



AZ INFORMÁCIÓELMÉLET NÉHÁNY
FÜGGVÉNYEGYENLETÉNEK STABILITÁSA

doktori (PhD) értekezés

Gselmann Eszter

Témavezető: Dr. Maksa Gyula

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYOK DOKTORI TANÁCS
MATEMATIKA– ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

Debrecen, 2010.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori program Függvényegyenletek alprogramja keretében készítettem 2007-2010 között és ezúton nyújtom be a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (Ph.D.) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2010.

.....
Gselmann Eszter
jelölt

Tanúsítom, hogy Gselmann Eszter doktorjelölt 2007-2010 között a fent nevezett doktori alprogram keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglaltak a jelölt önálló munkáján alapulnak, az eredményekhez önálló alkotó tevékenységével meghatározó módon járult hozzá. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2010.

.....
Dr. Maksa Gyula
témavezető

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Maksa Gyulának, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott nekem mind a tanulmányaim, mind a kutatásaim során. Rengeteget tanultam Tőle.

Ugyancsak köszönettel tartozom az Analízis Tanszék minden oktatójának, hogy egy olyan motiváló környezetet sikerült kialakítaniuk, mely nélkül a jelen disszertáció nem születhetett volna meg. Közülük elsősorban Dr. Páles Zsoltot és Dr. Boros Zoltánt szeretném kiemelni, a velük való beszélgetések mindig óriási motivációt jelentettek számomra.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm szüleimnek, testvéremnek és barátaimnak azt, hogy támogattak, bíztattak és mindvégig mellettem álltak.

„Egyikünk élete sem könnyű. És akkor? Legyen bennünk kitartás és mindenekelőtt bízzunk önmagunkban. Hinnünk kell benne, hogy tehetségesek vagyunk valamiben, és azt a valamit – kerül, amibe kerül – meg tudjuk valósítani.”

(Marie Curie)

Tartalomjegyzék

Bevezetés	i
1. Információmértékek	1
1.1. Információmértékek	1
1.2. Az információ paraméteres alapegyenlete	5
2. Függvényegyenletek, függvényegyenletek stabilitása	19
2.1. Függvényegyenletek	19
2.2. Függvényegyenletek stabilitása	22
3. A paraméteres információ–alapegyenlet stabilitása	30
3.1. Az $\alpha < 0$ eset	31
3.2. Az $\alpha = 0$ és az $0 < \alpha \neq 1$ eset	36
4. Alkalmazások	51
4.1. Az entrópia–egyenlet stabilitása	51
4.2. A módosított entrópia–egyenlet stabilitása	61
4.3. Az α –rekurzív, 3–szemi–szimmetrikus információmértékek sta- bilitása	79
Summary	85
Összefoglalás	91
Irodalomjegyzék	99

Bevezetés

„ ... Az, hogy az információ mennyiségét számszerűleg ki lehet fejezni, mérni lehet, ma már vitán felül áll. Az a kérdés azonban, hogy hogyan történjék ez, milyen mérőszámokkal, még nincs lezárva. ”

– írja Rényi Alfréd egy 1960-ban megjelent cikkében (lásd [52]). Ma már azonban azt is tudjuk, hogy az információértékek karakterizációs problémája egy lezárulófélben lévő problémakör, lásd Aczél [4]. Azt reméljük azonban, hogy ezzel a disszertációval illetve a benne szereplő stabilitási eredményekkel sikerül kiegészíteni a korábbi eredményeket.

A disszertáció négy fejezetből áll, mindegyik fejezet külön bevezetéssel rendelkezik, melyben összefoglaljuk az értekezésben használt definíciókat és tételeket, megadva azok irodalmi adatait is.

A disszertáció témája bizonyos – az információértékek jellemzése során felmerülő – függvényegyenletek stabilitásának a vizsgálata. Információérték alatt a továbbiakban egy olyan valós értékű függvényekből álló $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ sorozatot fogunk érteni, mely általában a

$$\Gamma_n^\circ = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

vagy a

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

halmazon van értelmezve minden $n \geq 2$ esetén, ahol $\mathbb{R}$ jelöli a valós számok halmazát.

Az egyik legismertebb információérték az úgynevezett *Shannon-entropia* (lásd [53]),

$$H_n^1(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i), \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ, n \geq 2)$$

illetve az úgynevezett α -adfokú entropia vagy Havrda–Charvát entropia, melyet újabban Tsallis-entropiának is neveznek (lásd [11], [28] [57]), amit a

$$H_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} (\sum_{i=1}^n p_i^\alpha - 1), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ H_n^1(p_1, \dots, p_n), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

módon értelmezzük minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén.

Velük kapcsolatban az egyik fő kérdés az, hogy megkövetelve egy információértékről bizonyos „természetes” és lehetőleg „gyenge” tulajdonságokat, igaz-e, hogy akkor az megegyezik a fent ismertetett információértékek valamelyikével. Amint azt a soron következő fejezetben látni fogjuk, ezen karakterizációs probléma során függvényegyenletek jelennek meg, és a probléma ezek különböző feltételek melletti megoldásának problémájára redukálható. A téma legfontosabb eredményeit a következő fejezetben ismertetjük majd, de ezek az eredmények teljes részletességgel megtalálhatóak az Aczél–Daróczy [5] és az Ebanks–Sahoo–Sander [16] monográfiákban illetve a Maksa [45] kandidátusi értekezésben. A szimmetrikus (vagy csak szemiszimmetrikus), rekurzív információértékek jellemzési problémája során jelenik meg például az információ alapegyenlete, azaz az

$$f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

függvényegyenlet, ahol $D^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v, u+v \in]0, 1[\}$, míg, ha a rekurzivitás helyett α -rekurzivitást követelünk meg, akkor az úgynevezett *paraméteres alapegyenlethez* jutunk,

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right). \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

A témakör alapvető fogalmainak tisztázása után rátérünk arra, hogy hogyan származtathatóak ezek az egyenletek, melyeknek az általános megoldásait is ismertetjük a következő fejezetben. Ezek után a függvényegyenletek stabilitáselméletének legfontosabb eredményeit és módszereit foglaljuk össze, majd megfogalmazzuk a disszertáció fő célkitűzését. Nevezetesen,

tudva, hogy egy függvény csak „megközelítőleg” elégíti ki az információ paraméteres alapegyenletét, vajon igaz-e, hogy ez a függvény „közel” van az alapegyenlet valamely megoldásához. A dolgozat harmadik fejezetét ezen kérdés megválaszolásának szenteljük. Mint azt majd látni fogjuk, az előbbi kérdésre a válasz lényegesen függ a paraméteres alapegyenletben szereplő α paraméter értékétől. Ettől a paramétertől függően tudunk majd stabilitást, szuperstabilitást, illetve hiperstabilitást igazolni.

A disszertáció fő célja tehát a paraméteres információ-alapegyenlet stabilitásának a vizsgálata. Természetesen, ha az információértékekről szimmetria és rekurzivitás helyett más tulajdonságok teljesülését követeljük meg, akkor más függvényegyenletekhez jutunk. Így például, az összeg-tulajdonságot feltételezve jutunk el az úgynevezett *Behara–Nath I. egyenlethez*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n f(p_i) + \sum_{j=1}^m f(q_j) + \lambda \sum_{i=1}^n f(p_i) \sum_{j=1}^m f(q_j),$$

minden $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ, (q_1, \dots, q_m) \in \Gamma_m^\circ$ esetén, illetve a *Behara–Nath II. egyenlethez*,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^n p_i^\alpha \sum_{j=1}^m f(q_j) + \sum_{j=1}^m q_j^\beta \sum_{i=1}^n f(p_i),$$

tetszőleges $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ, (q_1, \dots, q_m) \in \Gamma_m^\circ$ esetén.

A stabilitás kérdése nyilván ezen egyenletekkel összefüggésben is feltehető. Az ezekkel kapcsolatos eredményeket a Kocsis [38] disszertáció, illetve [39] tartalmazza, így mi ebben a dolgozatban ezzel a kérdéssel nem fogunk foglalkozni.

Végül, a disszertáció negyedik fejezetében néhány példán keresztül megmutatjuk, hogy a harmadik fejezet eredményei miként alkalmazhatóak más függvényegyenletek stabilitásának vizsgálatakor. Itt részletesen az entrópia- és a módosított entrópia-egyenlet stabilitását vizsgáljuk. Továbbá, azt is igazolni fogjuk, hogy a 3-szemi-szimmetrikus, α -rekurzív információmértekek rendszere stabil.

1. Információmértékek

A disszertációban az $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ szimbólumok a matematikai standardnak megfelelően rendre a természetes (pozitív egész), az egész, a racionális, a valós és a komplex számok halmazát jelölik. Továbbá, a pozitív valós, illetve a nemnegatív valós számok halmazára a továbbiakban az $\mathbb{R}_{++}$ és az $\mathbb{R}_+$ jelöléseket fogjuk használni.

Ebben a fejezetben először összefoglaljuk azokat a definíciókat és állításokat, melyeket a soron következő fejezetekben használni fogunk. Nevezetesen, definiálni fogjuk az információmértékeket, ezek után az információmértékekkel kapcsolatos néhány alapvető fogalmat sorolunk fel, mint például a rekurzivitás, a normáltság és a szimmetria. Majd rátérünk arra, hogy az információmértékek jellemzése során miként jelennek meg függvényegyenletek. Itt ismertetjük – az általános megoldással együtt – az információ alapegyenletét és az információ paraméteres alapegyenletét.

1.1. Információmértékek

Az információ mérésének kérdését először Hartley [27] vetette fel. Ő események entrópiáját olyan teljes eseményrendszerekre definiálta, melyekben minden esemény egyforma valószínűséggel szerepel. A matematikusok körében azonban Shannon egy 1948-ban megjelent dolgozata keltett nagyobb érdeklődést (lásd [53]), ő már tetszőleges teljes eseményrendszer entrópiáját definiálta. Ahhoz, hogy megértsük a Shannon által az entrópiára javasolt formulát, tekintsük a következő heurisztikus gondolatmenetet.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ egy nem atomos valószínűségi mező, azaz feltételezzük, hogy tetszőleges $p \in [0, 1]$ esetén létezik olyan $A \in \mathcal{A}$, melyre $\mathbb{P}(A) = p$. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathcal{A}$ esemény $E(A)$ entrópiája csak az A esemény $\mathbb{P}(A) = p \neq 0$ valószínűségétől függ, azaz $E(A) = H(\mathbb{P}(A))$. Ekkor $E(A)$ úgy interpretálható, mint az A esemény „bizonytalanságának” a mértéke, illetve, hogy mennyi információra van szükségünk ahhoz, hogy az A eseményből származó bizonytalanságunkat eloszlathassuk. Ezért a H -ről természetesnek tűnik feltételezni a következőket.

- (i) H nemnegatív, azaz $H(p) \geq 0$ minden $p \in]0, 1]$ esetén;

(ii) H additív, azaz $H(pq) = H(p) + H(q)$ minden $p, q \in]0, 1]$ esetén;

(iii) H normált, azaz $H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

A (ii) tulajdonság azt fejezi ki, hogy két független eseményből származó információ ugyanannyi, mint a külön-külön tekintett eseményekből származó információk összege. Míg a (iii) tulajdonság azt jelenti, hogy egyszerű alternatíva esetén az információ egységnyi.

Könnyen látható, hogy pontosan a

$$H(p) = -\log_2(p) \quad (p \in]0, 1])$$

módon definiált $H :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti a fenti három tulajdonság mindegyikét, így az $A \in \mathcal{A}$ esemény entrópiájára célszerű az

$$E(A) = -\log_2(\mathbb{P}(A)) \quad (A \in \mathcal{A})$$

definíciót használni.

Az alábbiakban az Aczél–Daróczy [5] monográfiát követve ezeket a fogalmakat pontos matematikai alapokra fogjuk helyezni.

Legyen $n \geq 2$ egy tetszőleges természetes szám, és tekintsük a

$$\Gamma_n^\circ = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i > 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

és a

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

halmazokat. Ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ függvénysorozatot *információmérték*nek nevezzük, ha minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ vagy minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahogy azt a disszertáció bevezetőjében írtuk, a legismertebb információmértékek a *Shannon-entrópia* (lásd Shannon [53]), azaz

$$H_n^1(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i), \quad (p_1, \dots, p_n \in \Gamma_n^\circ, n \geq 2)$$

illetve az úgynevezett α -adfokú entrópia vagy *Havrda–Charvát entrópia* (lásd Aczél–Daróczy [5], Daróczy [11], Kullback [41] és Tsallis [57]), amit a

$$H_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} (\sum_{i=1}^n p_i^\alpha - 1), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ H_n^1(p_1, \dots, p_n), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

módon értelmezünk minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén. Egyszerű számolással látható be, hogy minden $n \geq 2$ és tetszőleges $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} H_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = H_n^1(p_1, \dots, p_n),$$

azaz a Shannon–entrópia folytonosan beágyazható az α -adfokú entrópiák családjába.

Felvetődik ezek után az a kérdés, hogy az információértékekről milyen algebrai, illetve analitikus tulajdonságokat követeljünk meg, hogy az megegyezzen az α -adfokú entrópiával. A következőekben a disszertációban leggyakrabban használt fogalmakat ismertetjük.

1.1. Definíció. Az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információértéket szimmetrikusnak nevezzük, ha

$$(1.1) \quad I_n(p_1, \dots, p_n) = I_n(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)})$$

teljesül minden $n \geq 2$, $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ és tetszőleges $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ permutáció esetén. Azt mondjuk továbbá, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték 3-szemű-szimmetrikus, ha tetszőleges $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma_3^\circ$ esetén fennáll az

$$(1.2) \quad I_3(p_1, p_2, p_3) = I_3(p_1, p_3, p_2)$$

egyenlőség.

A következő fogalom a normáltság.

1.2. Definíció. Az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információértéket normáltnak nevezzük, ha

$$(1.3) \quad I_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$$

teljesül.

Végül következzen az α -rekurzivitás fogalma, mely mindhárom fogalom közül a legfontosabb, hiszen ennek a tulajdonságnak köszönhetően elegendő az $I_2 : \Gamma_2^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt meghatároznunk, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információértéket jellemezni tudjuk.

1.3. Definíció. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, azt mondjuk, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték α -rekurzív, ha tetszőleges $n \geq 3$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén teljesül az

$$(1.4) \quad I_n(p_1, \dots, p_n) = I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) + (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)$$

egyenlőség. Amennyiben $\alpha = 1$, akkor a továbbiakban röviden csak azt fogjuk mondani, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték rekurzív.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a Shannon-entrópia szimmetrikus, normált és rekurzív, míg az α -adfokú entrópia szimmetrikus, normált és α -rekurzív. A kérdés azonban az, hogy elegendőek-e ezek a tulajdonságok a Shannon-entrópia, illetve az α -adfokú entrópia jellemzéséhez. Mint azt majd látni fogjuk, nem feltétlenül.

Az első jellemzési tétel a Shannon-entrópiára magától Shannontól származik (Shannon [53]), a második, egy az elsőtől már absztraktabb, matematikailag megalapozottabb pedig Hinčintől (Hinčin [30]). Majd, 1956-ban Faddeev lényegesen redukálta mind Shannon, mind Hinčin axiómarendszerét (Faddeev [17]). Ő csak szimmetriát, normáltságot, és rekurzivitást feltételezett, valamint egy további analitikus tulajdonságot, nevezetesen azt, hogy az

$$f(x) = I_2(1 - x, x) \quad (x \in [0, 1])$$

módon definiált $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, és igazolta, hogy ekkor $I_n \equiv H_n^1$ a Γ_n halmazon minden $n \geq 2$ mellett.

Faddeev jellemzési tételében, az f függvényre vonatkozó folytonosságot a későbbiek során sikerült egyre gyengébb analitikus feltételekkel helyettesíteni. Így, feltételezve, a fenti három algebrai jellegű tulajdonságot Tverberg [58] f (Lebesgue-)integrálhatósága, Kendall [37] és Borges

[8] f a $[0, 1/2[$ intervallumon való monoton növekedése, Lee [42] f mérhetősége, Diderrich [15] és Maksa [43] pedig f egy pozitív mértékű halmazon való korlátossága esetén igazolta, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ függvénysorozat a Shannon–entrópiával egyezik meg. Némileg meglepő azonban, hogy az egyik legtermészetesebb követelmény az információfüggvényekkel kapcsolatban, nevezetesen a nemnegativitás önmagában nem garantálja, hogy a szóban forgó információfüggvény a Shannon–félével egyezik meg. Létezik ugyanis a Shannon–féletől különböző nemnegatív információfüggvény, lásd Daróczy–Maksa [13], illetve az olvasó figyelmébe ajánljuk a Gselmann–Maksa [26] dolgozatot is, melyben azt a halmazt vizsgáljuk, amelyen minden nemnegatív információfüggvény megegyezik a Shannon–félével.

1.2. Az információ paraméteres alapegyenlete

Az információértékek jellemzési tételeivel kapcsolatban jelentős áttörést jelentett Daróczy Zoltán [10]–es dolgozata. Ő vette észre először, hogy a Shannon–entrópiának a szimmetrián, a normáltságon és a rekurzivitáson alapuló jellemzése egy az

$$f(x) = I_2(1 - x, x) \quad (x \in [0, 1])$$

módon definiált függvényre vonatkozó függvényegyenlet különböző feltételek melletti megoldásával ekvivalens. Noha a Daróczy [10]–ben szereplő eredmények a $[0, 1]$ zárt intervallumon értelmezett függvényre vonatkozóan vannak megfogalmazva, és ezáltal olyan információértékek jellemzését adják, melyek a Γ_n halmazon vannak értelmezve, mi a disszertációban azt az utat fogjuk követni, hogy az alább található tételeket először mindig nyílt alaphalmazon fogalmazzuk meg, majd ezek után ismertetjük azok zárt alaphalmazon tekintett változatait is.

1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték pontosan akkor 3–szemi–szimmetrikus és rekurzív, ha az*

$$f(x) = I_2(1 - x, x) \quad (x \in]0, 1[)$$

módon értelmezett $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az

$$(1.5) \quad f(x) + (1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

függvényegyenletet minden $(x, y) \in D^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v, u+v \in]0, 1[\}$ esetén.

Az előző tételben szereplő $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó (1.5) függvényegyenletet az *információ alapegyenletének* nevezzük, míg ennek a megoldásait *információfüggvényeknek* hívjuk. Továbbá, ha az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információértékről a 3-szemi-szimmetria helyett szimmetria teljesülését követeljük meg, akkor az 1.1. Tételben szereplő $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvényre még az

$$f(x) = f(1-x) \quad (x \in]0, 1[)$$

azonosság is teljesül. Az ilyen információfüggvényeket *szimmetrikus információfüggvényeknek* hívjuk.

Megjegyezzük azonban, hogy a szakirodalomban (lásd például Aczél–Daróczy [5]), információfüggvényeknek az (1.5) egyenlet olyan megoldásait nevezik, melyek még normáltak is, azaz melyekre $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ teljesül. Továbbá, ha az f függvény a $[0, 1]$ intervallumon van definiálva, akkor még az $f(0) = f(1)$ tulajdonság teljesülését is szokás megkövetelni.

A fenti tétel bizonyítását elhagyjuk, mivel az következménye lesz a soron következő állításnak.

A Shannon–entrópia nyilván 3-szemi-szimmetrikus (sőt szimmetrikus is) és rekurzív, ezért az előző tétel alapján az

$$S(x) = H_2^1(1-x, x), \quad (x \in]0, 1[)$$

azaz, az

$$S(x) = -x \log_2(x) - (1-x) \log_2(1-x) \quad (x \in]0, 1[)$$

módon értelmezett $S :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy (szimmetrikus) információfüggvény, melyet a *Shannon-féle információfüggvénynek* hívunk.

Mindezekből következik tehát, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték pontosan akkor egyezik meg a $\{H_n^1\}_{n=2}^\infty$ Shannon-entrópiával, ha az $f(x) = I_2(1-x, x)$ ($x \in]0, 1[$) módon értelmezett $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény megegyezik a Shannon-féle információfüggvénnyel.

A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy az információértékről rekurzivitás helyett α -rekurzivitást feltételezve miként juthatunk el a paraméteres információ-alapegyenlethez. Az alább ismertetett gondolatmenet analóg a Daróczy [11]-ben találhatóval, mi azonban nem Γ_n -en, hanem Γ_n° -n fogunk dolgozni.

1.2. Tétel. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített és tegyük fel, hogy minden $n \geq 2$ esetén $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték pontosan akkor 3-szemi-szimmetrikus és α -rekurzív, ha az*

$$f(x) = I_2(1-x, x) \quad (x \in]0, 1[)$$

módon értelmezett $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az

$$(1.6) \quad f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

függvényegyenletet minden $(x, y) \in D^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v, u+v \in]0, 1[\}$ esetén.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információérték 3-szemi-szimmetrikus és rekurzív. Legyenek $(x, y) \in D^\circ$ tetszőlegesek. Ekkor, ha (1.4)-ben $n = 3$ esetén a

$$p_1 = 1-x-y, \quad p_2 = y \quad \text{és a} \quad p_3 = x$$

helyettesítésekkel élünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & I_3(1-x-y, y, x) \\ &= I_2(1-x, x) + (1-x)^\alpha I_2\left(1 - \frac{y}{1-x}, \frac{y}{1-x}\right) = f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) \end{aligned}$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén. Azonban $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ 3-szemi-szimmetrikus, ezért

$$I_3(1 - x - y, y, x) = I_3(1 - y - x, x, y),$$

azaz

$$f(x) + (1 - x)^\alpha f\left(\frac{y}{1 - x}\right) = f(y) + (1 - y)^\alpha f\left(\frac{x}{1 - y}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, vagyis az $f(x) = I_2(1 - x, x)$ ($x \in]0, 1[$) módon definiált $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény valóban kielégíti az információ paraméteres alapegyenletét a D° halmazon.

A fordított irányú állítás igazolásához tegyük fel, hogy az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén kielégíti az (1.6) egyenletet. Tetszőleges $n \geq 2$ esetén definiáljuk az $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ függvénysorozatot az

$$I_n(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=2}^n (p_1 + \dots + p_i)^\alpha f\left(\frac{p_i}{p_1 + \dots + p_i}\right)$$

formulával. Megmutatjuk, hogy $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ 3-szemi-szimmetrikus és rekurzív. Legyen $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma_n^\circ$ tetszőleges, és legyen (1.6)-ban

$$x = \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3} \quad \text{és} \quad y = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3},$$

akkor

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)^\alpha f\left(\frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) + f\left(\frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3}\right) \\ = (p_1 + p_3)^\alpha f\left(\frac{p_3}{p_1 + p_3}\right) + f\left(\frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3}\right), \end{aligned}$$

azaz, a fenti formulát $n = 3$ -ra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$I_3(p_1, p_2, p_3) = I_3(p_1, p_3, p_2)$$

teljesül minden $(p_1, p_2, p_3) \in \Gamma_n^\circ$ esetén. Tehát $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ valóban 3-szemi-szimmetrikus.

Az α -rekurzivitás igazolásához legyenek $n \geq 3$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ tetszőlegesek, ekkor

$$\begin{aligned} I_n(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=2}^n (p_1 + \dots + p_i)^\alpha f\left(\frac{p_i}{p_1 + \dots + p_i}\right) \\ &= (p_1 + p_2)^\alpha f\left(\frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) + ((p_1 + p_2) + p_3)^\alpha f\left(\frac{p_3}{(p_1 + p_2) + p_3}\right) \\ &\quad + \dots + ((p_1 + p_2) + \dots + p_n)^\alpha f\left(\frac{p_n}{(p_1 + p_2) + \dots + p_n}\right) \\ &= (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) + I_{n-1}(p_1 + p_2, \dots, p_n) \end{aligned}$$

teljesül. Így $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ valóban α -rekurzív.

□

Az 1.2. Tételben szereplő (1.6) függvényegyenletet *az információ paraméteres alapegyenletének* hívjuk, melynek megoldásait α -adfokú információfüggvényeknek nevezzük.

Amennyiben az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ információmértékről a 3-szemi-szimmetria helyett szimmetria teljesülését követeljük meg, akkor az 1.2. Tételben szereplő $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvényre még az

$$f(x) = f(1 - x) \quad (x \in]0, 1[)$$

azonosság is teljesül. Az ilyen információfüggvényeket *szimmetrikus α -adfokú információfüggvényeknek* nevezzük.

Az $\alpha = 1$ esethez hasonlóan, a szakirodalomban (lásd például [5]) az (1.6) egyenlet azon megoldásait nevezik információfüggvényeknek, melyek még az $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ feltételt is kielégítik. Továbbá, ha az f függvény a $[0, 1]$ intervallumon van értelmezve, akkor még az $f(0) = f(1)$ tulajdonság teljesülését is meg kell követelni.

Az α -adfokú entrópia nyilván 3-szemi-szimmetrikus (sőt szimmetrikus is) és α -rekurzív, ezért az előző tétel alapján az $\alpha \neq 1$ esetben a

$$h(x) = H_2^\alpha(1 - x, x), \quad (x \in]0, 1[)$$

azaz, a

$$h(x) = (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} (x^\alpha + (1-x)^\alpha - 1) \quad (x \in]0, 1[)$$

módon értelmezett $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény egy (szimmetrikus) α -adfokú információfüggvény.

Aczél–Daróczy [5] gondolatmeneteit felhasználva alább meghatározzuk (1.6) általános megoldását. Ezt a következőképpen tesszük. Az (1.6) egyenletben szereplő $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény segítségével értelmezzük egy $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyről megmutatjuk, hogy kielégíti az úgynevezett *kociklus egyenletet* is. Majd a kociklus egyenlet segítségével felírjuk az (1.6) függvényegyenlet általános megoldását.

1.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti a paraméteres információ-alapegyenletet a D° halmazon, és legyen*

$$F(u, v) = (u + v)^\alpha f\left(\frac{v}{u + v}\right). \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Ekkor tetszőleges $t, u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$F(tu, tv) = t^\alpha F(u, v),$$

továbbá, tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$(1.7) \quad F(u, v) + F(u + v, w) = F(v, w) + F(u, v + w)$$

teljesül.

Az előző lemmában az $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó (1.7) egyenletet *kociklus egyenletnek* nevezzük, melynek általános megoldását alább ismertetjük. Vegyük észre továbbá, hogy a lemma jelöléseit alkalmazva,

$$F(1 - x, x) = f(x), \quad (x \in]0, 1[)$$

így az $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ismeretében meg tudjuk adni (1.6) megoldásait.

Az alábbi állítás $\alpha = 1$ esetén megtalálható Jessen–Karpf–Thorup [34]–ben.

1.3. Tétel. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, melyre az alábbiak teljesülnek.

$$F(u, v) = F(v, u), \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

$$F(u, v) + F(u + v, w) = F(v, w) + F(u, v + w), \quad (u, v, w \in \mathbb{R}_{++})$$

és

$$F(tu, tv) = t^\alpha F(u, v). \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Ekkor, ha $\alpha = 1$, akkor

$$F(u, v) = \varphi(u + v) - \varphi(u) - \varphi(v)$$

minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, ahol a $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén kielégíti a

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u) \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

egyenletet. Továbbá, ha $\alpha \neq 1$, akkor

$$F(u, v) = a[(u + v)^\alpha - u^\alpha - v^\alpha]$$

teljesül minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, valamely $a \in \mathbb{R}$ konstanssal.

A negyedik fejezetben szükségünk lesz a kociklus egyenlet olyan megoldásaira, amikor az ismeretlen függvényről nincs feltételezve, hogy szimmetrikus és α -adfokú homogén. Ezt az eredményt a Hosszú [31] dolgozat tartalmazza. Megjegyezzük azonban, hogy a [31]-ben található tétel olyan függvényekre vonatkozik, melyek egy kancellatív kommutatív félcsoporthon vannak értelmezve és egy osztható kommutatív csoportba képeznek. Mi azonban abban az esetben fogjuk használni a tételt, amikor az ismeretlen függvény $\mathbb{R}_{++}^2$ -en van értelmezve és valós értékű, így az alábbi állítást is ezzel a választással fogalmazzuk meg.

1.4. Tétel. Az $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén az

$$(1.8) \quad F(x, y) + F(x + y, z) = F(x, y + z) + F(y, z)$$

függvényegyenletet, ha létezik olyan $B : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ biadditív, ferdén szimmetrikus függvény, azaz, melyre

$$\begin{aligned} B(x+y, z) &= B(x, z) + B(y, z) \\ B(x, y+z) &= B(x, y) + B(x, z) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++}) \end{aligned}$$

és

$$B(x, y) = -B(y, x) \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

teljesül, és olyan $f : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(1.9) \quad F(x, y) = B(x, y) + f(x+y) - f(x) - f(y)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

Az 1.3. Tétel fényében most már meg tudjuk adni (1.6) általános megoldását a D° halmazon, ez az eredmény $\alpha = 1$ esetén megtalálható Maksa–Ng [47]–ben, $\alpha \neq 1$ esetén pedig megkapható egy, a Maksa [44]–ben található állításból. Mivel a tétel bizonyításának gondolatmenetéből néhány elemet felhasználunk majd a későbbiekben, úgy gondoljuk, hogy célszerű a tételt annak bizonyításával együtt ismertetni.

1.5. Tétel. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített. Ekkor az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki az információ paraméteres alapegyenletét, ha $\alpha = 1$ esetén van olyan $a \in \mathbb{R}$ és olyan $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre*

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u), \quad (u, v \in]0, +\infty[)$$

úgy, hogy

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(1-x) + ax, \quad (x \in]0, 1[)$$

teljesül, illetve $\alpha = 0$ esetén van olyan $b \in \mathbb{R}$ és olyan $l :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$l(uv) = l(u) + l(v), \quad (u, v \in]0, 1[)$$

úgy, hogy

$$f(x) = l(1-x) + c, \quad (x \in]0, 1[)$$

áll fenn, végül minden egyéb esetben

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d, \quad (x \in]0, 1[)$$

valamely $c, d \in \mathbb{R}$ mellett.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített, $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, mely kielégíti (1.6)-ot a D° halmazon.

Definiáljuk az F függvényt $\mathbb{R}_{++}^2$ -on az

$$F(u, v) = (u + v)^\alpha f\left(\frac{v}{u + v}\right) \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

formulával.

Ekkor azonnal kapjuk, hogy F α -adfokú homogén függvény, azaz

$$F(tu, tv) = t^\alpha F(u, v)$$

teljesül tetszőleges $t, u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Továbbá, az 1.1. Lemma miatt bármely $u, v, w \in \mathbb{R}_{++}$ mellett

$$(1.10) \quad F(u + v, w) + F(u, v) = F(u, v + w) + F(v, w),$$

azaz az F függvény kielégíti a kociklus-egyenletet.

Definiáljuk a $h : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ és a $G : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket

$$h(u) = F(u, 1) - F(1, u) \quad (u \in \mathbb{R}_{++})$$

illetve

$$G(u, v) = F(u, v) + h(v) \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

módon. Ekkor nyilván $h(1) = 0$.

Megmutatjuk, hogy a G függvény szimmetrikus és kielégíti a kociklus-egyenletet. Helyettesítsünk (1.10)-ben $w = 1$ -et. Ekkor

$$(1.11) \quad F(u + v, 1) + F(u, v) = F(u + 1, v) + F(u, 1)$$

teljesül minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, ebből u és v szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy

$$(1.12) \quad F(u+v, 1) + F(v, u) = F(v+1, u) + F(v, 1). \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Végül az (1.11) egyenletből az (1.12) egyenletet kivonva azt kapjuk, hogy

$$F(u, v) - F(v, u) = F(u+1, v) - F(u, 1) - F(v, 1) - F(v+1, u),$$

azaz, a G függvény definícióját felhasználva,

$$G(u, v) = G(v, u). \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Továbbá, (1.10) mindkét oldalához $h(u) + h(w)$ -t hozzáadva éppen azt kapjuk, hogy a G függvény is kielégíti a kociklus-egyenletet.

Végül, legyen

$$H(u, v) = G(u, v) + h(u+v) - h(u) - h(v). \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Megmutatjuk, hogy ekkor a $H : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az alábbi függvényegyenlet-rendszert

$$(1.13) \quad H(u, v) = H(v, u), \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

$$(1.14) \quad H(u+v, w) + H(u, v) = H(u, v+w) + H(v, w) \quad (u, v, w \in \mathbb{R}_{++})$$

és

$$(1.15) \quad H(tu, tv) = t^\alpha H(u, v). \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

A H függvény szimmetriája adódik a G függvény szimmetriájából. Továbbá, abból, hogy G kielégíti a kociklus egyenletet, a H függvény definíciója miatt azt kapjuk, hogy H is kielégíti a kociklus-egyenletet.

Az F függvény α -adfokú homogenitása miatt

$$G(tu, tv) - t^\alpha G(u, v) = F(tu, tv) - h(tv) - t^\alpha F(u, v) - t^\alpha h(v) = h(tv) - t^\alpha h(v)$$

teljesül tetszőleges $t, u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, azonban az egyenlőség bal oldala u -ban és v -ben szimmetrikus, így

$$h(tv) - t^\alpha h(v) = h(tu) - t^\alpha h(u), \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

amiben az $u = 1$ helyettesítés elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$(1.16) \quad h(tv) - t^\alpha h(v) = h(t), \quad (t, v \in \mathbb{R}_{++})$$

ahol felhasználtuk azt is, hogy $h(1) = 0$.

Ha $\alpha = 0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$h(tv) = h(t) + h(v), \quad (t, v \in \mathbb{R}_{++})$$

vagyis ebben az esetben $h : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus az $\mathbb{R}_{++}$ halmazon.

Ha $\alpha \neq 0$, akkor (1.16)-ben t és v szerepét felcserélve, majd a kapott egyenletet (1.16)-ból kivonva, azt kapjuk, hogy

$$h(t) + t^\alpha h(v) = h(v) + v^\alpha h(t). \quad (t, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Legyen ebben az egyenletben $t = 2$ és vezessük be az $a = -\frac{h(2)}{2^\alpha - 1}$ jelölést. Ekkor

$$h(v) = av^\alpha - a. \quad (v \in \mathbb{R}_{++})$$

Végül, szintén (1.16) miatt

$$G(tu, tv) - t^\alpha G(u, v) = h(t), \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

így

$$H(tu, tv) = t^\alpha H(u, v). \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Tehát a $H : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valóban kielégíti az (1.13)–(1.15) rendszert.

Így az 1.3. Tétel miatt, ha $\alpha = 1$, akkor

$$H(u, v) = \varphi(u) + \varphi(v) - \varphi(u + v), \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

ahol a $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u)$$

teljesül minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Minden más esetben létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$H(u, v) = c[u^\alpha + v^\alpha - (u + v)^\alpha]. \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Így, az F, G, H illetve h függvények definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1 - x, x) = G(1 - x, x) - h(x) \\ &= H(1 - x, x) - h(1) + h(1 - x) + h(x) - h(x) = \varphi(1 - x) + \varphi(x) + ax, \\ &\quad (x \in]0, 1[) \end{aligned}$$

ha $\alpha = 1$;

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1 - x, x) = G(1 - x, x) - h(x) \\ &= H(1 - x, x) - h(1) + h(1 - x) + h(x) - h(x) = l(1 - x) + c, \\ &\quad (x \in]0, 1[) \end{aligned}$$

ha $\alpha = 0$, ahol $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ egy az $\mathbb{R}_{++}$ halmazon logaritmikus függvény. Végül, minden más esetben

$$\begin{aligned} f(x) &= F(1 - x, x) = G(1 - x, x) - h(x) \\ &= H(1 - x, x) - h(1) + h(1 - x) + h(x) - h(x) = cx^\alpha + (a + c)x^\alpha - (a + c). \\ &\quad (x \in]0, 1[) \end{aligned}$$

A megfordított irányú állítás bizonyítása egyszerű számolás.

□

A tétel állítása némiképpen meglepő, hiszen az $\alpha = 0$ és az $\alpha = 1$ esettől eltekintve azt kapjuk, hogy az (1.6) egyenlet megoldásai már eleve folytonosak, nem kell feltételeznünk az f függvényről semmiféle regularitási tulajdonságot. Míg az $\alpha = 0$ és az $\alpha = 1$ esetben a megoldások lehetnek például sehol sem folytonosak. Ez előre vetíti, hogy a paraméteres

információ–alapegyenlet stabilitásának vizsgálata során ez a két eset különleges szerepet fog majd játszani.

A következő tételben a paraméteres információ–alapegyenlet általános megoldását ismertetjük a zárt alaphalmazon, mely eredmény, $\alpha > 0$ esetén megtalálható a Daróczy [11] dolgozatban, noha a tétel állítása, csakúgy mint a bizonyítása teljesen analóg, abban az esetben, ha α -ra nem kötünk ki nemnegativitási feltételt.

1.6. Tétel. *Legyen $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v \in [0, 1[, u + v \leq 1\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített. Tegyük fel, hogy az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy*

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(x) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right)$$

teljesül minden $(x, y) \in D$ esetén. Ekkor, ha $\alpha = 1$, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u) \quad (u, v \in \mathbb{R}_+)$$

úgy, hogy

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(1-x)$$

teljesül minden $x \in [0, 1]$ esetén. Ha $\alpha \geq 0$, akkor léteznek olyan a, b valós számok, hogy

$$f(x) = ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b$$

áll fenn minden $x \in [0, 1]$ esetén. Ha $\alpha < 0$, akkor

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b, & \text{ha } x \in]0, 1[\\ a - b, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

teljesül minden $x \in [0, 1]$ esetén valamely $a, b \in \mathbb{R}$ konstansokkal.

Végül, az első fejezet zárásaként az α -rekurzív, 3-szemi-szimmetrikus információértékeket jellemezzük. Az állítás az 1.2. és az 1.6. Tételek felhasználásával látható be, lásd például Aczél–Daróczy [5] vagy Ebanks–Sahoo–Sander [16].

1.7. Tétel. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, ekkor az $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ ($I_n: \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 2$) információérték pontosan akkor α -rekurzív és 3-szemi-szimmetrikus, ha $\alpha = 1$ esetén

$$I_n(p_1, \dots, p_n) = \varphi(p_1) + \sum_{i=2}^n (\varphi(p_i) + ap_i) \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

teljesül minden $n \geq 2$ -re, ahol $a \in \mathbb{R}$, $\varphi: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, mely minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén kielégíti a

$$\varphi(uv) = u\varphi(v) + v\varphi(u)$$

egyenletet; $\alpha = 0$ esetén

$$I_n(p_1, \dots, p_n) = c(n-1) + l(p_1), \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

ahol $l: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ egy logaritmikus függvény, $c \in \mathbb{R}$; minden más esetben pedig

$$I_n(p_1, \dots, p_n) = b(p_1^\alpha - 1) + c \left(\sum_{i=2}^n p_i^\alpha - 1 \right) \quad ((p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ)$$

teljesül tetszőleges $n \geq 2$ esetén valamely $b, c \in \mathbb{R}$ konstansokkal.

2. Függvényegyenletek, függvényegyenletek stabilitása

Ebben a fejezetben először néhány alapvető fogalmat és állítást ismertetünk a függvényegyenletek elméletéből. Definiálni fogjuk az additív, a logaritmikus és a multiplikatív függvényeket. Továbbá, az ilyen típusú függvényekre vonatkozó úgynevezett kiterjesztési tételeket is ismertetünk majd.

A második alfejezetben röviden össze fogjuk foglalni a függvényegyenletek stabilitáselméletének – a disszertáció szempontjából – legfontosabb eredményeit. Először S. Ulam problémáját ismertetjük, mely ezen témakör kiinduló pontjának tekinthető. Ezt a problémát D. H. Hyers oldotta meg először, így ezt az alfejezetet Hyers tételével folytatjuk majd. A stabilitáselmélet kulcsfontosságú fogalmait úgy, mint a stabilitás, a szuperstabilitás és a hiperstabilitás, egy-egy tételen keresztül fogjuk szemléltetni. Ezek után ismertetjük az invariáns közepek és az amenabilitás fogalmát. Mint azt majd látni fogjuk, az invariáns közepek segítségével számos stabilitási eredmény nyerhető. A módszer, vagyis az invariáns közepek módszere hatékonyságát bemutatandó, az úgynevezett kociklus-egyenlet stabilitását igazoljuk majd amenábilis félcsoportokon.

2.1. Függvényegyenletek

A függvényegyenletek elmélete a matematikai analízis egyik régi ága, hiszen ahogy Aczél [2] írja, már többek között D'Alembert, Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Darboux és Hibert is tekintett és oldott is meg függvényegyenleteket. A témakör egységes és rendszeres tárgyalásának a kezdete mégis Aczél János *Lectures on functional equations and their applications* című monográfiájának megjelenéséhez köthető. Ezen monográfia megjelenése óta – többek között Aczél János és Daróczy Zoltán iskolateremtő munkájának köszönhetően – a függvényegyenletek elmélete a matematikai analízis egy virágzó ágává vált, hiszen az ebben a témakörben született eredmények igen jól használhatónak bizonyultak az alkalmazások során is, például az információelméletben, a valószínűségszámításban, a közgazdaságtanban, a matematikai pszichológiában vagy a szociológiában. Ma már a kutatások

olyan sok szálon futnak, hogy a témakör eredményeit teljes egészében áttekinteni majdnem biztosan lehetetlen vállalkozás. A disszertációban ebből a témakörből csak egy kis szeletet tudunk majd ismertetni, azt amelyet a későbbiek során használni fogunk.

Mielőtt rátérnénk a függvényegyenletek stabilitáselméletére, azokat a legfontosabb definíciókat és tételeket ismertetjük a függvényegyenletek elméletéből, melyeket a további fejezetek során használni fogunk. Az itt ismertetett eredmények megtalálhatóak Aczél [2]-ben, Aczél–Dhombres [6]-ban illetve Kuczma [40]-ben.

2.1. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges nemüres halmaz, és legyen*

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y, x + y \in I\}.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény additív $\mathcal{D}$ -n, ha tetszőleges $(x, y) \in \mathcal{D}$ esetén

$$(2.1) \quad a(x + y) = a(x) + a(y).$$

Amennyiben $I = \mathbb{R}$, akkor ahelyett, hogy a additív $\mathbb{R}$ -en, röviden csak azt fogjuk mondani, hogy a additív.

Már nagyon gyenge regularitási feltételek teljesülése esetén is igaz, hogy a (2.1) úgynevezett *additív Cauchy-egyenlet* megoldása $a(x) = cx$ alakú valamely $c \in \mathbb{R}$ konstanssal minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezt állítja például az alábbi regularitási tétel.

2.1. Tétel. *Ha az $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ additív függvény alulról vagy felülről korlátos egy pozitív Lebesgue-mértékű halmazon, akkor*

$$a(x) = a(1)x$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Ismert azonban az a tény is, hogy az additív Cauchy-egyenletnek léteznek nemfolytonos megoldásai is. Az ilyen additív függvények „bonyolultságát” jól érzékelteti az alábbi állítás.

2.2. Tétel. Legyen $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy nemfolytonos additív függvény. Ekkor a gráfja, azaz a

$$\text{graph}(a) = \{(x, a(x)) | x \in \mathbb{R}\}$$

halmaz mindenütt sűrű $\mathbb{R}^2$ -ben.

A disszertációban szükségünk lesz továbbá a logaritmikus és a multiplikatív függvények fogalmára.

2.2. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{C}$ egy tetszőleges nemüres halmaz, és legyen

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x, y, xy \in I\}.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy az $l : I \rightarrow \mathbb{C}$ függvény logaritmikus $\mathcal{L}$ -en, ha

$$(2.2) \quad l(xy) = l(x) + l(y)$$

teljesül tetszőleges $(x, y) \in \mathcal{L}$ esetén.

2.3. Definíció. Tekintsük az

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | x, y, xy \in I\}.$$

halmazt, ahol $I \subset \mathbb{C}$ egy tetszőleges nemüres halmaz. Az $m : I \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt multiplikatívnak nevezzük $\mathcal{L}$ -n, ha tetszőleges $(x, y) \in \mathcal{L}$ esetén

$$(2.3) \quad m(xy) = m(x)m(y)$$

teljesül.

Vizsgálataink során gyakran fordul elő, hogy egy függvény nem az egész valós számok halmazán, hanem annak csak egy részhalmazán tesz eleget egy adott függvényegyenletnek. A kérdés ilyenkor az, hogy a szóban forgó függvény leszűkítése-e egy olyan függvénynek, mely az egész $\mathbb{R}$ -en kielégíti az adott függvényegyenletet. Ezek az úgynevezett *kiterjesztési tételek*. A dolgozatban ezek közül a következő hármat fogjuk használni.

2.3. Tétel (Daróczy– Losonczi [9]). *Ha az $a :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy additív a*

$$D^\circ = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v, u + v \in]0, 1[\}$$

halmazon, akkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $\tilde{a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az egész $\mathbb{R}$ -en additív függvény, melyre

$$\tilde{a}|_{]0, 1[} \equiv a$$

teljesül.

2.4. Tétel. *Legyen $l :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ egy $a :]0, 1[$ intervallumon logaritmikus függvény. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $\tilde{l} : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény, mely az l kiterjesztése.*

2.5. Tétel. *Tetszőleges $m :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ a $]0, 1[$ -en multiplikatív függvény egyértelműen kiterjeszthető egy az egész $\mathbb{R}$ -en multiplikatív függvénné.*

2.2. Függvényegyenletek stabilitása

Miután az előző fejezetben ismertettük a függvényegyenletek témakörének azon eredményeit, melyeket a későbbi fejezetekben használni fogunk, most összefoglaljuk a függvényegyenletek stabilitáselméletének legfontosabb, a későbbi fejezetekben nélkülözhetetlen eredményeit.

S. Ulam egy 1940-es, a Wisconsin Egyetemen tartott előadásában néhány matematikai problémát vetett fel. Ezen problémák közül az egyik a függvényegyenletek stabilitáselméletének elindítója lett. Ez a következő (lásd Ulam [59]).

Legyen $(G, \circ)$ egy csoport, $(H, *)$ pedig egy metrikus csoport a d metrikával. Legyenek $\varepsilon \geq 0$ és $f : G \rightarrow H$ olyanok, hogy

$$d(f(x \circ y), f(x) * f(y)) \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x, y \in G$ esetén. Igaz-e, hogy létezik olyan $\delta > 0$ és olyan $g : G \rightarrow H$ függvény, melyre

$$g(x \circ y) = g(x) * g(y) \quad (x, y \in G)$$

teljesül, úgy, hogy

$$d(f(x), g(x)) \leq \delta$$

is fennáll minden $x \in G$ esetén?

Igenlő válasz esetén azt mondjuk, hogy az

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \quad (x, y \in G)$$

függvényegyenlet stabil a G halmazon.

Itt jegyezzük meg, hogy Ulam eredeti problémájában nem esett szó a δ konstansnak az ε konstanstól való függésétől. A későbbiekben azonban azok a stabilitási eredmények bizonyultak jól használhatónak, melyeknél a δ az ε valamely konstansszorososa.

Ulam problémájára először 1941-ben D. H. Hyers adott igenlő választ az alábbi tétel formájában.

2.6. Tétel (Hyers [32]). *Legyenek X és Y Banach-terek, $\varepsilon \geq 0$ rögzített. Tegyük fel, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény olyan, melyre*

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x, y \in X$ esetén. Ekkor minden $x \in X$ esetén létezik az

$$a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

határérték, az $a : X \rightarrow Y$ függvény additív X -en, azaz

$$a(x+y) = a(x) + a(y)$$

minden $x, y \in X$ esetén és

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x \in X$ esetén. Továbbá, a fenti formulával megadott $a : X \rightarrow Y$ függvény egyértelműen meghatározott.

1941 óta Hyers eredményét sokan, sokféle módon általánosították, és a függvényegyenletek stabilitáselmélete a matematika egy dinamikusan fejlődő ágává vált, lásd például a Forti [18] és Moszner [51] összefoglaló dolgozatokat, illetve a Hyers–Isac–Rassias [33] monográfiát.

Hyers tételének bizonyítását látva azonnal adódik például, hogy az állítás akkor is érvényben marad, ha az X Banach-tér helyett egy tetszőleges kommutatív félcsoportot tekintünk.

Vegyük továbbá észre, hogy Hyers tétele tulajdonképpen azt mondja, hogy ha az X és Y Banach-terek között értelmezett $f : X \rightarrow Y$ függvény olyan, hogy az

$$f(x + y) - f(x) - f(y)$$

úgynevezett *Cauchy-differencia* korlátos, vagy, hogy az $f : X \rightarrow Y$ függvény „megközelítőleg” kielégíti az additív Cauchy-egyenletet X -en, akkor van olyan egyértelműen meghatározott $a : X \rightarrow Y$ additív függvény, mely „közel” van f -hez.

Természetesen Ulam problémája nemcsak a Cauchy-egyenlet, hanem más függvényegyenletek kapcsán is felvethető. A multiplikatív Cauchy-egyenlet stabilitásának problémája például egy új „jelenség” létrejöttéhez vezetett, melyet ma *szuperstabilitás*nak nevezünk.

2.7. Tétel (Baker [7]). *Legyen $\varepsilon \geq 0$, $(G, \cdot)$ egy félcsoport, és tegyük fel, hogy az $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény kielégíti az*

$$(2.4) \quad |f(xy) - f(x)f(y)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $x, y \in G$ esetén. Ekkor vagy

$$|f(x)| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon}}{2} \quad (x \in G)$$

vagy az $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény multiplikatív G -n, azaz

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

teljesül minden $x, y \in G$ esetén.

Baker tétele a következőt jelenti. Fetéve, hogy az $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ függvény megközelítőleg kielégíti a multiplikatív Cauchy-egyenletet, az következik, hogy f vagy korlátos vagy megoldása a multiplikatív Cauchy-egyenletnek. Ezt a jelenséget *szuperstabilitásnak* hívjuk.

A disszertációban még egy további fogalommal találkozunk majd, ez az úgynevezett *hiperstabilitás*. Ebben az esetben a stabilitási egyenlőtlenségből az következik, hogy a szóban forgó függvény csakis megoldása lehet a vizsgált függvényegyenletnek. Ezt a fogalmat a következő tételen keresztül érzékeltetjük.

2.8. Tétel (Maksa–Páles [48]). *Legyen $\varepsilon \geq 0$ tetszőleges, de rögzített, $m :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy a $]0, 1]$ halmazon multiplikatív függvény, melyre még az is teljesül, hogy létezik olyan $x_0 \in]0, 1]$, hogy $m(x_0) > 1$. Legyen továbbá $\psi :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor az*

$$|\psi(xy) - m(x)\psi(y) - m(y)\psi(x)| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden $x, y \in]0, 1]$ esetén, ha a

$$\psi(xy) = m(x)\psi(y) + m(y)\psi(x)$$

egyenlet fennáll minden $x, y \in]0, 1]$ esetén.

Mint azt a következő fejezetben látni fogjuk, a függvényegyenletek stabilitáselmélete olykor igen változatos módszereket igényel, hiszen általános, minden függvényegyenlet esetén működő módszer nem létezik. Hyers [32] megjelenése után a 2.6. Tétel bizonyításának gondolatmenete, az úgynevezett *Hyers-sorozatok módszere* igen gyűlölcsozónak bizonyult számos függvényegyenlet stabilitásának vizsgálata során. Később azonban megjelent néhány olyan függvényegyenlet – ilyen például a disszertációban vizsgált paraméteres információ-alapegyenlet is – melyek esetében a módszer nem működik.

Székelyhidi László vette észre először, hogy szoros kapcsolat van a stabilitás és az úgynevezett invariáns közepek között. Ezt a módszert alkalmazva [54]–ben általánosabb körülmények között sikerült igazolnia Hyers tételét.

A konkrét módszer ismertetése előtt azonban összefoglaljuk azokat a definíciókat és tételeket ebből a témakörből, melyeket a későbbiekben használni fogunk. Erről a témakörrel bővebben Day [14]–ben és Hewitt–Ross [29]–ben olvashatunk.

Legyen $(G, \cdot)$ egy félcsoport és tekintsük a

$$\mathfrak{B}(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ korlátos} \}$$

halmazt a pontonkénti műveletekkel, valamint az

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$$

normával. Jól ismert, hogy ekkor $\mathfrak{B}(G)$ egy Banach-tér.

2.4. Definíció. *Ha $\mathfrak{B}^*(G)$ jelöli a $\mathfrak{B}(G)$ tér konjugált terét, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{B}^*(G)$ tér egy μ eleme közép $\mathfrak{B}(G)$ -n, ha minden $f \in \mathfrak{B}(G)$ esetén*

$$\inf_{x \in G} |f(x)| \leq \mu(f) \leq \sup_{x \in G} |f(x)|$$

teljesül.

A definícióból adódik, hogy a $\mathfrak{B}(G)$ -n értelmezett összes közepek halmaza egy nemüres, konvex és gyenge*-kompakt halmazt alkot $\mathfrak{B}^*(G)$ -ben.

2.5. Definíció. *Tetszőleges $x \in G$ esetén definiáljuk $\mathfrak{B}^*(G)$ -n az r_x illetve az l_x úgynevezett eltolásoperátorokat az*

$$(r_x f)(y) = f(yx) \quad (y \in G)$$

illevé az

$$(l_x f)(y) = f(xy) \quad (y \in G)$$

módon. A $\mu \in \mathfrak{B}^(G)$ közepet jobb illetve bal invariáns középnek nevezzük, ha*

$$\mu(r_x f) = \mu(f), \quad (f \in \mathfrak{B}(G), x \in G)$$

illetve

$$\mu(l_x f) = \mu(f) \quad (f \in \mathfrak{B}(G), x \in G)$$

teljesül. Amennyiben

$$\mu(r_x f) = \mu(l_x f) = \mu(f) \quad (f \in \mathfrak{B}(G), x \in G)$$

áll fenn, úgy a μ közepet invariáns középnek nevezzük. Továbbá, a G félcsoporthat jobb illetve bal amenábilisnek nevezzük, ha létezik $\mathfrak{B}(G)$ -n jobb illetve bal invariáns közép, valamint, azt mondjuk, hogy G amenábilis, ha létezik $\mathfrak{B}(G)$ -n invariáns közép.

2.9. Tétel. Ha G olyan félcsoporthat, hogy $\mathfrak{B}(G)$ -n létezik bal invariáns közép, és jobb invariáns közép is, akkor G amenábilis.

2.10. Tétel. Tetszőleges G bal/jobbs amenábilis félcsoporthat jobb/bals amenábilis is, így az előző tétel értelmében amenábilis.

A továbbiakban azonban nekünk elegendő lesz az alábbi tétel.

2.11. Tétel (Day [14]). Minden kommutatív félcsoporthat létezik invariáns közép.

Az invariáns közepek módszerével igazolható például a következő tétel, mely röviden azt fejezi ki, hogy jobb (vagy bal) amenábilis félcsoporthat a kociklus-egyenlet stabil. A módszer rendkívüli hatékonyságát illusztrálandó, a tétel bizonyítását is megadjuk.

2.12. Tétel (Székelyhidi [55]). Legyen $(S, \cdot)$ egy jobb (vagy bal) amenábilis félcsoporthat, $F : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ pedig egy olyan függvény, melyre az

$$(2.5) \quad (x, y, z) \mapsto F(x, y) + F(xy, z) - F(x, yz) - F(y, z)$$

leképezés korlátos $S \times S \times S$ -en. Ekkor létezik olyan $\Phi : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, melyre

$$\Phi(x, y) + \Phi(xy, z) = \Phi(x, yz) + \Phi(y, z) \quad (x, y, z \in S)$$

teljesül, úgy, hogy az

$$(x, y) \mapsto F(x, y) - \Phi(x, y)$$

leképezés korlátos $S \times S$ -en, ugyanazzal a korláttal, mint a (2.5)-ben szereplő leképezés.

Bizonyítás. A 2.9. Tétel értelmében elegendő egyoldali amenabilitást feltételeznünk, legyen ezért $(S, \cdot)$ egy jobb amenábilis félcsoporth, és tegyük fel, hogy az $F : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ függvény olyan, hogy a (2.5) képlettel definiált leképezés korlátos $S \times S \times S$ -en.

Mivel $(S, \cdot)$ jobb amenábilis, ezért $\mathfrak{B}(S)$ -en létezik egy μ_x -szel jelölt jobb invariáns közép. Tetszőleges $y, z \in S$ esetén definiáljuk a $\Phi : S \times S \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt a

$$\Phi(y, z) = \mu_x [F(x, y) + F(xy, z) - F(x, yz)]$$

módon. Ekkor a μ_x közép jobb invarianciája miatt tetszőleges $y, z, u \in S$ esetén

$$\begin{aligned} & \Phi(y, z) + \Phi(yz, u) - \Phi(y, zu) - \Phi(z, u) \\ &= \mu_x [F(x, y) + F(xy, z) - F(x, yz) + F(x, yz) + F(xyz, u) - F(x, yzu) \\ & \quad - F(x, y) - F(xy, zu) + F(x, yzu) - F(x, z) - F(xz, u) + F(x, zu)] \\ &= \mu_x [F(xy, z) + F(xyz, u) - F(xy, zu) - F(x, z) + F(xz, u) - F(x, zu)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

azaz a Φ függvény kielégíti a kociklus-egyenletet. Továbbá,

$$(2.6) \quad F(y, z) - \Phi(y, z) = \mu_x [F(y, z) + F(x, yz) - F(x, y) - F(xy, z)]$$

is teljesül, szintén a μ_x közép jobb invarianciája miatt, valamint (2.5) miatt. Így az

$$(y, z) \mapsto F(y, z) - \Phi(y, z)$$

leképezés valóban korlátos, továbbá az előző egyenlőség miatt ezen leképezés és a (2.5)-ben szereplő leképezés korlátja megegyezik.

□

Használni fogunk még továbbá egy, a logaritmikus Cauchy-egyenletre vonatkozó stabilitási tételt, mely szintén igazolható az invariáns közepek módszerével, lásd például Forti [18].

2.13. Tétel. *Legyen S egy jobb (vagy bal) amenábilis félcsoport, $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ pedig egy olyan függvény, melyre az*

$$(2.7) \quad (x, y) \mapsto f(xy) - f(x) - f(y)$$

leképezés korlátos $S \times S$ -en. Ekkor létezik olyan $l : S \rightarrow \mathbb{C}$ logaritmikus függvény, azaz melyre

$$l(xy) = l(x) + l(y)$$

teljesül minden $x, y \in S$ esetén, úgy, hogy az

$$(2.8) \quad x \mapsto f(x) - l(x)$$

módon definiált leképezés korlátos S -en, ugyanazzal a korláttal, mellyel a (2.7)-ben értelmezett leképezés.

Ahogy azt a bevezetésben írtuk, a disszertáció fő célkitűzése az információelméletben megjelenő néhány függvényegyenlet stabilitásának a vizsgálata. A következő fejezetben arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha $\varepsilon \geq 0$ egy tetszőleges, de rögzített valós szám, $\alpha \in \mathbb{R}$ szintén tetszőleges, de rögzített, $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, melyre

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, akkor létezik-e a paraméteres információ-alapegyenletnek olyan $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ megoldása, melyre

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén valamely $K \in \mathbb{R}$ konstanssal?

3. A paraméteres információ–alapegyenlet stabilitása

Ez és a következő fejezet tartalmazza a disszertáció fő eredményeit. Ahogy azt az előző fejezet végén írtuk, ebben a fejezetben meg fogjuk vizsgálni, hogy vajon Hyers–Ulam értelemben stabil-e az információ paraméteres alapegyenlete. Azaz, feltételezve, hogy $\varepsilon \geq 0$ egy tetszőleges, de rögzített valós szám, $\alpha \in \mathbb{R}$ szintén tetszőleges, de rögzített, $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, melyre

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, akkor létezik-e a paraméteres információ–alapegyenletnek olyan $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ megoldása, melyre

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén valamely $K \in \mathbb{R}$ konstanssal? Mint azt majd látni fogjuk az egyes alfejezetekben, erre a kérdésre a válasz jelentősen függ az α paraméter megválasztásától. Így, ha $\alpha = 0$, $1 \neq \alpha > 0$, illetve ha $\alpha < 0$, akkor rendre stabilitást, szuperstabilitást, illetve hiperstabilitást tudunk majd igazolni.

Először azt az esetet tekintjük, amikor a paraméter értéke negatív. Ezek után rátérünk arra az esetre, amikor $\alpha = 0$ illetve amikor $1 \neq \alpha > 0$. Az utóbbi két esetet egy tételben foglaljuk össze, hogy ezzel feleslegesnek tűnő ismétléseket kerülhessünk el, hiszen ki fog derülni, hogy a két eset analóg gondolatmenettel kezelhető.

Ebben a témakörben az első dolgozat Maksa Gyula [49]–es cikke. Itt az (1.6) egyenlet szuperstabilitását sikerült igazolni az $1 \neq \alpha > 0$ esetben a zárt alaphalmazon. Ennek az eredménynek a többdimenziós alaphalmazon tekintett változatát a Gselmann [21] dolgozat tartalmazza. A [49]–ben ismertetett módszer azonban nem ültethető át arra az esetre, amikor $\alpha = 1$, vagy, ha $\alpha \leq 0$, továbbá abban az esetben sem működik, ha a problémát a D° halmazon tekintjük. Mindvégig úgy sejtettük, hogy a paraméteres

információ–alapegyenlet hiperstabil D° -on, azonban végül ehelyett csak stabilitást tudtunk igazolni (lásd Gselmann–Maksa [25]). Az ebben a dolgozatban ismertetett módszerről kiderült azonban, hogy alkalmas arra, hogy az $\alpha = 0$ esetben stabilitást, míg az $1 \neq \alpha > 0$ esetben szuperstabilitást igazoljunk vele. Ezeket az eredményeket a Gselmann [23] dolgozat tartalmazza. Nem sokkal ezek után az eredmények után derült azonban ki, hogy egy a fentiektől eltérő módszerrel mégis tudunk hiperstabilitást igazolni $\alpha < 0$ esetén, lásd Gselmann [22]. Sajnálatos módon azonban ezen módszerek egyike sem bizonyult hatékonynak az $\alpha = 1$ esetben, mely problémát Székelyhidi László vetette fel még 1991-ben (lásd [56]). Így, az információ alapegyenlete stabilitásának problémája mind a nyílt, mind a zárt alaphalmazon még mindig nyitott kérdés.

3.1. Az $\alpha < 0$ eset

Az alábbi tétel azt állítja, hogy az információ paraméteres alapegyenlete *hiperstabil* a D° halmazon, feltételezve, hogy az α paraméter értéke negatív, lásd [22].

3.1. Tétel. *Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$. Ekkor az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki az*

$$(3.1) \quad \left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, ha léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$(3.2) \quad f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén.

Bizonyítás. Az 1.5. Tétel miatt, ha

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d \quad (x \in]0, 1[)$$

teljesül valamely $c, d \in \mathbb{R}$ konstansokkal, akkor az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az (1.6) függvényegyenletet tetszőleges $(x, y) \in D^\circ$ esetén. Így, bármely $\varepsilon \geq 0$ esetén

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon \quad (x \in]0, 1[)$$

is teljesül. Tehát elegendő a megfordított irányú állítást igazolnunk.

A továbbiakban legyen

$$D_3^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z, x+y+z \in]0, 1[\}$$

és definiáljuk a $G : D^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$(3.3) \quad G(x, y) = f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(x+y) \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

módon. Ekkor a (3.1) egyenlőtlenségből azonnal adódik, hogy

$$(3.4) \quad |G(x, y) - G(y, x)| \leq \varepsilon. \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

Legyen most $(x, y, z) \in D_3^\circ$ tetszőleges. A G függvény definícióját felhasználva

$$G(x+y, z) = f(x+y) + (1-(x+y))^\alpha f\left(\frac{z}{1-(x+y)}\right) - f(x+y+z),$$

$$G(x, y+z) = f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y+z}{1-x}\right) - f(x+y+z)$$

és

$$\begin{aligned} & (1-x)^\alpha G\left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}\right) \\ &= (1-x)^\alpha \left[f\left(\frac{y}{1-x}\right) + \left(1 - \frac{y}{1-x}\right)^\alpha f\left(\frac{\frac{z}{1-x}}{1 - \frac{y}{1-x}}\right) - f\left(\frac{y+z}{1-x}\right) \right], \end{aligned}$$

teljesül. Ebből, rövid számolással azt kapjuk, hogy az

$$(3.5) \quad G(x, y) + G(x + y, z) = G(x, y + z) + (1 - x)^\alpha G\left(\frac{y}{1 - x}, \frac{z}{1 - x}\right)$$

egyenlet fennáll bármely $(x, y, z) \in D_3^\circ$ esetén.

Ezt felhasználva először azt mutatjuk meg, hogy G α -adfokú homogén függvény. Valóban, a (3.5) egyenletben x és y szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G(y, x) + G(x + y, z) \\ = G(y, x + z) + (1 - y)^\alpha G\left(\frac{x}{1 - y}, \frac{z}{1 - y}\right). \quad ((x, y, z) \in D_3) \end{aligned}$$

Továbbá, (3.5)-ben (x, y, z) helyett (y, z, x) -et írva azt kapjuk, hogy

$$G(y, z) + G(y + z, x) = G(y, x + z) + (1 - y)^\alpha G\left(\frac{z}{1 - y}, \frac{x}{1 - y}\right).$$

Így,

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & G(y, z) - (1 - x)^\alpha G\left(\frac{y}{1 - x}, \frac{z}{1 - x}\right) \\ &= \left\{ G(x, y) + G(x + y, z) - G(x, y + z) - (1 - x)^\alpha G\left(\frac{y}{1 - x}, \frac{z}{1 - x}\right) \right\} \\ &\quad - G(x, y) - G(x + y, z) + G(x, y + z) \\ &+ \left\{ G(y, x) + G(x + y, z) - G(y, x + z) - (1 - y)^\alpha G\left(\frac{x}{1 - y}, \frac{z}{1 - y}\right) \right\} \\ &+ \left\{ G(y, z) + G(y + z, x) - G(y, x + z) - (1 - y)^\alpha G\left(\frac{z}{1 - y}, \frac{x}{1 - y}\right) \right\} \\ &\quad - G(y + z, x) + G(y, x + z) + (1 - y)^\alpha G\left(\frac{z}{1 - y}, \frac{x}{1 - y}\right) \\ &= G(y, x) - G(x, y) + G(x, y + z) - G(y + z, x) \\ &\quad + (1 - y)^\alpha \left(G\left(\frac{z}{1 - y}, \frac{x}{1 - y}\right) - G\left(\frac{x}{1 - y}, \frac{z}{1 - y}\right) \right) \end{aligned}$$

tetszőleges $(x, y, z) \in D_3^\circ$ esetén, hiszen a kapcsos zárójelben lévő kifejezések mind nullával egyenlők. Így a (3.6) és a (3.4) egyenlőtlenség, valamint a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$(3.7) \quad \left| G(y, z) - (1-x)^\alpha G\left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}\right) \right| \leq (2 + (1-y)^\alpha) \varepsilon. \quad ((x, y, z) \in D_3^\circ)$$

Legyenek $t \in]0, 1[$ és $(u, v) \in D^\circ$ tetszőlegesek. Ekkor, ha

$$x = 1 - t, \quad y = tu \quad \text{és} \quad z = tv,$$

akkor $x, y, z \in]0, 1[$ és

$$x + y + z = 1 - t(1 - u - v) \in]0, 1[,$$

azaz $(x, y, z) \in D_3^\circ$. Másrészt (3.7)-ből ezzel a helyettesítéssel

$$|G(tu, tv) - t^\alpha G(u, v)| \leq (2 + (1 - tu)^\alpha) \varepsilon,$$

azaz

$$\left| \frac{G(tu, tv)}{t^\alpha} - G(u, v) \right| \leq \frac{(2 + (1 - tu)^\alpha)}{t^\alpha} \varepsilon$$

adódik minden $t \in]0, 1[$ és $(u, v) \in D^\circ$ esetén. Ha vesszük a $t \rightarrow 0+$ határátmenetet, akkor ebből azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{G(tu, tv)}{t^\alpha} = G(u, v), \quad ((u, v) \in D^\circ)$$

hiszen $\lim_{t \rightarrow 0+} (1 - tu)^\alpha = 1$, minden $u \in]0, 1[$ esetén és $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-\alpha} = 0$, mert $\alpha < 0$. Ebből pedig már következik, hogy G α -adfokú homogén. Valóban, tetszőleges $s \in]0, 1[$ és $(u, v) \in D^\circ$ esetén

$$(3.8) \quad \begin{aligned} G(su, sv) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{G(t(su), t(sv))}{t^\alpha} \\ &= s^\alpha \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{G((ts)u, (ts)v)}{(ts)^\alpha} = s^\alpha G(u, v). \end{aligned}$$

Végül, a (3.8) formula és a (3.4) egyenlőtlenség segítségével megmutatjuk, hogy G szimmetrikus. A (3.4) egyenlőtlenséget felhasználva,

$$|G(tx, ty) - G(ty, tx)| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $t \in]0, 1[$ és $(u, v) \in D^\circ$ esetén. Ebből, a G függvény α -adfokú homogenitását kihasználva azt kapjuk, hogy

$$|t^\alpha G(x, y) - t^\alpha G(y, x)| \leq \varepsilon, \quad ((x, y) \in D^\circ, t \in]0, 1[)$$

azaz

$$|G(x, y) - G(y, x)| \leq \frac{\varepsilon}{t^\alpha}. \quad ((x, y) \in D^\circ, t \in]0, 1[)$$

Ebből $t \rightarrow 0+$ határátmenetet véve az adódik, hogy

$$G(x, y) = G(y, x)$$

minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén. A G függvény definícióját felhasználva ez azt jelenti, hogy

$$f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

vagyis az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény a D° halmazon kielégíti az információ paraméteres alapegyenletét. Így az 1.5. Tétel miatt léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén.

□

Az alábbiakban a zárt alaphalmazon fogjuk megvizsgálni a stabilitás kérdését, és megmutatjuk, hogy ha az α paraméter negatív, akkor az információ paraméteres alapegyenlete nemcsak a D° , hanem a D halmazon is hiperstabil, ez eredmény megtalálható a [22] dolgozatban.

3.2. Tétel. Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$. Ekkor az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki a (3.1) egyenlőtlenséget minden $(x, y) \in D$ esetén, ha léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$(3.9) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d, & \text{ha } x \in]0, 1[\\ c - d, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyenek $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$ tetszőlegesek, de rögzítettek, és tegyük fel, hogy az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy kielégíti a (3.1) egyenlőtlenséget minden $(x, y) \in D$ esetén. Az $y = 0$ helyettesítés után (3.1)-ből azt kapjuk, hogy

$$((1-x)^\alpha + 1)|f(0)| \leq \varepsilon. \quad (x \in]0, 1[)$$

Mivel $\alpha < 0$, ez azt jelenti, hogy $f(0) = 0$. Másfelől a 3.1. Tétel azt állítja, hogy

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén valamely $c, d \in \mathbb{R}$ konstansokkal. Végül, legyen $x \in]0, 1[$ tetszőleges és $y = 1 - x$. Ekkor szintén a 3.1. Tétel miatt, azt kapjuk, hogy léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$|c - d - f(1)| |x^\alpha - (1-x)^\alpha| \leq \varepsilon.$$

Így $f(1) = c - d$, hiszen $\alpha < 0$.

Mivel a (3.9) formulával definiált $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény megoldása a paraméteres információ-alapegyenletnek a D halmazon, ezért nyilván a (3.1) egyenlőtlenséget is kielégíti tetszőleges $\varepsilon \geq 0$ esetén.

□

3.2. Az $\alpha = 0$ és az $0 < \alpha \neq 1$ eset

Ebben az alfejezetben azt az esetet fogjuk tekinteni, amikor a paraméter értéke nulla vagy egy egytől különböző pozitív valós szám, valamint igazolni fogjuk, hogy ebben az esetben a paraméteres információ-alapegyenlet stabil, illetve szuperstabil. Az itt ismertetett eredményeket a [23] és a [25] dolgozatok tartalmazzák.

3.3. Tétel. Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $1 \neq \alpha \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény tetszőleges $(x, y) \in D^\circ$ esetén kielégíti a

$$(3.10) \quad \left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ekkor, ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $l :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$(3.11) \quad |f(x) - [l(1-x) + c]| \leq 63\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén, egyébként pedig léteznek olyan a, b valós konstansok, hogy

$$(3.12) \quad |f(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon$$

áll fenn bármely $x \in]0, 1[$ esetén, ahol

$$K(\alpha) = |2^{1-\alpha} - 1|^{-1} \left(3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|} \right).$$

Bizonyítás. Definiáljuk az $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$(3.13) \quad F(u, v) = (u+v)^\alpha f\left(\frac{v}{u+v}\right)$$

formulával minden $(u, v) \in \mathbb{R}_{++}^2$ esetén. Ekkor azonnal adódik, hogy

$$(3.14) \quad F(tu, tv) = t^\alpha F(u, v), \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

illetve

$$(3.15) \quad f(x) = F(1-x, x). \quad (x \in]0, 1[)$$

Továbbá az

$$x = \frac{w}{u+v+w}, \quad y = \frac{v}{u+v+w} \quad (u, v, w \in \mathbb{R}_{++})$$

helyettesítésekkel a (3.10) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\left| f\left(\frac{w}{u+v+w}\right) + \frac{(u+v)^\alpha}{(u+v+w)^\alpha} f\left(\frac{v}{u+v}\right) - f\left(\frac{v}{u+v+w}\right) - \frac{(u+w)^\alpha}{(u+v+w)^\alpha} f\left(\frac{w}{u+w}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

míg (3.14) miatt

$$(3.16) \quad |F(u+v, w) + F(u, v) - F(u+w, v) - F(u, w)| \leq \varepsilon(u+v+w)^\alpha$$

teljesül minden $u, v, w \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

Definiáljuk most a g illetve a G függvényeket az $\mathbb{R}_{++}$ illetve az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazokon

$$(3.17) \quad g(u) = F(u, 1) - F(1, u),$$

illetve

$$(3.18) \quad G(u, v) = F(u, v) + g(v).$$

módon. Megmutatjuk, hogy minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén fennáll a

$$(3.19) \quad |G(u, v) - G(v, u)| \leq 3\varepsilon(u+v+1)^\alpha$$

egyenlőtlenség. Valóban, (3.16)-ból a $w = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$(3.20) \quad |F(u+v, 1) + F(u, v) - F(u+1, v) - F(u, 1)| \leq \varepsilon(u+v+1)^\alpha.$$

minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebben az egyenlőtlenségben u és v szerepét felcserélve az

$$|-F(u+v, 1) - F(v, u) + F(v+1, u) - F(v, 1)| \leq \varepsilon(u+v+1)^\alpha$$

egyenlőtlenség adódik tetszőleges $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebből, illetve a (3.20) egyenlőtlenségből a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(3.21) \quad |F(u, v) - F(v, u) - F(u + 1, v) - F(u, 1) + F(v + 1, u) + F(v, 1)| \leq 2\varepsilon(u + v + 1)^\alpha$$

teljesül minden $u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Másrésztől (3.16)-ban az $u = 1$ helyettesítést elvégezve

$$|F(1 + v, w) + F(1, v) - F(1 + w, w) - F(1, w)| \leq \varepsilon(1 + v + w)^\alpha$$

adódik minden $v, w \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebben v -t u -ra, illetve w -t v -re kicserélve az adódik, hogy

$$|F(u + 1, v) + F(1, u) - F(v + 1, u) - F(1, v)| \leq \varepsilon(u + v + 1)^\alpha. \\ (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

Végül, ismét a háromszög-egyenlőtlenség és a g illetve a G függvények definícióinak felhasználásával a legutóbbi egyenlőtlenségből kapjuk, hogy (3.19) valóban teljesül.

A következőkben a g függvénnyel fogunk foglalkozni. A bizonyítás ezen pontján azonban két esetet különböztetünk meg.

Először tegyük fel, hogy $\alpha = 0$. Ekkor meg fogjuk mutatni, hogy létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény, hogy

$$|g(u) - l(u)| \leq 6\varepsilon$$

teljesül minden $u \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

Vegyük észre, hogy az $\alpha = 0$ esetben a (3.19) egyenlőtlenség a

$$|G(u, v) - G(v, u)| \leq 3\varepsilon \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

egyenlőtlenséggé redukálódik. Továbbá, (3.14) és (3.18) miatt

$$\begin{aligned} G(tu, tv) &= F(tu, tv) + g(tv) = F(u, v) + g(tv) \\ &= G(u, v) - g(v) + g(tv), \end{aligned}$$

azaz,

$$G(tu, tv) - G(u, v) = g(tv) - g(v), \quad (t, u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

ezért

$$\begin{aligned} (3.22) \quad & |g(tv) - g(v) + g(u) - g(tu)| \\ &= |G(tu, tv) - G(u, v) - G(tv, tu) + G(v, u)| \\ &\leq |G(tu, tv) - G(tv, tu)| + |G(v, u) - G(u, v)| \leq 6\varepsilon \end{aligned}$$

teljesül minden $t, u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Az $u = 1$ helyettesítéssel a (3.22) egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy minden $t, v \in \mathbb{R}_{++}$ mellett fennáll a

$$|g(tv) - g(v) - g(t)| \leq 6\varepsilon$$

egyenlőtlenség, hiszen $g(1) = 0$. Ez az jelenti, hogy a g függvény megközelítőleg logaritmikus az $\mathbb{R}_{++}$ halmazon. Ezért a 2.13. Tétel miatt létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény úgy, hogy minden $u \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$|g(u) - l(u)| \leq 6\varepsilon$$

teljesül.

Továbbá, ebből, (3.19)–ből a g és a G függvények definícióinak felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (3.23) \quad & |f(x) - l(1-x) - (f(1-x) - l(x))| \\ &= |F(1-x, x) - l(1-x) - F(x, 1-x) + l(x)| \\ &= |F(1-x, x) + g(x) - g(x) - l(1-x) \\ &\quad - F(x, 1-x) + g(1-x) - g(1-x) + l(x)| \\ &\leq |F(1-x, x) + g(x) - (F(x, 1-x) + g(1-x))| \\ &\quad + |g(1-x) - l(1-x)| + |l(x) - g(x)| \\ &= |G(1-x, x) - G(x, 1-x)| \\ &\quad + |g(1-x) - l(1-x)| + |l(x) - g(x)| \\ &\leq 3\varepsilon + 6\varepsilon + 6\varepsilon = 15\varepsilon \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ mellett.

Definiáljuk most az f_0 és az F_0 függvényeket a $]0, 1[$ illetve a $]0, 1[^2$ halmazokon a következőképpen:

$$f_0(x) = f(x) - l(1 - x),$$

illetve

$$F_0(p, q) = f_0(p) + f_0(q) - f_0(pq) - f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right).$$

Ekkor (3.23) felhasználásával azonnal adódik, hogy

$$(3.24) \quad |f_0(x) - f_0(1-x)| \leq 15\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. Legyenek $p, q \in]0, 1[$ tetszőlegesek, ekkor a (3.10) egyenlőtlenségből az $x = 1 - p$ és az $y = pq$ helyettesítésekkel az következik, hogy

$$(3.25) \quad \left| f_0(1-p) + f_0(q) - f_0(pq) - f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right) \right| \leq \varepsilon$$

A (3.25) és a (3.26) egyenlőtlenségekből, a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(3.26) \quad |F_0(p, q)| \leq 16\varepsilon. \quad (p, q \in]0, 1[)$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy minden $p, q \in]0, 1[$ esetén teljesül az

$$\begin{aligned} & f_0(p) - f_0(q) \\ &= F_0(q, p) - F_0(p, q) + F_0\left(\frac{1-p}{1-pq}, p\right) - f_0\left(1 - \frac{1-p}{1-pq}\right) + f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right) \end{aligned}$$

azonosság, ezért

$$\begin{aligned} (3.27) \quad |f_0(p) - f_0(q)| & \leq |F_0(q, p)| + |F_0(p, q)| + \left| F_0\left(\frac{1-p}{1-pq}, p\right) \right| \\ & \quad + \left| f_0\left(1 - \frac{1-p}{1-pq}\right) - f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right) \right| \\ & \leq 3 \cdot 16\varepsilon + 15\varepsilon = 63\varepsilon \end{aligned}$$

is fennáll bármely $p, q \in]0, 1[$ mellett. Legyen (3.27)–ben $q = \frac{1}{2}$, hogy az

$$\left| f_0(p) - f_0\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 63\varepsilon \quad (p \in]0, 1[)$$

egyenlőtlenséghez jussunk. Ez, az f_0 függvény definícióját felhasználva, azt jelenti, hogy

$$|f(x) - l(1 - x) - c| \leq 63\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén, ahol $c = f_0\left(\frac{1}{2}\right)$. Ezzel igazoltuk a (3.11) egyenlőtlenséget.

Végül tekintsük az $1 \neq \alpha > 0$ esetet. Meg fogjuk mutatni, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy minden $x \in]0, 1[$ esetén

$$|g(x) - c(x^\alpha - 1)| \leq \frac{4 \cdot 3^{\alpha+1}\varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|}.$$

A (3.13), (3.17) és a (3.18) formulák miatt

$$\begin{aligned} G(tu, tv) &= F(tu, tv) + g(tv) \\ &= t^\alpha F(u, v) + g(tv) \\ &= t^\alpha G(u, v) - t^\alpha g(v) + g(tv), \end{aligned}$$

azaz,

$$G(tu, tv) - t^\alpha G(u, v) = g(tv) - t^\alpha g(v)$$

teljesül minden $t, v \in \mathbb{R}_{++}$ mellett. Ezért a (3.19) egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy tetszőleges $t, u, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} (3.28) \quad & |g(tv) - t^\alpha g(v) + t^\alpha g(u) - g(tu)| \\ &= |G(tu, tv) - G(u, v) - G(tv, tu) + G(v, u)| \\ &\leq |G(tu, tv) - G(tv, tu)| + |G(u, v) - G(v, u)| \\ &\leq 3\varepsilon(t(u+v) + 1)^\alpha + 3\varepsilon(u+v+1)^\alpha. \end{aligned}$$

Ha (3.28)–ban elvégezzük az $u = 1$ helyettesítést, akkor a

$$\begin{aligned} (3.29) \quad & |g(tv) - t^\alpha g(v) - g(t)| \\ &\leq 3\varepsilon(t(v+1) + 1)^\alpha + 3\varepsilon(v+2)^\alpha \quad (t, v \in \mathbb{R}_{++}) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Továbbá (3.29)–ben t és v szerepét felcserélve

$$(3.30) \quad |g(tv) - v^\alpha g(t) - g(v)| \leq 3\varepsilon(v(t+1) + 1)^\alpha + 3\varepsilon(t+2)^\alpha \quad (t, v \in \mathbb{R}_{++})$$

adódik. A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával a (3.29) és a (3.30) egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy

$$(3.31) \quad |t^\alpha g(v) + g(t) - v^\alpha g(t) - g(v)| \leq B(t, v)$$

áll fenn bármely $t, v \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, ahol

$$\begin{aligned} B(t, v) &= 3\varepsilon(t(v+1) + 1)^\alpha + 3\varepsilon(v+2)^\alpha \\ &+ 3\varepsilon(v(t+1) + 1)^\alpha + 3\varepsilon(t+2)^\alpha. \end{aligned}$$

Legyen most $t = \frac{1}{2}$ és vezessük be a $c = \frac{g(\frac{1}{2})}{2^{-\alpha}-1}$ jelölést. Ekkor

$$(3.32) \quad |g(v) - c(v^\alpha - 1)| \leq \frac{B(\frac{1}{2}, v)}{|2^{-\alpha} - 1|}. \quad (v \in \mathbb{R}_{++})$$

Vegyük észre azonban, hogy

$$|B(t, v)| \leq 4 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon,$$

ha $t, v \in]0, 1[$, azaz B korlátos a $]0, 1[\times]0, 1[$ halmazon. Ezért

$$(3.33) \quad |g(v) - c(v^\alpha - 1)| \leq \frac{B(\frac{1}{2}, v)}{|2^{-\alpha} - 1|} \leq \frac{4 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|}$$

teljesül minden $v \in]0, 1[$ esetén.

Továbbá, (3.15), (3.18), (3.19), (3.33) és a háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x \in]0, 1[$ választása mellett

$$\begin{aligned} &|f(x) - c(1-x)^\alpha + c - (f(1-x) - cx^\alpha + c)| \\ &= |F(1-x, x) - c(1-x)^\alpha + c - (F(x, 1-x) - cx^\alpha + c)| \\ &\leq |F(1-x, x) + g(x) - F(x, 1-x) - g(1-x)| \\ (3.34) \quad &+ |g(x) - c(x^\alpha - 1)| + |g(1-x) - c((1-x)^\alpha - 1)| \\ &= |G(1-x, x) - G(x, 1-x)| \\ &+ |g(x) - c(x^\alpha - 1)| + |g(1-x) - c((1-x)^\alpha - 1)| \\ &\leq 3 \cdot 2^\alpha \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|}. \end{aligned}$$

Az első esetben leírtakhoz hasonlóan definiáljuk az f_0 és az F_0 függvényeket a $]0, 1[$, illetve a $]0, 1[^2$ halmazokon az

$$(3.35) \quad f_0(x) = f(x) - c(1-x)^\alpha \quad (x \in]0, 1[)$$

és az

$$(3.36) \quad F_0(p, q) = f_0(p) + p^\alpha f_0(q) - f_0(pq) - (1-pq)^\alpha f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right), \quad ((p, q) \in]0, 1[^2)$$

képletekkel.

Ekkor (3.10), (3.35) és (3.36) miatt egyrészt

$$(3.37) \quad \left| f_0(x) + (1-x)^\alpha f_0\left(\frac{y}{1-x}\right) - f_0(y) - (1-y)^\alpha f_0\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

ha $(x, y) \in D^\circ$, másrészt pedig

$$(3.38) \quad |f_0(x) - f_0(1-x)| \leq 3 \cdot 2^\alpha \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|}. \quad (x \in]0, 1[)$$

Továbbá, a (3.38)-as egyenlőtlenségből az $x = 1-p$, $y = pq$ ($p, q \in]0, 1[$) helyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

$$(3.39) \quad \left| f_0(1-p) + p^\alpha f_0(q) - f_0(pq) - (1-pq)^\alpha f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right) \right| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $p, q \in]0, 1[$ esetén. Így, (3.38) és a (3.39)-es egyenlőtlenségek és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$(3.40) \quad |F_0(p, q)| \leq \varepsilon + 3 \cdot 2^\alpha \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|}. \quad (x \in]0, 1[)$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az

$$(3.41) \quad \begin{aligned} & f_0(p) [q^\alpha + (1-q)^\alpha - 1] - f_0(q) [p^\alpha + (1-p)^\alpha - 1] \\ & \quad = F_0(q, p) - F_0(p, q) \\ & \quad - (1-pq)^\alpha \left[F_0\left(\frac{1-q}{1-pq}, p\right) + f_0\left(1 - \frac{1-p}{1-pq}\right) - f_0\left(\frac{1-p}{1-pq}\right) \right] \end{aligned}$$

azonosság minden $p, q \in]0, 1[$ mellett fennáll, ezért az F_0 függvényre vonatkozó (3.40) becslést alkalmazva az

$$\begin{aligned} \left| f_0(p) - \frac{f_0(q)}{q^\alpha + (1-q)^\alpha - 1} [p^\alpha + (1-p)^\alpha - 1] \right| \\ \leq |q^\alpha + (1-q)^\alpha - 1|^{-1} \cdot \\ \left(3 \left(\varepsilon + 3 \cdot 2^\alpha \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|} \right) + 3 \cdot 2^\alpha \varepsilon + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1} \varepsilon}{|2^{-\alpha} - 1|} \right) \end{aligned}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, mely minden $p, q \in]0, 1[$ esetén teljesül. Ez, (3.35)–öt figyelembe véve, a $q = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel és az

$$a = f_0\left(\frac{1}{2}\right) (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} \quad \text{és} \quad b = a + c,$$

definíciókkal azt jelenti, hogy

$$(3.42) \quad |f(p) - [ap^\alpha + b(1-p)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon$$

teljesül, ha $p \in]0, 1[$, ahol

$$K(\alpha) = |2^{1-\alpha} - 1|^{-1} \left(3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|} \right).$$

□

Vegyük észre, hogy az előző tételben szereplő $K(\alpha)$ kifejezésre

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} K(\alpha) = +\infty$$

teljesül, ezért a 3.3. Tétel bizonyításában használt módszer nem alkalmas az információ alapegyenlete stabilitásának vizsgálatakor.

A 1.5. Tétel értelmében a 3.3. Tétel azt állítja, hogy az információ paraméteres alapegyenlete stabil a D° halmazon, feltéve, hogy $1 \neq \alpha \geq 0$. Továbbá, (1.6) megoldásai a $]0, 1[$ intervallumon korlátosak, ha $1 \neq \alpha > 0$,

ezért az előző tétel szerint ebben az esetben a paraméteres információ-alapegyenlet nemcsak stabil, hanem szuperstabil is.

A következő tételben azt fogjuk megmutatni, hogy (1.6) nemcsak a D° halmazon, hanem a D halmazon is stabil. A tétel bizonyításában szükségünk lesz majd a

$$T(\alpha) = 3 \cdot 2^\alpha + \frac{8 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|} \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

módon definiált kifejezésre. Megjegyezzük, hogy $K(\alpha)$ és $T(\alpha)$ között fennáll a

$$K(\alpha) = \frac{4T(\alpha) + 3}{|2^{1-\alpha} - 1|}$$

összefüggés minden $1 \neq \alpha > 0$ esetén.

3.4. Tétel. *Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\varepsilon \geq 0$, $1 \neq \alpha \geq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy minden $(x, y) \in D$ esetén kielégíti a (3.10) egyenlőtlenséget. Ekkor, ha $\alpha \neq 0$, akkor létezik olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy*

$$(3.43) \quad |f(x) - h_1(x)| \leq \max \{K(\alpha), T(\alpha) + 1\} \varepsilon, \quad (x \in [0, 1])$$

teljesül minden $x \in [0, 1]$ esetén, ahol

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b, & \text{ha } x \in]0, 1[\\ a - b, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

továbbá, ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$(3.44) \quad |f(x) - h_2(x)| \leq 63\varepsilon \quad (x \in [0, 1])$$

áll fenn tetszőleges $x \in [0, 1]$ esetén, ahol

$$h_2(x) = \begin{cases} f(0), & \text{ha } x = 0 \\ c, & \text{ha } x \in]0, 1[\\ f(1), & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

Bizonyítás. Először azzal az esettel fogunk foglalkozni, amikor $\alpha \neq 0$. (3.10)–ben először $x = 0$ -t helyettesítve, majd az $y \rightarrow 0+$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$|f(0)| \leq \varepsilon \leq K(\alpha)\varepsilon,$$

azaz (3.43) fennáll $x = 0$ esetén. Továbbá, (3.43) nyilván teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén a 3.2. Tétel miatt. Legyen $x \in]0, 1[$ tetszőleges. Ekkor ha (3.10)–ben az $y = 1 - x$ helyettesítéssel élünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$|f(x) + (1 - x)^\alpha f(1) - f(1 - x) - x^\alpha f(1)| \leq \varepsilon. \quad (x \in]0, 1[)$$

Az előző tétel bizonyításában leírtak miatt (lásd a (3.35) definíciót)

$$f(x) = f_0(x) + c(1 - x)^\alpha, \quad (x \in]0, 1[)$$

így a legutóbbi egyenlőtlenség az

$$(3.45) \quad |f_0(x) - f_0(1 - x) + c(1 - x)^\alpha - cx^\alpha + (1 - x)^\alpha f(1) - x^\alpha f(1)| \leq \varepsilon$$

alakra hozható tetszőleges $x \in]0, 1[$ esetén. Másfelől

$$|f_0(x) - f_0(1 - x)| \leq T(\alpha). \quad (x \in]0, 1[)$$

így, ha a (3.45) egyenlőtlenséget átrendezzük, akkor

$$|f_0(x) - f_0(1 - x) - [c + f(1)][x^\alpha - (1 - x)^\alpha]| \leq \varepsilon, \quad (x \in]0, 1[)$$

azaz

$$||f_0(x) - f_0(1 - x)| - |c + f(1)| \cdot |x^\alpha - (1 - x)^\alpha|| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. Ezért

$$|c + f(1)| \cdot |x^\alpha - (1 - x)^\alpha| \leq (T(\alpha) + 1)\varepsilon,$$

amennyiben $x \in]0, 1[$. Ha ebben az egyenlőtlenségben végrehajtjuk az $x \rightarrow 0+$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$|c + f(1)| \leq (T(\alpha) + 1)\varepsilon.$$

A 3.3. Tétel bizonyításából azonban tudjuk, hogy $c = b - a$, így

$$|f(1) - (a - b)| \leq (T(\alpha) + 1)\varepsilon,$$

azaz (3.43) valóban teljesül.

Tekintsük most az $\alpha = 0$ esetet. Ha $x = 0$ vagy $x = 1$, akkor (3.44) teljesül hiszen a h_2 függvény definíciója miatt

$$|f(0) - h_2(0)| = |f(0) - f(0)| = 0 \leq K(\alpha)\varepsilon,$$

illetve

$$|f(1) - h_2(1)| = |f(1) - f(1)| = 0 \leq K(\alpha)\varepsilon.$$

Legyen most $x \in]0, 1[$ tetszőleges, ekkor a (3.10) egyenlőtlenségbe $y = 1 - x$ -et helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$(3.46) \quad |f(x) - f(1 - x)| \leq \varepsilon. \quad (x \in]0, 1[)$$

A 3.3. Tétel miatt létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ és $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény, hogy

$$(3.47) \quad |f(x) - l(1 - x) - c| \leq 63\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. Ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy l azonosan zéró logaritmikus függvény. Valóban, (3.11) és (3.46) miatt

$$\begin{aligned} (3.48) \quad & |l(1 - x) - l(x)| \\ &= |l(1 - x) - f(1 - x) + f(1 - x) + c - l(x) + f(x) - f(x) - c| \\ &\leq |l(1 - x) + c - f(x)| + |f(1 - x) - l(x) - c| + |f(x) - f(1 - x)| \\ &\leq 127\varepsilon, \end{aligned}$$

ha $x \in]0, 1[$. Legyenek $p, q \in \mathbb{R}_{++}$ tetszőlegesek, ekkor az $x = \frac{p}{p+q}$ helyettesítéssel (3.48)-ból azt kapjuk, hogy

$$|l(p) - l(q)| \leq 127\varepsilon, \quad (p, q \in \mathbb{R}_{++})$$

ahol felhasználtuk azt is, hogy l logaritmikus függvény. Ebből a $q = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$|l(p)| \leq 127\varepsilon, \quad (p \in \mathbb{R}_{++})$$

hiszen $l(1) = 0$, vagyis l az egész $\mathbb{R}_{++}$ halmazon korlátos logaritmikus függvény. Ez csak úgy lehet, ha l azonosan zéró a pozitív valós számok halmazán. Mindezt (3.47)-tel egybevetve, azt kapjuk, hogy

$$|f(x) - c| \leq 63\varepsilon$$

áll fenn minden $x \in]0, 1[$ esetén, vagyis (3.44) valóban teljesül.

□

A disszertáció ezen fejezetében a paraméteres információ-alapegyenlet stabilitásával foglalkoztunk. Összefoglalva, a következőket sikerült igazolnunk. Az (1.6) függvényegyenlet stabil, ha $\alpha = 0$, szuperstabil amennyiben $1 \neq \alpha > 0$, továbbá hiperstabil $\alpha < 0$ esetén mind a D° , mind a D halmazon. A bizonyításokból kiderül, hogy az ebben a fejezetben ismertetett módszerek nem alkalmasak abban az esetben, ha $\alpha = 1$, így az információ alapegyenletének stabilitása még ma is nyitott probléma.

Az (1.6) függvényegyenletnek az alábbi függvényegyenlet nyilván általánosítása, lásd [16], melyet az *információ multiplikatív típusú alapegyenletének* nevezünk. Legyen $\mu : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott multiplikatív függvény, azaz tegyük fel, hogy

$$\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_+^k$ esetén, ahol mind a műveleteket, mind a rendezést koordinátánként értelmezzük. Tekintsük továbbá az

$$f(x) + \mu(1-x)f\left(\frac{y}{1-x}\right) = f(y) + \mu(1-y)f\left(\frac{x}{1-y}\right),$$

$(x, y) \in D^k = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{2k} | x, y \in [0, 1]^k, x + y \leq \mathbf{1}\}$ függvényegyenletet. Ez az egyenlet stabil a D^k halmazon, ha $\mu : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ olyan korlátos multiplikatív függvény, melyre még az is teljesül, hogy létezik olyan $q \in]0, 1[^k$,

hogy $\mu(q) + \mu(1 - q) \neq 1$, lásd [21]. A stabilitás kérdése azonban nincs megválaszolva abban az esetben, ha a problémát a nyílt alaphalmazon tekintjük, illetve abban az esetben sem, ha a μ multiplikatív függvényről nem teszünk fel semmilyen regularitási feltételt.

Ebben a disszertációban csak olyan információmértékekkel foglalkozunk, melyek csak az adott eseményrendszerben szereplő valószínűségektől függenek, maguktól az eseményektől nem. Az úgynevezett inszet elméletben az információmértékek mind az eseményektől, mind azok valószínűségeitől függenek, (lásd [16]). Léteznek továbbá olyan információmértékek is (ilyen például az általánosított irányított divergencia), melyek több valószínűségeloszlástól függenek. Ezekben az esetekben az $f, g, h, k :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényekre vonatkozó

$$f(x) + (1 - x)^\alpha g\left(\frac{y}{1 - x}\right) = h(y) + (1 - y)^\alpha k\left(\frac{x}{1 - y}\right) \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

függvényegyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek az általános megoldását a Maksa [44] dolgozat tartalmazza. Ahogy azt a [23] dolgozatban felvetettük, a témakörrel kapcsolatos további kutatómunka tárgya lehet például a fenti egyenlet stabilitásának a vizsgálata.

4. Alkalmazások

A disszertáció utolsó részében, az előző fejezetekben található eredményeket – különös tekintettel a 3.1. és a 3.3. Tételekre – fogjuk alkalmazni.

Ez a fejezet három alfejezetből áll. Az elsőben igazolni fogjuk, hogy az entrópia-egyenlet stabil. A második alfejezetben a módosított entrópia-egyenlettel fogunk foglalkozni és be fogjuk látni, hogy ez a függvényegyenlet is stabil. Végül pedig egy, az α -rekurzív, 3-szemi-szimmetrikus információ-mértékekre vonatkozó stabilitási tételt ismertetünk.

4.1. Az entrópia-egyenlet stabilitása

Ennek az alfejezetnek a fő eredménye az, hogy az úgynevezett entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil.

Tekintsük az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z > 0\}$ halmazt. Ekkor a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényre vonatkozó

$$(4.1) \quad H(x, y, z) = H(x + y, 0, z) + H(x, y, 0) \quad ((x, y, z) \in S)$$

függvényegyenletet *entrópia-egyenlet*nek hívjuk. A (4.1) egyenlettel először A. Kamiński és J. Mikusiński foglalkozott és 1977-ben meghatározták (4.1) általános megoldását, feltételezve, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szimmetrikus, folytonos és elsőfokú homogén függvény, lásd [35]. Ezt az eredményt Aczél [3] általánosította azáltal, hogy a H ismeretlen függvényre enyhébb regularitási feltételeket követelt meg. Így, az alábbi tételt sikerült igazolnia.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szimmetrikus, azaz*

$$H(x, y, z) = H(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S$ és tetszőleges $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ permutáció esetén; H elsőfokú homogén függvény, azaz

$$H(tx, ty, tz) = tH(x, y, z)$$

minden $(x, y, z) \in S$ és $t \in \mathbb{R}_{++}$ esetén; H kielégíti az entrópia-egyenletet az S halmazon, azaz

$$H(x, y, z) = H(x + y, 0, z) + H(x, y, 0)$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$x \mapsto H(1 - x, x, 0) \quad (x \in]0, 1[)$$

leképezés

- (i) folytonos a $]0, 1[$ intervallum valamely pontjában;
- (ii) vagy integrálható $]0, 1[$ valamely zárt részintervallumán;
- (iii) vagy mérhető a $]0, 1[$ intervallumon.

Ekkor és csakis ekkor

$$H(x, y, z) = x \log(x) + y \log(y) + z \log(z) - (x + y + z) \log(x + y + z)$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S$ esetén, ahol itt $\log : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges alapú logaritmus függvényt jelöl, továbbá a $0 \log(0) = 0$ konvencióval élünk.

Aczél [3] gondolatmenete a következő. Tegyük fel, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szimmetrikus, elsőfokú homogén és az S halmazon kielégíti az entrópia-egyenletet. Ekkor az

$$f(x) = H(1 - x, x, 0) \quad (x \in [0, 1])$$

módon definiált $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az információ alapegyenletét a D halmazon, továbbá, $f(x) = f(1 - x)$ is teljesül minden $x \in [0, 1]$ esetén. Ez, az (i), (ii) illetve (iii) regularitási feltételek mellett csak úgy állhat fenn, ha

$$f(x) = \log(x) + \log(1 - x), \quad (x \in]0, 1[)$$

itt $\log : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ egy tetszőleges alapú logaritmus függvényt jelöl. Ebből pedig már meg tudjuk határozni a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, hiszen az

$$f\left(\frac{v}{u+v}\right) = (u+v)H(u, v, 0)$$

azonosság minden $u, v \in \mathbb{R}_+$ esetén fennáll.

Az Aczél [3]–ban található eredményt Daróczy Zoltánnak sikerült általánosítani. Ő az entrópia-egyenlet azon megoldásait határozta meg, melyek esetén a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ ismeretlen függvényről csak azt tesszük fel, hogy szimmetrikus, elsőfokú homogén és kielégíti az entrópia-egyenletet. Daróczy [12] gondolatmenete pedig az, hogy a fenti feltételek mellett az

$$F(x, y) = H(x, y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

módon definiált $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szimmetrikus, elsőfokú homogén és kielégíti a kociklus-egyenletet. Ez az eredmény következménye az alábbi tételnek, mely azt állítja, hogy az entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil. Így a Daróczy [12]–ben található eredményt a következő tétel után – mint következményt – ismertetjük majd.

4.2. Tétel. [20] *Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z > 0\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nem-negatív valós szám, tegyük fel továbbá, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbiak.*

$$(4.2) \quad |H(x, y, z) - H(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_1$$

minden $(x, y, z) \in S$ és tetszőleges $\sigma : \{x, y, z\} \mapsto \{x, y, z\}$ permutáció esetén;

$$(4.3) \quad |H(x, y, z) - H(x + y, 0, z) - H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_2$$

bármely $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén, ahol S° jelöli az S halmaz belsejét;

$$(4.4) \quad |H(tx, ty, 0) - t^\alpha H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_3$$

minden $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ekkor, ha $\alpha = 1$, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

úgy, hogy

$$(4.5) \quad |H(x, y, z) - [\varphi(x + y + z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z)]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén; ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy

$$(4.6) \quad |H(x, y, z) - a| \leq 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1,$$

ha $(x, y, z) \in S^\circ$; végül, minden más esetben létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$(4.7) \quad |H(x, y, z) - c[(x + y + z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Meg fogjuk, mutatni, hogy ekkor az $(x, y) \mapsto H(x, y, 0)$ függvény egy α -adfokú homogén függvény. Valóban, a (4.4) egyenlőtlenséget átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$\left| H(x, y, 0) - \frac{H(tx, ty, 0)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{\varepsilon_3}{t^\alpha}$$

teljesül minden $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Legyen a továbbiakban

$$t_0 = \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha < 0 \\ +\infty, & \text{ha } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ekkor, a legutóbbi egyenlőtlenségben $t \rightarrow t_0$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$(4.8) \quad \lim_{t \rightarrow t_0} t^{-\alpha} H(tx, ty, 0) = H(x, y, 0)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebből pedig már következik, hogy az $(x, y) \mapsto H(x, y, 0)$ leképezés α -adfokú homogén, hiszen tetszőleges $s, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\begin{aligned}
 H(sx, sy, 0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} t^{-\alpha} H(tsx, tsy, 0) \\
 &= \lim_{t \rightarrow t_0} t^{-\alpha} s^{-\alpha} H((ts)x, (ts)y, 0) s^{\alpha} \\
 (4.9) \quad &= s^{\alpha} \lim_{t \rightarrow t_0} (ts)^{-\alpha} H((ts)x, (ts)y, 0) \\
 &= s^{\alpha} H(x, y, 0).
 \end{aligned}$$

Alább a (4.2)-es és a (4.3)-as egyenlőtlenségekkel fogunk foglalkozni. (4.3)-ban x és z szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy

$$(4.10) \quad |H(z, y, x) - H(z + y, 0, x) - H(z, y, 0)| \leq \varepsilon_2$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^{\circ}$ esetén. A (4.2), a (4.3) és a (4.10) egyenlőtlenségekből, a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(4.11) \quad |H(x + y, 0, z) + H(x, y, 0) - H(y + z, 0, x) - H(z, y, 0)| \leq 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

minden $(x, y, z) \in S^{\circ}$ esetén. A (4.2) egyenlőtlenség háromszori alkalmazásával (4.11)-ből azt kapjuk, hogy

$$(4.12) \quad |H(x + y, z, 0) + H(x, y, 0) - H(x, y + z, 0) - H(y, z)| \leq 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1$$

teljesül az S° halmazon. Legyen

$$(4.13) \quad F(x, y) = H(x, y, 0). \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Ekkor (4.2) miatt

$$(4.14) \quad |F(x, y) - F(y, x)| \leq \varepsilon_1, \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

továbbá, mivel H kielégíti a (4.12) egyenlőtlenséget, ezért

$$\begin{aligned}
 (4.15) \quad |F(x + y, z) + F(x, y) - F(x, y + z) - F(y, z)| \\
 \leq 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1. \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})
 \end{aligned}$$

(4.9) felhasználásával pedig azt kapjuk, hogy

$$(4.16) \quad F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y), \quad (\alpha \neq 0, t, x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

továbbá, (4.13) és (4.4) miatt, az $\alpha = 0$ esetben

$$(4.17) \quad |F(tx, ty) - F(x, y)| \leq \varepsilon_3. \quad (t, x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Az $\mathbb{R}_+$ halmaz az összeadással egy kommutatív félcsoportot alkot, így a 2.11. Tétel miatt $\mathbb{R}_+$ egy amenábilis félcsoport. Ezért a 2.12. Tétel miatt létezik olyan $G : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely egyrészt megoldása a kociklus egyenletnek, másrészt

$$(4.18) \quad |F(x, y) - G(x, y)| \leq 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Az 1.4. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik olyan $B : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ biadditív, ferdén-szimmetrikus függvény és olyan $f : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$G(x, y) = B(x, y) + f(x + y) - f(x) - f(y). \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Mindezt (4.18)-cal egybevetve, azt kapjuk, hogy

$$(4.19) \quad |F(x, y) - (B(x, y) + f(x + y) - f(x) - f(y))| \leq 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

A ferde-szimmetriát és a biadditivitást felhasználva, meg fogjuk mutatni, hogy B azonosan zéró az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazon. Valóban, (4.19) és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} |2B(x, y)| &= |B(x, y) - B(y, x)| \\ &\leq |F(x, y) - (B(x, y) + f(x + y) - f(x) - f(y))| \\ &\quad + |F(y, x) - (B(y, x) + f(y + x) - f(y) - f(x))| \\ &\quad + |F(x, y) - F(y, x)| \\ &\leq (2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1) + (2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1) + \varepsilon_1 = 4\varepsilon_2 + 9\varepsilon_1 \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Vagyis, B az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazon korlátos, biadditív függvény. Ezekkel a tulajdonságokkal azonban csak az azonosan zéró függvény rendelkezik (lásd például Kuczma [40], Lemma 13. 4. 3.).

Így, (4.19) miatt a

$$K(x, y) = F(x, y) - G(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

módon definiált $K : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $(2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1)$ -gyel korlátos az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazon. Ha $\alpha \neq 0$, akkor

$$K(tx, ty) = F(tx, ty) - G(tx, ty), \quad (t, x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

amiből (4.16) miatt az adódik, hogy

$$K(tx, ty) = t^\alpha F(x, y) - G(tx, ty), \quad (t, x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

azaz

$$\frac{K(tx, ty)}{t^\alpha} = F(x, y) - \frac{G(tx, ty)}{t^\alpha}$$

teljesül minden $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Mivel a K függvény korlátos $\mathbb{R}_{++}^2$ -on, ezért ebből, $t \rightarrow t_0$ határátmenetet véve,

$$F(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{G(tx, ty)}{t^\alpha}. \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Azonban G szimmetrikus függvény, így azonnal adódik az F függvény szimmetriája is. Továbbá G eleget tesz a kociklus egyenletnek, így speciálisan,

$$\frac{G(tx + ty, tz)}{t^\alpha} + \frac{G(tx, ty)}{t^\alpha} = \frac{G(tx, ty + tz)}{t^\alpha} + \frac{G(ty, tz)}{t^\alpha}$$

is teljesül tetszőleges $t, x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebből $t \rightarrow t_0$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$F(x + y, z) + F(x, y) = F(x, y + z) + F(y, z). \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

Mindent egybevetve, az $F : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ olyan szimmetrikus, α -adfokú homogén függvény ($\alpha \neq 0$), amely kielégíti a kociklus-egyenletet. Így az 1.3. Tétel miatt

$$(4.20) \quad F(x, y) = \begin{cases} c[(x + y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha], & \text{ha } \alpha \notin \{0, 1\} \\ \varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

ahol $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, mely kielégíti a

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x) \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

egyenletet, $c \in \mathbb{R}$ pedig konstans. Az F függvény definíciója miatt ez azt jelenti, hogy

$$(4.21) \quad H(x, y, 0) = c[(x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha]$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, amennyiben $\alpha \notin \{0, 1\}$, illetve

$$(4.22) \quad H(x, y, 0) = \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y)$$

teljesül bármely $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ az $\alpha = 1$ esetben.

Így, ha $\alpha \notin \{0, 1\}$, akkor a (4.2), a (4.3) egyenlőtlenségek, a (4.21) egyenlőség, illetve a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$(4.23) \quad \begin{aligned} & |H(x, y, z) - c[(x+y+z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]| \\ & \leq |H(x, y, z) - H(x+y, 0, z) - H(x, y, 0)| \\ & + |H(x+y, 0, z) - H(x+y, z, 0)| \\ & + |H(x+y, z, 0) - c[(x+y+z)^\alpha - (x+y)^\alpha - z^\alpha]| \\ & + |H(x, y, 0) - c[(x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha]| \\ & \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

áll fenn minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, azaz (4.7) valóban teljesül.

Továbbá, a (4.2), a (4.3) egyenlőtlenségek, a (4.22) egyenlőség, illetve a háromszög-egyenlőtlenség miatt az $\alpha = 1$ esetben azt kapjuk, hogy

$$(4.24) \quad \begin{aligned} & |H(x, y, z) - (\varphi(x+y+z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z))| \\ & \leq |H(x, y, z) - H(x+y, 0, z) - H(x, y, 0)| \\ & + |H(x+y, 0, z) - H(x+y, z, 0)| \\ & + |H(x+y, z, 0) - (\varphi(x+y+z) - \varphi(x+y) - \varphi(z))| \\ & + |H(x, y, 0) - (\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y))| \\ & \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

áll fenn, ha $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$, ezzel igazoltuk a (4.5) egyenlőtlenséget.

Végül megmutatjuk, hogy a (4.6) egyenlőtlenség is teljesül. A (4.17) egyenlőtlenségből $t = 2$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$|F(x, y) - F(2x, 2y)| \leq \varepsilon_3. \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Ez, (4.18) felhasználásával azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} & |F(x, y) - G(2x, 2y)| \\ & \leq |F(x, y) - F(2x, 2y)| + |F(2x, 2y) - G(2x, 2y)| \\ & \leq \varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Másfelől az

$$|G(2x, 2y) - [2G(x, y) - F(1, 1)]| \leq 3(\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1)$$

egyenlőtlenség is fennáll tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, hiszen (4.17) és (4.19) miatt

$$\begin{aligned} & |F(1, 1) - G(x, x)| \\ & \leq |F(1, 1) - F(x, x)| + |F(x, x) - G(x, x)| \\ & \leq \varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 \end{aligned}$$

Mindezek miatt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & |F(x, y) - F(1, 1)| \\ & \leq |G(2x, 2y) - F(x, y)| \\ (4.25) \quad & + |G(2x, 2y) - 2G(x, y) + F(1, 1)| \\ & + 2|G(x, y) - F(x, y)| \\ & \leq \varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 + 3(\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1) + 2(2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1) \\ & = 4\varepsilon_3 + 12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1 \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ez, az F függvény definíciója miatt azt jelenti, hogy

$$(4.26) \quad |H(x, y, 0) - F(1, 1)| \leq 4\varepsilon_3 + 12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1. \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

A (4.2), a (4.3) és a (4.26) egyenlőtlenségek miatt

$$\begin{aligned}
(4.27) \quad & |H(x, y, z) - 2F(1, 1)| \\
& \leq |H(x, y, z) - H(x + y, 0, z) - H(x, y, 0)| \\
& + |H(x + y, 0, z) - H(x + y, z, 0)| \\
& + |H(x + y, z, 0) - F(1, 1)| + |H(x, y, 0) - F(1, 1)| \\
& \leq \varepsilon_2 + \varepsilon_1 + (4\varepsilon_3 + 12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1) + (4\varepsilon_3 + 12\varepsilon_2 + 24\varepsilon_1) \\
& = 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1
\end{aligned}$$

teljesül tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ebből az $a = 2F(1, 1)$ választással éppen a (4.6) egyenlőtlenséget kapjuk.

□

Ebből a tételből a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ választással azonnal adódik az alábbi állítás. Ezt az eredményt az $\alpha = 1$ esetben a Daróczy [12] dolgozat tartalmazza.

4.1. Következmény. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, de rögzített, tegyük fel, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden változójában szimmetrikus, α -adfokú homogén függvény. Ekkor H pontosan akkor elégíti ki a*

$$(4.28) \quad H(x, y, z) = H(x + y, 0, z) + H(x, y, 0)$$

úgynevezett entrópia-egyenletet minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén, ha $\alpha = 1$ esetén létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

úgy, hogy

$$(4.29) \quad H(x, y, z) = \varphi(x + y + z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z)$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén, minden más esetben pedig létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$(4.30) \quad H(x, y, z) = c[(x + y + z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]$$

áll fenn az S° halmazon.

Ennek a következménynek a fényében a 4.2. Tétel azt mondja tehát, hogy az entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil az S halmazon.

4.2. A módosított entrópia-egyenlet stabilitása

Ebben az alfejezetben igazolni fogjuk, hogy bizonyos feltételek mellett az úgynevezett módosított entrópia-egyenlet stabil az egydimenziós értelmezési tartományán. A bizonyítás során szükségünk lesz egy speciális asszociativitási egyenlet stabilitására is. Így, legelőször ezt az eredményt fogjuk ismertetni.

4.3. Tétel. *Legyenek $U, V, W \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallumok, $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel, hogy az $A : (U + V) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ és a $B : U \times (V + W) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények olyanok, hogy*

$$(4.31) \quad |A(u + v, w) - B(u, v + w)| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $u \in U$, $v \in V$ és $w \in W$ esetén. Ekkor létezik olyan $\varphi : U + V + W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.32) \quad |A(p, q) - \varphi(p + q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in (U + V), q \in W)$$

és

$$(4.33) \quad |B(t, s) - \varphi(t + s)| \leq \varepsilon \quad (t \in U, s \in (V + W))$$

teljesül.

Bizonyítás. Először azt fogjuk megmutatni, hogy a (4.32) és (4.33) egyenlőtlenségek minden U, V, W kompakt intervallum esetén fennállnak, alkalmas φ függvény mellett. Legyenek ezért U, V és W tetszőleges kompakt intervallumok, azaz

$$U = [u_1, u_2], \quad V = [v_1, v_2] \quad \text{és} \quad W = [w_1, w_2].$$

Válasszuk meg a

$$W^{(k)} = [w_{1,k}, w_{2,k}] \quad (k = 1, \dots, N)$$

intervallumokat úgy, hogy

$$(4.34) \quad \max_{1 \leq k \leq N} (w_{2,k} - w_{1,k}) < v_2 - v_1,$$

és

$$(4.35) \quad \bigcup_{k=1}^N W^{(k)} = W,$$

illetve

$$(4.36) \quad w_{1,k} < w_{1,k+1} < w_{2,k} < w_{2,k+1}$$

teljesüljön.

Ha $i \in \{1, 2\}$ és $k \in \{1, \dots, N\}$, akkor tekintsük a

$$(4.37) \quad \varphi_{i,k}(\xi) = A(\xi - w_{i,k}, w_{i,k}) \quad (\xi \in U + V + w_{i,k})$$

függvényt. Ekkor (4.31) miatt

$$|\varphi_{i,k}(t+s) - B(t, s)| = |A(t+s - w_{i,k}, w_{i,k}) - B(t, s)| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $t \in U$, $s \in V + w_{i,k}$ és $i \in \{1, 2\}$ esetén. Ezért

$$(4.38) \quad \begin{aligned} |\varphi_{1,k}(t+s) - \varphi_{2,k}(t+s)| \\ \leq |\varphi_{1,k}(t+s) - B(t, s)| + |\varphi_{2,k}(t+s) - B(t, s)| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

is fennáll, amennyiben $t \in U$ and $s \in (V + w_{1,k}) \cap (V + w_{2,k})$. (4.36) miatt azonban

$$(V + w_{1,k}) \cap (V + w_{2,k}) = [v_1 + w_{2,k}, v_2 + w_{1,k}]$$

és ezért

$$U + ((V + w_{1,k}) \cap (V + w_{2,k})) = (U + V + w_{1,k}) \cap (U + V + w_{2,k}).$$

Ezt felhasználva, (4.38)–ból azt kapjuk, hogy

$$|\varphi_{1,k}(\xi) - \varphi_{2,k}(\xi)| \leq 2\varepsilon$$

ha $\xi \in (U + V + w_{1,k}) \cap (U + V + w_{2,k})$ és $k \in \{1, \dots, N\}$. Mivel a $W^{(k)}$ intervallumokat úgy választottuk meg, hogy (4.34) teljesüljön, ezért

$$(U + V + w_{1,k}) \cup (U + V + w_{2,k}) = U + V + W^{(k)},$$

így

$$\varphi_k(\xi) = \begin{cases} \varphi_{1,k}(\xi), & \text{ha } \xi \in (U + V + w_{1,k}) \setminus (U + V + w_{2,k}) \\ \varphi_{2,k}(\xi), & \text{ha } \xi \notin (U + V + w_{1,k}) \setminus (U + V + w_{2,k}). \end{cases}$$

egy, az $U + V + W^{(k)}$ halmazon definiált, függvény, továbbá

$$(4.39) \quad |\varphi_k(t + s) - B(t, s)| \leq \varepsilon$$

is teljesül minden $t \in U$, $s \in V + W^{(k)}$ és $k \in \{1, \dots, N\}$ esetén. Ebből azt kapjuk, hogy

$$|\varphi_k(\xi) - \varphi_{k+1}(\xi)| \leq 2\varepsilon,$$

ha $\xi \in (U + V + W^{(k)}) \cap (U + V + W^{(k+1)})$ és $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Defináljuk a φ függvényt az $U + V + W$ halmazon a

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \varphi_k(\xi), & \text{ha } \xi \in (U + V + W^{(k)}) \setminus \bigcup_{i=1}^N (U + V + W^{(i)}) \\ \varphi_{\max\{i,j\}}(\xi), & \text{ha } \xi \in (U + V + W^{(i)}) \cap (U + V + W^{(j)}), \\ & i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

formulával. Ekkor φ definíciója korrekt és (4.39) miatt

$$(4.40) \quad |\varphi(t + s) - B(t, s)| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $t \in U$ és $s \in V + W$ esetén.

Legyenek $p \in U + V$ és $q \in W$ tetszőlegesek. Ekkor létezik olyan $u \in U$ és $v \in V$, hogy $p = u + v$, ezért $A(p, q) = A(u + v, q)$, valamint a (4.31) egyenlőtlenségből az következik, hogy

$$|A(u + v, q) - B(u, v + q)| \leq \varepsilon,$$

továbbá (4.40) miatt

$$|B(u, v + q) - \varphi(u + v + q)| \leq \varepsilon,$$

ebből – a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával – azt kapjuk, hogy

$$(4.41) \quad \begin{aligned} & |A(p, q) - \varphi(p + q)| \\ & \leq |A(u + v, q) - B(u, v + q)| + |B(u, v + q) - \varphi(u + v + q)| \\ & \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

teljesül minden $p \in U + V$ és $q \in W$ esetén.

Végül, megmutatjuk, hogy a (4.32) és (4.33) egyenlőtlenségek akkor is fennállnak, ha az U , V és W intervallumok nem feltétlenül kompaktak. Valóban, hiszen léteznek olyan (U_n) , (V_n) és (W_n) kompakt intervallumokból álló sorozatok, hogy

$$U_n \subset U_{n+1}, \quad V_n \subset V_{n+1} \quad \text{és} \quad W_n \subset W_{n+1}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén úgy, hogy

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{és} \quad W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n.$$

A bizonyítás első része miatt, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $\varphi_n : U_n + V_n + W_n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|A(p, q) - \varphi_n(p + q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in U_n + V_n, q \in W_n)$$

és

$$|B(t, s) - \varphi_n(t + s)| \leq \varepsilon. \quad (t \in U_n, s \in V_n + W_n)$$

Legyen

$$\varphi(x) = \varphi_1(x),$$

ha $x \in U_1 + V_1 + W_1$ és

$$\varphi(x) = \varphi_n(x),$$

ha $x \in (U_n + V_n + W_n) \setminus (U_{n-1} + V_{n-1} + W_{n-1})$, $n \geq 2$. Ekkor a $\varphi : U + V + W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény jóldefiniált, hiszen az (U_n) , (V_n) és (W_n) halmazsorozatok bővülőek és nyilván a (4.32) és (4.33) egyenlőtlenségek is teljesülnek.

□

Ebből a tételből az $\varepsilon = 0$ választással adódik a következő állítás, mely megtalálható a Maksa [46] dolgozatban is.

4.2. Következmény. Legyenek U, V és W pozitív hosszúságú valós intervallumok. Az $A : (U + V) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ és $B : U \times (V + W) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények pontosan akkor elégítik ki az

$$A(u + v, w) = B(u, v + w)$$

egyenletet minden $u \in U, v \in V$ és $w \in W$ esetén, ha létezik olyan $\varphi : U + V + W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.42) \quad A(p, q) = \varphi(p + q), \quad (p \in (U + V), q \in W)$$

és

$$(4.43) \quad B(t, s) = \varphi(t + s) \quad (t \in U, s \in (V + W))$$

teljesül.

Az előző következmény miatt a 4.3. Tétel azt jelenti, hogy az

$$A(u + v, w) = B(u, v + w)$$

egyszerű asszociativitási-egyenlet intervallumokon stabil.

A következőekben az úgynevezett módosított entrópia-egyenlettel fogunk foglalkozni. Meg fogjuk határozni az egyenlet általános megoldását a többdimenziós esetben, noha a stabilitás kérdését csak az egydimenziós esetben tudjuk megválaszolni.

Mindezek előtt szükségünk lesz az alábbi jelölések bevezetésére. Jelöljön k egy tetszőleges, de rögzített pozitív egész számot és legyenek

$$\mathbb{R}_+^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x \geq \mathbf{0}\} \quad \text{és} \quad \mathbb{R}_{++}^k = \{x \in \mathbb{R}^k | x > \mathbf{0}\},$$

itt $\mathbf{0}$ a $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$ vektort jelöli, továbbá $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^k$ helyett az $\mathbf{1}$ jelölést fogjuk alkalmazni. Vektorok között minden műveletet és a rendezést is komponensenként értelmezzük, azaz, ha $x, y \in \mathbb{R}^k$, $x = (x_1, \dots, x_k)$ és $y = (y_1, \dots, y_k)$, akkor

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k), \quad xy = (x_1 y_1, \dots, x_k y_k)$$

és

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_k}{y_k} \right),$$

továbbá $x > \mathbf{0}$ azt jelöli, hogy az x vektor minden koordinátája pozitív.

Legyen $f : \mathbb{R}_+^{3k} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény, $\mu : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy multiplikatív függvény, azaz tegyük fel, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén

$$\mu(xy) = \mu(x)\mu(y)$$

teljesül. Ekkor az

$$(4.44) \quad f(x, y, z) = f(x, y+z, \mathbf{0}) + \mu(y+z) f\left(\mathbf{0}, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k)$$

egyenletet *módosított entrópia-egyenletnek* nevezzük. Ennek az egyenletnek az

$$(4.45) \quad f(x, y, z) = f(x, y+z, 0) + (y+z) f\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right)$$

egyenlet a $k = 1$ és a $\mu(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}_{++}$) választással speciális esete. Az [1] dolgozatban a (4.45) függvényegyenlet szimmetrikus megoldásait határoztuk meg. Meg fogjuk mutatni továbbá, hogy a módosított entrópia-egyenletnek az előző fejezetben tárgyalt entrópia-egyenlet is speciális esete, valamint szót fogunk ejteni a (4.44) egyenlet reguláris megoldásairól is. Végül a 3.1. és a 3.3. Tételek alkalmazásaként bebizonyítjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a (4.44) egyenlet stabil.

A továbbiakban szükségünk lesz a projekció fogalmára.

4.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\pi : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény projekció, ha additív és multiplikatív is, azaz, ha

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^k)$$

és

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^k)$$

is teljesül.

Az alábbi tételben megadjuk a (4.44) egyenlet általános megoldását, ez az eredmény a bizonyítással együtt megtalálható a Gselmann [19] dolgozatban.

4.4. Tétel. Legyen $\mu : \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}$ egy multiplikatív függvény. Az $f : \mathbb{R}_+^{3k} \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus függvény pontosan akkor elégíti ki minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén a (4.44) függvényegyenletet, ha abban az esetben, ha μ projekció, léteznek olyan $l, \psi_1 : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy l logaritmikus, azaz

$$l(xy) = l(x) + l(y) \quad \left(x, y \in \mathbb{R}_{++}^k \right)$$

és

$$(4.46) \quad f(x, y, z) = \mu(x)l(x) + \mu(y)l(y) + \mu(z)l(z) + \psi_1(x + y + z)$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén; ha $\mu \equiv 1$, akkor létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.47) \quad f(x, y, z) = \psi_2(x + y + z); \quad \left(x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k \right)$$

minden más esetben pedig létezik olyan $\psi_3 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és olyan $b \in \mathbb{R}$, melyre

$$(4.48) \quad f(x, y, z) = b(\mu(x) + \mu(y) + \mu(z)) + \psi_3(x + y + z)$$

teljesül ha $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$.

Az alábbi állítás a módosított entrópia-egyenlet folytonos megoldásait tartalmazza (lásd [19]).

4.5. Tétel. Legyen $\mu : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ egy multiplikatív függvény. Az $f : \mathbb{R}_{++}^{3k} \rightarrow \mathbb{R}$ szimmetrikus és folytonos függvény pontosan akkor elégíti ki minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén a (4.44) függvényegyenletet, ha abban az esetben, ha μ projekció, léteznek olyan $\log, \psi_1 : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, hogy

$$(4.49) \quad f(x, y, z) = \mu(x)\log(x) + \mu(y)\log(y) + \mu(z)\log(z) + \psi_1(x + y + z)$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén. Ha $\mu \equiv 1$, akkor létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy

$$(4.50) \quad f(x, y, z) = \psi_2(x + y + z), \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k)$$

és minden más esetben pedig létezik olyan $\psi_3 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és olyan $b \in \mathbb{R}$, melyre

$$(4.51) \quad f(x, y, z) = b(\mu(x) + \mu(y) + \mu(z)) + \psi_3(x + y + z)$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ esetén.

Megjegyezzük továbbá, hogy nem szükséges azt feltenni, hogy az f függvény folytonos, hanem elegendő az

$$(x, y) \mapsto f(\mathbf{0}, x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++}^k)$$

leképezés folytonosságát megkövetelni.

Most azt fogjuk megmutatni, hogy a módosított entrópia-egyenlet általános megoldásai segítségével miként tudjuk meghatározni a (4.1) entrópia-egyenlet szimmetrikus és α -adfokú homogén megoldásait. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ olyan szimmetrikus, α -adfokú homogén függvény, mely kielégíti az entrópia-egyenletet, azaz

$$f(x, y, z) = f(x + y, 0, z) + f(x, y, 0). \quad ((x, y, z) \in S)$$

Az f függvény szimmetriája miatt ebből azt kapjuk, hogy

$$f(x, y, z) = f(x, y + z, 0) + f(0, y, z)$$

is teljesül, minden $(x, y, z) \in S$ esetén. Ha $x \in \mathbb{R}_{++}$, akkor legyen

$$f(x, 0, 0) = f(0, x, 0) = f(0, 0, x) = 0, \quad (x \in \mathbb{R}_{++})$$

így az f függvény szimmetrikus, α -adfokú homogén marad, azonban ezzel a definícióval elegendő az $\mathbb{R}_{++}^3$ halmazra szorítkoznunk. Mivel f α -adfokú homogén, ezért

$$f(x, y, z) = f(x, y + z, 0) + (y + z) f\left(0, \frac{y}{y + z}, \frac{z}{y + z}\right), \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

azaz az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti a módosított entrópia-egyenletet, így a 4.4. Tétel miatt

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) - \psi_1(x + y + z), & \text{ha } \alpha = 1 \\ c[x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha] - \psi_2(x + y + z), & \text{ha } \alpha \notin \{0, 1\} \\ -\psi_3(x + y + z), & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

Tekintsük először az $\alpha = 1$ esetet, egyrészt

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= \varphi(\lambda x) + \varphi(\lambda y) + \varphi(\lambda z) - \psi_1(\lambda(x + y + z)) \\ &= \lambda(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)) + (x + y + z)\varphi(\lambda) - \psi_1(\lambda(x + y + z)), \end{aligned}$$

másrészt

$$\lambda f(x, y, z) = \lambda(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)) - \lambda\psi_1(x + y + z).$$

Így, mivel f homogén függvény, ezért ebből az $x = y = z = 1/3$ helyettesítéssel – felhasználva, hogy $\psi_1(1) = 0$ – azt kapjuk, hogy

$$\psi_1(\lambda) = \varphi(\lambda), \quad (\lambda \in \mathbb{R}_{++})$$

azaz

$$f(x, y, z) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) - \varphi(x + y + z). \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

Legyen most $\alpha \notin \{0, 1\}$. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}_{++}$ esetén $f(x, 0, 0) = 0$, ezért

$$0 = cx^\alpha - \psi_2(x), \quad (x \in \mathbb{R}_{++})$$

azaz

$$f(x, y, z) = c[x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha - (x + y + z)^\alpha]. \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

Ehhez analóg számolással igazolható, hogy az $\alpha = 0$ esetben $\psi_3(x) = c$ teljesül minden $x \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, azaz ekkor

$$f(x, y, z) = c \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++}).$$

Most rá fogunk térni az alfejezet fő eredményére, azaz a módosított entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben vett stabilitásával fogunk foglalkozni. Ez az eredmény [24]-ben található meg.

4.6. Tétel. Legyenek $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha \neq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$. Tegyük még fel továbbá, hogy az $f : \mathbb{R}_{++}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

$$(4.52) \quad \left| f(x, y, z) - f(x, y+z, 0) - (y+z)^\alpha f\left(0, \frac{y}{y+z}, \frac{z}{y+z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, valamint tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ és $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ permutáció esetén

$$(4.53) \quad |f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

is teljesül. Ekkor, ha $\alpha < 0$, létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ és olyan $\psi_1 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.54) \quad |f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_1(x+y+z)]| \leq 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén; amennyiben $\alpha = 0$, úgy létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$(4.55) \quad |f(x, y, z) - \psi_2(x+y+z)| \leq 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2; \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

végül minden más esetben, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $\psi_n :]0, 3n] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy minden $x, y, z \in]0, n]$ esetén

$$(4.56) \quad |f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x+y+z)]| \leq c_n(\alpha)\varepsilon_1 + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

áll fenn, ahol

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^\alpha n^\alpha K(\alpha) \quad \text{és} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (4.52) és a (4.53) egyenlőtlenségek fennállnak. Defináljuk az F és a h függvény az $\mathbb{R}_{++}^2$, illetve a $]0, 1[$ halmazon az

$$F(u, v) = f(0, u, v) \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

és a

$$h(t) = F(1-t, t) \quad (t \in]0, 1[)$$

képletekkel. Ekkor a (4.53) egyenlőtlenségből ezekkel a definíciókkal azonnal adódik, hogy

$$|F(u, v) - F(v, u)| \leq \varepsilon_2 \quad (u, v \in \mathbb{R}_{++})$$

és

$$|h(t) - h(1 - t)| \leq \varepsilon_2 \quad (t \in]0, 1[)$$

teljesül. Továbbá szintén az F és a h függvény definíciója miatt a (4.52) egyenlőtlenségből az következik, hogy az

$$(4.57) \quad \left| f(x, y, z) - F(x, y + z) - (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

egyenlőtlenség minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén fennáll. Ha ebben az egyenlőtlenségben x és z szerepét felcseréljük, és használjuk (4.53)-at, akkor tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$(4.58) \quad \left| F(x, y + z) + (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) - F(y, x + z) - (x + z)^\alpha h\left(\frac{x}{x + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2.$$

A $z = 1 - x - y$ helyettesítéssel, ebből azt kapjuk, hogy

$$(4.59) \quad \left| F(x, 1 - x) + (1 - x)^\alpha h\left(\frac{y}{1 - x}\right) - F(y, 1 - y) - (1 - y)^\alpha h\left(\frac{x}{1 - y}\right) \right| \leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$

minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén. A (4.53)-as egyenlőtlenséget kétszer alkalmazva, a háromszög-egyenlőtlenség miatt (4.59)-ből azt kapjuk, hogy

$$(4.60) \quad \left| h(x) + (1 - x)^\alpha h\left(\frac{y}{1 - x}\right) - h(y) - (1 - y)^\alpha h\left(\frac{x}{1 - y}\right) \right| \leq \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2$$

teljesül tetszőleges $(x, y) \in D^\circ$ esetén. Az α paraméter értékét tekintve három különböző esetet kell tekintenünk.

Először tegyük fel, hogy $\alpha < 0$, ekkor a 3.1. Tétel miatt léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy

$$h(x) = ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b. \quad (x \in]0, 1[)$$

Másfelől

$$|h(t) - h(1-t)| \leq \varepsilon_2, \quad (t \in]0, 1[)$$

ezért

$$|(a-b)(x^\alpha - (1-x)^\alpha)| \leq \varepsilon_2, \quad (x \in]0, 1[)$$

azaz

$$|a-b| \leq \frac{\varepsilon_2}{|x^\alpha - (1-x)^\alpha|}$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. Ebből az $x \rightarrow 0+$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy $a = b$, hiszen $\alpha < 0$. Ezért, ha $\alpha < 0$, akkor

$$h(x) = ax^\alpha + a(1-x)^\alpha - a. \quad (x \in]0, 1[)$$

Definiáljuk a H függvényt az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazon a

$$H(x, y) = F(x, y) - ax^\alpha - ay^\alpha, \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

módon. Ekkor (4.58)–ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & |H(x, y+z) - H(y, x+z)| \\ &= |F(x, y+z) - ax^\alpha - a(y+z)^\alpha - F(y, x+z) + ay^\alpha + a(x+z)^\alpha| \\ &= |F(x, y+z) + ay^\alpha + az^\alpha - a(y+z)^\alpha - F(y, x+z) - ax^\alpha - az^\alpha + a(x+z)^\alpha| \\ &= \left| F(x, y+z) + (y+z)^\alpha h\left(\frac{y}{y+z}\right) - F(y, x+z) - (x+z)^\alpha h\left(\frac{x}{x+z}\right) \right| \\ &\leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \end{aligned}$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Legyen

$$A(x, y) = H(y, x) \quad \text{és} \quad B(x, y) = H(x, y), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

ekkor a 4.3. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik olyan $\psi_1 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|H(x, y) - \varphi_1(x + y)| \leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

azaz

$$|F(x, y) - ax^\alpha - ay^\alpha - \varphi_1(x + y)| \leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2. \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

teljesül. Végül, (4.57), a legutolsó egyenlőtlenség és a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} & |f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_1(x + y + z)]| \\ & \leq \left| f(x, y, z) - F(x, y + z) - (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) \right| \\ & + |F(x, y + z) - ax^\alpha - a(y + z)^\alpha - \varphi_1(x + y + z)| \\ & + \left| (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) - ay^\alpha - az^\alpha + a(y + z)^\alpha \right| \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 \end{aligned}$$

tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

Tekintsük most az $\alpha = 0$ esetet. (4.60)-ból a 3.3. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$(4.61) \quad |h(x) - [l(1 - x) - c]| \leq 63(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2)$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. A h függvény megközelítőleg szimmetrikus az $1/2$ -re, így

$$|l(x) - l(1 - x)| \leq 126(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2. \quad (x \in]0, 1[)$$

Az $x = \frac{p}{p+1}$ ($p \in \mathbb{R}_{++}$) helyettesítéssel ebből azt kapjuk, hogy

$$|l(p)| \leq 126(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2, \quad (p \in \mathbb{R}_{++})$$

vagyis $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ egy, az egész $\mathbb{R}_{++}$ halmazon korlátos és logaritmi-
kus függvény. Ezekkel a tulajdonságokkal azonban csak az azonosan zéró
függvény rendelkezik. Ezért (4.61) azt jelenti, hogy

$$|h(x) - c| \leq 63(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2)$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén.

Tekintsük a

$$H(x, y) = F(x, y) - c, \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

módon definiált $H : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor,

$$\begin{aligned} |H(x, y+z) - H(y, x+z)| &= |F(x, y+z) - c - F(y, x+z) + c| \\ &\leq \left| F(x, y+z) + h\left(\frac{y}{y+z}\right) - F(y, x+z) - h\left(\frac{x}{x+z}\right) \right| \\ &\quad + \left| h\left(\frac{y}{y+z}\right) - c \right| + \left| h\left(\frac{x}{x+z}\right) - c \right| \\ &\leq (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) + 2 \cdot 63(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) = 127\varepsilon_1 + 1010\varepsilon_2 \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Így, a 4.3. Tétel miatt létezik olyan
 $\psi_2 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|H(x, y) - \psi_2(x+y)| \leq 127\varepsilon_1 + 1010\varepsilon_2. \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

Ebből az egyenlőtlenségből (4.57) és a háromszög-egyenlőtlenség felhasz-
nálásával azt kapjuk, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - \psi_2(x+y+z)| &\leq \left| f(x, y, z) - F(x, y+z) - h\left(\frac{y}{y+z}\right) \right| \\ &\quad + |F(x, y+z) - \psi_2(x+y+z) - c| + \left| h\left(\frac{y}{y+z}\right) - c \right| \\ &\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (127\varepsilon_1 + 1010\varepsilon_2) + 63(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) = 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2 \end{aligned}$$

áll fenn.

Végül tekintsük azt az esetet, amikor $0 < \alpha \neq 1$. Ekkor a (4.60) egyenlőtlenségből a 3.3. Tétel miatt az következik, hogy léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy

$$|h(x) - [ax^\alpha - b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2). \quad (x \in]0, 1[)$$

Azonban a

$$|h(t) - h(1-t)| \leq \varepsilon_2 \quad (t \in]0, 1[)$$

egyenlőtelenség is teljesül. Így ezekből, a háromszög-egyenlőtlenség miatt az adódik, hogy

$$\begin{aligned} |(a-b)(x^\alpha - (1-x)^\alpha)| &\leq |h(x) - [ax^\alpha - b(1-x)^\alpha - b]| \\ &\quad + |h(1-x) - [a(1-x)^\alpha - bx^\alpha - b]| + |h(x) - h(1-x)| \\ &\leq 2K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2. \quad (x \in]0, 1[) \end{aligned}$$

Ebben az $x \rightarrow 1-$ határátmenetet véve, azt kapjuk, hogy

$$|a - b| \leq 2K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2.$$

Így

$$\begin{aligned} |h(x) - [ax^\alpha + a(1-x)^\alpha - a]| &\leq |h(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| + |a - b| \cdot |(1-x)^\alpha - 1| \\ &\leq K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + 2K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2 = 3K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén. Az első esethez hasonlóan definiáljuk a H függvényt az $\mathbb{R}_{++}^2$ halmazon az

$$H(x, y) = F(x, y) - ax^\alpha - ay^\alpha, \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

módon. Ekkor a

$$\begin{aligned}
(4.62) \quad & |H(x, y+z) - H(y, x+z)| \\
&= |F(x, y+z) - ax^\alpha - a(y+z)^\alpha - F(y, x+z) + ay^\alpha + a(x+z)^\alpha| \\
&= |F(x, y+z) + ay^\alpha + az^\alpha - a(y+z)^\alpha - F(y, x+z) - ax^\alpha - az^\alpha + a(x+z)^\alpha| \\
&\leq \left| F(x, y+z) + (y+z)^\alpha h\left(\frac{y}{y+z}\right) - F(y, x+z) - (x+z)^\alpha h\left(\frac{x}{x+z}\right) \right| \\
&\quad + \left| (y+z)^\alpha h\left(\frac{y}{y+z}\right) - [ay^\alpha + az^\alpha - a(y+z)^\alpha] \right| \\
&\quad + \left| (x+z)^\alpha h\left(\frac{x}{x+z}\right) - [ax^\alpha + az^\alpha - a(x+z)^\alpha] \right| \\
&\leq (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) + (y+z)^\alpha (3K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2) + (x+z)^\alpha (3K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2) \\
&= (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) + [(x+z)^\alpha + (y+z)^\alpha] (3K(\alpha)(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2) + \varepsilon_2) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})
\end{aligned}$$

teljesül. Mivel az egyenlőtlenség jobb oldala függ az x, y és z változóktól, ezért a 4.3. Tétel nem alkalmazható közvetlenül. Legyen azonban $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Ekkor a legutóbbi egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& |H(x, y+z) - H(y, x+z)| \\
&\leq (1 + 3 \cdot 2^{\alpha+1} n^\alpha K(\alpha)) \varepsilon_1 + (3 + 3 \cdot 2^{\alpha+3} n^\alpha K(\alpha)) \varepsilon_2
\end{aligned}$$

teljesül, ha $x, y, z \in]0, n]$. Az egyszerűség kedvéért, vezessük be az

$$a_n(\alpha) = 1 + 3 \cdot 2^{\alpha+1} n^\alpha K(\alpha) \quad \text{és a} \quad b_n(\alpha) = 3 + 3 \cdot 2^{\alpha+3} n^\alpha K(\alpha)$$

jelöléseket. A 4.3. Tétel miatt létezik $\psi_n :]0, 3n] \rightarrow \mathbb{R}$, melyre

$$|H(x, y) - \psi_n(x+y)| \leq a_n(\alpha)\varepsilon_n + b_n(\alpha)\varepsilon_2$$

teljesül minden $x, y \in]0, n]$ esetén. A H függvény definícióját felhasználva, ez azt jelenti, hogy

$$|F(x, y) - [ax^\alpha + ay^\alpha + \psi_n(x+y)]| \leq a_n(\alpha)\varepsilon_n + b_n(\alpha)\varepsilon_2. \quad (x, y \in]0, n])$$

Ebból, (4.57) és a háromszög-egyenlőtlenség miatt az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
& |f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x + y + z)]| \\
& \leq \left| f(x, y, z) - F(x, y + z) - (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) \right| \\
& + |F(x, y + z) - ax^\alpha - a(y + z)^\alpha - \psi_1(x + y + z)| \\
& + \left| (y + z)^\alpha h\left(\frac{y}{y + z}\right) - ay^\alpha - az^\alpha + a(y + z)^\alpha \right| \\
& \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + (a_n(\alpha)\varepsilon_1 + b_n(\alpha)\varepsilon_n) + (2^\alpha n^\alpha K(\alpha)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)) \\
& = (1 + a_n(\alpha) + 2^\alpha n^\alpha K(\alpha))\varepsilon_1 + (1 + b_n(\alpha) + 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha))\varepsilon_2
\end{aligned}$$

teljesül minden $x, y, z \in]0, n]$ esetén.

Mindent egybevetve, azt kaptuk, hogy az $0 < \alpha \neq 1$ esetben minden $n \in \mathbb{N}$ esteén léteznek olyan $\psi_n :]0, 3n] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy

$$|f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x + y + z)]| \leq c_n(\alpha)\varepsilon_1 + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

tetszőleges $x, y, z \in]0, n]$ esetén, ahol

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^\alpha n^\alpha K(\alpha) \quad \text{és} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha),$$

□

Az alfejezet hátralévő részében ezzel a tétellel kapcsolatos következményeket és nyitott problémákat fogunk ismertetni.

A $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ választással a módosított entrópia-egyenlet általános megoldását kapjuk a vizsgált esetekben.

4.3. Következmény. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minden változójában szimmetrikus és kielégíti a (4.44) függvényegyenletet minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ekkor, ha $\alpha \neq 0$, akkor létezik $a \in \mathbb{R}$ és $\psi_1 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén*

$$f(x, y, z) = ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_1(x + y + z)$$

teljesül, míg ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$f(x, y, z) = \psi_2(x + y + z)$$

áll fenn minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén.

Az előző következmény miatt a 4.6. Tétel azt állítja tehát, hogy a módosított entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil az egydimenziós alaphalmazon a $\mu(x) = x^\alpha$ ($\alpha \leq 0, x \in \mathbb{R}_{++}$) multiplikatív függvényrel.

Vegyük azonban észre, hogy ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor csak azt tudtuk igazolni, hogy a (4.44) egyenlet tetszőleges, de rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén stabil a $]0, n] \times]0, n] \times]0, n]$ halmazon. Egyszerű számolással látható azonban, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(\alpha) = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(\alpha) = +\infty, \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

így ezzel a módszerrel a „szokásos” Hyers–Ulam stabilitást nem sikerült igazolnunk továbbá, az $\alpha = 1$ esetről szintén nem tudunk semmit belátni. Így megfogalmazható az alábbi nyitott kérdés.

Legyenek $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}_{++}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

$$\left| f(x, y, z) - f(x, y + z, 0) - (y + z)^\alpha f\left(0, \frac{y}{y + z}, \frac{z}{y + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

és

$$|f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, ahol $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ egy tetszőleges permutációt jelöl.

Igaz-e, hogy létezik a (4.44) egyenletnek olyan $h : \mathbb{R}_{++}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása és léteznek olyan K_1, K_2 valós konstansok, melyekkel minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén az

$$|f(x, y, z) - h(x, y, z)| \leq K_1 \varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2$$

egyenlőtlenség fennáll?

A második nyitott probléma magának a módosított entrópia-egyenletnek a stabilitása. Legyenek $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ és legyen $\mu : \mathbb{R}_{++}^k \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott

multiplikatív függvény. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}_{++}^{3k} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy

$$\left| f(x, y, z) - f(x, y + z, 0) - \mu(y + z) f\left(0, \frac{y}{y + z}, \frac{z}{y + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

és

$$|f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}^k$ és tetszőleges $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ permutáció esetén. Igaz-e, hogy ekkor létezik a (4.44) egyenletnek olyan $h : \mathbb{R}_{++}^{3k} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása és olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$|f(x, y, z) - h(x, y, z)| \leq K_1 \varepsilon_1 + K_2 \varepsilon_2$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén?

4.3. Az α -rekurzív, 3-szemi-szimmetrikus információértékek stabilitása

A negyedik fejezet utolsó részében az α -rekurzív, 3-szemi-szimmetrikus információértékek rendszerének stabilitásával fogunk foglalkozni. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor, ahogy azt a disszertáció első fejezetében írtuk a

$$H_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} (2^{1-\alpha} - 1)^{-1} (\sum_{i=1}^n p_i^\alpha - 1), & \text{ha } \alpha \neq 1 \\ H_n^1(p_1, \dots, p_n), & \text{ha } \alpha = 1 \end{cases}$$

úgynevezett α -adfokú entróia 3-szemi-szimmetrikus és α -rekurzív. Tekintsük most $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén a

$$J_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1), & \text{ha } \alpha \neq 0 \\ cH_n^0(p_1, \dots, p_n) + l(p_1), & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

módon értelmezett információértéket. Ekkor a 1.7. Tétel miatt (J_n^α) is α -rekurzív és 3-szemi-szimmetrikus. Ezért a következő tétel azt jelenti, hogy az α -rekurzív 3-szemi-szimmetrikus információértékek rendszere Hyers–Ulam értelemben stabil.

4.7. Tétel. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, (ε_n) pedig egy nemnegatív valós számokból álló sorozat, tegyük fel továbbá, hogy az $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) függvénysorozat kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket

$$(4.63) \quad |I_n(p_1, \dots, p_n) - I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) - (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)| \leq \varepsilon_{n-1}$$

minden $n \geq 3$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén és

$$(4.64) \quad |I_3(p_1, p_2, p_3) - I_3(p_1, p_3, p_2)| \leq \varepsilon_1$$

teljesül a Γ_3° halmazon. Ekkor, ha $\alpha < 0$, akkor léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$(4.65) \quad |I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k$$

teljesül minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén; ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$(4.66) \quad |I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^0(p_1, \dots, p_n) + l(p_1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + 63(n-1)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

teljesül tetszőleges $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén; végül, ha $1 \neq \alpha > 0$, akkor léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$(4.67) \quad |I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + (n-1)K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

áll fenn minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén, ahol a $\sum_{k=2}^1 \varepsilon_k = 0$ konvencióval élünk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (4.63) és a (4.64) egyenlőtlenségek fennállnak és tekintsük az

$$f(x) = I_2(1-x, x) \quad (x \in]0, 1[)$$

módon definiált függvényt. Ekkor (4.63)-at $n = 3$ esetén kétszer alkalmazva, illetve (4.64)-et felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq 2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén. A 3.1. Tétel miatt $\alpha < 0$ esetén léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$I_2(1-x, x) = f(x) = ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b, \quad (x \in]0, 1[)$$

azaz (4.65) teljesül $n = 2$ esetén a $c = (2^{1-\alpha} - 1)a$ és a $d = b - a$ választással. Továbbá a 3.3. Tétel miatt, az $\alpha = 0$ esetben létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$, mellyel

$$|I_2(1-x, x) - (l(1-x) + c)| \leq 63(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \quad (x \in]0, 1[)$$

teljesül, azaz (4.66) fennáll az $n = 2$ esetben, továbbá szintén a 3.3. Tétel miatt az $1 \neq \alpha > 0$ esetben léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$|I_2(1-x, x) - (ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b)| \leq K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1), \quad (x \in]0, 1[)$$

ami éppen (4.67) $n = 2$ esetén.

Az állítást n szerinti teljes indukcióval fogjuk folytatni. Tegyük ezért fel, hogy (4.65), (4.66) illetve (4.67) teljesül valamely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ mellett, vezessük be továbbá a

$$J_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) = \begin{cases} cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n), & \text{ha } \alpha \neq 0 \\ cH_n^0(p_1, \dots, p_n) + l(p_1), & \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

jelölést. Ekkor $J_n^\alpha : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ α -rekurzív és 3-szemi-szimmetrikus, ezért tetszőleges $(p_1, \dots, p_{n+1}) \in \Gamma_{n+1}^\circ$ esetén

$$\begin{aligned}
& I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - J_{n+1}^\alpha(p_1, \dots, p_{n+1}) \\
&= I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - J_n^\alpha(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) - (p_1 + p_2)^\alpha J_2^\alpha\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \\
&= I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - I_n(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) - (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \\
&\quad + I_n(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) - J_n^\alpha(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_{n+1}) \\
&\quad + (p_1 + p_2)^\alpha \left(I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}\right) - J_2^\alpha\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right) \right).
\end{aligned}$$

teljesül. Fent igazoltuk, hogy az állítás igaz az $\alpha < 0$, az $\alpha = 0$ és az $1 \neq \alpha > 0$ esetben is $n = 2$ esetén. Így, (4.63) és az indukciós feltevés miatt

$$|I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - J_n^\alpha(p_1, \dots, p_{n+1})| \leq \varepsilon_n + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k = \sum_{k=2}^n \varepsilon_k,$$

ha $\alpha < 0$, azaz (4.65) minden $n \geq 2$ esetén fennáll.

$$\begin{aligned}
& |I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - J_{n+1}^0(p_1, \dots, p_{n+1})| \\
&\leq \varepsilon_n + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + K(\alpha)(n-1)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \\
&= \sum_{k=2}^n \varepsilon_k + K(\alpha)n(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1),
\end{aligned}$$

ha $\alpha = 0$, ezzel igazoltuk (4.66) helyességét minden $n \geq 2$ esetén. Végül, ha $1 \neq \alpha > 0$, akkor

$$\begin{aligned} & |I_{n+1}(p_1, \dots, p_{n+1}) - J_{n+1}^\alpha(p_1, \dots, p_{n+1})| \\ & \leq \varepsilon_n + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + K(\alpha)(n-1)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \\ & = \sum_{k=2}^n \varepsilon_k + K(\alpha)n(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1), \end{aligned}$$

ami pedig azt jelenti, hogy (4.67) teljesül tetszőleges $n \geq 2$ esetén.

□

Ebből a tételből az $\varepsilon_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) választással azonnal adódik a 1.7. Tétel az $\alpha \neq 1$ esetben.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az információ alapegyenletéről tudnánk, hogy stabil (vagy azt, hogy nem stabil), akkor igazolni tudnánk azt is, hogy a 3-szemi-szimmetrikus, rekurzív információértékek rendszere is stabil (illetve azt, hogy az sem stabil). Az $\alpha = 1$ esetben az információértékek stabilitásával kapcsolatban az alábbi eredmény ismert, lásd Morando [50].

4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $I_n : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) információérték kielégíti az alábbi feltételeket.*

- (i) *minden $n \geq 2$ esetén az I_n függvény minden változójában szimmetrikus;*
- (ii) *létezik olyan $\delta \in]0, 1]$ és olyan (α_n) pozitív valós számokból álló sorozat, úgy, hogy $K = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ és*

$$\begin{aligned} & |I_{n+1}(p_1(1-t), p_1t, p_2, \dots, p_n) - I_n(p_1, \dots, p_n) - p_1I_2(1-t, t)| \\ & \leq \alpha_n p_1^\delta t^\delta \end{aligned}$$

teljesül minden $n \geq 2$, $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n$ és $t \in [0, 1/2]$ esetén;

(iii) az $f(x) = I_1(1-x, x)$ módon definiált $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kielégíti az

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{és az} \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = o(\log(n)), \quad n \rightarrow \infty$$

feltételeket.

Ekkor

$$I_2(1-r, r) = -r \log_2(r) - (1-r) \log_2(1-r)$$

minden $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ esetén, továbbá

$$\left| I_n(p_1, \dots, p_n) + \sum_{k=1}^n p_k \log_2(p_k) \right| \leq K$$

áll fenn tetszőleges $n \geq 3$ és $(p_1, \dots, p_n) \cap \mathbb{Q}^n$ esetén.

A tétel bizonyítása Kátai [36] egy teljesen additív számelméleti függvényekre vonatkozó eredményén alapul. Ezzel a módszerrel azonban csak a $\Gamma_n \cap \mathbb{Q}^n$ halmazon lehet igazolni a 3-szemi-szimmetrikus információértékek stabilitását.

Így, további kutatás tárgya lehet például ennek a tételnek az élesítése azáltal, hogy az információértékről csak azt követeljük meg, hogy 3-szemi-szimmetrikus és megközelítőleg rekurzív.

Summary

This PhD dissertation deals with the stability problem of some functional equations that appear in the characterization problem of information measures.

The dissertation consists of four sections. In the first section we list some definitions and preliminary results in connection with information measures. We consider here in particular the parametric fundamental equation of information. Then, in the second section we summarize some results from the stability theory of functional equations that will be used in the subsequent sections. We deal here with the notion of stability, superstability and hiperstability. These notions are illustrated via three theorems, respectively (see 2.6., 2.7. and 2.8. Tétel).

The main results can be found in the third and also in the fourth section of the dissertation. In the third part we investigate the following problem. Let $\varepsilon \geq 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ be arbitrarily fixed and let $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Assume that the inequality

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

is fulfilled for all $(x, y) \in D^\circ$. Does there exist a solution of the parametric fundamental equation of information, that is, a function $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$h(x) + (1-x)^\alpha h\left(\frac{y}{1-x}\right) = h(y) + (1-y)^\alpha h\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

in such a way that

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

holds for all $x \in]0, 1[$ with a certain constant $K \in \mathbb{R}$?

The answer to this question depends heavily on the value of the parameter α . Therefore we could prove the following two theorems (see 3.1. and 3.2. Tétel).

1. Theorem. Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$ and $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Assume that

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

holds for all $(x, y) \in D^\circ$. Then, and only then, there exist $c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d$$

for all $x \in]0, 1[$.

2. Theorem. Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ be fixed, $0 \leq \alpha \neq 1$, $\varepsilon \geq 0$. Suppose that the function $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the inequality

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

for all $(x, y) \in D^\circ$. Then, in case $\alpha = 0$, there exists a logarithmic function $l :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - [l(1-x) + c]| \leq 63\varepsilon, \quad (x \in]0, 1[)$$

furthermore, if $\alpha \notin \{0, 1\}$, there exist $a, b \in \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon$$

holds for all $x \in]0, 1[$, where

$$K(\alpha) = |2^{1-\alpha} - 1|^{-1} \left(3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|} \right).$$

The question of stability was examined not only on the set D° but also on the set D . On the closed domain we proved that the parametric fundamental equation of information is stable, superstable and hyperstable, in case α is equal to zero, is a positive real numbers different from one and is a negative number, respectively (see 3.2. and 3.4. Tétel).

Furthermore, in this section we point out the methods we used are not appropriate if the parameter α equals one. Thus the stability problem of the fundamental equation of information is still open.

Finally, the last part of the dissertation contains the applications. Firstly we investigate the so-called entropy equation and we prove the following statement.

3. Theorem. *Let $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ be arbitrary nonnegative real numbers, $\alpha \in \mathbb{R}$, and assume that the function $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the following system of inequalities.*

$$|H(x, y, z) - H(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_1$$

for all $(x, y, z) \in S$ and for all $\sigma : \{x, y, z\} \mapsto \{x, y, z\}$ permutations;

$$|H(x, y, z) - H(x + y, 0, z) - H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_2$$

for all $(x, y, z) \in S^\circ$, where S° denotes the interior of the set S ;

$$|H(tx, ty, 0) - t^\alpha H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_3$$

holds for all $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$. Then, in case $\alpha = 1$ there exists a function $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfies the functional equation

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

and

$$|H(x, y, z) - [\varphi(x + y + z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z)]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

holds for all $(x, y, z) \in S^\circ$; in case $\alpha = 0$ there exists a constant $a \in \mathbb{R}$ such that

$$|H(x, y, z) - a| \leq 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1$$

for all $(x, y, z) \in S^\circ$; finally, in all other cases there exists a constant $c \in \mathbb{R}$ such that

$$|H(x, y, z) - c[(x + y + z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

holds on S° .

Then in the second subsection we investigate the stability of the modified entropy equation. At first we prove a theorem that concerns the stability of a simple associativity equation.

4. Theorem. *Let U, V, W be real intervals, $A : (U + V) \times W \rightarrow \mathbb{R}$, $B : U \times (V + W) \rightarrow \mathbb{R}$ and suppose that*

$$|A(u + v, w) - B(u, v + w)| \leq \varepsilon$$

holds for all $u \in U$, $v \in V$ and $w \in W$. Then there exists a function $\varphi : U + V + W \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|A(p, q) - \varphi(p + q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in (U + V), q \in W)$$

and

$$|B(t, s) - \varphi(t + s)| \leq \varepsilon \quad (t \in U, s \in (V + W))$$

hold.

After some preliminary results we deal with the modified entropy equation and we give its general solution, as well. Then we examine the stability problem of the modified entropy equation on the one-dimensional domain and we prove the following.

5. Theorem. *Let $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1, \varepsilon \geq 0$ and $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ be a function. Assume that*

$$\left| f(x, y, z) - f(x, y + z, 0) - (y + z)^\alpha f\left(0, \frac{y}{y + z}, \frac{z}{y + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

and

$$|f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

hold for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ and for all permutations $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$.

Then, in case $\alpha < 0$, there exist $a \in \mathbb{R}$ and a function $\varphi_1 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \varphi_1(x + y + z)]| \leq 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$.

Furthermore, if $\alpha = 0$, then there exists a function $\varphi_2 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - \varphi_2(x + y + z)| \leq 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$.

Finally, if $1 \neq \alpha > 0$, then for all $n \in \mathbb{N}$, there exists a function $\psi_n :]0, 3n] \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$|f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x + y + z)]| \leq c_n(\alpha)\varepsilon_n + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

holds for all $x, y, z \in]0, n]$, where

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^\alpha n^\alpha K(\alpha) \quad \text{and} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha).$$

Briefly, this theorem says that the modified entropy equation is stable in the sense of Hyers and Ulam on its one-dimensional domain with the multiplicative function $\mu(x) = x^\alpha$ ($\alpha \leq 0, x \in \mathbb{R}_{++}$).

In case $1 \neq \alpha > 0$ we obtain however that functional equation in question is stable only on every cartesian product of bounded real intervals of the form $]0, n]^3$, where $n \in \mathbb{N}$. Nevertheless, an easy computation shows that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(\alpha) = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(\alpha) = +\infty. \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

To the best of our knowledge, this is a new phenomenon in the stability theory of functional equations. Thus we cannot prove the 'standard' Hyers–Ulam stability in this case, nor if $\alpha = 1$. This problems are also presented as open problems.

Lastly, in the third subsection we deal with the stability of a system of equations that defines the 3-semi-symmetric, α -recursive information measures.

6. Theorem. *Let $n \geq 2$ be a fixed positive integer and $\{I_n\}_{n=2}^\infty$ be the sequence of functions $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ and suppose that there exist a sequence*

(ε_n) of nonnegative real numbers and a real number $\alpha \neq 1$ such that

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) - (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)| \leq \varepsilon_{n-1}$$

for all $n \geq 3$ and $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$, and

$$|I_3(p_1, p_2, p_3) - I_3(p_1, p_3, p_2)| \leq \varepsilon_1$$

holds on Γ_n° . Then, in case $\alpha < 0$ there exist $c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k$$

for all $n \geq 2$ and $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$. Furthermore, in case $\alpha = 0$ there exists a logarithmic function $l :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$ such that

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^0(p_1, \dots, p_n) + l(p_1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + 63(n-1)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

for all $n \geq 2$ and $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$. Finally, if $\alpha > 0$ then there exist $c, d \in \mathbb{R}$ such that

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + (n-1)K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

holds for all $n \geq 2$ and $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$, where the convention

$$\sum_{k=2}^1 \varepsilon_k = \sum_{k=2}^1 \left(\sum_{i=1}^k p_i^\alpha \right) = 0$$

is adopted.

Összefoglalás

Ez a disszertáció néhány – az információértékek jellemzésekor felmerülő – függvényegyenlet stabilitásának a kérdésével foglalkozik. Az értekezés négy fejezetből áll. Az elsőben az információértékekkel kapcsolatos definíciókat és tételeket tisztázzuk – különös tekintettel az információ paraméteres alapegyenletére. Míg a második fejezetben a függvényegyenletek stabilitáselméletének a későbbiek során használt eredményeit foglaljuk össze. Itt foglalkozunk a stabilitás, a szuperstabilitás, illetve a hiperstabilitás fogalmával, melyeket egy-egy állításon keresztül illusztrálunk (lásd a 2.6., a 2.7. és a 2.8. Tételt).

A fő eredményeket a harmadik és a negyedik fejezet tartalmazza. A harmadikban az alábbi kérdésre keressük a választ. Ha $\varepsilon \geq 0$ egy tetszőleges, de rögzített valós szám, $\alpha \in \mathbb{R}$ szintén tetszőleges, de rögzített, $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, melyre

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, akkor létezik-e a paraméteres információ-alapegyenletnek olyan megoldása, azaz olyan $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$h(x) + (1-x)^\alpha h\left(\frac{y}{1-x}\right) = h(y) + (1-y)^\alpha h\left(\frac{x}{1-y}\right), \quad ((x, y) \in D^\circ)$$

mely esetén

$$|f(x) - h(x)| \leq K\varepsilon$$

teljesül, ha $x \in]0, 1[$ valamely $K \in \mathbb{R}$ konstanssal?

Erre a kérdésre a válasz az α paraméter értékétől függ. Így az alábbi tételeket tudtuk igazolni (lásd a 3.1. és a 3.3. Tételt).

1. Tétel. *Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $1 \neq \alpha \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény tetszőleges $(x, y) \in D^\circ$ esetén*

kielégíti a

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ekkor, ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $l :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy

$$|f(x) - [l(1-x) + c]| \leq 63\varepsilon$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén, egyébként pedig léteznek olyan a, b valós számok, hogy

$$|f(x) - [ax^\alpha + b(1-x)^\alpha - b]| \leq K(\alpha)\varepsilon$$

áll fenn bármely $x \in]0, 1[$ esetén, ahol

$$K(\alpha) = 3 + 12 \cdot 2^\alpha + \frac{32 \cdot 3^{\alpha+1}}{|2^{-\alpha} - 1|}.$$

2. Tétel. Legyenek $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha < 0$, $\varepsilon \geq 0$. Ekkor az $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor elégíti ki az

$$\left| f(x) + (1-x)^\alpha f\left(\frac{y}{1-x}\right) - f(y) - (1-y)^\alpha f\left(\frac{x}{1-y}\right) \right| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenséget minden $(x, y) \in D^\circ$ esetén, ha léteznek olyan $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy

$$f(x) = cx^\alpha + d(1-x)^\alpha - d$$

teljesül minden $x \in]0, 1[$ esetén.

A paraméteres információ-alapegyenlet stabilitásának a kérdését nemcsak a D° , hanem a D halmazon is vizsgáltuk. A zárt alaphalmazon azt sikerült igazolni, hogy a paraméteres alapegyenlet a D halmazon stabil, szuperstabil, illetve hiperstabil, ha az α valós szám értéke rendre nulla, egytől különböző pozitív valós, illetve negatív valós szám. Ezeket az eredményeket a 3.2. és a 3.4. Tételek tartalmazzák.

Szintén ebben a fejezetben mutatjuk meg, hogy az itt ismertetett módszerek nem alkalmasak az $\alpha = 1$ eset kezelésére. Így, az információ alap-egyenlete stabilitásának problémája mind a mai napig nyitott probléma.

Végül az értekezés negyedik fejezete az alkalmazásokat tartalmazza. Itt főleg a 3.1. és a 3.3. Tételek segítségével igazolunk állításokat.

Először az úgynevezett entrópia-egyenlettel foglalkozunk és igazoljuk az alábbi állítást (lásd 4.2. Tétel).

3. Tétel. *Legyen $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x + y + z > 0\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nemnegatív valós szám, tegyük fel továbbá, hogy a $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre teljesülnek az alábbiak.*

$$|H(x, y, z) - H(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_1$$

minden $(x, y, z) \in S$ és tetszőleges $\sigma : \{x, y, z\} \mapsto \{x, y, z\}$ permutáció esetén;

$$|H(x, y, z) - H(x + y, 0, z) - H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_2$$

bármely $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén, ahol S° jelöli az S halmaz belsejét;

$$|H(tx, ty, 0) - t^\alpha H(x, y, 0)| \leq \varepsilon_3$$

minden $t, x, y \in \mathbb{R}_{++}$ esetén. Ekkor, ha $\alpha = 1$, akkor létezik olyan $\varphi : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, melyre

$$\varphi(xy) = x\varphi(y) + y\varphi(x), \quad (x, y \in \mathbb{R}_{++})$$

úgy, hogy

$$|H(x, y, z) - [\varphi(x + y + z) - \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(z)]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén; ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy

$$|H(x, y, z) - a| \leq 8\varepsilon_3 + 25\varepsilon_2 + 49\varepsilon_1,$$

ha $(x, y, z) \in S^\circ$; végül, minden más esetben létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$|H(x, y, z) - c[(x + y + z)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha - z^\alpha]| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

teljesül minden $(x, y, z) \in S^\circ$ esetén.

Ezek után a második alfejezetben a módosított entrópia-egyenlet stabilitását vizsgáljuk. Először azonban az alábbi – egy egyszerű asszociativitási-egyenletre vonatkozó – stabilitási tételt bizonyítjuk.

4. Tétel. *Legyenek $U, V, W \subset \mathbb{R}$ pozitív hosszúságú intervallumok, $\varepsilon \geq 0$. Tegyük fel, hogy az $A : (U + V) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ és a $B : U \times (V + W) \rightarrow \mathbb{R}$ függvények olyanok, hogy*

$$|A(u + v, w) - B(u, v + w)| \leq \varepsilon$$

teljesül minden $u \in U$, $v \in V$ és $w \in W$ esetén. Ekkor létezik olyan $\varphi : U + V + W \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|A(p, q) - \varphi(p + q)| \leq 2\varepsilon \quad (p \in (U + V), q \in W)$$

és

$$|B(t, s) - \varphi(t + s)| \leq \varepsilon \quad (t \in U, s \in (V + W))$$

teljesül.

A szükséges definíciók ismertetése után rátérünk a módosított entrópia-egyenletre és a 4.4. Tételben megadjuk annak általános megoldását a többdimenziós alaphalmazon.

Ezt követően az egyenlet stabilitásának kérdését válaszoljuk meg az alábbi tétel formájában.

5. Tétel. *Legyenek $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\alpha \neq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$. Tegyük még fel továbbá, hogy az $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy*

$$\left| f(x, y, z) - f(x, y + z, 0) - (y + z)^\alpha f\left(0, \frac{y}{y + z}, \frac{z}{y + z}\right) \right| \leq \varepsilon_1$$

teljesül minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén, valamint tetszőleges $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ és $\sigma : \{x, y, z\} \rightarrow \{x, y, z\}$ permutáció esetén

$$|f(x, y, z) - f(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))| \leq \varepsilon_2$$

is teljesül. Ekkor, ha $\alpha < 0$, akkor létezik olyan $a \in \mathbb{R}$ és olyan $\psi_1 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_1(x + y + z)]| \leq 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$$

minden $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$ esetén; amennyiben $\alpha = 0$, úgy létezik olyan $\psi_2 : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, hogy

$$|f(x, y, z) - \psi_2(x + y + z)| \leq 191\varepsilon_1 + 1263\varepsilon_2; \quad (x, y, z \in \mathbb{R}_{++})$$

végül minden más esetben, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek olyan $\psi_n :]0, 3n] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy ha $x, y, z \in]0, n]$, akkor

$$|f(x, y, z) - [ax^\alpha + ay^\alpha + az^\alpha + \psi_n(x + y + z)]| \leq c_n(\alpha)\varepsilon_1 + d_n(\alpha)\varepsilon_2$$

áll fenn, ahol

$$c_n(\alpha) = 2 + 7 \cdot 2^\alpha n^\alpha K(\alpha) \quad \text{és} \quad d_n(\alpha) = 4 + 7 \cdot 2^{\alpha+2} n^\alpha K(\alpha).$$

Röviden, ez a tétel azt állítja, hogy a módosított entrópia-egyenlet Hyers–Ulam értelemben stabil az egydimenziós alaphalmazon a $\mu(x) = x^\alpha$ ($\alpha \leq 0, x \in \mathbb{R}_{++}$) multiplikatív függvénnyel.

Vegyük azonban észre, hogy ha $0 < \alpha \neq 1$, akkor csak azt tudtuk igazolni, hogy a szóban forgó egyenlet tetszőleges, de rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén stabil a $]0, n] \times]0, n] \times]0, n]$ halmazon. Egyszerű számolással látható azonban, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(\alpha) = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n(\alpha) = +\infty, \quad (1 \neq \alpha > 0)$$

így ezzel a módszerrel a „szokásos” Hyers–Ulam stabilitást nem sikerült igazolnunk továbbá, az $\alpha = 1$ esetről szintén nem tudtunk semmit belátni. Ezeket a problémákat nyitott kérdésként szintén ismertetjük.

Majd a disszertáció harmadik alfejezetében az α -rekurzív, 3-szemiszimmetrikus információértékek rendszerének stabilitásával foglalkozunk. A 3.1. és a 3.3. Tételek alkalmazásaként a következő tételt bizonyítjuk be.

6. Tétel. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, (ε_n) pedig egy nemnegatív valós számokból álló sorozat, tegyük fel továbbá, hogy az $I_n : \Gamma_n^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) függvénysorozat kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - I_{n-1}(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_n) - (p_1 + p_2)^\alpha I_2\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right)| \leq \varepsilon_{n-1}$$

minden $n \geq 3$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén és

$$|I_3(p_1, p_2, p_3) - I_3(p_1, p_3, p_2)| \leq \varepsilon_1$$

teljesül a Γ_3° halmazon. Ekkor, ha $\alpha < 0$, akkor léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k$$

teljesül minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén; ha $\alpha = 0$, akkor létezik olyan $l : \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}$ logaritmikus függvény és egy $c \in \mathbb{R}$, melyekkel

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^0(p_1, \dots, p_n) + l(p_1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + 63(n-1)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

teljesül tetszőleges $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén; végül, ha $1 \neq \alpha > 0$, akkor léteznek olyan c, d valós számok, hogy

$$|I_n(p_1, \dots, p_n) - [cH_n^\alpha(p_1, \dots, p_n) + d(p_1^\alpha - 1)]| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k + (n-1)K(\alpha)(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$$

áll fenn minden $n \geq 2$ és $(p_1, \dots, p_n) \in \Gamma_n^\circ$ esetén, ahol a $\sum_{k=2}^1 \varepsilon_k = 0$ konvencióval élünk.

Mivel azonban az információ alapegyenlete stabilitásának kérdése még nyitott probléma, így a 3-szemi-szimmetrikus, rekurzív információértékek rendszere stabilitásának a kérdése sincs megválaszolva.

Irodalomjegyzék

- [1] A. Abbas, E. Gselmann, Gy. Maksa, Z. Sun, *General and continuous solutions of the entropy equation*, American Institute of Physics, Proceedings of the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, **1073** (November 6, 2008), 3–7.
- [2] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. **19** Academic Press, New York–London, 1966.
- [3] J. Aczél, *Results on the entropy equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 1, 13–17.
- [4] J. Aczél, *Characterizing information measures: approaching the end of an era*, Uncertainty in knowledge-based systems (Paris, 1986), 359–384, Lecture Notes in Comput. Sci., **286**, Springer, Berlin, 1987.
- [5] J. Aczél, Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. **115**. Academic Press, New York–London, 1975.
- [6] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional equations in several variables. With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **31**. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [7] J. A. Baker, *The stability of the cosine equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 3, 411–416.
- [8] R. Borges, *Zur Herleitung der Shannonschen Information*, Math. Zeitschr. **96** (1967), 282–287.
- [9] Z. Daróczy, L. Losonczi, *Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen*, Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 239–245.
- [10] Z. Daróczy, *Az információ Shannon-féle mértékéről*, MTA Mat. Fiz. Oszt. Közl., **19** (1969), 9–24.
- [11] Z. Daróczy, *Generalized information functions*, Information and Control, **16** (1970), 36–51.
- [12] Z. Daróczy, *Remarks on the entropy equation*, Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (NS), **1(9)** (1976), 31–34.

- [13] Z. Daróczy, Gy. Maksa, *Nonnegative information functions*, Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ. Debrecen, Debrecen, 1977), pp. 67–78, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **21**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1979.
- [14] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math., **1** (1957), 509–544.
- [15] G. T. Diderrich, *Boundedness on a set of positive measure and the fundamental equation of information*, Publ. Math. Debrecen **33** (1986), no. 1-2, 1–7.
- [16] B. R. Ebanks, R. Sahoo, W. Sander, *Characterizations of information measures*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.
- [17] D. K. Faddeev, *On the concept of entropy of a finite probabilistic scheme*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.), **11** (1956), no. 1(67), 227–231.
- [18] G. L. Forti, *Hyers–Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1–2, 143–190.
- [19] E. Gselmann, *On the modified entropy equation*, Banach J. Math. Anal. **2** (2008), no. 1, 84–96.
- [20] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Publ. Math. Debrecen, közlésre benyújtva, 2009.
- [21] E. Gselmann, *Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type*, Colloquium Math., **114** (2009), 33–40.
- [22] E. Gselmann, *Hyperstability of a functional equation*, Acta Math. Hungar., **124** no. 1–2 (2009), 179–188.
- [23] E. Gselmann, *Recent results on the stability of the parametric fundamental equation of information*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi., Vol. **25**(2009), no. 1., 65–84.
- [24] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, Results in Math., közlésre elfogadva, 2009.
- [25] E. Gselmann, Gy. Maksa, *Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters*, Aequationes Math., közlésre elfogadva, 2008.

- [26] E. Gselmann, Gy. Maksa, *The Shannon field of non-negative information functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **69** (2009), no. 2, 241–248.
- [27] R. V. Hartley, *Transmission of Information*, Bell System Tech. J., **7** (1928), 535–563.
- [28] J. Havrda and F. Charvát, *Quantification Method of Classification Processes, Concept of Structural α -Entropy*, Kybernetika, **3** (1967), 30–35.
- [29] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. **115** Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963
- [30] A. Ya. Hinčin, *The concept of entropy in the theory of probability*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.), **8**, (1953). no. 3(55), 3–20.
- [31] M. Hosszú, *On the functional equation $F(x + y, z) + F(x, y) = F(x, y + z) + F(y, z)$* , Period. Math. Hungar., **1** (1971), no. 3, 213–216.
- [32] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **27** (1941), 222–224.
- [33] D. H. Hyers, G. Isac, Th. M. Rassias, *Stability of functional equations in several variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **34**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.
- [34] B. Jessen, J. Karpf, A. Thorup, *Some functional equations in groups and rings*, Math. Scand., **22** (1968), 257–265.
- [35] A. Kamiński, J. Mikusiński, *On the entropy equation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **22** (1974), 319–323.
- [36] I. Káta, *A remark on additive arithmetical functions*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **10** (1967), 81–83.
- [37] D. G. Kendall, *Functional equations in information theory*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, **2** (1964), 225–229.
- [38] I. Kocsis, *Összeg alakú függvényegyenletek stabilitása*, doktori(PhD) értekezés, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2003.
- [39] I. Kocsis, *Függvényegyenletek, stabilitás*, Stúdium Kiadó (Nyíregyháza), 2005.

- [40] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality*. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach **489**. Uniwersytet Śląski, Katowice; Państwowe Wydawnictwo Naukowe (PWN), Warsaw, 1985.
- [41] S. Kullback, *Information theory and statistics*, John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London, 1959.
- [42] P. M. Lee, *On the axioms of information theory*, Ann. Math. Statist., **35** (1964), 415–418.
- [43] Gy. Maksa, *Bounded symmetric information functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, **2** (1980), no. 5, 247–252.
- [44] Gy. Maksa, *Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions*, Utilitas Math., **21** (1982), 267–282.
- [45] Gy. Maksa, *Információmértékek előállítása és jellemzése függvényegyenletek segítségével*, kandidátusi értekezés, Debrecen–Miskolc, 1985.
- [46] Gy. Maksa, *The generalized associativity equation revisited*, Rocznik Nauk.–Dydakt. Prace Mat., **17** (2000), 175–180.
- [47] Gy. Maksa, C. T. Ng, *The fundamental equation of information on open domain*, Publ. Math. Debrecen, **33** (1986), no. 1-2, 9–11.
- [48] Gy. Maksa, Zs. Páles, *Hyperstability of a class of linear functional equations*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **17** (2001), no. 2, 107–112.
- [49] Gy. Maksa, *The stability of the entropy of degree alpha* J. Math. Anal. Appl., **346** (2008), no. 1, 17–21.
- [50] A. Morando, *A stability result concerning the Shannon entropy*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 3, 286–296.
- [51] Z. Moszner, *Sur les définitions différentes de la stabilité des équations fonctionnelles*, Aequationes Math., **68** (2004), no. 3, 260–274.
- [52] A. Rényi, *A few fundamental problems of information theory*, (Hungarian) Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., **10** (1960), 251–282.
- [53] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J., **27** (1948), 379–423 & 623–656.

- [54] L. Székelyhidi, *Note on a stability theorem*, Canad. Math. Bull., **25** (1982), no. 4, 500–501.
- [55] L. Székelyhidi, *Stability properties of functional equations in several variables*, Publ. Math. Debrecen, **47** (1995), no. 1-2, 95–100.
- [56] L. Székelyhidi, *38. Problem* (in Report of Meeting), Aequationes Math., **41** (1991), 302.
- [57] C. Tsallis, *Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs Statistics*, Journal of Statistical Physics, **52(1-2)** (1988), 479–487.
- [58] H. Tverberg, *A new derivation of the information function*, Math. Scand., **6** (1958), 297–298.
- [59] S. M. Ulam, *Problems in modern mathematics*, Science Editions John Wiley & Sons, Inc., New York 1964.

A jelölt publikációi (Publications of the author)

- [1] E. Gselmann, *On the modified entropy equation*, Banach J. Math. Anal., **2** (2008), no. 1, 84–96.
- [2] A. Abbas, E. Gselmann, Gy. Maksa, Z. Sun, *General and continuous solutions of the entropy equation*, American Institute of Physics, Proceedings of the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering, **1073** (November 6, 2008), 3–7.
- [3] E. Gselmann, *Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type*, Colloquium Math., **114** (2009), 33–40.
- [4] E. Gselmann, *Recent results on the parametric fundamental equation of information*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi., **25** (2009), no. 1, 65–84.
- [5] E. Gselmann, *Hyperstability of a functional equation*, Acta Math. Hungar., **124** no. 1–2 (2009), 179–188.
- [6] E. Gselmann, Gy. Maksa, *The Shannon field of non-negative information functions*, Scientiae Mathematicae Japonicae, **69** (2009), no. 2, 241–248.
- [7] E. Gselmann, Gy. Maksa, *Stability of the parametric fundamental equation of information for nonpositive parameters*, Aequationes Math., **78** (2009), 271–282.
- [8] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, Results in Math., közlésre elfogadva, 2009.
- [9] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Publ. Math. Debrecen, **77/1–2** (2010), 201–210.
- [10] Z. Boros, E. Gselmann, *Hyers–Ulam stability of derivations and linear functions*, Aequationes Math., közlésre elfogadva, 2010.
- [11] E. Gselmann, Gy. Maksa, *A characterization of the relative entropies*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., közlésre benyújtva, 2009.
- [12] E. Gselmann, *On the characterization of derivations through one equation*, Proc. Amer. Math. Soc., közlésre benyújtva, 2009.
- [13] E. Gselmann, *Entropy functions and functional equations*, Math. Commun., közlésre benyújtva, 2010.

A jelölt által tartott előadások (Talks held by the author)

- [1] E. Gselmann, *A fraktál-dimenzió*, A Debreceni Egyetem Tehetséggondozó Programjának II. Konferenciája, Debrecen, 2006.
- [2] E. Gselmann, *Dimensions of Cantor-type sets*, 7th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2007.
- [3] E. Gselmann, *On Cantor-type sets*, International Students' Conference on Analysis, Szczyrk, Lengyelország, 2007.
- [4] E. Gselmann, *Cantor-típusú halmazok dimenziói*, Országos Tudományos Diákköri Konferencia, Szeged, 2007.
- [5] E. Gselmann, *Stability type results concerning the fundamental equation of information of multiplicative type*, 8th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Poroszló, 2008.
- [6] E. Gselmann, *General and continuous solutions of the entropy equation*, International Students' Conference on Analysis, Zamárdi, 2008.
- [7] E. Gselmann, *On the general and regular solutions of the modified entropy equation*, Workshop on Functional Equation, Inequalities and Applications dedicated to the 60th birthday of Professor Gyula Maksa, Debrecen, 2008.
- [8] E. Gselmann, *Stability of the entropy equation*, Numbers, Functions and Equations '08, Noszvaj, 2008.
- [9] E. Gselmann, *A paraméteres információ-alapegyenlet stabilitásáról*, Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet Intézeti Szemináriuma, Debrecen, 2008.
- [10] E. Gselmann, *Stability problems in the theory of information*, Workshop on functional equations, Universität Bonn, Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, Németország, 2008.
- [11] E. Gselmann, *On the stability of the modified entropy equation*, 9th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyelország, 2009.
- [12] E. Gselmann, *The Shannon field of non-negative information functions*, International Students' Conference on Analysis, Szare, Lengyelország, 2009.

- [13] E. Gselmann, *Nemnegativitási problémák az információelméletben*, Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet Intézeti Szemináriuma, Miskolc, 2009.
- [14] E. Gselmann *Derivációk stabilitása*, Debreceni Egyetem Matematikai Intézet Analízis Tanszékének Szemináriuma, Síkfőkút, 2009.
- [15] E. Gselmann *On the stability of derivations*, The 13th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Malle Ciche, Lengyelország, 2009.
- [16] E. Gselmann, *Néhány információelméleti probléma*, A Magyar Tudomány Napja, Tudomány, Innováció, Tehetség, Debrecen, 2009.
- [17] E. Gselmann, *Inequalities for additive functions*, The 6th International Students' Conference on Analysis, Síkfőkút, 2010.
- [18] E. Gselmann, *A characterization of the relative entropies*, The 10th Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Zamárdi, 2010.
- [19] E. Gselmann, *On the characterization of derivations via a single equation*, The 48th International Symposium on Functional Equations, Batz-sur-Mer, Franciaország, 2010.

Az információelmélet néhány függvényegyenletének stabilitása

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Gselmann Eszter okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori
programja Függvényegyenletek alprogramja keretében.

Témavezető: Dr. Maksa Gyula

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 200... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 200... ..