_\infty$$

összefüggés.

Állításinkat a fejezet végén több példával illusztráljuk.

A *harmadik fejezet*ben Charles Babbage angol matematikus vizsgálatai által motiválva vizsgálatunk középpontjában az

$$F\big(f \circ g_1, \ldots, f \circ g_r\big) = h$$

alakú függvényegyenletek állnak, ahol $g_1, \ldots, g_r$, valamint F és h adott függvények, továbbá $\{g_1, \ldots, g_r\}$ csoportot alkot a függvénykompozíció műveletével. Meghatározandó az f ismeretlen függvény. Ki fog derülni, hogy ezek az egyenletek csak bizonyos számú kezdetiérték feltétel megadása mellett oldhatók meg. Ezek számát az algebrai struktúra stabilizátora határozza meg. Fő tételünk igazolásában az inverzfüggvény-tétel játssza a fő szerepet. Tételünk a következőképpen hangzik:

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *táblázat szerint. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $h\colon H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \qquad (i = 1, \dots, mn)$$

Definiáljuk az $A : \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ leképezést az alábbi módon:

$$A(x) := [\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})].$$

Ha A reguláris a p pontban és

$$G_\xi(H) \subset Z\big(G(H)\big),$$

akkor létezik egy ξ-t tartalmazó, $G(H)$-invariáns nyílt $H_0 \subset H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amely teljesíti az

$$F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t)) = h(t),$$
$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l.$$

egyenletet.

Az értekezés *negyedik fejezetében* az

$$F\big(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r, \mathrm{id}\big) = 0$$

alakú függvényegyenletet vizsgáljuk, ahol $\{g_1, \dots, g_r\}$, valamint F adott függvények, továbbá $\{g_1, \dots, g_r\}$ csoportot alkot a kompozíció műveletére nézve. Vizsgálatainkban az implicitfüggvény-tétel, valamint a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó globális egzisztencia- és unicitási tétel kap kulcsszerepet. Fő tételünk:

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$ és*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonosan differenciálható függvény, melyre minden $i = 1, \ldots, mn$ esetén teljesül, hogy

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = 0.$$

Definiáljuk az $A\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ és $B\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$ leképezéseket az

$$\begin{aligned} A(x,t) &:= \left[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i}, g_i(t))\right], \\ B(x,t) &:= \left[\partial_{mn+1} F(x_{*i}, g_i(t)) g_i'(t)\right] \end{aligned}$$

formula szerint. Tegyük fel, hogy A reguláris a (p, ξ) pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \to A^{-1}B(x,t)$ leképezés Lipschitz a (p, ξ) egy környezetében, akkor létezik egy $G(H)$-invariáns, nyílt, ξ-t tartalmazó $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott differenciálható $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$\begin{aligned} F(f \circ g_1(t), \ldots, f \circ g_{mn}(t), t) &= 0, \\ f \circ g_{kn+l}(\xi) &= \eta_l. \end{aligned}$$

egyenletnek.

Ezt követően az előbb ismertetett tétel két következményét is ismertetjük. Az első következményben F lineáris függvény. A tétel jelöléseit megtartva az $A(x, t)$ mátrix csak a második változótól függ, így az $x \to A(x, t)$ leképezés Lipschitz tulajdonsága azonnal adódik. Ez a következmény hasonló állítást fogalmaz meg, mint az előző fejezet főtétele, azonban ez egy „gyengébb” állítást, mivel itt a regularitási feltételek erősebbek. A második következményben a vizsgált egyenlet nem lineáris, de az $A(x, t)$ mátrix csak az első változótól függ.

Következmény. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és*

$$G(H) = \{g_1, \ldots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyenek*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{mn}\colon H \to \mathbb{R}$$

folytonos függvények, továbbá legyen $h\colon H \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Definiáljuk az alábbi mátrixot:

$$D(t) := \left[\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i(t)\right].$$

Ha D reguláris a ξ pontban, akkor létezik egy ξ-t tartalmazó $G(H)$-invariáns, nyílt $H_0 \subseteq H$ halmaz és egy egyértelműen meghatározott $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$\alpha_1 f \circ g_1 + \cdots + \alpha_{mn} f \circ g_{mn} = h$$

egyenletnek.

Következmény. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ nem üres, nyílt halmaz, $\xi \in H$, és*

$$G(H) = \{g_1, \ldots, g_{mn}\}$$

folytonos függvények csoportja a (4) *szerinti táblázattal. Legyen $\eta \in \mathbb{R}^n$, továbbá*

$$p = (\eta, \ldots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

és legyen $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi)) \qquad (i = 1, \ldots, mn)$$

teljesül. Tegyük föl, hogy a $D\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$,

$$D(x) := \big[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})\big]$$

leképezés reguláris a p pontban. Ha vagy $m = 1$ vagy $m \geq 2$ és az $x \to D^{-1}(x)$ leképzés Lipschitz a p környezetében, akkor létezik egy $G(H)$-invariáns, ξ-t tartalmazó, $H_0 \subseteq H$ nyílt halmaz és egy egyértelműen meghatározott, differenciálható $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ függvény, mely eleget tesz az

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l$$

feltételnek és teljesíti az

$$F\big(f \circ g_1(t), \ldots, f \circ g_{mn}(t)\big) = h(t)$$

függvényegyenletet.

Állításinkat a fejezet végén több példával illusztráljuk.

A bemutatott eredményeket a [24], [25], [26] dolgozatokban közöltük, jelentősen kiegészítve megjavítva Bessenyei [23] tételeit.

Az *ötödik fejezet*ben ismertetjük az erősen szubkvadratikus függvények fogalmát: az $f\colon [0, \infty] \to \mathbb{R}$ függvényt erősen szubkvadratikusnak mondjuk, ha minden $x \geq 0$ esetén létezik olyan $c_x \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y-x) + f(|y-x|) \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

majd néhány elemi példát mutatunk azon függvényekre, melyek eleget tesznek az említett egyenlőtlenségnek. Ezt követően leírjuk az erősen szubkvadratikus függvények legfontosabb tulajdonságait. Ezután megadjuk a gyengén szubkvadratikus függvények definícióját. Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény kvadratikus, ha teljesíti a normanégyzet egyenletet (vagy paralelogramma azonosságot, vagy Jordan–von Neumann azonosságot):

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ehhez kapcsolódóan, mint ahogyan az additív függvényekből definiáljuk a szubadditív függvényeket, ugyanúgy a kvadratikus függvényekből definiálhatjuk a gyengén szubkvadratikus függvényeket: azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *gyengén szubkvadratikus*, ha minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesíti az

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséget. Ebben a szakaszban ismertetjük ezen függvények fontosabb tulajdonságait példákkal illusztrálva. A fentiekben definiált kétféle szubkvadratika fogalom közötti kapcsolat vizsgálatának kérdése elsőként a 2007-ben, Noszvajon rendezett „Conference on Inequalities and Applications '07" konferencián merült. Ebben a fejezetben precízen leírjuk a kétféle definíció közötti kapcsolatot. Ki fog derülni, hogy ha $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus függvény, akkor teljesül az

$$f(x+y) + f(x-y) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x \geq y \geq 0).$$

egyenlőtlenség. A vizsgált függvények értelmezési tartománya nem egyezik meg, így természetes módon adódik, hogy tekintsük az erősen szubkvadratikus függvények páros kiterjesztését, és az így kapott függvénynek vizsgáljuk a gyengén szubkvadratikus függvényekkel való kapcsolatát. Belátható, hogy ha $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus függvény, akkor az $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

módon definiált páros kiterjesztése gyengén szubkvadratikus. Az előbbi tétel megfordítása nem igaz: azaz megadható olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gyengén szubkvadratikus függvény, melynek a $[0, \infty[$ intervallumra való leszűkítése nem erősen szubkvadratikus. Ebben a szakaszban bevezetünk és megvizsgálunk egy harmadik egyenlőtlenséget, mely az előzőekhez szorosan kapcsolódik:

$$\bar{f}(x + y) + \bar{f}(|x - y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Megmutatjuk, hogy ha $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ erősen szubkvadratikus függvény, akkor az $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ páros kiterjesztése teljesíti az

$$\bar{f}(x + y) + \bar{f}(|x - y|) \leq 2\bar{f}(x) + 2\bar{f}(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenséget. A szakaszban szereplő eredményeket a [35] cikkben publikáltuk.

Summary

This PhD dissertation consists of five chapters. In the first four chapters linear and nonlinear functional equations are investigated in the fifth chapters functional inequalities are investigated, namely subquadratic funtions, describing the elementary properties of these functions and we give the connections between two different subquadratic notions.

In the *first chapter* we summarize some results of group theory, which we will use in the next chapters and we introduce the notations which will be used in the dissertation. In this chapter the most important statemant the Orbit-Stabilizer Theorem, which plays the key role in the proofs of the theorems of the next chapters.

In the *second chapter* we shall consider the functional equation

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f \circ g_k = h,$$

where $g_1, \dots, g_r$; $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and h are given functions with appropriate domains and ranges. Furthermore we assume that the functions $g_1, \dots, g_r$ generate a group under the operation of composition. Applying the composition f_k the equation can be reduced to systems of equations with unknowns $f_k = f \circ g_k$ after composition with g_k. The system is linear and hence if we assume some reularity properties the solution can be expressed by Cramer's rule. In this section we prove a stability theorem for the investigated equation. The main theorem of this chapter is:

Theorem. *Let $H \subset \mathbb{R}$ a nonempty set and*

$$g_1, \dots, g_r \colon H \to H$$

be functions forming a group under the operation of composition. Also let

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r; h\colon H \to \mathbb{R}$$

be given functions, and assume that the determinant the matrix

$$A := [\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i]$$

is nonsingular on H. If A_h stands for the matrix which is obtained from A replacing the first column by, in turn, $h \circ g_1, \dots, h \circ g_r$, then *$f\colon H \to \mathbb{R}$ given by*

$$f = \det A_h / \det A$$

is the unique solution of

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f \circ g_k = h$$

on H. Moreover, if $\varphi\colon H \to \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\Big| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi \circ g_k - h \Big| \le \varepsilon,$$

then the next inequality holds:

$$|f - \varphi| \le \varepsilon \|A^{-1}\|_\infty.$$

At the end of the chapter we give some examples to illustrate the main theorem.

In the *third chapter* motivated by some investigations of Charles Babbage, we study a class of single variable functional equations:

$$F\big(f \circ g_1, \dots, f \circ g_r\big) = h,$$

where $g_1, \dots, g_r$, F and h are given functions and $\{g_1, \dots, g_r\}$ form a group under the operation of composition. It turns out that the algebraic structure of a stabilizer determines the number of initial value conditions for the functional equation. In the proof of the main result, the Implicit Function Theorem plays the key role. The main theorem is:

Theorem. *Let $H \subset \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and*

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuous functions by the tabular (4). *Let $\eta \in \mathbb{R}^n$,*

$$p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

and let $h\colon H \to \mathbb{R}$ be a continuous function, $F\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function such that

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi) \qquad (i = 1, \dots, mn).$$

Define the mapping $A : \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ *by*

$$A(x) := [\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})].$$

If A *is regular at* p *and*

$$G_\xi(H) \subset Z(G(H)),$$

then there exist a $G(H)$*-invariant open set* $H_0 \subset H$ *containing* ξ *and a unique differentiable function* $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ *satisfying the equation*

$$F(f \circ g_1(t), \ldots, f \circ g_{mn}(t)) = h(t),$$
$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l.$$

In the *fourth chapter* of the dissertation we investigate the equations,

$$F\big(f \circ g_1, \ldots, f \circ g_r\big) = h,$$

where $\{g_1, \ldots, g_r\}$ and F are given functions and $\{g_1, \ldots, g_r\}$ form a group under the operation of composition. In the investigations we utilise the Implicit Function Theorem and the Global Existence and Uniqueness Theorem.

Theorem. *Let* $H \subseteq \mathbb{R}$ *be a nonempty open subset,* $\xi \in H$*, and*

$$G(H) = \{g_1, \ldots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions. Let $\eta \in \mathbb{R}^n$*,*

$$p = (\eta, \ldots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$$

and let $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be a continuously differentiable function such that*

$$F(p_{*i}, g_i(\xi)) = 0$$

hold for all $i = 1, \ldots, mn$*. Define the mappings* $A\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ *and* $B\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{mn}$ *by*

$$A(x,t) := \big[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i}, g_i(t))\big],$$
$$B(x,t) := \big[\partial_{mn+1} F(x_{*i}, g_i(t)) g_i'(t)\big]$$

and assume that A *is regular at* (p, ξ)*. If either* $m = 1$ *or* $m \geq 2$ *and the mapping* $x \to A^{-1}B(x,t)$ *is Lipschitz in a neighborhood of* (p, ξ)

then there exist a $G(H)$-invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ satisfying

$$F(f \circ g_1(t), \dots, f \circ g_{mn}(t), t) = 0,$$
$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l.$$

The chapter contains two Corollaries. In the first one, we consider the case when F is linear in its arguments except for the last one. In this setting, keeping the notations of the Main Theorem, the matrix $A(x,t)$ depends only on its second variable. In particular, the Lipschitz property of the mapping $x \to A(x,t)$ is straightforward. In the second Corollary F is nonlinear, but does not depend on the free variable. This phenomenon is reflected in the fact that the matrix $A(x,t)$ depends only on the first variable.

Corollary. Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions by (4). Let

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{mn}\colon H \to \mathbb{R}$$

be continuous, $h\colon H \to \mathbb{R}$ be continuously differentiable functions and

$$D(t) := \left[\alpha_{j*i^{-1}} \circ g_i(t)\right].$$

If D is regular at ξ, then there exist a $G(H)$-invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ satisfying the functional equation

$$\alpha_1 f \circ g_1 + \dots + \alpha_{mn} f \circ g_{mn} = h.$$

Corollary. Let $H \subseteq \mathbb{R}$ be a nonempty open set, $\xi \in H$, and

$$G(H) = \{g_1, \dots, g_{mn}\}$$

be a group of continuously differentiable functions by (4). Let $\eta \in \mathbb{R}^n$, $p = (\eta, \dots, \eta) \in \mathbb{R}^{mn}$ and let $F\colon \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function such that

$$F(p_{*i}) = h \circ g_i(\xi))$$

hold for all $i = 1, \ldots, mn$. Assume that the mapping $D\colon \mathbb{R}^{mn} \to \mathcal{M}$ defined by

$$D(x) := \big[\partial_{j*i^{-1}} F(x_{*i})\big]$$

is regular at p. If either $m = 1$ or $m \geq 2$ and the mapping $x \to D(x)$ is Lipschitz in a neighborhood of p, then there exist a $G(H)$-invariant open set $H_0 \subseteq H$ containing ξ and a unique differentiable function $f\colon H_0 \to \mathbb{R}$ satisfying the conditions

$$f \circ g_{kn+l}(\xi) = \eta_l$$

and functional equation

$$F\big(f \circ g_1(t), \ldots, f \circ g_{mn}(t)\big) = h(t).$$

At the end of the chater we give some examples to illustrate the application of the main theorem.

These results were presented in the [24], [25], [26] papers, which generalize the Theorems of Bessenyei [23].

In the *fifth chapter* we give the definition of strongly subquadratic functions. A function $f\colon [0, \infty] \to \mathbb{R}$ is said to be strongly subquadratic if for any $x \geq 0$ there exists a constant $c_x \in \mathbb{R}$ such that

$$f(y) - f(x) \leq c_x(y - x) + f(|y - x|) \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

thereafter. We show some basic examples for this functions. In this chapter we describe the main properties of strongly subquadratic functions. Then we define weakly subquadratic functions. The other concept of subquadraticity is related to quadratic functions. A function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called quadratic if it satisfies the square-norm (in other terminologies the parallelogram or Jordan–von Neumann) equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Based on this notion and analogously to the concepts of additive and subadditive functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called subquadratic if it fulfils the inequality

$$f(x + y) + f(x - y) \leq 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

We show the main properties and give some examples of these functions. The main part of this chapter is the problem of investigating the connections between the different concepts of subquadraticity. This problem arose during the Conference on Inequalities and Applications '07 held in Noszvaj, Hungary in 2007. In this section summarizing and extending these results, we completely describe the relation between the two concepts of subquadraticity. It turns out that if $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ is strongly subquadratic, then it satisfies the inequality

$$f(x+y)+f(x-y)\leq 2f(x)+2f(y) \qquad (x\geq y\geq 0).$$

The domains of the investigated functions are not equal, thus we introduce the even extension of strongly subquadratic function and examine the connection between these functions and weakly subquadratic functions. It can be proved that, if $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ is a strongly subquadratic function then its even extension $\bar{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by,

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ha } x\geq 0\\ f(-x), & \text{ha } x<0\end{cases}$$

is weakly subquadratic. The converse of the previous theorem is not true: more precisely, there exists a weakly subquadratic function $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that its restriction $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ is not strongly subquadratic. On the other hand we introduce and investigate a third inequality related to both concepts of subquadraticity, namely

$$\bar{f}(x+y)+\bar{f}(|x-y|)\leq 2\bar{f}(x)+2\bar{f}(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

We prove that if $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ is a strongly subquadratic function then its even extension $\bar{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\bar{f}(x+y)+\bar{f}(|x-y|)\leq 2\bar{f}(x)+2\bar{f}(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}).$$

The results of this chapter were published in paper [35].

Irodalomjegyzék

[1] S. Abramovich, *Superquadracity of functions and rearrangements of sets*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **8** (2007), Article 46, 5.

[2] S. Abramovich, *1. Remark*, Problems and Remarks, Inequalities and Applications (Eds. C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, Zs. Páles, M. Plum), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009, xli.

[3] S. Abramovich, *On superquadracity*, J. Math. Inequal. **3** (2009), 329–339.

[4] S. Abramovich, S. S. Dragomir, *Normalized Jensen functional, superquadracity and related topics*, Inequalities and Applications (Eds. C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, Zs. Páles, M. Plum), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009, 217–228.

[5] S. Abramovich, S. Banić, M. Matic, *Superquadratic functions in several variables*, J. Math. Anal. Appl. 137 **2** (2007), 1444–1460.

[6] S. Abramovich, G. Farid, J. Pečarić *More about Jensen's inequality and Cauchy's mean for superquadratic function*, J. Math. Ineq. **7** (2013), 11–24.

[7] S. Abramovich, S. Ivelić, J. Pečarić, *Improvement of Jensen–Steffensen's inequality for superquadratic functions*, Banach J. Math. Anal. **4** (2010), 159–169.

[8] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Refining of Jensen's inequality*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **95** (2004), 3–14.

[9] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Inequalities for averages of convex and superquadratic functions*, JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math. **5** (2004), Art. 91.

[10] S. Abramovich, J. Barić, J. Pečarić *Fejér and Hermite–Hadamard type inequalities for superquadratic functions*, J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 1048–1056.

[11] S. Abramovich, G. Jameson, G. Sinnamon, *Inequalities for averages of convex and superquadratic functions*, J. Inequal. Pure Appl.Math. **7** (2008), 289–296.

[12] S. Abramovich, L.-E. Persson, J. Pečarić, S. Varošanec, *General inequalities via isotonic subadditive functionals*, Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 15–28.

[13] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966.

[14] S. Babai, *Függvényegyenletek és csoporthatások*, Bs.C. Szakdolgozat, Debreceni Egyetem, 2010.

[15] Ch. Babbage, *An essay towards a calculus of functions I.*, Phil. Trans. **105** (1815), 389–423.

[16] Ch. Babbage, *An essay towards a calculus of functions II.*, Phil. Trans. **106** (1816), 179–256.

[17] Ch. Babbage, *Observations on the analogy which subsists between the calculus of functions and the other branches of analysis*, Phil. Trans. **107** (1817), 197–216.

[18] Ch. Babbage, *Solutions of some problems by means of the calculus of functions*, J. Science **2** (1817), 371–379.

[19] Ch. Babbage, *Observations on the notation employed in the calculus of functions*, Trans. Camb. Phil. Soc. **1** (1822), 63–76.

[20] S. Banić, *Superquadratic functions*, PhD thesis, (2007) Zagreb (in Croatian).

[21] S. Banić, S. Varošanec, *Functional inequalities for superquadratic functions*, J. International Journal of Pure and Appl. Math. **43** (2008), 717–729.

[22] S. Banić, J. Pečarić, S. Varošanec, *Superquadratic functions and refinements of some classical inequalities*, J. Korean Math. Soc. **45** (2008), 513–525.

[23] M. Bessenyei, *Functional equations and finite groups of substitutions*, Amer. Math. Monthly **117** (2010), no. 10, 921–927.

[24] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi, *Functional equations and group substitutions*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), no. 6, 1525–1531.

[25] M. Bessenyei, G. Horváth and Cs. G. Kézi, *Functional equations on finite groups of substitutions*, Expo. Math. **30**, (2012), no. 3, 283–294.

[26] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi, *Solving functional equations via finite substitutions*, Aequationes Math. **85** (2013), no. 3, 593–600.

[27] V. S. Brodskii and A. K. Slipenko, *Functional Equations*, Visa Skola, Kiev, USSR, 1986.

[28] E. Castillo and R. Ruiz-Cobo, *Functional equations in science and engineering*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics **161**, Marcel Dekker, New York, 1992.

[29] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[30] J. D. Dixon and B. Mortimer, *Permutation groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 163, Springer-Verlag, New York, 1996.

[31] W. Eichhorn, *Functional equations in economics*, Addison-Wesley, London, 1978.

[32] A. Gilányi, *Remark on subquadratic functions, Presented at the conference on Inequality and applications 2007*, Noszvaj, Hungary, September 2007.

[33] A. Gilányi, *5. Remark (Remark on subquadratic functions, related to Shoshana Abramovich's talk and remark)*, Problems and Remarks, Inequalities and Applications (Eds. C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, Zs. Páles, M. Plum), Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2009, xliii–xlv.

[34] A. Gilányi, K. Troczka-Pawelec, *Regularity of weakly subquadratic functions*, J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), 814–821.

[35] A. Gilányi, Cs. Kézi, K. Troczka-Pawelec, *On two different concepts of subquadraticity*, Inequalities and Applications 2010 **161** (2012), 209–215.

[36] Hegedűs, J. *Fréchet-derivált és implicitfüggvény-tétel feladatokban*, diplomamunka, Debreceni Egyetem, 2010.

[37] Gy. Nagy, ed., KöMal–Mathematical and Physical Journal for Secondary Schools, `http://www.komal.hu`.

[38] Z. Kominek, K. Troczka, *Some remarks on subquadratic functions*, Demonstratio Mathematica **39** (2006), 751–758.

[39] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawn. Nauk. — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[40] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, 2$^{\text{nd}}$ edition, Birkhäuser Verlag, 2009.

[41] M. Kuczma, B. Choczewski, and R. Ger, *Iterative Functional Equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[42] K. Lajkó, *Függvényegyenletek feladatokban*, Debreceni Egyetem, Matematika Intézet 2006.

[43] A. Majorana, *A uniqueness theorem for* $y' = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 1, 215–220.

[44] J. A. Oguntuase, L.-E. Persson, *Refinement of Hardy's inequalities via superquadratic and subquadratic functions*, J. Math. Anal. Appl. **339** (2008), 1305–1312.

[45] S. Presić, *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x) = H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x))$, Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak. Scr. Math. Fiz (1963), no. 118, 17–20.

[46] S. Presić, *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaries*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotechn. Fak. Scr. Math. Fiz (1963), no. 119, 21–28.

[47] G. L. Alexanderson, L. F. Klosinski and L. C. Larson, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition/Problems and Solutions: 1965-1984*, The Mathematical Association of America, Washington, 2004.

[48] R. A. Rosenbaum, *Subadditive functions*, Duke Math. J. **17** (1950), 227–242.

[49] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[50] W. Smajdor, *Subadditive and subquadratic set-valued functions*, Scientific Publications of the University of Silesia, Katowice, **889** (1987).

[51] C. G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer Science+Buisiness Media, LLC, New York (USA), 2007.

[52] K. Troczka-Pawelec, *Some inequalities connected with a quadratic functional equation*, Pr. Nauk. Akad. Jana Dlugosza Czest. Mat. **13** (2008), 73–79.

[53] D. V. V. Wend, *Uniqueness of solutions of ordinary differential equations*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 948–950.