Varga Zsolt Ferenc
Bíró János

Geodéziai példatár

Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Építőmérnöki Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
ÉPÍTŐMÉRNÖKI TANSZÉK

Varga Zsolt Ferenc–Bíró János

GEODÉZIAI PÉLDATÁR

DU press

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2018

Lektorok:

Dr. Czédli Herta

Főiskolai docens

Debreceni Egyetem Műszaki Kar Építőipari Intézet, Építőmérnöki Tanszék

Dr. Major János

Főiskolai tanár

Debreceni Egyetem Műszaki Kar Építőipari Intézet, Építőmérnöki Tanszék

ISBN 978 963 318 673 2

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2018-ban.
www.dupress.hu

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés

A számítások áttekinthetőségéről

Számításainkat minden esetben úgy kell végeznünk, hogy az bárki számára áttekinthető, gondolatmenete követhető és érthető legyen. Ennek érdekében tartsuk be a következő szabályokat:

- Minden esetben írjuk fel a kiinduló adatokat matematikai, fizikai vagy geodéziai jelöléseikkel együtt, a keresett mennyiség jelölését, valamint a képletet, amelynek alapján számolni fogunk.
- A számítás megkezdése előtt a megoldóképletbe be kell helyettesíteni az ismert mennyiségeket, mégpedig azok dimenzióival együtt. Ezt akkor is tanácsos megtenni, ha különben a számítást majd géppel végezzük. Nem haszontalan a műveleteket a papíron a mennyiségek dimenzióival is elvégezni. Ezzel nemkívánatos baklövéseknek vehetjük elejét: az eredmény rossz dimenziója rávezethet bennünket valamely elkövetett hibánkra.
- Igyekezzünk a számítás során a mennyiségeket úgy elrendezni a papírlapon, hogy az egyben tükrözze a számítás logikai menetét is. Így például a számítás minden újabb fázisát kezdjük új sorban, és az egyes fázisokat egy-egy sor kihagyásával különítsük el egymástól.
- Ha a számítás egyes fázisainak részletezését kihagyjuk, ez azzal jár, hogy a munka későbbi ellenőrzését vagy egy esetleg elkövetett hiba megkeresését akár magunk, akár mások számára megnehezítjük.
- A sokjegyű számok áttekinthetőbbek, olvashatóbbak lesznek az által, ha egy-egy számjegynyi térköz kihagyásával tagoljuk őket. Ezért a számokat hátulról számított hármas számcsoportokra kell osztani, és a csoportok között egy számjegynyi helyet ki kell hagyni. Tizedestörtek esetében a tagolást a tizedesvesszőtől jobbra és balra kiindulva kell végezni.

  123 456   987 654,321 012
- A számítás során nyert és később még felhasználásra kerülő mennyiségeket – a segédmennyiségeket – a hivatkozás megkönnyítésére célszerű elnevezéssel, alkalmasint betűjellel ellátni.
- Az esetleges segédszámításokat a papírlap szélén célszerű feltüntetni, mert így azzal a számítás gondolatmenetét nem bontjuk meg.
- Ne felejtsük el, hogy számológépeinken a kijelzett számjegyek mennyisége szabályozható, és a szükségesnél több számjegyet vagy tizedest a kijelzőről lemásolni felesleges. Ugyanakkor azt se tévesszük szem elől, hogy a gép a fedve tárolt számokkal is dolgozik. Így aztán némileg eltérő eredményt kaphatunk akkor, ha a kijelzőről szükségképpen kerekítve kiírt majd újra bebillentyűzött

részeredményekkel dolgozunk tovább, vagy ha a részeredményeket a gépben tároljuk az újabb felhasználásig.

- A részeredmények is, de főleg a végeredmények jól szembeötlenek a papíron, ha aláhúzzuk vagy bekeretezzük őket.
- Számolás közben is ajánlatos, a végén azonban egyenesen kötelező a részeredmény illetve a végeredmény szemrevételezése abból a célból, hogy megállapítsuk: nem követtünk-é el valamilyen szarvashibát a számolás közben; hihető-e, hogy a kiinduló adatokból ilyen eredményre jussunk.

Az élesség és a pontosság

Az élesség a mérés vagy a számítás során leolvasott, illetve kihasznált számjegyek számával összefüggő fogalom, míg a pontosság a mérés megbízhatóságával vagy a számítási elhanyagolások mértékével függ össze.

Tegyük fel például, hogy egy távolságot kétszer oda-vissza megmértünk és mérőeszközünkről a hosszakat egyik oda-vissza méréskor milliméterre, másik alkalommal pedig centiméterre olvastuk le. Eredményeink:

16,356 m   16,36 m

16,310 m   16,34 m

Ebben az esetben az első oda-vissza méréskor a leolvasások nagyobb élességgel történtek, míg a második mérés – az oda- és a vissza-mérés eredményeinek kisebb különbsége alapján már szemre is megállapíthatóan – nagyobb pontosságú. Példánkat a szemléletesség kedvéért vettük fel így; megjegyezzük azonban, hogy általánosságban nagyobb pontosságú méréssel vagy számítással nagyobb élesség, kisebb pontossággal kisebb élesség szokott együtt járni. Fontos megjegyeznünk, hogy a kiírt számjegyek száma a mérés, illetve a számítás élességére is utal, ezért ha az utolsó helyen nulla áll, akkor azt is ki kell írni. Például

16,310 m   és   16,31 m

nem ugyanakkora hosszat jelöl. Ha az utóbbi hosszat is milliméter élességgel mértük volna meg, kimutathattuk volna róla, hogy az 16,306 m vagy éppen 16,314 m, illetve e két érték között hová esik. Miután azonban a mérést csak centiméter élességgel végeztük, ezért a millimétereket kerekítettük vagy éppen le sem olvastuk.

Ugyanez vonatkozik természetesen a számítási élességre is: ha egy számadatot például hét tizedes élességgel kell megadnunk, úgy akkor is ki kell írni a tizedesvessző utáni hetedik számjegyet, ha az történetesen nulla.

1. Műveletek szögekkel

1.1 Formátum

A geodéziai számítások során gyakran dolgozunk szögekkel. Az egyszerűbb írásmód kedvéért a fok (^{0}), perc (’), másodperc (’’) szimbólumokat el szoktuk hagyni, az értékeket kötőjelekkel kapcsoljuk össze.

$$142°56'54'' = 142 - 56 - 54$$

A percek és másodpercek helyén mindig két-két számjegynek kell állnia - a tizedesek helyiértékén a nulla kiírása kötelező.

$142 - 6 - 9$	$142 - 06 - 09$
Helytelen!	*Helyes!*

1.2 Szögek összeadása

Ha szögek összeadás közben a tagok összege a számrendszer alapszámának értékét meghaladja, az azon felüli mennyiséget átvitelként kell kezelni. A Magyarországon használatos hatvanas (sexagezimális) szög vegyes rendszerű mérték: a hatos és a tízes számrendszert párhuzamosan tartalmazza. A hatvanas rendszerben végzett műveletek során fokozottan kell figyelnünk az átvitelekre, mert a tizedmásodperceknél és az egyesek helyértékén tízes számrendszerben, a tízesek helyiértékén pedig a másodpercek és percek esetében hatos, a fokok esetében tízes rendszerben dolgozunk.

$$\begin{array}{r} 95 - 49 - 43 \\ +\ 34 - 55 - 38 \\ \hline 129 - 104 - 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 95 - 49 - 43 \\ +\ 34 - 55 - 38 \\ \hline 130 - 45 - 21 \end{array}$$

Helytelen! *Helyes!*

A fokok esetében további figyelmet érdemel, hogy a geodéziai számításokban a 360°-nál nagyobb szöget nem értelmezzük, ezért tehát – ha az összeadás során ilyen eredmény adódnék – a teljesszöget vagy a több teljesszöget elhagyva legtöbb esetben csak az összeg fennmaradó részét szabad leírni.

$$\begin{array}{r} 295 - 49 - 43 \\ +\ 134 - 55 - 38 \\ \hline 429 - 104 - 81 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 295 - 49 - 43 \\ +\ 134 - 55 - 38 \\ \hline 70 - 45 - 21 \end{array}$$

Helytelen! *Helyes!*

1.3 Szögek kivonása

Kivonáskor, ha a kisebbítendő valamelyik helyiértékén kisebb alaki értékű szám áll, mint a kivonandó ugyanazon helyiértékén, akkor áthozatot kell alkalmaznunk. Itt ismét csak vigyázni kell arra, hogy a különböző helyiértékeken felváltva tízes és hatos rendszerbeli számok állnak, az áthozat tehát egyszer tíz, másszor pedig hat. Ha tehát például a másodpercek tizedeseinek oszlopában 1 - 4 = ? műveletet kell elvégeznünk, a percek oszlopából áthozott 1 percet 6 tízmásodpercként kezelve hozzáadjuk a kisebbítendőhöz, s így 7 - 4 = 3 formában végezzük el a kivonást. Egyidejűleg persze a kisebbítendő perceit 1-gyel csökkentjük, vagy a kivonandó perceit eggyel növeljük.

  193 - 12 - 17
- 111 - 21 - 29
   81 - 50 – 48

1.4 Szögek középértékének számítása

Gyakran szükséges két, néha több, egymástól kis mértékben, általában csak másodperceiben különböző szögérték középértékének kiszámítása, röviden közepelése. A közepelés eredményét általában ugyanolyan élességgel – annyi jegyre – kell megadni, ahogyan a kiinduló adatok adottak voltak, ezért szükséges lehet az eredmény – a középérték – kerekítése.

Megállapodás szerint a kerekítést

a) ha a kerekítendő szám 1, 2, 3, 4 akkor lefelé;

b) ha a kerekítendő szám 6, 7, 8, 9 akkor felfelé;

c) ha a kerekítendő szám 5, akkor a páros szám felé

kell elvégezni.

154 - 55 - 17 ↘
154 - 55- 14
154 - 55 - 11 ↗

179 - 54 - 39 ↘
78 - 17 - 30
179 - 54 - 22 ↗

Előfordul, hogy a közepelésbe a percek, esetleg még a fokok is bevonandók:

6 - 20 - 58 ↘
6 - 21 - 01
6 - 21 - 04 ↗

135 - 59 - 54 ↘
136 - 00 - 00
136 - 00 – 06 ↗

A közepelést különféle számolási technikákkal végezhetjük. Ezek közül legkevésbé ajánlatos módszer a két szög összeadása, majd kettővel történő osztása. Ennél valamivel jobb eljárás csupán a szögek egymástól különböző részeivel – csak a másodpercekkel, esetleg a percekkel és másodpercekkel – elvégezni ugyanezt.

Általában legkönnyebben úgy végezhető a számítás, ha képezzük a két szögérték különbségét, majd ennek a felét a kisebbik szögértékhez hozzáadjuk. Némi gyakorlással az is elérhető, hogy a közepelendő mennyiségeket a számegyenesre képzeljük, s az egymáshoz közel eső két számhely felezőpontját, a középértéket mintegy megjelenítve látjuk. A tapasztalat azt mutatja, hogy akik a szögekkel végzendő számításokhoz zsebszámológépet használnak, azok semmivel sem követnek el kevesebb hibát, mint akik fejben számolnak. Ilyen jellegű feladataink gyakoriságára tekintettel jobb tehát ezeknek a számításoknak a technikáját elsajátítani, és mellőzni a gép használatát.

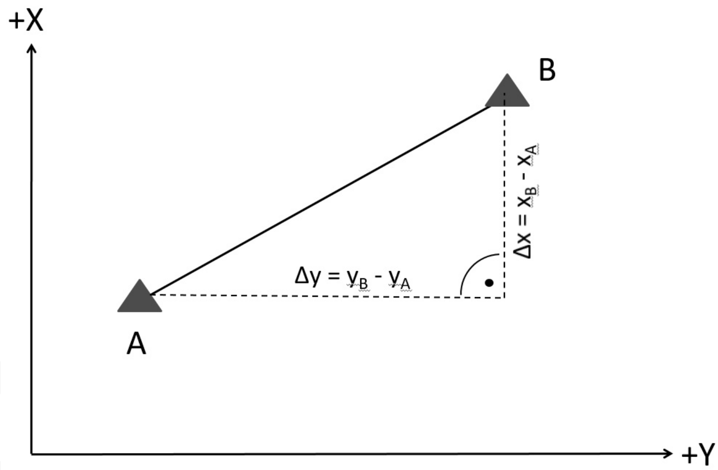
Gyakorló feladatok:

Végezze el az alábbi műveleteket:

a) $148°46'26'' + 11°36'14''$
b) $301°51'52'' + 145°01'59''$
c) $139°11'01'' - 29°54'09''$
d) $301°54'55'' - 211°36'39''$

2. Koordináta különbségek számítása

Számítsuk ki két ismert koordinátájú pont ΔY és ΔX koordinátakülönbségeit!



1. ábra. Koordináta különbségek számítása

Mintafeladat A és B pontokra:

Y_A= 846 516,31 } Álláspont

X_A= 219 227,21

Y_B= 846 741,22 } Tájékozási pont

X_B= 219 401,36

$$\Delta Y = Y_B - Y_A \qquad \text{és} \qquad \Delta X = X_B - X_A$$

$\Delta Y = 846\,741{,}22 - 846\,516{,}31 = 224{,}91$

$\Delta X = 219\,401{,}36 - 219\,227{,}21 = 174{,}15$

Gyakorló feladatok:

Számítsa ki az alábbi pontpárok koordináta különbségeit:

a) Álláspont: 101
Tájékozási pont: 102

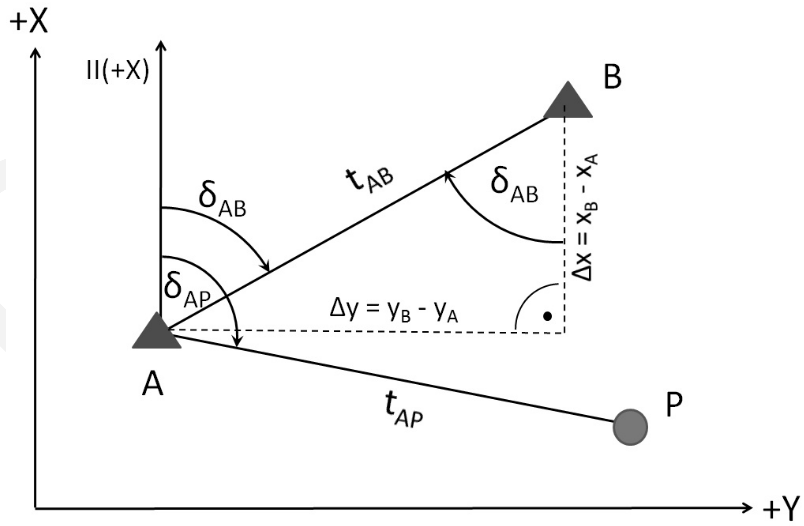
Psz	Y	X
101	846521,33	246589,98
102	846949,41	246916,10

b) Álláspont: 69-4411
Tájékozási pont: 69-4212

Psz	Y	X
69-4212	843354,84	216944,78
69-4411	843598,26	216898,99

3. Pont koordinátáinak számítása irányszög és távolság segítségével (első geodéziai alapfeladat)

A geodézia első alapfeladata a polárispont számítás. A számítás során egy ismert koordinátájú pont (az ábrán ez az „A" pont), egy irányszög (δ_{AP}) és egy távolság (t_{AP}) felhasználásával számítjuk az ismeretlen P pont koordinátáit.



2. ábra. Poláris pont számítás

Adottak: A (Y;X), δ_{AP} , t_{AP}

Számítandók: P (Y;X)

A számítás végrehajtása négy lépésben:

1. δ_{AP} , fok, perc, másodperc értékének átváltása fokká.

2. $y_P = y_A + \Delta y_{AP}$, ahol $\Delta y_{AP} = t_{AP} \times \sin \delta_{AP}$

3. $x_P = x_A + \Delta x_{AP}$, ahol $\Delta x_{AP} = t_{AP} \times \cos \delta_{AP}$

4. Az előbbiek alapján az y_B és az x_B értéke az következő:,

$y_P = y_A + t_{AP} \times \sin \delta_{AP}$, valamint $x_P = x_A + t_{AP} \times \cos \delta_{AP}$

Mintafeladat A1 és B1 pontokra:

Adott: Y_{A1}= 845189.882 m, X_{A1}=246918.748 m

δ_{A1B1}=291-36-52, t_{A1B1}=200.597 m

Számítandó: Y_{B1} ; X_{B1}

1. $291^{\circ} - 36^{'} - 52^{''} = 291.6144444^{\circ}$

2. $\Delta y_{AP} = 200.597 \times \sin 291.6144444$=-186.4917514

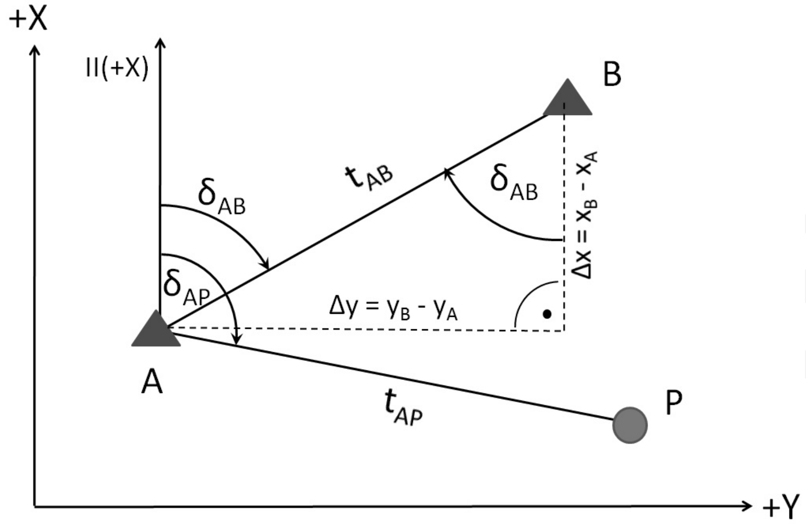
3. $\Delta x_{AP} = 200.597 \times \cos 291.6144444$=+73.89169825
4. $Y_P = 845189.882 - 186.4917514 = 845003.3902 \approx 845003.39$
5. $X_P = 246918.748 + 73.89169825 = 246992.6397 \approx 246992.64$

Gyakorló feladatok az B1 pont megoldásával.

Y_A=845189.88; X_A=246918.75				
Pont jele	Y_B	X_B	δ_{AB}	t_{AB}
B1	845003.39	246992.64	***291-36-51***	***200.60***
B2	845038.88	247080.69		
B3	845110.47	247135.76		
B4	845237.12	247152.28		
B5	845380.30	246860.42		
B6	845328.90	246697.05		
B7	844994.82	246854.91		
B8	845009.51	246731.93		
B9	845172.88	246730.09		
B10	845350.93	246944.86		
B11	845382.13	247104.55		
B12	845136.16	247330.33		
B13	845519.80	246741.11		
B14	845044.38	246605.27		
B15	845354.60	247231.21		
B16	844851.65	247078.85		
B17	845499.61	246990.75		
B18	844831.46	246913.65		
B19	844958.11	247236.72		
B20	845545.50	246882.45		

4. Irányszög és távolság számítás, koordináták alapján (második geodéziai alapfeladat)

A ***második geodéziai alapfeladat*** az első fordítottja, azaz két ismert koordinátájú pont (A és B pontok) koordinátáinak koordinátakülönbségei (Δx és Δy) alapján számítjuk az egyik pontról a másikra menő irányszöget (δ_{AB} – a két pontot összekötő irány irányszöge), valamint a két pont távolságát (t_{AB}).



3. ábra. Irányszög és távolság számítása

Adottak: A (Y;X), B (Y;X)

Számítandók: δ_{AB} ,t_{AB}

A számítás végrehajtása hat lépésben:

1. A két pont távolságának számítása koordináták alapján:

$$t_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

2. A két pont koordináta különbségének számítása:

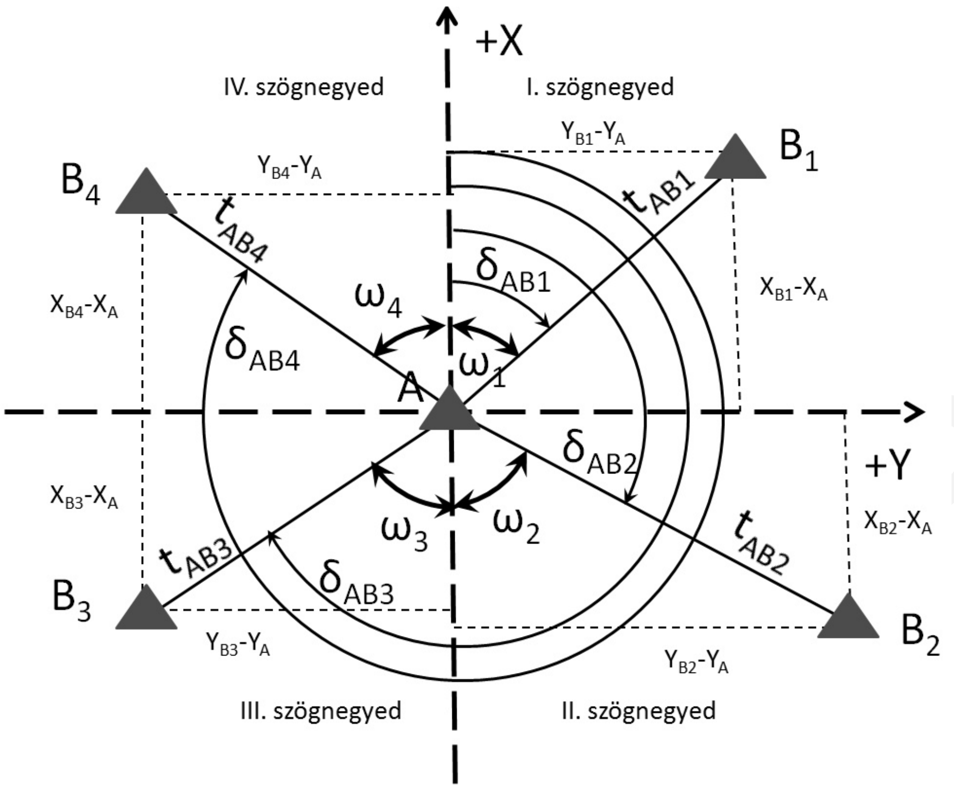
$$\Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A \quad ; \quad \Delta X_{AB} = X_B - X_A$$

3. Ebből $tg\omega_{AB}$:

$$tg\omega_{AB} = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}$$

4. Majd ω_{AB} számítása: $\omega_{AB} = arctg\,\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

5. A koordináta különbségek előjele alapján a szögnegyedek meghatározása (lásd 1. táblázat).



4. ábra. Irányszögek értelmezése a különböző szögnegyedekben

Szögnegyedek	(y_B-y_A)	(x_B-x_A)	δ
I.	+	+	ω
II.	+	-	180°-ω
III.	-	-	180°+ω
IV.	-	+	360°-ω

1. táblázat koordináta különbségek előjelei a szögnegyedekben

6. A szögnegyed meghatározása után δ_{AB} számítása:

Ha az ω értéke az első negyedben van, akkor: $\delta_{AB} = \omega_{AB}$
Ha az ω értéke a második negyedben van, akkor: $\delta_{AB} = 180^{\circ} - \omega_{AB}$
Ha az ω értéke a harmadik negyedben van, akkor: $\delta_{AB} = 180^{\circ} + \omega_{AB}$
Ha az ω értéke a negyedik negyedben van, akkor: $\delta_{AB} = 360^{\circ} - \omega_{AB}$

Mintafeladat A1 és B1 pontokra.

Adott: Y_{A1}= 834552.670 m, X_{A1}=261674.220 m

Y_{B1}= 834271.103 m, X_{B1}=261823.255 m

Számítandó: δ_{AB} ,t_{AB}

1. $t_{AB} = \sqrt{(834271.103 - 834552.670)^2 + (261823.255 - 261674.220)^2}$

   $t_{AB} = 318.58\, m$

2. $\Delta Y_{AB} = 834271.103 - 834552.670 = -281.567$

   $\Delta X_{AB} = 261823.255 - 261674.220 = +149.035$

3. $tg\omega_{AB} = \frac{(-281.567)}{(+149.035)} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} = -1.889267622$

4. $\omega_{AB} = arctg(-1.889267622) = -62.10747872$

5. A koordináta különbségek előjele alapján: ΔY= negatív, ΔX=pozitív, az ω értéke a IV. szögnegyedbe esik.

6. Ezért, $\delta_{AB} = 360^{\circ} - 62.10747872 = 297.8925213^{\circ} = 297^{\circ}53'33''$

Gyakorló feladatok az B1 pont megoldásával.

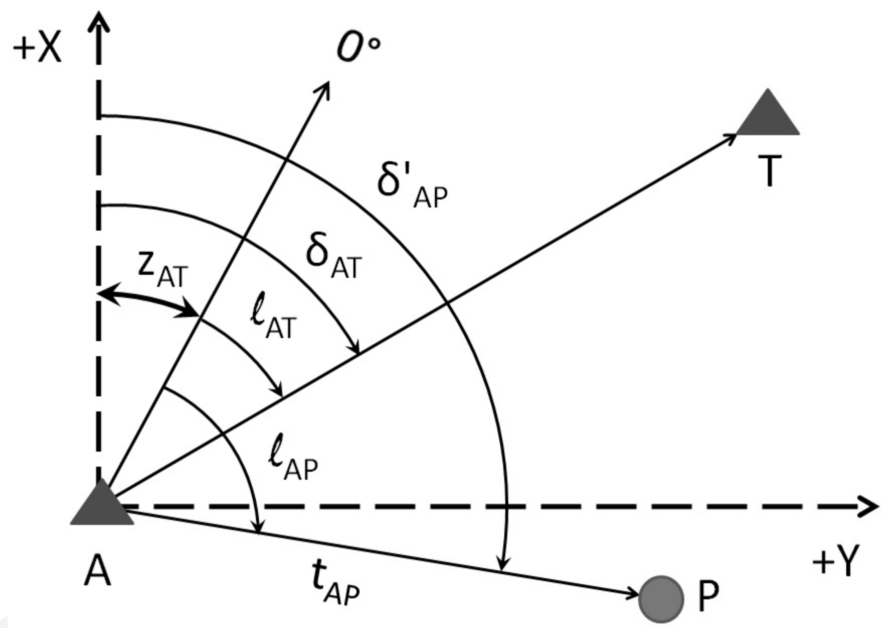
Pont jele	Y	X	δ_{AB}	t_{AB}
A1	834552.670	261674.220	-	-
B1	834271.103	261823.255	***297-53-33***	***318,58***
B2	834461.860	261900.888		
B3	834690.324	261832.127		
B4	834711.396	261712.350		
B5	834771.285	261461.704		
B6	834634.872	261394.052		
B7	834495.131	261395.161		
B8	834350.955	261420.669		
B9	834264.449	261534.901		
B10	834223.414	261680.187		

Pont jele	Y	X	δ_{AB}	t_{AB}
A2	835092.240	261378.070	–	–
B11	834930.988	261555.973		
B12	835057.420	261661.333		
B13	835221.560	261654.679		
B14	835330.247	261604.772		
B15	835405.663	261507.175		
B16	835418.971	261358.562		
B17	835377.936	261256.530		
B18	835132.836	261201.077		
B19	834947.624	261214.386		
B20	834904.371	261364.108		

5. Tájékozási szög számítása

A tájékozás során az álláspónton (A) kívül szükség van egy másik ismert koordinátájú pontra, mellyel az előbbi a terepen összelátszik (tájékozó irány „T”), s így iránymérést tudunk rá végezni. Az „A” pontról iránymérést hajtunk végre a „T” és „P” pontokra és mérjük a l_{AT} és l_{AP} irányértékeket. Ezt követően a számított irányszögből (δ_{AT}) levonjuk a hozzátartozó, mért irányértéket (l_{AT}) és megkapjuk a (z_{AT}) tájékozási szöget (a tájékozási szög bal szára mindig az északi irány, jobb szára pedig a vízszintes kör osztásvonala). A tájékozási szöggel megjavítjuk az ismeretlen pontra menő irányértéket és számítjuk a „P” pontra mutató irányszöget, ($l_{AP}+ z_{AT} = \delta'_{AP}$). Az irányszöggel és a mért távolság (t_{AP}) felhasználásával számítjuk ki a „P” pont koordinátáit (első geodéziai alapfeladat).

5.1. Tájékozás számítása egy tájékozó irány esetén



5. ábra. A tájékozási szög értelmezése

Adott:
koordináták: A (Y;X), T (Y;X)
mért irányszögek: l_{AP}; l_{AT}
Számítandók: δ_{AT} ,z_{AB}, δ'_{AT}

A számítás végrehajtása két lépésben:

1. Az álláspontról (A) a tájékozó pontra (T) menő irányszög számítása.
$\omega_{AT} = arctg\frac{y_T - y_A}{x_T - x_A}$, majd a szögnegyed meghatározása és végül az irányszög (δ_{AT}) számítása (második geodéziai alapfeladat!).

2. Tájékozási szög számítása: $z_{AT} = \delta_{AT} - l_{AT}$

Mintafeladat A1 és T1 pontokra.

1. $tg\omega_{A1T1} = \frac{(-11027.307)}{(+14772.955)} = \frac{\Delta y_{A1T1}}{\Delta x_{A1T1}} = -0.746452351$

$$\omega_{A1T1} = arctg(-0.746452351) = -36.73958617$$

$$\delta_{A1T1} = 360^\circ - 36.73958617 = 323.2604138^\circ = 323^\circ 15' 37''$$

2. $z_{A1T1} = 323.2604138^\circ - 125.2783333^\circ = 197.9820805^\circ = 197^\circ 58' 55''$

Gyakorló feladatok a T1 pont megoldásával.

A1	845298.410	247050.300	-	-	-
Pont sz.	**Y**	**X**	**l_{AT}**	**δ_{AT}**	**z_{AT}**
T1	834271.103	261823.255	125-16-42	***323-15-37***	***197-58-55***
T2	834461.860	261900.888	323-23-56		
T3	834690.324	261832.127	256-45-25		
T4	834711.396	261712.350	244-00-23		
T5	834771.285	261461.704	023-02-59		
T6	834634.872	261394.052	311-11-42		
T7	834495.131	261395.161	000-56-55		
T8	834350.955	261420.669	359-23-59		
T9	834264.449	261534.901	096-52-23		
T10	834223.414	261680.187	189-44-23		

5.2. Tájékozás számítása több tájékozó irány esetén

Abban az esetben, ha több tájékozó irány mérünk, úgy a tájékozási szögek számítása során ellentmondásokhoz juthatunk. Ezek az ellentmondások a mérési és műszer hibákból és az alappontok kerethibáiból (a kiegyenlített hálózat sem teljesen mentes a hibáktól) származnak. Ahhoz, hogy a további számításaink során egy tájékozási szöget tudjunk használni, ki kell számítanunk a középtájékozási szöget. A számításnak két módja van. Az első esetben számítjuk szögek számtani középértékét, átlagát. A másik esetben súlyozott középtájékozási szöget számítunk, ahol a súlyok a tájékozó irányok hosszai, kilométer egységben kifejezve.

Adott:

koordináták: A (Y;X), T_1 (Y;X), T_2 (Y;X), T_3 (Y;X)………………………… T_n (Y;X)

mért irányszögek: l_{AT1} ; l_{AT2}, l_{AT3} …………………..l_{ATn}

Számítandók: δ_{AT1},δ_{AT2} , δ_{AT3} ,…………………….. δ_{ATn},

z_{AT1}, z_{AT2}, z_{AT3},………………………z_{ATn},

t_{AT1}, t_{AT2}, t_{AT3},…………………………t_{ATn},

középtájékozási szög: z_K

Középtájékozási szög számítása.

1. A tájékozó irányokra vonatkozó irányszögek (δ_{AT1} ,δ_{AT2} , δ_{AT3} ,…………δ_{ATn},) számítása, a második alapfeladat alapján.
2. Az álláspont (A) és a tájékozó irányok közötti távolságok (t_{AT1}, t_{AT2}, t_{AT3}…………t_{ATn}) számítása.
3. A tájékozási szögek számítása: $z_{AT1} = \delta_{AT1} - l_{AT1}$; $z_{AT2} = \delta_{AT2} - l_{AT2}$; $z_{AT3} = \delta_{AT3} - l_{AT3}$; ………………………$z_{ATn} = \delta_{ATn} - l_{ATn}$
4. Középtájékozási szög számítása átlaggal:

$$z_K = \frac{z_{AT1} + z_{AT2} + z_{AT3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ z_{ATn}}{n}$$

5. Középtájékozási szög számítása súlyozással:

$$z_K = \frac{z_{AT1} \times p_1 + z_{AT2} \times p_2 + z_{AT3} \times p_3\ \ldots\ldots\ldots\ldots + z_{ATn} \times p_n}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots\ldots\ldots + p_n}$$

A „p” értékek tehát az egyes tájékozó irányok hosszai, kilométer egységben, tized kilométer élesen. A tájékozási szögek behelyettesítésekor csak a másodperc értékeket írjuk a képletbe, ha a szög és perc értéke mindegyik tájékozási szögnél ugyanaz. Ha valamelyik értéknél a perc változik, úgy ott a nagyobb perc értékhez tartozó másodpercet 60-nal növeljük. Így a felesleges számítások elkerülhetők.

Mintafeladat A1 és T1,T2,T3 pontokra.

$$z_{K(átlag)} = \frac{52 + 68 + 74}{0.9} = 64.66666667 = 000^{\circ}01'05''$$

$$z_{K(átlag)} = (030 - 45 - 00) + (000 - 01 - 05) = \mathbf{030 - 46 - 05}$$

$$z_{K(s)} = \frac{(52 \times 0.2) + (68 \times 0.2) + (74 \times 0.5)}{0.9} = 67.7777' = 000^{\circ}01'08''$$

$$z_{K(súlyozott)} = (030 - 45 - 00) + (000 - 01 - 08) = \mathbf{030 - 46 - 08}$$

A1	845194.26	246989.20				
Pont sz.	**Y**	**X**	**l_{AT}**	**δ_{AT}**	**z_{AT}**	**t_{AT}**
T1	845043.17	246889.90	205-55-18	***236-41-10***	***030-45-52***	***180.80***
T2	845062.13	247074.14	271-57-58	***302-44-06***	***030-46-08***	***157.08***
T3	845698.85	247200.61	036-29-50	***067-16-04***	***030-46-14***	***547.09***
átlag alapján számított z_K=					***030-46-05***	-
súlyozással számított $z_{K(S)}$=					***030-46-08***	-

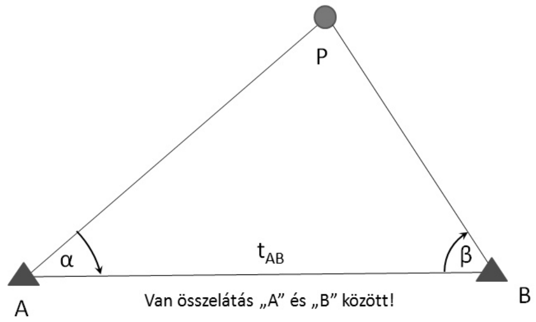
Gyakorló feladatok. Számítsa ki a középtájékozási szögeket!

A2	874889.69	253945.05				
Pont sz.	**Y**	**X**	**l_{AT}**	**δ_{AT}**	**z_{AT}**	**t_{AT}**
T4	874127.30	255098.39	084-11-37			
T5	875955.07	253114.24	245-35-55			
T6	873208.53	253026.28	359-00-20			
átlag alapján számított z_K=						-
súlyozással számított $z_{K(S)}$=						-

A3	871751.64	254341.94				
Pont sz.	**Y**	**X**	**l_{AT}**	**δ_{AT}**	**z_{AT}**	**t_{AT}**
T7	871612.95	257161.89	271-15-09			
T8	872299.54	255943.86	292-56-40			
T9	872460.81	253876.63	037-19-48			
átlag alapján számított z_K=						-
súlyozással számított $z_{K(S)}$=						-

6. Előmetszés

Mint azt a trigonometriából tudjuk, egy háromszöget egyértelműen meghatároz annak, egy oldala és a rajta fekvő két szöge. Tehát ha ismerjük az adott oldal két végpontjának koordinátáit (a koordinátákból számítani tudjuk az A és B pontok távolságát) és mérjük a két ponton a háromszög belsőszögeit, úgy a harmadik pont koordinátája számítható.

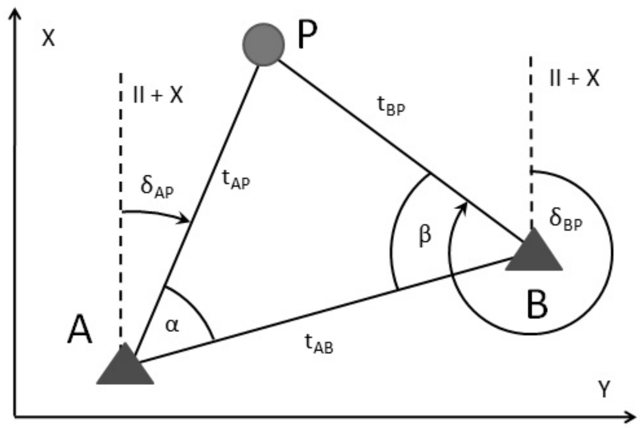


6. ábra. Az előmetszés elve

Mivel a feladat során a háromszög belsőszögeit határozzuk meg, ezért ezt a megoldást ***belsőszöges előmetszésnek*** nevezzük. A számítás során a mért szögeket úgy kell kiegyenlíteni (a hibákat „megszüntetni”), hogy a belsőszögek összege 180º legyen, ezt úgy érjük el, hogy az eltérés harmadával megjavítjuk a belsőszögeket.

6.1 A belsőszöges előmetszés számítása

Adott: α ; β ; A(y;x) ; B(y;x)
Számítandó: t_{AB} ;t_{AP};t_{BP}; δ_{AP} ; δ_{BP} ; x_P ; y_P



7. ábra. A belsőszöges előmetszés számítása

1. $t_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$

2. Sinus-tétel alkalmazásával számítjuk a t_{AP};t_{BP} távolságokat.

$$t_{AP} = t_{AB} \times \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$t_{BP} = t_{AB} \times \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

3. A δ_{AP} ;δ_{BP} irányszögek számítása a tájékozásból

$$\delta_{AP} = \delta_{AB} + \alpha$$

$$\delta_{BP} = \delta_{BA} - \beta$$

4. Az y_P és x_P koordináták számítása poláris pontként (első geodéziai alapfeladat) az A pontból:

$$y_P = y_A + t_{AP} \times \sin\delta_{AP}$$
$$x_P = x_A + t_{AP} \times \cos\delta_{AP}$$

5. Ellenőrzés: y_P és x_P koordináták számítása poláris pontként (első geodéziai alapfeladat) a B pontból:

$$y_P = y_B + t_{BP} \times \sin\delta_{BP}$$

$$x_P = x_B + t_{BP} \times \cos\delta_{BP}$$

Mintafeladat:

Számítsa ki belsőszöges előmetszéssel a P pont koordinátáit!

1. $t_{AB} = \sqrt{(172.05 - 180.48)^2 + (93.40 - 101.87)^2} = 11.95$ m
2. $t_{AP} = t_{AB} \times \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 11.95 \times \frac{\sin 51.20305556}{\sin(45.085+51.20305556)} = 9.37$ m
3. $t_{BP} = t_{AB} \times \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 11.95 \times \frac{\sin(45.085)}{\sin(45.085+51.20305556)} = 8.51$ m
4. Második geodéziai alapfeladat segítségével számítjuk aδ_{AB} ; δ_{BA}irányszögeket.

   $\delta_{AB} = 224 - 51 - 03 = 224.8508333^\circ$

   $\delta_{BA} = 044 - 51 - 03 = 44.85083333^\circ$

5. $\delta_{AP} = \delta_{AB} + \alpha = 224.8508333^\circ + 45.085^\circ = 269 - 56 - 09$
6. $\delta_{BP} = \delta_{BA} - \beta = (44.85083333^\circ - 51.20305556^\circ) + 360^\circ = 353 - 38 - 52$

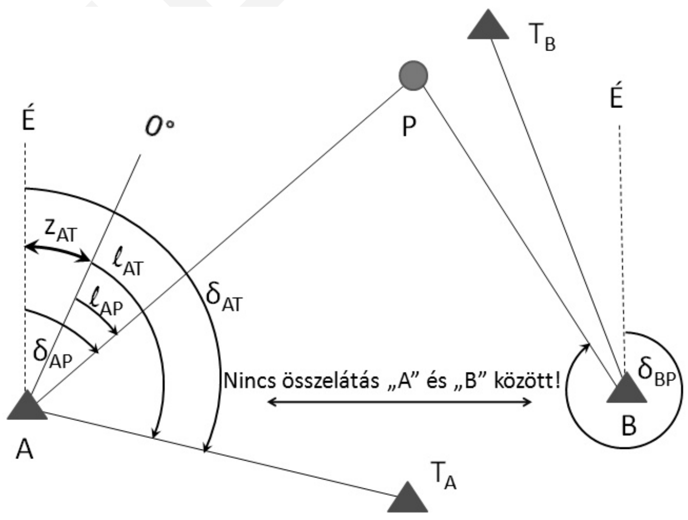
7. $y_P = y_A + t_{AP} \times \sin \delta_{AP} = 180.48 + 9.37 \times \sin 269.9358333^{\circ} = 171.11$

8. $x_P = x_A + t_{AP} \times \cos \delta_{AP} = 101.87 + 9.37 \times \cos 269.9358333^{\circ} = 101.86$

Számítsa ki az Y_P és X_P koordináták értékeit!

Y_A= 180,48; **X_A**= 101,87						
	Y_B	**X_B**	**α**	**β**	**Y_P**	**X_P**
1	172,05	93,40	45-05-06	51-12-11	***171.11***	***101.86***
2	117,88	97,86	31,05-06	68-18-20		
3	108,94	102,32	66-11-59	35-18-19		
4	117,31	107,41	55,00-12	11-42-43		
5	226,56	151,62	41-05-59	48-49-00		
6	280,42	66,11	36-26-26	63-63-19		
7	192,62	163,19	44-59-01	11-18-18		
8	168,59	172,65	09-19-20	78-48-12		
9	111,15	96,10	26-42-52	61-18-29		
10	326,56	108,11	71-11-11	81-20-31		

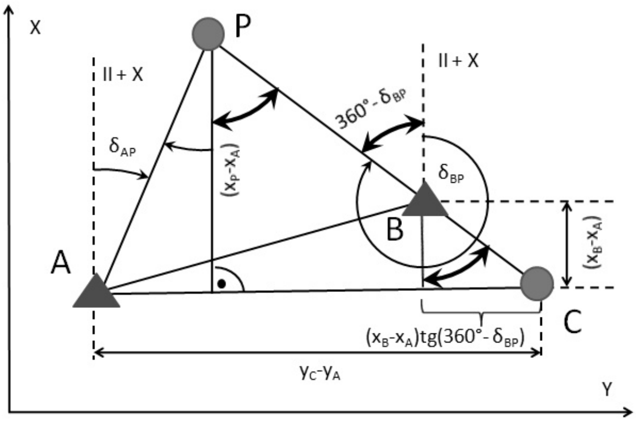
A másik megoldás esetén a két adott pont, különböző terepakadályok (növényzet, épületek) miatt nem látszik össze, ezért az ***irányszöges előmetszés*** során a két ismert pont koordinátáin kívül szükség van mindkét ponthoz „tartozó" legalább egy-egy (T_A és T_B), a pontról irányozható tájékozó irányra (tehát még két ismert koordinátájú pontra).



8. ábra. Irányszöges előmetszés elve

(Megjegyzés: a tájékozó irányokra azért van szükség, mert ezek alapján tudjuk mindkét ponton számítani a z_{AT} és z_{BT}tájékozási szögeket – z_{BT}az ábrán nincs jelölve – vagyis a méréseinket beforgatni az alkalmazott koordinátarendszer +X irányába, vagyis északi irányba tájolni.) A tájékozás után számítani tudjuk az ismeretlen pontra menő irányszögeket (δ_{AP} és δ_{BP}) amelyek felhasználásával pedig az ismeretlen pont (P) koordinátáit. A megfelelő pontosságú mérések érdekében a tájékozó irányoknak mindig hosszabbaknak kell lenniük a meghatározó irányoktól.

6.2 Előmetszés tájékozott irányértékekkel (Irányszöges előmetszés)



9. ábra. Irányszöges előmetszés számítása

Adott: δ_{AP} ; δ_{BP} ; A(y;x) ; B(y;x)
Számítandó: x_P ;y_P

1. Az A és B pontokon mért iránysorozat tájékozása, azaz aδ_{AP} és a δ_{BP} számítása.

2. Az ábra alapján felírható az alábbi összefüggés a C pontra.

$y_C = y_B + (x_B - x_A) \times \tan(360^{\circ} - \delta_{BP})$de mivel,

$\tan 360^{\circ} - \delta_{BP} = -\tan \delta_{BP}$

$y_C = y_B + (x_A - x_B) \times \tan \delta_{BP}$, az APC háromszögben felírható:

$y_C - y_A = (x_P - x_A) \times \tan \delta_{AP} + (x_P - x_A) \times \tan(360^{\circ} - \delta_{BP})$

$y_C - y_A = (x_P - x_A) \times (\tan \delta_{AP} - \delta_{BP})$

3. Behelyettesítve y_C értékét, közös nevezőre hozva és rendezve az egyenletet:

$$x_P = \frac{(\tan \delta_{AP} \times x_A - y_A) - (\tan \delta_{BP} \times x_B - y_B)}{\tan \delta_{AP} - \tan \delta_{BP}}$$

$$y_p = x_P \times \tan \delta_{BP} - (\tan \delta_{BP} \times x_B - y_B)$$

Mintafeladat:

Számítsa ki irányszöges előmetszéssel a P_1 pont koordinátáit!

$$x_P = \frac{(\tan 313.4913889^\circ \times 77.517 - 167.065) - (\tan 270.6680556 \times 251.446 - 655.496)}{\tan 313.4913889^\circ - \tan 270.6680556^\circ}$$

$$x_P = 259.3765026 \approx 259.377 \text{ m}$$

$$y_p = 259.3765026 \times \tan 270.6680556 - (\tan 270.6680556 \times 251.446 - 655.496)$$

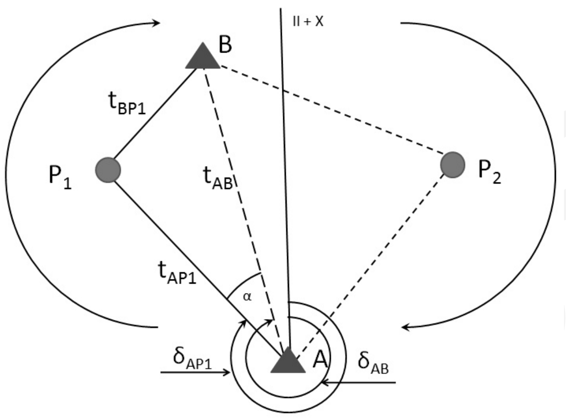
$$y_P = -24.63262 \approx -24.633 \text{ m}$$

Számítsa ki az Y_P és X_P koordináták értékeit!

Y_A= 167,065; **X_A**= 77,517; **Y_B**= 655,496; **X_B**=251,446				
P	**δ_{AP}**	**δ_{BP}**	**Y_P**	**X_P**
1	313-29-29	270-40-05	***-24.633***	***259.377***
2	331-24-13	280-22-58		
3	343-37-40	287-25-55		
4	355-15-57	294-50-16		
5	004-28-45	301-20-23		
6	013-03-35	307-43-09		
7	024-23-45	316-45-51		
8	032-56-26	325-48-56		
9	040-02-45	335-21-55		
10	051-17-19	356-45-02		

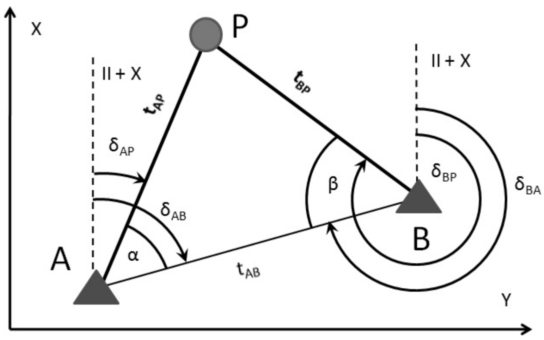
7. Ívmetszés

Az ívmetszés során csak távolságokat (t_{AP}, t_{BP}) mérünk, melyhez két ismert koordinátájú (A, B) pontra van szükségünk. Az egyértelmű meghatározáshoz egy további adatra van szükségünk, ez pedig nem más, mint a körüljárási irány. A geodéziában a szögeket az óramutató járásával azonos irányban értelmezzük, tehát ez a pozitív körüljárási irány. Abban az esetben, ha az $A(P_1)B$ a számítás sorrendje, úgy a P_1 pontot számítjuk, ha $B(P_2)A$ a sorrend, úgy a P_2 pont koordinátáit számítjuk. A számítás során olyan háromszöget oldunk meg melyben minden oldal ismert (a két ismert pont (A, B) közötti távolságot a pontok koordinátái alapján számítjuk). Először számítjuk az AB oldal mellet lévő valamelyik belsőszöget, majd ennél a pontnál lévő irányszöget. Az adott pont koordinátáinak felhasználásával, valamint az irányszög és a távolság ismertében számítható poláris pontszámítással (első geodéziai alapfeladat) az ismeretlen pont koordinátája. A számítást mind az A, mind a B pontból el tudjuk végezni, ezért a megoldás ellenőrzésére is van lehetőség.



10. ábra. Az ívmetszés elve

Az ívmetszés számítása:



11. ábra. Az ívmetszés számítása

Adott: t_{AP} ; t_{BP} ; A(y;x) ; B(y;x)

Számítandó: t_{AB} ;$δ_{AB}$; $δ_{AP}$; x_P ; y_P

1. t_{AB} és δ_{AB} számítása a második geodéziai alapfeladat alapján.

2. $\alpha = arc\cos\frac{t_{AB}^2+t_{AP}^2-t_{BP}^2}{2\times t_{AB}\times t_{AP}}$

3. $\delta_{AP} = \delta_{AB} - \alpha$ (Ha az A ponton állunk és nézünk a B felé, a P pont jobbra lesz) + 360° ha a szög negatív.

4. $\delta_{AP} = \delta_{AB} + \alpha$ (Ha az A ponton állunk és nézünk a B felé, a P pont balra lesz)

5. Y_P és X_P számítása az első geodéziai alapfeladat alapján

$$y_P = y_A + t_{AP} \times \sin\delta_{AP}$$

$$x_P = x_A + t_{AP} \times \cos\delta_{AP}$$

Mintafeladat:
Számítsa ki ívmetszéssel a P_1 pont koordinátáit „A-ról B-re” körüljárási irányban!

1. t_{AB} és δ_{AB} számítása a második geodéziai alapfeladat alapján.

   t_{AB}=59.803 m, δ_{AB}=74.27888889°=074-16-44

2. $\alpha = arc\cos\frac{59.803^2+30.619^2-88.903^2}{2\times 59.803\times 30.619} = arc\cos(-0.925620262)$

   α=157.7620718°=157-45-44

3. $\delta_{AP} = \delta_{AB} - \alpha = 74.27888889° - 157.7620718° = -83.48318291°$

   $\delta_{AP} - 83.48318291° + 360° = 276.5168171° = 276 - 31 - 01$

4. $y_P = 837755.103 + 30.619 \times \sin 276.5168171° = 837724.682$

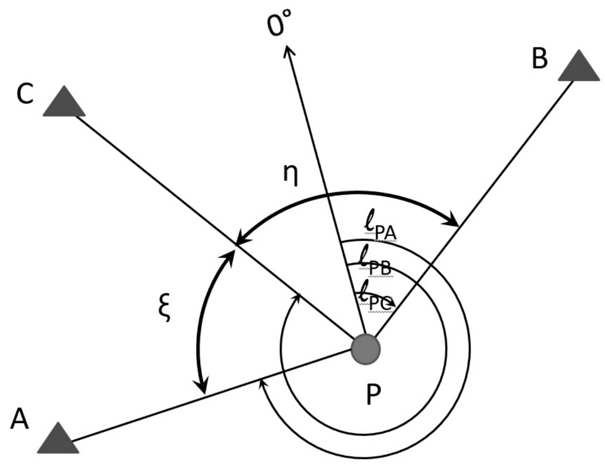
   $x_P = 259054.216 + 30.619 \times \cos 276.5168171° = 259057.691$

Számítsa ki az Y_P és X_P koordináták értékeit!

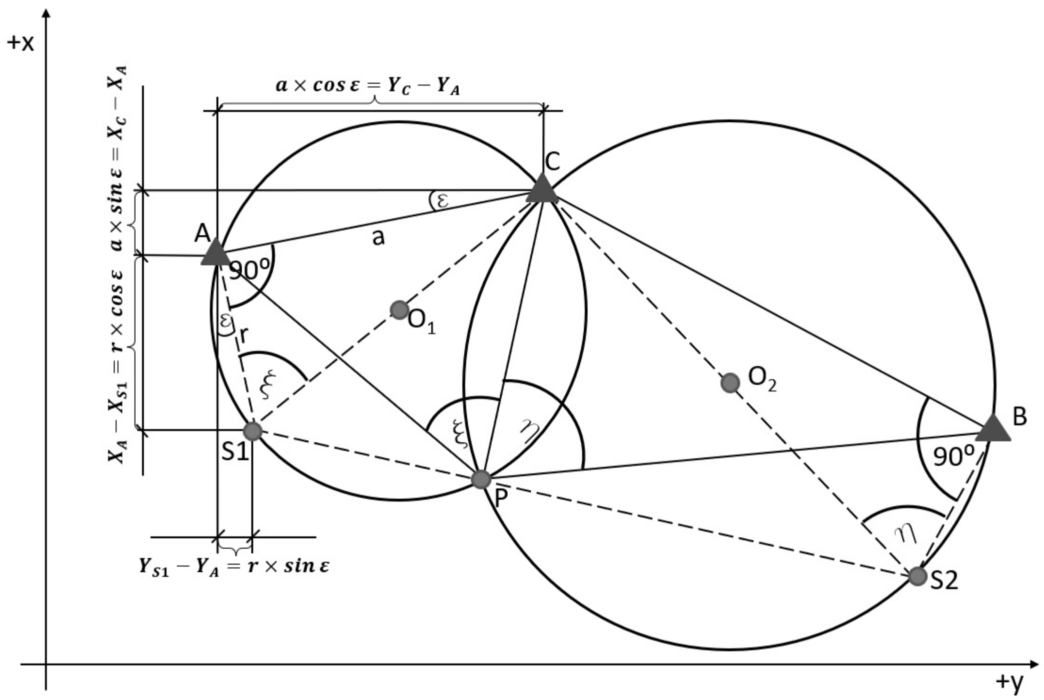
$\mathbf{Y_A}$= 837755,103; $\mathbf{X_A}$ = 259054,216; $\mathbf{Y_B}$= 837812,669; $\mathbf{X_B}$= 259070,420					
	$\mathbf{t_{AP}}$	$\mathbf{t_{BP}}$	**Körüljárási irány**	$\mathbf{Y_P}$	$\mathbf{X_P}$
1	30,619	88,903	A-ról B-re	***837724.682***	***259057.691***
2	43,027	69,605	A-ról B-re		
3	58,140	59,924	A-ról B-re		
4	84,694	34,026	A-ról B-re		
5	78,218	29,752	B-ről A-ra		
6	46,553	46,092	B-ről A-ra		
7	37,346	63,677	B-ről A-ra		
8	39,085	83,363	B-ről A-ra		
9	39,509	95,545	B-ről A-ra		
10	65,830	39,214	A-ról B-re		

8. Hátrametszés

A hátrametszés számításánál az ismeretlen koordinátájú (meghatározandó) ponton végzett iránymérésekből három ismert koordinátájú pontra menő irányt választunk ki és ezek felhasználásával számítjuk az álláspont koordinátáit.



12. ábra. Hátrametszés



13. ábra. Hátrametszés Sossna-féle megoldása

A számítási eljárások közül a Sossna-féle megoldást ismertetjük:

Az ábra alapján felírható az alábbi egyenlet (1):

$$Y_{S1} - Y_A = r \times \sin\varepsilon$$

$$X_A - X_{S1} = r \times \cos\varepsilon$$

A CAS_1 derékszögű háromszögből (2):

$$r = a \times \cot\xi$$

az (1)-es képletbe behelyettesítve (3):

$$Y_{S1} - Y_A = a \times \sin\varepsilon \times \cot\xi$$

$$X_A - X_{S1} = a \times \cos\varepsilon \times \cot\xi$$

Az ábrából leolvasható (4):

$$a \times \sin\varepsilon = X_C - X_A$$

$$a \times \cos\varepsilon = Y_C - Y_A$$

a (3)-as képletbe behelyettesítve:

$$Y_{S1} = Y_A + (X_C - X_A) \times \cot\xi$$

$$X_{S1} = X_A + (Y_C - Y_A) \times (-\cot\xi)$$

Ugyanígy levezethető az S_2 pontra:

$$Y_{S2} = Y_B + (X_B - X_C) \times \cot\eta$$

$$X_{S2} = X_B + (Y_B - Y_C) \times (-\cot\eta)$$

Az $S1$ és $S2$ segédpontok koordinátáiból kiszámítható:

$$\tan\delta_{S1,P} = \tan\delta_{S1,S2} = \frac{Y_{S2} - Y_{S1}}{X_{S2} - X_{S1}}$$

$$\tan\delta_{C,P} = \tan\left(\tan\delta_{S1,P} + 90°\right) = -\frac{1}{\tan\delta_{S1,P}}$$

Így a P pont koordinátái az $S1; C$ illetve a $C; S2$ pontokból irányszöges előmetszéssel számítható.

$$X_P = \frac{\left(\tan\delta_{S1,P} \times X_{S1} - Y_{S1}\right) - \left(\tan\delta_{C,P} \times X_C - Y_C\right)}{\tan\delta_{S1,P} - \tan\delta_{C,P}}$$

$$Y_P = X_P \times \tan\delta_{C,P} - \left(\tan\delta_{C,P} \times X_C - Y_C\right)$$

Mintafeladat:

Számítsa ki a P pont koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
A	91 164,16	4 415,08
B	88 619,86	3 159,88
C	90 661,58	1 475,28

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték
P	A	175-34-58
	B	358-30-20
	C	265-25-02

$$\xi = 265°25'02'' - 175°34'58'' = \mathbf{89°50'04''}$$

$$\eta = 358°30'20'' - 265°25'02'' = \mathbf{93°05'18''}$$

$$Y_{S1} = 91164{,}16 + (1475{,}28 - 4415{,}08) \times \cot 89°50'04'' = \mathbf{91155{,}665}$$

$$X_{S1} = 4415{,}08 + (90661{,}58 - 91164{,}16) \times (-\cot 89°50'04') = \mathbf{4416{,}532}$$

$$Y_{S2} = 88619{,}86 + (3159{,}88 - 1475{,}28) \times \cot 93°05'18'' = \mathbf{88528{,}969}$$

$$X_{S2} = 3159{,}88 + (88619{,}86 - 90661{,}58) \times (-\cot 93°05'18'') = \mathbf{3049{,}721}$$

$$\tan\delta_{S1,P} = \frac{88528{,}969 - 91155{,}665}{3049{,}721 - 4416{,}532} = 1{,}921769725$$

$$\tan\delta_{C,P} = \tan(\tan\delta_{S1,P} + 90°) = -\frac{1}{\tan\delta_{S1,P}} = -0{,}520353706$$

$$X_P = \frac{(1{,}921769725 \times 4416{,}532 - 91155{,}665) - (-0{,}520353706 \times 1475{,}28 - 90661{,}58)}{1{,}921769725 + 0{,}520353706} =$$
$$= \mathbf{3587{,}509}$$

$$Y_P = 3587{,}509 \times -0{,}520353706 - (-0{,}520353706 \times 1475{,}28 - 90661{,}58) = \mathbf{89562{,}474}$$

Gyakorló feladatok:

a) Számítsa ki a P pont koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
A	91 515,44	2 815,22
B	84 862,54	3 865,36
C	88 568,24	2 281,76

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték
P	A	224-29-01
	B	26-17-24
	C	330-11-39

b) Számítsa ki a P pont koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
A	91 164,16	4 415,08
B	84 862,54	3 865,36
C	90 661,58	1 475,28

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték
P	A	99-10-24
	B	335-34-21
	C	187-53-01

c) Számítsa ki a P pont koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
A	91 515,44	2 815,22
B	88 619,86	3 159,88
C	88 568,24	2 281,76

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték
P	A	140-58-30
	B	348-21-01
	C	291-20-12

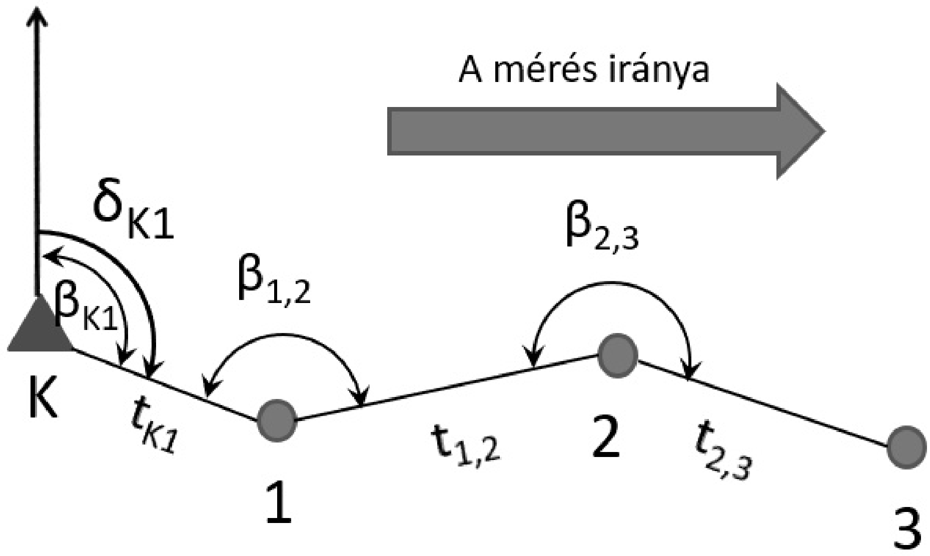
9. Sokszögvonalak

A sokszögelés olyan vegyes vízszintes alappontsűrítési módszer, amikor az újpontok koordinátáit egy ismert pontból indulva poláris pontok sorozataként határozzuk meg.
A sokszögvonalak fajtái:

- szabad sokszögvonal
- kétszeresen tájékozott sokszögvonal
- egyszeresen tájékozott sokszögvonal
- beillesztett sokszögvonal

9.1 Szabad sokszögvonal számítása

Csak a kezdőpont és a kezdőpontról látható tájékozó pontok adottak.



14. ábra. Szabad sokszögvonal

Adott:

Kezdőpont (A): Y_A; X_A

Tájékozó pontok a kezdőpontról (B, C): Y_B, X_B; Y_C, X_C

$$\left.\begin{array}{l} - \ l_{AB};\ l_{AC};\ l_{A1};\ t_{A1} \\ - \ l_{1A};\ l_{12};\ t_{12} \\ - \ l_{21};\ l_{23};\ t_{23} \end{array}\right\} \text{mért adatok}$$

Számítandó: 1, 2, 3 pontok koordinátái

Y_1, X_1; Y_2, X_2; Y_3, X_3

A számítás menete:

1. δ_{A1} tájékozott irányérték számítása (=β_{A1})

2. Y_1; X_1 koordinátáinak számítása

$$\Delta Y_{A1} = t_{A1} \times \sin \delta_{A1}$$

$$\Delta X_{A1} = t_{A1} \times \cos \delta_{A1}$$

$$Y_1 = Y_A + \Delta Y_{A1}$$

$$X_1 = X_A + \Delta X_{A1}$$

3. Y_2; X_2 koordinátáinak számítása

$$\beta_{12} = l_{12} - l_{1A}$$

$$\delta_{1A} = \delta_{A1} \pm 180°$$

$$\delta_{12} = \delta_{1A} + \beta_{12}$$

$$\Delta Y_{12} = t_{12} \times \sin \delta_{12}$$

$$\Delta X_{A1} = t_{12} \times \cos \delta_{12}$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_{12}$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X_{12}$$

4. Y_3; X_3 koordinátáinak számítása

$$\beta_{23} = l_{23} - l_{21}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} \pm 180°$$

$$\delta_{23} = \delta_{21} + \beta_{23}$$

$$\Delta Y_{23} = t_{23} \times \sin \delta_{23}$$

$$\Delta X_{23} = t_{23} \times \cos \delta_{23}$$

$$Y_3 = Y_2 + \Delta Y_{23}$$

$$X_3 = X_2 + \Delta X_{23}$$

Mintafeladat:

Számítsuk ki a szabad sokszögvonal 1,2,3 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
115 (kő)	846395.854	232233.932
116 (torony)	846023.209	232650.418
117 (torony)	846503.086	232764.166

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
115	116	343-58-12	-
	117	37-13-23	-
	1	104-04-31	148,09
1	115	247-16-30	148,09
	2	106-13-31	135,93
2	1	272-01-20	135,93
	3	52-01-15	116,63

1. $\delta_{115,1}$ tájékozott irányérték számítása:

$$tg\omega_{115,116} = \frac{\Delta Y_{115,116}}{\Delta X_{115,116}} = \frac{(-372,645)}{(+416,486)} = 0.894735957$$

$$\omega_{115,116} = arctg(0.894735957) = 41,82014173°$$

$$\delta_{115,116} = 360^{\circ} - 41,82014173° = 318,1798583^{\circ} = 318°10'47''$$

$$tg\omega_{115,117} = \frac{\Delta Y_{115,117}}{\Delta X_{115,117}} = \frac{(107,232)}{(530,234)} = 0.202235239$$

$$\omega_{115,117} = arctg(0.202235239) = 11,4330234°$$

$$\delta_{115,117} = 11,4330234^{\circ} = 11°25'59''$$

$$z_{115,116} = \delta_{115,116} - l_{115,116} = 318°10'47'' - 343°58'12'' = 334°12'35''$$

$$z_{115,117} = \delta_{115,117} - l_{115,117} = 11°25'59'' - 37°13'23'' = 334°12'36''$$

$$z_k = \frac{z_{115,116} + z_{115,117}}{2} = 334°12'36''$$

$$\delta_{115,1} = z_k + l_{115,1} = 334°12'36'' + 104°04'31'' = 78°17'07''$$

2. Y_1; X_1 koordinátáinak számítása

$$\Delta Y_{115,1} = t_{115,1} \times \sin\delta_{115,1} = 148{,}09 \times \sin 78°17'07'' = 145{,}005$$

$$\Delta X_{115,1} = t_{115,1} \times \cos\delta_{115,1} = 148{,}09 \times \cos 78°17'07'' = 30{,}068$$

$$Y_1 = Y_{115} + \Delta Y_{115,1} = 846395.854 + 145{,}005 = \mathbf{846540,859}$$

$$X_1 = X_{115} + \Delta X_{115,1} = 232233.932 + 30{,}068 = \mathbf{232264,000}$$

3. Y_2; X_2 koordinátáinak számítása

$$\beta_{1,2} = l_{1,2} - l_{1,115} = 106°13'31'' - 247°16'30'' = 218°57'01''$$

$$\delta_{1,115} = \delta_{115,1} \pm 180° = 78°17'07'' + 180° = 258°17'07''$$

$$\delta_{12} = \delta_{1,115} + \beta_{12} = 258°17'07'' + 218°57'01'' = 117°14'08''$$

$$\Delta Y_{12} = t_{12} \times \sin\delta_{12} = 135{,}93 \times \sin 117°14'08'' = 120{,}860$$

$$\Delta X_{A1} = t_{12} \times \cos\delta_{12} = 135{,}93 \times \cos 117°14'08'' = -62{,}208$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y_{12} = 846540{,}859 + 120{,}860 = \mathbf{846661,719}$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X_{12} = 232264{,}000 - 62{,}208 = \mathbf{232201,792}$$

4. Y_3; X_3 koordinátáinak számítása

$$\beta_{23} = l_{23} - l_{21} = 52°01'15'' - 272°01'20'' = 139°59'55''$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} \pm 180° = 117°14'08'' + 180° = 297°14'08''$$

$$\delta_{23} = \delta_{21} + \beta_{23} = 297°14'08'' + 139°59'55'' = 77°14'03''$$

$$\Delta Y_{23} = t_{23} \times \sin\delta_{23} = 116{,}63 \times \sin 77°14'03'' = 113{,}747$$

$$\Delta X_{23} = t_{23} \times \cos\delta_{23} = 116{,}63 \times \cos 77°14'03'' = 25{,}771$$

$$Y_3 = Y_2 + \Delta Y_{23} = 846661{,}719 + 113{,}747 = \mathbf{846775,466}$$

$$X_3 = X_2 + \Delta X_{23} = 232201{,}792 + 25{,}771 = \mathbf{232227,563}$$

Gyakorló feladatok:

a) Számítsa ki a szabad sokszögvonal pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
201 (kő)	846262.259	233165.249
116 (torony)	846023.209	232650.418
117 (torony)	846503.086	232764.166

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
201	116	255-26-38	-
	117	199-33-17	-
	301	102-10-20	149,86
301	201	293-22-02	149,86
	302	45-07-04	172,49
302	301	304-31-45	172,49
	303	92-51-14	82,14

b) Számítsa ki a szabad sokszögvonal pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
118 (kő)	846739.001	233594.176
119 (torony)	846548.383	233336.908
120 (torony)	846493.730	233768.797

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
118	120	217-29-54	-
	119	128-35-06	-
	401	72-16-43	204,92
401	118	290-24-46	204,92
	402	66-36-08	155,79
402	401	306-02-11	155,79
	403	211-41-35	172,61

c) Számítsa ki a szabad sokszögvonal pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

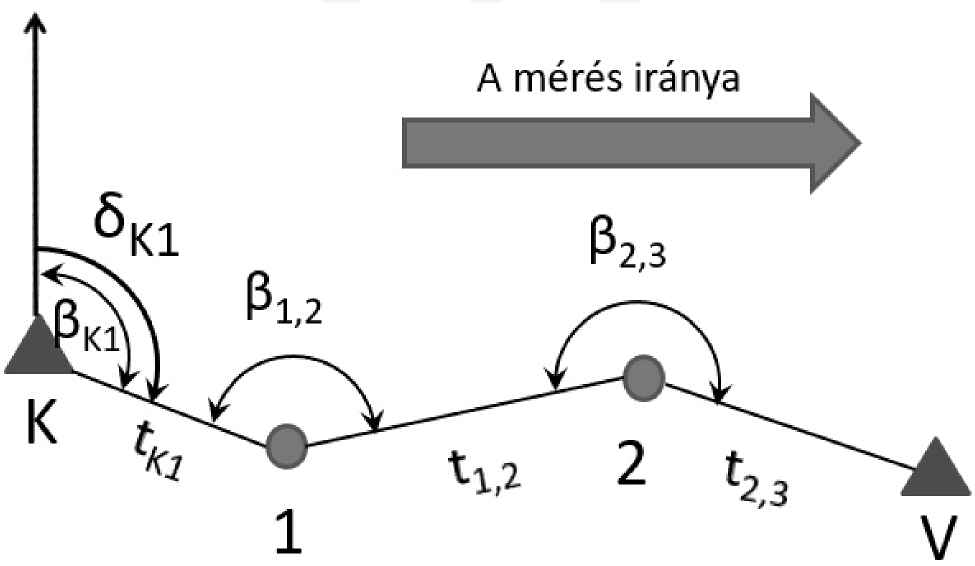
Pontszám/Pontjel	Y	X
121 (kő)	847177.333	233535.635
122 (torony)	847576.341	233778.240
123 (torony)	847835.830	233436.105

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
121	122	60-50-49	-
	123	100-44-33	-
	501	210-23-51	135,18
501	121	60-26-07	135,18
	402	275-07-49	185,85
402	501	72-33-46	185,85
	403	211-41-35	172,61

9.2 Egyszeresen tájékozott sokszögvonal számítása

A kezdőpont, a kezdőpontról látható tájékozó pontok és a végpont adott.



15. ábra. Egyszeresen tájékozott sokszögvonal

Adott:

Kezdőpont (K): Y_K; X_K

Végpont (V): Y_V; X_V

Tájékozó pontok a kezdőpontról (A, B): Y_A, X_A; Y_B, X_B

$$\left.\begin{array}{l} -\ l_{KA};\ l_{KB};\ l_{K1};\ t_{K1} \\ -\ l_{1K};\ l_{12};\ t_{12} \\ -\ l_{21};\ l_{2V};\ t_{2V} \end{array}\right\} \text{mért adatok}$$

Számítandó: 1, 2 pontok koordinátái: Y_1, X_1; Y_2, X_2

A számítás menete:

1. Kezdőpont (K) tájékozása δ_{K1}

2. Törésszögek számítása $\beta = l_e - l_h$; β_K

3. δ_{12}; δ_{2V} tájékozott irányérték képzése irányszög átvitellel:

$$\delta_{12} = \delta_{K1} \pm 180° + \beta_1$$

$$\delta_{2V} = \delta_{12} \pm 180° + \beta_2$$

4. Sokszög oldalvetületek képzése első geodéziai alap feladattal:

$$\Delta Y_{K1} = t_{K1} \times \sin\delta_{K1}\ ;\ \Delta X_{K1} = t_{K1} \times \cos\delta_{K1}$$

$$\Delta Y_{12} = t_{12} \times \sin\delta_{12}\ ;\ \Delta X_{12} = t_{12} \times \cos\delta_{12}$$

$$\Delta Y_{2V} = t_{2V} \times \sin\delta_{2V}\ ;\ \Delta X_{2V} = t_{2V} \times \cos\delta_{2V}$$

5. Hosszzáró hiba képzése:

$$d_Y = (Y_V - Y_K) - (\Delta Y_{K1} + \Delta Y_{12} + \Delta Y_{2V})$$

$$d_X = (X_V - X_K) - (\Delta X_{K1} + \Delta X_{12} + \Delta X_{2V})$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2}$$

6. A d_Y és a d_X szétosztása (a sokszögvonal oldalhosszainak arányában osztjuk szét):

$$\Delta Y'_{K1} = \Delta Y_{K1} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}\ ;\ \Delta X'_{K1} = \Delta X_{K1} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}$$

$$\Delta Y'_{12} = \Delta Y_{12} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}\ ;\ \Delta X'_{12} = \Delta X_{12} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}$$

$$\Delta Y'_{2V} = \Delta Y_{2V} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V} \; ; \; \Delta X'_{2V} = \Delta X_{2V} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V}$$

7. A sokszögpontok végleges koordinátáinak számítása

$$Y_1 = Y_K + \Delta Y'_{K1} \; ; \; X_1 = X_K + \Delta X'_{K1}$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y'_{12} \; ; \; X_2 = X_1 + \Delta X'_{12}$$

Mintafeladat:

Számítsuk ki az egyszeresen tájékozott sokszögvonal 71, 72 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
51 (TORONY)	849359.467	235884.445
52(KŐ)	849602.405	235374.575
53 (TORONY)	849065.541	235233.611
54 (KŐ)	850859.084	236010.413

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
52	53	323-11-37	-
	51	42-25-46	-
	71	155-39-18	687,36
71	52	277-12-42	687,36
	72	27-14-46	500,81
72	71	78-02-20	500,81
	54	312-41-24	437,28

1.

$$tg\omega_{52,53} = \frac{\Delta Y_{52,53}}{\Delta X_{52,53}} = \frac{(-536,864)}{(-140,964)} = 3,808518487$$

$$\omega_{52,53} = arctg(3,808518487) = 75,28798199°$$

$$\delta_{52,53} = 180° + 75,28798199° = 255,287982° = 255°17'17''$$

$$tg\omega_{52,51} = \frac{\Delta Y_{52,51}}{\Delta X_{52,51}} = \frac{(-242{,}938)}{(509{,}870)} = 0{,}476470472$$

$$\omega_{52,51} = arctg(0{,}476470472) = 25{,}4764209°$$

$$\delta_{52,51} = 360° - 25{,}4764209° = 334{,}5235791° = 334°31'25''$$
$$z_{52,53} = \delta_{52,53} - l_{52,53} = 255°17'17'' - 323°11'37'' = 292°05'40''$$
$$z_{52,51} = \delta_{52,51} - l_{52,51} = 334°31'25'' - 42°25'46'' = 292°05'39''$$
$$z_k = \frac{z_{52,53} + z_{52,51}}{2} = 292°05'40''$$

$$\delta_{52,71} = z_k + l_{52,71} = 292°05'40'' + 155°39'18'' = 87°44'58''$$

2.

$$\beta_1 = \delta_{52,71} = 87°44'58''$$

$$\beta_{71} = l_{71,72} - l_{71,52} = 27°14'46'' - 277°12'42'' = 110°02'04''$$

$$\beta_{72} = l_{72,54} - l_{72,71} = 312°41'24'' - 78°02'20'' = 234°39'04''$$

3.

$$\delta_{71,72} = \delta_{52,71} \pm 180° + \beta_{71} = 87°44'58'' + 180° + 110°02'04'' = \\ = 17°47'02''$$

$$\delta_{72,54} = \delta_{71,72} \pm 180° + \beta_{72} = 17°47'02'' + 180° + 234°39'04'' = \\ = 72°26'06''$$

4.

$$\Delta Y_{52,71} = t_{52,71} \times \sin\delta_{52,71} = 687{,}36 \times \sin 87°44'58'' = 686{,}830$$

$$\Delta X_{52,71} = t_{52,71} \times \cos\delta_{52,71} = 687{,}36 \times \cos 87°44'58'' = 26{,}992$$

$$\Delta Y_{71,72} = t_{71,72} \times \sin\delta_{71,72} = 500{,}81 \times \sin 17°47'02'' = 152{,}961$$

$$\Delta X_{71,72} = t_{71,72} \times \cos\delta_{71,72} = 500{,}81 \times \cos 17°47'02'' = 476{,}879$$

$$\Delta Y_{72,54} = t_{72,54} \times \sin\delta_{72,54} = 437{,}28 \times \sin 72°26'06'' = 416{,}892$$

$$\Delta X_{72,54} = t_{72,54} \times \cos\delta_{72,54} = 437{,}28 \times \cos 72°26'06'' = 131{,}966$$

5.

$$d_Y = (Y_{54} - Y_{52}) - \left(\Delta Y_{52,71} + \Delta Y_{71,72} + \Delta Y_{72,54}\right) =$$
$$= (850859.084 - 849602.405) - (686{,}830 + 152{,}961 + 416{,}892) =$$
$$= 0{,}004$$

$$d_X = (X_{54} - X_{52}) - \left(\Delta X_{52,71} + \Delta X_{71,72} + \Delta X_{72,54}\right) =$$
$$= (236010.413 - 235374.575) - (26{,}992 + 476{,}879 + 131{,}966) =$$
$$= 0{,}001$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2} = \sqrt{0{,}004^2 + 0{,}001^2} = 0{,}004$$

6.

$$\Delta Y'_{52,71} = \Delta Y_{52,71} \pm \frac{d_Y}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{52,71} =$$
$$= 686{,}830 + \frac{0{,}004}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 687{,}36 = 686{,}832$$

$$\Delta X'_{52,71} = \Delta X_{52,71} \pm \frac{d_X}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{52,71} =$$
$$= 26{,}992 + \frac{0{,}001}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 687{,}36 = 26{,}992$$

$$\Delta Y'_{71,72} = \Delta Y_{71,72} \pm \frac{d_Y}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{71,72} =$$
$$= 152{,}961 + \frac{0{,}004}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 500{,}81 = 152{,}962$$

$$\Delta X'_{71,72} = \Delta X_{71,72} \pm \frac{d_X}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{71,72} =$$
$$= 476{,}879 + \frac{0{,}001}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 500{,}81 = 476{,}879$$

$$\Delta Y'_{72,54} = \Delta Y_{72,54} \pm \frac{d_Y}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{72,54} =$$
$$= 416{,}892 + \frac{0{,}004}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 437{,}28 = 416{,}893$$

$$\Delta X'_{72,54} = \Delta X_{72,54} \pm \frac{d_X}{t_{52,71} + t_{71,72} + t_{72,54}} \times t_{72,54} =$$
$$= 131{,}966 + \frac{0{,}001}{687{,}36 + 500{,}81 + 437{,}28} \times 437{,}28 = 131{,}966$$

7.

$$Y_{71} = Y_{52} + \Delta Y'_{52,71} = 849602.405 + 686,832 = 850289,237$$

$$X_{71} = X_{52} + \Delta X'_{52,71} = 235374.575 + 26,992 = 235401,567$$

$$Y_{72} = Y_{71} + \Delta Y'_{71,72} = 850289,237 + 152,962 = 850442,199$$

$$X_{72} = X_{71} + \Delta X'_{71,72} = 235401,567 + 476,879 = 235878,446$$

ellenőrzés:

$$Y_{54} = Y_{72} + \Delta Y'_{72,54} = 850442,199 + 416,893 = 850859,092$$

$$X_{54} = X_{72} + \Delta X'_{72,54} = 235878,446 + 131,966 = 236010,412$$

Gyakorló feladatok:

a) Számítsa ki az egyszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (89, 90, 91) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
301 (torony)	849520.050	234010.922
302 (kő)	849954.940	234307.847
303 (torony)	849990.930	233621.022
305 (kő)	851850.457	234388.826

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
302	303	141-34-03	-
	301	200-14-35	-
	89	65-09-26	701,78
89	302	65-40-17	701,78
	90	220-23-39	638,72
90	89	334-49-14	638,72
	91	219-56-51	626,33
91	90	0-00-00	626,33
	305	59-09-09	563,49

b) Számítsa ki az egyszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (11, 12) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
3001 (torony)	853044.881	236477.368
3002 (kő)	852365.554	235573.099
3003 (torony)	852320.566	236558.348
3004 (kő)	854174.094	234605.845

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
3002	3003	154-15-41	-
	3001	193-47-34	-
	11	244-13-19	680,06
11	3002	48-46-55	680,06
	12	297-47-40	919,99
12	11	264-31-37	919,99
	3004	29-45-22	776,14

c) Számítsa ki az egyszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (21, 22, 23) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

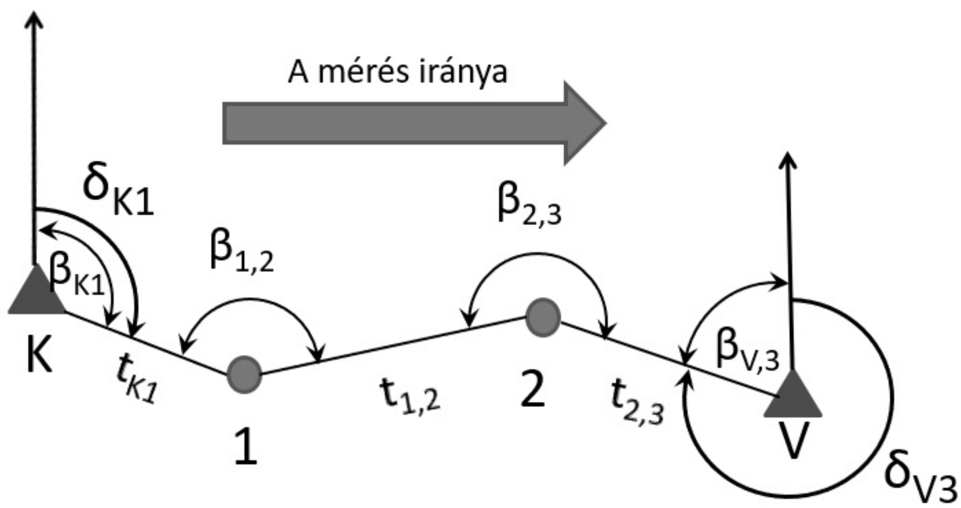
KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
501 (torony)	852707.467	232764.314
502 (kő)	853035.883	233425.646
503 (torony)	853593.741	232935.270
505 (kő)	852217.092	234923.764

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
502	503	67-33-51	-
	501	142-39-31	-
	21	245-37-05	453,92
21	502	52-25-22	453,92
	22	285-36-00	607,95
22	21	322-08-46	607,95
	23	116-29-36	366,84
23	22	74-48-04	366,84
	505	225-00-43	439,99

9.3 Kétszeresen tájékozott sokszögvonal számítása

A kezdőpont, a végpont, a kezdő- és végpontról látható tájékozó pontok adottak.



16. ábra. Kétszeresen tájékozott sokszögvonal

Adott:

Kezdőpont (K): Y_K; X_K

Végpont (V): Y_V; X_V

Tájékozó pontok a kezdőpontról (A, B): Y_A, X_A; Y_B, X_B

Tájékozó pontok a végpontról (C, D): Y_C, X_C; Y_D, X_D

$$\left.\begin{array}{l} \text{- } l_{KA};\ l_{KB};\ l_{K1};\ t_{K1} \\ \text{- } l_{1K};\ l_{12};\ t_{12} \\ \text{- } l_{21};\ l_{2V};\ t_{2V} \\ \text{- } l_{V2};\ l_{VC};\ l_{VD} \end{array}\right\} \text{ mért adatok}$$

Számítandó: 1, 2 pontok koordinátái: Y_1, X_1; Y_2, X_2

A számítás menete:

1. Kezdőpont (K) tájékozása δ_{K1}

2. Végpont (V) tájékozása δ_{V2}

3. Törésszögek számítása $\beta = l_e - l_h$; β_K ; $\beta_V = 360° - \delta_{V2}$

4. φ szögzáró hiba képzése

$$\varphi = (n-1) \times 180° - \left(\delta_{K,1} + \beta_1 + \beta_2 + (360 - \delta_{V2})\right)$$

(ahol n a sokszögpontok száma)

5. Szögzáró hiba ráosztása

A törésszögekre az álláspontok száma szerint maradék nélkül osztjuk el a hibát (esetünkben $ráosztás = \varphi/4$).

$$\beta_K' = \beta_K \pm \varphi/4\,; \beta_1' = \beta_1 \pm \varphi/4\,; \beta_2' = \beta_2 \pm \varphi/4\,; \beta_V' = \beta_V \pm \varphi/4$$

6. Sokszögoldalak tájékozott irányértékeinek számítása:

$$\delta_{K1};\ \delta_{12} = \delta_{K1} \pm 180° + \beta_1\ ;\ \delta_{2V} = \delta_{12} \pm 180° + \beta_2$$

7. Sokszög oldalvetületek képzése első geodéziai alap feladattal:

$$\Delta Y_{K1} = t_{K1} \times \sin\delta_{K1}\ ;\ \Delta X_{K1} = t_{K1} \times \cos\delta_{K1}$$

$$\Delta Y_{12} = t_{12} \times \sin\delta_{12}\ ;\ \Delta X_{12} = t_{12} \times \cos\delta_{12}$$

$$\Delta Y_{2V} = t_{2V} \times \sin\delta_{2V}\ ;\ \Delta X_{2V} = t_{2V} \times \cos\delta_{2V}$$

8. Hosszzáró hiba képzése:

$$d_Y = (Y_V - Y_K) - (\Delta Y_{K1} + \Delta Y_{12} + \Delta Y_{2V})$$

$$d_X = (X_V - X_K) - (\Delta X_{K1} + \Delta X_{12} + \Delta X_{2V})$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2}$$

9. A d_Y és a d_X szétosztása (a sokszög oldalhosszak arányában osztjuk szét):

$$\Delta Y'_{K1} = \Delta Y_{K1} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}\ ;\ \Delta X'_{K1} = \Delta X_{K1} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}$$

$$\Delta Y'_{12} = \Delta Y_{12} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}\ ;\ \Delta X'_{12} = \Delta X_{12} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}$$

$$\left(\Delta Y'_{2V} = \Delta Y_{2V} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V}\ ;\ \Delta X'_{2V} = \Delta X_{2V} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V}\right)$$

10. A sokszögpontok végleges koordinátáinak számítása

$$Y_1 = Y_K + \Delta Y'_{K1}\ ;\ X_1 = X_K + \Delta X'_{K1}$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y'_{12}\ ;\ X_2 = X_1 + \Delta X'_{12}$$

Mintafeladat:

Számítsuk ki a kétszeresen tájékozott sokszögvonal 201,202 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
1 (kő)	847455.077	233213.737
2 (kő)	848074.918	233091.101
122 (torony)	847576.341	233778.240
123 (torony)	847835.830	233436.105
124 (torony)	848178.892	233609.635
125 (torony)	848460.153	233428.348

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
1	122	57-20-45	-
	123	104-56-11	-
	201	176-28-29	216,31
201	1	286-33-31	216,31

	202	49-16-37	251,03
202	201	293-42-47	251,03
	2	142-36-28	221,50
2	124	304-47-37	-
	125	342-15-20	-
	202	216-19-15	221,50

1.

$$tg\omega_{1,122} = \frac{\Delta Y_{1,122}}{\Delta X_{1,122}} = \frac{(121{,}264)}{(564{,}503)} = 0{,}21481551$$

$$\omega_{1,122} = arctg(0{,}21481551) = 12{,}12377632°$$

$$\delta_{1,122} = 12{,}12377632° = 12°07'26''$$

$$tg\omega_{1,123} = \frac{\Delta Y_{1,123}}{\Delta X_{1,123}} = \frac{(380{,}753)}{(222{,}368)} = 1{,}712265254$$

$$\omega_{1,123} = arctg(1{,}712265254) = 59{,}71414615°$$

$$\delta_{1,123} = 59{,}71414615° = 59°42'51''$$

$$z_{1,122} = \delta_{1,122} - l_{1,122} = 12°07'26'' - 57°20'45'' = 314°46'41''$$

$$z_{1,123} = \delta_{1,123} - l_{1,123} = 59°42'51'' - 104°56'11' = 314°46'40''$$

$$z_k = \frac{z_{1,122} + z_{1,123}}{2} = 314°46'40''$$

$$\delta_{1,201} = z_k + l_{1,201} = 314°46'40'' + 176°28'29'' = 131°15'09''$$

2.

$$tg\omega_{2,124} = \frac{\Delta Y_{2,124}}{\Delta X_{2,124}} = \frac{(103{,}974)}{(518{,}534)} = 0{,}200515298$$

$$\omega_{2,124} = arctg(0{,}200515298) = 11{,}33831856°$$

$$\delta_{2,124} = 11{,}33831856° = 11°20'18''$$

$$tg\omega_{2,125} = \frac{\Delta Y_{2,125}}{\Delta X_{2,125}} = \frac{(385{,}235)}{(337{,}247)} = 1{,}142293334$$

$$\omega_{2,125} = arctg(1{,}142293334) = 48{,}80006305°$$

$$\delta_{2,125} = 48{,}80006305° = 48°48'00''$$
$$z_{2,124} = \delta_{2,124} - l_{2,124} = 11°20'18'' - 304°47'37'' = 66°32'41''$$
$$z_{2,125} = \delta_{2,125} - l_{2,125} = 48°48'00'' - 342°15'20'' = 66°32'40''$$
$$z_k = \frac{z_{2,124} + z_{2,125}}{2} = 66°32'40''$$

$$\delta_{2,202} = z_k + l_{2,202} = 66°32'40'' + 216°19'15'' = 282°51'55''$$

3. Törésszögek számítása:

$$\beta_1 = \delta_{1,201} = 131°15'09''$$

$$\beta_{201} = l_{201,202} - l_{201,1} = 49°16'37'' - 286°33'31'' = 122°43'06''$$

$$\beta_{202} = l_{202,2} - l_{202,201} = 142°36'28'' - 293°42'47'' = 208°53'41''$$

$$\beta_2 = 360° - \delta_{2,202} = 77°08'05''$$

4. φ szögzáró hiba képzése:

$$\varphi = 180° - \left(131°15'09'' + 122°43'06'' + 208°53'41'' + (360° - 282°51'55'')\right) = 0°00'01''$$

5. Szögzáró hiba ráosztása

$$\beta'_1 = \beta_1 \pm \varphi/4 = 131°15'09'' + 0{,}25'' = 131°15'09''$$

$$\beta'_{201} = \beta_{201} \pm \varphi/4 = 122°43'06'' + 0{,}25'' = 122°43'06''$$

$$\beta'_{202} = \beta_{202} \pm \varphi/4 = 208°53'41'' + 0{,}25'' = 208°53'41''$$

$$\beta'_2 = \beta_2 \pm \varphi/4 = 77°08'05'' + 0{,}25'' = 77°08'05''$$

6.

$$\delta_{1,201} = 131°15'09''$$

$$\delta_{201,202} = \delta_{1,201} + 180° + \beta'_{201} = 131°15'09'' + 180° + 122°43'06'' = 73°58'15''$$

$$\delta_{202,2} = \delta_{201,202} + 180° + \beta'_{202} = 73°58'15'' + 180° + 208°53'41'' = 102°51'56''$$

7. Sokszög oldalvetületek képzése első geodéziai alap feladattal:

$$\Delta Y_{1,201} = t_{1,201} \times \sin\delta_{1,201} = 216{,}31 \times \sin 131°15'09'' = 162{,}624$$

$$\Delta X_{1,201} = t_{1,201} \times \cos\delta_{1,201} = 216{,}31 \times \cos 131°15'09'' = -142{,}630$$

$$\Delta Y_{201,202} = t_{201,201} \times \sin\delta_{201,201} = 251{,}03 \times \sin 73°58'15'' = 241{,}270$$

$$\Delta X_{201,202} = t_{201,201} \times \cos\delta_{201,201} = 251{,}03 \times \cos 73°58'15'' = 69{,}316$$

$$\Delta Y_{202,2} = t_{202,2} \times \sin\delta_{202,2} = 221{,}50 \times \sin 102°51'56'' = 215{,}939$$

$$\Delta X_{202,2} = t_{202,2} \times \cos\delta_{202,2} = 221{,}50 \times \cos 102°51'56'' = -\,49{,}320$$

8. Hosszzáró hiba képzése:

$$\begin{aligned} d_Y = (Y_2 - Y_1) - \left(\Delta Y_{1,201} + \Delta Y_{201,202} + \Delta Y_{202,2}\right) = \\ = (848074.918 - 847455.077) - (162{,}624 + 241{,}270 + 215{,}939) = \\ = 0{,}008 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_X = (X_2 - X_1) - \left(\Delta X_{1,201} + \Delta X_{201,202} + \Delta X_{202,2}\right) = \\ = (233091.101 - 233213.737) - (-142{,}630 + 69{,}316 - 49{,}320) = \\ = 0{,}002 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2} = \sqrt{0{,}008^2 + 0{,}002^2} = 0{,}008$$

9. A d_Y és a d_X szétosztása (a sokszög oldalhosszak arányában osztjuk szét):

$$\begin{aligned} \Delta Y'_{1,201} = \Delta Y_{1,201} \pm \frac{d_Y}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{1,201} = \\ = 162{,}624 + \frac{0{,}008}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 216{,}31 = 162{,}627 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X'_{1,201} = \Delta X_{1,201} \pm \frac{d_X}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{1,201} = \\ = -142{,}630 + \frac{0{,}002}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 216{,}31 = -142{,}629 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Y'_{201,202} = \Delta Y_{201,202} \pm \frac{d_Y}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{201,202} = \\ = 241{,}270 + \frac{0{,}008}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 251{,}03 = 241{,}273 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X'_{201,202} = \Delta X_{201,202} \pm \frac{d_X}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{201,202} = \\ = 69{,}316 + \frac{0{,}002}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 251{,}03 = 69{,}317 \end{aligned}$$

$$\Delta Y'_{202,2} = \Delta Y_{202,2} \pm \frac{d_Y}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{202,2} =$$
$$= 215{,}939 + \frac{0{,}008}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 221{,}50 = 215{,}942$$

$$\Delta X'_{202,2} = \Delta X_{202,2} \pm \frac{d_X}{t_{1,201} + t_{201,202} + t_{202,2}} \times t_{202,2} =$$
$$= -49{,}320 + \frac{0{,}002}{216{,}31 + 251{,}03 + 221{,}50} \times 221{,}50 = -49{,}319$$

10. A sokszögpontok végleges koordinátáinak számítása

$$Y_{201} = Y_1 + \Delta Y'_{1,201} = 847455.077 + 162{,}627 = \mathbf{847617{,}704}$$

$$X_{201} = X_1 + \Delta X'_{1,201} = 233213.737 - 142{,}629 = \mathbf{233071{,}108}$$

$$Y_{202} = Y_{201} + \Delta Y'_{201,202} = 847617{,}704 + 241{,}273 = \mathbf{847858{,}977}$$

$$X_{202} = X_{201} + \Delta X'_{201,202} = 233071{,}108 + 69{,}317 = \mathbf{233140{,}425}$$

ellenőrzés:

$$Y_2 = Y_{202} + \Delta Y'_{202,2} = 847858{,}977 + 215{,}942 = 848074{,}919$$

$$X_2 = X_{202} + \Delta X'_{202,2} = 233140{,}425 - 49{,}319 = 233091{,}106$$

Gyakorló feladatok:

a) Számítsa ki a kétszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (701, 702, 703) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
601 (kő)	847362.101	232513.138
602 (torony)	847258.127	232989.016
603(torony)	847726.008	232591.784
604(torony)	848372.509	232647.770
605 (kő)	848411.166	232093.245
606(torony)	848789.736	232234.542

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
601	602	294-02-14	-
	603	24-10-00	-
	701	129-17-51	260,28
701	601	62-02-59	260,28
	702	173-56-08	333,39
702	701	309-59-19	333,39
	703	93-24-19	398,94
703	702	49-58-11	398,94
	605	257-04-22	382,89
605	703	14-21-48	382,89
	604	85-01-57	-
	606	158-33-18	-

b) Számítsa ki a kétszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (901, 902) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
801 (torony)	847157.486	231951.281
802 (kő)	847375.431	231311.445
803(torony)	846755.589	231397.423
804(torony)	848331.186	231765.329
805 (kő)	848201.220	231197.474
806(torony)	848671.100	230965.533

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
802	803	37-24-33	-
	801	100-42-07	-
	901	177-28-14	327,88

901	802	196-40-59	327,88
	902	58-18-28	312,28
902	901	312-28-08	312,28
	805	167-24-13	336,51
805	902	241-54-05	336,51
	804	300-16-29	-
	806	43-39-18	-

c) Számítsa ki a kétszeresen tájékozott sokszögvonal pontjainak (1201, 1202, 1203) koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

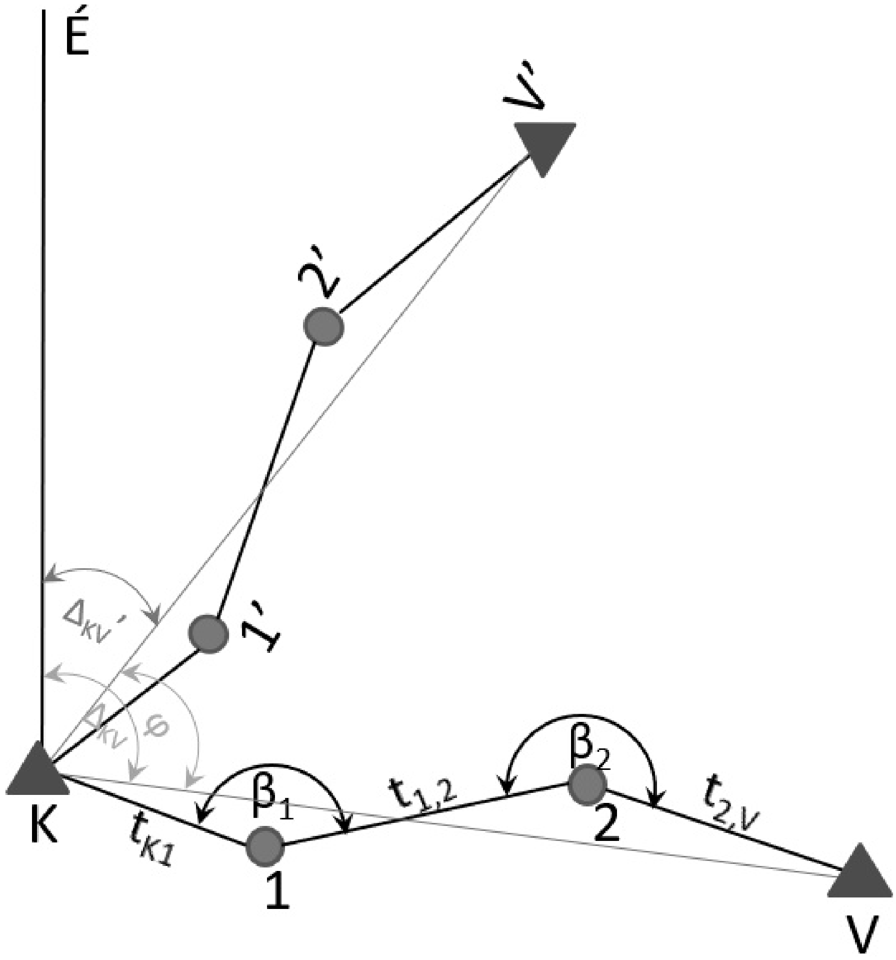
Pontszám/Pontjel	Y	X
1101 (torony)	849946.774	232435.158
1102 (kő)	849508.886	232039.259
1103 (torony)	850312.680	231821.314
1104 (kő)	849576.868	230737.591
1105 (torony)	849106.988	231127.492
1106 (torony)	849122.984	230547.640

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
1102	1101	65-46-47	-
	1103	123-04-03	-
	1201	218-05-37	411,19
1201	1102	61-16-05	411,19
	1202	167-29-17	454,70
1202	1201	226-09-44	454,70
	1203	134-12-26	371,03
1203	1202	0-00-00	371,03
	1104	136-30-58	344,17
1104	1106	328-43-19	-
	1105	31-06-57	-
	1203	72-24-25	344,17

9.4 Beillesztett sokszögvonal számítása

A beillesztett sokszögvonalnak a kezdő és végpontja ismert, de egyikről se látszik tájékozó irány. Szögzáró hiba nem, csak hosszzáró hiba számítható.



17. ábra. Beillesztett sokszögvonal

Adott:

Kezdőpont (K): Y_K; X_K

Végpont (V): Y_V; X_V

Tájékozó pontok a kezdőpontról (A, B): Y_A,X_A; Y_B,X_B

Tájékozó pontok a végpontról (C, D): Y_C,X_C; Y_D,X_D

$$\left.\begin{array}{l} -\ l_{1K};\ l_{12};\ t_{1K};\ t_{12} \\ -\ l_{21};\ l_{2V};\ t_{2V} \end{array}\right\} \text{mért adatok}$$

Számítandó: 1, 2 pontok koordinátái: Y_1, X_1; Y_2, X_2

A számítás menete:

Ha δ_{K1}=0 akkor $\varphi = \delta_{K1}$

δ_{KV}; t_{KV}: koordinátákból számítható

δ_{K1}'=0; t_{K1}'=t_k'; $\Delta Y_{K1}'$+Y_A= Y_1'; $\Delta X_{K1}'$+X_A= X_1'

δ_{12}=δ_{K1}'±180+β…: a fiktív V pont koordinátái poláris pontok sorozataként kiszámítható.

1. Y_V'; X_V' fiktív végpont koordinátáinak számítása poláris pontok sorozataként úgy, hogy a δ_{K1}'=0.

2. δ_{KV} és δ_{KV}' valamint t_{KV} és t_{KV}' számítása második geodézia alapfeladattal.

3. φ elfordulási szög számítása

$$\varphi = \delta_{KV} - \delta_{KV}'$$

$$t_{KV} = t_{KV}'$$

(A vonal hosszától függően 10-20 cm eltéréssel)

4. Az első lépésben kiszámolt fiktív δ tájékozott irányértékek javítása a φ elfordulási szöggel

5. Sokszög oldalvetületek képzése első geodézia alapfeladattal

$$\delta_i;\ t_i \longrightarrow \Delta Y_i;\Delta X_i$$

6. Hosszzáró hiba képzése (javítás)

$$d_Y = (Y_V - Y_K) - (\Delta Y_{K1} + \Delta Y_{12} + \Delta Y_{2V})$$

$$d_X = (X_V - X_K) - (\Delta X_{K1} + \Delta X_{12} + \Delta X_{2V})$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2}$$

7. A d_Y és a d_x szétosztása maradék nélkül:

$$\Delta Y_{K1}' = \Delta Y_{K1} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}\ ;\ \Delta X_{K1}' = \Delta X_{K1} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{K1}$$

$$\Delta Y_{12}' = \Delta Y_{12} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}\ ;\ \Delta X_{12}' = \Delta X_{12} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{12}$$

$$\Delta Y_{2V}' = \Delta Y_{2V} \pm \frac{d_Y}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V}\ ;\ \Delta X_{2V}' = \Delta X_{2V} \pm \frac{d_X}{t_{K1} + t_{12} + t_{2V}} \times t_{2V}$$

8. A sokszögpontok végleges koordinátáinak számítása:

$$Y_1 = Y_K + \Delta Y'_{K1}\ ;\ X_1 = X_K + \Delta X'_{K1}$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y'_{12}\ ;\ X_2 = X_1 + \Delta X'_{12}$$

Mintafeladat:

Számítsuk ki a beillesztett sokszögvonal 1, 2 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
101 (kő)	852669.603	231463.019
102 (kő)	854532.130	231442.774

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
1	101	300-46-51	678,66
	2	73-36-58	718,49
2	1	184-20-58	718,49
	102	45-18-18	602,42

1.

$$tg\omega_{101,102} = \frac{\Delta \mathrm{Y}_{101,102}}{\Delta \mathrm{X}_{101,102}} = \frac{(1862,527)}{(-20,245)} = 91,99935787$$

$$\omega_{101,102} = arctg(91,99935787) = 89,37723997°$$

$$\delta_{101,102} = 180° - 89,37723997° = 90,62276003° = 90°37'22''$$

$$t_{101,102} = \sqrt{\Delta Y_{101,102}^2 + \Delta X_{101,102}^2} = 1862,637$$

$$\beta_1 = l_{1,2} - l_{1,101} = 73°36'58'' - 300°46'51'' = 132°50'07''$$

$$\beta_2 = l_{2,102} - l_{2,1} = 45°18'18'' - 184°20'58'' = 220°57'20''$$

$$\delta'_{101,1} = 0;\ t_{101,1} = 678,66$$

$$Y'_1 = Y_{101} + t_{101,1} \times \sin\delta'_{101,1} = 852669.603 + 678,66 \times \sin 0° = 852669.603$$

$$X'_1 = X_{101} + t_{101,1} \times \cos\delta'_{101,1} = 231463.019 + 678,66 \times \cos 0° = 232141,679$$

$$\delta'_{1,2} = \delta'_{101,1} \pm 180° + \beta_1 = 0° + 180° + 132°50'07'' = 312°50'07''$$

$$t_{1,2} = 718{,}49$$

$$Y'_2 = Y'_1 + t_{1,2} \times \sin\delta'_{1,2} = 852669.603 + 718{,}49 \times \sin 312°50'07'' = 852142{,}726$$

$$X'_2 = X'_1 + t_{1,2} \times \cos\delta'_{1,2} = 232141{,}679 + 718{,}49 \times \cos 312°50'07'' = 232630{,}175$$

$$\delta'_{2,102} = \delta'_{1,2} \pm 180° + \beta_2 = 312°50'07'' + 180° + 220°57'20'' = 353°47'27''$$

$$t_{2,102} = 602{,}42$$

$$Y'_{102} = Y'_2 + t_{2,102} \times \sin\delta'_{2,102} = 852142{,}726 + 602{,}42 \times \sin 353°47'27'' = 852077{,}569$$

$$X'_{102} = X'_2 + t_{2,102} \times \cos\delta'_{2,102} = 232630{,}175 + 602{,}42 \times \cos 353°47'27'' = 233229{,}061$$

2.

$$\tan\omega'_{101,102} = \frac{\Delta Y'_{101,102}}{\Delta X'_{101,102}} = \frac{(-592{,}034)}{(1766{,}042)} = 0{,}335232117$$

$$\omega'_{101,102} = arctg(0{,}335232117) = 18{,}53280609°$$

$$\delta'_{101,102} = 360° - 18{,}53280609° = 341{,}4671939° = 341°28'02''$$

$$t'_{101,102} = \sqrt{\Delta Y'^2_{101,102} + \Delta X'^2_{101,102}} = 1862{,}635$$

3.

$$\varphi = \delta_{101,102} - \delta'_{101,102} = 90°37'22'' - 341°28'02'' = 109°09'20''$$

$$t_{101,102} \approx t'_{101,102}$$

$$1862{,}637 \approx 1862{,}635$$

4.

$$\delta_{101,1} = \delta'_{101,1} + \varphi = 0° + 109°09'20'' = 109°09'20''$$

5.

$$\Delta Y_{101,1} = t_{101,1} \times \sin\delta_{101,1} = 678{,}66 \times \sin 109°09'20'' = 641{,}083$$

$$\Delta X_{101,1} = t_{101,1} \times \cos\delta_{101,1} = 678{,}66 \times \cos 109°09'20'' = -222{,}691$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{101,1} \pm 180° + \beta_1 = 109°09'20'' + 180° + 132°50'07'' = 61°59'27''$$

$$t_{1,2} = 718{,}49$$

$$\Delta Y_{1,2} = t_{1,2} \times \sin \delta_{1,2} = 718{,}49 \times \sin 61°59'27'' = 634{,}335$$

$$\Delta X_{1,2} = t_{1,2} \times \cos \delta_{1,2} = 718{,}49 \times \cos 61°59'27'' = 337{,}412$$

$$\delta_{2,102} = \delta_{1,2} \pm 180° + \beta_2 = 61°59'27'' + 180° + 220°57'20'' = 102°56'47''$$

$$t_{2,102} = 602{,}42$$

$$\Delta Y_{2,102} = t_{2,102} \times \sin \delta_{2,102} = 602{,}42 \times \sin 102°56'47'' = 587{,}107$$

$$\Delta X_{2,102} = t_{2,102} \times \cos \delta_{2,102} = 602{,}42 \times \cos 102°56'47'' = -134{,}966$$

6.

$$\begin{aligned} d_Y = (Y_{102} - Y_{101}) - \left(\Delta Y_{101,1} + \Delta Y_{1,2} + \Delta Y_{2,102}\right) = \\ = (854532.130 - 852669.603) - (641{,}083 + 634{,}335 + 587{,}107) = \\ = 0{,}002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_X = (X_{102} - X_{101}) - \left(\Delta X_{101,1} + \Delta X_{1,2} + \Delta X_{2,102}\right) \\ = (231442.774 - 231463.019) - (-222{,}691 + 337{,}412 - 134{,}966) \\ == 0{,}000 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{d_Y^2 + d_X^2} = \sqrt{0{,}002^2 + 0{,}001^2} = 0{,}002$$

7.

$$\begin{aligned} \Delta Y'_{101,1} = \Delta Y_{101,1} \pm \frac{d_Y}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,101}} \times t_{101,1} = \\ = 641{,}083 + \frac{0{,}002}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 678{,}66 = 641{,}084 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X'_{101,1} = \Delta X_{101,1} \pm \frac{d_X}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,102}} \times t_{101,1} = \\ = -222{,}691 + \frac{0{,}000}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 678{,}66 = -222{,}691 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Y'_{1,2} = \Delta Y_{1,2} \pm \frac{d_Y}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,102}} \times t_{1,2} = \\ = 634{,}335 + \frac{0{,}002}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 718{,}49 = 634{,}336 \end{aligned}$$

$$\Delta X'_{1,2} = \Delta X_{1,2} \pm \frac{d_X}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,102}} \times t_{1,2} =$$
$$= 337{,}412 + \frac{0{,}000}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 718{,}49 = 337{,}412$$

$$\Delta Y'_{2,102} = \Delta Y_{2,102} \pm \frac{d_Y}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,102}} \times t_{2,102} =$$
$$= 587{,}107 + \frac{0{,}002}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 602{,}42 = 587{,}107$$

$$\Delta X'_{2,102} = \Delta X_{2,102} \pm \frac{d_X}{t_{101,1} + t_{1,2} + t_{2,102}} \times t_{2,102} =$$
$$= -134{,}966 + \frac{0{,}000}{678{,}66 + 718{,}49 + 602{,}42} \times 602{,}42 = -134{,}966$$

8.

$$Y_1 = Y_{101} + \Delta Y'_{101,1} = 852669.603 + 641{,}084 = 853310{,}687$$

$$X_1 = X_{101} + \Delta X'_{101,1} = 231463.019 - 222{,}691 = 231240{,}328$$

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y'_{1,2} = 853310{,}687 + 634{,}336 = 853945{,}023$$

$$X_2 = X_1 + \Delta X'_{1,2} = 231240{,}328 + 337{,}412 = 231577{,}740$$

ellenőrzés:

$$Y_{102} = Y_2 + \Delta Y'_{2,102} = 853945{,}023 + 587{,}107 = 854532{,}130$$

$$X_{102} = X_2 + \Delta X'_{2,102} = 231577{,}740 - 134{,}966 = 231442{,}774$$

Gyakorló feladatok:

a) Számítsa ki a beillesztett sokszögvonal 51, 52 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
601 (kő)	852551.214	230671.198
602 (kő)	852973.801	229731.777

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
51	601	279-40-42	432,33
	52	136-02-35	365,47
52	51	245-11-20	365,47
	602	87-21-39	332,79

b) Számítsa ki a beillesztett sokszögvonal 53, 54, 55 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
701 (kő)	853244.379	230592.152
702 (kő)	854351.010	230431.022

MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
53	701	62-55-59	301,06
	54	175-29-20	328,07
54	53	259-01-13	328,07
	55	45-18-11	392,25
55	54	79-17-30	392,25
	702	204-43-49	279,79

c) Számítsa ki a beillesztett sokszögvonal 56, 57, 58 pontjainak koordinátáit az alábbi adatok alapján:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám/Pontjel	Y	X
703 (kő)	854445.256	229950.671
704 (kő)	853359.906	229348.712

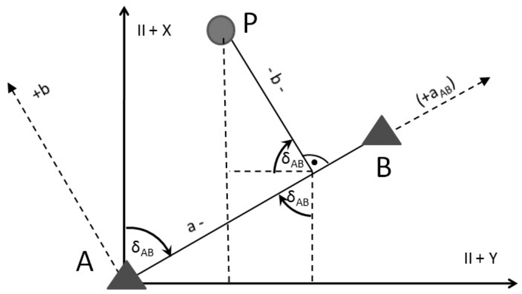
MÉRÉSI JEGYZŐKÖNYV

Álláspont	Irányzott pont	Irányérték	Távolság
56	703	14-31-56	379,39
	57	136-58-04	409,27
57	56	73-10-09	409,27
	58	325-40-42	328,95
58	57	98-30-19	328,95
	704	220-18-00	314,98

10. Koordináta transzformációk

10.1. Derékszögű koordinátaméréssel bemért pontok koordinátáinak számítása

Az y, x koordináta-rendszerben adott A és B pontok egyenesére, mint mérési vonalra a, b derékszögű méretekkel bemértük a P pontot. Keressük a P pont y_P, x_P koordinátáit. A feladat koordináta-transzformáció az a, b koordináta-rendszerből az y, x koordináta-rendszerbe:



18. ábra. Derékszögű koordinátaméréssel bemért pontok koordinátáinak számítása

Az ábra alapján felírhatók a következő összefüggések:

$$y_P = y_A + a \times \sin\delta_{AB} - b \times \cos\delta_{AB}$$

$$x_P = x_A + a \times \cos\delta_{AB} + b \times \sin\delta_{AB}$$

Ugyanarra a mérési vonalra általában több pontot mérünk be. A számítás ellenőrzése érdekében a koordinátákat pontról pontra haladva számítjuk. A beméréskor a B pontnál leolvasott (a_{AB}) ún. végméret általában nem egyezik meg a koordinátákból számítható (t_{AB}) távolsággal, ezért a hosszirányú záróhiba elosztása miatt a számítás képleteiben a

$$\sin\delta_{AB} = \frac{(y_B - y_A)}{t_{AB}} \quad \text{és } a \quad \cos\delta_{AB} = \frac{x_B - x_A}{t_{AB}}$$

,mennyiségek helyett a következő összefüggéseket használjuk:

$$r = \frac{(y_B - y_A)}{(a_{AB})} \qquad m = \frac{(x_B - x_A)}{(a_{AB})}$$

A számítás képletei tehát az alábbiak:

$$y_P = y_A + a \times r - b \times m, \quad valamint \quad x_P = x_A + a \times m + b \times r$$

Mintafeladat:
Számítsa ki a P_1 derékszögű koordinátaméréssel, AB mérési vonalra bemért pont koordinátáit.

1. $y_P = 837755.100 + \left(-9{,}52 \times \frac{837812.67 - 837755.10}{59.90}\right) - (+7{,}65 \times \frac{259070.42 - 259054.22}{59.90})$
   $y_P = 837743.88$

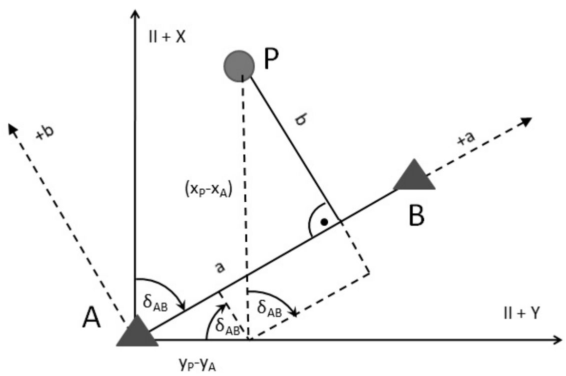
2. $x_P = 259054.220 + \left(-9{,}52 \times \frac{259070.42 - 259054.22}{59.90}\right) + (+7{,}65 \times \frac{837812.67 - 837755.10}{59.90})$
   $x_P = 259059.00$

Számítsa ki az Y_P és X_P koordináták értékeit!

$\mathbf{Y_A}$= 837755.10; $\mathbf{X_A}$= 259054.22; $\mathbf{Y_B}$= 837812.67; $\mathbf{X_B}$=259070.42; a_{AB}=59.90				
	a	**b**	$\mathbf{Y_P}$	$\mathbf{X_P}$
1	-9,52	+7,65	***837743.88***	***259059.00***
2	+15,22	+11,51		
3	+30,89	+6,10		
4	+69,37	-7,07		
5	+53,58	-16,36		
6	+43,46	+9,93		
7	+23,58	-9,93		
8	+14,43	-14,27		
9	+4,58	+8,59		
10	-6,88	-12,30		

10.2. Derékszögű kitűzési méretek számítása koordinátákból mérési vonalra

Az y, x koordináta-rendszerben adott P pont kitűzéséhez keressük az a,b derékszögű kitűzési méreteket az y, x koordinátákkal megadott A és B pontok egyenesére, mint mérési vonalra. A feladat koordináta-transzformáció az y, x koordináta-rendszerből az a, b koordináta-rendszerbe.



19. ábra. Derékszögű kitűzési méretek számítása

Az ábra alapján felírhatók a következő összefüggések:

$$a = (y_P - y_A) \times \sin\delta_{AB} + (x_P - x_A) \times \cos\delta_{AB}$$

$$b = -(y_P - y_A) \times \cos\delta_{AB} + (x_P - x_A) \times \sin\delta_{AB}$$

Mintafeladat:
Számítsa ki a P_1 pont derékszögű kitűzési méreteit az AB mérési vonalra!

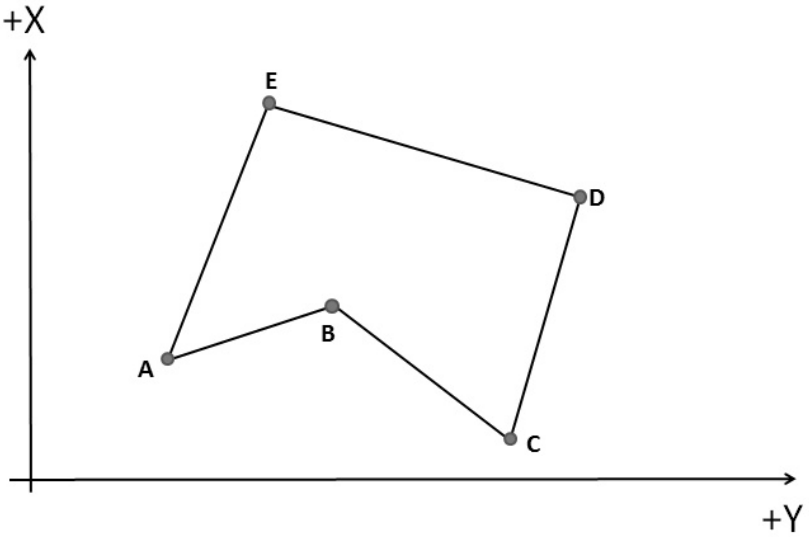
1. $a = (837857.97 - 837901.48) \times \frac{(837876.83-837901.48)}{87.90} + (259110.89 - 259015.73) \times \frac{(259100.10-259015.73)}{87.90} = +103.54$

2. $b = -(837857.97 - 837901.48) \times \frac{(259100.10-259015.73)}{87.90} + (259110.89 - 259015.73) \times \frac{(837876.83-837901.48)}{87.90} = +15.08$

Számítsa ki az abcisszák és az ordináták értékeit!

$\mathbf{Y_A}$= 837901.48**;** $\mathbf{X_A}$= 259015.73; $\mathbf{Y_B}$= 837876.83; $\mathbf{X_B}$=259100.10; $\mathbf{a_{AB}}$=87.90				
	$\mathbf{Y_P}$	$\mathbf{X_P}$	**a**	**b**
1	837857.97	259110.89	***+103.54***	***+15.08***
2	837890.37	259096.15		
3	837865.47	259080.92		
4	837867.88	259066.17		
5	837896.65	259062.31		
6	837937.02	259050.95		
7	837876.83	259036.68		
8	837880.70	259015.65		
9	837912.85	259021.70		
10	837898.83	258994.14		

11. Numerikus területszámítás

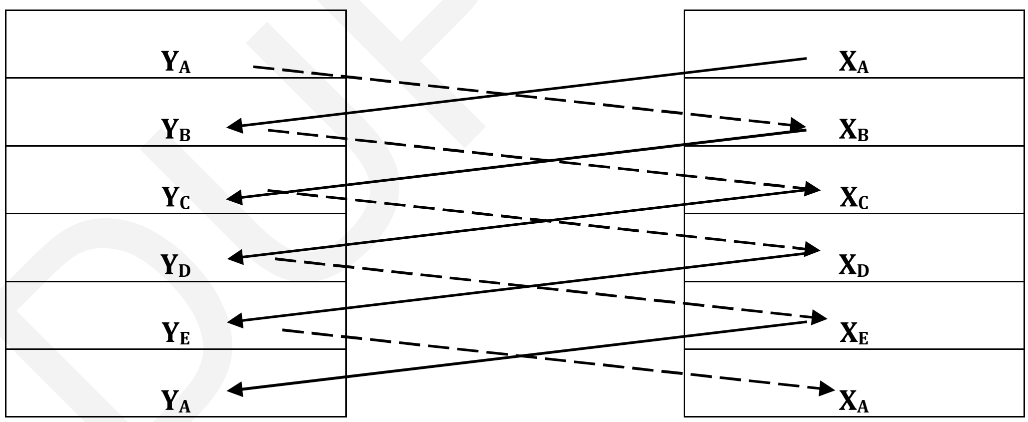


20. ábra. Numerikus területszámítás

$$2T = Y_A \times X_B + Y_B \times X_C + Y_C \times X_D + Y_D \times X_E + Y_E \times X_A - Y_B \times X_A - Y_C \times X_B - Y_D \times X_C - Y_E \times X_D - Y_A \times X_E$$

A végösszeg előjele a körüljárási irányától függően negatív vagy pozitív.

Az alábbi ábra szemlélteti a területszámítás képletében a koordináta párok behelyettesítésének sorrendjét (ahol a szaggatott vonal a negatív előjelű szorzatokat a folyamatos vonal a pozitív előjelű szorzatokat szimbolizálja).

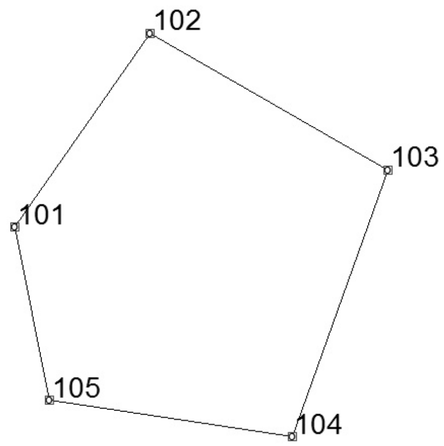


Mintafeladat:

Számítsuk ki az alábbi 5 pontból álló sokszög területét:

KOORDINÁTA JEGYZÉK:

Pontszám	Y	X
101	848500.153	228732.312
102	848903.739	229313.750
103	849615.145	228903.323
104	849327.847	228102.992
105	848602.760	228212.439



$$\begin{aligned}2T = {} & 8500.153 \times 9313.750 + 8903.739 \times 8903.323 + 9615.145 \times 8102.992 \\ & + 9327.847 \times 8212.439 + 8602.760 \times 8732.312 - 8732.312 \\ & \times 8903.739 - 9313.750 \times 9615.145 - 8903.323 \times 9327.847 \\ & - 8102.992 \times 8602.760 - 8212.439 \times 8500.153 = -1788236\ \mathrm{m}^2\end{aligned}$$

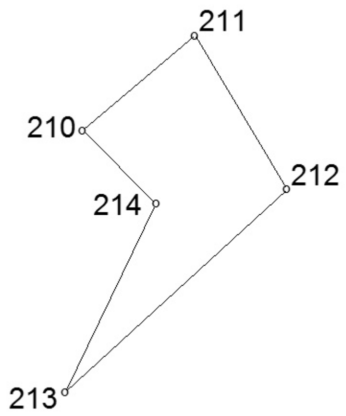
$$T = \frac{1788236}{2} = 894118\ \mathrm{m}^2$$

Gyakorló feladatok:

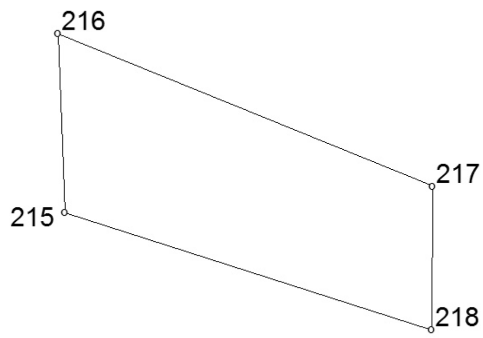
KOORDINÁTA JEGYZÉK NUMERIKUS TERÜLETSZÁMÍTÁSHOZ:

Pontszám	Y	X
210	850622.970	228383.070
211	850860.105	228583.723
212	851054.678	228258.422
213	850586.488	227829.754
214	850778.020	228228.020
215	851711.360	228431.713
216	851696.159	228848.220
217	852571.736	228492.517
218	852568.696	228158.095
219	851373.899	227331.162
220	851562.391	227863.196
221	851735.682	227343.323
222	852182.591	227355.484
223	851799.526	227042.343
224	851933.295	226558.952
225	851535.029	226966.339
226	851091.160	226610.636
227	851249.250	227024.102
228	850914.829	227370.685

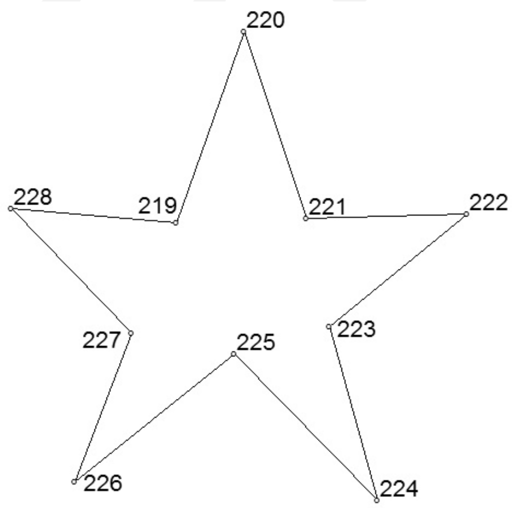
a) Számítsa ki az alábbi vázlaton látható poligon területét!



b) Számítsa ki az alábbi vázlaton látható poligon területét!

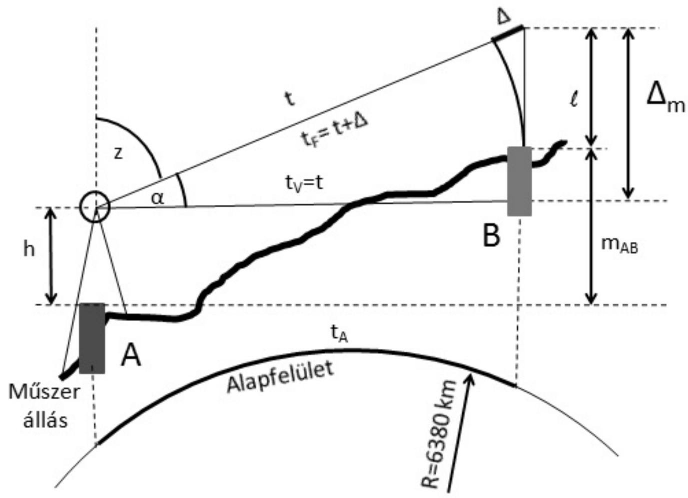


c) Számítsa ki az alábbi vázlaton látható poligon területét!



12.Trigonometriai magasságmérés

A feladat célja, hogy meghatározzuk az A és a B pont magasságkülönbségét. Ismerjük az A pont magasságát, a jelmagasságot (l), mérjük a műszermagasságot (h), a t_{AB} ferde távolságot, az α magassági vagy a z zenit szöget, melyek alapján számítjuk az m_{AB} magasságkülönbséget.



21. ábra. A trigonometriai magasságmérés elve

Ferde távolság vízszintesre redukálása:

$$t_V = t_F \times \cos\alpha$$

Vagy számítható a Δm felhasználásával:

$$t_V = \sqrt{t_F^2 - \Delta m^2}$$

A trigonometriai magasságmérés 400 méter távolságig használható képlete:

$$m_{AB} = h + t_V \times \tan\alpha - l$$

400 méter felett figyelembe kell venni a szintfelületek nem sík voltát (Föld görbület), illetve azt, hogy a fénysugár a különböző törésmutatójú légrétegeken nem egyenesen, hanem görbe vonal (refrakciógörbe) mentén halad át. A javítást az alábbi képlettel vesszük figyelembe:

$$\frac{\mathrm{t_V^2 \times (1-k)}}{2R}$$

Behelyettesítve a 400 méterig használatos képletbe:

$$\mathrm{m_{AB} = h + t_V \times \tan\alpha + \frac{t_V^2 \times (1-k)}{2\mathit{R}} - l}$$

A kifejezésben az R a szintfelület középgörbületi sugara (6380 km). A k pedig a refrakció együttható, amely azt fejezi ki, hogy a szintfelület középgörbületi sugara, hányad része a refrakciógörbe sugarának. Ennek átlagos értéke k=+0,13. Ezen érték

alkalmazásával a trigonometriai magasságmérést 400 < t <4000
méter intervallumban tudjuk megbízhatóan elvégezni. 4 km felett meg kell határozni a k pillanatnyi (mérés időpontjára vonatkoztatott) értékét.
Ha a vízszintes távolságot (R sugarú gömb felett, H közepes magasságban elhelyezkedő vízszintes távolság) az alapfelületre szeretnénk redukálni, úgy azt a Δ_A redukció alkalmazásával tehetjük meg:

$$\Delta_A = -\frac{H}{R} \times t_V$$

A redukció alapján, az alapfelületi hossz:

$$t_A = t_V - \frac{H}{R} \times t_V$$

Pl.: R=6380 km sugarú alapfelület felett, H=100 m magasságban elhelyezkedő 100 m-es távolság alapfelületi redukciója 1,6 mm.

Mintafeladat:

Számítsa ki a vízszintes távolságot, az alapfelületi távolságot és az AB pontok magasságkülönbségét, a következő adatok ismeretében:

Adott: t_F=453.26 m ; z=78-43-12 ; R= 6380 km ; k=+0.13 ; H=120.00 m ; l=1.80 m ; h=1.54 m
Számítandó: t_V; t_A; m_{AB}

1. 78-43-12=78.72° ;α=90°– 78.72°=11.28°

2. $t_V = t_F \times \cos\alpha = 453.26 \times \cos 11.28$ =446.16 m

3. $t_A = t_V - \frac{H}{R} \times t_V = 446.16 - \frac{120}{6380000} \times 446.16 = 446.15$ m

4. $m_{AB} = h + t_V \times \tan\alpha + \frac{t_V^2 \times (1-k)}{2R} - l$

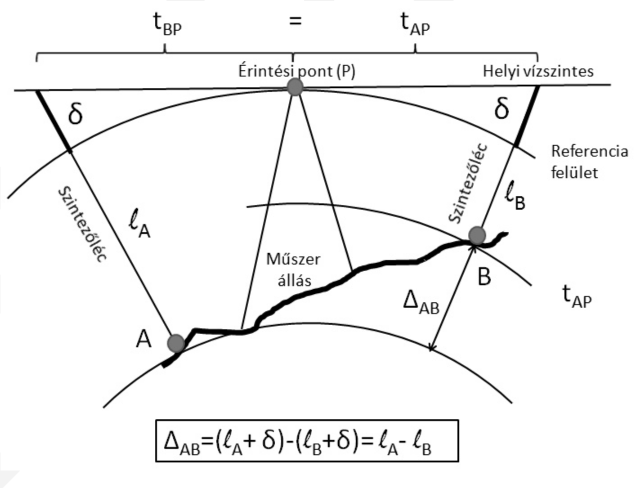
5. $m_{AB} = 1.54 + 446.16 \times \tan 11.28^{\circ} + \frac{446.16^2 \times (1-0.13)}{2 \times 6380000} - 1.80$ =79.64 m

Számítsa ki a vízszintes távolságot, az alapfelületi távolságot és az AB pontok magasságkülönbségét!

R= 6380 km, k= +0,13, ℓ= 1,80					**t_V**	**t_A**	**m_{AB}**
	t_F	**z**	**h**	**H**			
1	353,30	85-41-12	1,58	121,00			
2	856,12	78-55-11	1,42	1014,00			
3	126,11	88-44-26	1,11	128,00			
4	348,11	81-33-58	1,32	565,00			
5	2543,11	77-11-26	1,69	95,00			
R= 6380 km, k= +0,13, ℓ= 1,80							
	t_F	**α**	**h**	**H**	**t_V**	**t_A**	**m_{AB}**
6	1118,26	26-26-30	1,26	256,00			
7	763,41	11-18-42	1,63	102,00			
8	248,98	08-54-55	1,75	342,00			
9	626,26	07-42-33	1,19	616,00			
10	3826,12	12-59-11	1,57	463,00			

13. Geometriai szintezés

13.1. Két pont magasságkülönbségének számítása



22. ábra. A trigonometriai magasságmérés elve

A magasságkülönbség számítása, egy szálon történő leolvasás esetén: $\Delta_{AB} = \ell_A - \ell_B$, vagyis a hátra és az előre leolvasások különbségét számítjuk. (A hátra leolvasás értéke mindig pozitív, az előre leolvasás értéke pedig mindig negatív.)

Mintafeladat:

$$\Delta_{AB} = 345 - 2526 = -2.181\ m$$

Számítsa ki a hiányzó magasságkülönbség értékeket a táblázat szerint!

	ℓ_A (mm)	ℓ_B(mm)	Δ_{AB} (m)
1	0345	2526	***-2.181***
2	1315	1112	
3	0156	0156	
4	3843	2611	
5	0596	1535	
6	0056	0041	
7	2135	3626	
8	1518	0943	
9	1662	1511	
10	2832	2219	

Ha a leolvasás három szálon történik, úgy a magasságkülönbség számítását megelőzi a leolvasások középértékeinek meghatározása. A léc műszer távolság számításához a feladatok során használt műszerállandó c=10.

Magasságkülönbség számítása:

$t = \frac{\ell_F - \ell_A}{10}$= távolság méterben, deciméter élességgel

$$\ell_{HK} = \frac{\ell_{HF} + \ell_{HA}}{2}$$

$$\ell_{EK} = \frac{\ell_{EF} + \ell_{EA}}{2}$$

$$\Delta m = \ell_{HK} - \ell_{EK}$$

Mintafeladat:

$$t = \frac{1826 - 1397}{10} = 42.9\ m$$

$$\ell_{HK} = \frac{1826 + 1397}{2} = 1612\ mm$$

$$\ell_{EK} = \frac{2342 + 1696}{2} = 2019\ mm$$

$$\Delta m = 1612 - 2019 = -0407\ mm = -0.407\ m$$

Számítsa ki a táblázat hiányzó értékeit!

Szálak	ℓ_H (mm)	t (m)	ℓ_{HK}(mm)	ℓ_E (mm)	t (m)	ℓ_{EK}(mm)	Δm (m)
Felső **(F)**	1826	***42.9***	***1612***	2342	***64.6***	***2019***	***-0.407***
Középső **(K)**	1613			2017			
Alsó **(A)**	1397			1696			
Felső	1833			2354			
Középső	1198			1792			
Alsó	0565			1226			
Felső	3842			2526			
Középső	3209			2163			
Alsó	2578			1803			
Felső	2002			1538			
Középső	1796			1302			
Alsó	1594			1062			
Felső	1215			1426			
Középső	1063			1328			
Alsó	0909			1234			

13.2. Irányvonal ferdeség számítása

A szintező libella tengelye igazított kell legyen a távcső irányvonalához, amennyiben ez nincs így, akkor irányvonal ferdeségről beszélünk.
A irányvonal ferdeséget úgy számítjuk, hogy (20-50 méteres) azonos léc műszer távolságban elhelyezünk egy-egy szintezőlécet melyekre hátra és előre leolvasásokat

végzünk. (Azonos léc műszer távolságok esetén ferde irányvonallal is meghatározható a két pont helyes magasság különbsége, hiszen a hiba kiesik.) Ezek után a két léc marad a helyén és műszerünkkel a két léc vonalán kívül állunk fel és hátra és előre leolvasásokat végzünk ugyanazon lécekre. (Ekkor a műszer nem azonos távolságban helyezkedik el a szintezőlécektől, így az irányvonal ferdeség hibát okoz, ami számítható.)

A számítás lépései:
Adott (mért értékek) : ℓ_H , ℓ_E , ℓ_H' , ℓ_E' , t_{AB}
Számítandó: az irányvonal ferdeség (γ) értéke előjelhelyesen, másodpercben

1. $\Delta m = \ell_H - \ell_E$ $\qquad\qquad$ $\Delta m' = \ell'_H - \ell'_E$
2. $\Delta = \Delta m - \Delta m'$
3. $\gamma = arc\tan\frac{\Delta}{t_{AB}}$

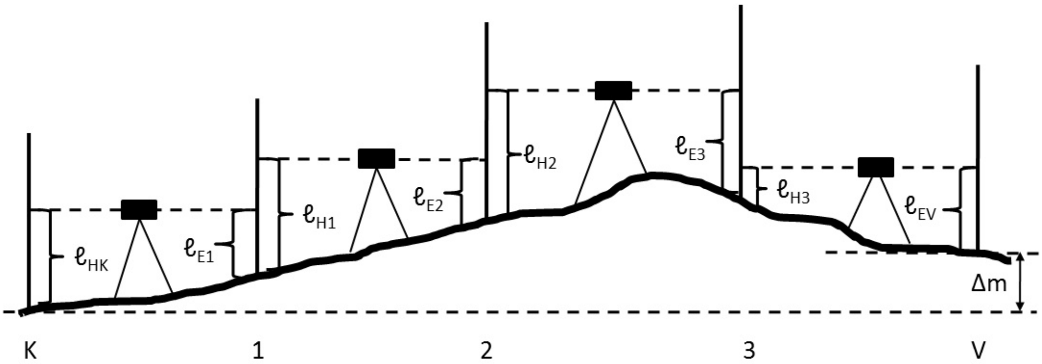
Mintafeladat a táblázatban lévő 1-es vizsgálat mérési eredményei szerint.

1. $\Delta m = 1542 - 1497 = +45 \qquad \Delta m' = 1654 - 1598 = +56$
2. $\Delta = \Delta m - \Delta m' = +45 - 56 = -11 = -0.011\ m$
3. $\gamma = arc\tan\frac{\Delta}{t_{AB}} = arc\tan\frac{-0.011}{34.8} = -0.018110734^{\circ} = -65''$

Számítsa ki az irányvonal ferdeséget a táblázatban szereplő értékek alapján!

A műszer a két léc között, középen (m)			A műszer a két lécen kívül (m)		t(m)	Irány-vonal f.(″)
	ℓ_H	ℓ_E	ℓ'_H	ℓ'_E		
1	1542	1497	1654	1598	34,8	***-65″***
2	1428	1487	1612	1667	48,6	
3	1920	1828	3515	3426	42,1	
4	0843	0881	1126	1169	53,6	
5	2315	2408	2666	2766	48,2	
6	3126	3144	3363	3388	19,8	
7	2168	2112	2002	1938	31,2	
8	1816	1712	1910	1811	36,4	
9	1472	1792	1688	1726	29,3	
10	2836	2801	2958	2926	48,9	

13.3. Szintezési vonal számítása



23. ábra. A vonalszintezés elve

A szintezési vonal mérése során előre és hátra leolvasásokat végzünk és kötőpontokat (1,2,3) létesítünk a soron következő állásponthoz. A kezdő (K) és a végpont (V) magassága adott, tehát a vonalat két ismert magasságú pont között vezetjük. Az előre és a hátra leolvasások előjelhelyes összege nem más mint a kezdő és végpont magasságkülönbsége (Δm).

$$\Delta m = +\ell_{HK} - \ell_{E1} + \ell_{H1} - \ell_{E2} + \ell_{H2} - \ell_{E3} + \ell_{H3} - \ell_{EV}$$

Szintezési vonal számításának lépései:

1. Számítjuk a műszer-léc távolságokat(a magasságkülönbség számítása c. bekezdésben leírtaknak megfelelően) , majd összegezzük azokat.
2. Számítjuk az hátra és előre leolvasások középértékeit, majd összegezzük azokat.
3. A „van” értéke a hátra leolvasások összegének és az előre leolvasások összegének különbsége.(A mért értékek különbsége.)
4. A „kell” értéke a végpont magasságának és a kezdőpont magasságának különbsége.(Az adott értékek különbsége.)
5. A javítás pedig a „van” és a „kell” értékek különbsége.
6. A hibát a léctávolságokkal arányosan osztjuk el, vagyis az első léctávolság: 111.7 (64.3+47.4), a második távolság:83.9 (52.8+31.1)stb.
7. Az elosztást a következőknek megfelelően végezzük, az első léctávolságra: (8x111.7)/493.4=1.81~+2, a második léctávolságra: (8x83.9)/493.4=1.36~+1 stb.
8. Az előbbi értékekkel megjavítjuk az előzetes magasságkülönbségeket.
9. A javított magasságkülönbségeket sorban a kiinduló magassághoz adva kapjuk meg a mért pontok magasságait.

Mintafeladat:

ODA
Kiinduló magasság: m_K=124,214
Záró magasság: m_V=124,570

Szintezett pont	Távolság [m]	Hátra leolv. [mm]	Hátra leolv. középértéke [mm]	Előre leolv. [mm]	Előre leolv. középértéke [mm]	Előzetes mag. kül. [mm]	Javítás [mm]	Javított mag. kül. [mm]	Magasság [mBf]
K	64,3	1626 1303 0983	+1304						124,214
1	47,4			1415 1179 0941	1178	+0126	+2	+0128	124,342
1	52,8	1788 1522 1260	1524						
2	31,1			1915 1760 1604	1760	-0236	+1	-0235	124,107
2	43,2	1243 1029 0811	1027						
3	73,6			1426 1057 0690	1058	-0031	+2	-0029	124,078
3	24,5	2215 2093 1970	2092						
4	73,0			2820 2457 2090	2455	-0363	+2	-0361	123,717
4	51,9	3120 2862 2601	2860						
V	31,6			2166 2007 1850	2008	+0852	+1	+0853	124,570
	Σ_T=493,4	Σ_H=8807		Σ_E=8459		$\Sigma_{(H-E)}$= +0348	Σ_J= +8	$\Sigma_{\Delta m}$= +0356	
		„Van" : Σ_H-Σ_E= +0348							
		„Kell" : m_V-m_K= +0356							
		Javítás: „Kell"-„Van" = 0356-0348=+8							

Számítsa ki az alábbi szintezési vonalat!

VISSZA
Kiinduló magasság: m_K=124,570
Záró magasság: m_V=124,214

Szin-tezett pont	Távolság [m]	Hátra leolv. [mm]	Hátra leolv. közép-értéke [mm]	Előre leolv. [mm]	Előre leolv. közép-értéke [mm]	Előzetes mag. kül. [mm]	Javítás [mm]	Javított mag. kül. [mm]	Magas-ság [mBf]
V		2370							
		2010							
		1648							
1’				3143					
				2920					
				2699					
1’		2613							
		2380							
		2144							
2’				2290					
				2135					
				1982					
2’		1325							
		1066							
		0811							
3’				1321					
				1055					
				0789					
3’		1881							
		1712							
		1552							
4’				1793					
				1580					
				1369					
4’		1354							
		1210							
		1070							
K				1296					
				1044					
				0794					
	Σ_T=	Σ_H=		Σ_E=		Σ_{H-E}=	Σ_J=	$\Sigma_{\Delta m}$=	
		„Van” : Σ_H-Σ_E=							
		„Kell” : m_V-m_K=							
		Javítás: „Kell”-„Van” = 0355-0356							

Felhasznált irodalom:

Noéh Ferenc: Számolástechnikai ismeretek
(http://volgyesi.hotserver.hu/geod/geod1/szamolas.pdf)

Babós Lajos, Dr.: Kertépítészeti geodézia. Mezőgazdasági kiadó, Budapest, 1979.

Krauter András, Dr.: Geodézia. Műegyetem kiadó, Budapest, 2007.