Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras

doktori (PhD) értekezés tézisei

Győry Máté

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2003

Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras

In the present thesis we give an overview of our results from our dissertation.

Our dissertation consists of two parts. The first one presents our results on *preserver problems* concerning certain algebraic structures of linear operators or continuous functions. The second part is devoted to our results on *reflexivity problems* concerning certain algebras of functions. Both parts have separate introductions.

Some of our results presented here have appeared in our papers [12, 13, 17, 18, 48]. The other results will be published in our articles [14, 15, 16].

PART I
Some preserver problems

Linear preserver problems concern the question of determining all linear maps on an algebra which leave invariant a given subset, function or relation defined on the underlying algebra. The study of linear preserver problems on matrix algebras represents one of the most active research areas in matrix theory (see e.g. the survey papers [34, 35]). In the last decades considerable attention has also been paid to the infinite dimensional case, i.e. to preserver problems on operator algebras, and the investigations have resulted in several important results (see e.g. the survey paper [8]).

In what follows we mention three of the main groups of linear preserver problems on operator algebras. For brevity, we shall sometimes write **LPPs** for the expression **linear preserver problems**.

The *first group* of LPPs is concerned with the characterization of linear transformations on a linear space of bounded linear operators which preserve a certain given *function*. A well-known example of this kind of LPPs is Frobenius's result [11] from 1897. He gave the general form of all determinant preserving linear maps on a matrix algebra. This result is commonly considered as the first one on linear preserver problems. Another important example is the result of Jafarian and Sourour [24], where they described the general form of surjective linear transformations on the algebra of all bounded linear operators on a Banach space which preserve the spectrum of the operators.

The *second group* of LPPs deals with the characterization of linear transformations which preserve a certain *subset* of operators. As an example we mention Kaplansky's famous question [29] on invertibility preserving maps. Namely, he asked whether every surjective linear transformation between Banach algebras which preserves invertibility in one direction is a Jordan homomorphism. In such generality the answer turned out to be negative, but his question, modified with the additional assumption of the semi-simplicity of the underlying Banach algebras, is still open and is one of the most important unsolved preserver problems.

The *third group* of LPPs concerns the characterization of linear transformations which preserve a certain *relation* between operators. An important example is the problem of preserving commutativity, which topic is still an active research area (cf. [53, 54]).

In several cases LPPs on matrix algebras or on operator algebras can be reduced to linear preserver problems which concern rank (see e.g. [24, 58, 62]). Therefore, it is not surprising that there is a vast literature on such problems. We mention just two important finite-dimensional results here: Beasley's result [5] on rank-k preserving linear maps and Loewy's result [36] on rank-k non-increasing linear maps. With regard to the infinite-dimensional case, i.e. to preserver problems on operator algebras, the particular cases of preserving rank-1 operators or preserving operators with rank at most 1 have been treated in the papers [23, 55].

In **Chapter 2** we characterize the rank-k non-increasing linear maps, the rank-k preserving linear maps, and the corank-k preserving linear maps on the algebra of all bounded linear operators on a Hilbert space under a mild continuity condition, and we unify and extend the results mentioned above. (The problem of corank-k preservers occurs obviously in the infinite-dimensional case only.) Below we present only one of the theorems of Chapter 2. As one can see in the dissertation, the further preservers under consideration are of similar forms.

Theorem 2.2 *Let k be a positive integer and H a Hilbert space. Assume that $\phi : B(H) \to B(H)$ is a rank-k preserving linear map which is weakly continuous on norm bounded sets. Assume also that the image of ϕ is not contained in $B_k(H)$, where $B_k(H)$ denotes the set of all operators of rank k. Then there exists an injective operator $A \in B(H)$ and an operator $B \in B(H)$ with dense image such that either $\phi(T) = ATB$ for all $T \in B(H)$, or $\phi(T) = AT^{tr}B$ for all $T \in B(H)$, where T^{tr} denotes the transpose of T relative to an arbitrary but fixed orthonormal basis of H.*

The content of Chapter 2 was published in our paper [18].

The concept of *linear preserver problems* has so far meant investigations on matrix algebras and on operator algebras, but similar questions can obviously be raised on *arbitrary algebras*. In **Chapter 3** we consider LPPs concerning *function algebras*, in which case the main LPPs considered before have been the characterizations of linear bijections preserving some given norm, or preserving disjointness of the support. We refer to [1, 10, 21, 25, 64, 65] for some of the important and relatively recent papers on such problems. For convenience, we introduce some notation. Let X be a locally compact Hausdorff space and let $C_0(X)$ denote the algebra of all continuous complex valued functions on X which vanish at infinity. The linear bijections of $C_0(X)$ preserving the sup-norm are determined in the famous Banach-Stone theorem. Besides the sup-norm, one of the most natural possibilities to measure a function is to consider the diameter of its range. In Chapter 3 we characterize all the linear bijections of $C_0(X)$ which *preserve the diameter of the range*, and give a unification of the contents of our papers [12] and [17]. Namely, we prove the following theorem.

Theorem 3.1 *Let X be a first countable locally compact Hausdorff space, and let X_0 denote $X \cup \{\infty\}$ if X is not compact, and X if X is compact. Then X_0, endowed with a topology in a natural way, is a compact Hausdorff space.*

If X is compact, then a bijective linear map $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ is diameter preserving if and only if there exists a complex number τ of modulus 1, a homeomorphism $\varphi : X \to X$ and a linear functional $t : C_0(X) \to \mathbb{C}$ with $t(1) \neq -\tau$ such that ϕ is of the form

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi + t(f)1 \qquad \big(f \in C_0(X)\big). \tag{3.1}$$

If X is not σ-compact, then a bijective linear map $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ is diameter preserving if and only if there exists a complex number τ of modulus 1 and a homeomorphism $\varphi : X \to X$ such that ϕ is of the form

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi \qquad \big(f \in C_0(X)\big). \tag{3.2}$$

If the space X is σ-compact but not compact, then a bijective linear map $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ is diameter preserving if and only if there exists a complex number τ of modulus 1 and a homeomorphism $\varphi : X_0 \to X_0$ such that ϕ is of the form

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi - \tau f\big(\varphi(\infty)\big)1 \qquad \big(f \in C_0(X)\big), \tag{3.3}$$

where $f(\infty) = 0$ for every $f \in C_0(X)$.

Up to now we have considered *linear* preserver problems. It is clear that preserver problems can be raised *without assuming any kind of linearity.* We may consider transformations on some algebraic structures which preserve some property, quantity, relation, etc. There are a great number of results in mathematics which can be interpreted as preserver problems in this general sense. We mention the very simple example of the isometries of a metric space: the isometries can be viewed as transformations which preserve distance. Another example of preserver problems of this general kind is Wigner's famous unitary-antiunitary theorem, which we treat in our dissertation in detail. The next theorem presents one of its several formulations which characterizes the transformations on a Hilbert space preserving the absolute value of the inner product of any pair of vectors.

Theorem 4.1 *Let H be a complex Hilbert space and $T : H \to H$ an arbitrary function. Then*

$$|\langle Tx, Ty\rangle| = |\langle x, y\rangle| \tag{4.1}$$

holds for any $x, y \in H$ if and only if there exists a function $\varphi : H \to \mathbb{C}$, $|\varphi| = 1$ and a linear or conjugate linear isometry $U : H \to H$ such that

$$T = \varphi \cdot U. \tag{4.2}$$

This result is one of the most important theorems concerning the probabilistic aspects of quantum mechanics.

Several different proofs have been given for Wigner's fundamental theorem mentioned above. In **Chapter 4** we present a further, elementary proof which is based on a completely new approach. Our basic idea is as follows. We pick an orthonormal basis in the Hilbert space H, and first we prove that there exist φ and U (as in Theorem 4.1) for the set F of all vectors with *real coordinates*. To see this, we show that on an arbitrary subset $G \subseteq F$, the elements of which are not orthogonal to a given vector, our transformation T is of the form (4.2) with φ and U depending on G. To prove this, we consider all the subsets of $G \times G$ for the elements of which (4.2) holds with (not necessarily the same) adequate φ and U, and we show that those subsets satisfy the conditions of *Zorn's lemma*. So there is a maximal subset in $G \times G$ with this property, which turns out to be the whole $G \times G$. Then it is easy to show that there are φ and U for which T is of the form (4.2) on the *whole Hilbert space*.

Wigner's theorem has been generalized in (at least) three directions. *First*, Uhlhorn [63] generalized Wigner's result by requiring only the preservation of *orthogonality* instead of that of the absolute value of the inner product, and he was able to achieve the same conclusion for the case in which the underlying space is at least 3 dimensional. Uhlhorn's result has a serious impact in physics. *Secondly*, Bargmann [3] and Sharma and Almeida [60] obtained results similar to Wigner's *without the assumption of bijectivity*. As for the *third* direction, we recall that sometimes Wigner's theorem is formulated as the characterization of bijections of the set of all 1-dimensional subspaces of a Hilbert space which preserve the angle between those subspaces. Molnár [45] extended Wigner's result in this respect to transformations on the set of all *n-dimensional subspaces* (n being fixed) which preserve the so-called principle angles between the subspaces. (For other generalizations of Wigner's theorem see e.g. [38, 40, 41, 43]). In **Chapter 5** we extend Wigner's theorem in *all the three directions* mentioned above, by obtaining results on the structure of orthogonality preserving transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space under various conditions. Namely, we prove the following theorem.

Theorem 5.1 *Let H be a Hilbert space and $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ with*

$$\begin{cases} \dim H > 2n & \text{if } n \in \mathbb{N}, \\ \dim H = \infty & \text{if } n = \infty, \end{cases} \tag{5.1}$$

and let $\phi : H_n \to H_n$, where H_n denotes the set of all n-dimensional closed linear subspaces of H, which are also of infinite codimension if $n = \infty$.

If $\phi : H_n \to H_n$ is ***surjective****, then ϕ preserves orthogonality in both directions if and only if there exists a unique bijection $\psi : H_1 \to H_1$ which preserves orthogonality in both directions, and for any $K \in H_n$ we have*

$$\phi(K) = \operatorname{span}\{\psi(X) | X \in H_1, X \subseteq K\}, \tag{5.2}$$

where span *denotes the generated linear subspace.*

Thus, by Uhlhorn's theorem, if $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ is such that (5.1) *holds and $\phi : H_n \to H_n$ is surjective, then ϕ preserves orthogonality in both directions if and only if there exists a unitary or antiunitary operator U on H such that for any $K \in H_n$ we have*

$$\phi(K) = U(K). \tag{5.3}$$

If H is ***finite dimensional****, then ϕ preserves orthogonality in both directions (surjectivity is not assumed) if and only if there exists a unique transformation $\psi : H_1 \to H_1$ which preserves orthogonality in both directions and for any $K \in H_n$* (5.2) *holds. Moreover, if ϕ preserves principal angles then ψ also preserves angles, thus in this case ϕ is of the form* (5.3) *with a unitary or antiunitary operator U on H.*

PART II

Some reflexivity problems on function algebras

In the **second part** of the dissertation we deal with the problem of ***reflexivity*** of the automorphism group and the isometry group of certain algebras of functions. The study of reflexive linear subspaces of the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on a Hilbert space H represents one of the most active research areas in operator theory (see [19] for a nice general view of reflexivity of this kind). In the last decades, similar questions concerning certain important sets of transformations acting on Banach algebras rather than on Hilbert spaces have also attracted considerable attention. The initiators of the research in this direction are Kadison, Larson and Sourour. Kadison [28] studied *local derivations* from a von Neumann algebra $\mathcal{R}$ into a dual $\mathcal{R}$-bimodule $\mathcal{M}$. He called a continuous linear map from $\mathcal{R}$ into $\mathcal{M}$ a local derivation, if it agrees with a derivation at each point in the algebra $\mathcal{R}$ (the derivation may differ from point to point). This investigation of Kadison was motivated by some problems concerning the Hochschild cohomology of operator algebras. The main result, Theorem A, in [28] states that in the above setting, every local derivation is a derivation. Independently, Larson and Sourour [33] proved that the same conclusion holds for the local derivations of $B(X)$ (the definition is clear), where X is a Banach space. Since then, a considerable amount of work has been done concerning local derivations of various algebras. See, for example, [6, 9, 20, 27, 52, 57, 66, 67, 68, 69, 70]. Besides derivations, there are at least two further very important classes of transformations on operator algebras which certainly deserve attention. Namely, the group of automorphisms and the group of surjective isometries. Larson [32, Some concluding remarks (5), p. 298] initiated the study of *local automorphisms* (the definition is self-explanatory) of Banach algebras. In his joint paper with Sourour [33] that we have already mentioned they proved that if X is an infinite dimensional Banach space, then every surjective local automorphism of $B(X)$ is an automorphism (see also the paper [6] of Brešar and Šemrl). For a separable infinite dimensional Hilbert space H, Brešar and Šemrl [7] showed that the above conclusion holds without the assumption of surjectivity, i.e. every local automorphism of $B(H)$ is an automorphism. For further results on local automorphisms, we refer to [51, 57]. The common feature of all those results is that they show that the local derivations, local automorphisms, local isometries, etc. of the underlying structures are (global) derivations, automorphisms, isometries, etc., respectively. Clearly, this is a remarkable property of the underlying structure. As for function algebras, results of this kind were obtained by Cabello Sánchez and Molnár [56], and by Molnár and Zalar [50].

We now define our concept of *reflexivity*. Let X be a Banach space (in fact, in the cases which we are interested in, X is usually a Banach algebra) and for any subset $\mathcal{E} \subset B(X)$ let

$$\operatorname{ref}_{alg} \mathcal{E} = \{T \in B(X) : Tx \in \mathcal{E}x \text{ for all } x \in X\},$$
$$\operatorname{ref}_{top} \mathcal{E} = \{T \in B(X) : Tx \in \overline{\mathcal{E}x} \text{ for all } x \in X\},$$

where bar denotes norm-closure. The above sets are called the *algebraic reflexive closure* and the *topological reflexive closure* of $\mathcal{E}$, respectively. The collection $\mathcal{E}$ of transformations is called *algebraically reflexive* if $\operatorname{ref}_{alg} \mathcal{E} = \mathcal{E}$, and *topologically reflexive* if $\operatorname{ref}_{top} \mathcal{E} = \mathcal{E}$.

In this terminology, the main result in [7] can be reformulated by saying that the automorphism group of $B(H)$ is algebraically reflexive. Similarly, Theorem 1.2 in [33] states that the Lie algebra of all generalized derivations on $B(X)$ is algebraically reflexive. For some further results on the algebraic reflexivity of the automorphism and isometry groups we refer to [42, 50, 56].

Obviously, topological reflexivity is a stronger property than algebraic reflexivity. Shulman [61] showed that the derivation algebra of any C^*-algebra is topologically reflexive. Hence, not only the local derivations are derivations in this case, but every bounded linear map which agrees with the limit of some sequence of derivations at each point (this sequence may differ from point to point) is a derivation. For the topological reflexivity of derivation algebras, automorphism groups and isometry groups, we refer to [4, 26, 37, 39].

For the automorphism group or the isometry group of C^*-algebras, such a general result as in [61] does not hold. If $\mathcal{A}$ is a Banach algebra, then denote by $\operatorname{Aut}(\mathcal{A})$, $\operatorname{Aut}^*(\mathcal{A})$ and $\operatorname{Iso}(\mathcal{A})$ the group of automorphisms (i.e. multiplicative linear bijections), the group of $*$-automorphisms and the group of surjective linear isometries of $\mathcal{A}$, respectively. Now, if X is an uncountable discrete topological space, then it is not difficult to verify that the groups $\operatorname{Aut}(C_0(X))$ and $\operatorname{Iso}(C_0(X))$ of the C^*-algebra $C_0(X)$ of all continuous complex valued functions on X vanishing at infinity are not reflexive even algebraically. With regard to topological reflexivity, there are even von Neumann algebras whose automorphism and isometry groups are not topologically reflexive. For example, Batty and Molnár [4] showed that the infinite dimensional commutative von Neumann algebras acting on a separable Hilbert space have this nonreflexivity property. However, Molnár [37] proved that if H is a separable infinite dimensional Hilbert space, then $\mathrm{Aut}(B(H))$ and $\mathrm{Iso}(B(H))$ are topologically reflexive. For an interesting result we refer to [42], where Molnár studied the reflexivity of the automorphism and isometry groups of C^*-algebras appearing in the famous Brown-Douglas-Fillmore theory, which are extensions of the C^*-algebra of all compact operators on H by commutative separable unital C^*-algebras. He proved that the groups Aut and Iso are algebraically reflexive in the case of every such extension, but, for example, in the probably most important case of extensions by $C(\mathbb{T})$ (i.e. the so called Toeplitz extensions) those groups are *not* topologically reflexive.

In **Chapter 6** we deal with the reflexivity of the automorphism group and the isometry group of the suspension of $B(H)$. The concept of the suspension of a C^*-algebra plays a very important role in the K-theory of operator algebras. If $\mathcal{A}$ is a C^*-algebra then its suspension is the C^*-tensor product $C_0(\mathbb{R})\otimes\mathcal{A}$, which is well-known to be isomorphic to $C_0(\mathbb{R},\mathcal{A})$, the algebra of all continuous functions from $\mathbb{R}$ into $\mathcal{A}$ which vanish at infinity. We know that the automorphism group and the isometry group of $B(H)$ are topologically reflexive [37]. We show that $\mathrm{Aut}(C_0(\mathbb{R}))$ and $\mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R}))$ are algebraically (but not topologically) reflexive. In Chapter 6 we obtain several results, the following corollary of which can be considered as the main result of Chapter 6.

Corollary 6.5 *The automorphism and isometry groups of the suspension of $B(H)$ are algebraically reflexive.*

The content of Chapter 6 was published in our paper [48]. The referee of the manuscript put the question whether it is possible to describe the topological reflexive closures of $\mathrm{Aut}(C_0(\mathbb{R})\otimes B(H))$ and $\mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R})\otimes B(H))$. **Chapter 7** is devoted to answer this question. Among others, we obtain the following result.

Corollary 7.2 *Let $\phi : C_0(\mathbb{R}, B(H)) \to C_0(\mathbb{R}, B(H))$ be a linear map. We have $\phi \in \mathrm{ref}_{top}\,\mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R}, B(H)))$ resp. $\phi \in \mathrm{ref}_{top}\,\mathrm{Aut}^*(C_0(\mathbb{R}, B(H)))$, if and only if there exists an open interval $U \subseteq \mathbb{R}$, a surjective, monotone, continuous function $\varphi : U \to \mathbb{R}$, and $\tau : U \to \mathrm{Iso}(B(H))$ resp. $\tau : U \to \mathrm{Aut}^*(B(H))$, such that ϕ is of the form*

$$\phi(f)(y) = \begin{cases} \tau(y)\big(f\big(\varphi(y)\big)\big) & \text{if } y \in U, \\ 0 & \text{if } y \in \mathbb{R}\setminus U \end{cases} \tag{7.1}$$

for any $f \in C_0(\mathbb{R}, B(H))$. Moreover, if ϕ is of the form (7.1), then τ is strongly continuous.

In the concept of local derivations, local automorphisms, etc. we supposed that the transformations under consideration are linear and they equal a derivation, automorphism, etc., respectively, at every single point of the underlying algebra. If we drop the condition of linearity, it is easy to see that the obtained concept is so general (because the assumption is so weak) that it is practically useless. Motivated by the result of Kowalski and Slodkowski [31] on a non-linear characterization of the characters of commutative Banach algebras, Šemrl [59] introduced the concept of ***2-locality***. For example, we say that a (not necessarily linear) transformation ϕ of a Banach algebra is called a 2-local automorphism, if for any pair x, y of points in the Banach algebra under consideration we have an automorphism $\phi_{x,y}$ (depending on x and y) such that $\phi(x) = \phi_{x,y}(x)$ and $\phi(y) = \phi_{x,y}(y)$. The definition of 2-local derivations, 2-local isometries, etc. are similar. Šemrl [59] proved that every 2-local automorphism of $B(H)$ (H being an infinite dimensional separable Hilbert space) is an automorphism, and every 2-local derivation of $B(H)$ is a derivation.

This concept of 2-locality has the advantage that it can be considered in relation with any algebraic structure as we do not assume any kind of linearity. Clearly, it is a remarkable property of the underlying algebraic structure if its 2-local automorphisms, 2-local (surjective linear) isometries, etc. are (global) automorphisms, isometries, etc., respectively. In fact, this means that the automorphisms, isometries, etc. are determined by their local actions on the 2-point subsets. For some recent results on 2-local derivations, 2-local automorphisms and 2-local isometries we refer to [2, 22, 30, 44, 46, 47, 49].

Molnár [46] studied 2-local isometries of operator algebras. He proved that every such transformation of a C^*-subalgebra of $B(H)$ which contains the compact operators and the identity is a (surjective linear) isometry. Moreover, he raised the problem of considering similar questions concerning function algebras. In **Chapter 8** we obtain such a result for one of the most important types of function algebras, namely for $C_0(X)$. We prove the following statement.

Theorem 8.2 *If X is a first countable σ-compact Hausdorff space then every 2-local isometry of $C_0(X)$ is a (surjective linear) isometry.*

The content of Chapter 8 appeared in our paper [13].

Megőrzési és reflexivitási problémák operátoralgebrákon és függvényalgebrákon

Doktori értekezésünk téziseiben áttekintjük disszertációnk főbb eredményeit.

Az értekezés két részből áll. Az első részben függvényalgebrákon illetve operátoralgebrákon értelmezett *megőrzési problémák* terén, a második részben függvényalgebrákon értelmezett *reflexivitási problémák* terén elért eredményeinket foglaljuk össze. Mindkét részt külön bevezetéssel láttuk el.

Itt bemutatott eredményeink egy része a [12, 13, 17, 18, 48] cikkeinkben már megjelent, míg a többi eredményt hamarosan publikáljuk a [14, 15, 16] dolgozatainkban.

I. RÉSZ

Néhány megőrzési probléma

Lineáris megőrzési problémák esetén az a célunk, hogy meghatározzuk egy algebra összes olyan lineáris leképezését, amely egy adott halmazt, függvényt vagy relációt változatlanul hagy. A rövidség kedvéért a **lineáris megőrzési probléma** kifejezés helyett időnként **LPP**-t írunk, amely a *linear preserver problem* angol kifejezés rövidítése. Az LPP-k vizsgálata a mátrix-elmélet egyik legintenzívebben kutatott területe (l. pl. Li és Pierce [34], illetve Li és Tsing [35] összefoglaló cikkét). Az elmúlt évtizedekben jelentős érdeklődés mutatkozott a végtelen-dimenziós eset iránt, vagyis az operátoralgebrákon értelmezett megőrzési problémák irányában is, s e kutatások számos fontos eredményhez vezettek (l. még pl. Brešar és Šemrl [8] összefoglaló cikkét).

A továbbiakban az operátoralgebrákon tekintett lineáris megőrzési problémák három fő csoportját említjük meg.

Az LPP-k *első csoportja* a korlátos lineáris operátorok lineáris terén értelmezett, valamely adott *függvényt* megőrző lineáris transzformációkat kívánja karakterizálni. Az LPP-k e típusának jól ismert példája Frobenius 1897-es eredménye, amelyet a lineáris megőrzési problémákkal kapcsolatos első eredménynek tekintenek. Frobenius [11] leírta egy mátrixalgebra összes determináns-megőrző lineáris leképezését. További fontos példa Jafarian és Sourour [24] eredménye, amely megadja egy Banach-tér korlátos lineáris operátorainak algebráján értelmezett összes spektrum-megőrző szürjektív lineáris transzformáció általános alakját.

Az LPP-k *második csoportja* olyan lineáris transzformációk meghatározását veti fel, amelyek megőrzik operátorok egy bizonyos *részhalmazát*. Példaként említhetjük Kaplansky [29] híres kérdését az invertálhatóság-megőrző leképezésekről: Banach-algebrák között értelmezett, az invertálhatóságot egy irányban megőrző minden szürjektív lineáris transzformáció Jordan-homomorfizmus-e? Ma már tudjuk, hogy ilyen általánosságban a válasz nemleges, ám féligegyszerű Banach-algebrák esetén Kaplansky kérdése máig az egyik legfontosabb megoldatlan megőrzési probléma.

Az LPP-k *harmadik csoportja* esetén azokat a lineáris transzformációkat próbáljuk leírni, amelyek megőriznek egy bizonyos *relációt* az operátorok között. Egy fontos példa a kommutativitás-megőrzés problémája, amely máig aktívan kutatott terület (l. [54, 53]).

Mivel mátrix- és operátoralgebrákon az LPP-k számos esetben visszavezethetők ranggal kapcsolatos LPP-kre (l. pl. [24, 58, 62]), ezért nem meglepő, hogy e problémák irodalma igen bőséges. Két fontos véges-dimenziós eredményt említünk meg, nevezetesen Beasley [5] eredményét a k-rangot megőrző lineáris leképezésekről, valamint Loewy [36] eredményét a k-rangot nem növelő lineáris leképezésekről. Hou [23], valamint Omladič és Šemrl [55] az 1-rangú operátorok, illetve a legfeljebb 1-rangú operátorok megőrzését vizsgálta a végtelen-dimenziós esetben, vagyis operátoralgebrák esetén.

A **2. Fejezetben** enyhe folytonossági feltétel mellett meghatározzuk egy Hilbert-tér korlátos lineáris operátorainak algebráján értelmezett összes olyan lineáris leképezést, amely egy adott k esetén nem növeli a k-rangot, megőrzi a k-rangot, illetve megőrzi a k-korangot, s ezzel egységesítjük és kiterjesztjük a fent említett eredményeket. Alább a fejezet csupán egyetlen tételét emeljük ki. Értekezésünkben láthatjuk, hogy a többi vizsgált megőrző leképezés is hasonló alakú.

2.2. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér, k pozitív egész és $\phi : B(H) \to B(H)$ olyan lineáris leképezés, amely gyengén folytonos a normában korlátos halmazokon, megőrzi a k-rangot, és képtere nem része az összes k-rangú operátor $B_k(H)$ halmazának. Ekkor létezik $A \in B(H)$ injektív és $B \in B(H)$ sűrű képterű operátor úgy, hogy vagy minden $T \in B(H)$ esetén $\phi(T) = ATB$, vagy minden $T \in B(H)$ esetén $\phi(T) = AT^{tr}B$, ahol T^{tr} a T-nek H egy tetszőleges, rögzített ortonormált bázisa szerinti transzponáltja.*

A 2. Fejezet eredményeit a [18] cikkünkben publikáltuk.

A *lineáris megőrzési problémák* tanulmányozása eredetileg mátrixalgebrákon és operátoralgebrákon való vizsgálatokat jelentett, ám hasonló kérdések nyilvánvalóan *bármely algebrán* felvethetők. A **3. Fejezetben** *függvényalgebrákkal* kapcsolatos LPP-ket vizsgálunk. Korábban e terület legfőbb eredményei olyan lineáris bijekciókat írtak le, amelyek megőriznek egy-egy adott normát, illetve a tartóhalmazok diszjunktságát. Néhány fontos, viszonylag új publikáció ilyen problémákról például [1, 10, 21, 25, 64, 65]. A könnyebb követhetőség kedvéért bevezetünk néhány jelölést. Legyen X lokálisan kompakt Hausdorff-tér, és jelölje $C_0(X)$ az X-en értelmezett összes komplex-értékű, végtelenben eltűnő, folytonos függvény algebráját. A híres Banach-Stone-tétel meghatározta a $C_0(X)$ szuprémum-normát megőrző lineáris bijekcióit. A norma mellett egy függvény természetes módon jellemezhető a képtere átmérőjével is. Az alábbi tételben karakterizáljuk $C_0(X)$ összes, *a képtér átmérőjét* *megőrző* lineáris bijekcióját, és ezzel egyesítjük és egységesítjük a [12] és a [17] publikációnk tartalmát.

3.1. Tétel. *Legyen X első megszámlálható lokálisan kompakt Hausdorff-tér, és jelölje X_0 az $X \cup \{\infty\}$ halmazt, ha X nem kompakt, illetve az X halmazt, ha X kompakt. Ekkor X_0, természetes módon ellátva topológiával, kompakt Hausdorff-tér.*

Ha X kompakt, akkor egy $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ lineáris bijekció pontosan akkor ármérő-tartó, ha létezik τ 1-abszolútértékű komplex szám, $\varphi : X \to X$ homeomorfizmus és $t : C_0(X) \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál úgy, hogy $t(1) \neq -\tau$ és ϕ a következő alakú:

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi + t(f)1 \qquad \big(f \in C_0(X)\big). \tag{3.1}$$

Ha X nem σ-kompakt, akkor egy $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ lineáris bijekció pontosan akkor átmérő-tartó, ha létezik τ 1-abszolútértékű komplex szám és $\varphi : X \to X$ homeomorfizmus úgy, hogy ϕ a következő alakú:

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi \qquad \big(f \in C_0(X)\big). \tag{3.2}$$

Ha X σ-kompakt de nem kompakt, akkor egy $\phi : C_0(X) \to C_0(X)$ lineáris bijekció pontosan akkor átmérő-tartó, ha létezik τ 1-abszolútértékű komplex szám és $\varphi : X_0 \to X_0$ homeomorfizmus úgy, hogy ϕ

$$\phi(f) = \tau \cdot f \circ \varphi - \tau f\big(\varphi(\infty)\big)1 \qquad \big(f \in C_0(X)\big), \tag{3.3}$$

alakú, ahol $f(\infty) = 0$ minden $f \in C_0(X)$ esetén.

A fentiekben *lineáris* megőrzési problémákkal foglalkoztunk, ám megőrzési problémák természetesen felvethetők *bármilyen linearitási feltétel nélkül* is, azaz vizsgálhatunk adott algebrai struktúrán értelmezett, bizonyos tulajdonságot, mennyiséget, relációt, stb. megőrző transzformációkat. Sok matematikai eredmény interpretálható e bővebb értelemben tekintett megőrzési problémaként. A metrikus terek izometriái például egyszerűen távolság-megőrző leképezéseknek tekinthetők. Wigner híres unitér-antiunitér tétele ugyancsak példa ilyen általános értelemben vett megőrzési problémára. E tételnek számos megfogalmazása ismert, amelyek közül az alábbi egy Hilbert-tér olyan leképezéseit írja le, amelyek megőrzik a vektorpárok belsőszorzatának az abszolútértékét.

4.1. Tétel. *Legyen H komplex Hilbert-tér és $T : H \to H$ egy tetszőleges függvény. Pontosan akkor teljesül minden $x, y \in H$ esetén*

$$|\langle Tx, Ty\rangle| = |\langle x, y\rangle|, \tag{4.1}$$

ha létezik egy $\varphi : H \to \mathbb{C}$ 1-abszolútértékű függvény és $U : H \to H$ lineáris vagy konjugált-lineáris izometria úgy, hogy

$$T = \varphi \cdot U. \tag{4.2}$$

A fenti tétel a kvantummechanika valószínűségi aspektusaira vonatkozó egyik legfontosabb eredmény, amelynek számos különböző bizonyítását publikálták. Mi a **4. Fejezetben** a tételt teljesen új megközelítéssel, elemi módon bizonyítjuk be a következőképpen. Vesszük a H Hilbert-tér egy ortonormált bázisát, s először megmutatjuk, hogy létezik a tétel feltételeinek eleget tevő φ és U úgy, hogy az összes *valós koordinátájú* vektor alkotta F halmaz elemeire (4.2) teljesül. Ehhez igazoljuk, hogy F egy tetszőleges, egy adott vektorra ortogonális elemeket nem tartalmazó G részhalmazára a T transzformáció (4.2) alakú G-től függő φ-vel és U-val. Tekintjük ugyanis $G \times G$ összes olyan részhalmazát, melynek elemeire (4.2) teljesül megfelelő (nem szükségképpen azonos) φ-vel és U-val, majd megmutatjuk, hogy e részhalmazok teljesítik a *Zorn-lemma* feltételeit. Így létezik egy fenti tulajdonságú maximális részhalmaz $G \times G$-ben, amelyről belátjuk, hogy a teljes $G \times G$. Ezután könnyű igazolnunk, hogy létezik megfelelő φ és U úgy, hogy T (4.2) alakú *a teljes Hilbert-téren.*

Wigner e tételét (legalább) három irányban általánosították. *Először* Uhlhorn [63] általánosította oly módon, hogy a belsőszorzat abszolútértéke helyett csak az *ortogonalitás* megőrzését követelte meg, s így jutott azonos következtetésre abban az esetben, amikor a tekintett tér legalább 3 dimenziós. Uhlhorn eredményének komoly hatása volt a fizika területén. *Másodszor*, Bargmann [3] és Sharma és Almeida [60] Wigneréhez hasonló eredményekre jutottak a *bijektivitás feltétele nélkül.* A *harmadik* irány ismertetéséhez megjegyezzük, hogy a Wigner-tétel egyik megfogalmazása szerint egy Hilbert-tér összes 1-dimenziós alterén értelmezett azon bijekciókat határozza meg, amelyek megőrzik az alterek által bezárt szöget. Molnár [45] e tekintetben terjesztette ki Wigner eredményét (adott n esetén) az összes *n-dimenziós altér* halmazán értelmezett, az alterek között az ún. principális szögeket megőrző transzformációkra. (Wigner tételének további általánosításai végett l. [38, 40, 41, 43]). Az **5. Fejezetben** kiterjesztjük Wigner tételét a fent említett *mindhárom irányban* oly módon, hogy egy Hilbert-tér összes n-dimenziós alterének halmazán értelmezett, az alterek közötti ortogonalitást megőrző transzformációkra nyerünk eredményeket különböző feltételek mellett. Nevezetesen, igazoljuk a következő tételt.

5.1. Tétel. *Legyen H Hilbert-tér és $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ úgy, hogy*

$$\begin{cases} \dim H > 2n & \text{ha } n \in \mathbb{N}, \\ \dim H = \infty & \text{ha } n = \infty. \end{cases} \tag{5.1}$$

Legyen továbbá $\phi : H_n \to H_n$, ahol H_n a H összes n-dimenziós zárt lineáris altér halmazát jelöli, amelyekről $n = \infty$ esetén feltesszük, hogy végtelen kodimenziósak.

*Ha $\phi : H_n \to H_n$ **szürjektív**, úgy ϕ pontosan akkor őrzi meg mindkét irányban az ortogonalitást, ha egyértelműen létezik egy, az ortogonalitást mindkét irányban megőrző $\psi : H_1 \to H_1$ bijekció, amelyre*

$$\phi(K) = \mathrm{span}\{\psi(X) | X \in H_1, X \subseteq K\} \tag{5.2}$$

minden $K \in H_n$ esetén, ahol span *a generált lineáris alteret jelöli.*

Ekkor Uhlhorn tétele szerint, ha $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olyan, hogy (5.1) teljesül és $\phi : H_n \to H_n$ szürjektív, úgy ϕ pontosan akkor őrzi meg mindkét irányban az ortogonalitást, ha létezik egy unitér vagy antiunitér U operátor H-n úgy, hogy minden $K \in H_n$ esetén

$$\phi(K) = U(K). \tag{5.3}$$

*Ha H **véges-dimenziós**, úgy ϕ pontosan akkor őrzi meg mindkét irányban az ortogonalitást (szürjektivitást nem teszünk fel), ha egyértelműen létezik egy, az ortogonalitást mindkét irányban megőrző $\psi : H_1 \to H_1$ transzformáció, amelyre (5.2) minden $K \in H_n$ esetén teljesül. Továbbá, ha ϕ megőrzi a principális szögeket, akkor ψ is megőrzi a szögeket, vagyis ez esetben ϕ (5.3)-alakú egy unitér vagy antiunitér U operátorral H-n.*

II. RÉSZ

Néhány reflexivitási probléma függvényalgebrákon

Értekezésünk **második részében** bizonyos függvényalgebrák automorfizmus- és izometria-csoportjának ***reflexivitásával*** kapcsolatos problémákat vizsgálunk. Egy H Hilbert-tér összes korlátos lineáris operátorának algebráját jelölje $B(H)$. Az operátoralgebrák elméletének egyik legaktívabban kutatott területe $B(H)$ reflexív lineáris altereinek vizsgálata (a reflexivitás e típusának szép, általános áttekintése végett l. [19]). Az elmúlt évtizedekben figyelemreméltó érdeklődést keltettek Hilbert-terek helyett Banach-algebrákon értelmezett transzformációk bizonyos fontos halmazaival kapcsolatos hasonló kérdések. Az ez irányú kutatások elindítása Kadison, Larson és Sourour nevéhez fűződik. Kadison [28] egy $\mathcal{R}$ Neumann-algebrát egy $\mathcal{M}$ duális $\mathcal{R}$-bimodulusba képező *lokális derivációkat* vizsgált. Lokális derivációnak nevezte azokat az $\mathcal{R}$-et $\mathcal{M}$-be képező folytonos lineáris leképezéseket, amelyek az $\mathcal{R}$ algebra minden egyes pontjában megegyeznek egy (az adott ponttól függő) derivációval. Vizsgálatait operátoralgebrák Hochschild-kohomológiájával kapcsolatos problémák motiválták. Kadison [28] cikkének fő eredménye (Theorem A) szerint a fenti esetben minden lokális deriváció deriváció. Tőle függetlenül Larson és Sourour [33] megmutatta, hogy bármely X Banach-tér esetén ugyanez $B(X)$ lokális derivációira is teljesül (a definíció értelemszerűen adódik). Azóta számos dolgozat foglalkozott különféle algebrák lokális derivációival (l. pl. [6, 9, 20, 27, 52, 57, 66, 67, 68, 69, 70]). A derivációk mellett feltétlenül figyelmet érdemel az operátoralgebrák transzformációinak még legalább két nagyon fontos osztálya, nevezetesen az automorfizmusok illetve a szürjektív izometriák csoportja. Larson [32, Some concluding remarks (5), 298. o.] indította el a Banach-algebrák *lokális automorfizmusainak* vizsgálatát (a definíció értelemszerű). Sourour-ral közösen [33] bebizonyították, hogy ha X végtelen-dimenziós Banach-tér, akkor $B(X)$ minden szürjektív lokális automorfizmusa automorfizmus (l. még [6]). Brešar és Šemrl [7] megmutatták, hogy egy végtelen-dimenziós szeparábilis H Hilbert-tér esetén a szürjektivitás feltétele elhagyható, azaz $B(H)$ minden lokális automorfizmusa automorfizmus. Automorfizmusokra vonatkozó további eredményekért l. [51, 57]. Ezen eredmények közös vonása, hogy a tekintett struktúrák lokális derivációiról, lokális automorfizmusairól, lokális izometriáiról, stb. megmutatják, hogy mind (globális) derivációk, automorfizmusok, izometriák, stb. A tekintett struktúrának ez nyilvánvalóan figyelemre méltó tulajdonsága . Függvényalgebrák esetében hasonló eredményeket nyert Sánchez és Molnár [56] és Molnár és Zalar [50].

Definiáljuk a *reflexivitás* fogalmát. Legyen X Banach-tér (a bennünket érdeklő esetekben általában Banach-algebra) és tetszőleges $\mathcal{E} \subset B(X)$ részhalmaz esetén legyen

$$\operatorname{ref}_{alg} \mathcal{E} = \{T \in B(X) : Tx \in \mathcal{E}x \text{ minden } x \in X \text{ esetén}\},$$
$$\operatorname{ref}_{top} \mathcal{E} = \{T \in B(X) : Tx \in \overline{\mathcal{E}x} \text{ minden } x \in X \text{ esetén}\},$$

ahol a felülvonás a norma szerinti lezártat jelöli. A fenti halmazokat rendre $\mathcal{E}$ *algebrai reflexív lezártjának*, illetve *topologikus reflexív lezártjának* nevezzük. Azt mondjuk, hogy transzformációk egy $\mathcal{E}$ összessége *algebrailag reflexív*, ha $\operatorname{ref}_{alg} \mathcal{E} = \mathcal{E}$, és *topologikusan reflexív*, ha $\operatorname{ref}_{top} \mathcal{E} = \mathcal{E}$.

E terminológiával élve [7] fő eredménye $B(H)$ automorfizmus-csoportjának, míg [33] a $B(X)$ összes általánosított derivációja Lie-algebrájának algebrai reflexivitását állítja. Az automorfizmus- és izometria-csoportok algebrai reflexivitására vonatkozó további eredményekért l. [42, 50, 56].

A topologikus reflexivitás nyilvánvalóan erősebb tulajdonság mint az algebrai reflexivitás. Shulman [61] megmutatta, hogy minden C^*-algebra derivációalgebrája topologikusan reflexív, így nem csak a lokális derivációik derivációk, hanem azok a lineáris leképezéseik is, amelyek minden egyes pontban derivációk (az adott ponttól függő) sorozatának határértékével egyenlők. Deriváció-algebrák, automorfizmus-csoportok és izometria-csoportok topologikus reflexivitása tekintetében l. [4, 26, 37, 39].

C^*-algebrák automorfizmus- és izometria-csoportjaira már nem teljesül Shulman [61] eredményéhez hasonló általános állítás. Egy $\mathcal{A}$ Banach-algebra automorfizmusainak (azaz multiplikatív lineáris bijekcióinak) csoportját $\operatorname{Aut}(\mathcal{A})$-val, $*$-automorfizmusainak csoportját $\operatorname{Aut}^*(\mathcal{A})$-val, míg szürjektív lineáris izometriáinak csoportját $\operatorname{Iso}(\mathcal{A})$-val jelöljük. Egy nem megszámlálható X diszkrét topologikus téren értelmezett, végtelenben eltűnő folytonos függvények $C_0(X)$ C^*-algebrájának automorfizmus- és izometria-csoportjairól könnyen belátható, hogy még algebrailag sem reflexívek. A topologikus reflexivitás tekintetében viszont még Neumann-algebrákat is találunk (l. például a szeparábilis Hilbert-téren értelmezett végtelen-dimenziós kommutatív Neumann-algebrákat [4]), amelyek automorfizmus- és izometria-csoportjai nem topologikusan reflexívek. Ám végtelen-dimenziós szeparábilis H Hilbert-tér esetén Molnár [37] igazolta $\operatorname{Aut}(B(H))$ és $\operatorname{Iso}(B(H))$ topologikus reflexivitását. Érdekes Molnár [42] eredménye, amelyben megmutatja, hogy a híres Brown-Douglas-Fillmore-elméletben megjelenő C^*-algebrák (amelyek H kompakt operátorai C^*-algebrájának kiterjesztései) automorfizmus- és izometria-csoportjai algebrailag reflexívek, ám a valószínűleg legfontosabb esetben, a $C(\mathbb{T})$-vel való kiterjesztések (azaz az ún. Toeplitz-kiterjesztések) esetén *nem* topologikusan reflexívek.

Értekezésünk **6. Fejezetében** $B(H)$ szuszpenziója automorfizmus- és izometria-csoportjainak reflexivitását vizsgáljuk. Egy C^*-algebra szuszpenziójának fogalma nagyon fontos szerepet játszik az operátoralgebrák K-elméletében. Egy $\mathcal{A}$ C^*-algebra szuszpenziója a $C_0(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$ C^*-tenzor szorzat, amely jól ismerten izomorf $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{A})$-val, az $\mathbb{R}$-et $\mathcal{A}$-ba képező, végtelenben eltűnő összes folytonos függvény algebrájával. Tudjuk, hogy $B(H)$ automorfizmus- és izometria-csoportja topologikusan reflexív [37]. A 6. Fejezetben megmutatjuk, hogy $\mathrm{Aut}(C_0(\mathbb{R}))$ és $\mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R}))$ algebrailag (de nem topologikusan) reflexív. A fejezet számos eredményének alábbi következménye a fejezet fő eredményének tekinthető.

6.5. Következmény. *A $B(H)$ szuszpenziójának automorfizmus-csoportja és izometria-csoportja algebrailag reflexív.*

E fejezet tartalmát a [48] cikkünkben publikáltuk, melynek lektora azt a kérdést vetette fel, hogy vajon leírható-e $\mathrm{Aut}(C_0(\mathbb{R}) \otimes B(H))$ és $\mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R}) \otimes B(H))$ topologikus reflexív lezártja. A **7. Fejezetben** e kérdést kívánjuk megválaszolni, s többek között a következő eredményt nyerjük.

7.2. Következmény. *Legyen $\phi : C_0(\mathbb{R}, B(H)) \to C_0(\mathbb{R}, B(H))$ lineáris leképezés. Pontosan akkor teljesül $\phi \in \mathrm{ref}_{top} \mathrm{Iso}(C_0(\mathbb{R}, B(H)))$ illetve $\phi \in \mathrm{ref}_{top} \mathrm{Aut}^*(C_0(\mathbb{R}, B(H)))$, ha létezik $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ szürjektív, monoton, folytonos függvény és $\tau : U \to \mathrm{Iso}(B(H))$ illetve $\tau : U \to \mathrm{Aut}^*(B(H))$ úgy, hogy ϕ*

$$\phi(f)(y) = \begin{cases} \tau(y)\big(f\big(\varphi(y)\big)\big) & \text{ha } y \in U, \\ 0 & \text{ha } y \in \mathbb{R} \setminus U \end{cases} \tag{7.1}$$

alakú minden $f \in C_0(\mathbb{R}, B(H))$ esetén.

Továbbá, ha ϕ (7.1) alakú, akkor τ erősen folytonos.

A lokális derivációk, lokális automorfizmusok, stb. fogalmában feltettük, hogy a tekintett transzformációk lineárisak és minden egyes pontban megegyeznek az algebra valamely derivációjával, automorfizmusával, stb. Könnyen látható, hogy a linearitás feltételét elhagyva (a feltételek gyengesége miatt) annyira általános fogalmat kapunk, hogy az gyakorlatilag használhatatlan. Kowalski és Slodkowski kommutatív Banach-algebrák karaktereinek nem-lineáris karakterizációjára nyert eredménye [31] által motiválva, Šemrl [59] bevezette a ***2-lokalitás*** fogalmát. Egy Banach-algebra (nem szügségképpen lineáris) ϕ transzformációját 2-lokális automorfizmusnak nevezzük, ha a tekintett Banach-algebra minden x, y pontpárja esetén létezik olyan $\phi_{x,y}$ (x-től és y-tól függő) automorfizmus, amelyre $\phi(x) = \phi_{x,y}(x)$ és $\phi(y) = \phi_{x,y}(y)$. A 2-lokális derivációk, 2-lokális izometriák, stb. hasonlóan definiálhatók. Šemrl [59] igazolta, hogy egy végtelendimenziós, szeparábilis H Hilbert-tér esetén $B(H)$ minden 2-lokális automorfizmusa automorfizmus és minden 2-lokális derivációja deriváció.

Mivel semminemű linearitást nem teszünk fel, ezért a 2-lokalitás fogalma bármely algebrai struktúrával kapcsolatban értelmezhető. Egy algebrai struktúrának nyilvánvalóan fontos tulajdonsága, ha 2-lokális automorfizmusai, 2-lokális (szürjektív lineáris) izometriái, stb. (globális) automorfizmusok, izometriák, stb. Ez azt jelenti, hogy az automorfizmusokat, izometriákat, stb. meghatározza a kételemű halmazokon való lokális viselkedésük. Néhány friss publikáció 2-lokális derivációkról, 2-lokális automorfizmusokról és 2-lokális izometriákról például [2, 22, 30, 44, 46, 47, 49].

Molnár [46] igazolta, hogy $B(H)$ minden, az identikus operátort és a kompakt operátorokat tartalmazó C^*-részalgebrájának 2-lokális (szürjektív lineáris) izometriái (szürjektív lineáris) izometriák, s ehhez hasonló kérdéseket vetett fel függvényalgebrák esetén. A **8. Fejezetben** az alábbi tétel igazolásával ilyen eredményt nyerünk a függvényalgebrák egyik legfontosabb típusára, nevezetesen $C_0(X)$-re.

8.2. Tétel. *Ha X első megszámlálható σ-kompakt Hausdorff-tér, akkor $C_0(X)$ minden 2-lokális izometriája (szürjektív lineáris) izometria.*

A 8. Fejezet tartalma megjelent a [13] dolgozatunkban.

Bibliography

[1] J. Araujo, E. Beckenstein, and L. Narici, *Biseparating maps and homeomorphic realcompactifications*, J. Math. Anal. Appl. **192** (1995), 258–265.

[2] M. Barczy and M. Tóth, *Local automorphisms of the sets of states and effects on a Hilbert space*, Rep. Math. Phys. **48** (2001), 289–298.

[3] V. Bargmann, *Note on Wigner's theorem on symmetry operations*, J. Math. Phys. **5** (1964), 862–868.

[4] C.J.K. Batty and L. Molnár, *On topological reflexivity of the groups of *-automorphisms and surjective isometries of $B(H)$*, Arch. Math. **67** (1996), 415–421.

[5] L.B. Beasley, *Linear operators on matrices: the invariance of rank-k matrices*, Linear Algebra Appl. **107** (1988), 161–167.

[6] M. Brešar and P. Šemrl, *Mappings which preserve idempotents, local automorphisms, and local derivations*, Canad. J. Math. **45** (1993), 483–496.

[7] ———, *On local automorphisms and mappings that preserve idempotents*, Studia Math. **113** (1995), 101–108.

[8] ———, *Linear preservers on $B(X)$*, Banach Cent. Publ. **38** (1997), 49–58.

[9] R.L. Crist, *Local derivations on operator algebras*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 76–92.

[10] J.J. Font and S. Hernandez, *On separating maps between locally compact spaces*, Arch. Math. **63** (1994), 158–165.

[11] G. Frobenius, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1897), 994–1015.

[12] M. Győry, *Diameter preserving bijections of $C_0(X)$*, Publ. Math. Debrecen **54** (1999), 207–215.

[13] ______, *2-local isometries of $C_0(X)$*, Acta Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 735–746.

[14] ______, *On the transformations of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality*, preprint (2001).

[15] ______, *A new elementary proof for Wigner's theorem*, preprint (2002).

[16] ______, *On the reflexivity of the isometry groups of the suspension of $B(H)$*, preprint (2002).

[17] M. Győry and L. Molnár, *Diameter preserving bijections of $C(X)$*, Arch. Math. (Basel) **71** (1998), 301–310.

[18] M. Győry, L. Molnár, and P. Šemrl, *Linear rank and corank preserving maps on $B(H)$ and an application to *-semigroup isomorphisms of operator ideals*, Linear Alg. Appl. **280** (1998), 253–266.

[19] D. Hadwin, *A general view of reflexivity*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 325–360.

[20] D. Han and S. Wei, *Local derivations of nest algebras*, Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), 3095–3100.

[21] S. Hernandez, E. Beckenstein, and L. Narici, *Banach-Stone theorems and separating maps*, Manuscripta Math. **86** (1995), 409–416.

[22] C. Hou and S. Hou, *Local automorphisms of nest algebras*, Indian J. Pure Appl. Math. **32** (2001), 1667–1678.

[23] J. Hou, *Rank-preserving linear maps on $B(X)$*, Sci. China Ser. A **32** (1989), 929–940.

[24] A.A. Jafarian and A.R. Sourour, *Spectrum-preserving linear maps*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 255–261.

[25] J.S. Jeang and N.C. Wong, *Weighted composition operators of $C_0(X)$'s*, J. Math. Anal. Appl. **201** (1996), 981–996.

[26] W. Jing, S. Lu, and G. Han, *On topological reflexivity of the spaces of derivations on operator algebras*, Appl. Math., Ser. B **17** (2002), 75–79.

[27] B.E. Johnson, *Local derivations on C^*-algebras are derivations*, Trans. Am. Math. Soc. **353** (2001), 313–325.

[28] R.V. Kadison, *Local derivations*, J. Algebra **130** (1990), 494–509.

[29] I. Kaplansky, *Algebraic and analytical aspects of operator algebras*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 1, Amer. Math. Soc., Providence (1970).

[30] S.O. Kim and J.S. Kim, *Local automorphisms and derivations on M_n*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[31] S. Kowalski and Z. Slodkowski, *A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras*, Studia Math. **67** (1980), 215–223.

[32] D.R. Larson, *Reflexivity, algebraic reflexivity and linear interpolation*, Amer. J. Math. **110** (1988), 283–299.

[33] D.R. Larson and A.R. Sourour, *Local derivations and local automorphisms of $B(X)$*, Proc. Sympos. Pure Math. **51** (1990), 187–194.

[34] C.K. Li and S. Pierce, *Linear preserver problems*, Amer. Math. Monthly **108** (2001), 591–605.

[35] C.K. Li and N.K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques*, Linear Algebra Appl. **162-164** (1992), 217–235.

[36] R. Loewy, *Linear mappings which are rank-k non-increasing*, Linear and Multilinear Algebra **34** (1993), 21–32.

[37] L. Molnár, *The set of automorphisms of $B(H)$ is topologically reflexive in $B(B(H))$*, Studia Math. **122** (1997), 183–193.

[38] ———, *An algebraic approach to Wigner's unitary-antiunitary theorem*, J. Austral Math. Soc. **65** (1998), 354–369.

[39] ———, *A proper standard C^*-algebra whose automorphism and isometry groups are topologically reflexive*, Publ. Math. (Debrecen) **52** (1998), 563–574.

[40] ———, *A generalization of Wigner's unitary-antiunitary theorem to Hilbert modules*, J. Math. Phys. **40** (1999), 5544–5554.

[41] ———, *Generalization of Wigner's unitary-antiunitary theorem for indefinite inner product spaces*, Commun. Math. Phys. **201** (2000), 785–791.

[42] ———, *Reflexivity of the automorphism and isometry groups of C^*-algebras in BDF theory*, Arch. Math. **74** (2000), 120–128.

[43] ———, *A Wigner type theorem on symmetry transformations in type II factors*, Int. J. Theor. Phys. **39** (2000), 1463–1466.

[44] ———, *Local automorphisms of some quantum mechanical strucutres*, Lett. Math. Phys. **58** (2001), 91–100.

[45] ———, *Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving principal angles*, Commun. Math. Phys. **217** (2001), 437–450.

[46] ———, *2-local isometries of some operator algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. **45** (2002), 349–352.

[47] ———, *Local automorphisms of operator algebras on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1867–1874.

[48] L. Molnár and M. Győry, *Reflexivity of the automorphism and isometry groups of the suspension of $B(H)$*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 568–586.

[49] L. Molnár and P. Šemrl, *Local automorphisms of the unitary group and the general linear group on a Hilbert space*, Expo. Math. **18** (2000), 231–238.

[50] L. Molnár and B. Zalar, *Reflexivity of the group of surjective isometries of some Banach spaces*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **42** (1999), 17–36.

[51] ———, *On local automorphisms of group algebras of compact groups*, Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), 93–99.

[52] A. Nowicki, *On local derivations in the Kadison sense*, Colloq. Math. **89** (2001), 193–198.

[53] M. Omladič, *On operators preseving commutativity*, J. Func. Anal. **66** (1986), 105–122.

[54] M. Omladič, H. Radjavi, and P. Šemrl, *Preserving commutativity*, J. Pure Appl. Algebra **156** (2001), 309–328.

[55] M. Omladič and P. Šemrl, *Additive mappings preserving operators of rank one*, Linear Algebra Appl. **182** (1993), 239–256.

[56] F. Cabello Sánchez and L. Molnár, *Reflexivity of the isometry group of some calssical spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **18** (2002), 409–430.

[57] E. Scholz and W. Timmermann, *Local derivations, automorphisms and commutativity preserving maps on $L^+(D)$*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29** (1993), 977–995.

[58] P. Šemrl, *Linear maps that preserve the nilpotent operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **61** (1995), 523–534.

[59] ———, *Local automorphisms and derivations on $B(H)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2677–2680.

[60] C.S. Sharma and D.L. Almeida, *A direct proof of Wigner's theorem on maps which preserve transition probabilities between pure states of quantum systems*, Ann. Phys. **197** (1990), 300–309.

[61] V.S. Shulman, *Operators preserving ideals in C^*-algebras*, Studia Math. **109** (1994), 67–72.

[62] A.R. Sourour, *Invertibility preserving linear maps on $L(X)$*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 13–30.

[63] U. Uhlhorn, *Representation of symmetry transformations in quantum mechanics*, Ark. Fysik **23** (1963), 307–340.

[64] R. Wang, *Linear isometric operators on the $C_0^{(n)}(X)$ type spaces*, Kodai Math. J. **19** (1996), 259–281.

[65] N. Weaver, *Isometries of noncompact Lipschitz spaces*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), 242–249.

[66] M. Wiehl, *Local derivations on the Weyl algebra with one pair of generators*, Acta Math. Hung. **92** (2001), 51–59.

[67] J. Wu, *Local derivations of reflexive algebras*, Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), 869–873.

[68] ______, *Local derivations of reflexive algebras II*, Proc. Am. Math. Soc. **129** (2001), 1733–1737.

[69] Y.H. Yon, *Local derivations of the polynomial ring over a field*, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 247–257.

[70] J. Zhu, *Local derivations of nest algebras*, Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), 739–742.

List of Publications Treated in the Thesis

1. M. Győry and L. Molnár, Diameter preserving bijections of $C(X)$,

   Arch. Math. **71** (1998), 301–310.

2. M. Győry, L. Molnár and P. Šemrl, Linear rank and corank preserving maps on $B(H)$ and an application to *-semigroup isomorphisms of operator ideals,

   Linear Alg. Appl. **280** (1998), 253–266.

3. L. Molnár and M. Győry, Reflexivity of the automorphism and isometry groups of the suspension of $B(H)$,

   J. Funct. Anal. **159** (1998), 568-586.

4. M. Győry, Diameter preserving bijections of $C_0(X)$,

   Publ. Math. Debrecen **54** (1999), 207–215.

5. M. Győry, 2-local isometries of $C_0(X)$,

   Acta. Sci. Math. (Szeged) **67** (2001), 735–746.

6. M. Győry, A new elementary proof for Wigner's theorem, in preparation.

7. M. Győry, On the transformations of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality, in preparation.

8. M. Győry, On the reflexivity of the isometry groups of the suspension of $B(H)$, in preparation.

List of Independent Citations

1. M. Győry and L. Molnár, Diameter preserving bijections of $C(X)$, *Arch. Math.* **71** (1998), 301–310.

   ► (1) F. González and V.V. Uspenskij, *On homomorphisms of groups of integer-valued functions*, Extracta Math. **14** (1999), 19–29.

   ► (2) F. Cabello Sánchez, *Diameter preserving linear maps and isometries*, Arch. Math. **73** (1999), 373–379.

   ► (3) F. Cabello Sánchez, *Diameter preserving linear maps and isometries II*, Proc. Indian Acad. Sci. **110** (2000), 205–211.

   ► (4) A. Cabello Sánchez and F. Cabello Sánchez, *Maximal norms on Banach spaces of continous functions*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **129** (2000), 325–330.

   ► (5) T.S.S.R.K. Rao and A.K. Roy, *Diameter preserving linear bijections of functions spaces*, J. Austral. Math. Soc. **70** (2001), 323–335.

   ► (6) B.A. Barnes and A.K. Roy, *Diameter preserving maps on various classes of functions spaces*, Studia Math. **153** (2002), 127–145.

   ► (7) J.J. Font and M. Sanchis, *A characterization of locally compact spaces with homeomorphic one-point compactifications*, Topology Appl., **121** (2002), 91–104.

   ► (8) J.J. Font and M. Sanchis, *Extreme points and the diameter norm*, Rocky Mountain J. Math. (to appear)

   ► (9) A.I. Istratescu and V.I. Istratescu, *Diameter preserving bijections on* Lip_X^a *or* $\mathrm{lip}_X^{a;0}$, (preprint)

   ► (10) A. I. Istratescu and V. I. Istratescu, *Triangle area preserving maps: I*, (preprint)

2. M. Győry, L. Molnár and P. Šemrl, Linear rank and corank preserving maps on $B(H)$ and an application to *-semigroup isomorphisms of operator ideals, *Linear Alg. Appl.* **280** (1998), 253–266.

   ► (11) M. Radjabalipour, *Additive mappings on von Neumann algebras preserving absolute values*, Linear Algebra Appl. (to appear)

3. L. Molnár and M. Győry, Reflexivity of the automorphism and isometry groups of the suspension of $B(H)$, *J. Funct. Anal.* **159** (1998), 568-586.

► (12) M. Barczy and M. Tóth, *Local automorphisms of the sets of states and effects on a Hilbert space*, Rep. Math. Phys. **48** (2001), 289–298.

► (13) F. Cabello Sánchez, *The group of automorphisms of L_∞ is algebraically reflexive*, (preprint)

► (14) K. Jarosz and T.S.S.R.K. Rao, *Local isometries of function spaces*, Math. Z. **243** (2003), 449–469.

List of Citations by Co-authors

1. M. Győry and L. Molnár, Diameter preserving bijections of $C(X)$, *Arch. Math.* **71** (1998), 301–310.

   ► (1) M. Barczy and L. Molnár, *Linear maps on the space of all bounded observables preserving maximal deviation*, J. Funct. Anal. (to appear)

2. M. Győry, L. Molnár and P. Šemrl, Linear rank and corank preserving maps on $B(H)$ and an application to *-semigroup isomorphisms of operator ideals, *Linear Alg. Appl.* **280** (1998), 253–266.

   ► (2) L. Molnár, *Order isomorphisms and triple isomorphisms of operator ideals and their reflexivity,* Arch. Math. **69** (1997), 497–506.

   ► (3) L. Molnár, *Some linear preserver problems on $B(H)$ concerning rank and corank*, Linear Algebra Appl. **286** (1999), 311-321.

   ► (4) L. Molnár, *Some multiplicative preservers on $B(H)$,* Linear Algebra Appl. **301** (1999), 1–13.

3. L. Molnár and M. Győry, Reflexivity of the automorphism and isometry groups of the suspension of $B(H)$, *J. Funct. Anal.* **159** (1998), 568-586.

   ► (5) L. Molnár, *Multiplicative maps on ideals of operators which are local automorphisms*, Acta Sci. Math. (Szeged) **65** (1999), 727–736.

   ► (6) L. Molnár and P. Šemrl, *Local automorphisms of the unitary group and the general linear group on a Hilbert space*, Expo. Math. **18** (2000), 231–238.

   ► (7) L. Molnár, *Reflexivity of the automorphism and isometry groups of C^*-algebras in BDF theory*, Arch. Math. **74** (2000), 120–128.

   ► (8) L. Molnár and B. Zalar, *On local automorphism of group algebras of compact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 93–99.

   ► (9) L. Molnár, *Local automorphisms of some quantum mechanical structures*, Lett. Math. Phys. **58** (2001), 91–100.

► (10) L. Molnár, *A reflexivity problem concerning the C^*-algebra $C(X) \otimes B(H)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 531–537.

► (11) F. Cabello Sánchez and L. Molnár, *Reflexivity of the isometry group of some classical spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **18** (2002), 409–430.

► (12) L. Molnár, *2-local isometries of some operator algebras*, Proc. Edinb. Math. Soc. **45** (2002), 349–352.

List of Talks at International Conferences

1. Diameter preserving linear bijections of $C(X)$,

   17th International Conference on Operator Theory,

   Temesvár (Romania), 1998

2. Diameter preserving linear bijections of $C_0(X)$,

   Numbers, Functions, Equations '98 International Conference,

   Noszvaj (Hungary), 1998

3. Reflexivity of the automorphism and isometry groups of some operator algebras,

   2nd Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control,

   Nemecka (Slovakia), 1999

4. On the 2-local isometries of $C_0(X)$,

   38th International Symposium on Functional Equations,

   Noszvaj (Hungary), 2000

5. Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality,

   3rd Workshop on Functional Analysis and its Applications in Mathematical Physics and Optimal Control,

   Nemecka (Slovakia), 2001

6. Transformations on the set of all n-dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality,

   8th International Conference on Functional Equations and Inequalities,

   Złockie (Poland), 2001