



**A NÉGYZET, TÉGLALAP,  
PÁRHUZAMOSSÁG, MERŐLEGESSÉG ÉS  
SZIMMETRIA FOGALMAK FEJLŐDÉSE  
AZ ALSÓ TAGAZATON**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Dr. Szilágyiné Szinger Ibolya  
témavezető: Dr. Németh József

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi Doktori Tanács  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2010



## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Németh József egyetemi docensnek munkámhoz nyújtott segítségét, támogatását.

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Ambrus András egyetemi docensnek, aki szakmai tanácsaival, megjegyzéseivel, illetőleg a konferenciákon elhangzott előadásaimra vonatkozó építő kritikáival segítette munkámat.

Hálás vagyok kolléganőmnek, Dr. Kopasz Éva főiskolai docensnek a szakmai beszélgetésekért, bátorításáért, amelyek előrevittek munkám során. Köszönöm, hogy bármikor rendelkezésemre állt, ha véleményére, segítségére volt szükségem.

Köszönöm Győrfi Tamás kollégámnak az informatikában nyújtott segítségét.

Köszönet illeti az Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának szakvezetőit, Bakos Barbarát és Bagóczky Zsuzsannát, akik a kísérleti tanítások óravezetését vállalták.

Köszönöm férjemnek, Dr. Szilágyi Attilának a stilisztikai segítség mellett a türelmét, szeretetét és megértését.

Köszönettel tartozom szüleimnek az ösztönzésért, szeretetükért, támogatásukért és azért, hogy kitartó munkára neveltek.



*Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika-és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*

*Debrecen, 2010. január*

.....  
*Dr. Szilágyiné Szinger Ibolya  
doktorjelölt*

*Tanúsítom, hogy Dr. Szilágyiné Szinger Ibolya doktorjelölt 2000-2010 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.*

*Debrecen, 2010. január*

.....  
*Dr. Németh József  
témavezető*



## AZ ÉRTEKEZÉS CÍME

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika-és számítástudományokban

Írta: Dr. Szilágyiné Szinger Ibolya okleveles orosz-matematika szakos középiskolai  
tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája  
(Matematika-didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Németh József

A doktori szigorlati bizottság:

|        |                             |       |
|--------|-----------------------------|-------|
| elnök: | Dr. Maksa Gyula .....       | ..... |
| tagok: | Dr. Hortobágyi István ..... | ..... |
|        | Dr. Kántor Sándorné .....   | ..... |

A doktori szigorlat időpontja: 2009. október 8.

Az értekezés bírálói:

|          |       |
|----------|-------|
| Dr. .... | ..... |
| Dr. .... | ..... |
| Dr. .... | ..... |

A bírálóbizottság:

|        |          |       |
|--------|----------|-------|
| elnök: | Dr. .... | ..... |
| tagok: | Dr. .... | ..... |
|        | Dr. .... | ..... |
|        | Dr. .... | ..... |
|        | Dr. .... | ..... |

Az értekezés védésének időpontja: 20... . . . .



# TARTALOMJEGYZÉK

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Bevezetés</b>                                                              | 1  |
| <b>1. A kutatáshoz kapcsolódó elméleti háttér</b>                             | 3  |
| 1.1. Pszichológiai elméletek                                                  | 3  |
| 1.1.1. Az értelmi fejlődésünk Piaget-féle szakaszai                           | 3  |
| 1.1.2. Skemp nézetei a matematikai fogalomalkotásról                          | 4  |
| 1.1.3. Vigotszkij elmélete a fogalmak fejlődéséről                            | 6  |
| 1.1.4. Bruner-féle reprezentációk                                             | 9  |
| 1.1.5. Fogalomképzet                                                          | 9  |
| 1.1.6. A tudás szerveződésének elméletei                                      | 10 |
| 1.1.6.1. A meghatározó tulajdonságok modellje                                 | 10 |
| 1.1.6.2. Meghatározó és jellemző jegyek elméletei, jegyösszehasonlító elmélet | 11 |
| 1.1.6.3. Prototípus- (vagy jellemző tulajdonság- ) elméletek                  | 11 |
| 1.1.7. Az agykutatás és a tanulás kapcsolata                                  | 12 |
| 1.2. Matematikadidaktikai elméleti alapok                                     | 13 |
| 1.2.1. A geometriai ismeretszerzés folyamatának van Hiele-féle szintjei       | 13 |
| 1.2.2. A tanulással kapcsolatos elméletek fejlődése                           | 16 |
| 1.2.2.1. A Comenius előtti pedagógia                                          | 17 |
| 1.2.2.2. A szenzualizmus pedagógiája                                          | 17 |
| 1.2.2.3. A cselekvés pedagógiája                                              | 17 |
| 1.2.2.4. A konstruktív pedagógia                                              | 17 |
| 1.2.3. A realisztikus matematikaoktatás                                       | 19 |
| 1.2.4. Világhírű magyar matematikadidaktikusok a matematikatanításról         | 20 |
| 1.2.5. Fogalmak tanítása                                                      | 24 |
| 1.3. Nyelvi problémák                                                         | 25 |
| <b>2. A kutatás bemutatása</b>                                                | 27 |
| 2.1. A fejlesztő tanítási kísérlet tantervi vonatkozásai                      | 27 |
| 2.1.1. Nemzeti Alaptanterv                                                    | 27 |
| 2.1.2. Kerettantervek                                                         | 29 |
| 2.2. Kutatási kérdések                                                        | 30 |
| 2.3. A kutatás hipotézisei                                                    | 30 |
| 2.4. Kutatási háttér                                                          | 30 |
| 2.4.1. Az iskola bemutatása                                                   | 30 |
| 2.4.2. A kísérleti osztályok bemutatása                                       | 31 |
| 2.5. A tájékozódó felmérés feladatai és értékelésük                           | 32 |
| 2.5.1. A négyzetre és a téglalapra vonatkozó feladatok                        | 32 |
| 2.5.2. Szögek nagyságának vizsgálata                                          | 38 |
| 2.5.3. A tengelyes szimmetriával kapcsolatos feladatok                        | 40 |
| 2.6. Tanítási kísérlet                                                        | 42 |
| 2.6.1. A tanítási kísérlet részletes tematikája                               | 44 |
| 2.6.2. A négyzet és a téglalap fogalom fejlesztése                            | 46 |

|           |                                                                                                           |            |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.6.2.1.  | Téglatest és téglalap, kocka és négyzet megkülönböztetése.....                                            | 46         |
| 2.6.2.2.  | Négyzet, téglalap alkotása konkrét tárgyi tevékenységekkel.....                                           | 47         |
| 2.6.2.3.  | A négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlítása,<br>tulajdonságkártyák .....                    | 49         |
| 2.6.2.4.  | A téglalap és a paralelogramma, illetve a négyzet és a rombusz<br>tulajdonságainak összehasonlítása ..... | 50         |
| 2.6.2.5.  | Négyzetek alkotása vizuális síkon .....                                                                   | 51         |
| 2.6.3.    | A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának fejlesztése.....                                               | 52         |
| 2.6.3.1.  | A szemközti és szomszédos szavak matematikai értelmezése....                                              | 52         |
| 2.6.3.2.  | A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának bevezetése.....                                                | 53         |
| 2.6.3.3.  | Különböző testek szemközti, illetve szomszédos lapjai<br>helyzetének vizsgálata .....                     | 59         |
| 2.6.3.4.  | Párhuzamos, merőleges egyenespárok előállítása síkban konkrét<br>tárgyi tevékenységgel.....               | 60         |
| 2.6.3.5.  | Síkidomok párhuzamos, illetve merőleges oldalpárjainak<br>megfigyelése .....                              | 61         |
| 2.6.4.    | A szimmetria fogalom fejlesztése.....                                                                     | 67         |
| 2.6.4.1.  | Testek tükörképének építése .....                                                                         | 68         |
| 2.6.4.2.  | Szimmetriasíkok helyének meghatározása különböző testek<br>esetén.....                                    | 70         |
| 2.6.4.3.  | Síkbeli tükörképek vizsgálata konkrét tárgyi tevékenységgel .....                                         | 70         |
| 2.6.4.4.  | Tengelyesen szimmetrikus alakzatok konstruálása.....                                                      | 71         |
| 2.6.4.5.  | Síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata .....                                                        | 72         |
| 2.6.5.    | A vizsgált fogalmakkal kapcsolatos vegyes feladatok .....                                                 | 76         |
| 2.6.5.1.  | Feladatok absztrakt, nyelvi síkon .....                                                                   | 80         |
| 2.7.      | Az utóteszt, késleltetett teszt feladatai és értékelésük.....                                             | 82         |
| 2.7.1.    | A négyzetre és téglalapra vonatkozó feladatok.....                                                        | 83         |
| 2.7.2.    | A párhuzamosságra és merőlegességre vonatkozó feladatok.....                                              | 90         |
| 2.7.3.    | A tengelyes szimmetriával kapcsolatos feladatok .....                                                     | 94         |
| <b>3.</b> | <b>Konklúzió, további kutatási lehetőségek .....</b>                                                      | <b>101</b> |
|           | <b>Irodalomjegyzék .....</b>                                                                              | <b>104</b> |
|           | <b>Összefoglaló.....</b>                                                                                  | <b>107</b> |
|           | <b>Summary .....</b>                                                                                      | <b>114</b> |
|           | <b>Melléletek.....</b>                                                                                    | <b>121</b> |

## BEVEZETÉS

A magyar matematikaoktatás – ezen belül a geometriaoktatás – célja az általános iskola kezdő szakaszán azon képességek fejlesztése, melyek segítségével a tanulók felkészülnek az önálló ismeretszerzésre. Az általános iskola alsó tagozatán a geometria alapvető fogalmainak – köztük a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria – alapozása történik. A geometriai fogalmak fejlődése hosszú folyamat, az első négy évfolyamon nem zárul le, más tanulási szinteken folytatódik tovább. A fogalmak kialakításánál a gyerekek életkorának megfelelő tényleges cselekvésekből indulunk ki, mivel a geometria tanulásának alapja a tapasztalatszerzésből kiinduló induktív megismerés. A konkrétból való kiindulás, a sokféle tevékenységből származó tapasztalatok összegyűjtése vezet el az általánosabb összefüggések megfogalmazásáig. *Bolyai Farkas* harmadik nevelési fő elve is a konkrétvaló kezdés fontosságát emeli ki: „mindég azokon kezdje, a’mit láthat, foghat, nem generalis definitiókon (nem grammaticán kezdődik az első szóllás); ’s ne kinozzon idő előtt hiába, hosszú soru okmútatással. ... Geometriai formákon s az olvasáson kell kezdeni ... ki kell a lapból is menni ...” (Dávid, 1979)

A geometria témakör oktatását az általános iskola első négy évfolyamán nem tartjuk elég hangsúlyosnak. Ennek belátására elegendő megvizsgálnunk a különböző kerettantervek e témakörre szánt óraszámát.

A témakör óraszámának aránya az éves összórászámhoz viszonyítva az 1-4. évfolyamon a következő:

|                                                   | 1. évfolyam | 2. évfolyam | 3. évfolyam | 4. évfolyam |
|---------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Apáczai Kerettantervcsalád                        | 16%         | 17%         | 24%         | 28%         |
| Mozaik Kerettantervrendszer                       | 15%         | 11%         | 16%         | 14%         |
| Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének Kerettanterve    | 18%         | 24%         | 24%         | 25%         |
| Nyíregyházi Tantervcsalád                         | 17%         | 20%         | 24%         | 24%         |
| EJF Gyakorló Általános Iskolájának helyi tanterve | 10%         | 10%         | 16%         | 16%         |

Véleményünk szerint a geometriai fogalmak megfelelő fejlődése érdekében az óraszámokat feltétlenül növelni kell, nem pedig csökkenteni, amint ez az utóbbi években történt.

Nem akarunk általánosítani, de – tapasztalataink szerint – gyakori probléma, hogy kevés munka- és szemléltetőeszközzel, sokszor a gyerekek egyéni tárgyi tevékenységének elhagyásával tanítják a geometriát, megakadályozva ezzel a személyes tapasztalatszerzést. A geometria és más témakörök tanításánál biztosítani kell a taneszközök használatát mindaddig, amíg a megfelelő képzettartalmak ki nem alakulnak. A konkrétumtól való indokolatlanul korai elszakadás azt a veszélyt hordozza magában, hogy nem alakul ki a megfelelő képzetrendszer, amely matematikai problémák megoldásához, fogalmak megértéséhez nélkülözhetetlen. „A kéz és a tevékenység bevonása a gondolkodásba nem alacsony szintű gondolkodást jelent, hanem éppen az adott témakörben való absztrahálás lehetőségéhez való alkalmazkodást. ... az eszközök használata éppen az absztrahálás folyamatának egy fokozatos megvalósítását teszi lehetővé.” (Szendrei, 2005)

Fontos megemlítenünk azt a problémát is, hogy alsó tagozaton gyakran kerül sor definíciók tanítására, alakzatok kapcsolatának vizsgálatára. Sok esetben megpróbálják elérni az oktatók a geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle harmadik – a *lokális logikai rendezés, az informális dedukció* – szintjét, ami a tanulók döntő többsége vonatkozásában nem reális elvárás. Ebben szerepet játszanak a tankönyvek is, amelyek definíciókat közölnek (így pl. A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő.), holott nincs meg a megfelelő tapasztalat, a szükséges absztrakciós szint.

Tanítószakos hallgatókkal végzett munkánk során többször tapasztaltuk, hogy mennyire idegenkednek a geometriától. Előfordul, hogy tanítójelöltek – akik matematikából érettségiztek – alapvető geometriai fogalmakkal, mint például téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség, tengelyes szimmetria, nincsenek teljesen tisztában. Van olyan hallgató, aki

- az általános paralelogrammát a téglalapokhoz sorolja,
- az általános paralelogramma átlóit szimmetriatengelyeknek véli,
- nem tudja, hogy a négyzet egyben téglalap is,
- a négyzet szomszédos oldalait párhuzamosnak tartja (valószínűleg a „szomszédos” szót nem értelmezi ebben az esetben megfelelően) stb.

Ezeknek a problémáknak a gyökerei feltehetőleg az alsó tagozatos tanulmányaikra nyúlnak vissza. Az előzőekben említett problémák adták az indítást arra, hogy ezeket a fogalmakat vizsgáljuk negyedik osztályos fejlesztő tanítási kísérlet keretében.

A dolgozat fő célja a *van Hiele*-féle fejlődési szintek realitásának igazolása a magyar alsó tagozatos geometria oktatásában. Kutatásunkban a következő kérdésekre kerestük a választ:

- A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei hogyan realizálódnak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában?
- Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek milyen hatékonysággal járulnak hozzá a vizsgált fogalmak fejlődéséhez?

Tanítási kísérletünk alatt végig arra törekedtünk, hogy a gyerekek saját tapasztalatszerzésük révén, sok munkaeszközzel, konkrét tárgyi tevékenységekkel fedezzék fel a fogalmak adott szinten elvárható tartalmi mélységeit, ily módon egyfajta örömként éljék meg a geometria tanulását.

# 1. A KUTATÁSHOZ KAPCSOLÓDÓ ELMÉLETI HÁTTÉR

## 1.1. PSZICHOLÓGIAI ELMÉLETEK

### 1.1.1. Az értelmi fejlődés Piaget-féle szakaszai

*Jean Piaget* (1997) a gyermek értelmi fejlődését szakaszokra bontja, melyek meghatározott sorrendben követik egymást. Az új szakaszba való átmenetnél a már meglévő *sémák* átszerveződnek. Főbb szakaszok:

#### 1. Érzékszervi- mozgásos szakasz (0-1,5 / 2 éves korig)

Ezen kezdeti fejlődési szakaszt a cselekvésbe ágyazott gondolkodás jellemzi, amely a születéstől a beszéd megjelenéséig tart. A gyerek számára csak a közvetlenül elérhető tárgyak léteznek. Cselekvéseit a sokszoros próbálkozás, ismétlődés jellemzi, amíg eljut bizonyos összefüggések feltárásához. A fejlődési szakasz végén a próbálkozások száma csökken, megtanulja a tárgyakat saját cselekvésétől függetlenül elképzelni.

#### 2. Műveletek előtti szakasz (1,5 / 2-7/8 éves korig)

A műveletek előtti szakasz további két szakaszra bontható: a fogalom előtti gondolkodásra (1,5-4 éves korig), valamint a szemléletes, intuitív gondolkodásra (4-7/8 éves korig). Megjelennek a szimbolikus funkció különböző formái: a beszéd, a szimbolikus (vagy képzelti) játék, a késleltetett utánzás. A gyerek adott szituációban egy tulajdonságra korlátozza figyelmét (*centralizálás*). Hajlamos egy transzformációs lánc közbeeső állomásaira koncentrálni, s nem magára a transzformációra. A logikai gondolkodás kezdetei figyelhetők meg (prelogikus gondolkodás), nincsenek világos fogalmak (csak előfogalmak). A gyerek nem képes cselekvéseit fordított irányban elképzelni, elvégezni (*irreverzibilitás*). Hiányzik a rész és egész viszonyának megértése.

#### 3. Konkrét műveletek szakasza (7/8-11/12 éves korig)

A cselekvésbe ágyazott gondolkodást felváltja a képzetek alapján lejátszódó gondolkodás. Ebben a szakaszban a gyermek gondolkodása még kapcsolódik a konkrét tárgyakhoz vagy ezek manipulációjához, de már képes elképzelni konkrét tárgyakkal való tevékenységeket is, melyek nincsenek a környezetében. Képes a belsővé vált (*interiorizált*) cselekvésekről, konkrét műveletekről beszélni. Az alsó tagozatos gyermek – az általunk vizsgált korosztály – gondolkodása konkrét műveletekben folyik. A műveletek az egyidejűleg vagy a röviddel előtte végrehajtott cselekvésekből szerzett tapasztalatoktól függenek és a logikai következtetések e tapasztalatokra korlátozódnak. A gyerek képes tárgyakat átrendezni, cselekvéseit, konkrét műveleteket fordított irányban is elképzelni (*reverzibilitás*). A dolgoknak az egyén cselekvéseihez való *asszimilációja* (a környezeti hatások beépülése, magyarázata a meglévő szellemi struktúrákba, sémákba) és a szubjektív sémáknak a dolgok módosulásához való *akkomodációja* (a meglévő séma korrigálása, módosítása vagy egy új séma létrehozása a környezet megértése, felfogása céljából) közötti egyensúly létrejötte magyarázza a megfordíthatóságot. Egy adott szituációban a gyermek egyszerre több szempontot is figyelni tud, összefüggéseket képes felismerni (*decentralizáció*). A tanuló 7-8 éves korban eljut a sorozatokban a

*tranzitivitás* felismeréséhez, az osztályok elkülönítésének logikai műveleteihez és az aszimmetrikus összefüggések sorba rendezésének műveleteihez. Gondolkodásában már szerepel a tartalmazási reláció, de ebben az életkorban ez a gondolkodási művelet még konkrét helyzetekre, jelenlevő tárgyakra korlátozódik. Ekkor alakul ki a szám, idő, hosszúság, terület, térfogat, tömeg, súly fogalma. A gyerek egyszerű verbális állítások segítségével – tárgyakkal történő manipuláció nélkül – képtelen gondolkodni, tiszta nyelvi síkon következtetéseket levonni.

#### 4. Formális műveletek szakasza (11/12 éves kortól)

A konkrét gondolkodást felváltja a *hipotetikus-deduktív gondolkodás*, amelyben a lehetséges megelőzi a valóságot. A gondolkodási folyamat független a konkrét szituációtól. A műveletek végzése ítéletekkel történik. A tanuló a tárgyakat, tulajdonságokat, fogalmakat nevükkel jellemzi. Egyre növekvő biztonsággal végzi logikai következtetéseit. Képesse válik absztrakt összefüggéseket a konkrét tapasztalati valóságra való hivatkozás nélkül megérteni.

Piaget elméletének bírálói a gyermek értelmi fejlődésének szakaszosságát, azok sorrendjét nem vitatják, csak az egyes szakaszok időtartamát, mert van, aki gyorsabban végig megy egy-egy szakaszon. A fejlődést különböző hatások – mint az oktatás, család, kultúrkör, szabadidős program – meggyorsíthatják. (Ambrus, 1995)

#### 1.1.2. Skemp nézetei a matematikai fogalomalkotásról

*Richard R. Skemp* (1975) „A matematikatanulás pszichológiája” című könyvében az absztrahálás eredményét, a gondolati absztrakciót nevezi fogalomnak. Egy fogalom megalkotásához számos olyan tapasztalat szükséges, melyekben valami közös van. A fogalomalkotás kiinduló pontja az osztályba sorolás, amely a hasonlóságok alapján a tapasztalatok különböző csoportokba sorolását jelenti. A fogalomalkotás meggyorsítására felhasználhatjuk a nyelvet, amely segít összegyűjteni és elkülöníteni a fogalommal kapcsolatos példákat és ellenpéldákat.

Skemp a fogalmak két fajtáját különbözteti meg: az *elsődleges* fogalmakat, amelyek a külvilággal való érzéketi és mozgásos tapasztalatokból erednek (pl.: piros, autó, forró, édes), és a *másodlagos* fogalmakat, amelyek más fogalmakból absztrahálódnak (szín, közlekedési eszköz, stb.). Ha az *A* fogalom a *B* egyik példája, akkor *B* magasabb rendű fogalom *A*-nál. Ez az összehasonlítás csak azonos hierarchiába tartozó fogalmak között végezhető el. Fontos megállapítása Skempnek, hogy magasabb rendű fogalmakat, mint amilyenekkel az egyén rendelkezik, nem közvetíthetünk számára definíció segítségével, csupán megfelelő példák összegyűjtésével. A definíció pontosíthatja a már kialakult fogalom határait, és megállapítja a fogalomnak a többi fogalomhoz való kapcsolatát. A fogalmak csak akkor használhatók fel új, magasabb rendű fogalmak alkotásához szükséges példaként, ha leválaszthatók azoktól az eredeti érzéketi tapasztalatoktól, amelyekből származnak. Ez a leválaszthatóság kapcsolatban van az absztrakciós képességgel. Ha egy fogalmat már megalkottunk, akkor ott is meglátjuk a fogalom különböző példáit, ahol erre előzőleg nem voltunk képesek.

A matematikai fogalmak absztraktabbak a hétköznapi élet fogalmainál, ezért közvetítésük nehezebb. A matematikai fogalomalkotásban a definíciók szerepéről, tanításukról Skemp a következő két alapelvét – az elsőt már említettük – fogalmazta meg:

1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csak is oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.
2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.

A megfelelő példák kiválasztása nehéz feladat, mert a példáknak rendelkezniük kell azokkal a közös tulajdonságokkal, amelyek a fogalmat alkotják, de nem szabad rendelkezniük semmiféle más közös tulajdonsággal.

Skemp szerint a fogalomalkotáshoz bizonyos mértékű *zajra* – a fogalom szempontjából *irreleváns* tulajdonságokra – is szükség van. A fogalmak kialakulásának kezdeti szakaszában kevés zaj, kevés zavaró részlet kívánatos. A fogalom fejlődésével párhuzamosan azonban a tanulónak egyre nagyobb zajra lesz szüksége ahhoz, hogy a fogalom bizonyos tulajdonságait egyre nehezebb példákból absztrahálja, és így csökkenjen a tanártól való függősége. Így alakulhatnak ki tiszta, világos matematikai fogalmak. Ha a tanuló csak olyan négyzettel, téglalappal találkozott, amelynek oldalai a papírlap, füzetlap széleivel párhuzamosan helyezkednek el, nem várható el tőle, hogy a ferdén elhelyezkedő vagy csúcsára állított négyzetet és téglalapot felismerje. Ilyen esetben nem találkozott megfelelő példák sokaságával. Nem történt meg a zajszint növelése, ezért nem alakult ki megfelelő fogalom a négyzetről és a téglalapról.

Egy fogalom, az egyre fokozódó szintű absztrakciók struktúrájának felépítésekor egy közbülső szint tökéletes megértésének hiánya nagy veszélyt jelent az építmény további, erre épülő szintjei számára. Ez a függőség a matematikában erőteljesebben jelentkezik, mint más tudományterületeken.

Az általános pszichológia a szellemi struktúrákat *szkémáknak* nevezi. A matematikatanításban szkémákon a matematika komplex fogalmi struktúráit, fogalomrendszereit értjük. Minden egyes fogalom fogalmak rendszerében helyezkedik el. Az elsődleges fogalmak kivételével valamennyi fogalom más fogalmakból származik, ugyanakkor hozzájárul további fogalmak képzéséhez, azaz minden fogalom valamilyen hierarchia része. Egy szkémának két funkciója van: egyrészt integrálja a meglévő tudást, másrészt szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához. Minden, amit tanulunk, összefüggésben van valami mással, amit már tudunk. A szkémák szerinti (értelmes) tanulással olyan szellemi eszközt dolgozunk ki a magunk számára, amellyel megkönnyebbíthetjük az adott területen a későbbi tanulást. Ennek az eszköznek a következetes használata a szkéma korábban elsajátított részeit is megszilárdítja. A szkémák szerinti tanulás egyik hátránya, hogy hosszabb időt vesz igénybe, de ugyanakkor nagymértékben csökkenti a kognitív megterhelést. A szkémák elsajátítására fordított idő pozitív értéke, hogy megkönnyíti és tartósabbá teszi a jelenlegi és a jövőbeni tanulást. A szkémák szerinti tanulás másik hátránya, hogy a szkémáknak erős szelektív hatásuk van tapasztalatainkra. Ami nem illik bele ezekbe a szkémákba, azt nagyrészt egyáltalán nem tanuljuk meg, és ha ideig-óráig meg is tanuljuk, hamarosan elfelejtjük. A nem megfelelő szkémák komoly hátrányt, visszahúzó erőt jelentenek a későbbi tanulásban, ugyanakkor a megfelelő szkémák erős segítőeszközök. Ha olyan helyzetek adódnak, amelyben a meglévő szkémák nem megfelelőek, akkor a szkémák szerkezetének megváltoztatására van szükség, a szkémáknak maguknak is alkalmazkodniuk kell.

Egy matematikai fogalom kialakítása során a fogalmat be kell illeszteni, *asszimilálni* a meglévő fogalmak rendszerébe, de előfordul, hogy az új fogalom beillesztéséhez a már meglévő rendszer, szkéma módosítása, *akkomodációja* szükséges. Az asszimiláció és akkomodáció egyensúlya nélkülözhetetlen a megfelelő fogalomalakuláshoz. Ha ez az egyensúly felbomlik, azaz az asszimilációt nem követi megfelelő akkomodáció, akkor a tanuló saját, egyéni magyarázó elvei épülnek be matematikai ismereteibe, ami később fogalmi zavarhoz vezethet. Az így alakuló fogalmak meghatározásai bizonytalanok, pontatlanok lesznek.

Egy fogalmat vagy valamilyen információt megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába. A megértés szubjektív érzését persze egy nem megfelelő szkémába történő asszimiláció is előidézheti. A tanár feladata ezt felismerni. Az asszimiláció során a feldolgozandó információ, fogalom kapcsolatba kerül a szkéma más elemeivel. Minél nagyobb a kapcsolatok száma, erőssége, stabilitása, annál alaposabb a *megértés*. Skemp (1978) megkülönbözteti az *instrumentális* és *relációs* megértést:

- az *instrumentális* megértésnél a tanuló tudja, *hogyan* oldjon meg feladatokat (tudja alkalmazni az eljárást),
- a *relációs* megértésnél a tanuló tudja, hogy *mit* és *miért* kell csinálni.

Fejlesztő tanítási kísérletünk során arra törekedtünk, hogy a geometria témakörben az instrumentális megértésen túl elsősorban a relációs megértést fejlesszük.

A tanulás kezdeti szakaszában kialakított, nem megfelelő szkémák, a későbbi fogalmak asszimilációját sokkal nehezebbé, esetleg lehetetlenné teszik. A tanár feladata úgy közvetíteni az új fogalmakat, hogy azok alkalmasak legyenek megfelelő, hosszútávon érvényes szkémák kialakítására. A tanulás kezdetén a tanár felelőssége az, hogy a tanulók szkémák szerint (értelmesen) tanuljanak, ne csupán szimbólumokkal való műveletek memorizálását (magolását) végezzék. Fel kell ismernie a pedagógusnak azokat a pontokat, amelyek csak egyszerű asszimilációt igényelnek, valamint azokat is, ahol akkomodációra van szükség. Utóbbi esetben lassúbb léptekkel kell haladnia és a tanulók haladását gondosabban kell ellenőriznie. Mindent megtanítani nem lehet, de segíteni kell tanulóinkat abban, hogy keressék és megtalálják az alapvető rendszereket. Meg kell tanítani őket arra, hogy szkémáikat tudják akkomodálni, szükség esetén a meglévő szkémákat jobbakra cserélni, azaz meg kell tanítani a tanulóinkat a matematika tanulására.

### 1.1.3. Vigotszkij elmélete a fogalmak fejlődéséről

L.Sz. Vigotszkij (2000) kísérleteik alapján arra a következtetésre jutott, hogy a fogalomalkotáshoz vezető folyamatok fejlődésének gyökerei mélyen visszanyúlnak a gyermekkorba, de csak a serdülőkor beálltakor válik lehetővé a döntő átmenet a fogalmakban való gondolkodás területére. Eddig a korig a fogalmakhoz hasonló funkciót betöltő fogalomekvivalensek, sajátos intellektuális formációk vannak, amelyek úgy viszonyulnak a valódi fogalmakhoz, mint magzat az érett szervezethez. Azonosítani őket egymással annyit jelentene, mint egyenlőségjelet tenni kezdeti és befejezett állapotuk közé.

A fogalomalkotás folyamatában részt vesznek pszichológiai elemi funkciók (asszociáció, figyelem, képzet, ítélet, determináló tendencia), de ezek nem vezethetnek fogalomalkotáshoz. Fogalmak nem léteznek szavak nélkül. A fogalomalkotás folyamatának meghatározó, központi tényezője a szó specifikus

használata, a jelnek, mint a fogalomalkotás eszközeinek funkcionális alkalmazása. A fogalomalkotás folyamata jelek segítségével átmenetet képez a közvetlen intellektuális folyamatokból a közvetett műveletekhez.

Vigotszkij és munkatársai a fogalmak fejlődésében három alapvető fokozatot különböztetnek meg.

1. A fogalomképzés legalacsonyabb szintje kisgyermekkorban a *rendezetlen és szabálytalan tömeg képzése*. A fejlődésnek ezen szakaszában a szó jelentése az egyes tárgyak határozatlan, rendezetlen szinkretikus láncolata. A gyermek képes a legkülönbözőbb és egymással belső összefüggésben nem lévő elemeket egy tagolatlan összeolvadtt képpé összekapcsolni. Szavának jelentése a fogalom adott fejlődési fokán, külső formájában emlékeztethet a felnőtt ember szavára, a jelentés azonban pszichológiailag teljesen különböző, sajátos műveletek eredménye, a szinkretikus képzavar terméke. A gyermeket nem a dolgokban levő objektív kapcsolatok vezetik, amelyeket ő fedez fel, hanem szubjektív kapcsolatok, amelyeket saját észlelése sugalmaz.
2. A *komplexumok képzésének* fokozata kapcsolatok alkotásához, különböző konkrét élmények viszonyok megteremtéséhez, egyes tárgyak egyesítéséhez és általánosításához, a gyermek tapasztalatának rendezéséhez és osztályozásához vezet. Az egyes konkrét tárgyak vagy dolgok komplexumai már nem szubjektív, összefüggés nélküli kapcsolatok alapján, hanem a tárgyak között valóban létező, objektív kapcsolatok alapján képződnek. A komplex gondolkodás már összefüggő és objektív, de még mindig nem igazi fogalmi gondolkodás. A komplexum alapját nem az absztrakt-logikai, hanem a konkrét és tényleges kapcsolatok képezik. A fogalom alapját ezzel szemben egy típusú kapcsolatok képezik, amelyek egymással logikailag azonosak. A komplex gondolkodásban az ismérvek nagyon változékonyak, szüntelen átmenet figyelhető meg egyik ismérvről a másikra. A komplexumban – eltérően a fogalomtól – hiányoznak az ismérvek közötti hierarchikus kapcsolatok. A komplexum nem emelkedik elemei fölé úgy, mint ahogy a fogalom emelkedik a hozzá tartozó konkrét tárgyak fölé. A komplex gondolkodás lényeges vonása körvonalainak határozatlansága és elvi határtalansága. Vigotszkij szerint az *álfogalom* a komplex gondolkodás legelterjedtebb formája, amely hidat képez a fogalomképzéshez. Az álfogalom külső megjelenésében fogalom, belső oldaláról nézve komplexum. Nem szabadon, nem spontán fejlődik, hanem határozott irányban, amelyet a komplexum fejlődése számára a felnőttek beszédében már kialakult szójelentések írnak elő. Verbális síkon, külsőleg az álfogalom a felnőttek szójelentésével egybevágó dolog, ami azonban belülről nézve lényegesen különbözik attól, mert teljesen más intellektuális művelettel, gondolkodásmóddal kapja a gyermek. Az álfogalom az összekötő láncszem a komplex gondolkodás és a fogalmakban való gondolkodás között.
3. A harmadik fejlődési szakasz genetikai funkciója a széttagolás, az analízis, az absztrakció fejlődése. Itt figyelhető meg először teljes határozottsággal az *absztrahálási folyamat*. A fogalmak fejlődésének fontos fázisa a *potenciális fogalmak* stádiuma. Itt a gyermek közös ismérvek alapján egyesíti valamely tárgycsoport tagjait. A potenciális fogalom a megszokottra történő beállítódás, az intellektuálist megelőző képződmény. Még mindig nem fogalom, de valami

olyan, ami azzá lehet. A potenciális fogalomban az ismérv, amelynek alapján a tárgy valamely csoporthoz kapcsolódik, kiemelt, előnyben részesített, a többi ismérvek konkrét csoportjából absztrahálódott, amelyekkel tényleges kapcsolatban áll.

Vigotszkij hangsúlyozza, hogy az absztrahálás folyamatának elsajátítása és a komplex gondolkodás kifejlődése révén képes eljutni a gyermek a valódi fogalmak képzéséhez. Fogalom akkor keletkezik, amikor az elvont ismérvek sora újra szintetizálódik és amikor az így kapott absztrakt szintézis a gondolkodás alapvető formája lesz. A valódi fogalom képzésénél döntő szerep jut a szónak.

A gyermek a fogalmi gondolkodás elsajátítása után sem szakad el az elemi formáktól. A felnőtt ember sem gondolkodik mindig fogalmakban, hanem gyakran komplexumokban. A köznapi gondolkodásra különösen jellemző, hogy álfogalmakban megy végbe.

Vigotszkij kísérletei megmutatták, hogyan alakul ki szinkretikus képekből és kapcsolatokból, komplex gondolkodásból, potenciális fogalmakból a szó, mint a fogalomképzés eszköze segítségével az a sajátos, szignifikatív struktúra, amelyet *fogalomnak* nevezhetünk.

A negyedik osztályos tanulók még nem képesek fogalmakban gondolkodni, erre csak a serdülőkorban válnak alkalmassá. Komplexumokban való gondolkodás jellemzi őket. Álfogalmaik külsőleg ugyan emlékeztetnek a valódi fogalmakra, de számukra a szó konkrét tárgyak komplexumait jelölő eszköz. Megjelennek a potenciális fogalmak, amelyek még szintén nem fogalmak, de itt először rombolja le a gyermek az egyes ismérvek absztrahálása segítségével a konkrét szituációt.

Vigotszkij megkülönbözteti a mindennapi tapasztalatinkból alakuló *köznapi* vagy *spontán* és a szervezett, tervszerű ismeretsajátítás útján létrejövő *tudományos* fogalmakat. A tudományos fogalmak – úgy, mint a téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria – fejlődésének forrása az iskolai oktatás. Vigotszkij megfigyelései alapján arra a következtetésre jutott, hogy amennyiben az oktatási folyamat tartalmazza a tananyag megfelelő mozzanatait, úgy a tudományos fogalmak fejlődése megelőzi a spontán fogalmak fejlődését. Az oktatási folyamatban a gyermek és a felnőtt sajátos együttműködése, emellett az ismeretek meghatározott rendszerben történő átadása a gyermeknek, magyarázatot ad a tudományos fogalmak korai érésére. Pedagógiai tapasztalat alapján belátható, hogy a fogalmak közvetlen betanítása lehetetlen, nem sajátíthatók el egyszerű magolással. Az új szó pusztán elsajátítása – a verbalizmus – ürességet takar. Ilyenkor csupán szavakat, nem pedig fogalmakat sajátít el a gyermek. Amikor először ismeri fel az új szó jelentését, akkor kezdődik csak el a fogalom fejlődési folyamata. A tudományos fogalmakat tehát nem kész formában sajátítja el és tanulja meg a gyermek, hanem saját aktív gondolkodása révén keletkeznek és alakulnak ki. A spontán és tudományos fogalmak fejlődése szorosan összefüggő folyamatok, amelyek szüntelen kölcsönhatásban vannak egymással. A tudományos fogalmak fejlődésének, elsajátításának alapvető feltétele a spontán fogalmaknak az iskoláskor kezdetére jellemző meghatározott érettségi színvonala. Ugyanakkor a tudományos fogalmak keletkezése is kihat a spontán fogalmak fejlődésére. Az oktatás folyamán kialakuló tudományos fogalmak abban különböznek a spontán fogalmaktól, hogy más a viszonyuk a gyermek tapasztalataihoz. A köznapi és tudományos fogalmak fejlődése ellentétes irányban halad. A spontán fogalmak alulról felfelé, az elemibb és alacsonyabb sajátosságoktól a magasabbak felé haladva fejlődnek, a tudományos

fogalmak pedig felülről lefelé, a bonyolultabb és magasabb rendű sajátosságoktól az elemibb és alacsonyabb sajátosságok felé haladva.

#### 1.1.4. Bruner-féle reprezentációk

*Bruner* (1974) elsősorban olyan megismerési folyamatokat tanulmányozott, mint a problémamegoldás, fogalomalkotás, gondolkodás és a perceptuális felismerés. Szerinte a matematikaoktatásnak elsősorban olyan alapelvekre kell épülnie, amelyek feltárik a valóság és a matematika belső világának kapcsolatát, és lehetővé teszik annak magyarázatát. Úgy gondolja, hogy a matematika és valamennyi tantárgy alapvető elvei minden gyereknek a számára érthető reprezentációs mód segítségével, egyszerű megfelelő formában megtaníthatók. A tananyag megértéséhez azonban az szükséges, hogy egy korai fázisban a tanuló intuitív formában feldolgozza azt, és később – az életkori fejlettségnek megfelelően – újra tárgyalásra kerüljön az adott tananyag.

Bruner szerint minden gondolkodási folyamat három különböző síkon mehet végbe, az ismereteknek, a tudásnak háromféle reprezentációs módja létezik:

- *materiális (enaktív) sík:*  
Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekvések, manipulációk révén megy végbe.
- *ikonikus sík:*  
Az ismeretszerzés szemléletes, összegző képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.
- *szimbolikus sík:*  
Az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével megy végbe.

Ez a három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. A cselekvések, képek és szimbólumok más-más nehézséggel járnak, így másképpen hasznosak a különböző életkorokban. Bár az alsóbb osztályokban az enaktív és az ikonikus reprezentáció dominál, mindemellett a nyelv (beszéd) is fontos szerepet játszik, amely szimbolikus síkot jelent. Az első két szakasz megkerülése azt a veszélyt hordozza magában, hogy a tanuló a megfelelő képzetrendszer hiánya miatt a szimbolikus síkon nem képes matematikai problémákat megoldani, fogalmakat megérteni, mert nincs mire támaszkodnia. Amennyiben az első szakaszt kerüljük meg (a konkrét tárgyi tevékenységet), akkor viszont nem alakul ki a megfelelő képzetrendszer. (Ambrus, 1995)

Kísérletünk tervezésekor az volt a célunk, hogy az általunk vizsgált geometriai fogalmak (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) tanítása során – a későbbi megfelelő képzetrendszer kialakulása érdekében – az enaktív reprezentációt alkalmazzuk a leghosszabb ideig, valamivel kevesebb ideig az ikonikus reprezentációt. Szimbolikus reprezentáción alsó tagozaton elsősorban a nyelvet értjük, ami folyamatosan jelen van. A szóbeli megfogalmazás nehézségei jól megfigyelhetők a gyerekek magyarázatainál, indokolásainál és a barkóba játékoknál.

#### 1.1.5. Fogalomképzet

*Shlomo Vinner* és *David Tall* (1981) vezették be a *fogalomképzet* (concept image) elnevezést a matematika-didaktika szakirodalomba. A fogalomképzet a

fogalom nevéhez kapcsolódó teljes kognitív struktúrát jelent, amely magában foglalja mind a mentális képeket (belső kapcsolatokat), mind pedig az ezzel összekapcsolt tulajdonságokat, folyamatokat, képeket, ábrákat, konkrét tapasztalatokat, példákat és élményeket. A konkrét tárgyi és képi reprezentációk segítik a fogalom mentális képének létrehozását, amely nem egyszerű másolata a külső reprezentációnak, hiszen az egyén konstruktív aktivitása révén jön létre és függ az egyén tapasztalataitól, tudásától. A képek, konkrét példák és tapasztalatok jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában.

Célunk a tanítási kísérletünkben az volt, hogy a tanulók sok konkrét tevékenység (modellezés, hajtogatás, nyírás, rajzolás) segítségével a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria fogalmaival kapcsolatban gazdag tapasztalatra tegyenek szert, fogalomképzetük sokoldalú legyen.

### **1.1.6. A tudás szerveződésének elméletei**

Ez a kutatási irányzat azt vizsgálja, hogy a bennünket körülvevő világ különböző tárgyait hogyan csoportosítjuk fogalmilag, miként szervezzük a tárgyak, dolgok egy osztályának tagjairól vagy példányairól szóló tudást fogalmakba, és hogyan kapcsoljuk a kialakult fogalmakat egymáshoz.

#### **1.1.6.1. A meghatározó tulajdonságok modellje**

A modell szerint – amely Gottlob Frege munkáján alapul – egy fogalmat *meghatározó tulajdonságokkal* ragadhatunk meg. Frege megkülönbözteti egy fogalom *intenzióját* és *extenzióját*. A fogalom intenzióját olyan jellemzők alkotják, melyek meghatározzák, hogy mi alapján tartozik valami a fogalom körébe, az extenziója pedig azoknak az entitásoknak az összessége, melyek a kategória tagjai. Így például a négyszög fogalom intenziója meghatározó tulajdonságainak – mint sokszög, 4 csúcs, 4 oldal – halmaz, míg extenziója mindazoknak a sokszögeknek az összessége, amelyek négyszögek (pl. valamennyi négyzet, téglalap, rombusz, deltoid stb.). Tulajdonságon a fogalmak intenzióját értjük.

A meghatározó tulajdonságok elméletének általános jellemzői a következők:

- Egy fogalom jelentését tulajdonságok összekapcsolásával ragadhatjuk meg.
- Ezek a tulajdonságok – atomisztikus, elemi egységek – a fogalmak alapvető építőelemeit alkotják.
- A tulajdonságok mindegyike szükséges, összességük pedig elégséges ahhoz, hogy valamit a fogalom példányának tekintsünk.
- Egyértelműen meghatározható, mi tartozik egy kategóriába és mi nem. Világos és merev határok húzhatók a kategóriák tagjai és a nem oda tartozó elemek között.
- A fogalom minden tagja egyforma mértékben reprezentatív.
- A fogalmak hierarchiába szerveződésénél egy specifikusabb fogalom (pl. négyzet) meghatározó tulajdonságai az általánosabb, felsőbb kategóriához (pl. sokszög) viszonyítva tartalmazzák a felsőbb kategória összes tulajdonságát.

A meghatározó tulajdonságok elméletének bírálói helytelennek tartják azt a jellemzőt, mely szerint a fogalmak szükséges és elégséges tulajdonságokon alapulnak. A bírálók szerint a fogalmak különböző tulajdonságai nem egyformán fontosak. A fogalom minden eleme sem egyformán fontos és reprezentatív. Bizonyos

tagjait tipikusabbnak, a kategória jobb példányának tekintjük, mint másokat. Vannak olyan fogalmak, amelyeknek – úgy tűnik – egyáltalán nincsenek meghatározó tulajdonságaik (pl. játék). Többen cáfolják azt az elképzelést, hogy a kategóriához való tartozás egyértelmű és világos. Véleményük szerint bizonyos kategóriák elmosódottak. Kimutatták azt is, hogy az emberek a fogalmak hierarchiáját nem tranzitív értelemben fogják fel, bár a meghatározó tulajdonságok elmélete ezt sugallja.

A kritikák, az egyes jellemzők bizonyított cáfolatai a fogalmak meghatározó tulajdonságokon alapuló elméletének újraértékeléséhez vezettek.

#### **1.1.6.2. Meghatározó és jellemző jegyek elméletei, jegyösszehasonlító elmélet**

A *meghatározó és jellemző jegyek elméletei* megtartják a meghatározó jellemzőket, de hozzáteszik, hogy a fogalmak *jellemző jegyekkel* rendelkeznek. Ezen elméletek egyike a *jegyösszehasonlító* elmélet. A jegyösszehasonlító elmélet jellemzői a következők:

- A fogalmakat két tulajdonságtípus reprezentálja: meghatározó tulajdonságok és jellemző tulajdonságok.
- A *meghatározó tulajdonságok* a fogalom lényegét határozzák meg. Ezek a tulajdonságok közősek a kategória minden tagjában.
- A *jellemző tulajdonságok* azt adják meg, hogy a kategória egy-egy tagját az emberek mennyire ítélik tipikusnak vagy reprezentatívnak.
- A fogalmak verifikálása két lépésben történik: az első lépésben a fogalmak összes meghatározó és jellemző tulajdonságának összehasonlítása, második lépésben csak a meghatározó tulajdonságok összevetése.
- A második lépés akkor szükséges, ha az első lépésben nem jön létre egyértelmű eredmény.

A jegyösszehasonlító elmélet általános érvénye erősen megkérdőjelezhető. Nem tud objektív módon különbséget tenni a meghatározó és a jellemző tulajdonságok között. Számos bizonyíték merült fel, hogy a kategóriához való tartozás határai homályosak, elmosódottak.

#### **1.1.6.3. Prototípus- (vagy jellemző tulajdonság - ) elméletek**

A *prototípuselméletek* célja, hogy megmagyarázzák a meghatározó tulajdonságok elméletének hiányosságait. Az elmélet alapvető elképzelése az, hogy a kategóriák központi prototípusok körül szerveződnek. A prototípuselmélet általános, központi elképzelései a következők:

- A fogalmak prototípusok mentén szerveződnek. A prototípust vagy a jellemző tulajdonságok együttese vagy a fogalom legjobb példája (példái) reprezentálja (reprezentálják).
- Nem állapíthatók meg szükséges vagy elégséges tulajdonságok a kategóriák meghatározására. Létezhetnek ugyan szükséges tulajdonságok, de összességük nem elégséges. A fogalomhoz való tartozást az határozza meg, hogy a tárgy milyen nem szükségszerű tulajdonságokkal rendelkezik, amelyeket tipikusabbnak vagy reprezentatívabbnak tekintünk, mint másokat.

- A fogalmak közötti határok elmosódottak, nem világosak. Nem határozható meg egyértelműen, hogy mi tagja a kategóriának és mi nem. Így néhány dolog könnyen átsorolható egyik kategóriából a másikba.
- A fogalom példányainak eltérő tipikusságát mutatja meg a *tipikussági görbe*.
- A kategóriához való tartozást a tárgy tulajdonságainak a kategória prototípusához – a jellemző tulajdonságok együtteséhez vagy a kategória legjobb példájához – való hasonlósága határozza meg.

A prototípuselmélet vizsgálatánál felmerült az a kritika, hogy nem minden fogalomnak van prototipikus jellemzője. Bizonyos absztrakt fogalmak (pl. szabály, hiedelem) nem rendelkeznek prototipikus szerkezettel. Az elmélet nem foglalkozik azokkal az ismeretekkel, melyekkel az emberek a kategóriák közötti viszonyokkal kapcsolatosan rendelkeznek, és nem ad magyarázatot a kategóriák kohéziójáról. (Eysenk – Keane, 2003)

Alsó tagozatos gyerekeknél definíciók hiányában csak a prototípusfelfogás a releváns. Ennél a korosztálynál a téglalap, négyzet fogalmak prototipikus szerkezetéről beszélhetünk. A téglalap fogalom prototípusát azok a téglalapok alkotják, amelyeknél a szomszédos oldalak – könnyen felismerhetően – különböző hosszúak, de nem szélsőségesen eltérőek. A téglalap fogalom tipikus, legjobb példáihoz – az oldalak egyenlősége miatt – nem tartoznak a négyzetek. A téglalap kategória prototípusához való hasonlósága alapján nehéz eldönteni a négyzetek esetén a téglalap kategóriához való tartozásukat.

#### 1.1.7. Az agykutatás és a tanulás kapcsolata

Josef Kraus (Caspary szerkesztésében, 2006) a modern agykutatás eredményei alapján az oktatás számára a következő követelményeket állapította meg:

- A tanítás a legnagyobb mértékben segítse elő a tanulói aktivitást.
- A tanítás-tanulási folyamat több csatornán – olvasott, hallott, látott információkon, valamint a tanuló saját maga által végzett tevékenységein – keresztül történjen. Kutatások szerint az olvasott információk 10%-a, hallott információk 20%-a, látott és hallott információk 50%-a, saját magunk által végzett tevékenységekből származó információk 90%-a marad meg az emlékezetünkben. Az utóbbi arányszám a konkrét tárgyi tevékenységek, cselekvések, manipulációk fontosságára hívja fel a figyelmet.
- Gyakorlat teszi a mestert. A gyakorlás hozzájárul a különböző eljárások, technikák elsajátításához (pl. adott tengelyre történő tükrözés).
- A tanulás során biztosítsunk pihentető, lazító szakaszokat.
- A tanítás-tanulási folyamatban szükséges a tanulók figyelmének folyamatos provokálása, meglepő és váratlan helyzetek teremtése.
- A hatékony tanulás eléréséhez megfelelő környezetet, hangulatot kell teremteni.
- Tartsuk ébren a tanulói kíváncsiságot!
- A testi aktivitás elősegíti a tanítás-tanulási folyamatot, ezért legyen e folyamat része.

Az itt megfogalmazott didaktikai követelmények betartására törekedtünk tanítási kísérletünkben.

## 1.2. MATEMATIKADIDAKTIKAI ELMÉLETI ALAPOK

### 1.2.1. A geometriai ismeretszerzés folyamatának *van Hiele-féle* szintjei

*Pierre és Dina van Hiele* – két holland matematika tanár – az 1950-es években Hollandiában szerzett középiskolai tanári tapasztalataik alapján dolgozták ki oktatási elméletüket a geometriai gondolkodás szintjeiről. A geometriai ismeretszerzés folyamatát 5 szintre tagolták:

1. szint: *alakzatok globális megismerése,*
2. szint: *alakzatok elemzése,*
3. szint: *lokális logikai rendezés (informális dedukció),*
4. szint: *törekvés a teljes logikai felépítésre (formális dedukció),*
5. szint: *axiomatikus felépítés.*

A geometriai fogalmak fejlődése, majd kialakulása ezen hierarchikus szinteken keresztül zajlik. A tanulók – osztálytermi munka során tapasztalt – tanulási nehézségeit megfigyelve azonosították be ezeket a szinteket. Pierre van Hiele ezt így mondta el:

*„Amikor matematika tanárként elkezdtem pályámat, hamar rájöttem, hogy ez egy nehéz hivatás. Voltak olyan lényeges dolgok, melyeket csak magyaráztam, magyaráztam, aztán mégsem értették meg a diákok. ... A következő években többször megváltoztattam a magyarázatom módját, de a nehézségek megmaradtak. Mindig úgy tűnt, mintha egy idegen nyelven beszélnék. Ezt átgondolva rájöttem a megoldásra: a különböző szintű gondolkodásra.”* (van Hiele, 1986)

Pierre és Dina van Hiele elméletüket 1957-ben közös disszertációban az Utrechti Egyetemen jelentették meg. Pierre van Hiele 1957-ben Franciaországban is publikálta elméletét, majd 1958-ban a geometriai gondolkodás szintjeit ismertette az edinburghi Matematikai Didaktikai Kongresszuson „A gyermek gondolkodása és a geometria” címmel tartott előadásán. Szovjet didaktikusok is felfigyeltek ezekre a gondolatokra, és a 60-as években a van Hiele modellre alapuló kiterjedt kutatásokat folytattak, melyek aztán változtatásokat eredményeztek a geometria tantervében. *A.M. Piskalo* ilyen irányú kutatásait, eredményeit és módszertani javaslatait olvashatjuk a „Geometria az 1-4. osztályban” című 1968-ban megjelent művében (2. kiadás).

Az 1970-es évek végétől az Egyesült Államokban is vizsgálni kezdték van Hiele elméletét az öt gondolkodási szintről. A 80-as években ezt a teóriát – többek között – Mayberry, Burger, Shaughnessy, Fuys, Geddes, Tischler, Usiskin, Senk tanulmányozták, ennek illetőleg további publikációk eredményeként sikerült közelebb hozni van Hiele elméletét a gyakorlati megvalósításhoz.

A kisgyermek irányított geometriai ismeretszerzési folyamata már az óvodában elkezdődik. A környezet tárgyainak formáját vizsgálva indul a geometriai objektumok (a mértani test, a síkidomok stb.) fogalmának kialakítása. Ezen objektumok halmazára jellemző tulajdonságok megállapítása azonban már az ismeretszerzés magasabb fokát jelenti.

*Az alakzatok globális megismerésének szintjén* (1.szint) a gyerek a geometriai alakzatokat, mint egységes egészet fogja fel. Nem képes elkülöníteni az alakzatok részeit (alkotóelemeit). Könnyen felismeri a különböző alakzatokat a formájuk

alapján, megtanulja az alakzatok nevét (négyzet, téglalap, háromszög, négyszög, ötszög, kör, gömb, kocka, téglatest, stb.), melyeket biztonsággal használ. Nem tudja azonban összehasonlítani a különböző alakzatokat. Nem ismeri fel a kockában a téglatestet, a négyzetben a téglalapot, illetőleg a rombuszt vagy a rombuszban a paralelogrammát, illetve a deltoidot, mert számára ezek egészen különböző dolgok.

*Az alakzatok elemzésének szintjén* (2. szint) a gyermek az alakzatokat részeire bontja, majd összerakja. Az alakzat és részei között kapcsolatokat fedez fel. Felismeri a mértani testek lapjait, éleit, csúcsait. A mértani testek lapjaiként a síkidomokat, amelyeket görbék, szakaszok, pontok határolnak. Megkezdődik a megismert alakzatok elemzése, a megfigyelések, mérések, rajzolások, hajtogatások, nyírások, ragasztások, modellezések, parkettázások, tükörhasználat révén. Ezen konkrét tevékenységek segítségével a tanuló megállapítja, felsorolja az alakzat tulajdonságait (lapok, élek, illetve oldalak, csúcsok száma; lapok alakja; élek, illetve oldalak hosszúsága; lapok, illetve oldalak párhuzamossága, merőlegessége; szimmetriatulajdonságok; van derékszöge stb.), de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismeri fel. A tulajdonságok megállapítása csak az alakzatok megkülönböztetéséhez szükségesek. Nem érti a definíció szükségességét. Megindul az osztályba sorolás. Ezen a szinten a gyerek még nem veszi észre az alakzatok közötti kapcsolatokat. Megállapítja ugyan az alakzatok közös tulajdonságait, például, hogy a négyzet és a téglalap is 4 csúccsal, 4 oldallal rendelkezik, szemközti oldalai párhuzamosok, szomszédos oldalai merőlegesek, minden szögük derékszög, de ebből nem következik számára az, hogy a négyzet téglalap is egyben. Vagy ehhez hasonlóan az sem, hogy a kocka téglatest, a téglalap paralelogramma stb.

*A lokális logikai rendezés, az informális dedukció szintjén* (3. szint) a tanuló már összefüggéseket lát meg egy adott alakzat tulajdonságai között, illetve különböző alakzatok között. Ezen a szinten megvalósul az alakzatoknak és azok tulajdonságainak logikai rendezése. Megjelenik a következtetés lehetősége az alakzatok egyik tulajdonságáról a másakra. A meghatározások, definíciók értelmet nyernek. A logikai következtetések menetét a tankönyv (illetve a tanár) határozza meg célirányos instrukciók segítségével. A tanuló sejtéseket fogalmaz meg, képessé válik arra, hogy hétköznapi nyelven érveljen. Megkezdődik a bizonyítási igény kialakítása, de ez csak az alakzatokra terjed ki. Logikailag helyes következtetések szemlélet alapján elfogadott érvelésekkel keverednek. A tanuló még nem képes valamely alap-megállapításból elméleti úton, formális dedukcióval eljutni egy másikra. A többszörös osztályba sorolás már nem okoz problémát. A különböző négyszögek fogalom szerinti osztályozását már megérti. Ezen a szinten a négyzet már téglalap, sőt paralelogramma.

*A teljes logikai felépítésre való törekvés szintjén* (4. szint) a tanuló felfogja a határozott célú dedukció jelentőségét. Képes egyszerű tételeket megfogalmazni, továbbfejleszteni. A bizonyítási igény fokozatosan kiterjed a geometria egészére, legalábbis több fejezetére. Ennek során tételek láncolatai alakulnak ki, amelyek elvezetnek az axióma szükségességének felismeréséhez. A gondolkodás fejlettsége a formális dedukció szintjén lehetővé teszi az axiómák, definíciók, tételek (esetleg megfordításuk) lényegének és jelentőségének felfogását. A tanuló megérti a bizonyítások gondolatmenetét, a szükséges és elégséges feltételek szerepét. A dedukciót már nem csak egyes alakzatok tulajdonságainak elemzésére, hanem bizonyítási módszerként is alkalmazza. Különböző bizonyítási módokat is használ.

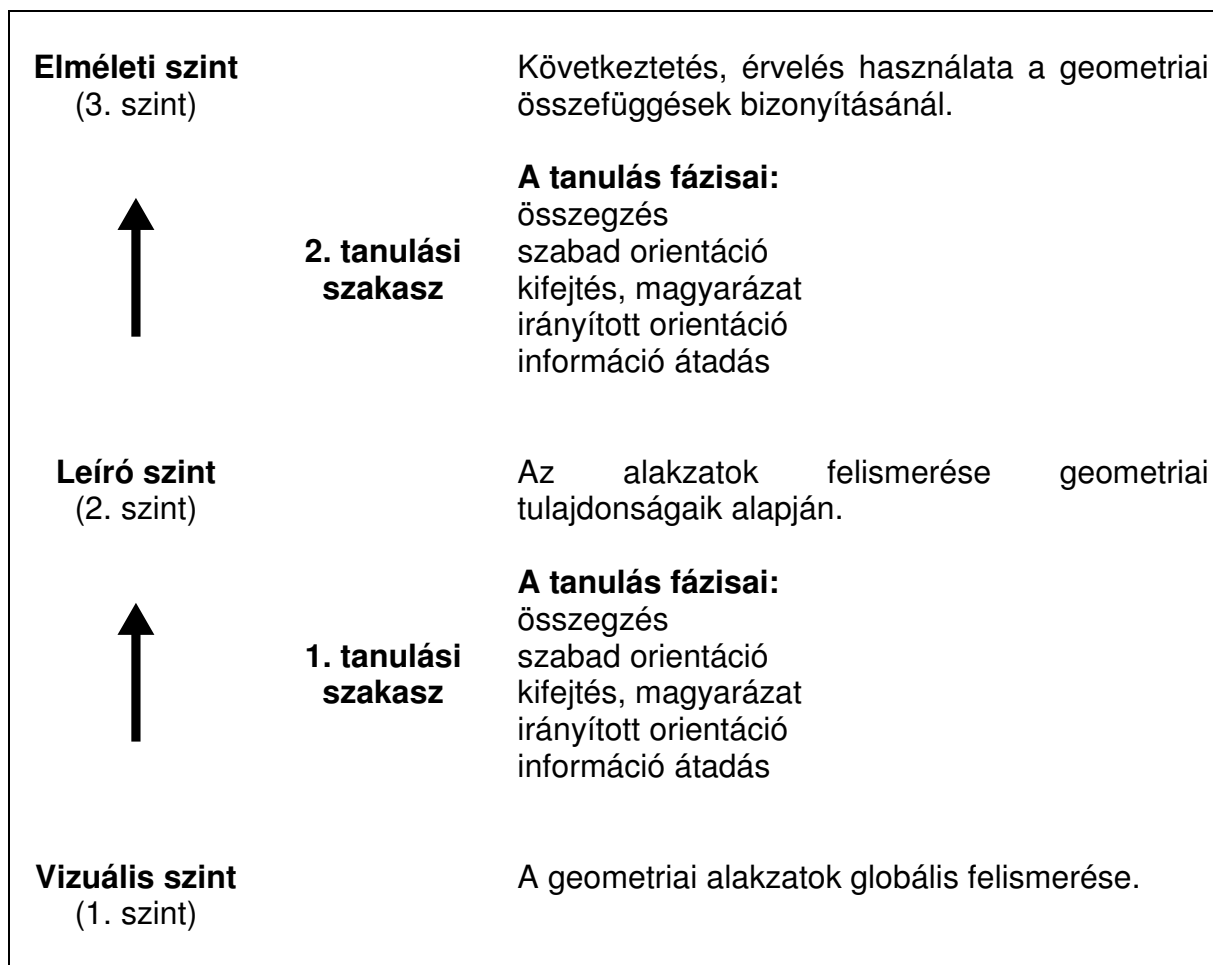
Megérti, hogy az adott alakzat többféle módon is definiálható, világossá válik számára a definíció és tétel viszonylagossága.

Az *axiomatikus felépítés, a modern (Hilbert-féle) gondolkodási szinten*, a „szigor” szintjén (5. szint) már megfigyelhető az objektumok egyedi sajátosságaitól, a köztük fennálló kapcsolatok konkrét jellegétől való elszakadás. Ezen a szinten a geometria teljes, független axiómákból álló rendszerre épül fel. Megtörténik a különböző axiómarendszerek összehasonlítása. Elméletek állíthatók fel konkrét interpretáció nélkül. A geometria általános jellegű lesz, és tágabb értelmet nyer. (Piskalo, 1968, Peller, 2003)

A *van Hiele-féle* modell mindegyik tanulási szakasza az előző által kialakított gondolkodást építi és bővíti tovább. Egyik szintről a másikra való átlépés folyamatosan és fokozatosan megy végbe, miközben elsajátítják az egyes szinteknek megfelelő matematikai fogalmakat. Egyik szintről a másikra történő fejlődés nem természetes folyamat, nem követi automatikusan a biológiai fejlődést, hanem a tanítás-tanulás folyamatának eredménye. A tanítás, annak tartalma és módszere sajátosan befolyásolja a fejlődési folyamatot. Az eredményes tanulás feltétele, hogy a megfelelő geometriai gondolkodás segítségével a tanuló maga is aktívan tapasztalatokat szerezzen a vizsgált alakzatokról, majd beszélgessen róla és gondolatokat alkosson az adott szakaszban használt nyelvezet segítségével. Minden szintnek megvan a maga sajátos nyelve, jelölésrendszere, logikai felépítése. A nyelv a tanulás fontos része. A van Hiele elméletben szereplő szintek mindegyikére jellemző egy adott szókincs, mellyel az adott szint geometriai értelmezéséhez a struktúrák, koncepciók és összefüggések kiterjeszthetők. Fontos oktatási vonatkozása van Hiele elméletének az, miszerint az alacsonyabb szintű szakaszban lévő tanulóktól nem várható el, hogy a magasabb szintnek megfelelően megfogalmazott instrukciókat megértsék. Van Hiele szerint ennek a gyakori előfordulása a legfőbb oka a matematikaoktatás kudarcainak. A tanulóknak folyamatosan kell úgy eljutni egyik szintről a másikra, hogy közben elsajátítsák az egyes szinteknek megfelelő matematikai nyelvezetet, matematikai fogalmakat. A megfelelő geometriai gondolkodás kialakításához egyik szintet sem ugorhatjuk át. Semmilyen módszer nem teszi ezt lehetővé. A geometriai alakzatok globális felfogásától a geometriai bizonyítások, axiómarendszerek megértéséig vezető fejlődés hosszú időt vesz igénybe.

Az alsó tagozaton (1-4. osztály) az első két szint megvalósítása reális, amit hipotézisünkben is megfogalmaztunk. Az általános iskola felső tagozatán a harmadik szint elérése lehet a cél. A negyedik (törekvés a teljes logikai felépítésre) és ötödik (axiomatikus felépítés) szinteknek megfelelő oktatás a középiskola és a felsőoktatás feladata.

Pierre van Hiele elméletüket a 80-as években a korábbi öt helyett három gondolkodási szinttel ábrázolja: *vizuális* (1. szint), *leíró* (2. szint) és *elméleti szint* (3. szint). A vizuális szintről az 1. tanulási szakasz vezet a leíró szinthez, illetve a 2. tanulási szakasz a leíró szintről az elméleti szintre. Ezt a modellt a következő ábra (1.1. ábra) mutatja be (Teppo, 1991):



1.1. ábra

Van Hiele geometriai gondolkodásról szóló elmélete ráirányította a figyelmet az általános iskolai geometria fontosságára, ugyanis megfelelő előképzettség nélkül a tanulók nem lesznek képesek megérteni a középiskolai magasabb szintű geometriai bizonyításokat. Az elmélet lényege a fokozatosság, mely szerint egy adott szinten lévő tanuló nem érti meg a magasabb szintnek megfelelő instrukciókat, valamint az, hogy az első, második és harmadik szinten (5 gondolkodási szint elméletéhez kapcsolódóan) kellő tanulási tapasztalatot kell szereznie ahhoz, hogy sikeresen elsajátítsa a középiskolai geometria tananyagot.

Kutatásunkban, a fejlesztő tanítási kísérlet bemutatása során előforduló van Hiele-féle gondolkodási szintekre történő utalásnál mindig az eredeti, 5 fokozatú szintrendszerre gondolunk.

### 1.2.2. A tanulással kapcsolatos elméletek fejlődése

A *tanulás* egy rendszerben vagy irányító részrendszerében a környezettel kialakult kölcsönhatás eredményeként előálló, tartós és adaptív változás. A tanítás-tanulás folyamatában – elsősorban a tanulás során – az egyénben létrejövő változások érdekelnek bennünket.

A tanulásra vonatkozó tudományos nézetek fejlődése – amely a didaktika nagy átalakulásaihoz kötődik – négy fő szakaszra tagolható. Ezek a következők:

1. *Comenius előtti pedagógia*
2. *a szenzualizmus pedagógiája*
3. *a cselekvés pedagógiája*
4. *a konstruktív pedagógia.*

#### **1.2.2.1. A Comenius előtti pedagógia**

Az ókori és a középkori pedagógiai gondolkodók tanulásfelfogása szerint a tanulás a mások által már feldolgozott ismeretek elsajátítása. Ehhez a felfogáshoz elsősorban olyan didaktika kapcsolódik, amely az ismeretek sokszor szó szerinti megtanulására, majd visszaadására épül. A deduktív folyamatok játszik a főszerepet. A tanulás nagy dogmatikai rendszereken alapul, mint például a görög filozófiai munkák, római jog vagy a Biblia.

#### **1.2.2.2. A szenzualizmus pedagógiája**

A szenzualista pedagógia ismeretelméleti alapja az empirizmus (XVII-XVIII.sz.). Az empirizmus az ismeretszerzést az embert körülvevő valóságból származó információk – elsősorban érzékszervekkel történő – befogadásának tekinti. Az empirizmus logikája induktív. A megismerést az egyszerűbbtől a bonyolultabb, a speciálistól az általános, a konkrétól az absztrakt felé haladónak tekinti. A szenzualista pedagógia legnevesebb képviselője, megalkotója *Comenius* (1592-1670). Pedagógiájának középpontjában a *szemléltetés* áll, egyrészt mint módszer, másrészt mint az ismeretszerzés alapvető elve. A szemléltetés lehetővé teszi a tanuló számára a találkozást a valóságos világgal közvetlenül, érzékszervein keresztül. A pedagógus feladta minél gazdagabban, teljesebben bemutatni ezt a világot.

#### **1.2.2.3. A cselekvés pedagógiája**

A XIX-XX. század fordulóján megszülető reformpedagógiákat nevezik a cselekvés pedagógiáinak. Ennek a tanuláselméletnek a lényege, hogy a gyermek az ismereteket nem csupán passzívan fogadja be, a külvilág hatásait nem egyszerűen elszenved, hanem cselekszik, a külvilág folyamataiba beavatkozik és e beavatkozás eredményeként fejlődik. Ismeretelméleti alapja szintén az empirizmus, logikája induktív. A gyermeket – e nézet szerint – hagyni kell szabadon kutatni, keresni, tanulni, játszani. *John Dewey* (1859-1952) és *Eduard Claparède* (1873-1940) – a reformpedagógiák jeles képviselői – alakították ki a felfedeztetés pedagógiai eljárását, vagyis azt, hogy a gyermek önállóan fedezze fel az ismereteket. A pedagógusközpontú felfogásokat a gyermekközpontúság váltja fel. A tanár szerepe megváltozik. Nem az ismeretek közvetítője, hanem a gyermek önálló cselekvéseire alapuló elsajátítás folyamatának szervezője.

A cselekvés pedagógiájának pszichológiai, ismertelméleti alapjait Jean Piaget dolgozta ki, de munkásságában már felfedezhetők a konstruktív pedagógia episztemológiai alapjai is.

#### **1.2.2.4. A konstruktív pedagógia**

A XX. század második felében világossá vált, hogy az empirizmus nem képes az emberi ismertszerzés megnyugtató, lényeges ellentmondásokról mentes elméletét

szolgáltatni. Az újabb tudományelméletek olyan elméleti konstrukciókat alakítottak ki, amelyekben alapvető szerep jut az elméletek és az empiria kapcsolatának. Nem létezik elméletmentes empiria, ugyanakkor az empirikus eredmények sem igazolhatják az elméleteket. A tudás személyes konstrukció, amely a megismerő szubjektum tevékenységének terméke. Ez az ismeretelméleti gondolkodási irány a *konstruktívizmus*, amely meghatározó szerepet játszik a modern konstruktív pedagógiai felfogás kialakulásában. A konstruktív tanulásszemlélet a következő előfeltevésekre épül:

- Az emberi elme a valóság modelljeit építi fel magában, és az ember ezek működtetése során kialakított előrejelzések szerint cselekszik.
- Az emberi elme elsősorban tudásterület-specifikusan szerveződik, információ feldolgozó apparátusokkal működik.
- Az újszülött gyermek bizonyos, a környezet értékelésére és az abban való cselekvés irányítására alkalmas hajlammal, genetikusan kódolt képességekkel jön a világra.
- A fejlődés alapvetően konstruktív módon, személyes konstrukciók felépítésével, alakításával, alkalmazásával történik.

A tanulás – mint aktív folyamat – legfőbb jellemzője az, hogy a tanuló a meglévő és kognitív rendszerekbe rendezett ismeretei segítségével értelmezi az új információt. A konstruktív tanulásfelfogás szerint a tanuló a tudást nem csak egyszerűen befogadja, hanem egyenesen létrehozza, megkonstruálja. Középpontban a belső elméleteket működtető és cselekvő gyermek áll. A konstruktív tanulásszemlélet a tanuláson nem csak a tananyag elsajátítását, információk megjegyzését érti, hanem az alkalmazható tudást, a cselekvéseinket irányítani képes struktúrákat, a személyiség fejlődését.

A konstruktív tanuláselmélet megkérdőjelezi a tanulásban az induktív jellegű elsajátítási folyamatokat. A folyamatokra – az elmélet szerint – sokkal inkább a dedukció fogalma alkalmazható, hiszen az új ismeretet akkor fogadjuk be, ha valamely kognitív részrendszerünk ezt értelmezni tudta. A konstruktivisták meggyőződése, hogy a tudományos kutatás és a gyermeki ismeretsajátítás azonos, deduktív logikát követ. Utóbbi esetben a dedukció elsősorban a gyermekben meglévő tudáshoz, kognitív struktúrákhoz kötődést jelzi. Amennyiben az új ismeret szemben áll a gyerek aktuális szemléletével, akkor részben deduktív módon, a meglévő ismeretekből kiindulva fokozatosan meg kell teremteni a konceptuális váltás feltételeit. Azaz fokozatosan bizalmatlanságot ébresztve a meglévő elképzelésekkel szemben, a gyereket szembesíteni kell látásmódja és a valóság közötti ellentmondással. A konceptuális váltás elősegítése érdekében a konstruktív tanulásszemlélet sem utasítja el a tanári magyarázatot, a logikusan felépített tudásátadást.

A konstruktivisták szerint óvakodni kell a feltételek nélküli, elméletirányítottságtól mentes felfedeztetéstől.

Az iskolai eredményesség – a kutatások szerint – elsősorban az előzetes tudással áll szoros kapcsolatban, az intelligencia csak ezen keresztül kapcsolódik hozzá. A kutatások rámutattak arra, hogy előnyben van az, aki nagy mennyiségű, szervezett, könnyen előhívható tudással, ismeretrendszerrel rendelkezik, azzal szemben, aki csak jó általános gondolkodási, problémamegoldó képességekkel bír.

A mai, modern társadalmak iskoláiban elsősorban a cselekvés pedagógiájának és a konstruktív pedagógiának van kiemelt szerepe. Manapság nem tekinthetjük megfelelőnek a pusztán szemléltetésre, még kevésbé az egyszerű ismeretátadásra épülő pedagógiát. Ma már alapkövetelménynek tartjuk a gyermek aktivitását, önállóságát, a személyiség gazdag fejlesztését, a sokoldalú metodikát. A tudás – amely a gyermek cselekvéseiben épül fel, mint személyes konstrukció – létrejöttéhez szükséges optimális feltételek biztosítása a pedagógus feladata. A korszerű tanulászempléleteknek megfelelő tanítás didaktikai követelményei a következők:

- a gyerekek személyiségének, érdeklődésének, igényeinek, valamint belső képeinek, ismeretstruktúráinak jó ismerete;
- differenciálás;
- gazdag tapasztalatszerzési lehetőségek kiépítése;
- eszközök használata;
- több módszer együttes alkalmazása;
- a tanítás életszerűségének biztosítása. (Nahalka, 1998)

Kísérletünk során igyekeztünk a korszerű tanulászempléleteknek megfelelően tanítani, a tudás létrejöttéhez szükséges optimális feltételeket kialakítani.

### **1.2.3. A realiztikus matematikaoktatás**

A realiztikus matematika oktatás a cselekvés pedagógiájának és a konstruktivista pedagógiájának az elveire épült. Ez az oktatási koncepció *Hans Freudenthal* irányításával Hollandiában alakult ki. Szerinte a matematikatanításnak olyan jelenségekből, szituációkból kell kiindulnia, amelyek a tanulók számára fontosak, érdekesek, motiváló hatásúak, elősegítik a tanulási folyamatokat, és ezzel hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók megértsék a matematikának a saját életükben, a társadalomban és a tudományban betöltött szerepét. A tanulásnak irányított újrafelfedezésnek kell lennie, amely elvezet az alapvető matematikai ismeretekhez, fogalmakhoz. Freudenthal a formalista, strukturalista felfogás ellen foglalt állást.

A realiztikus matematikaoktatásban a „realisztikus” jelző nem feltétlenül a valóságból vett jelenségeket, objektumokat jeleneti, hanem azokat, amelyek a tanulók számára elképzelhetőek és jelentéssel bírnak. Ilyen értelemben a tiszta matematikai kontextusok is lehetnek realiztikusak a tanulók számára. Például a geometriai alakzatok körében végzett vizsgálódások is lehetnek – konkrétságuk miatt – ilyen jellegűek.

Az irányzat fontos alapelve, hogy a tanulók konfrontálódjanak a sajátjuktól eltérő, másféle megoldási módokkal. Így megtanulják, hogyan kell társaikat kritikusan meghallgatni, munkájukat, eredményeiket megvitatni, értékelni és értelmezni. Szembesülnek saját produktumok előnyeivel és hibáival, ezáltal lerövidülhet a tanulási folyamat.

Tanítási kísérletünk során számtalan esetben igyekeztünk olyan szituációt kialakítani, amelyekben a gyerekek saját konstrukcióikat, megoldásaikat összehasonlíthatták társaikéval, vitatkozhattak, érvelhettek.

A tanár szerepe módosul, a tanulási folyamatot irányítja, segíti. Fontosabb tanári tevékenységei közé tartozik a segítés, kérdezés, hallgatás, odafigyelés, a tanulókkal való közös gondolkodás, provokálás, diszkussziók, viták vezetése. A passzív tanulási módot felváltja az aktív tanulási mód, ezáltal a tanulók szerepe is

változik. A tanulóknak el kell tudniuk magyarázni saját gondolataikat, megoldási stratégiáikat.

A realiztikus matematikaoktatás két fő jellemzője: a fokozatos matematizálás és a modellek szerepe.

A fokozatos matematizálás elve azt mondja ki, hogy a tanulókat ösztönözni és támogatni kell abban, hogy ismereteiket folyamatosan fejlesszék és pontosítsák. Két alapvető típusa van: a horizontális és a vertikális matematizáció.

A horizontális matematizáció az intuitív, informális, kontextusfüggő szintről a reflektív, formális, szisztematikus szintre való áttérés. A vertikális matematizáció a struktúrák, a szisztematikus, formális ismeretek kiépítését jelenti.

A realiztikus matematikaoktatás alapja a genetikus elv, amely szerint az ismeretek a kezdeti globális és differenciálatlan formából egyre pontosabb, kevesebb hibás elképzelést tartalmazó formákban fejlődnek tovább. Az informális eljárásoktól a formális matematikához vezető úton alapvető szerepet játszanak a modellek. Modell lehet egy szituáció, szemléltetés, egy meghatározott írásmód. A modelleknek két fontos tulajdonsággal kell rendelkezniük:

- egyrészt a tanulók számára elképzelhető, ismerős kontextusban kell gyökerezniük,
- másrészt rugalmasnak kell lenniük, hogy absztraktabb szinten is felhasználhatók legyenek.

A különböző területek globális kapcsolatainak észrevétele, fejlesztése alapvetően fontos e felfogásban. (Ambrus 1995, 2002)

#### **1.2.4. Világhírű magyar matematikadidaktikusok a matematikatanításról**

A XX. század második felében a matematikaoktatás megújítására törekvő kiemelkedő reformerek egyike *Dienes Zoltán* professzor (1973). Évtizedekkel ezelőtti megállapítása, miszerint a matematikatanítással foglalkozó pedagógusok egyike sem állíthatja nyugodt lélekkel, hogy a matematika tanítása körül minden rendben van, sajnos még ma is aktuális. Túl sok gyerek nem szereti a matematikát. Nagy részük sosem jut el a tanult matematikai fogalmak jelentésének megértéséig. A legjobb esetben is csupán ügyesen tudnak bánni bonyolult szimbólumrendszerekkel. A matematikai fogalmak megértéséhez szükség van speciálisan megtervezett matematikai segédeszközökre, a tábla és kréta használta – önmagában – ritkán eredményez matematikai felismerést, különösen kisiskolás korban.

A felismerésen alapuló *matematikatanulás alapvető követelményei* Dienes szerint a következők:

- A matematikai tapasztalatszerzés folyamatát egységes egésként kell felépíteni 5-6 éves kortól a matematikai, logikai és pszichológiai vonatkozások figyelembevételével.
- A matematikai tapasztalatok olyan gazdag változatosságának kell rendelkezésre állnia, amelyek segítségével az egyes gyerekek fel tudják építeni a matematikai fogalmakat. Minden fogalom felépítéséhez többféle tapasztalat szükséges, különben csak asszociáció következhet be, nem pedig absztrakció.

- A pedagógusnak ismernie kell a tanulási folyamat általános dinamikáját. Tisztában kell lennie azzal, hogy az egyes gyerekek meddig jutottak el ebben a folyamatban, továbbá a tanulási módjuk közti egyéni különbségekkel is. Tudnia kell, hogy mivel indíthatja vagy állíthatja meg a tanulás folyamatát.

*A matematikaoktatás alapelveit a következőkben foglalja össze:*

- *A dinamika elve.* Az előkészítő (határozott irány nélküli, látszólag céltalan, amelyet a gyerekek magáért a játékért folytatnak és élveznek), a strukturált (irányítottabb, célratörőbb) és a gyakorló vagy elemző (a kialakított fogalmak rögzítésére és alkalmazására irányuló) játékok révén szerzett *tapasztalatok* alapján előbb-utóbb kialakulnak a matematikai fogalmak, feltéve, hogy minden játéktípust a megfelelő időben vezetünk be.
- *A konstruktivitás elve.* A konstrukció mindig előzze meg az elemzést. A konstruktív gondolkodást és megértést elősegítő tanulási helyzet kialakítását helyezzük előtérbe az elemző gondolkodással szemben. Az analitikus gondolkodás 12 éves kor előtt ritkán fordul elő.
- *A matematikai változatosság elve.* A fogalom struktúrájának minden lényeges vonását, változóját változtatnunk kell annak érdekében, hogy a fogalom kialakításához optimális tapasztalatokat biztosítsunk. A téglalap esetében például változtathatjuk az alakot úgy, hogy a szemközti oldalak hosszát változtatjuk, vagy változtathatjuk a téglalap helyzetét.
- *A perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve.* Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek, hogy a fogalmak kialakításában minél jobban érvényesülhessenek az egyéni különbségek, és hogy a gyerekek egy-egy fogalom absztrakt matematikai tartalmát minél inkább megragadhassák. A fogalmi struktúrát változatlanul hagyva változtatjuk az érzékelhető megjelenési formát. A téglalapokat például – az előbb említetteken kívül – rajzolhatják a gyerekek papírra, összerakhatják két egybevágó háromszög lapból, kijelölhetik a „keretét” szögekkel és gumigyűrűvel egy táblán, megkereshetik különböző mintákon, stb. Ezekben a különböző konkrét és vizuális reprezentációkban megtanulják, hogy mi a közös. A kivont közös vonás lesz maga az absztrakt matematikai fogalom.

A tanulási helyzetekben Dienes professzor elveti a tekintélybeli magatartást. A tekintélyelv gátolhatja a gyerekek bátor kérdezősködését, ami az alkotó tanulási helyzet lényegéhez hozzátartozik. A jó pedagógusok a gyerekek természetes érdeklődését használják fel a tanulás ösztönzésére. Megismertetik a gyerekeket a matematikai ismeretszerzés örömszerző hatásával. Nem fölényesek, mert az korlátozza a gyerekeket gondolkodási képességeik kibontakoztatásában, hanem együttérzéssel és szertettel fordulnak a tanulók felé.

A geometria tanításánál a testek, a valóságos tárgyak tanulmányozásával való kezdést tartja célszerűnek. Dienes professzor e javaslatát alkalmaztuk tanítási kísérletünk során. Igyekeztünk az általa megfogalmazott javaslatok, alapelvek szellemiségének megfelelően tanítani.

*Pólya Györgyöt* (2000) a heurisztika (egy kutatási ág, amely a feladatmegoldás folyamatát tárja fel) atyjának nevezik. A Pólya-féle problémamegoldási fázisok a következők:

1. a feladat megértése
2. tervkészítés
3. tervünk végrehajtása
4. a megoldás vizsgálata.

Pólya (1967) „A problémamegoldás iskolája” című könyvében a problémamegoldást a házépítéshez hasonlítja. A megfelelő anyagot össze kell gyűjtenünk, de ez nem elegendő az építéshez, hiszen egy halom kő még nem ház. A problémamegoldáshoz is úgy kell összeállítanunk, megszerveznünk a részeket, hogy egységes egészet alkossanak.

A tanítás céljáról azt vallja, hogy először és elsősorban a tanulókat gondolkodni kell megtanítani.

*A tanulás és a tanítás három alapelvét a következőkben határozza meg:*

- *Az aktív tanulás elve.* A tanulók maguk fedezzék fel mindazt, jöjjenek rá mindarra, ami az adott körülmények között lehetséges.
- *A motiváció elve.* Legjobban az érdekes tananyaggal motiválhatunk. A tananyag addig érdekes a tanuló számára, amíg leköti gondolkodását, foglalkoztatja találékonyságát, és amíg örömet leli bene.
- *Az egymást követő fázisok elve.* A tanulás konkrét tevékenységgel és észleléssel kezdődik (felderítés fázisa), ezt követi a szavakba foglalás és fogalomalkotás fázisa, és végül a megtanult anyag szerves egészbe összeforr a tanuló gondolkodásával (asszimilálás fázisa).

Az alsó tagozaton a geometria és más témakörök tananyagának megértése természetesen indul ki konkrét tevékenységből és észlelésből. A szavakba foglalás és a fogalomalkotás fázisában definíciók és bizonyítások bevezetésére nem kerül sor. A megtanultaknak, az új ismereteknek a gyerekek gondolkodási rendszerébe történő beillesztése vezet el a helyes gondolkodásmódhoz.

Varga Tamás nevéhez kapcsolódik a *komplex matematikatanítási módszer* kialakítása. A komplexitás a matematika egészének egységes alapozását, a tananyag és módszerek megújítását, valamint a matematikadidaktika, pszichológia, pedagógia, agyutatós eredményeinek alkalmazását jelentette.

A komplex matematikatanítási kísérlet elindításában a legnagyobb szerepet Dienes professzor 1960-ban Budapesten tartott előadása játszotta. 1962-ben az UNESCO támogatásával egy nemzetközi matematikatanítási szimpoziumot rendeztek Budapesten. Az itt elhangzott magas szintű, elsősorban gyakorlati problémákat érintő előadások, megbeszélések és viták hozzájárultak ahhoz, hogy 1963-ban elindítsák a komplex matematikatanítási kísérletet Varga Tamás irányításával. Ez a kísérleti folyamat két évtizedig tartott, amely a magyar matematikatanításban gyökeres változásokat hozott. A kialakított módszerek, a megújított tananyag ma is meghatározó a magyar matematikaoktatásban.

*A komplex matematikatanítási kísérlet alapelvei a következők:*

- *A matematika különböző területeinek egysége.* A matematika univerzális fogalmaival (halmazelméleti, matematikai logikai, stb.) biztosítható a matematika egységes szemlélete.
- *A fogalmak fokozatos érlelése.* Az általános iskola alsóbb évfolyamain elő kell készíteni olyan ismereteket, fogalmakat is, amelyek csak évek múlva

alakulnak ki. A tanítás tematikáját, tananyagát, módszerét ezért egységesen kell megtervezni az óvodától az érettségiig. Az önálló problémamegoldásra kezdettől fogva nevelni kell a gyerekeket.

- *Rugalmasság, alkalmazkodás.*
- *A matematikatanítás fő feladata: a dialektikus gondolkodásra nevelés.*
- *A tanulók önállóságra (önálló gondolkodásra, feladatmegoldásra, feladatkitűzésre, ellenőrzésre) nevelése az egyéni különbségek figyelembevételével. A matematika megértéséhez a tanulók csak saját tapasztalataik – és nem mások – alapján juthatnak el. A tapasztalatok megszerzéséhez nélkülözhetetlenek a munkaeszközök (Dienes-készlet, színes rudak készlete, logikai készlet, stb.).*
- *A pedagógusok önállóságának, választási lehetőségének biztosítása.*
- *Tekintélyelv helyett munkából eredő tekintély.*
- *Számtan helyett matematikatanítás.*

A komplex matematikatanítás tananyagát öt témakör köré csoportosították:

1. halmazok, logika
  2. számtan, algebra
  3. függvények, sorozatok
  4. geometria, mérések
  5. kombinatorika, valószínűség számítás, statisztika.
- *Az életkori sajátosságok figyelembevétele.* Az alsó tagozatos tanulók életkori sajátosságainak figyelembevétele a játék és a manipulációk alkalmazását jelenti.
  - *Az absztrakció, mint a konkrét tapasztalatok interiorizációjának folyamata.* „Absztrahálni csak konkrétumokból lehet, s ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie. A matematika nagyon absztrakt, éppen ez a fő erőssége, hiszen ez azt jelenti, hogy nagyon sokféle konkrét jelenség közös lényegét sűríti magába. Ehhez a nagyon absztrakthoz nagyon konkrét kiindulással tudjuk a legsikeresebben elvezetni a gyerekeket úgy, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítjük őket. Kezdő fokon, kisgyerekeknél, ez a nagyon konkrét az érzékszervi-mozgásos élményeket jelenti. A manuális (mozgásos, tapintási, akaratot is bekapcsoló) tevékenység ennek az egyik fő tere.

*Kísérletünk alapelve: dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekhez:*

*Műveletek dolgokkal*



*Műveletek jelekkel*

*(Nyíl helyett cikk-cakkot is húzhattam volna annak jelzésére, hogy ide-oda közlekedünk a kettő között, vissza-visszamegyünk a dolgokkal végzett manuális tevékenységekhez, valahányszor a jelekkel végzett tevékenység értelmessé tétele ezt kívánja.)” (Varga, 1966)*

- *A küldő motiváció (például osztályzat) felváltása belső motivációval (a megismerés intellektuális örömeivel).*
- *Az aktivitás kiaknázása, nem pedig elfojtására törekvés. (Klein, 1980)*

A Varga Tamás-féle tanítási kísérlet alapelvei közül elsősorban a konkrét tapasztalatokból kiinduló ismeretszerzésre és az életkori sajátosságok figyelembevételére helyeztük a hangsúlyt saját kísérletünkben.

### 1.2.5. Fogalmak tanítása

*Vollrath*, német matematikadidaktikus szerint egy tanuló akkor sajátított el egy fogalmat, ha a következő képességekkel rendelkezik:

- A fogalom egy definícióját képes megadni.
- El tudja dönteni, hogy adott objektum egy bizonyos fogalomhoz tartozik-e (*fogalomazonosítás*).
- Tud példákat adni (konstruálni) az adott fogalomra (*fogalomrealizálás*).
- Ismeri a fogalom tulajdonságait.
- Képes a fogalmat és annak tulajdonságait adott szituációk leírására, illetve adott problémák megoldására felhasználni.
- El tudja helyezni az adott fogalmat fogalmak hierarchikus rendszerébe. Ismeri az alá-, illetve fölérendelt fogalmakat.

Alsó tagozaton nyilván nem teljesíthető valamennyi feltétel, mert a tanulók nem értik még a definíciók szerepét. Egy adott fogalom fogalmak hierarchikus rendszerébe történő elhelyezése sem reális elvárás. Például a négyzetek, téglalapok négyszögekhez sorolása többnyire nem okoz problémát, de a négyzetek téglalapokhoz sorolása már igen. (Ambrus, 1995)

A fogalmak tanításával kapcsolatos *feladattípusok* közül alsó tagozaton a következők dominánsak:

- Bevezető, motivációs feladatok olyan szituációk elemzésére, melyeket egy adott fogalom jól tükröz vissza, tulajdonságok kiemelése. Például a gyerekek megfigyelik saját testük és arcuk tükröképét mozgás közben (szimmetria).
- Fogalomrealizálási feladatok: adott fogalommal kapcsolatos példák és ellenpéldák adása. Például pontrácson négyzetek rajzolása; pontrácson különböző négyszögek rajzolása; pontrácson párhuzamos, illetve merőleges szakaszpárok rajzolása; olyan négyszögek rajzolása, amelyeknek vannak merőleges oldalai.
- Fogalomazonosítási feladatok: szituációk felülvizsgálata abból a szempontból, hogy egy adott fogalmat reprezentálnak-e. Például adott síkbeli alakzatok közül a téglalapok kiválogatása; adott sokszögek közül azok kiválasztása, amelyeknek vannak párhuzamos oldalai.

A fogalomrealizálási és a fogalomazonosítási feladatok nagyon fontosak, mert hozzájárulnak a fogalmak gazdag képzetének kialakulásához. Éppen ezért alkalmaztuk sokszor ezeket a feladattípusokat kísérleti tanításunk során.

### 1.3. NYELVI PROBLÉMÁK

*„Az iskolában az egyik legfontosabb célunk, hogy olyan eszközt adjunk a gyerekeknek - a nyelvet -, amellyel tanulni, gondolkozni és beszélni tud arról a világról, amelyben él. Pontosabban, szeretnénk segíteni abban, hogy ezt a már meglevő eszközt finomítsa.” (Holt, 1991)*

Sok gyerek képes arra, hogy papagáj módjára elismételjen olyan szakszavakat tartalmazó mondatokat, amelyek értelméről halvány fogalma sincs, holott éppen ezt szeretnénk elkerülni. Mások viszont világosan értik a matematikai fogalmakat, problémákat, de megzavarodnak, ha szavakba kell önteniük a tudásukat, gondolataikat. Ehhez egyéenként több-kevesebb idő szükséges, hogy a fogalmat kifejező szó bekerüljön aktív szókincsükbe és gondolataikat ki tudják fejezni a megfelelő szavakkal. *„Az aktivizálás folyamatát a tanár azzal segítheti, hogy nem javítja ki állandóan a helytelen nyelvhasználatot. Sőt megpróbálja megérteni a gyerek bármilyen, még pontatlan közléseit is annak érdekében, hogy tanítványa képessé váljon megfigyeléseinek tudatosítására.*

*Ha viszont valamilyen megértett „szakszót”, „szakkifejezést” már használatba kíván vetetni, célszerű, ha saját maga a megfelelő szavakkal ismétli meg a közlést.” (Szendrei, 2005)*

André Revuz (1973) minden tudomány területen - így a matematikában is - a nyelvi sorompót tartja a megértés legfélelmetesebb akadályának. *„Nyelvi nehézségekkel küszködik minden tudomány és szakma, amely pontosan akarja kifejezni fogalmait és eredményeit. A matematikai kijelentéseknek teljesen pontosaknak kell lenniük. Ha nem pontosak, akkor nincs is értelmük. Ez a magyarázata annak, hogy a matematikában a nyelvi sorompó tűnik rögtön a legfélelmetesebbnek. ... A köznyelvi szavak jelentése általában eléggé határozatlan, így a beszélgetőknek könnyen lehet az a benyomásuk, hogy megértik egymást, még ha nem is pontosan ugyanazt gondolják. A matematika ki akarja küszöbölni ezt a kétértelműséget. Ki is küszöböli – de cserébe elveszti az érintkezés könnyedségét. Minél gazdagabb és szabatosabb egy információ, annál nehezebb az átültetése.”*

Milyen nyelvi bonyolultságú szöveget képes megérteni egy negyedik osztályos tanuló? Az alsó tagozatos matematika tankönyvek megfelelő nyelvi szinten nyújtják-e az elsajátítandó tananyagot?

Harmadik és negyedik osztályos tankönyvekből válogattuk a következő párhuzamossággal és merőlegességgel kapcsolatos mondatokat:

*„Párhuzamos egyeneseknek nincs közös pontjuk, ugyanolyan állásúak, távolságuk mindenhol ugyanakkora.” (Török, 2002)*

*„Az egymással párhuzamos egyenesek közé húzott merőleges szakaszok hosszúsága a párhuzamos egyenesek távolsága.” (Hajdu, 2005)*

*„Azokat a síkbeli egyenespárokat, amelyeknek – akármennyire is meghosszabbítjuk őket - nincs közös pontjuk, párhuzamos egyeneseknek nevezzük.”*

*„A két merőleges egyenes által meghatározott 4 szög egyenlő.” (Árvainé, 2005)*

*„A párhuzamos egyenesek közötti távolság mindenhol ugyanakkora.”*

*„Rajzolj úgy egyeneseket, hogy a derékszögű vonalzód derékszöget bezáró két éle mellett húzd a vonalakat!” (Rakos, 2002)*

A kerettantervek az anyanyelv és a szaknyelv adott szinten elvárható, megfelelő pontosságú használatát hangsúlyozzák. Megkérdőjelezhető, hogy az idézett mondatok megfelelnek-e a tanulók nyelvhasználati szintjének.

Tanítási kísérletünk során kerültük az idézetekhez hasonló, bonyolult megfogalmazásokat. Egyszerű, a negyedik osztályos gyerekek számára érthető mondatokat képeztünk. A szaknyelvet olyan mértékben használtuk pontosan, mely nem ment a megértés rovására. Alsó tagozaton definíciók, tételek közléséhez még nincs meg a megfelelő tapasztalat, a szükséges absztrakciós szint.

## 2. A KUTATÁS BEMUTATÁSA

Negyedik osztályos fejlesztő oktatási kísérlet keretében több geometriai fogalom (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) fejlesztésével foglalkoztunk, amelynek célja a *van Hiele*-modell szerinti geometriaoktatás megvalósítása. Az említett öt fogalom több ponton kapcsolódik egymáshoz. Téglalap, négyzet előállítására és néhány tulajdonságuk (4 csúcs, 4 oldal, oldalak hosszúsága) vizsgálatára már 1-2. osztályban sor kerül. A négyzet, téglalap fogalom elmélyülésének fontos mozzanata 4. osztályban a szemközti oldalak párhuzamosságának, valamint a szomszédos oldalak merőlegességének felismerése, továbbá tengelyes tükrösségük megállapítása (már 3. osztályban) és a tükrötengelyek számának meghatározása. A párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria fogalmak fejlesztése nélkül a négyzet, téglalap fogalom fejlesztése elképzelhetetlen. Ugyanakkor a négyzet, téglalap megfelelő oldalai párhuzamosságának, illetve merőlegességének felismerése része a párhuzamosság, merőlegesség fogalmak fejlődésének. Ugyanígy a négyzet, téglalap tengelyes szimmetriájáról – a tapasztalati úton – meghozott döntés, a szimmetriatengelyek számának helyes meghatározása hozzájárul a szimmetriafogalom fejlődéséhez.

A kísérletet 2006 május-júniusában a bajai Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának 4.c osztályában végeztük, majd ezt 2008 május-júniusában megismételtük az iskola 4.b osztályában. A választásunk azért esett a negyedik évfolyamra, mert korábban a párhuzamosság és a merőlegesség fogalmát még nem tudtuk volna vizsgálni, mivel – az iskola helyi tanterve alapján – negyedik osztályban kerülnek bevezetésre ezek a fogalmak. A négyzetről és a téglalapról tanultak is az alsó tagozat negyedik osztályában teljességgel ki. A fejlesztő oktatási kísérlet mindkét alkalommal 17 tanítási órát foglalt magába. Ezek az órák a délelőtti iskolai órák keretében zajlottak, hiszen a vizsgált fogalmak alakítása illeszkedik a negyedik osztályos tananyaghoz. Bár az iskola helyi tanterve alapján kidolgozott tanmenet szerint ennyi óra nem áll rendelkezésre a geometria témakörén belül erre a tananyagrésze, az együttműködő szakvezetők lehetővé tették, hogy a tanítási kísérletet a kísérletező tervének megfelelően hajtsák végre.

### 2.1. A FEJLESZTŐ TANÍTÁSI KÍSÉRLET TANTERVI VONATKOZÁSAI

A tantervi szabályozás legfelső szintjén a Nemzeti Alaptanterv (a továbbiakban: NAT) áll. Ezt követik a második szinten a NAT-ra épülő kerettantervek, a harmadik szinten pedig a helyi tantervek találhatók.

#### 2.1.1. Nemzeti Alaptanterv

A NAT meghatározza a közoktatás országosan érvényes általános céljait. A korábbi alaptantervekkel ellentétben nem bontja le évfolyamokra a tanítandó tananyagokat, hanem az egyes műveltségterületekhez kapcsolódó fejlesztési feladatokat adja meg.

A matematika műveltségterület fejlesztési területei a következők:

1. Tájékozódás
2. Megismerés
3. Ismeretek alkalmazása
4. Problémakezelés- és megoldás
5. Alkotás és kreativitás: alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint, alkotások adott feltételeknek megfelelően, átstrukturálás
6. Akarati, érzelmi, önfejlesztő képességek, és együttéléssel kapcsolatos értékek fejlesztése
7. A matematika épülésének elveiben való tájékozottság.

A matematika műveltségterület a különböző témaköreinek szerves összeépülésével próbálja a matematika és a matematikai gondolkodás világát feltárni. A matematikai fogalmak kialakítása, összefüggések felismerése, valamint a gondolkodásmód, a különböző problémamegoldási stratégiák kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést igényel. Ez a felépítés lehetővé teszi a lassabban haladók számára a felzárkózást, a jobbak számára pedig tehetségük kibontakoztatását. Az általános iskola alsó tagozatán a kitűzött célok, fejlesztési feladatok megvalósításának alapozása történik. A NAT kiemeli a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazását, a matematika más tudományterületeken betöltött szerepét.

A NAT fejlesztési feladatai közül a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria fogalmakra vonatkozóan a következőket emeljük ki:

- Finommotoros mozgáskoordinációk: apró tárgyak, korongok, pálcikák, rudak rakosgatása, ceruza, füzet, négyzethálós lap, vonalzó, körző használata stb. (1-4. évfolyam)
- Statikus helyzetek, képek, tárgyak megfigyelése. (1-6. évfolyam)
- Tárgyak tulajdonságainak kiemelése (analizálás); összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés; osztályokba sorolás, sorba rendezés különféle tulajdonságok szerint a különféle érzékszervek tudatos működtetésével; elemek, tulajdonságok megnevezése. Közös tulajdonságok felismerése; a tulajdonság tagadása mint szintén közös jellemző. (1-6. évfolyam)
- Szétválogatás két szempont szerint; két, több szempont egyidejű követése. Halmazok eszköz jellegű használata. (1-12. évfolyam)
- Sík- és térbeli alakzatok csoportosítása. (5-8. évfolyam)
- Geometriai alkotások létrehozása szabadon és másolással, adott feltételek szerint; transzformációk elvégzése, a „kép” eredetijének megalkotása.
- Geometriai transzformációkban megfigyelt megmaradó és változó tulajdonságok tudatosítása. (1-12. évfolyam)
- Megismert testek, síkidomok tulajdonságainak tudatos felidézése. (1-12. évfolyam)
- Fogalmak egymáshoz való viszonya: alá- és fölérendeltségi viszony; mellérendeltség. (1-12. évfolyam)
- Alakuló, illetve kialakult matematikai fogalmak, relációk példáinak elképzelése, ilyenek keresése, alkotása.
- Absztrahálás, konkretizálás (fogalmak megalkotása, besorolás adott fogalom alá). (1-8. évfolyam)
- Köznyelvi szavak használata és elfogadása előfogalmak jelölésére; egyszerű szakszavak és jelölések alakuló és kialakult fogalmak megnevezésére; a kifejezések pontosítása.

- A köznyelv és a matematikai nyelv különbözőségeinek és értékeinek megértése és elfogadása. (5-12. évfolyam)

### 2.1.2. Kerettantervek

A NAT nem tananyag előíró, a tanítandó tananyagot az egyes tantárgyakon belül évfolyamokra és témakörökre bontva a kerettantervek és a helyi tantervek tartalmazzák. A tananyagon kívül a kerettantervek meghatározzák az egyes tantárgyak óraszámát, a fejlesztési feladatokat, tevékenységeket, továbbá a kimeneti követelményeket (továbbhaladás feltételeit).

A tanítási kísérlet helyszínéül választott iskolában az Oktatási Minisztérium kerettantere alapján készítették a helyi tantervet és a tanmeneteket matematikából.

Az Oktatási Minisztérium által kiadott kerettanterv a matematika tananyagot négy témakörre osztja:

- számtan, algebra
- sorozatok, függvények
- geometria, mérés
- valószínűség, statisztika.

A tanítási kísérletünk során a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria fogalmak fejlődését vizsgáltuk. Ezekre a fogalmakra vonatkozóan az OM kerettantere geometria témakörben a következő tananyagot írja elő:

- |                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>1. osztályban:</i> | Síkidomok előállítása tevékenységgel. Síkbeli alakzatok szétválogatása, tulajdonságok alapján. Geometria tulajdonságok felismerése, összehasonlítások. Játékos tapasztalatszerzés síktükörrel.                                                                                              |
| <i>2. osztályban:</i> | Síkidomok másolása, előállítása egy-két feltétel szerint. Tapasztalatgyűjtés egyszerű alakzatokról, a megfigyelések megfogalmazása. Téglalap, négyzet előállítása. Sokszögek néhány tulajdonsága. Tükrökép építése. Egyszerű tükrözés megfigyelése, tükrökép előállítása.                   |
| <i>3. osztályban:</i> | Síkidomok előállítása szabadon, másolással és egy-két feltétel megkötésével. Tengelyesen tükrös alakzatok előállítása tevékenységgel. A téglalap és a négyzet tulajdonságai: oldalak, csúcsok száma, mérete. A tulajdonságok összehasonlítása. Tükrözések. Szög mérése alkalmi egységekkel. |
| <i>4. osztályban:</i> | Síkidomok előállítása párhuzamos és merőleges vonalpárok segítségével. Síkidomok másolása, tengelyes tükrözés. Szögfogalom előkészítése tapasztalati úton. Szögmérés derékszöggel, felével, negyedével.                                                                                     |

Mint láthatjuk, alsó tagozaton a szimmetria fogalom körével kapcsolatban a transzformációk közül térben a síkra vonatkozó tükrözéssel, míg síkban a tengelyes tükrözéssel foglalkozunk. A testek szimmetrikus tulajdonságán a síkra vonatkozó, síkidomok esetén pedig a tengelyes szimmetriát értjük. A felső tagozat feladata az alakzatok forgás- és középpontosan szimmetrikus tulajdonságának megismertetése.

A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának bevezetését a különböző kerettantervek nem egységes időpontban tervezik. Az Oktatási Minisztérium

kerettantervéhez hasonlóan a Mozaik Kerettantervrendszer, az Apáczai Kerettantervcsalád, a Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének Kerettanterve negyedik osztályban, míg a Nyíregyházi Tantervcsalád már harmadik osztályban szerepelteti tananyagként a párhuzamos, merőleges egyenespárok fogalmát, felismerését, vizsgálatát.

A kerettantervek kiemelten kezelik a sík- és térbeli tájékozódási képesség fejlesztését, a geometriai szemlélet alakítását a geometriai alakzatok megismerésével, formai és mennyiségi tulajdonságok felismerésével, egyszerű transzformációkkal.

## **2.2. KUTATÁSI KÉRDÉSEK**

A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei hogyan realizálódnak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában? Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek milyen hatékonysággal járulnak hozzá a vizsgált fogalmak fejlődéséhez?

## **2.3. A KUTATÁS HIPOTÉZISEI**

A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei közül az első kettő, a globális felismerés szakasza, illetve az elemzés szakasza reális a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában. Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben járulnak hozzá a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.

## **2.4. KUTATÁSI HÁTTÉR**

### **2.4.1. Az iskola bemutatása**

A kísérlet a bajai Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolájában zajlott. A gyakorló iskola látja el a tanítószakos hallgatók gyakorlati képzésének feladatait. Alsó tagozaton a tanítók többsége szakvezetőként dolgozik. A szakvezetők folyamatosan részt vesznek – a kisiskolások oktatásán felül – a hallgatók gyakorlati képzésében. Valamennyien kiemelkedő munkájuk révén válhattak szakvezetővé. Egy részük – a tanítói végzettségük mellett – egy-egy tanárszakot is elvégzett. Így a 2006-os fejlesztő tanítást végző szakvezető tanítói képesítése kiegészült matematika tanári szakkal. Az iskola, a mintegy 38 ezer lakosú város népszerű iskolájának számít. Beiskolázási gondok – az iskoláskorú gyermekek létszámának csökkenése ellenére – sem jelentkeztek. Korábban a jelentkezők magas száma miatt válogathattak a jelentkezők között, ez az utóbbi 7-8 évben már nem jellemző. Az első osztályos létszámot (kb. 70 fő) minden tanévben feltöltik, de már előzetes felmérés nélkül. A környező településekről is találhatunk tanulókat az iskolában. Az iskola tanulói összetétele – a tapasztalatok szerint – átlagosnak vagy

az átlagosnál valamivel jobbnak mondható. Az alsó tagozat mindegyik évfolyamán három párhuzamos osztály van, amelyek közül az egyik ének-zene tagozatos. Ez utóbbi tagozatra beiskolázott gyerekek előzetes zenei meghallgatáson vesznek részt.

A gyakorló iskola jól felszerelt, a matematika – és más tantárgyak – oktatásához szükséges valamennyi oktatástechnikai, tan- és munkaeszközzel rendelkezik.

A kísérletező folyamatos munkakapcsolatban áll a gyakorló iskolával, bemutató óráik alapján ismeri a szakvezetők munkáját, ezért döntött úgy, hogy ebben az iskolában, az általa választott szakvezetőkkel végzi a tanítási kísérletet. A 2006-os fejlesztő tanítás óravezetésével megbízott szakvezető, valamint a 2008-as tanítást végző egyaránt lelkesedéssel, szeretettel, megfelelő szakmai hozzáértéssel végzi munkáját. A korábbi bemutató órákon tapasztaltak arra utaltak, hogy a matematika oktatása során – a gazdag tapasztalatszerzés céljából – sok munka- és szemléltetőeszközt használnak, nagy hangsúlyt fektetnek a gyerekek által végzett konkrét tárgyi tevékenységekre, manipulációkra. Azt azonban, hogy a mindennapok folyamatában hogyan tanítanak, teljes bizonyossággal és egyértelműen kijelenthetően nem tudjuk megítélni. Általánosan az a tapasztalatunk, hogy a képi reprezentációk erőteljesebben érvényesülnek az első négy évfolyamon, mint a tárgyi reprezentációk.

#### **2.4.2. A kísérleti osztályok bemutatása**

2006-ban a 26 fős 4.c osztályban, míg 2008-ban a 19 fős 4.b osztályban végeztük a kísérletet. Igyekeztünk úgy kiválasztani az adott évfolyamon a kísérleti osztályokat, hogy mindkettő a párhuzamos osztályok közül a legátlagosabb legyen. Ennek eldöntésében a szakvezetők véleményére, javaslatára hagyatkoztunk. A kiválasztott osztályok matematikából normál tanterv szerint haladtak. A 2005/2006-os tanévben a 4.c osztály tanulmányi átlaga félévkor matematikából 4,08 volt. A 2007/2008-as tanévben már – a központi előírásoknak megfelelően – a 4.b osztályban a tanulók teljesítményét félévkor szövegesen értékelték. A matematikát oktató szakvezető a szöveges értékelés mellett százalékosan is kifejezte a tanulók matematikai teljesítményét, ez alapján az osztályátlag 78,42% volt. Ez közel azonos szintet jelent a 2006-os 4.c osztályéval. A 4.b osztályról meg kell említenünk annyit, hogy ének-zene tagozatos osztály. Érdeklődésük középpontjában ezért a zene áll, sokan játszanak különféle hangszereken.

A kísérleti osztályok az alsó tagozat valamennyi évfolyamán a C. Neményi tankönyvcsalád (Nemzeti Tankönyvkiadó) tankönyveit és munkafüzetait használták, amelyek kiegészültek még néhány feladatgyűjteménnyel.

Mindkét osztályban élmény volt a gyerekekkel végzett munka. Sikerült ugyanis a gyerekek érdeklődését felkelteni a geometriának ezzel a szeletével, az érdekes feladatokkal, a sok manipulációval, hajtogatással, nyírással, kirakással stb. A leggyengébb tanulók arcán is gyakorta megjelent a felfedezés öröme, ami esetükben – a szakvezetők elmondása szerint – ez idáig nem volt jellemző.

## 2.5. A TÁJÉKOZÓDÓ FELMÉRÉS FELADATAI ÉS ÉRTÉKELEÉSÜK

A 2006-os tanítási kísérlet megtervezése előtt – 2006 áprilisában – tájékozódó felmérést végeztünk a kísérleti osztályban. A tájékozódó-felmérő feladatlap összeállításánál az előző tanév (3. osztály) tananyagát, a kísérleti osztályban látogatott bemutató órai megfigyeléseinket, valamint az osztályt tanító szakvezető tapasztalatait, javaslatait vettük figyelembe. Célunk a négyzet és a téglalap, illetve a tengelyes szimmetria fogalmi szintjének felmérése volt. A párhuzamosság és merőlegesség fogalmával kapcsolatos feladatokat nem állt módunkban kitűzni, mert ezekkel a fogalmakkal a gyerekek eddigi tanulmányaik során még nem találkoztak. Ugyanakkor lehetőségünk volt – a merőlegességhez kapcsolódóan – tájékozódni a derékszög, a derékszögnél kisebb és a derékszögnél nagyobb szög fogalmi szintjéről.

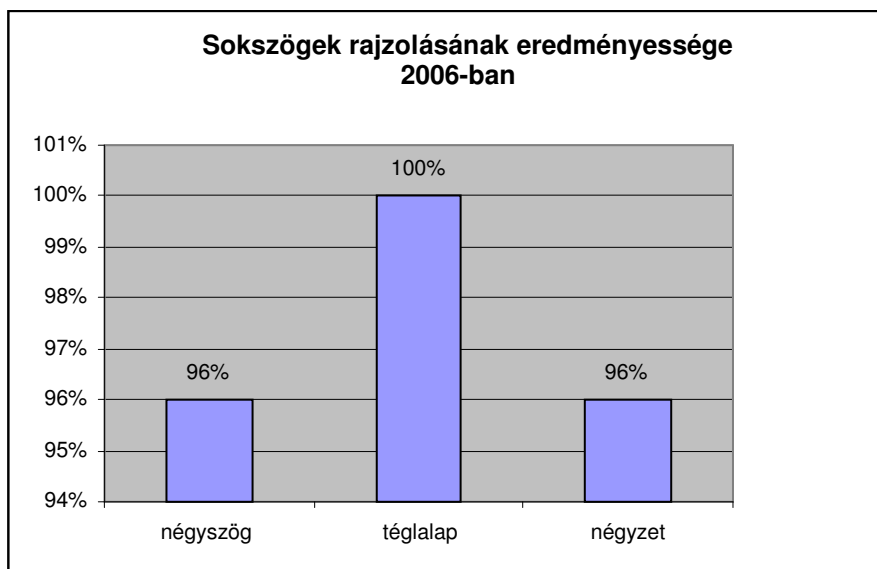
A 2008-as kísérletet megelőzően – 2008 áprilisában – a kísérleti osztályon kívül a másik két párhuzamos osztályra is – mint kontroll csoportokra – kiterjesztettük a tájékozódó felmérést. A párhuzamos osztályok a kívánt egy paraméter helyett – ami a kísérletben más, mint a hagyományos esetben – több paraméterben is különböztek a kísérleti osztálytól, ezért nem beszélhetünk klasszikus értelemben vett kontroll csoportokról. Tanulóik feleannyi tanórában foglalkoztak a geometria ezen részével, eltérő tematika szerint, egy osztály kivételével más szakvezetők irányításával haladtak. A szakvezetőkkel folytatott interjúk alapján arra következtettünk, hogy a tanulók által végzett konkrét tárgyi tevékenységek csak esetlegesen, de nem szisztematikusan fordultak elő. A párhuzamos osztályok bevonására – a tájékozódó felmérésnél, később az utóteszteknél, illetve a késleltetett teszteknél – azért került sor, mert kíváncsiak voltunk arra, hogy a gyerekek hogyan teljesítenek a hagyományos tanítás mellett. Ezen kívül a fő kutatási célunkat akartuk megerősíteni, miszerint a negyedik osztályos tanulók gondolkodása valóban nem haladja meg a *van Hiele*-féle első két szintet, másrészt hangsúlyozni akartuk a tárgyi és képi reprezentációk, a tanulói konkrét tevékenységek fontosságát, szisztematikus és nem esetleges alkalmazását.

### 2.5.1. A négyzetre és a téglalapra vonatkozó feladatok

A tájékozódó felmérés első két feladata hivatott bemutatni a négyzet és a téglalap fogalmi szintjét. Az első feladat a négyszög, téglalap, négyzet fogalmak realizálásával (alkotásával), míg a második a fogalmak azonosításával (felismerésével) kapcsolatos.

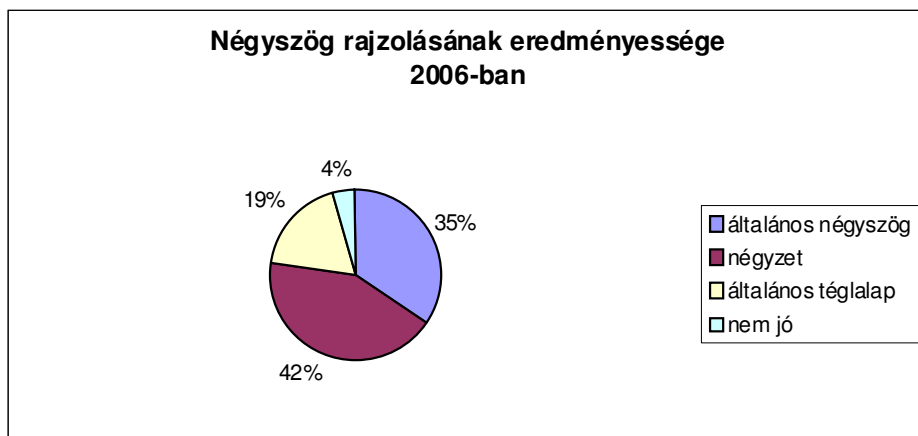
Az 1. feladatban egy-egy négyszög, téglalap, valamint négyzet rajzolása volt a gyerekek feladata. (*1. sz. melléklet, 1. feladat*) Kíváncsiak voltunk arra is, hogy a tanulók milyen arányban rajzolnak általános négyszöget, illetve speciálisat.

Az 1. feladat megoldásának eredményességét a következő ábra mutatja, 2006-ban (*2.1. ábra*):



*2.1. ábra*

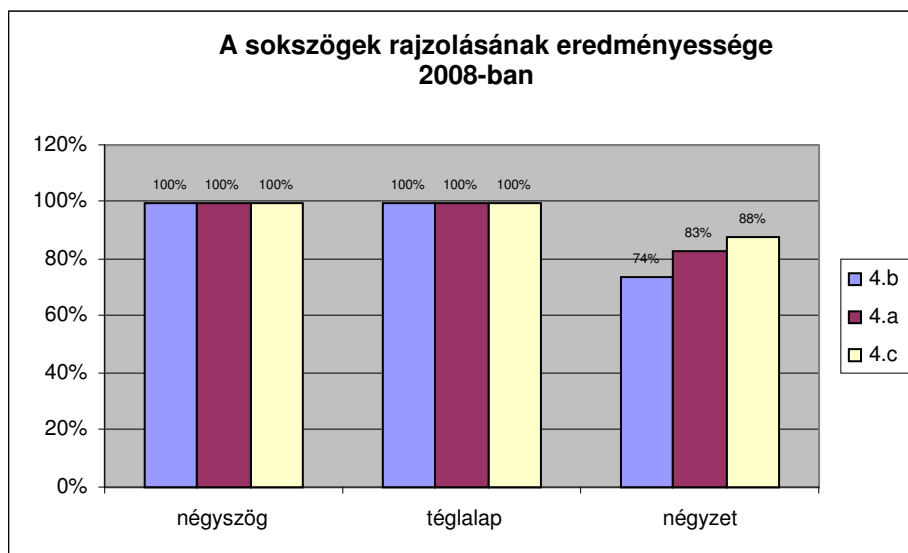
A feladat megoldásában a gyerekek eredményesek voltak, mivel a 26 főből csupán 1 nem tudott négyszöget, illetve ugyancsak 1 nem tudott négyzetet rajzolni. Viszonylag magas azon tanulók aránya (42%), akik négyzetet rajzoltak négyszöggként is (2.2. ábra). Számukra ez a két fogalom nem feltétlenül különül el egymástól.



*2.2. ábra*

2008-ban a kísérleti 4.b (19 fő) osztályon kívül a 4.a osztály 23, illetve a 4.c osztály 17 tanulója is megírta a tájékoztató felmérést.

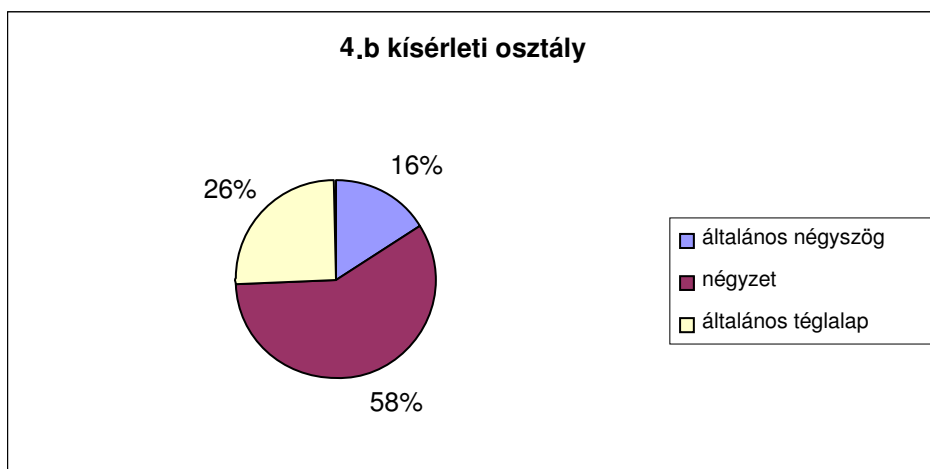
Az 1. feladat megoldásánál a következő eredmények születtek (2.3. ábra):

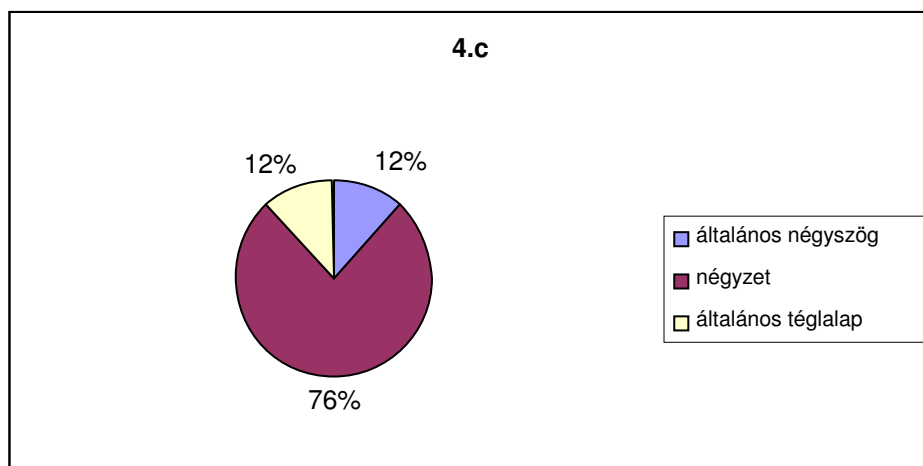
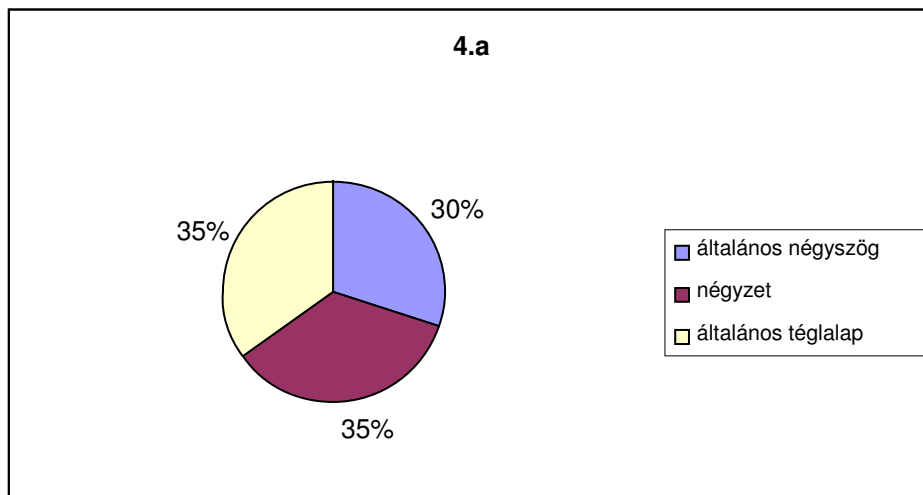


*2.3. ábra*

A négyyszög és a téglalap rajzolásánál mindhárom osztály hibátlanul teljesített. A négyzet rajzolásánál a kísérleti osztály teljesített legrosszabbul. Az öt hibázó tanuló közül három általános téglalapot, egy háromszöget, míg egy tanuló semmit sem rajzolt. 2008-ban a kísérleti osztályban és a 4.c osztályban még magasabb lett azoknak a tanulónak az aránya (58%, illetve 76%), akik négyzetet rajzoltak négyyszöggként. A tájékozódó felmérést követő kiegészítő beszélgetések során – amelyeket a tanulókkal egyenként végeztünk – rákérdeztünk arra, hogy tudnának-e másfajta, más alakú négyyszöget rajzolni. Néhányan tudtak. Ezek a gyerekek az adott kategória példájaként a számukra legtipikusabb tagját rajzolták le, a többségük azonban újra négyzetet rajzolt, csak kisebb vagy nagyobb méretben. Utóbbiak esetében a négyzet és a négyyszög fogalom összemosódik. A három osztály közül a 4.a osztály tanulóinak négyyszögről alkotott fogalma a legárnyaltabb. (2.4. ábra)

Négyyszög rajzolásának eredményessége 2008-ban:



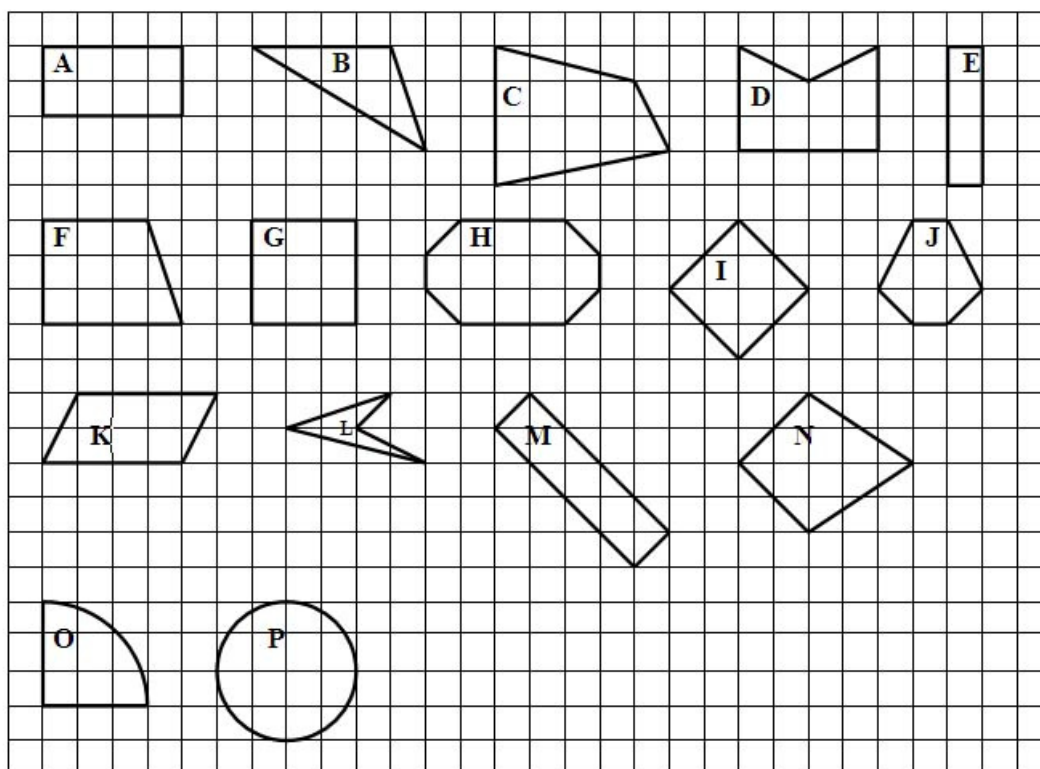


2.4. ábra

A 2. feladatban (1. sz. melléklet, 2. feladat) 16 síkidom közül kellett kiválasztani az alábbi feltételeknek megfelelőket, azaz melyek

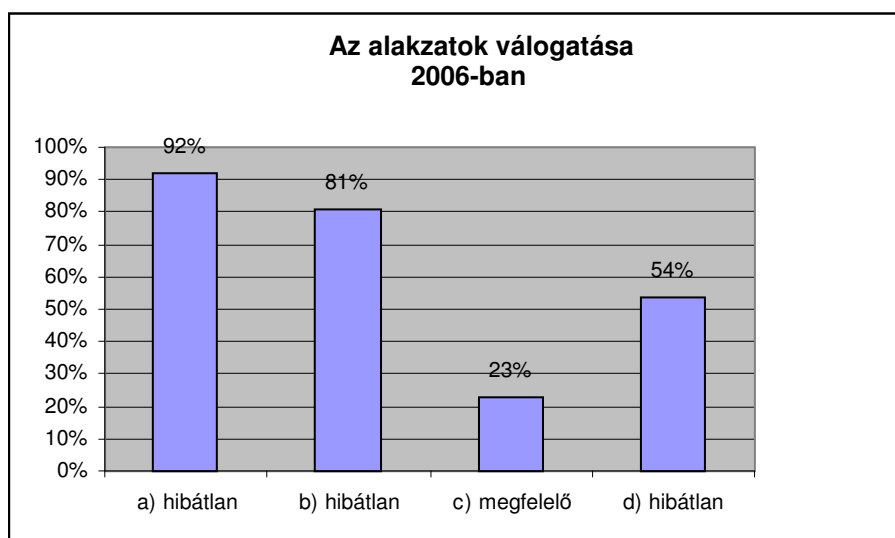
- a) azok, amelyeket csak egyenes vonal határol;
- b) négyszögek;
- c) téglalapok;
- d) négyzetek.

Ezekből a síkidomokból kellett válogatniuk (2.5. ábra):



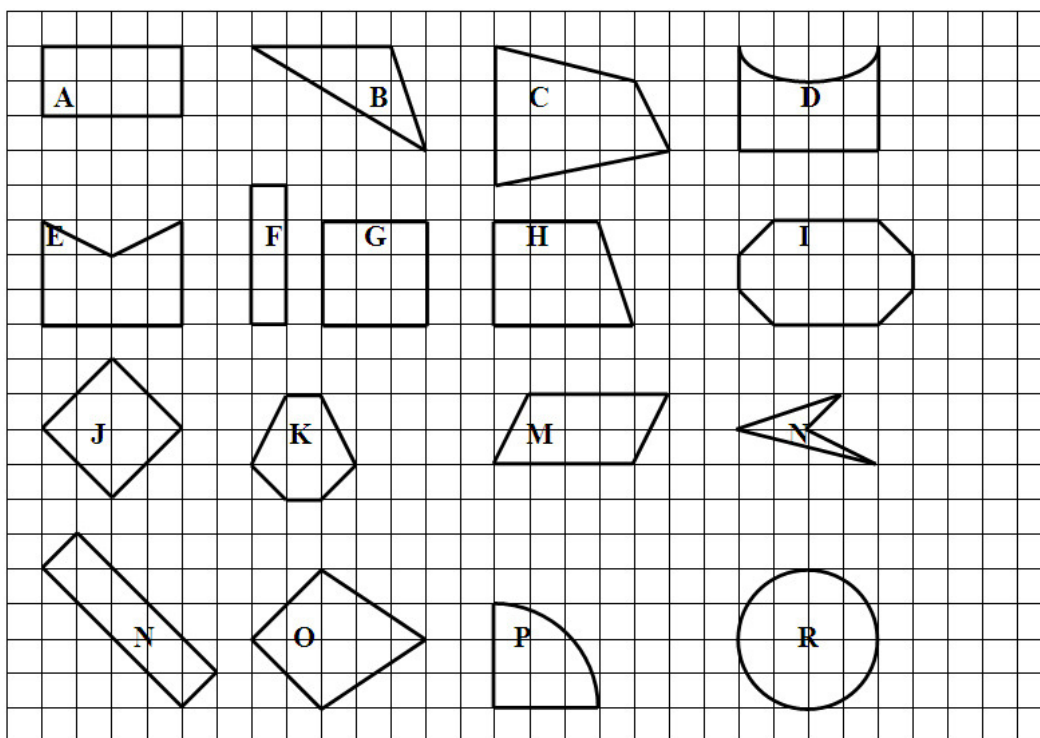
2.5. ábra

A 2. feladat megoldásának értékelése 2006-ban a következők szerint alakult (2.6. ábra):



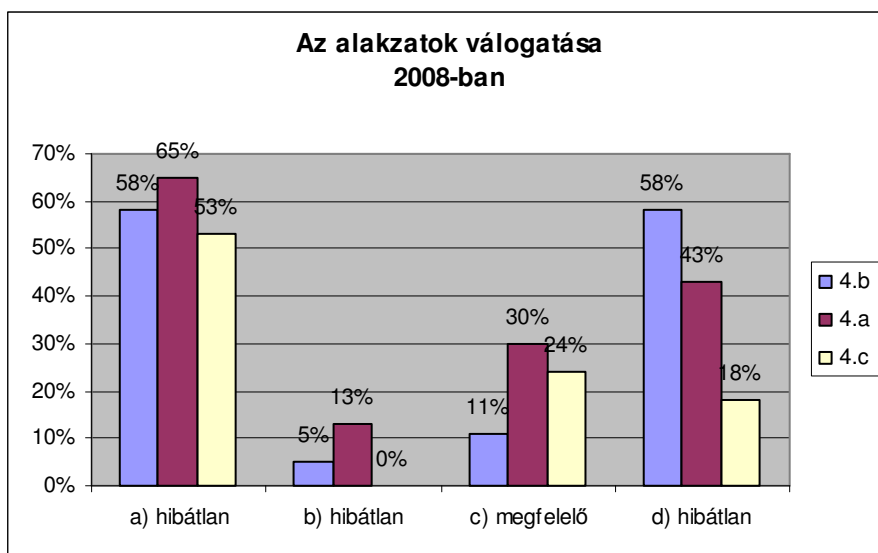
2.6. ábra

A 2006-os tanítás során azt tapasztaltuk, hogy problémás azon síkidomok osztályba sorolása (négyszögek, illetve nem négyszögek), amelyek ugyan négy csúccsal rendelkeznek, de van görbe vonaluk. Ezért 2008-ban változtattunk a második feladaton (2. sz. melléklet, 2. feladat) oly módon, hogy a síkidomok között szerepelt olyan alakzat (D jelű), amelynek négy csúcsa van, de görbe vonal is határolja. (2.7. ábra)



2.7. ábra

A 2. feladat megoldásának értékelése 2008-ban a következők szerint alakult (2.8. ábra):



2.8. ábra

A 2006-os eredményekhez képest a b) feladat megoldásában – a négyszögek válogatásánál – lényegesen rosszabb eredmények születtek. A kísérleti 4.b osztályban a D jelű síkidomot a tanulók 63%-a a négyszögekhez sorolta, a 4.a osztályban 57%-a, míg a 4.c-ben 41%-a. A négyszögek felsorolásánál csak ez a hibája volt rendre a tanulók 32%, 30%, illetve 24%-ának. Láthatjuk, hogy a rosszabb teljesítménynek ez csak részben volt oka. Hibaként előfordult, hogy néhányan csak a

négyszöket, voltak akik a négyszöket és az általános téglalapokat, esetleg csak egy részüket, de olyanok is voltak, akik csak a négyszöket, az általános téglalapokat, valamint az általános paralelogrammákat tekintették négyszögeknek. Ez összefügghet azzal, hogy mennyire változatos példaanyaggal találkoztak korábbi tanulmányaik során a gyerekek. A megismert négyszögek számának növekedésével ugyanis a gyerekek négyszögekről alkotott fogalma folyamatosan alakul, bővül.

Az adatokból kiderült, hogy a téglalap és a négyszög esetén (2008-ban a négyszög esetén is) a fogalomazonosítás további fejlesztést igényel. A téglalapok válogatásánál ( c) feladat) 2006-ban egy tanuló dolgozott hibátlanul, aki a négyszöket is a téglalapokhoz sorolta. 2008-ban a három osztály egyikében sem született ilyen megoldás. Megfelelőnek tartottuk viszont azoknak a megoldását, akik ugyan nem sorolták a négyszöket a téglalapokhoz, de más hibájuk nem volt. Kiemelkedően magas azoknak a tanulóknak az aránya, akik az általános paralelogrammát téglalapnak tartották. 2006-ban a tanulók közel 70%-a, 2008-ban a kísérleti osztályban 79%-a, a másik két osztályban 61%-a, illetve 24%-a. A kísérleti osztályokban a gyerekek majdnem 90%-a a négyszöget nem tartotta téglalapnak. 2008-ban a 4.a osztályban a 91%-uk, a 4.c-ben 94%-uk. Ez a *van Hiele*-féle első két szintnek teljes mértékben megfelel. Érdekes viszont, hogy a csúcsára állított négyszögben nem ismerte fel a négyszöget 2006-ban a gyerekek 27%-a, 2008-ban a 21%-a (4.b kísérleti osztály), 35%-a (4.a) és az 59%-a (4.c).

Az előforduló hibák kiküszöbölése, a helyes fogalomfejlődés érdekében kísérletünkben nagy hangsúlyt fektettünk a megfelelő példák, ellenpéldák bemutatására és megbeszélésére. Megfelelően egyrészt a példák, ellenpéldák kellő mennyiségét, másrészt a változatosságukat értjük (így pl.: téglalappal, négyszöggel különböző helyzetekben is találkozhatnak). Továbbá, hogy általuk a fogalomhoz tartozó lényeges és jellemző jegyek felismerhetők, a lényegtelenek pedig kiszűrhetők legyenek a gyerekek számára.

Ha összehasonlítjuk a két feladat megoldásának eredményességét, akkor megállapíthatjuk, hogy az első feladatban a megadott fogalmak rajzolása lényegesen jobban ment, mint azok felismerése a második feladatban.

Skemp egy fogalom szempontjából irreleváns tulajdonságokat „zajnak” nevezi. *„Zajon itt olyan adatokat értünk, amelyek egy bizonyos kommunikáció szempontjából irrelevánsak, lényegtelenek. Vagyis, ami egy bizonyos közlés szempontjából zaj lehet, az egy más közlés szempontjából esetleg egyáltalán nem az. (Így pl., ha cseng a telefon, miközben zenét hallgatunk, a csengő hangja információt közvetít, nevezetesen azt, hogy valaki felhívott bennünket. A zene viszonylatában azonban a csengő hangja zaj.) Minél nagyobb az információs zaj, annál nehezebb egy fogalom megalkotása.”* A második feladatban a „zajszintet” növeltük, így a probléma nehezedett, a lényeges jegyek ezáltal elhomályosultak a gyerekek előtt. Ennek köszönhető a gyengébb eredmény, ami azt jelzi, hogy nincs biztos fogalom sem a téglalap, sem a négyszög tekintetében. Tiszta, világos fogalmakról akkor beszélhetünk, ha már teljes zajban is ki tudják válogatni őket.

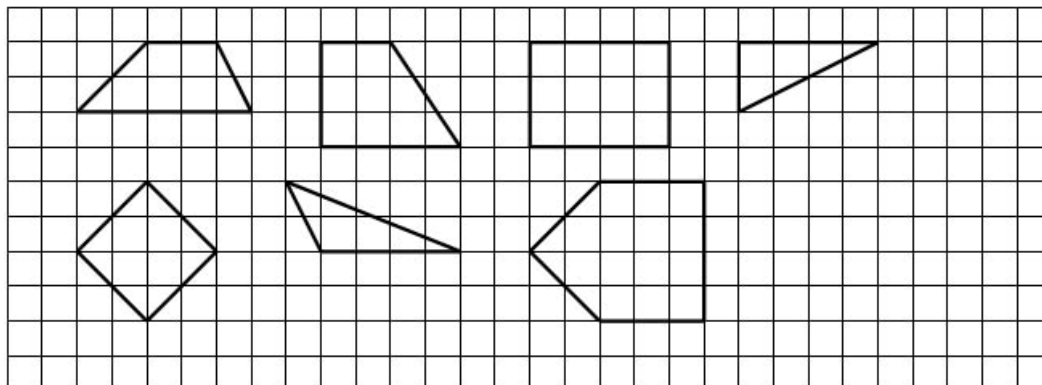
## 2.5.2. Szögek nagyságának vizsgálata

A tájékozódó felmérésben párhuzamossággal és merőlegességgel kapcsolatos feladatot nem találhatunk, hiszen – ahogy már említettük – ezekkel a fogalmakkal korábbi tanulmányaik során a gyerekek még nem találkoztak.

A felmérő 3. feladatában – a merőlegességhez kapcsolódóan – a derékszög, a derékszögnél kisebb és a derékszögnél nagyobb szög fogalmi szintjéről

tájékozódunk. A gyerekeknek 7 sokszög szögeiről kellett eldönteniük, hogy melyek derékszögek, melyek kisebbek, illetve nagyobbak a derékszögnél, majd ennek megfelelően pirossal, kékkel vagy zölddel színezniük a szögeket. (1. sz. melléklet, 3. feladat)

A következő síkidomok szögeit kellett vizsgálniuk (2.9. ábra):



2.9. ábra

A feladat megoldásának eredményességét a következő táblázat mutatja, 2006-ban:

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Minden szög nagyságát helyesen állapította meg.                                  | 31% |
| Minden derékszöget helyesen jelölt.                                              | 46% |
| A derékszögek meghatározásánál 1 hiba fordult elő.                               | 15% |
| Csak a négyzetnél és a téglalagnál színezte hibátlanul a derékszögeket.          | 27% |
| Minden hegyes- és tompaszöget helyesen színezett.                                | 31% |
| A hegyesszögek és a tompaszögek megállapításánál 2 vagy annál több hibát ejtett. | 69% |

Ugyanez 2008-ban:

|                                                                                  | 4.b<br>kísérleti | 4.a | 4.c |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| Minden szög nagyságát helyesen állapította meg.                                  | 58%              | 57% | 12% |
| Minden derékszöget helyesen jelölt.                                              | 63%              | 61% | 24% |
| A derékszögek meghatározásánál 1 hiba fordult elő.                               | 11%              | 4%  | 12% |
| Csak a négyzetnél és a téglalagnál színezte hibátlanul a derékszögeket.          | 0%               | 0%  | 12% |
| Minden hegyes- és tompaszöget helyesen színezett.                                | 58%              | 57% | 12% |
| A hegyesszögek és a tompaszögek megállapításánál 2 vagy annál több hibát ejtett. | 42%              | 35% | 82% |

2006-ban a kísérleti osztály tanulóinak közel 70%-a valamilyen hibát vétett a szögek nagyságának megállapításánál. A derékszögek jelölésénél a gyerekeknek majdnem a fele hibátlanul dolgozott, ezzel azonban nem lehettünk elégedettek. A 2008-as

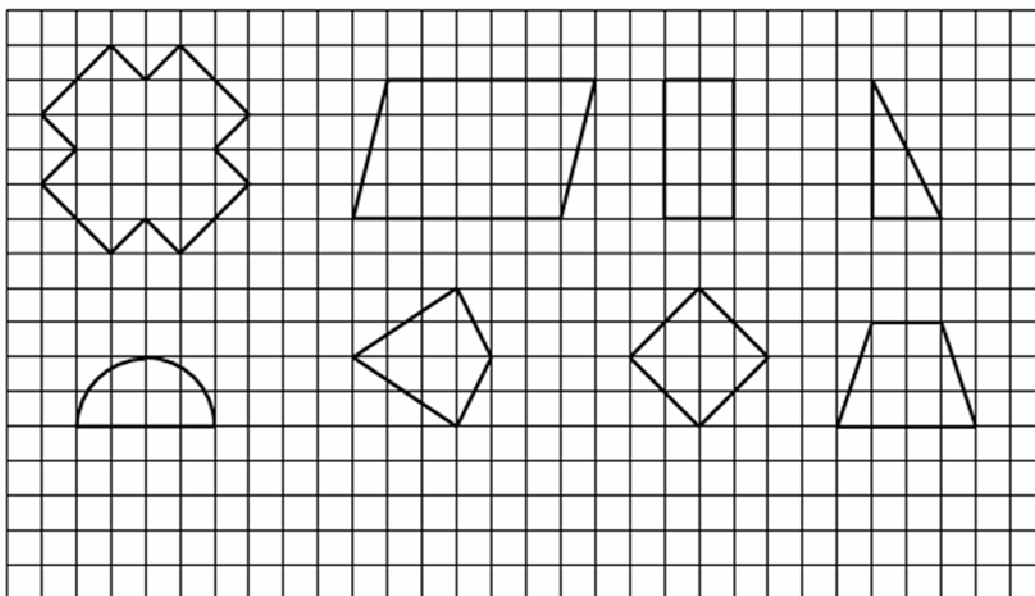
kísérleti osztályban jobb eredmények születtek. Valamennyi osztály a derékszögek jelölésében bizonyult a legeredményesebbnek. Kísérletünkben a derékszög fogalom további fejlesztésénél arra törekedtünk, hogy az általunk összeállított példaanyagban gyakran találkozzanak a gyerekek olyan helyzetű derékszögekkel, amelyek szögszárai nem párhuzamosak a lap, illetve füzet szélével.

### 2.5.3. A tengelyes szimmetriával kapcsolatos feladatok

A tájékozódó-felmérő feladatlap 4. feladata a síkidomok tengelyes szimmetriájával, míg az 5. feladata a tengelyes tükrözéssel foglalkozik.

A 4. feladatban a gyerekeknek 8 síkidomról kellett eldönteniük, hogy tükrös-e – ezt tükörrel ellenőrizhették – és pirossal jelölniük a tükörtengely, illetve tengelyek helyét. (1. sz. melléklet, 4. feladat)

A következő síkidomokat kellett vizsgálniuk (2.10. ábra):



2.10. ábra

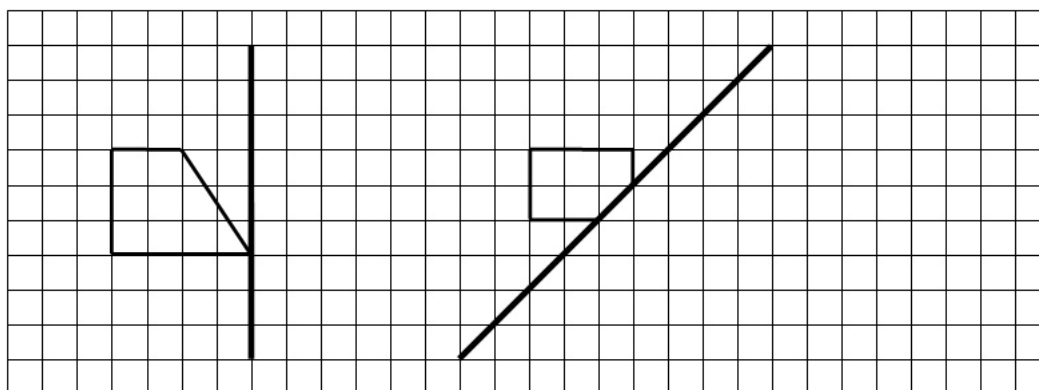
A feladat megoldásának eredményességét a 26 fős kísérleti osztályban a következő táblázat mutatja, 2006-ban:

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Minden tükörtengelyt megrajzolt.                                                                            | 27% |
| A 4 tükörtengellyel rendelkező síkidomoknál csak 2 tükörtengelyt talált meg, több hibát viszont nem ejtett. | 35% |
| Az általános paralelogrammánál rajzolt tükörtengelyt.                                                       | 12% |
| A háromszögnél rajzolt tükörtengelyt.                                                                       | 8%  |
| 5 vagy annál több hibája volt.                                                                              | 35% |

Ugyanez 2008-ban:

|                                                                                                             | 4.b<br>kísérleti | 4.a | 4.c |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| Minden tükrötengelyt megrajzolt.                                                                            | 26%              | 26% | 6%  |
| A 4 tükrötengellyel rendelkező síkidomoknál csak 2 tükrötengelyt talált meg, több hibát viszont nem ejtett. | 16%              | 30% | 29% |
| Az általános paralelogrammánál rajzolt tükrötengelyt.                                                       | 32%              | 9%  | 41% |
| A háromszögnél rajzolt tükrötengelyt.                                                                       | 11%              | 9%  | 24% |
| 5 vagy annál több hibája volt.                                                                              | 32%              | 35% | 65% |

Az ismertett adatok azt jelzik, hogy a szimmetria fogalma további fejlesztést igényel. 2006-ban a kísérleti osztály tanulóinak 73%-a, 2008-ban pedig 74%-a valamilyen hibát vétett a tükrösség megállapításánál vagy a tükrötengelyek berajzolásánál. Az előforduló hibák magas aránya szükségessé tette azt, hogy a továbbiakban a gyerekek sokféle szabályos és nem szabályos geometriai alakzat tükrösségét vizsgálják. A tükrösség felismerésén (fogalomazonosítás) kívül alsó tagozaton foglalkozunk még térben síkra vonatkozóan, síkban tengelyesen tükrös alakzatok előállításával (fogalomrealizálás), valamint tükörkép megalkotásával. Ez utóbbival kapcsolatos az 5. feladat, amelyben a gyerekeknek négyzethálóra rajzolt két alakzatot kellett megadott (vastagon rajzolt) tengelyekre tükrözniük. Ez a feladat csak a 2008-as felmérésben szerepelt. (2. sz. melléklet, 5. feladat)  
A következő síkidomokat kellett tükrözniük (2.11. ábra):



2.11. ábra

A hibátlan teljesítmények arányát mutatja a következő táblázat (2008-ban):

|                                                                            | 4.b<br>kísérleti | 4.a | 4.c |
|----------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| A függőleges helyzetű tükrötengelyre történő tükrözést hibátlanul végezte. | 68%              | 87% | 77% |
| A ferde helyzetű tükrötengelyre jól tükrözött.                             | 74%              | 87% | 94% |

A kísérleti osztály teljesítménye mindkét tükrözés esetében valamivel gyengébbnek mutatkozott a másik két osztályéhoz képest.

A tájékozódó felmérések értékelésével megállapítottuk, hogy a kísérleti osztályokban a gyerekek:

- jelentős része a négyszög szó kapcsán speciális esetekre (négyzetre, téglalapra) gondolt,
- 70%-a (2006-ban), illetve 79%-a (2008-ban) az általános paralelogrammát téglalapnak tartotta,
- közel egyharmada (2006-ban), illetve negyede (2008-ban) a csúcsára állított négyzetben nem fedezte fel a négyzetet,
- kb. fele nem ismerte fel az összes derékszöget az adott sokszögek esetén,
- majdnem háromnegyede hibázott a síkidomok tükrösségének megállapításánál vagy a tükrötengelyek berajzolásánál.

Ezek a *van Hiele*-féle első szintnek (az alakzatok globális megismerésének) felelnek meg.

## 2.6. TANÍTÁSI KÍSÉRLET

A tájékozódó felmérés eredményeinek figyelembevételével terveztük meg a fejlesztő kísérlet tananyagát. A négyszög, a téglalap, a négyzet, a szimmetria és a szögfogalom további fejlesztésének szükségességét indokolták az előző fejezet végén összefoglaltak.

Tanítási kísérletünk tananyagához a C. Neményi tankönyv és munkafüzet feladataiból is válogattunk. A válogatott feladatok egy részét változatlanul hagytuk, a többit módosított vagy kiegészített formában tűztük ki. A módosításokat, kiegészítéseket az általunk kitűzött cél – a vizsgált geometriai fogalmak *van Hiele*-féle első két szinten történő tanítása, fejlesztése – érdekében végeztük. A módosításokra azért volt szükség, mert a C. Neményi tankönyvcsalád tankönyvei és munkafüzetei időnként túlmennek a *van Hiele*-féle második szinten, hiszen definíciókat közölnek és az alakzatok kapcsolatát vizsgálják. Már 2. osztályban találunk olyan feladatot, amelyben megfogalmazzák, hogy a négyzet téglalap. „8 téglalapot látsz a képen. Jelöld egy csúcsukat piros pöttyel! Három közülük négyzet. A négyzeteket színezd is ki pirossal!” (C. Neményi – Sz. Oravecz, 2008) Az „Útjelző”-ben pedig ehhez kapcsolódóan azt javasolják, hogy „*ezt a szemléletet sohasem szabad megkérdőjelezni esetleg rosszul megfogalmazott kérdéssel, utasítással (pl., hogy hasonlítsátok össze a téglalapot és a négyzetet; mi a különbség a négyzet és a téglalap között?)*” (C. Neményi – Sz. Oravecz, 1994)

A feladatok többségének összeállításánál Peller József: „A matematikai ismeretszerzés gyökerei” és A. M. Piskalo: „Geometria az 1-4. osztályban” – van Hiele nézeteit követő – könyveikben megfogalmazott feladatokra vonatkozó javaslatokat, módszereket vettük figyelembe, illetve alakítottuk át a tananyagunkhoz kapcsolódóan.

A tananyag összeállítása során folyamatosan törekedtünk a zajsztint növelésére, a fokozatosság betartása mellett. Igyekeztünk a problémákat egyre

nehezíteni. Az első órákon a téglatest és a kocka lapjaiként foglalkoztunk a téglalappal és a négyzettel. A *van Hiele*-féle második szintnek (alakzatok elemzése) megfelelően az alakzatokat részeire bontottuk, majd összeraktuk. Az alakzatok elemzését, a tulajdonságok megállapítását, felsorolását – a közöttük lévő logikai kapcsolatok felismerése nélkül – konkrét tevékenységek segítségével végeztük. A téglatest és a kocka szemközti, valamint a szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során vezettük be új fogalomként a párhuzamosságot és a merőlegességet, majd ezt követően a testek kiterítésével tértünk át a síkra. A szimmetriával is előbb testek, majd ezt követően síkidomok esetén találkoztak a gyerekek. A négyzet és a téglalap tulajdonságainak megállapítása az alakzatok megkülönböztetésére szolgált.

A tananyag, illetve az órák tervezésekor azt tartottuk szem előtt, hogy a gyerekek előbb konkrét tapasztalatok alapján, valóságos játékok keretében, tárgyi tevékenykedés közben, majd vizuális síkon (rajzolás), végül absztrakt, nyelvi síkon fedezzék fel az elsajátítandó geometriai fogalmakat. Az órák jelentős részét a konkrét tárgyi tevékenységekre, cselekvésekre, manipulációkra szántuk, hiszen a negyedik osztályos gyerekek ismeretszerzésének fontos színtere a *Bruner*-féle enaktív sík. Az enaktív síkon szerzett tapasztalataik összegződésével alakul ki az ikonikus síkon a megfelelő képzetrendszerük. Az alsó tagozaton – így az általunk tervezett tananyagban is – ez a két reprezentáció a domináns, ugyanakkor a nyelv (beszéd) is fontos szerepet játszik. A tanórákon elhangzott kérdéseinkben, utasításainkban, magyarázatainkban egyszerű, a gyerekek számára érthető megfogalmazásokra törekedtünk. A szaknyelvet a negyedik osztályos gyerekek értelmi szintjének megfelelő pontossággal használtuk.

Olyan helyzetek kialakítását igyekeztünk megteremteni, melyben a tanulók a vizsgálódás, vitatkozás, leírás és demonstráció eszközeivel maguk is aktívan részt vesznek geometriai tudásuk fejlesztésében. Továbbá olyanokat, melyben gondolataikat megbeszélik, felfedezéseiket megosztják egymással, sejtéseikről megbizonyosodhatnak.

Az iskola helyi tanterve negyedik osztályban 128 órát biztosít a matematika oktatására, mely az első félévben heti 3, míg a második félévben heti 4 órát jelent. Ebből a „geometria, mérések” témakörére 15 óra jut, ami kiegészül néhány – folyamatos gyakorlásra szánt, elsősorban a mértékváltások gyakorlására vonatkozó – órával, valamint további 2 óra áll rendelkezésre a számonkérésre. A tanmenet szerint 9-10 óra tananyaga a mérésekkel, mértékváltásokkal, illetőleg a hasonlósági transzformációkkal kapcsolatos, a fennmaradó 7 óra a „Tervezz, rajzolj, építs!” témát dolgozza fel. Ezt a 7 órát növeltük – a tananyag átcsoportosítása révén – 17 órára, ennek keretében foglalkoztunk a téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlesztésével.

A tanórákon frontális, páros és egyéni munkaformában egyaránt dolgoztak a gyerekek. A frontális és az egyéni munkaforma volt azonban a domináns.

A dolgozat írója a tanórákon többnyire megfigyelőként vett részt, időnként azonban aktívan bekapcsolódott a tanórákba. Segítette a tanítók munkáját – akikkel előzetesen megbeszélte az órák tananyagát, menetét – a bemutatás, modellezés terén, alkalmanként – ha egy tanulói válasz nem volt teljesen egyértelmű, vagy nem lehetett pontosan tudni, hogy mire gondolt a diák – kiegészítő kérdéseket tett fel, szükség esetén más megközelítésű magyarázatokat adott. A tanulónak önálló vagy páros munkájuk során mindketten segítettek a feladatok végrehajtásában, illetőleg megoldásában.

Minden óráról, a tanórán történekről, a tanulók megfigyeléséről, egyes tanulókkal való külön foglalkozásról, interjúkról, valamint a szakvezetőkkel való beszélgetésekről jegyzőkönyv készült.

### **2.6.1. A tanítási kísérlet részletes tematikája**

#### *1. óra:*

Tájékozódó felmérés megírása.

#### *2. óra:*

Téglatest alakú tárgyak (gyufásdoboz, szekrény, stb.) megnevezése, vizsgálata: csúcsok, élek, lapok száma; élek hosszúságának összehasonlítása; lapok alakja, mérete; szemközti, szomszédos lapok értelmezése; szemközti, szomszédos lapok helyzete. Kocka alakú tárgyak megnevezése, vizsgálata: csúcsok, élek, lapok száma; élek hosszúságának összehasonlítása; lapok alakja, mérete; szemközti, szomszédos lapok meghatározása, helyzetük vizsgálata.

#### *3. óra:*

Téglatest, kocka tulajdonságainak felsorolása modell segítségével.

Különböző téglatestek építése 4 gyufásdobozból. Gyufásdobozból épített testek tükrképének előállítás. Szimmetrikusan elhelyezkedő tárgyak keresése a tanteremben. Szimmetrikus tárgyak felsorolása. Szimmetriasíkok helyének meghatározása téglatest, kocka és különböző testek esetén.

#### *4. óra:*

Téglatest, szabályos ötszög alapú hasáb, négyzet alapú gúla esetén a szemközti, illetve szomszédos lapok helyzetének párhuzamosság, valamint merőlegesség szempontjából történő megfigyelése, modell segítségével. Téglatest, kocka kiterítése; lapok alakjának, méretének vizsgálata. Téglalap vizsgálata: csúcsok száma; szemközti, szomszédos csúcsok; átló, oldalak száma, hosszúságuk összehasonlítása; szemközti, szomszédos oldalak meghatározása; szemközti oldalak párhuzamossága; szögek nagyságának mérése (hajtogatott derékszöggel); szomszédos oldalak merőlegessége. Téglalapból négyzetlap kivágása.

#### *5. óra:*

Kocka különböző testhálói. Különböző sokszögek átalakítása téglalappá hajtogatással, nyírással, átdarabolással, össze-, illetve hozzáillesztésekkel.

#### *6. óra:*

Gyufásdoboztok nyitott oldalának vizsgálata. Téglalap kettévágása az átlója mentén. Az így kapott háromszögek összeillesztéséből újabb síkidomok alkotása, megnevezésük. Tapasztalatgyűjtés a síkidomokról, megfigyelések, tulajdonságok megfogalmazása. A téglalap és az általános paralelogramma tulajdonságainak összehasonlítása. A különbségek kiemelése.

#### *7. óra:*

Négyzet vizsgálata: csúcsok száma; szemközti, szomszédos csúcsok, átló. Négyzetlap kettévágása az átlója mentén. Az így kapott két egyenlő szárú derékszögű háromszögből síkidomok alkotása. Négyzet további vizsgálata: oldalak

száma, hosszúságuk összehasonlítása; szemközti, szomszédos oldalak; szemközti oldalak párhuzamossága, szomszédos oldalak merőlegessége; szögek nagysága.

*8. óra:*

Síkban két hurkapálcika segítségével párhuzamos, merőleges egyenespárok szemléltetése, valamint olyan egyeneseké, amelyek nem párhuzamosak és nem merőlegesek. Papírból szabadon kivágott síkidomok előállítás. Tulajdonságaik megfogalmazása. Téglalap, négyzet tulajdonságainak felsorolása. A logikai készlet 2, 3, 4, illetve 6 szabályos háromszögéből síkidomok alkotása. Párhuzamos oldalpárok megfigyelése. Papírcsíkból különböző hosszúságú, azonos magasságú téglalapok előállítása.

*9. óra:*

Papírcsíkból egy-egy egyenes vágással különböző síkidomok előállítása. Megnevezésük. Tulajdonságok, közös tulajdonságok megfogalmazása. Téglalapból általános rombusz kivágása. Tulajdonságai. Téglalapból általános deltoid kivágása. Tulajdonságai. Hat gyufaszálból téglalap, majd általános paralelogramma „keretének” elkészítése. Négy gyufaszálból négyzet, majd általános rombusz „keretének” létrehozása. A négyzet és a rombusz tulajdonságainak összehasonlítása.

*10. óra:*

Téglalapból egy vágással két téglalap, egy ötszög és egy háromszög, egy háromszög és egy négyszög, két négyszög, két háromszög előállítása. A téglalap és a négyzet tulajdonságainak összehasonlítása. Tulajdonságkártyák. Téglalap két oldalának lerajzolása, ahányféleképpen csak lehet. Pontrácson négyzetek rajzolása.

*11. óra:*

Pontrácson különböző négyszögek rajzolása. Pontrácson különböző háromszögek rajzolása. Pontrácson párhuzamos, merőleges egyenespárok rajzolása.

*12. óra:*

A pontrácson alkotott négyszögek párhuzamos oldalpárjainak színezése, derékszögek jelölése. A háromszögek esetén az egymásra merőleges oldalak színezése. Adott feltételeknek megfelelő négyszögek rajzolása. Téglatest, kocka élvázának vizsgálata. Párhuzamos, merőleges élek megfigyelése.

*13. óra:*

Tükörkép előállítása síkban tevékenységgel: festékes papírlap félbehajtása során a festékfolt tükörképének vizsgálata; félbehajtott fekete fotópapíron előre megrajzolt minta határvonalának gombostűvel történő átszurkálása, majd a kihajtott papír fény felé tartásával a keletkezett tükörkép vizsgálata; félbehajtott papírlapból adott alakzat kivágása. Tükörképek megfigyelése. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok előállítása nyírással. Négyzethálón adott alakzat adott tengely(ek)re történő tükrözése.

*14. óra:*

Papírból kivágott síkidomok szimmetriatengelyeinek megkeresése: hajtogatással, tükör segítségével. Tapasztalatok, megfigyelések megfogalmazása. Síkidomok rajzolása, amelynek nincs, pontosan 1, 2, 3, illetve 4 szimmetria tengelye van.

15. óra:

Tengelyesen szimmetrikus alakzatok előállítására négyzethálón. Tengelyesen szimmetrikus síkidomok szimmetriatengelyeinek meghatározása. Síkidomok válogatása adott tulajdonságok alapján. „Minden”, „van olyan” típusú állítások megfogalmazása. Állítások logikai értékének megállapítása.

16. óra:

Síkidomok válogatása adott szempontok alapján. Állítások logikai értékének megállapítása. Adott feltételeknek megfelelő síkidomok rajzolása. Barkóba.

17. óra:

Utóteszt megírása.

## 2.6.2. A négyzet és a téglalap fogalom fejlesztése

### 2.6.2.1. Téglatest és téglalap, kocka és négyzet megkülönböztetése

Alsó tagozaton, de felsőbb osztályokban is gyakran találkozhatunk a test és síkidom fogalmak keverésével. Megfigyelhetjük ezt például, amikor a gyerekek a négyzetet kockának, illetve a kockát négyzetnek, a téglatestet téglalapnak, a tetraédert háromszögnek vagy a gömböt körnek nevezik. A 2. óra egyik feladatában téglatest alakú tárgyakat kerestettünk a tanteremben azzal a céllal, hogy a téglatest fogalmát – megkülönböztetve a téglalaptól – erősítsük. A gyerekek felsorolták a náluk lévő gyufásdobozt, a szekrényt, a könyvet, a szivacsot, a krétát és a táblát.

*Tanító:* A táblát miért tartod téglatest alakúnak?

*Sára:* Mert van vastagsága.

*Viki:* A kép is ilyen alakú.

*Judit:* Szerintem a kép nem jó, mert nem emelkedik ki.

*Tanító:* Tudtok még téglatest alakú tárgyakat mondani?

*Martin:* A falon lógó órarend.

*Benedek:* Az órarend sem jó, mert nincs vastagsága. A kép és az órarend téglalap alakú.

Viki és Martin keverték a téglatest és a téglalap fogalmakat, Judit és Benedek azonban megfelelően cáfolták a helytelen állításokat.

Egy másik feladatban, a téglatest és a kocka lapjainak vizsgálatakor, újra szembesültünk ezzel a problémával. A tanító az applikációs téglatestet a táblára fektette és körülrajzolta, majd a keretet beszínezte.

*Tanító:* A téglatest egyik lapját a táblára rajzoltam. Hogy nevezzük ezt a lapot?

*Milán:* Téglatestnek.

*Bodó:* Nem lehet téglatest, mert az kidomborodik, ez pedig nem, ezért ez téglalap.

*Tanító:* Hány különböző téglalapot tudnék a táblára rajzolni a téglatest körberajzolásával?

*Bodó:* Hármat.

*Tanító:* Mindenki rajzolja körbe a gyufásdobozát a füzetében, ahányféleképpen tudja! Hány különböző téglalapot rajzoltatok?  
*Timót:* Hármat.

Ezután minden gyerek kapott a 3-as Dienes-készletből egy nagykockát.

*Tanító:* Mit fogunk a kezünkben?  
*Henri:* Négyzetet.  
*Balázs:* A négyzet a füzetben van, tehát ez nem lehet négyzet. Kockát fogunk a kezünkben.  
*Tanító:* Rajzoljátok körbe a kockát is a füzetben! Hányféleképpen tudjátok?  
*Niki:* Elég csak egyszer körberajzolni, mert ugyanazok a lapjai.  
*Tanító:* Mit rajzoltatok a füzetbe?  
*Niki:* Egy négyzetet.

Ezekkel a feladatokkal igyekeztünk rávilágítani a téglatest és a téglalap, illetve a kocka és a négyzet – mint három- és kétdimenziós alakzatok – közötti különbségekre.

### **2.6.2.2. Négyzet, téglalap alkotása konkrét tárgyi tevékenységekkel**

Nem tudjuk eleget hangsúlyozni a konkrét reprezentációk, tárgyi tevékenységek, manipulációk jelentőségét és szükségességét a matematikai ismeretszerzés folyamatában. Konkrét reprezentációkra mutatunk néhány példát a négyzet és a téglalap fogalmak vonatkozásában.

Minden gyerek egy gyufásdoboz kihúzható részének, „fiókjának” alsó lapjához csatlakozó szomszédos lapokat levágta. A fiók szétvágása után megállapítottuk, hogy 5 téglalap keletkezett, melyek közül kettő-kettő teljesen egyforma. Arra a tanítói kérdésre, hogy lehet-e és hogyan a gyufásdoboz fiókjának alsó téglalapjából négyzetlapot kivágni, a következő tanulói válaszok hangzottak el:

*Zsófi:* Igen. Lemérem a téglalap rövidebb oldalát, ez 3 cm, és odamérem a hosszabb oldalára és itt így – mutatta, hogy hol – levágjuk.  
*Timót:* Nem is kell megmérnem, mert felhasználom a legkisebb téglalapot, amit a fiókból levágtunk, és annak a hosszabb oldalával ki tudom jelölni, hogy hol kell levágnom.  
*Bodó:* Egy hajtással is meg tudom mutatni, hogy hol kell levágni, de ezt a kemény papírt nehéz behajtani.

A tanítónő adott egy írólapot, hogy mutassa meg, hogy hogyan gondolja. Bodó megfogta a téglalap egyik csúcsát és a szemközti hosszabb oldalra illesztette egy hajtással úgy, hogy a rövidebb oldal pontosan illeszkedjen a hosszabbra, és ahol a rövidebb véget ért ott mutatta a vágás helyét.

Helytelen válasz is elhangzott:

*Anita:* Félbevágjuk itt. (A téglalap rövidebb oldalfelező merőlegesére mutatott.)  
*Tanító:* Négyzet lesz így? Vágd ott el, ahol mutattad és mérd le a kapott négyszögek oldalait! Milyen hosszúak az oldalak?  
*Anita:* Különböző hosszúak, ezért nem is lehet négyzet.

Érdekes feladat volt a gyerekek számára az, amikor különböző sokszögeket kellett átalakítaniuk téglalappá. Egy borítékban mindenki kapott 12 papírból kivágott sokszöget: általános háromszöget, egyenlő szárú háromszöget, 2 egybevágó derékszögű háromszöget, általános trapézt, szimmetrikus trapézt, derékszögű trapézt, általános paralelogrammát, rombuszt, deltoidot, négyzetet és szabályos hatszöget. A gyerekek a sokszögeket különféle módokon – hajtogatással, nyírással, átdarabolással, össze-, illetve hozzáillesztésekkel – alakíthatták téglalappá. Elhangzott az is, hogy esetleg valamelyik sokszöggel semmit sem kell tenniük. Ketten azonnal bekiabálták, hogy a négyzettel nem kell csinálni semmit. Ez olyan meggyőzőnek bizonyult a többiek számára, hogy ezek után senki sem akarta átalakítani a négyzetet. A derékszögű háromszöget gyorsan kiegészítették téglalappá a vele egybevágó háromszöggel. Volt, aki két kisebb derékszögű háromszöget levágott a nagyból és így kapott téglalapot. Valaki ugyanezt hajtogatással érte el, a nem kívánt részeket tüntette el így. A két egybevágó derékszögű háromszöggel ki lehetett egészíteni a paralelogrammát téglalappá. Ezt nagyon sokan észrevették. Néhányan azonban levágtak két megfelelő derékszögű háromszöget a paralelogrammából és így jutottak el a téglalaphoz, illetve ugyanezt hajtogatással érte el egy-két tanuló. Az átdarabolás lehetőségét azonban nem vették észre, itt tanítói segítségre volt szükség. A rombusznál is, de a deltoidnál és a szabályos hatszögnél különösen nehezen sikerült rávezetni a gyerekeket arra, hogy hogyan vágják szét az alakzatokat részekre úgy, hogy azokból ki tudjanak rakni egy téglalapot.

Megfigyeltük, hogy a gyerekek általában kitartottak egy módszer mellett. Ha valaki az első esetben például nyírással érte el a célját, akkor következetesen a többi sokszög esetén is ezzel próbálkozott, annak ellenére, hogy mindegyik sokszög esetén megvizsgáltuk valamennyi lehetőséget.

A különböző alakú és méretű téglalapok alkotása hozzájárul a fogalom kialakításához szükséges változatos tapasztalatok megszerzéséhez.

A papírcsíkból különböző hosszúságú, azonos magasságú téglalapok előállítása is az észlelési változatosságot növeli. Ennek a feladatnak a végrehajtása közben Bence kétségbeesetten mondta:

*Bence:* Az egyiknél mindegyik oldal ugyanakkora lett. Megmértem, 4 cm mindegyik oldal, ez egy négyzet. Ez így nem lesz jó.

*Tanító:* Hát ez így sikerült. Ilyen különleges téglalapot kaptál. A négyzet – látod – egy különleges téglalap. Jó a megoldásod.

Bence nagy sóhajrással megkönnyebbült. A tanítónő Bencének ezt a téglalapját az osztálynak is megmutatta. Ekkor kiderült, hogy nem ő volt az egyetlen, akinek így sikerült levágni egy téglalapot. Az előbbieket a tanítónő az osztálynak is elismételte. Örültünk, hogy lehetőségünk nyílt ezáltal rávilágítani a négyzet és a téglalap „rokonságára”.

A négyzet és a téglalap „rokonságának” problémája akkor is szóba került, amikor egy téglalapot vágtak szét a gyerekek egyetlen vágással két téglalapra. Volt, aki két különböző méretű általános téglalapot kapott. Nagyon sokan két egyenlő területű téglalapra vágták szét a nagy téglalapot. Olyan megoldás is előfordult, ahol egy általános téglalap és egy négyzet keletkezett. A gyerekek többsége tiltakozott ez ellen a megoldás ellen. A tiltakozók szerint a négyzet nem igazi téglalap. A tanító emlékeztette őket arra, hogy találkoztak már ezzel a problémával és azt mondták a négyzetről, hogy az egy olyan különleges téglalap, amelynek minden oldala egyenlő.

Ezekben a fogalomrealizálási feladatokban a gyerekeknek lehetőségük nyílt a különböző megoldási módok bemutatására, a sajátjuktól eltérő megoldások megismerésére. A gyerekek saját konstrukcióikat, megoldásaikat összehasonlíthatták társaikéval. Kritikusan meghallgatták egymást, ha szükséges volt, vitatkozhattak és érvelhettek.

### **2.6.2.3. A négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlítása, tulajdonságkártyák**

A négyzet és a téglalap tulajdonságainak felsorolására – mindig a tanulók meglévő ismereteinek megfelelően – több alkalommal sorkerült. A következőkben a négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlítását mutatjuk be.

- Tanító:** Az előttek lévő sokszögek közül tegyetek magatok elé egy négyzetet és egy téglalapot! Mindenki kapott két kartonlapot. Az egyikre írtatok fel a négyzet, a másikra a téglalap tulajdonságait! Milyen tulajdonságai vannak a téglalapnak?
- Bodó:** Négy oldala, négy csúcsa, négy szöge van. Mindegyik szöge derékszög. Szemközti oldalai párhuzamosak, ugyanolyan hosszúak. Szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.
- Tanító:** Ezeket a tulajdonságokat, amit Bodó a téglalapról elmondott, felírtam a táblára. Ellenőrizték, hogy felírtátok-e mindet! Ezek a tulajdonságok a négyzetre is igazak? Rajta vannak a másik kartonlapon is?
- Timót:** Igen. Ugyanezek igazak. Annyit írtam még, hogy minden oldala ugyanolyan hosszú. A négyzet is egy téglalap, csak ugyanakkorák az oldalai.

Az elkészített tulajdonságkártyák (A szimmetriatengelyek számának és helyének meghatározásával a későbbiekben foglalkoztunk.):

| <u><b>Téglalap</b></u>                                | <u><b>Négyzet</b></u>                                 |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 4 oldala van                                          | 4 oldala van                                          |
| 4 csúcsa van                                          | 4 csúcsa van                                          |
| 4 szöge van                                           | 4 szöge van                                           |
| minden szöge derékszög                                | minden szöge derékszög                                |
| szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak | szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak |
| szomszédos oldalai merőlegesek egymásra               | szomszédos oldalai merőlegesek egymásra               |
|                                                       | minden oldala egyenlő                                 |

A tanító igyekezete ellenére – ami már nem először, a négyzet téglalapként való elfogadására irányult – többen közölték vele, hogy nincs igaza és Timótnak se, mert

„a téglalapnak két különböző hosszúságú oldala is van, a négyzetnek pedig nincs”. Itt be kellett látnunk, hogy esetükben nincs értelme a további meggyőzést erőltetni.

A négyzet és a téglalap tulajdonságai ismeretének ellenőrzése, illetve kapcsolatuk ismételt feltárása céljából tűztük ki azt a feladatot (8. sz. melléklet, 2. feladat), amelyben az alábbi állítások logikai értékéről kellett dönten:

- (1) A téglalap mindegyik szöge derékszög.
- (2) A téglalap oldalai egyenlő hosszúak.
- (3) A téglalap átlói tükörtengelyek.
- (4) A téglalapnak van 2 tükörtengelye.
- (5) A négyzet oldalai egyenlő hosszúak.
- (6) A négyzetnek 6 tükörtengelye van.
- (7) A négyzet szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.
- (8) A téglalap szemközti oldalai nem párhuzamosak egymással.

Mindegyik állítás logikai értékét hibátlanul határozta meg a tanulók 64%-a (2006-ban), illetve 58%-a (2008-ban). A hibák nagyon szórtnak jelentkeztek, egyiket sem tudjuk tipikus hibaként kiemelni. A következő kérdéssel igyekeztünk újra rávilágítani a négyzet és a téglalap kapcsolatára.

*Tanító:* „A téglalap oldalai egyenlő hosszúak.” állítást hamisnak tartottuk. Ismersz-e olyan téglalapot, amelynek oldalai egyenlők?

*Bodó, Timót, Laci* (egyszerre): A négyzet.

A feladat ellenőrzésekor a gyerekek elővették a korábban elkészített tulajdonságkártyákat, amely a szóbeli megbeszélésen kívül még egy újabb kontrollt jelentett.

#### **2.6.2.4. A téglalap és a paralelogramma, illetve a négyzet és a rombusz tulajdonságainak összehasonlítása**

A téglalap és a paralelogramma tulajdonságainak összehasonlításához a gyufásdoboz tokját vettük segítségül.

*Tanító:* Fogjátok a gyufásdoboz tokját a kezetekbe! A lyuk milyen alakú?

*Bodó:* Téglalap.

*Tanító:* Rajzoljátok körbe a lyuk helyét a füzetben! Nyomorgassuk, toljuk most el a tok tetejét! Így is rajzoljátok körbe! Most is téglalapot láttok?

*Martin:* Igen, mert ugyanolyan csak el van tolva. Ez egy elcsúsztatott téglalap.

A tanítónő ekkor egy a táblán lévő téglalapot elcsúsztatott a tábla ablak felőli oldaláról az ajtó felőli oldalára.

*Tanító:* Megváltozott az alakja a téglalapnak a csúsztatás közben?

*Ákos:* Nem.

*Tanító:* Milyen tulajdonságai vannak a téglalapnak?

*Gréta:* Négy csúcsa, négy oldala van. Szemközti oldalai ugyanolyan hosszúak, párhuzamosak. A szomszédos oldalak merőlegesek egymásra. Minden szöge derékszög.

*Tanító:* A kapott négyszögre teljesül a téglalap mindegyik tulajdonsága?

*Adrián:* Nem.  
*Tanító:* Melyik nem?  
*Fanni:* A sarkainál nincs meg a derékszög.  
*Tanító:* Nevezhetjük akkor téglalapnak?  
*Laci:* Nem, ez nem téglalap.  
*Tanító:* Vegyétek a kezetekbe a hajtogatott derékszöget! Mérjétek meg a szögeit, hogy nagyságuk derékszög-e, a derékszögnél kisebb-e vagy nagyobb!  
*Timót:* Ez a kettő kisebb a derékszögnél (rámutat a két hegyesszögre), a másik kettő pedig nagyobb, és ezért nem téglalap, mert a téglalapnál mindegyik derékszög.  
*Tanító:* Helyesen indokoltál, ahogy Fanni is. Ezt a négyszöget paralelogrammának nevezzük. A szomszédos oldalak merőlegesek-e?  
*Timót:* Nem, mert nincsenek derékszögek.  
*Tanító:* Mutassátok meg, hogy ezzel az oldallal (az egyik hosszabb oldalra mutatott) melyik van szemben! Mérjétek meg mind a két oldal hosszát! Mit vettetek észre?  
*Laci:* Ugyanolyan hosszúak.  
*Tanító:* Tegyétek rá a hurkapálcikákat erre a két szemközti oldalra! Milyen helyzetűek az oldalak?  
*Laci:* Párhuzamosak, mert a hurkapálcikák nem érnek össze és akármilyen hosszúak lennének, akkor sem érnének össze.  
*Tanító:* Most vizsgáljuk meg a másik két szemben lévő oldalt! Mit mondhatunk el?  
*Dóra:* Ezek is ugyanolyan hosszúak és párhuzamosak.  
*Tanító:* Melyek azok a tulajdonságok, amelyek mindkét síkidomra teljesülnek?  
*Koppány:* Négy oldaluk, négy csúcsuk és négy szögük van. Szemközti oldalaik párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak.  
*Tanító:* Mi az, ami csak a téglalapra igaz?  
*Noémi:* Mindegyik szöge derékszög és a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.  
*Tanító:* Mi a különbség a lerajzolt két síkidom között?  
*Timót:* Formájukban különböznek egymástól. A paralelogrammának nincsenek merőleges oldalai, eldőlnek az oldalak.

Ahogy a négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlításánál tapasztaltuk, ugyanúgy a téglalap és a paralelogramma, valamint a négyzet és a rombusz vonatkozásában is megfigyelhettük, hogy a tulajdonságok megállapítása csak az alakzatok megkülönböztetésére szolgált. Az alakzatok közös tulajdonságainak megállapításából nem következett a gyerekek számára – néhányukat kivéve –, hogy a négyzet téglalap is egyben, vagy a téglalap paralelogramma, illetve a négyzet rombusz, ami a *van Hiele*-féle második szintnek felel meg.

#### **2.6.2.5. Négyzetek alkotása vizuális síkon**

A konkrét tárgyi tevékenységeket felváltották a vizuális síkon történő alkotások, rajzolások.

3•3-as négyzet-pontrácson négy pontot kellett a gyerekeknek kiválasztaniuk minél többféleképpen úgy, hogy azok négyzetet határozzanak meg. (3. sz. melléklet, 1. feladat) Előfordult, hogy általános téglalapot, valamint paralelogrammát rajzoltak.

Ilyen esetekben megkérdeztük a gyerekeket, hogy mit tudnak a négyzet oldalainak hosszúságáról, illetve a szögek nagyságáról, utalva a hibájukra. A hibás rajzoknál megmértük az oldalak hosszúságát, illetve – ha szükség volt rá – a szögek nagyságát. A mérések után rögtön javítani tudták a hibáikat. A legtöbb gyereknél gyorsan megszületett a hat megoldás.

### **2.6.3. A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának fejlesztése**

#### **2.6.3.1. A szemközti és szomszédos szavak matematikai értelmezése**

A szemközti és szomszédos szavak köznyelvi és szaknyelvi használata nem mindig esik egybe, ezért foglalkoztunk külön ezzel a problémával. A téglatest (gyufásdoboz, osztályterem) szemközti és szomszédos lapjait vizsgáltuk először.

- Tanító:* Fogd két ujjad közé a gyufásdobozodat! Most két szemközti lapját fogod. Emeld fel, hogy lássam mindenkiét! Emeld fel a gyufásdobozodat másik két szemközti lapját fogva! Próbáld meg másképp a két ujjad közé fogni! Hány szemközti pár van?
- Laci:* 3 pár.
- Tanító:* Ez hány lapot jelent?
- Laci:* Hatot.
- Tanító:* A padlóval mi van szemben?
- Timót:* A plafon.
- Tanító:* A hátsó fallal?
- Dóra:* A tábla fala.
- Tanító:* Az ablakot tartalmazó fallal?
- Anita:* Az ajtó fala.

A gyufásdoboz kihúzható részét, „fiókját” az élek mentén kiterítették a gyerekek.

- Tanító:* A középső laphoz hány csatlakozik?
- Niki:* Négy.
- Tanító:* Ezeket hívjuk szomszédos lapoknak. Az osztályteremben a padlólappal melyek szomszédosak?
- Ákos:* A plafon.
- Tanító:* Abban igazad van, hogy a lakószomszédok esetében a szembe szomszédot is szomszédnak hívjuk, de a matematikában testek esetén a csatlakozó lapokat hívjuk csak szomszédosnak. Melyek ezek?
- Ákos:* A tábla fala, az ablakok fala, az ajtó fala és a hátsó fal.
- Tanító:* Miben találkoznak a szomszédos lapok?
- Timót:* Élben találkoznak.
- Tanító:* Mutassátok meg a padlólap és a hátsó fal közös élet!

Különböző síkidomoknál is – elsősorban négyszögeknél – meghatároztuk a szemközti, illetve szomszédos oldalakat.

### 2.6.3.2. A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának bevezetése

A gyufásdoboz (téglatest) szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során vezettük be új fogalomként a párhuzamosságot és a merőlegességet. Testek, valóságos tárgyak tanulmányozásával kezdtük – Dienes Zoltán javaslatának megfelelően – az új fogalmakkal való ismerkedést.

*Tanító:* A gyufásdoboz szemközti lapjainak van közös éle?

*Anita:* Nincsen.

*Tanító:* A szemközti lapoknak nincs közös élük a gyufásdoboznál, ha a lapokat akármekkora méretűre megnagyobbítanánk, akkor se lenne. A szemközti lapok párhuzamosak. Két kezünkkel mutassuk a párhuzamosságot! (Több helyzetben is mutatják. 2.12. ábra, 2.13. ábra, 2.14. ábra)



2.12. ábra



2.13. ábra



2.14. ábra

Most mutassátok a nem párhuzamosságot is! (Több lehetőséget szemléltetnek. 2.15. ábra, 2.16. ábra, 2.17. ábra)



2.15. ábra



2.16. ábra



2.17. ábra

Adrián a párhuzamosságot mutatja a két kezével, a tanító a nem párhuzamosságot.  
(2.18. ábra)



2.18. ábra

Tanító: Mi a különbség aközött, amit én mutatok, illetve amit Adrián?  
Adrián: A tanító néni ujjai összeérnek, nem párhuzamosságot mutat. Az enyémekek nem érnek össze, de ha hosszabbak lennének az ujjaim, akkor sem érnének össze, én párhuzamosságot mutatok.

- Tanító:* Mondjatok olyan tárgyakat a teremben, amelyeknek vannak párhuzamos lapjai. Mutassátok is meg ezeket!
- Zsófi:* A szekrény két oldallapja.
- Niki:* A szekrény eleje és hátulja, az alja és a teteje.
- Milán:* A radiátor két lapja.
- Martin:* A tanterem ajtó felőli és ablak felőli fala, a tábla fala és a hátsó fal, a padló és a plafon.
- Anita:* A pad teteje és a fiók alja.

A gyerekek megmutatták mindegyik esetet.

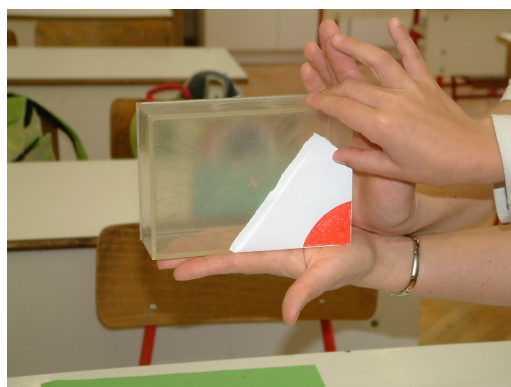
- Tanító:* A téglatestet ennél a két szomszédos lapjánál fogom meg a két kezemmel. Milyen szöget zárnak be? (2.19. ábra)



2.19. ábra

- Laci:* Derékszöget.

*Tanító:* Ellenőrizzük a hajtogatott derékszögünkkel (2.20. ábra)! (4. osztályban a szögmérés egyetlen eszköze a hajtogatott derékszög. Két sík akkor merőleges egymásra, ha metszésvonaluk tetszőleges pontjában mindkét síkban a metszésvonalra emelt merőleges egyenesek merőlegesek egymásra. Ha a képen látható módon a hajtogatott derékszöget a „sarokba” helyezzük, akkor a fenti követelmény teljesül.)



2.20. ábra

Úgy is mondhatjuk, hogy ezek a lapok merőlegesek egymásra.  
Mutassátok a két kezetekkel a merőlegességet!  
A gyerekek így mutatták (2.21. ábra):



2.21. ábra

A tanító pedig így (2.22. ábra):



2.22. ábra

*Tanító:* Merőleges így is? (2.22. ábra)

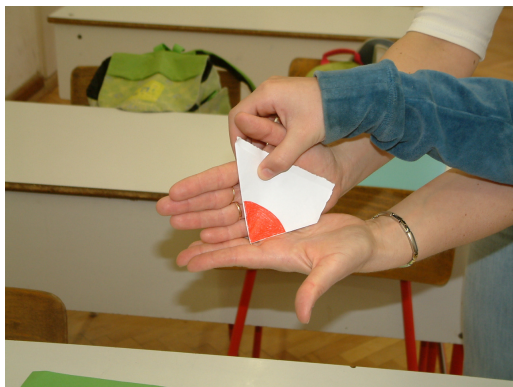
Eltérő vélemények születtek.

*Tanító:* Hogyan tudnánk ellenőrizni?

*Zsófi:* Hajtogatott derékszöggel.

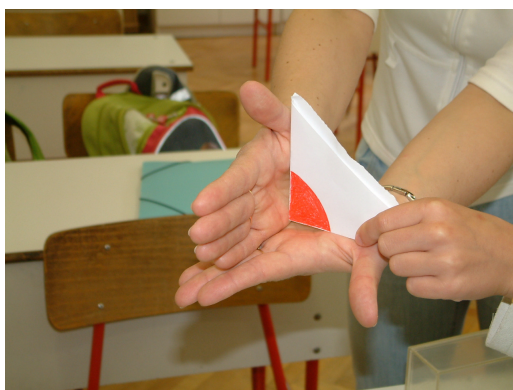
*Tanító:* Hová tegyük?

Anna így mutatta (2.23. ábra):



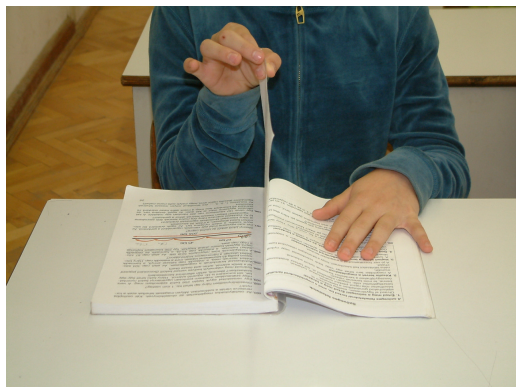
2.23. ábra

Laci helyesen javította (2.24. ábra):

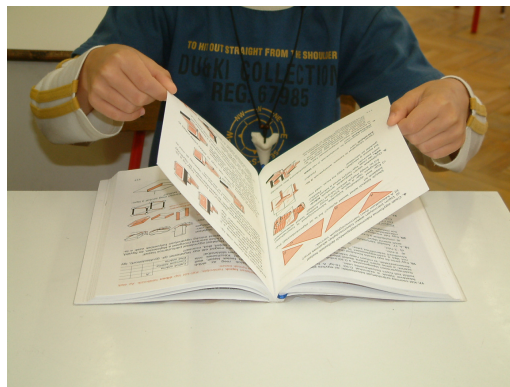


2.24. ábra

**Tanító:** Mutassátok a tankönyvek két lapja között a merőlegességet! (2.25. ábra, 2.26. ábra)



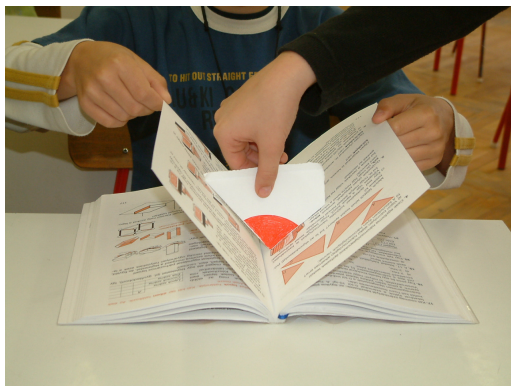
2.25. ábra



2.26. ábra

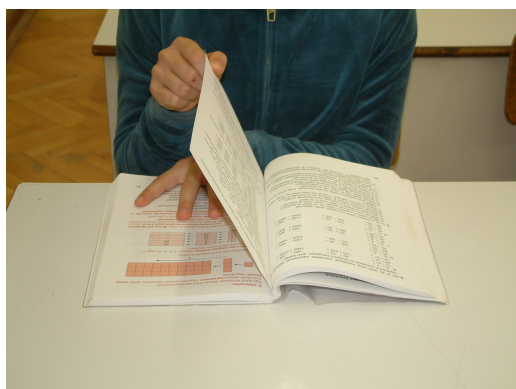
*Tanító:* Honnan tudjuk, hogy így is jó? (2.26. ábra)

Válaszként így helyezte Milán a hajtogatott derékszöget. (2.27. ábra)

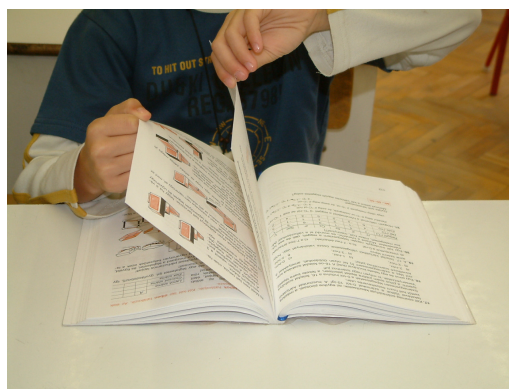


2.27. ábra

*Tanító:* Most pedig lapozzatok úgy, hogy a könyv két lapja ne legyen merőleges! (2.28. ábra, 2.29. ábra)



2.28. ábra



2.29. ábra

*Tanító:* Keressünk olyan lapokat a teremben, amelyek merőlegesek egymásra!

Mutassátok is meg ezeket!

*Niki:* Szekrény teteje és az oldala.

*Bodó:* Az ajtótok teteje és az ajtó.

*Heni:* A plafon merőleges a tábla falára.

Itt is csak hangsúlyozni tudjuk a komplex matematikatanítási kísérlet azon alapelvét, mely szerint a matematika – jelen esetben a párhuzamosság és merőlegesség – megértéséhez a tanulók csak saját tapasztalataik – és nem mások tapasztalatai – alapján juthatnak el.

### **2.6.3.3. Különböző testek szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata**

Ahhoz, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítsük a gyerekeket térben a párhuzamosság és a merőlegesség vonatkozásában, a kocka és a téglatest lapjai helyzetének vizsgálatát más testek szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálatára is kiterjesztettük.

**Tanító:** Keressünk ezen a testen (szabályos ötszög alapú hasáb) párhuzamos lapokat!

Judit először két szemközti oldallapra tette a kezét, de rögtön el is vette és az alapra, illetve a fedőlapra helyezte.

**Judit:** Az alsó és a felső lap, amelyek egymással szemben vannak, párhuzamosak.

**Tanító:** Mutassátok meg, hogy ezzel az oldallappal melyik van szemben! Petra, szerinted?

**Petra:** Ez is és az is. (A két nem szomszédos lapra mutatott rá.)

**Tanító:** Ezek az egymással szemben lévő lapok párhuzamosak egymással vagy nem?

**Petra:** Nem.

**Tanító:** Miért nem?

**Petra:** Mert dőlnek.

**Kornél:** Ha megnagyobbítanánk ezeket a lapokat, élben találkoznanának.

**Tanító:** Ez a két szomszédos oldallap párhuzamos egymással vagy nem? (A tanító rájuk mutat.)

**Eszter:** Nem párhuzamosak, mert összeérnek.

**Tanító:** Vajon merőlegesek-e egymásra?

**Bence:** Nem.

**Tanító:** Miért nem?

**Bence:** Azért, mert nem zárnak be derékszöveget, nagyobb annál. Ellenőriztem hajtogatott derékszöggel. (2.30. ábra)



2.30. ábra

**Tanító:** Találunk-e ezen a testen egymásra merőleges lapokat?

*Laura:* Igen. (Több lehetőséget is mutat: alaplap és az oldallapok valamelyike, fedőlap és az oldallapok valamelyike.)

*Tanító:* Keressünk olyan lapokat ezen a gúlán (négyzet alapú gúla), amelyek egymással párhuzamosak!

Kórusban mondták a gyerekek, hogy nincsenek ilyen lapok.

*Tanító:* Miért nincsenek?

*Koppány:* Mert, ha akármelyik két lapra ráteszem a kezem, akkor összeérnek az ujjaim.

*Tanító:* Keressünk merőleges lapokat!

*Milán:* Azok sincsenek.

*Tanító:* Ezek a lapok miért nem merőlegesek? (A tanító az alaplapra és az egyik oldallapra mutat.)

*Laci:* Mert kisebb a szögük a derékszögnél.

#### **2.6.3.4. Párhuzamos, merőleges egyenespárok előállítása síkban konkrét tárgyi tevékenységgel**

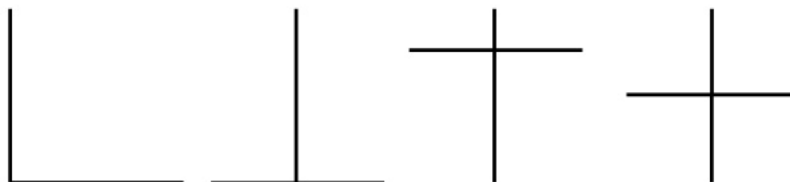
A gyerekeknek a padra kellett fektetniük két hurkapálcikát először úgy, hogy azok párhuzamosak legyenek. A következő megoldások születtek (2.31. ábra):



2.31. ábra

*Szabolcs:* Az sem számított, hogy milyen távol voltak egymástól a hurkapálcikák.

A merőleges egyenespárok szemléltetését a következőképpen hajtották végre (2.32. ábra):



2.32. ábra

A legtöbben az első megoldást (vagy annak valamilyen elforgatottját) adták meg, mintha egy sokszög két egymásra merőleges szomszédos oldalát szemléltetnék.

Helytelen megoldások is születtek, így például (2.33. ábra):



2.33. ábra

Az első és a második esetben is a szögek nagyságának mérése vezetett el a hiba felismeréséhez.

- Tanító:* Mérd meg a szögeket a hajtogatott derékszögeddel (2.33. ábra 2. rajza)! Milyen nagyságúak?
- Dóra:* Két szög kisebb, kettő pedig nagyobb a derékszögnél.
- Tanító:* Lehetnek akkor így merőlegesek a hurkapálcikák?
- Dóra:* Igen, mert metszik egymást.
- Tanító:* Csak akkor lesznek merőlegesek, ha derékszögben metszik egymást. Helyezd el úgy a hurkapálcikákat!

Az utóbbi két esetről megbeszéltük, hogy a hurkapálcikák nem merőlegesek egymásra és nem párhuzamosak. Tipikus hibaként említhetjük az egymásra merőleges egyenesek és az egymást metsző egyenesek szinonimaként való használatát.

#### **2.6.3.5. Síkidomok párhuzamos, illetve merőleges oldalpárjainak megfigyelése**

A síkidomok alkotásában és tulajdonságaik felismerésében fontos szerepet szántunk az eszközök (logikai készlet, hurkapálcikák, hajtogatott derékszög) használatának.

A következő feladat a konkrét reprezentáció egy újabb példája. A logikai készlet 2, 3, 4, illetve 6 szabályos, nagy háromszögéből kellett síkidomokat alkotniuk a gyerekeknek.

- Tanító:* Válogassátok ki a logikai készletből a nagy háromszögeket! Két háromszöget teljes oldalukkal illesszétek össze valahogy!
- Bodó:* Csak paralelogramma lesz.
- Laci:* Ezekből nem lehet nagyobb háromszöget kirakni.
- Tanító:* Hányféle síkidomot tudtok kirakni?
- Dóra:* Egyet.
- Tanító:* Miért?
- Timót:* Azért, mert a háromszögnek minden oldala ugyanolyan hosszú.
- Tanító:* Bodó jól mondta, hogy ez egy paralelogramma. Ennek a paralelogrammának minden oldala ugyanolyan hosszú. A görögök rombusznak nevezték el. Mivel van rokonságban a rombusz?
- Bodó:* A paralelogrammával.
- Milán:* A sárkányidomra is hasonlít.

*Laci:* A deltoiddal van rokonságban. (Korábban már elhangzott ez az elnevezés.)  
A négyzettel való rokonságot nem említették.  
*Tanító:* Milyen tulajdonságai vannak a rombusznak?  
*Zsófi:* Négy oldala, négy csúcsa van. A szemközti oldalak párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak.  
*Tanító:* Helyezzétek a hurkapálcikákat két szemközti oldalára! A másik kettőre is! Helyesen mondta Zsófi, hogy a szemközti oldalak párhuzamosak?  
*Balázs:* Igen, mert a hurkapálcikák nem érnének össze, akármilyen hosszúak is lennének.  
*Tanító:* Ennek a rombusznak vannak-e merőleges oldalai?  
*Zsófi:* Nincsenek, mert nincs derékszöge sem.  
*Tanító:* Mit mondhatunk a szomszédos oldalak helyzetéről?  
*Noémi:* Nem párhuzamosak és nem is merőlegesek.

Három háromszög lapból a gyerekek többféle lehetőséget próbáltak előállítani, de gyorsan rájöttek, hogy mindig ugyanazt a négyszöget, trapézt kapják.

*Zsófi:* Bárhogyan is teszem, mindig ugyanazt kapom.  
*Tanító:* Milyen síkidomot kaptunk?  
*Milán:* Négyszöget.  
*Tanító:* Ezt a négyszöget trapéznak nevezzük. (A trapéz, paralelogramma, rombusz és deltoid elnevezéseket nem kell a gyerekeknek tudniuk alsó tagozaton, de ezeket a síkidomokat nyugodtan megnevezhetjük.) Mutasd meg a szemközti oldalait! Húzd végig az ujjadat rajtuk! (Megmutatta helyesen.) Találsz-e párhuzamos oldalakat?  
*Milán:* Igen. (Rögtön mutatta is.)  
*Tanító:* Ezek az oldalak milyen helyzetűek? Párhuzamosak? (A tanító a két nem párhuzamos szemközti oldalra mutatott.)  
*Milán:* Nem.  
*Tanító:* Miért nem?  
*Milán:* Mert, ha ráteszem a hurkapálcikákat, összeérnek. Ezért nem párhuzamosak.  
*Tanító:* Vizsgáljuk meg a szögek nagyságát! Ha szükséges, használd a hajtogatott derékszöveget!  
*Bodó:* Két szöge kisebb, kettő nagyobb a derékszögnél.  
*Tanító:* Vannak merőleges oldalak?  
*Bodó:* Nincsenek.

Négy háromszög lapból létrehoztak paralelogrammát, szabályos háromszöget, konkáv hatszöget. Hat háromszögből paralelogrammát, konkáv ötszöget, kétféle konkáv hatszöget, szabályos hatszöget, konkáv hétszöget („csónakot”) alkottak a gyerekek. A szabályos háromszöget kivéve valamennyi sokszögnél megmutatták az egymással párhuzamos oldalakat. Az egyik, hat háromszögből alkotott konkáv hatszögnél a gyerekek három egymással párhuzamos oldallal is találkozhattak. Egymásra merőleges oldalakat nem találtak.

A konkrét reprezentációkban szerzett tapasztalatokat tovább bővítettük a képi reprezentációkban szerzettekkel. A párhuzamosságot és a merőlegességet érintő észlelési változatosságot egyre növekvő mértékben igyekeztünk megvalósítani. Ezt a célt próbáltuk elérni a következő feladatokkal.

Az egyikben a gyerekeknek 3•3-as négyzet-pont rácson kellett különböző négyszögeket rajzolniuk (3. sz. melléklet, 2. feladat), majd a párhuzamos oldalpárokat színezniük és a derékszögeket jelölniük. (4. sz. melléklet, 1. feladat) Ennél a feladatnál értelmeznünk kellett a különböző szót, ugyanis rögtön elkezdtek a gyerekek egybevágó négyzeteket, téglalapokat rajzolni. Megbeszéltük, hogy két négyszög akkor tekinthető különbözőnek, ha kivágnánk és egymásra illesztenénk őket, nem fednék pontosan egymást. A feladat elvégzésére a gyerekeknek 7 perc állt rendelkezésre.

A négyszögek rajzolásának eredményességét a következő táblázat mutatja:

|                                             | 2006-ban<br>4.c (26 fő) | 2008-ban<br>4.b (19 fő) |
|---------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Mind a 16 különböző négyszöget megtalálta.  | 0%                      | 0%                      |
| 10-15 különböző négyszöget rajzolt.         | 27%                     | 37%                     |
| 8-9 különböző négyszöget alkotott.          | 31%                     | 42%                     |
| 6-7 különböző négyszöget rajzolt.           | 27%                     | 21%                     |
| 6-nál kevesebb négyszöget talált.           | 15%                     | 0%                      |
| Több azonos (egybevágó) megoldást is adott. | 42%                     | 79%                     |

Láthatjuk, hogy a gyerekek 42%-a (2006-ban), illetve 79%-a (2008-ban) egybevágó megoldásokat is rajzolt. Nehezen ismerték fel a különböző helyzetű sokszögek egybevágóságát.

Volt, aki olyan négy csúcsponttal rendelkező síkidomot rajzolt, amelyet görbe vonal is határolt.



2.34. ábra

**Tanító:** Lerajzolhattuk volna ezeket a síkidomokat is? (2.34. ábra)

**Milán:** Igen, mert négy csúcsuk van.

**Anita:** Ezek nem négyszögek, mert nem mindegyik szöge derékszög.

**Tanító:** A megoldások között keress csak olyan négyszöget, amelyeknek nem mindegyik szöge derékszög! Találsz ilyet?

**Anita:** Igen. Több ilyen is van. (Rámutatott néhányra.)

**Tanító:** Nem fogalmaztál helyesen.

**Niki:** Szerintem nem négyszögek, mert nem mindegyik csúcsnál van szög. Ahol görbe vonalak vannak, ott nincs szög.

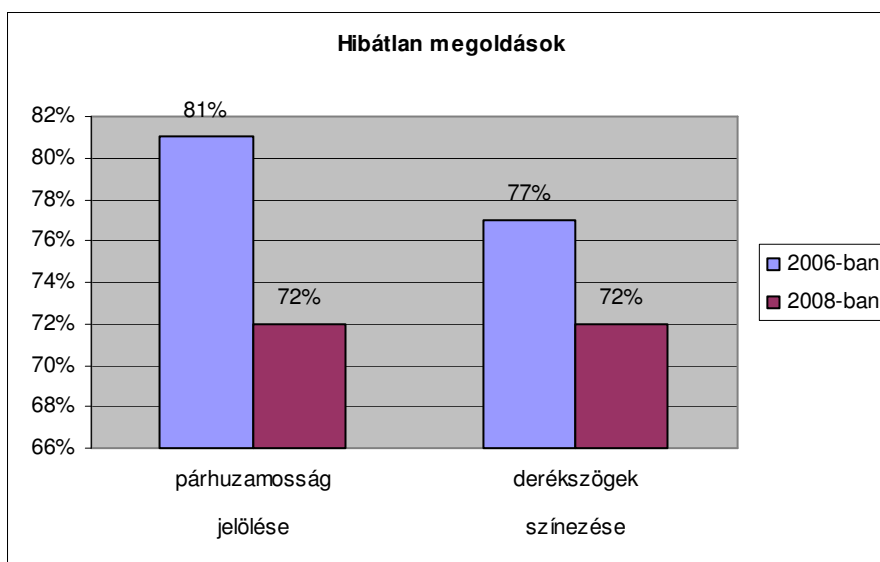
**Zsófi:** Szerintem nem négyszögek, mert oldalai nem párhuzamosak.

**Tanító:** Mutass csak olyat a megoldások közül, amelyeknek nincs párhuzamos oldalpárja!

**Zsófi:** A sárkányidomnak nincs.

- Tanító:** A párhuzamosságot nem kell figyelni, ha el akarjuk dönteni egy síkidomról, hogy négyszög-e vagy sem. Mi az a lényeges tulajdonság, ami itt nem teljesül?
- Bodó:** Azért nem négyszögek, mert van görbe vonaluk. A négyszögeknek csak egyenes vonaluk lehet.

A tanító és a kísérletező a helytelen válaszok felismerését, javítását megfelelő ellenpélda keresésével érték el. „Ezek nem négyszögek, mert nem mindegyik szöge derékszög.” és a „Szerintem nem négyszögek, mert oldalai nem párhuzamosak.” állításokra helytelenül következtethettek a „Ha mindegyik csúcsnál derékszög lenne, akkor ezek négyszögek lennének.”, illetve „Ha oldalai (és nem görbe vonalaik) páronként párhuzamosak lennének, akkor ezek négyszögek lennének.” állításokból. A gyerekeknek azonos színnel kellett kiszínezniük a megrajzolt 16 négyszögnél az egymással párhuzamos oldalakat, pirossal a derékszögeket. (4. sz. melléklet, 1. feladat) A párhuzamosság megítéléséhez használhatták a hurkapálcikákat, a derékszögek méréséhez a hajtogatott derékszöveget. Az eszközök használatára egyre kevésbé volt szükségük. A feladat megoldásának eredményességét a következő grafikon szemlélteti:



2.35. ábra

Egy általános trapéz párhuzamos oldalainak színezése során a következő párbeszéd hangzott el a kísérletező és Dávid között:

- Kísérletező:** Nem színeztél ki semmit ennél a négyszögnél. Nem találtál párhuzamos oldalakat?
- Dávid:** Nem.

A kísérletező – segítségképpen – rátette a hurkapálcikákat a két alapra, ebből Dávid láthatta, hogy ezek nem érnek össze.

- Dávid:** Az igaz, hogy nem érnek össze a hurkapálcikák, de az oldalak nem egyenlő hosszúak, és akkor nem lehetnek párhuzamosak.
- Kísérletező:** Ilyen feltételt nem mondtunk a párhuzamosságnál.
- Dávid:** Ja, akkor párhuzamosak.

Ezek után javította a hibáit, melyek feltehetőleg abból eredtek, hogy legtöbbet a téglalap, négyzet, paralelogramma, rombusz tulajdonságaival foglalkoztunk. Ezeknél a négyszögeknél a szemközi oldalak párhuzamossága mellett a szemközi oldalak egyenlő hosszúsága is teljesült. Dávid ezt a két tulajdonságot kapcsolhatta össze.

A következő feladat annyiban különbözött az előzőtől, hogy itt különböző háromszögeket kellett előállítani (3. sz. melléklet, 3. feladat), majd az egymásra merőleges oldalakat kékkel színezni. (4. sz. melléklet, 2. feladat)

A háromszögek rajzolásának értékelése:

|                                             | 2006-ban<br>4.c (26 fő) | 2008-ban<br>4.b (19 fő) |
|---------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Mind a 8 különböző háromszöget megtalálta.  | 4%                      | 26%                     |
| 6-7 különböző háromszöget rajzolt.          | 12%                     | 37%                     |
| 4-5 különböző háromszöget alkotott.         | 38%                     | 32%                     |
| 4-nél kevesebb megoldást talált.            | 46%                     | 11%                     |
| Több azonos (egybevágó) megoldást is adott. | 8%                      | 32%                     |

Az egybevágó megoldások száma lényegesen lecsökkent.

A 3•3-as pontrácson megrajzolható 8 háromszögnél négy esetben színezhették kékkel az egymásra merőleges oldalakat a gyerekek. (4. sz. melléklet, 2. feladat)

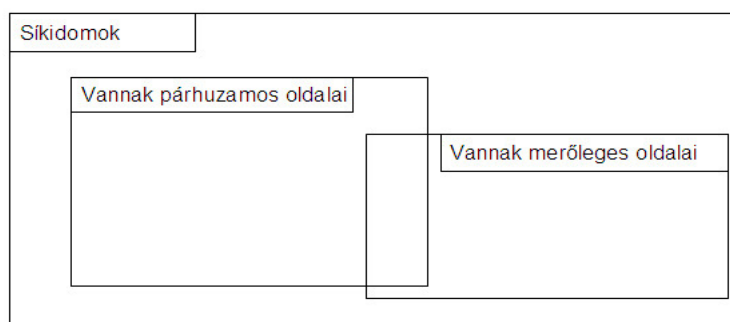
A merőleges oldalakat hibátlanul felismerte a tanulók 96%-a (2006-ban), illetve 67%-a (2008-ban).

Egy újabb feladat (7. sz. melléklet, 1. feladat) a) és b) része a gyerekek számára már ismert feladattípus volt, amely kiegészült egy válogatással (a halmazábra nem jelentett újdonságot a gyerekeknek, mert már 3. osztályban is több alkalommal találkoztak vele) és állítások logikai értékének eldöntésével. Ez utóbbit a kvantorok használatának, illetve megértésének vizsgálata céljából tűztük ki. A gyerekeknek 9 alakzatot (2.37. ábra) kellett vizsgálniuk és

a) kiszínezni azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat;

b) kiszínezni pirossal a derékszögeket;

c) beírni a síkidomok betűjelét az ábrán a megfelelő helyre (2.36. ábra);



2.36. ábra

d) eldönteni, hogy a megadott állítások közül melyik igaz, melyik nem:

*Mindegyik síkidomnak van derékszöge.*

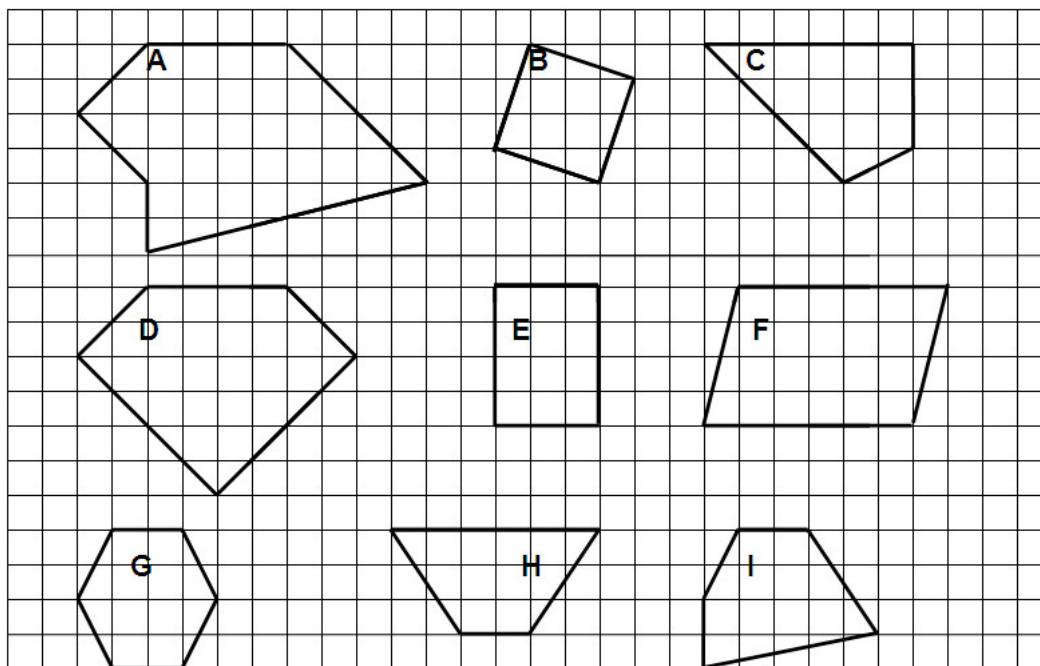
*Van a síkidomok között ötszög.*

*Mindegyik síkidomot csak egyenes vonal határol.*

*Van olyan síkidom, amelyiknek nincsenek párhuzamos oldalai.*

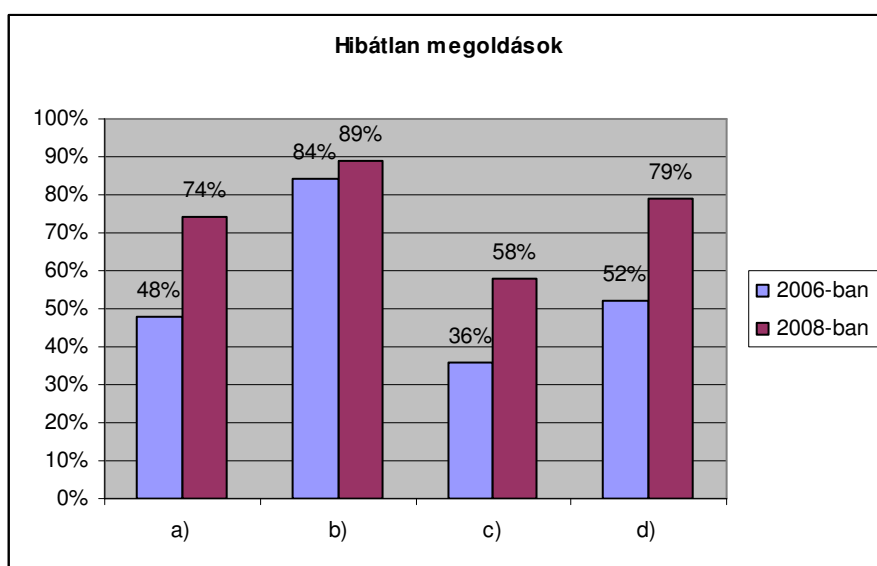
*Mindegyik síkidomnak vannak merőleges oldalai.*

A vizsgálat tárgyai a következő sokszögek voltak (2.37. ábra):



2.37. ábra

A feladat megoldásának eredményességét a következő ábra szemlélteti:



2.38. ábra

A gyerekek a derékszögek színezésénél teljesítettek a legjobban, ahogy a korábbi feladatnál is. Ez várható volt, mivel az előző tanévben már foglalkoztak ezzel a fogalommal. A párhuzamos oldalak színezése során a legtöbb hibát az A jelű hatszögnél vétették, többnyire nem vették észre a párhuzamos oldalakat (2006-ban a tanulók 40%-a, 2008-ban 16%-a). Ha valaki a feladat a), illetve b) részében hibázott, akkor nyilvánvalóan a c) rész sem volt hibátlan. A derékszögek felismerése nagyon jól sikerült, a merőleges oldalpárok felfedezése azonban nehezen ment. Újra megerősítettük, hogy ha két oldal derékszöget zár be, akkor azok egymásra merőlegesek is. A „minden”, „van olyan” típusú állítások logikai értékének meghatározásánál szinte csak a harmadik állításnál (*Mindegyik síkidomot csak egyenes vonal határol.*) fordultak elő hibák. A gyerekekkel folytatott interjúkból kiderült, hogy néhányan a „ferde” egyenest nem tarják egyenesnek. Megbeszéltük, hogy egyik határoló vonal sem görbül, tehát ezeket a síkidomokat csak egyenes vonalak határolják. A „*Mindegyik síkidomnak van derékszöge.*” és a „*Mindegyik síkidomnak vannak merőleges oldalai.*” állítások hamis logikai értékét megfelelő ellenpéldával indokolták. A „*Van a síkidomok között ötszög.*” és a „*Van olyan síkidom, amelyiknek nincsenek párhuzamos oldalai.*” állítások igaz logikai értékét megfelelő példával igazolták.

Tovább nehezítettük a megoldandó problémákat abban a feladatban, amelyben a gyerekeknek – a négyzetrácsos füzetükben – a következő feltételeknek megfelelő négyszögeket kellett rajzolniuk, amelyeknek

- a) két szemközti oldala párhuzamos, a másik kettő viszont nem párhuzamos;
- b) nincsenek párhuzamos oldalai;
- c) szemközti oldalai párhuzamosak, szögei pedig mind derékszögek;
- d) szemközti oldalai párhuzamosak, de szögei nem derékszögek.

Az a) feladatnál a jó megoldások mellett rosszak is születtek. Voltak, akik paralelogrammát, rombuszt rajzoltak helytelenül. A b) feladatban általános deltoidot – konvexet és konkávot egyaránt – rajzoltak a gyerekek. Egy-két paralelogramma – rossz megoldásként – itt is bekerült. A c) feladatban sokan rajzoltak általános téglalapot, de még többen négyzetet. Kiegészítő utasításként mondta a tanító: „Ha még más alakút is tudsz, akkor rajzold le azt is!” Öt-öt tanuló volt a kísérleti osztályokban, akik általános téglalapot és négyzetet is rajzoltak. A d) feladatban az általános paralelogramma megrajzolása nem jelentett gondot, de a rombusz már bizonytalanságot okozott. Általános deltoidra is gondoltak néhányan. Érdeklükben elő kellett vennünk ismét a hurkapálcikákat, ráfektettük a szemközti oldalakra és megállapítottuk újra, hogy összeérnek azok, tehát ezek a szemközti oldalak nem párhuzamosak egymással.

Még mindig szükség volt a konkrét tapasztalatszerzésre, a többszörös konkretizálásra a párhuzamosság és a merőlegesség fogalmának megfelelő fejlődése érdekében.

#### 2.6.4. A szimmetria fogalom fejlesztése

Alsó tagozaton a szimmetria fogalom körével kapcsolatban a transzformációk közül térben a síkra vonatkozó tükrözéssel, míg síkban a tengelyes tükrözéssel foglalkozunk. A testek szimmetrikus tulajdonságán a síkra vonatkozó, síkidomok esetén pedig a tengelyes szimmetriát értjük. Testek síkra vonatkozó szimmetriájának vizsgálatához hozzátartozik a szimmetriasíkok, míg síkidomok tengelyes szimmetriájának vizsgálatához a szimmetriatengelyek helyének és számának

meghatározása. A felső tagozat feladata az alakzatok forgás- és középpontosan szimmetrikus tulajdonságának megismertetése.

#### **2.6.4.1. Testek tükörképének építése**

Testek tükörképének építésével a gyerekek már 2. osztályban találkoztak. A következőkben a tükrözés és az eltolás közötti különbségek felfedeztetésére törekedtünk.

A gyerekek párban dolgoztak, a pad közepére helyezett ceruza jelölte a képzeletbeli tükör helyét. A pár egyik tagja 3 gyufásdobozból épített valamit, a másiknak pedig a tükörképét kellett létrehoznia. A kísérletező és Martin között – aki a tükörképet építette – a következő párbeszéd hangzott el:

*Kísérletező:* Ellenőrizzük tükörrel, hogy valóban a tükörképét építetted-e meg annak, amit Heni épített! Nézz bele a tükörbe! A tükörkép ugyanolyan távol van, mint amit te építettél?

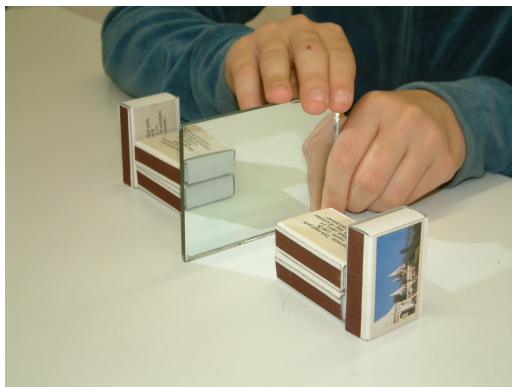
*Martin:* Nem, a tükörkép közelebb van.

*Kísérletező:* Mit kellene változtatni?

*Martin:* Közelebb kell tolni a tükörhöz, amit építettem, hogy ugyanolyan messze legyen a tükörtől, mint a másik.

Martint a saját konkrét tapasztalata, azaz, hogy a tükörben látott kép nem egyezett meg az általa építettel, segítette hibája, egyben a tükrözés egyik fontos jellemzőjének felismerésében.

A gyerekek a következő feladatnál is párban dolgoztak. Az egyikük épített valamit, a padtárs feladata az volt, hogy pontosan ugyanolyan építsen és az építménye ugyanúgy is álljon.



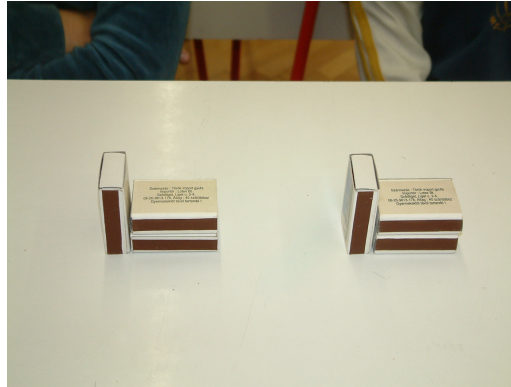
2.39. ábra

*Tanító:* Timót ez ugyanúgy áll, ugyanolyan helyzetben van, mint amit Gréta épített?

*Timót:* Igen.

*Tanító:* Szerintem nem. Ha ezeket egy-egy háznak képezem, akkor a te házadat nem ugyanúgy építették meg. Grétáénál a magas fal bal oldalon van, nálad pedig a jobb oldalon. (2.39. ábra)

*Timót:* Tényleg. Most már tudom, csak el kell forgatnom. (2.40. ábra)



2.40. ábra

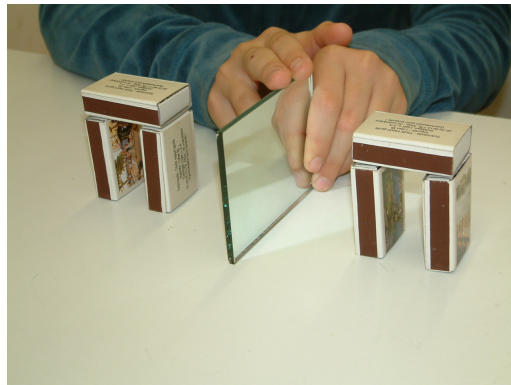
*Tanító:* Mit építettél először? (2.39. ábra)

*Timót:* A tükörképét.

*Tanító:* Mit veszünk észre most? Mindenki tegye a két építmény közé a tükröt!

*Timót:* A tükörkép nem egyezik meg a második építménnyel.

*Anita:* Nálam megegyezik, de ugyanúgy is áll. (2.41. ábra)



2.41. ábra

*Tanító:* Jöjjön ide mindenki és nézze meg, hogy mit építettek Anitáék. Igaza van?

*Zsófi:* Igen.

*Tanító:* Timótéknál nem egyezik meg a második építménnyel, Anitáéknál megegyezik, de mindegyik esetben a második építmény ugyanúgy áll, mint az első. Miért lehet ez?

*Bodó:* Mert Anitáék tükröset építettek, Timóték pedig nem.

*Tanító:* Honnan tudjuk, hogy amit Anitáék építettek az tükrös?

*Bodó:* Mert ha középen elvágnánk így (mutatja), akkor két olyan darabra esne szét, ami egymásnak tükörképe lenne.

*Tanító:* Anitáék tükrös építményét szimmetrikusnak is nevezhetjük.

E konkrét tapasztalatok nélkül – Varga Tamással egyetértve – a későbbi absztrakció elképzelhetetlen.

#### **2.6.4.2. Szimmetriasíkok helyének meghatározása különböző testek esetén**

- Tanító:** Vegyétek a gyufásdobozt a kezetekbe! Rajzoljátok be rajta annak a vágásnak a helyét, amely mentén, ha elvágnánk a gyufásdobozt és az egyik felét a vágás mentén a tükörre illesztenénk, akkor az egész gyufásdobozt látnánk! A tükörsík helyét kell berajzolnotok. Ha többet is találtok, mindegyiket jelöljétek más-más színnel! Hányat találtatok?
- Noémi:** Hármat.
- Tanító:** Gyere ki Noémi és mutasd meg az én téglatestemen, hogy hol vágnád szét, én pedig berajzolom a helyét!

Négy-öt gyerek volt, aki a lapátló mentén is vágott volna, de a tükörrel történő ellenőrzés után rájött, hogy ez nem jó megoldás. A kételyek eloszlatása érdekében a tanító egy nagy (sárga) téglatest alakú szivacsot elvágott az egyik lapátló mentén, majd az egyik darabot a vágási felület mentén a tükörre illesztette. A gyerekek ezt követően belenéztek a tükörbe és megbizonyosodhattak arról, hogy valóban nem az eredeti szivacs alakját látják.

**Tamás:** Sajtdarabot látok és nem téglatestet. (A sárga szín miatt asszociálhatott a sajtra.)

Sok időt vett igénybe a kocka 9 tükörsíkjának meghatározása. Megállapítottuk, hogy a szabályos ötszög alapú hasábnak 6, a hengernek, a kúpnak és a gömbnek nagyon sok szimmetriasíkja van.

#### **2.6.4.3. Síkbeli tükörképek vizsgálata konkrét tárgyi tevékenységgel**

A térben szerzett tapasztalatokat kiegészítettük síkbeli tapasztalatokkal.

- Tanító:** Hajtsátok félbe az előttek lévő lapot! Ez után terítsétek ki és a hajtsáselet vonalzó segítségével, pirossal húzzátok át! A lap bal oldalára nyomjatok egy kis temperát, majd a lapot újra hajtsátok félbe az előző módon és jól szorítsátok össze a papírlap két felét! Újra terítsétek ki! Mit láttok?
- Eszter:** A papír két oldalán ugyanaz van.
- Tanító:** Tegyétek a tükröt a piros hajtsáselelre! Nézzetek bele! Mit láttok?
- Edit:** Ha a tükröt a piros vonalra teszem, akkor ugyanazt látom benne, mint ami mögöttem van.
- Tanító:** Mit jelent ez?
- Dávid:** Az egyik folt a másik tükörképe.

Érdekes, változatos alakzatok keletkeztek. Nagyon élvezték a gyerekek ezt a feladatot, a következőhöz hasonlóan.

- Tanító:** A fekete fotópapírokra előre megrajzoltam egy holdsarló alakját. Hajtsátok félbe a papírt úgy, ahogy mutatom! Mindenkinek adtam egy gombostűt. Ezzel szurkáljátok körül a hold megrajzolt határvonalát úgy, hogy a tű minden szúrásakor mindkét lapot átdöfje! Ha készen vagytok, nyissátok szét a papírlapot, és a fény felé tartva nézzetek át rajta! Mit láttok?

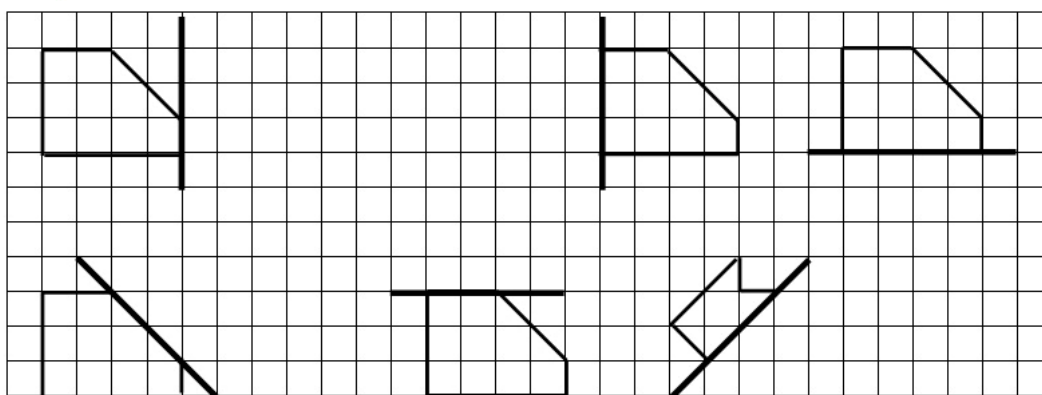
**Kornél:** A papír mind a két felén ugyanakkora holdak vannak, a hajtásvonaltól ugyanolyan messze. Csak másképp görbülnek.  
**Tanító:** Hogyan helyezkednek el a holdak a hajtásvonalhoz viszonyítva?  
**Petra:** Tükrösen, szimmetrikusan.  
**Tanító:** Tükörrel ellenőrizzük ezt! Tegyétek a tükört a hajtásvonalra! Mit láttok a tükörben?  
**Bence:** Ugyanazt, mint ami mögötte van.

Kornél megállapítása – miszerint a papír két felén ugyanakkora holdak vannak, a hajtásvonaltól ugyanolyan messze, csak másképp görbülnek – a tükrözés egybevágósági, távolságtartó transzformációként való felismerésére és a körüljárási irány megfordulásának észrevételére utal.

#### 2.6.4.4. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok konstruálása

Tengelyesen szimmetrikus síkidomok konstruálását konkrét tevékenységgel, nyírással kezdtük. A gyerekeknél lévő üres papírlap félbehajtása és az él lesimítása után úgy kellett kivágniuk valamilyen mintát (fél szívet, fél levelet, fél lepkét, fél gombát stb.), hogy a hajtásvonalból is kivágjanak egy részt. A papírlap széthajtása után megállapították, hogy a keletkezett alakzat szimmetrikus. Ezt tükörrel, valamint a papírlap ismételt félbehajtásával ellenőriztük.

Vizuális síkon, rajzolással tengelyesen szimmetrikus alakzatok alkotását négyzethálón végeztük. A gyerekeknek ötszögeket kellett tükrözniük adott tengelyre. (5. sz. melléklet, 1. feladat)



2.42. ábra

A feladat megoldásának eredményességét a következő táblázat mutatja:

|                                              | 2006-ban<br>4.c (24 fő) | 2008-ban<br>4.b (18 fő) |
|----------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| A tükrözések hibátlanok.                     | 33%                     | 83%                     |
| 1 hibás tükörképet rajzolt.                  | 38%                     | 17%                     |
| 2 vagy annál több ötszöget rosszul tükrözött | 29%                     | 0%                      |

2006-ban ez a feladat házi feladat volt. A 2008-ashoz képest lényegesen rosszabb eredmény feltehetőleg annak köszönhető, hogy otthon sokaknál nem állt

rendelkezésre zsebtükör. 2008-ban viszont a tanórán mindenkinél volt tükör, amelyet – ha szükségük volt rá – használhatták.

#### **2.6.4.5. Síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata**

A konkrét tárgyi tevékenységek, a manipulációk, az eszközök használata a továbbiakban is fontos szerepet játszottak a szimmetria fogalom fejlődésében.

Egy síkidom tengelyes szimmetriájának vizsgálata együtt jár a szimmetriatengelyek helyének és számának meghatározásával. Közel egy teljes tanórát vett igénybe az a feladat, melynek során a gyerekek hajtogatással, illetve tükör segítségével határozták meg a tükrötengelyek helyét 14 különböző, papírból kivágott síkidomnál. Szabályos háromszöget, egyenlő szárú háromszöget, általános háromszöget, általános trapézt, szimmetrikus trapézt, általános paralelogrammát, rombuszt, téglalapot, négyzetet, konvex deltoidot, konkáv deltoidot, általános ötszöget, szabályos hatszöget és a kört vizsgáltuk. A feladatot a gyerekek önállóan hajtották végre, majd közösen ellenőriztük. Tipikus problémaként vetődött fel az általános paralelogramma tükrösségének vizsgálata során, vajon az átlók, a középvonalak, az oldalfelező merőlegesek tükrötengelyek-e. Többen megpróbálták az átlók és a középvonalak mentén félbehajtani a kivágott paralelogrammát úgy, hogy a két rész pontosan fedje egymást. A sikertelen hajtogatásokat követően azonban meggyőződtek arról, hogy ennek a síkidomnak nincs tükrötengelye. Martin bizonytalanságát tükrözte – miután a tükröt a hosszabb oldal felezőmerőlegesére helyezte – a következő mondata:

*Martin:* Idetettem a tükröt, de nem tudom eldönteni, hogy tükrös vagy sem.

*Tanító:* Nézz bele a tükörbe! Most pedig elveszem a tükröt. Ugyanazt láttad az előbb, mint amit most látsz?

*Martin:* Nem. Akkor ez nem tükrötengely.

Az általános téglalap vizsgálata során is előkerült az átlók problémája. Sokan úgy gondolták, hogy az oldalfelező merőlegesek mellett az átlók is szimmetriatengelyek. Itt is a hajtogatás „eredménytelensége” illetve a tükörben látott kép győzte meg a tanulókat arról, hogy az átlók nem tükrötengelyek. Az általános rombusz 2 tükrötengelyének megállapítása, majd tükörrel, illetve hajtogatással történő ellenőrzése után foglalkoztunk az általános téglalap 2, majd a négyzet 4 tükrötengelyével.

*Tanító:* Milyen síkidommal van rokonságban a négyzet?

*Sára:* A téglalappal.

*Kornél:* A rombuszsal.

*Szabolcs:* A négyzet a rombusztól örökölte, hogy az átlók tükrötengelyek, a másik kettőt pedig a téglalaptól örökölte.

Bizonyos fogalomcsoportok más fogalomcsoportok felsőbb kategóriájaként funkcionálnak. Az alárendelt kategóriák megöröklik felsőbb kategóriáik tulajdonságait. Mivel a téglalap és a rombusz felsőbb kategóriája a négyzetfogalomnak, a négyzet öröklí ezek tulajdonságait. A tükrötengelyek vonatkozásában ezt fogalmazta meg helyesen Szabolcs.

Ezt követően az egyenlőszárú, a szabályos és az általános háromszög tükörtengelyeit vizsgáltuk. A szabályos háromszög vizsgálata során ismét Szabolcs tette a következő megjegyzést:

*Szabolcs:* A négyzetnek 4 csúcsa, 4 oldala, 4 tükörtengelye van és ennek a háromszögnek 3 csúcsa, 3 oldala és 3 tükörtengelye van.

*Tanító:* Ennek a háromszögnek 3 tükörtengelye van, de az előzőnek csak 1 volt. (Az egyenlő szárú háromszögre mutatott.) Vajon miért?

*Szabolcs:* Ennek azért van három – mutatott a szabályos háromszögre – , mert mind a három oldala egyenlő hosszú, de a másiknak csak két egyenlő hosszú oldala van.

Az általános háromszög vizsgálata során több hajtogatási kísérlet után állapították meg a gyerekek, hogy nincs tükörtengelye.

*Tanító:* Szabolcs, ennél a háromszögnél miért nem találtunk tükörtengelyt?

*Szabolcs:* Mert mindegyik oldala különböző hosszú.

Az általános és a szimmetrikus trapéz vizsgálatánál a tanítónő ismét Szabolcshoz fordult:

*Tanító:* Ennél a négyszögnél – az általános trapézra mutatva – miért nincs, a másiknál pedig – a szimmetrikus trapézra mutatva – miért van 1 tükörtengely?

*Szabolcs:* Ezek különböző hosszúak – az általános trapéz két szára mutatott – , a másiknál pedig ugyanolyan hosszúak.

Egy általános ötszög szimmetriatengelyeinek keresésénél Szabolcs már kérdés nélkül közölte a következőket:

*Szabolcs:* Nem is kell hajtogatni, mert annyira látszik, hogy mindegyik oldala különböző hosszú, és ezért nincs is tükörtengelye.

A körlap tükörtengelyeinek keresésénél a gyerekek és a tanítónő is a saját applikációján sok tükörtengelyt állítottak elő hajtogatással. Amit hajtogatással kaptak, pirossal át is rajzolták. A tanítónő felmutatta az övét, de az egyik gyerek azonnal megjegyezte, hogy lehetne még rajzolni rá.

*Tanító:* Hová rajzolhatok még?

*Tamás:* Ahol még fehér. Az egész körlapot pirosra kellett volna színezni, annyi van.

A legtöbb hibát a szabályos háromszög szimmetriatengelyeinek meghatározásánál figyelhettük meg. A tanulók többsége (84%-a 2006-ban, 68%-a 2008-ban) azt a tipikus hibát követte el, hogy a három helyett egy szimmetriatengelyt fedezett fel. A többi síkidomnál alacsony volt a hibázók száma.

A konkrét reprezentációkat követték a képi reprezentációk. Ennek során a gyerekek feladata a következő feltételeknek megfelelő síkidomok rajzolása volt, amelynek

- a) pontosan 1 tükörtengelye van,
- b) pontosan 2 tükörtengelye van,
- c) pontosan 3 tükörtengelye van,
- d) pontosan 4 tükörtengelye van,
- e) nincs tükörtengelye.

Ebben a feladatban felhasználhatták az előző feladat során szerzett tapasztalataikat. Az a) feladatban szimmetrikus trapéz, egyenlő szárú háromszöget, általános deltoidot – konvexet és konkávot egyaránt – és negyed körlapot rajzoltak.

A b) feladatban a többségük általános téglalapot rajzolt, csupán néhányan rajzoltak általános rombuszt. Voltak, akik helytelenül négyzetet rajzoltak.

*Tanító:* Néhány füzetben négyzetet is láttam. Hány tükörtengelye van a négyzetnek?

*Eszter:* Négy.

*Tanító:* Akkor nem lehet pontosan 2 tükörtengelye. Csak akkor rajzolhattátok volna le a négyzetet, ha úgy fogalmaztam volna, hogy van 2 tükörtengelye.

Igyekeztünk a szaknyelv pontos használatára, megértésére irányítani a gyerekek figyelmét.

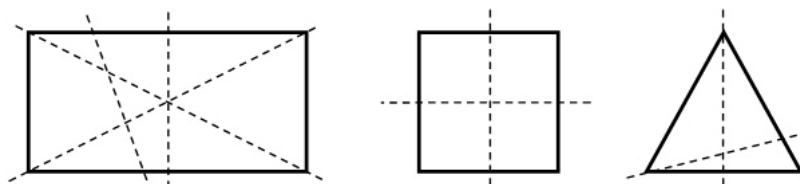
A c) feladat ment a legnehezebben. Sokan nem rajzoltak semmit, aki rajzolt, az a szabályos háromszöget rajzolta.

A d) feladatban mindenki négyzetet rajzolt. Előfordult, hogy a négyzetháló rácsvonalaira rajzolt négyzet mellé – újabb megoldásként – csúcsára állított négyzetet is rajzoltak. Megbeszéltük, hogy a csúcsára állított négyzet azért nem számít másik megoldásnak, mert az is négyzet csak másképp áll, esetleg egy kicsit kisebb vagy nagyobb a mellette lévőnél.

Az utolsó feladatrésznél sokféle síkidomot rajzoltak. Nagyon sokan több megoldást is adtak. Rajzoltak általános paralelogrammát, trapéz, háromszöget, négyszöget, ötszöget, olyan nem szimmetrikus síkidomokat is, amelyeket nem csak egyenes szakaszok határolnak.

A tanító valamennyi feladatrésznél mutatott olyan, az adott feltételeknek megfelelő példákat is, amelyeket görbe vonalak is határolnak. Hangsúlyozva, hogy síkidomokat kellett rajzolni. Kitért arra is, hogy ha sokszögeket mondott volna, akkor kizárólag olyan síkidomokat lehetett volna rajzolni, amelyeket csak egyenes vonal határol.

Egy másik feladatban (5. sz. melléklet, 3. feladat)– a „zajszinget” növelve – a gyerekeknek pirossal kellett áthúzniuk a tükörtengelyeket – több megadott lehetőség közül – a következő síkidomoknál (2.43. ábra):

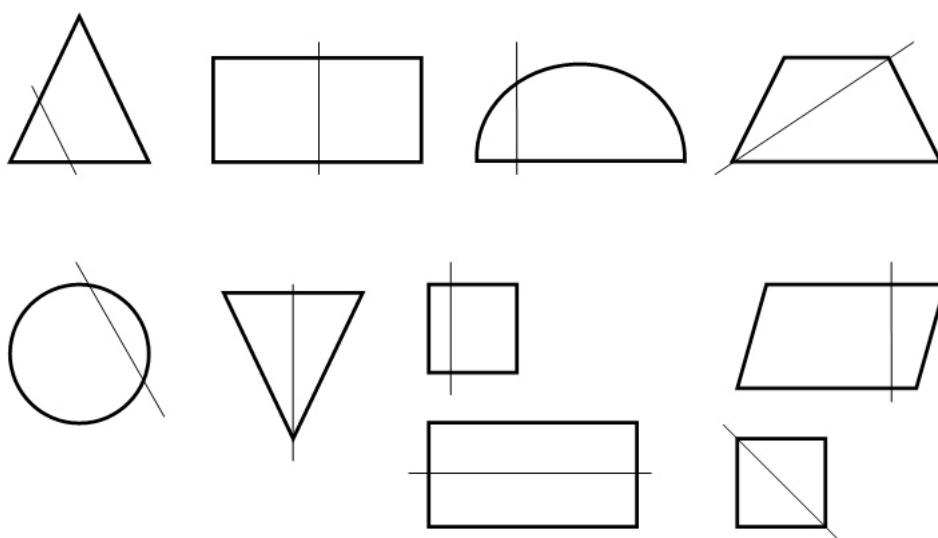


2.43. ábra

A tükörtengelyek színezését hibátlanul végezte a tanulók 79%-a (2006-ban), illetve 100%-a (2008-ban). 2006-ban a hibázók a téglalap átlóit is tükörtengelynek vették. A hibázókkal újra visszanyúltunk a konkrét tárgyi tevékenységhez. Téglalap alakú papírlapot összehajtottak az átlója mentén, így ismét megtapasztalhatták azt, hogy a két rész nem fedti pontosan egymást, ezért az átlók nem tükörtengelyek. A feladat végrehajtása közben merült fel az a kérdés, hogy ha még találnak tükörtengelyt, berajzolhatják-e. Természetesen megengedtük, sőt nagyon örültünk, hogy a hiányzó tükörtengelyeket (a téglalaphoz és a szabályos háromszöghöz) a többségük berajzolta.

Egy újabb feladatnál – a „zajszintet” még tovább fokozva – el kellett dönteniük a gyerekeknek, hogy melyik ábrán van hibásan berajzolva a szimmetriatengely és ahol lehetett a hibát ki is kellett javítaniuk. (6. sz. melléklet, 1. feladat)

A következő síkidomokat vizsgálták (2.44. ábra):



2.44. ábra

Itt is berajzolhattak több tükörtengelyt, ha találtak. A feladat ellenőrzésénél valamennyi lehetőséget megbeszéltük.

A feladat megoldásának értékelése:

|                                                                                                                                            | 2006-ban<br>4.c (25 fő) | 2008-ban<br>4.b (18 fő) |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Hibátlanul határozta meg a szimmetriatengelyeket.                                                                                          | 36%                     | 61%                     |
| A paralelogrammánál rajzolt szimmetriatengelyt vagy a nyomtatott egyenest jónak tartotta.                                                  | 28%                     | 0%                      |
| A szimmetrikus trapéz esetén az átlót szimmetriatengelynek vette vagy nem vette annak, de nem is rajzolta meg a helyes szimmetriatengelyt. | 16%                     | 11%                     |
| Az egyenlő szárú háromszögek valamelyikének 3 szimmetriatengelyt rajzolt.                                                                  | 20%                     | 28%                     |

Az egyenlő szárú háromszögnél 3 szimmetriatengely rajzolásának az lehetett az oka, hogy az előző órán sokat foglalkoztunk a szabályos háromszög 3 tükörtengelyével és ez az emlékükhöz olyan erős benyomással bírhatott, hogy még az egyenlő szárú, de

nem szabályos háromszögnél is 3 tükrötengelyt rajzoltak. Valamennyi hiba belátása és kiküszöbölése érdekében itt is a konkrét tárgyi tevékenységeket vettük segítségül.

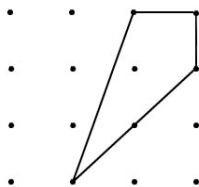
A konkrét tárgyi és képi reprezentációk segítik a fogalom mentális képének létrehozását, amely az egyén konstruktív aktivitása révén jön létre és függ az egyén saját tapasztalataitól.

A 2008-as fejlesztő tanítás hatékonyabbnak bizonyult a szimmetria fogalom alakulása szempontjából, melyet tükröznek a mért eredmények. 2008-ban igyekeztünk a korábbi tanítás tapasztalatai alapján részletesebben, elmélyültebben feldolgozni a szimmetriával kapcsolatos feladatokat.

### 2.6.5. A vizsgált fogalmakkal kapcsolatos vegyes feladatok

Azokat a feladatokat, amelyeket nem lehet egyértelműen egy-egy vizsgált fogalom köré csoportosítani, a vegyes feladatok címszó alá gyűjtöttük. Konkrét és képi reprezentációkra egyaránt találunk példákat.

A gyerekek otthoni feladata volt, hogy a munkafüzetük egyik mellékletében (C. Neményi 4. osztályos munkafüzet 13. melléklete) szereplő 48 darab nem egybevágó 4•4-es négyzet-pontrácson található négyszöget 1-től 48-ig sorszámozzák, majd vágják ki ezeket a pontráccsal együtt. Első feladatként a tanórán azokat a négyszögeket kellett ezek közül kiválogatniuk, amelyeknek voltak párhuzamos oldalai, ezt követően pedig a tükrös négyszögeket. A felmerülő problémákat – az esetleges rossz válogatásokat – mindegyik esetben megbeszéltük. A gyerekek párokban dolgoztak, így Timót és Gréta együtt válogatott. A következő négyszöget a tükrösekhez tették (2.45. ábra):



2.45. ábra

*Tanító:* Nézzük csak, hol van ennek a négyszögnek a tükrötengelye?

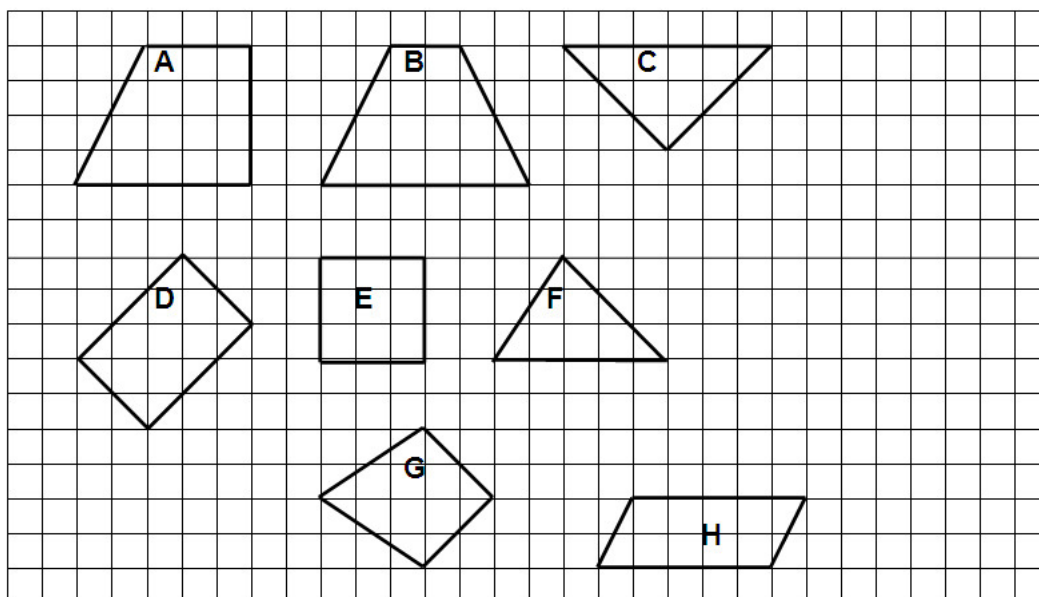
Gréta többféleképpen próbálta a tükröt elhelyezni, de ahogy felemelte, mindig megbizonyosodott arról, hogy nem ugyanazt látja, mint amit a tükrőben látott.

*Timót:* Tényleg nem lehetnek tükrösek, mert ez az oldal hosszabb, mint a másik. (Timót a két különböző hosszúságú szomszédos oldalakat hasonlította össze.)

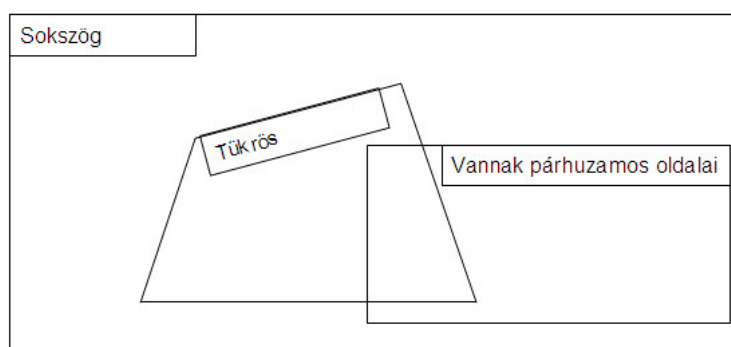
Elkövették azt a hibát is, hogy mindegyik paralelogrammát a tükrösek közé tették. Elővettük újra a tükröt és kerestük a szimmetriatengelyeket. Végül Timót fogalmazta meg, hogy csak az a paralelogramma tükrös, amelynek minden oldala egyenlő. A konkrét tapasztalatok nélkül – feltehetőleg – nem sikerült volna hibáikat felismerniük.

A materiális síkon zajló feladatot közvetlenül követte az az ikonikus síkon történő válogatás, amelyben a válogatási szempontok ugyanazok maradtak. (6. sz.

melléklet, 2. feladat) A következő sokszögek (2.46. ábra) betűjelét kellett a gyerekeknek az ábrán (2.47. ábra) a megfelelő helyre beírniuk.



2.46. ábra



2.47. ábra

A tanító felhívta a gyerekek figyelmét arra, hogy most a két tulajdonságot egyszerre kell vizsgálniuk. Az eszközöket (tükröt, hurkapálcikákat) továbbra is használhatták a gyerekek a tulajdonságok megállapítására, bár egyre kevésbé igényelték.

**Tanító:** A bal oldali részbe milyen tulajdonságú sokszögek kerülnek? (A „tükrös” címkéjű halmaznak azt a részét mutatta, amely nem tartalmazta a két halmaz metszetét.) (2.47. ábra)

**Bálint:** Tükrösek.

**Tanító:** Mi az, amit még el tudunk mondani?

**Kornél:** Tükrösek, de nincsenek párhuzamos oldalai.

**Tanító:** Nézzük meg, milyen tulajdonságú sokszögek kerülnek középre!

**Toncsi:** Tükrösek és vannak párhuzamos oldalai.

**Tanító:** És ebbe a jobb oldali részbe? (A „vannak párhuzamos oldalai” címkéjű halmaznak a két halmaz közös részén kívüli részét mutatta a tanító.)

**Tamás:** Vannak párhuzamos oldalai, de nem tükrösek.

**Tanító:** Mi igaz azokra a sokszögekre, amelyek a külső részbe kerülnek? (Az alaphalmaznak a két halmazon kívüli részét mutatta.)

**Regina:** Nem tükrösek és nincsenek párhuzamos oldalaik.

A halmazábra kitöltését önállóan végezték a gyerekek.  
A feladat megoldásának értékelése:

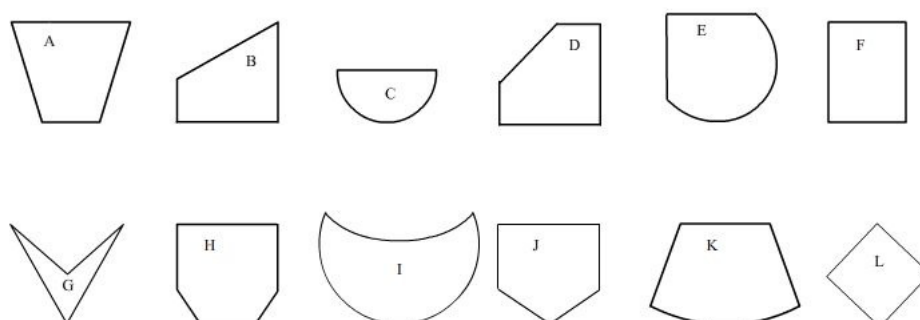
|                                                                  | 2006-ban<br>4.c (26 fő) | 2008-ban<br>4.b (19 fő) |
|------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Hibátlanul helyezte el a síkidomok betűjelét az ábrán.           | 27%                     | 16%                     |
| Az F jelű egyenlő szárú háromszög tükrösségét nem vette észre.   | 58%                     | 74%                     |
| A G jelű deltoidnak hibásan állapított meg párhuzamos oldalakat. | 38%                     | 11%                     |
| Az A jelű trapéznek nem fedezte fel a párhuzamos oldalait.       | 19%                     | 16%                     |
| A H jelű paralelogrammánál nem ismert fel párhuzamos oldalakat.  | 15%                     | 16%                     |

Kiemelkedően magas azoknak a tanulóknak az aránya, akik nem fedezték fel az F jelű egyenlő szárú háromszög tükrösségét, amelynek oka az lehetett, hogy a háromszög egyik szára nem esett rácsvonalra, emiatt nem tudták ránézésre megállapítani, hogy ez ugyanolyan hosszú, mint a rácsvonalra illeszkedő szár.

A többszörös konkretizálás ellenére a párhuzamosság megállapításánál még mindig találkozunk hibákkal, ami alátámasztja azt a megállapítást, miszerint a geometriai fogalmak elsajátítása lassú folyamat.

Egy újabb feladatban a megadott síkidomok közül ki kellett válogatniuk a gyerekeknek konkrét tárgyi tevékenységgel először a sokszögeket, majd a négyszögeket.

A következő síkidomokból kellett válogatniuk (2.48. ábra):



2.48. ábra

Minden tanuló előtt ott volt a 12 darab papírból kivágott síkidom, amelyeket gyermekruhákra felvarrható zsebekként képzelünk el.

*Tanító:* Hogy nevezzük azokat a síkidomokat, amelyeket csak egyenes vonal határol?

*Bodó:* Többszögnek.

*Laci:* Sokszögnek.

*Tanító:* Válogassátok ki az előttek lévő síkidomok közül a sokszögeket!

*Martin:* A sokszögekhez tartoznak azok is, amelyeknek két szöge van?

*Tanító:* Tudsz olyant rajzolni?

*Martin:* Igen, tudok. (A táblára rajzolt egy félkört.)

*Tanító:* Az elmúlt órán és ma is beszéltünk már arról, hogy a sokszögeket határolhatja-e görbe vonal.

*Martin:* Hát nem! Csak egyenes vonal, akkor ez nem is sokszög.

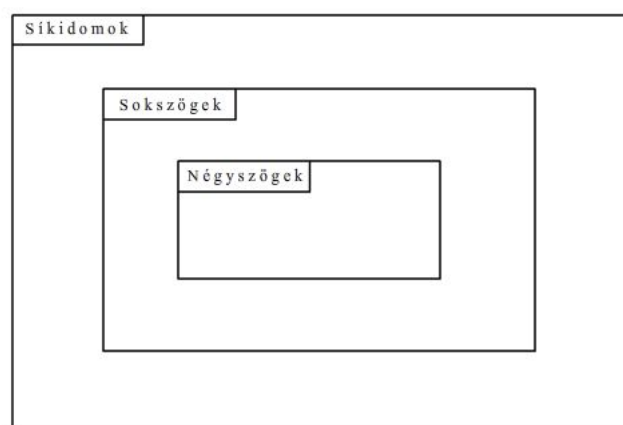
*Tanító:* Melyik az a sokszög, amelyiknek a legkevesebb szöge van?

*Laci:* A háromszög.

*Tanító:* Most válogassátok ki a négyszögeket! Észrevettetek-e valamit?

*Zsófi:* Ezeket a négyszögeket, amiket most kiválogattam, az előbb a sokszögeknél is kiválogattam.

*Tanító:* Most feladatlapon folytatjuk a munkát! Ugyanezeket a síkidomokat láthatjátok a lapon. Ezeknek a betűjelét írátok be az ábrán (2.49. ábra) a megfelelő helyre! (8. sz. melléklet, 1. feladat) Emlékezzetek arra, hogy a négyszögeket a sokszögeknél is kiválogattátok! Mindegyik síkidomból azonban csak 1 darab van, ezért mindegyik betűjelét csak 1 helyre írhatod!



2.49. ábra

Nézzük először közösen, hogy az A jelű síkidomot hová írnátok!

*Anita:* A négyszögekhez.

*Gréta:* A sokszögekhez is. (A „sokszögek” címkéjű halmaz négyszögeken kívüli részét mutatta.)

*Tanító:* Igazad van abban, hogy ez sokszög is, de ebbe a részbe már nem kell újra beleírunk, mert a négyszögek – láthatod – benne vannak a sokszögekben. Ide azok a sokszögek kerülnek, amelyek nem négyszögek. Mondjatok egy ilyen sokszöget a feladatlapon láthatók közül!

*Niki:* A D jelű ötszög.

Mindegyik síkidom betűjelét hibátlanul helyezte el az ábrán a gyerekek 80%-a (2006-ban), illetve 74%-a (2008-ban). A többszörös osztályba sorolás miatt nem számít könnyű feladatnak ez negyedik osztályban. Kíváncsiak voltunk arra, hogy a konkrét tevékenységgel végzett válogatás után mennyire boldogulnak ezzel az absztrakt ábrával a gyerekek.

Adott feltételeknek megfelelő síkidomok rajzolásával már korábbi feladatok során is találkoztak a gyerekek. Itt a következő feltételeknek megfelelő síkidomok rajzolása volt a feladatuk, amely

- a) tükrös, nagyon sok tükörtengelye van és görbe vonal határolja;
- b) négyszög és minden oldala egyenlő;
- c) négyszög, minden oldala egyenlő és minden szöge derékszög;
- d) négyszög, pontosan egy tükörtengelye van és két-két szomszédos oldala ugyanolyan hosszú;
- e) 3 oldala van és mindegyik oldala egyenlő hosszú.

A kör megrajzolása mindenkinek sikerült ( a) feladat). A b) feladatban többségük négyzetet rajzolt, két-két gyerek rajzolt a kísérleti osztályokban a négyzet mellett általános rombuszt is. A c) feladat senkinek nem okozott problémát. A d) feladatban többnyire általános konvex deltoidot rajzoltak, de előfordult konkáv is a megoldások között. Rossz megoldások is születtek, mint az általános paralelogramma vagy a szimmetrikus trapéz. A paralelogrammánál gyorsan cáfolták a tükörtengely létét. A szimmetrikus trapéznál belátták, hogy csak két, nem szomszédos oldala, de nem kettő-kettő egyenlő. Az e) feladat megoldása – a c) feladathoz hasonlóan – probléma nélkül zajlott.

#### **2.6.5.1. Feladatok absztrakt, nyelvi síkon**

A különböző geometriai alakzatok tulajdonságainak összefoglalása – az enaktív és ikonikus síkon történő tapasztalatszerzést követően – már absztrakt, nyelvi síkon zajlott. Természetesen a geometriai tulajdonságok vizsgálata mindig modell segítségével vagy az adott alakzat képi megjelenítésével együtt történt.

A gyerekek kedvelt játéka a barkóba, amely – többek között – a testek, síkidomok tulajdonságainak gyakorlására, rögzítésére is alkalmas. Egyik játék során egy általános téglalapot kellett kitalálniuk.

*Dani:* Öt csúcsa van?  
*Tanító:* Nem.  
*Rebeka:* Négyszög?  
*Tanító:* Igen.  
*Petra:* Van derékszöge?  
*Tanító:* Igen.  
*Bence:* Szemközti oldalai párhuzamosak?  
*Tanító:* Igen.  
*Sára:* Van tükörtengelye?  
*Tanító:* Igen.  
*Beni:* Két tükörtengelye van?  
*Tanító:* Igen.  
*Judit:* Az oldalai ugyanolyan hosszúak?  
*Tanító:* Nem. Aki már tudja, rajzolja le! Aki még nem, kérdezzen!

*Toncsi:* Vannak merőleges oldalai?  
*Tanító:* Igen, de ezt már egy korábbi kérdésre adott válaszból kitalálhattad. Melyikre gondolsz?  
*Toncsi:* Arra, hogy van derékszöge. Négy derékszöge van?  
*Tanító:* Igen.  
*Blanka:* Rákérdezhetek?  
*Tanító:* Igen, de előtte mindenki rajzolja le a füzetébe, hogy mire gondolt.  
*Blanka:* Téglalap?  
*Tanító:* Igen. Felrajzolom én is a táblára és ellenőrizzétek!

Toncsi nem tudott következtetni az alakzat egyik tulajdonságáról a másikra, ami a *van Hiele*-féle második szintnek felel meg. A négyszögnek abból a tulajdonságából, hogy van derékszöge nem következett számára, hogy vannak merőleges oldalai.

Egy másik játék alkalmával a szimmetrikus (általános) trapéz volt a feladvány.

*Bálint:* Négyszög?  
*Tanító:* Igen.  
*Szabolcs:* Szemben levő oldalai párhuzamosak?  
*Tanító:* Nem. Ezt a kérdést másképpen is megfogalmazhatjuk: mindegyik szemben levő oldalpárja párhuzamos? Erre mondtam, hogy nem.  
*Szabolcs:* Vannak párhuzamos oldalai?  
*Tanító:* Igen.  
*Martin:* Van derékszöge?  
*Tanító:* Nincs.  
*Laura:* Oldalai egyformák?  
*Tanító:* Ezt úgy is kérdezhetjük, hogy mindegyik oldala egyenlő? Nem.  
*Laura:* Vannak egyenlő hosszú oldalai?  
*Tanító:* Igen.  
*Kornél:* Szimmetrikus?  
*Tanító:* Igen.  
*Tamás:* Egy tükrötengelye van?  
*Tanító:* Igen.

Ezek után a táblára is felrajzoltuk a keresett síkidomot.

A játék során felmerült a kvantorok használatának szükségessége a pontos megértés érdekében. Szabolcs és Laura már figyeltek a szaknyelvi pontosságra és megfelelően használták az egzisztenciális kvantort. Itt az utolsó kérdés bizonyult feleslegesnek, ugyanis, ha több tükrötengely lenne, akkor a szemközti oldalak párhuzamosak lennének. Természetesen ez a *van Hiele*-féle harmadik szintnek megfelelő következtetés nem várható el a gyerekektől.

Egy újabb játékban Laci vállalkozott a játékvezető szerepére és egy általános deltoidot rejtett el a behajtott táblán.

*Heni:* Négyszög?  
*Laci:* Igen.  
*Martin:* Mindegyik szöge derékszög?  
*Laci:* Nem.  
*Zsófi:* Vannak párhuzamos oldalai?  
*Laci:* Nincsenek.  
*Adrián:* Vannak egyenlő hosszú oldalai?

*Laci:* Igen.  
*Anna:* Szimmetrikus?  
*Laci:* Igen.  
*Tanító:* Aki már tudja, rajzolja le! Aki még nem, kérdezzen!  
*Fanni:* Van két tükörtengelye?  
*Laci:* Nincs.  
*Koppány:* Szomszédos oldalai egyenlők?  
*Laci:* Igen.  
*Tanító:* Arra a kérdésre mondhat igent Laci, hogy két-két szomszédos oldala egyenlő.

Ezek után kihajtottuk a táblát és mindenki ellenőrizhette, hogy az általa rajzolt síkidom megegyezik-e a táblán láthatóval.

Az utolsó kérdésnél szükség volt a szaknyelv pontosítására. A rendelkezésre álló információkból – szimmetrikus négyszög, amelynek nem mindegyik szöge derékszög és vannak egyenlő hosszú oldalai, de párhuzamosak nincsenek – most sem tudtak még következtetni a kitalálendő deltoidra, amelynek pontosan egy tükörtengelye van és két-két szomszédos oldala egyenlő. Az utolsó kérdésnél szükség volt a szaknyelv pontosítására.

A további játékok során mindig más-más tanuló vállalta a játékvezetést. Az elrejtett síkidomok között szerepelt kör, négyzet, általános paralelogramma, derékszögű háromszög, derékszögű trapéz.

A barkóba játék során azt kívánjuk észrevetetni a gyerekekkel, hogy a találgatások helyett célszerűbb a lehetőségek leszűkítésének stratégiáját alkalmazni. Meg kell győznünk őket arról, hogy ne féljenek kérdést feltenni, de ezen túlmenően arról is, hogy bizonyos kérdések hasznosabbak másoknál, illetőleg a jó kérdésre adott „nem” felelet ugyanolyan értékes, mint az „igen”, továbbá nincs értelme olyan kérdést feltenni, amire már tudják a választ.

## **2.7. AZ UTÓTESZT, KÉSLELTETETT TESZT FELADATAI ÉS ÉRTÉKELEŚÜK**

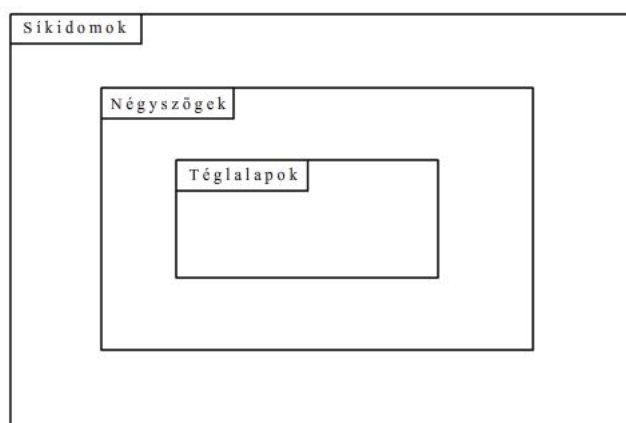
A fejlesztő tanítási kísérletet egy felmérő feladatlappal zártuk. A feladatlapot 2006-ban a kísérleti 4.c osztályban 25 fő töltötte ki. A 4.a osztályban 23, a 4.b osztályban 24 tanuló oldotta meg ugyanazokat a feladatokat. Az utóbbi két osztályban nem ugyanaz a szakvezető oktatta a matematikát. 2008-ban a kísérleti 4.b osztályban 19, a 4.a-ban 22, a 4.c-ben pedig 15 fő írta meg a záró felmérést. A 4.b és a 4.a osztályokban a kísérletben résztvevő tanítónő tanította a matematikát, a 4.c-ben egy másik.

A tanítási kísérlet után 3 hónappal – 2008. szeptember elején – került sor a kísérleti és a két párhuzamos osztályban a késleltetett tesztek megírására. 2006-ban sajnos ez elmaradt. Az utótesztek és a késleltetett tesztek megírása között eltelt 3 hónapban a tanulók – nyári szünidő lévén – matematikával egyáltalán nem foglalkoztak. A késleltetett teszttel a kísérleti osztályban azt igyekeztünk mérni, hogy a fejlesztő tanítás során szerzett ismeretek milyen mértékben maradtak meg, illetve rögzültek a gyerekekben. Ugyanakkor kíváncsiak voltunk ugyanebben a témában szerzett ismeretek tartósságára az iskola 4. osztályos tanmenete alapján haladó osztályokban is.

### 2.7.1. A négyzetre és téglalapra vonatkozó feladatok

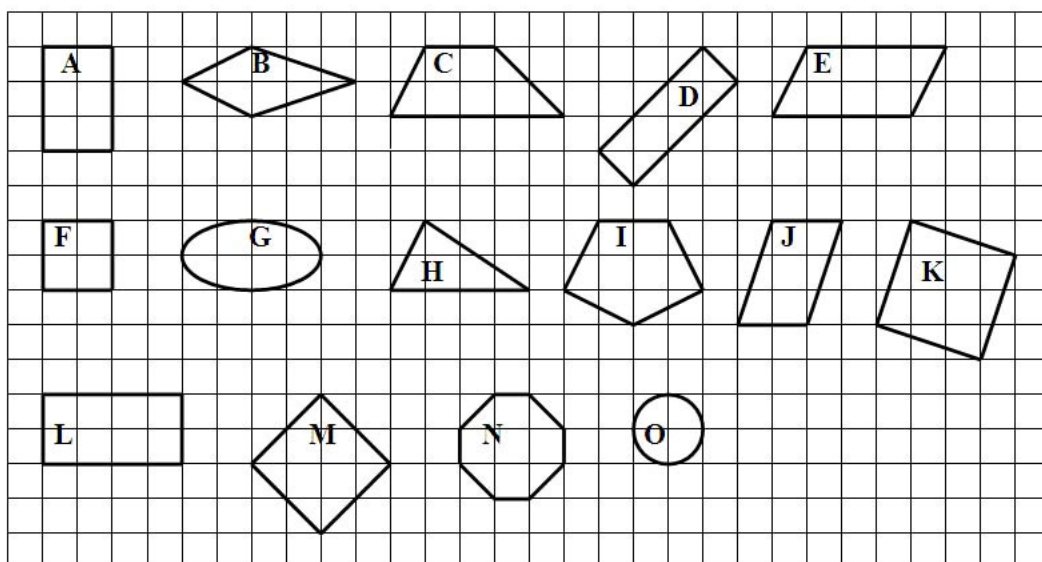
Az utóteszt – négyszög, téglalap, négyzet fogalmak azonosításával kapcsolatos – 1. feladatában 15 (2008-ban 16) síkidom (2.51. ábra) közül kellett kiválasztani

- a) a négyszögeket;
- b) a téglalapokat;
- c) a négyzeteket;
- d) és elhelyezni a síkidomok betűjelét az ábrán (2.50. ábra) a megfelelő helyre. (9. sz. melléklet, 1. feladat)



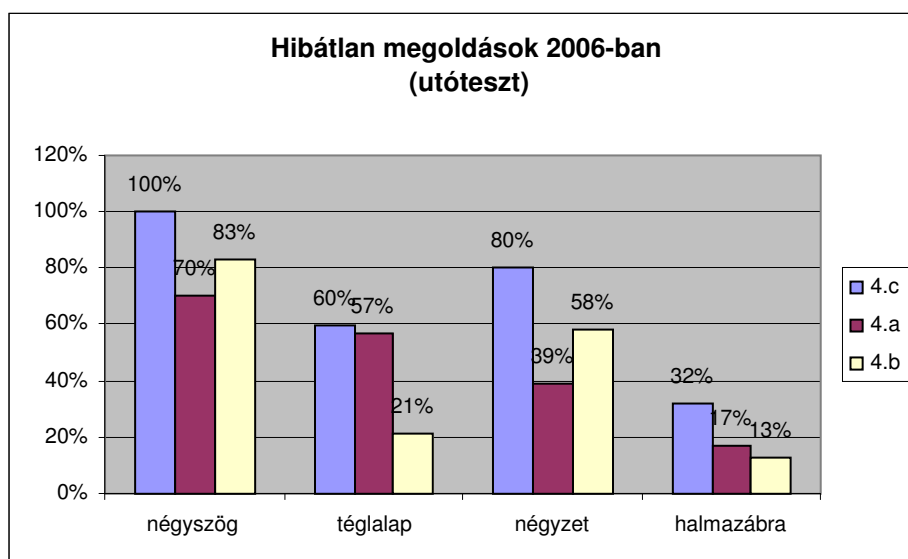
2.50. ábra

Ezt a halmazt kellett rendezniük 2006-ban:



2.51. ábra

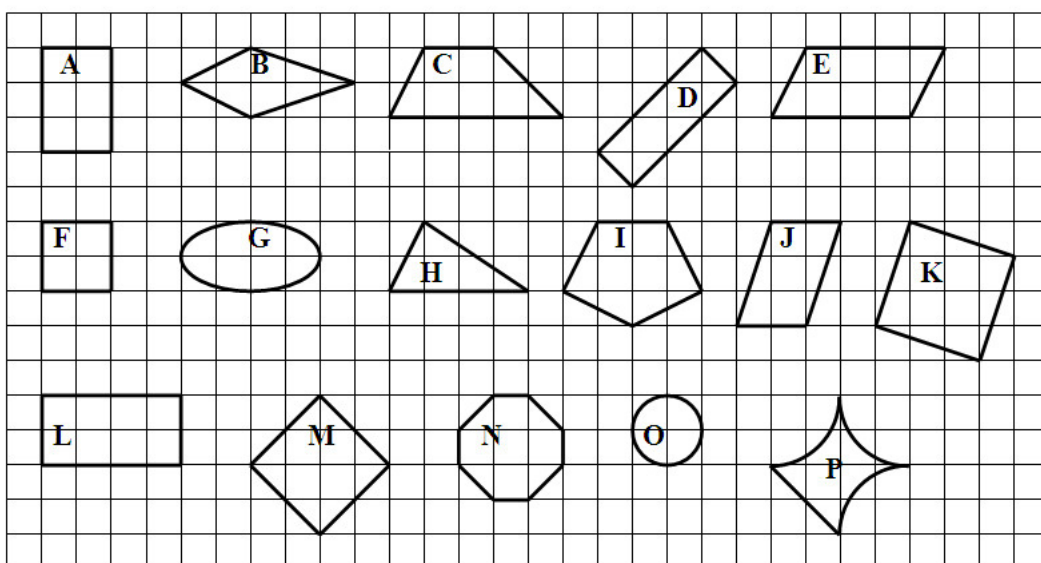
A feladat megoldásának eredményességét a következő ábra szemlélteti:



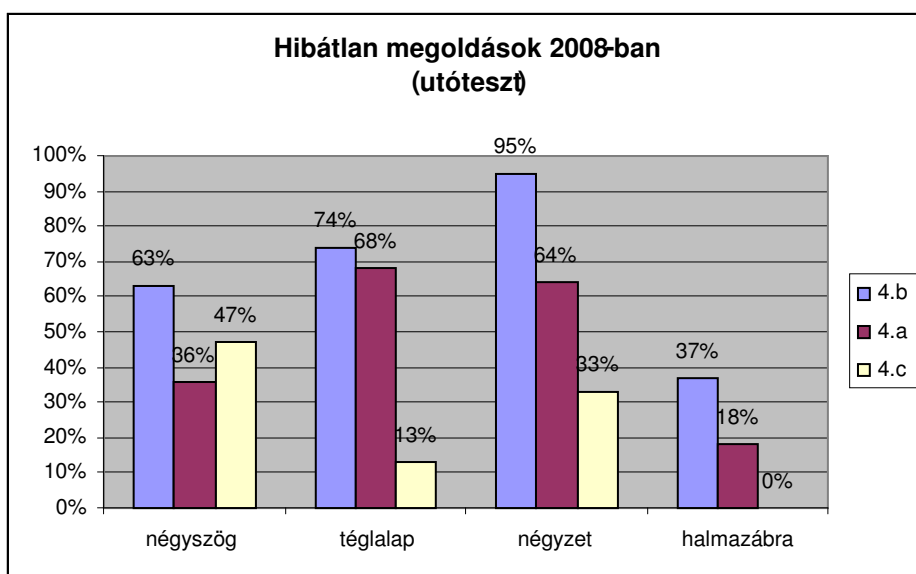
2.52. ábra

A négyyszögek felismerése a kísérleti osztályban hibátlan volt. Ugyanitt a tanulók 8%-a határozta meg helyesen a téglalapok betűjelét, 52%-a nem sorolta a négyzeteket a téglalapokhoz, de más hibája nem volt. Ez utóbbi megoldásokat is megfelelőnek tartottuk. A grafikonon látható 60%, a 8% és az 52% összegeként adódott. A kísérleti osztály tanulóinak 40%-a nem sorolta a négyzeteket a téglalapokhoz, az általános paralelogrammákat viszont igen. A korábbi 70%-hoz képest ugyan jelentős ez a javulás, de magasnak tartjuk ezt az arányt is. A gyerekek 90%-a változatlanul nem tartja téglalapnak a négyzetet. Szinte ugyanez az arány a kontroll csoportokban is. A négyzetek felismerésében is pozitív irányban történt változás. A gyerekek 80%-a (a korábbi 54%-kal szemben) helyesen sorolta fel a négyzeteket. A halmazábra kitöltése volt a legeredménytelenebb feladatrész. Megfelelőnek tartottuk itt is azoknak a megoldását, akik a négyzetek betűjelét nem írták a téglalaphoz, de más hibájuk nem volt. Gyakori hibának számított, hogy egy betűjelzést több helyre is írtak, így a kísérleti osztályban a tanulók 28%-a, a kontroll csoportokban 43%-a (4.a), illetve 58%-a (4.b).

2008-ban a tájékozó felméréshez hasonlóan változtatnunk kellett az utóteszt ezen feladatán. (10. sz. melléklet, 1. feladat) A megadott síkidomok halmazát kiegészítettük egy olyan alakzattal (P jelű), amelynek 4 csúcsa van, de görbe vonal is határolja. (2.53. ábra)



2.53. ábra



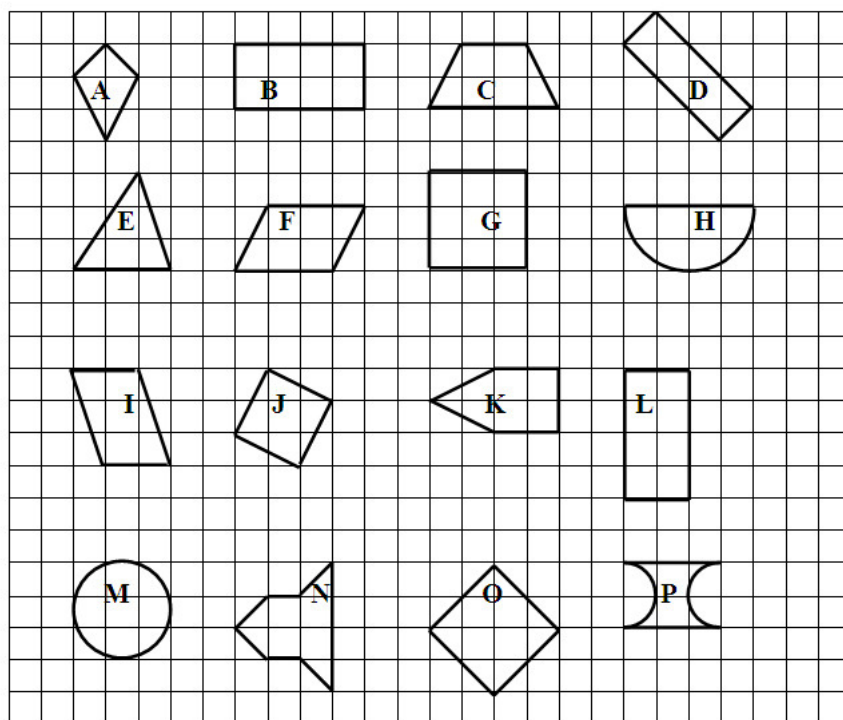
2.54. ábra

2008-ban (2.54. ábra) a négyszögek felismerése kevésbé volt sikeres a 2006-os eredményekhez képest. A kísérleti osztályban 5%-ról 63%-ra javult az arány a korábbi eredményeikhez képest, a kontroll csoportoknál is javulás tapasztalható. A kísérleti osztályban 1 tanuló (5%) sorolta a P jelű síkidomot helytelenül a négyszögekhez, a 4.a-ban 12 (55%), a 4.c-ben pedig 3 tanuló (20%). A téglalapok válogatásában jelentős javulás figyelhető meg a kísérleti 4.b-ben (11%-ról 74%-ra) és 4.a osztályban (30%-ról 68%-ra). A 4.c-ben visszaesés tapasztalható (24%-ról 13%-ra). A kísérleti osztályban a tájékozódó felmérés 78%-ához képest 21%-ra csökkent azoknak a tanulóknak az aránya, akik az általános paralelogrammákat a téglalapokhoz sorolták. A másik két osztályban 27%, illetve 87% ez az arány. 2008-ban igyekeztünk még nagyobb hangsúlyt fektetni a téglalap és az általános paralelogramma tulajdonságainak összehasonlítására, feltehetőleg ennek köszönhető a jobb eredmény. A gyerekek rendre 74%-a (4.b), 73%-a (4.a) és 93%-a (4.c) nem tartja téglalaprak a négyzetet. Ezek és a 2006-os adatok is alátámasztják

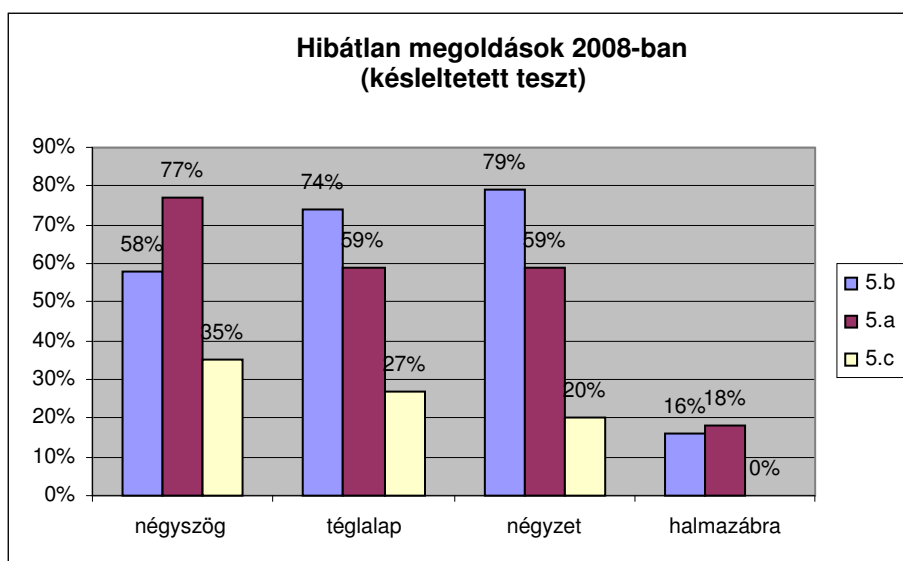
azt a hipotézist, miszerint a geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle 3. szintjére nem lehet átlépni az alsó tagozat végére, csak az első két szint megvalósítása reális. A négyszög, téglalap, négyzet hierarchiába ágyazott fogalmak. A négyzetek távolabbi felsőbb kategóriáját jelentik a négyszögek, mint a téglalapok. A gyerekek könnyebben megállapították a távolabbi kategóriát, hogy a négyzetek négyszögek is egyben, mint a közelebbit, hogy téglalapok.

2008-ban kimagasló teljesítményt értek el a négyzetek felismerésében a kísérleti osztály tanulói.

A késleltetett testben (11. sz. melléklet, 1. feladat) a következő síkidomok megadásával tűztük ki a feladatot (2.55. ábra):



2.55. ábra



2.56. ábra

A késleltetett teszt eredményei (2.56. ábra) – várakozásainknak megfelelően – többnyire valamivel visszaestek. A kísérleti osztályban a téglalapok felismerése ugyanolyan jól sikerült, mint az utótesztben. A kontroll csoportok egyikében (5.a) közel 10%-os csökkenés, a másikban pedig több mint 10%-os növekedés figyelhető meg. Feltűnő, hogy az 5.a-ban a négyszögek felsorolásában az eredmények több mint 40%-kal javultak. Míg az utótesztben a gyerekek 55%-a a P jelű síkidomot négyszögnek tartotta, addig a késleltetett tesztben 14%-ra csökkent ez az arány. Az utóbbi esetben – úgy tűnik – egyértelműbb volt a gyerekek számára, hogy nem négyszögről van szó. A halmazábra kitöltésénél a kísérleti osztályban az utótesztben senki nem írt egy betűjelzést több helyre, a késleltetett tesztben azonban a tanulók 42%-a. A másik két osztályban is növekedett ez az arány (18%-ról 36%-ra, illetve 53%-ról 87%-ra). A halmazábra kitöltése a nehezebb problémákhoz sorolható, főleg a többszörös osztályba sorolás. Sokak számára lehet, hogy túl absztrakt feladat ez 4. osztályban. Mivel ilyen jellegű feladatok szerepelnek 4. osztályos tankönyvekben, munkafüzetekben, ezért foglalkoztunk vele mi is. Úgy gondoljuk, hogy a halmazábrák kitöltését még többször kell megelőznie konkrét, manipulatív válogatásnak, nemcsak 4. osztályban, hanem felső tagozaton is. A kísérleti tanítások során a halmazábrák kitöltése előtt többnyire konkrét tevékenységgel végeztünk válogatást, miközben a felmerülő problémákat megbeszéltük. Úgy véljük, hogy ennek elhagyása – ahogy ezt az utóteszteknél is megfigyelhettük – a teljesítményeket jelentős mértékben csökkentette.

A felmérő feladatlapnak a négyzet és a téglalap tulajdonságaira vonatkozó feladatában (9. sz. melléklet, 5. feladat) a megadott állítások közül a gyerekeknek azokat kellett aláhúzniuk, amelyek igazak

a) a négyzetre:

*Szemközti oldalai párhuzamosak.*  
*Szemközti oldalai merőlegesek.*  
*Szomszédos oldalai párhuzamosak.*  
*Szomszédos oldalai merőlegesek.*  
*Mindegyik szöge derékszög.*  
*Nem mindegyik szöge derékszög.*  
*Pontosan két tükrötengelye van.*  
*4 tükrötengelye van.*  
*8 tükrötengelye van.*  
*Minden oldala egyenlő hosszúságú.*  
*Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.*

b) a téglalapra:

*Szemközti oldalai párhuzamosak.  
Szemközti oldalai merőlegesek.  
Szomszédos oldalai párhuzamosak.  
Szomszédos oldalai merőlegesek.  
Mindegyik szöge derékszög.  
Nem mindegyik szöge derékszög.  
4 tükkörtengelye van.  
Van 2 tükkörtengelye.  
Az átlók tükkörtengelyek.  
Minden oldala egyenlő hosszúságú.  
Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.*

A feladat megoldásának értékelésénél csak a hibátlan teljesítményeket emeljük ki. 2006-ban a kísérleti csoportban a négyzet tulajdonságaira vonatkozó valamennyi igaz állítást helyesen állapította meg a tanulók 52%-a, míg a kontroll csoportokban 35%-a, illetve 42%-a. A téglalap esetén ezek az értékek a következőképpen alakultak: a kísérleti csoportban 64%, a kontroll csoportokban 39%, illetve 58%. 2008-ban a kísérleti csoportban a négyzet esetén a hibátlan megoldások aránya 63%, a kontroll csoportokban 73%, illetve 40%. A téglalap tulajdonságainak megállapításánál a következő értékek születtek: a kísérleti csoportban 63%, a kontroll csoportokban 68%, illetve 33%.

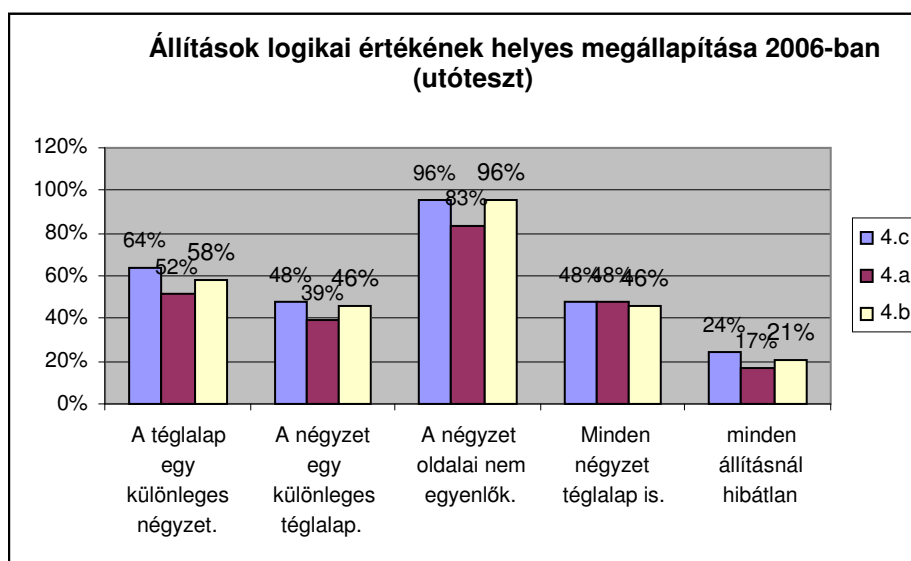
A hibák forrását egyrészt a szemközti, illetve szomszédos szavak – még mindig – nem megfelelő értelmezésében kell keresnünk, másrészt abban, hogy a párhuzamosság és a merőlegesség fogalma még nem elég stabil.

A késleltetett tesztben változatlanul ugyanígy szerepelt a feladat. A kísérleti osztályban a hibátlan teljesítmények aránya a négyzet esetén nem változott, a téglalap esetén viszont 5%-kal nőtt. Az utótesztben jobban teljesítő kontroll csoport tanulóinál mindegyik feladatrészben visszaestek a teljesítmények 59%-ra. Ebben az osztályban a tanító megkövetelte a gyerekektől korábban, hogy a tankönyvből tanulják meg a négyzetre és a téglalapra vonatkozó tulajdonságokat. A memóriájukra szeptemberben már nem hagyatkozhattak, csak a ténylegesen elsajátított ismereteikre. A gyengébb kontroll csoportnál 40%-ról 20%-ra, illetve 33%-ról 20%-ra romlottak az eredmények.

A felmérő feladatlap utolsó, 6. feladatában (9. sz. melléklet, 6. feladat) a következő állítások logikai értékét kellett eldönteni:

*A téglalap egy különleges négyzet.  
A négyzet egy különleges téglalap.  
A négyzet oldalai nem egyenlők.  
Minden négyzet téglalap is.*

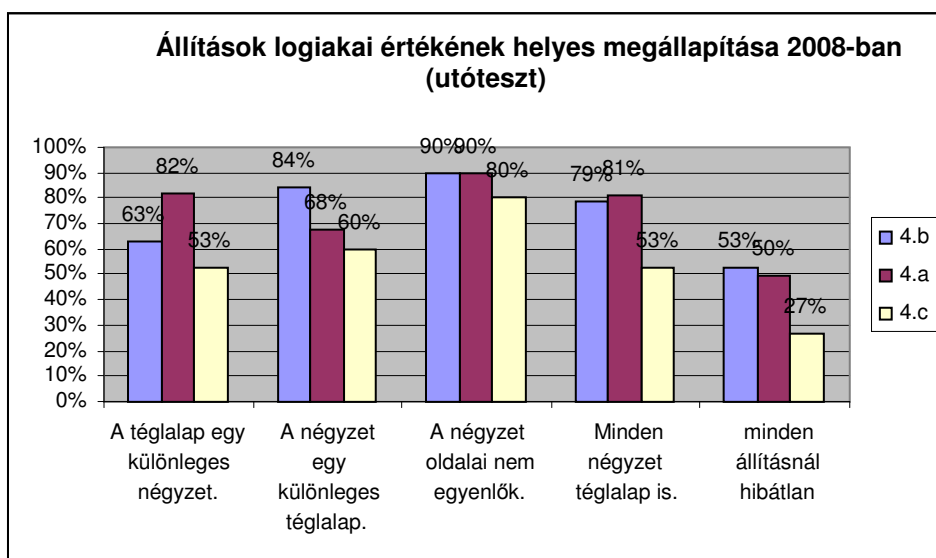
A feladat megoldásának értékelése 2006-ban (2.57. ábra):



2.57. ábra

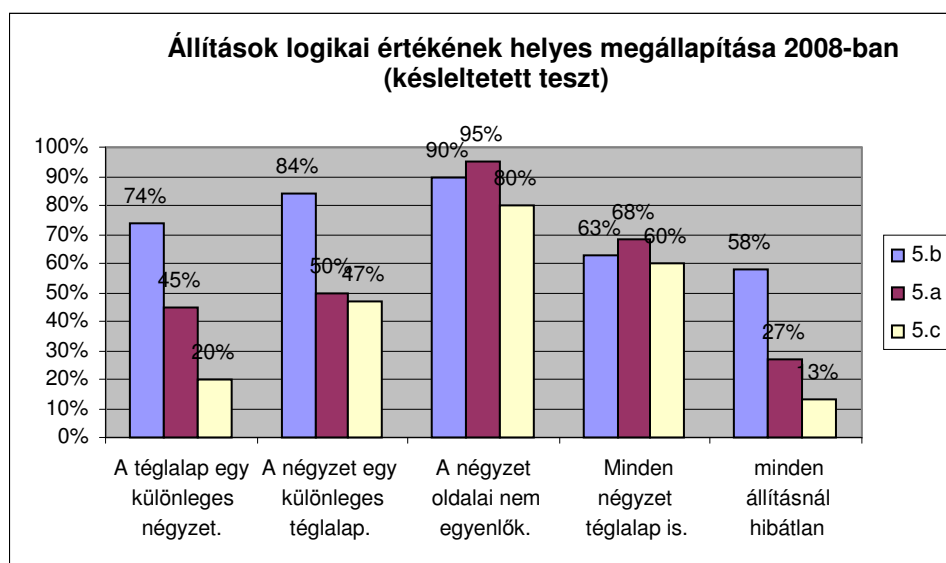
Ebben a feladatban a hibátlan megoldások száma mindegyik tanuló csoport esetén alacsony. Ezen nem lehet csodálkozni, hiszen a négy állítás közül három a négyzet és a téglalap közötti hierarchiára vonatkozott. Abban sem lehetünk biztosak, hogy azok a gyerekek, akik a második és a negyedik állítást is igaznak tartották, valóban tisztában vannak a négyzet és a téglalap között fennálló részalmaz viszonytal. Akik különböző logikai értékűnek tartották ezeket az állításokat (a kísérleti csoportban a tanulók 40%-a, a kontroll csoportokban 43%-a, illetve 46%-a), egymásnak ellentmondó döntéseket hoztak, ami a négyzet és téglalap fogalomsztályok közötti kapcsolat bizonytalan megítélésére utal. Azok pedig, akik mindkettőt hamisnak vélték (a tanulók 32%-a, 34%-a, 35%-a), valóban nem látnak semmilyen hierarchiát. Ezek az eredmények a hipotézisünket támasztják alá.

A feladat megoldásának értékelés 2008-ban (2.58. ábra):



2.58. ábra

Megállapítható, hogy 2008-ban jobb eredmények születtek. Ezeket érdemes összehasonlítani a késleltetett teszt eredményeivel. (2.59. ábra)



2.59. ábra

A kísérleti csoportban a hibátlan megoldások aránya – számunkra meglepő módon – nőtt 53%-ról 58%-ra. A kontroll csoportokban ugyanakkor jelentős visszaesés mutatkozott (50%-ról 27%-ra, illetve 27%-ról 13%-ra). A téglalap és a négyzet közötti hierarchiára vonatkozó három állítás mindegyikénél a kontroll csoportokban többnyire lényegesen rosszabb eredmények születtek a késleltetett teszt megírásakor, mint az utótesztnél. A bizonytalan tanulók aránya, akik a második és a negyedik állítást különböző logikai értékűnek állították, a kísérleti csoportban 16%-ról 32%-ra, az egyik kontroll csoportban 33%-ról 40%-ra emelkedett, míg a másikban 41%-ról 27%-ra csökkent. A mindkét állítást tagadók aránya a kísérleti osztályban (11%) és az egyik kontroll csoportban (27%) változatlan maradt, a másikban pedig 5%-ról 27%-ra nőtt.

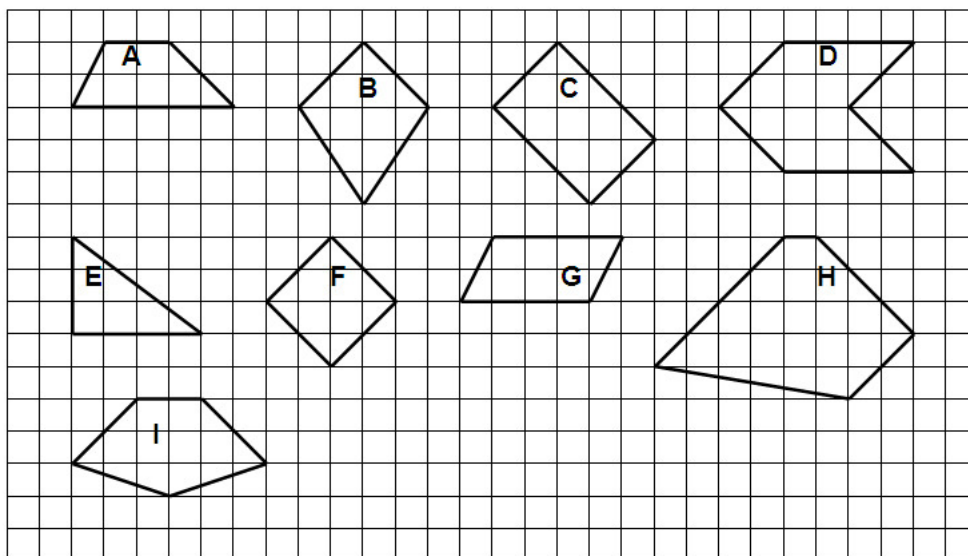
## 2.7.2. A párhuzamosságra és merőlegességre vonatkozó feladatok

A felmérő feladatlap 2. és 5. feladata (9. sz. melléklet, 2. feladat, 5. feladat) kapcsolatos a párhuzamosság, valamint a merőlegesség fogalomalakulásával. Az 5. feladat a párhuzamosságot, illetve a merőlegességet a négyzet és a téglalap tulajdonságainak vizsgálata révén érinti, ezzel az előző fejezetben foglalkoztunk.

A sokszögek párhuzamos és merőleges oldalpárjainak felismerésével kapcsolatos 2. feladatban 9 alakzatot (2.60. ábra) kellett vizsgálniuk, továbbá

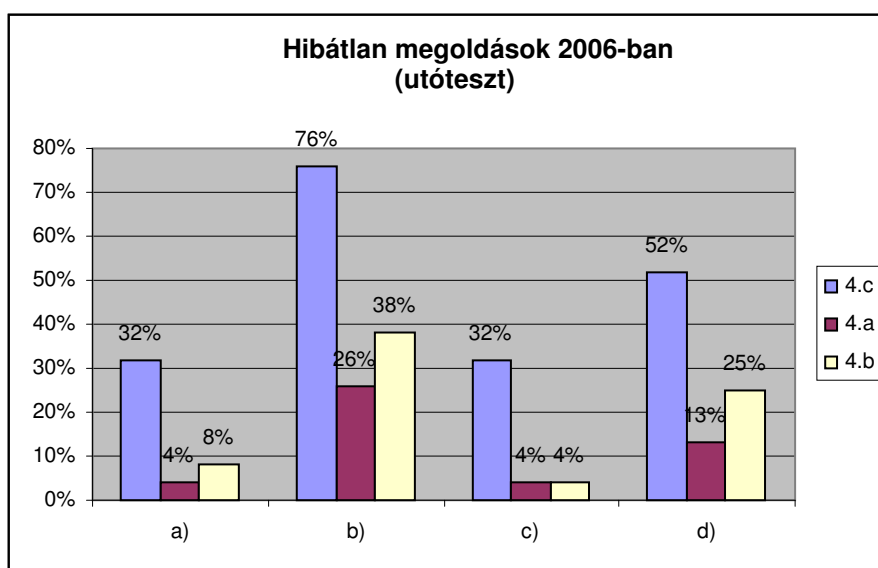
- kiszínezni azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat;
- kiszínezni pirossal a derékszögeket;
- felsorolni a betűjelét azoknak a síkidomoknak, amelyeknek vannak párhuzamos oldalai;
- felsorolni a betűjelét azoknak a síkidomoknak, amelyeknek vannak merőleges oldalai.

A vizsgálat tárgyai a következő sokszögek voltak:



2.60. ábra

A feladat megoldásának eredményességét 2006-ban a következő ábra szemlélteti:



2.61. ábra

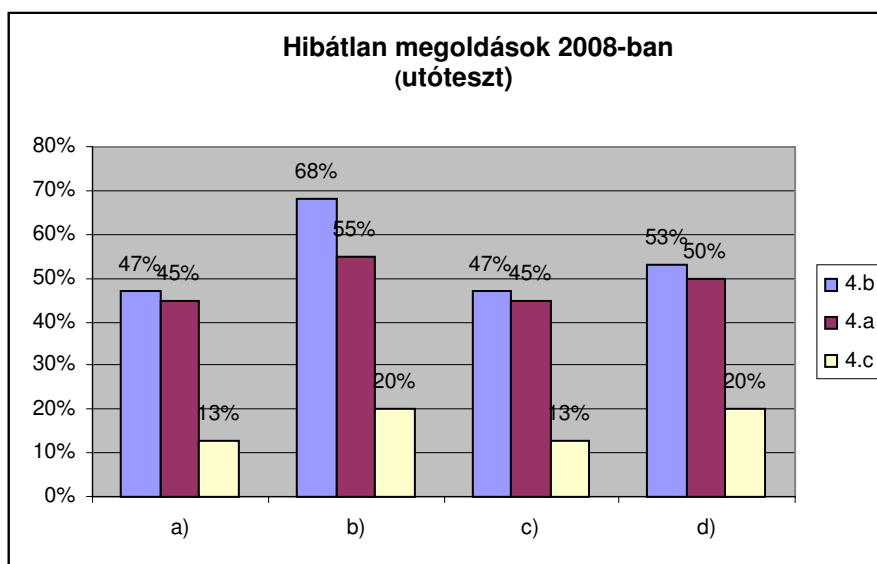
A kísérleti csoportban a derékszögek színezésénél született a legjobb teljesítmény. Ezzel a fogalommal már 3. osztályban találkoztak a gyerekek, majd ezt 4. osztályban továbbfejlesztettük. A fejlesztés sikerességét mutatja, hogy a tájékozódó felmérés 46%-ához képest a felmérő feladatlapban 76%-ra emelkedett azoknak a tanulóknak az aránya, akik hibátlanul jelölték a derékszögeket. A kontroll csoportokban mért teljesítmények jelentősen elmaradtak ettől (26%, illetve 38%). A párhuzamos, valamint a merőleges oldalpárok felismerésében is számottevő volt a különbség a kísérleti csoport és a kontroll csoportok között.

Az előforduló tipikus hibák a következők (2006-ban):

|                                                                             | 4.c<br>kísérleti | 4.a | 4.b |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| A B jelű deltoid szemközti oldalait párhuzamosnak találta.                  | 56%              | 22% | 54% |
| A D jelű hatszögnél a ferde helyzetű egyenesek párhuzamosságát nem jelölte. | 36%              | 43% | 33% |
| A H jelű ötszög párhuzamos egyenespárját nem vette észre.                   | 24%              | 91% | 79% |
| Az I jelű ötszögnél hibásan színezett párhuzamos oldalakat.                 | 12%              | 26% | 46% |
| A G jelű paralelogramma szögeit derékszögnek tekintette.                    | 0%               | 39% | 21% |
| A B jelű deltoidnál nem csak egy derékszöget talált.                        | 16%              | 57% | 46% |

A derékszögek színezése és a merőleges oldalakat tartalmazó síkidomok betűjeleinek felsorolása számos esetben egymásnak ellentmond, a kísérleti csoportban a gyerekek 32%-nál, a kontroll csoportokban 74%-nál, illetve 46%-nál. A felsorolt hibák azt jelzik, hogy a párhuzamosság és a merőlegesség fogalma még nem elég stabil, további fejlesztést igényel. A fejlesztő tanítás során a párhuzamosság és merőlegesség fogalomalakulását illetően a kezdő tennivalókat valósítottuk meg.

A feladat megoldásának értékelése 2008-ban (2.62. ábra):



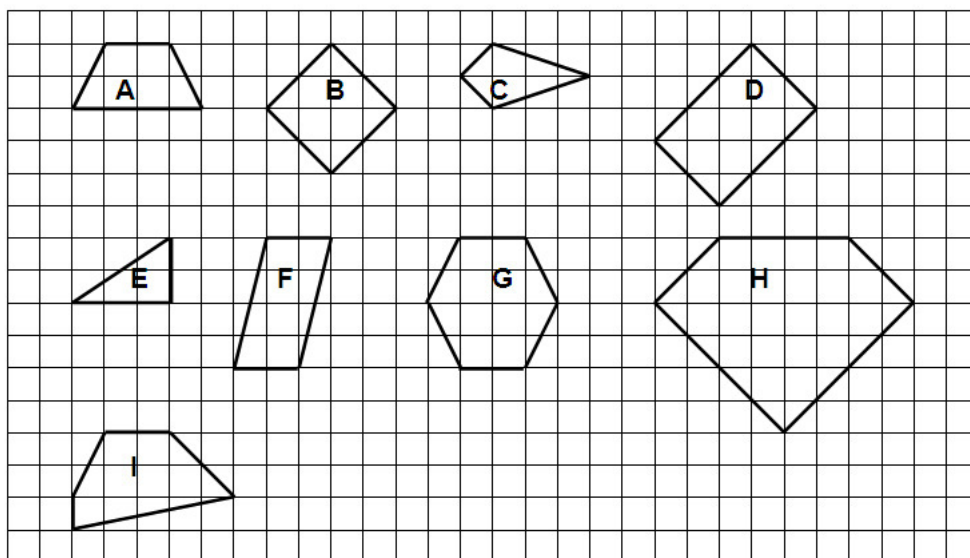
2.62. ábra

2008-ban is a derékszögek színezésénél születtek a legjobb eredmények. A kísérleti csoportban a derékszögek felismerésében a fejlődés nem olyan látványos, mint 2006-ban, ugyanis 63%-ról 68%-ra emelkedett azoknak a tanulóknak az aránya, akik hibátlanul jelölték a derékszögeket. A 4.a osztályban viszont a korábbi 61%-ról 55%-ra csökkent a gyerekek teljesítménye, ami részben a nehezebb feladatnak köszönhető, a többi feladatrésznél egy kicsivel maradt alul a kísérleti osztályéhoz képest, a másik kontroll csoporté viszont lényegesen elmaradt attól.

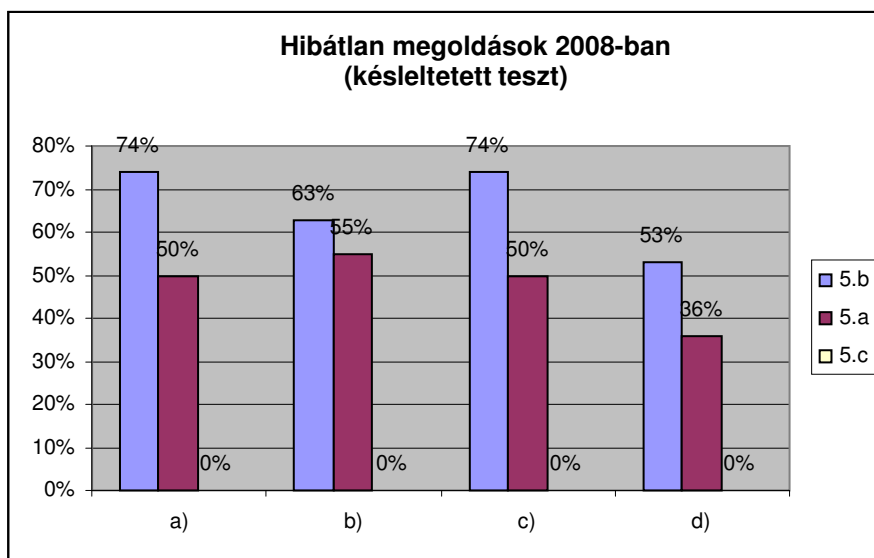
A jellemző hibák előfordulási aránya 2008-ban:

|                                                                             | 4.b<br>kísérleti | 4.a | 4.c |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| A B jelű deltoid szemközti oldalait párhuzamosnak találta.                  | 26%              | 9%  | 7%  |
| A D jelű hatszögnél a ferde helyzetű egyenesek párhuzamosságát nem jelölte. | 26%              | 23% | 60% |
| A H jelű ötszög párhuzamos egyenespárját nem vette észre.                   | 21%              | 16% | 73% |
| Az I jelű ötszögnél hibásan színezett párhuzamos oldalakat.                 | 11%              | 9%  | 7%  |
| A G jelű paralelogramma szögeit derékszögnek tekintette.                    | 0%               | 9%  | 20% |
| A B jelű deltoidnál nem csak egy derékszöget talált.                        | 11%              | 14% | 20% |

A késleltetett tesztben (11. sz. melléklet, 2. feladat) a következő sokszögek megadásával tűztük ki a feladatot (2.63. ábra):



2.63. ábra



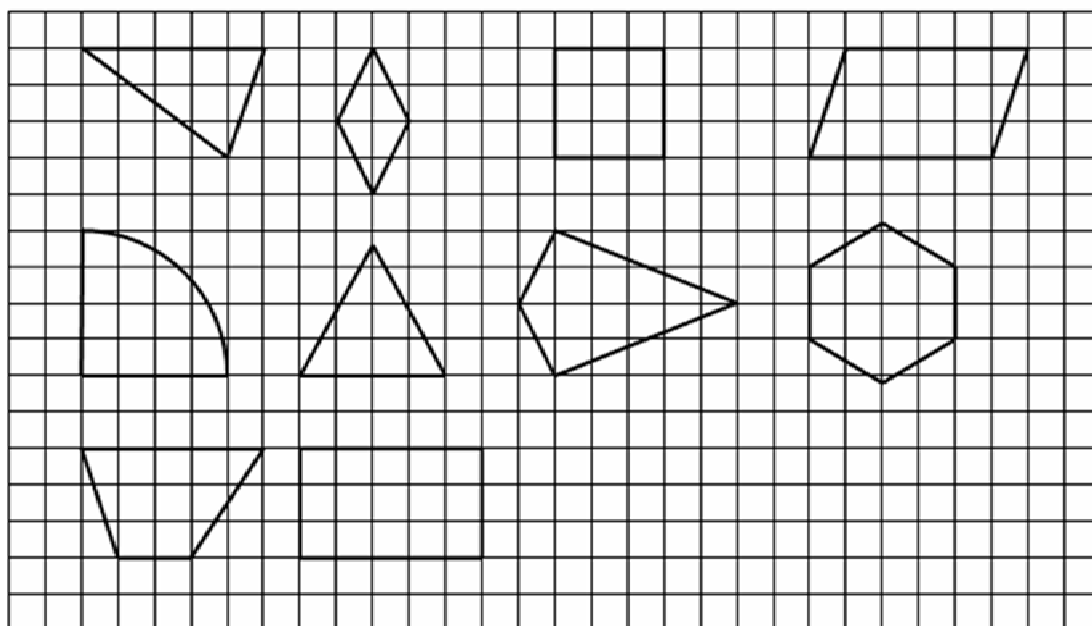
2.64. ábra

A kísérleti osztályban meglepő javulás tapasztalható a párhuzamosság felismerésében (47%-ról 74%-ra). A merőlegesség megállapításánál ugyanaz a teljesítmény mérhető (53%), mint az utótesztnél. Az egyik kontroll csoportnál (5.a) a párhuzamosság felismerésében kismértékű javulás (45%-ról 50%-ra) figyelhető meg, a merőlegesség megállapításánál azonban visszaesés (50%-ról 36%-ra), a másiknál (5.c) egyáltalán nem született hibátlan megoldás egyik feladatrészben sem. A késleltetett teszt eredményei alapján megállapíthatjuk, hogy a fejlesztő tanítási kísérlet során elsajátított ismeretek tartósabbnak bizonyultak.

### 2.7.3. A tengelyes szimmetriával kapcsolatos feladatok

A felmérő feladatlap 3. feladatában (9. sz. melléklet, 3. feladat) – ugyanúgy, mint a tájékoztató felmérésnél – a gyerekeknek azt kellett eldönteniük, hogy a megadott síkidomok (2.65. ábra) közül melyek tükrösek és egyidejűleg pirossal jelölniük a tükörtengelyek helyét.

A következő síkidomokat vizsgálták 2006-ban:



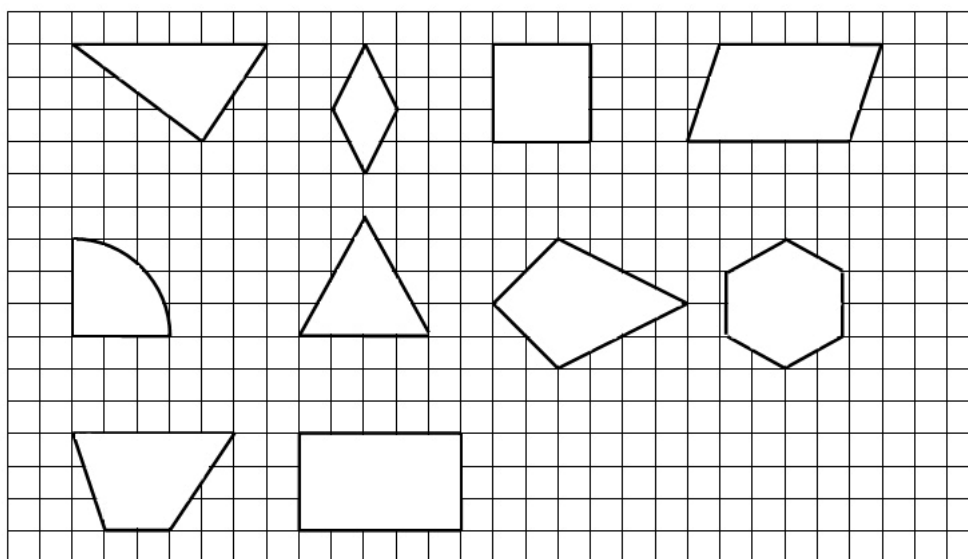
2.65. ábra

A 3. feladat megoldásának eredményességét a következő táblázat szemlélteti, 2006-ban:

|                                                                              | 4.c<br>kísérleti | 4.a  | 4.b |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------|------|-----|
| Hibátlan megoldást adott.                                                    | 8%               | 0%   | 0%  |
| 1 síkidomnál hibázott.                                                       | 16%              | 0%   | 0%  |
| Az egyenlő szárú háromszögnél nem jelölte a tükrötengelyt.                   | 68%              | 96%  | 54% |
| A négyzetnél 2 vagy annál kevesebb szimmetriatengelyt rajzolt.               | 8%               | 30%  | 25% |
| Az általános rombusznál csak 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem húzott meg. | 0%               | 22%  | 4%  |
| Az általános paralelogrammánál rajzolt tükrötengelyt.                        | 0%               | 0%   | 0%  |
| Az egyenlő oldalú háromszögnél 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem jelölt.   | 68%              | 100% | 88% |
| A negyed körlapnál nem rajzolt tükrötengelyt.                                | 44%              | 52%  | 29% |
| A szabályos hatszögnél nem találta meg az összes tükrötengelyt.              | 80%              | 96%  | 92% |
| A téglalapnál az átlókat is szimmetriatengelynek tartotta.                   | 0%               | 0%   | 4%  |

Ebben a feladatban növeltük a „zajszintet” a tájékozódó felmérés hasonló feladatához képest. A gyerekeknek jóval több szimmetriatengelyt kellett berajzolniuk, így még nagyobb figyelmet igényelt tőlük a feladat végrehajtása. Sokan hibáztak az egyenlő szárú háromszögnél, amelynek oka az lehetett, hogy a háromszög egyik szára nem esett rácsvonalra, emiatt nem tudták megállapítani, hogy ez ugyanolyan hosszú, mint a rácsvonalra illeszkedő szár. A szabályos háromszögnél, illetőleg a szabályos hatszögnél tipikus hiba volt, hogy bár az alakzatok tükrösségét észrevették, de nem találták meg az összes szimmetriatengelyt. Fontos eredménynek tartjuk, hogy a kísérleti csoportban az általános paralelogrammánál és a téglalapról mindenki hibátlanul dolgozott. A négyzet vizsgálatánál is csak 2 gyerek (8%) nem tudta berajzolni mind a 4 tükrötengelyt. A kontroll csoportokban ez az arány valamivel magasabb (30%, 25%) volt.

A 2008-as feladatlapon (10. sz. melléklet, 3. feladat) a síkidomokon belül nem láthatók a négyzetrácsok. Úgy gondoltuk, hogy ezáltal jobban segítjük a szimmetria felismerését. Még annyit változtattunk, hogy az első háromszög helyett egy általános háromszöget rajzoltunk. (2.66. ábra)



2.66. ábra

A 3. feladat megoldásának értékelése 2008-ban:

|                                                                              | 4.b<br>kísérleti | 4.a | 4.c  |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|------|
| Hibátlan megoldást adott.                                                    | 47%              | 9%  | 0%   |
| 1 síkidomnál hibázott.                                                       | 32%              | 27% | 20%  |
| A négyzetnél 2 vagy annál kevesebb szimmetriatengelyt rajzolt.               | 0%               | 27% | 27%  |
| Az általános rombusznál csak 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem húzott meg. | 0%               | 9%  | 13%  |
| Az általános paralelogrammánál rajzolt tükrötengelyt.                        | 0%               | 5%  | 20%  |
| Az egyenlő oldalú háromszögnél 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem jelölt.   | 37%              | 86% | 100% |
| A negyed körlapnál nem rajzolt tükrötengelyt.                                | 11%              | 27% | 60%  |
| A szabályos hatszögnél nem találta meg az összes tükrötengelyt.              | 37%              | 59% | 73%  |
| A téglalapnál az átlókat is szimmetriatengelynek tartotta.                   | 0%               | 5%  | 7%   |

2008-ban a kísérleti csoportban lényegesen jobb eredményeket kaptunk a 2006-oshoz képest. Fontos előrelépésnek tartjuk, hogy a kísérleti csoportban a négyzetnél, az általános rombusznál, a paralelogrammánál és a téglalapnál mindenki hibátlanul dolgozott. A kontroll csoportokban ugyanakkor változó mértékben, de mindig hibáztak ezeknél az eseteknél. Nemcsak a záró felmérésben láthatunk jobb eredményeket a kísérleti csoportnál a kontroll csoportokhoz képest, hanem a késleltetett teszt eredményei is ezt mutatják.

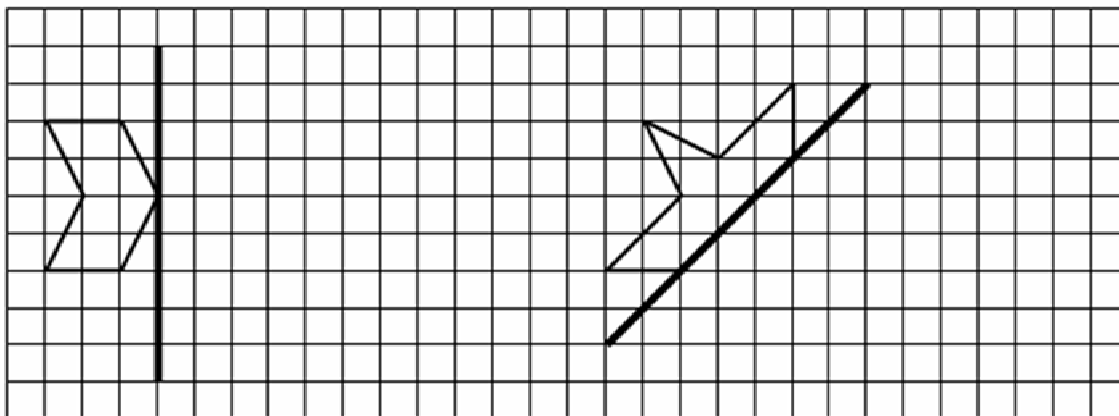
A késleltetett tesztben változatlanul szerepelt a feladat. (11. sz. melléklet, 3. feladat)

A késleltetett teszt eredményei 2008-ban:

|                                                                              | 5.b<br>kísérleti | 5.a | 5.c |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------|-----|-----|
| Hibátlan megoldást adott.                                                    | 37%              | 5%  | 0%  |
| 1 síkidomnál hibázott.                                                       | 32%              | 32% | 7%  |
| A négyzetnél 2 vagy annál kevesebb szimmetriatengelyt rajzolt.               | 16%              | 27% | 33% |
| Az általános rombusznál csak 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem húzott meg. | 5%               | 9%  | 7%  |
| Az általános paralelogrammánál rajzolt tükrötengelyt.                        | 5%               | 14% | 20% |
| Az egyenlő oldalú háromszögnél 1 szimmetriatengelyt vagy egyet sem jelölt.   | 11%              | 82% | 93% |
| A negyed körlapnál nem rajzolt tükrötengelyt.                                | 11%              | 14% | 60% |
| A szabályos hatszögnél nem találta meg az összes tükrötengelyt.              | 42%              | 50% | 87% |
| A téglalapnál az átlókat is szimmetriatengelynek tartotta.                   | 0%               | 5%  | 20% |

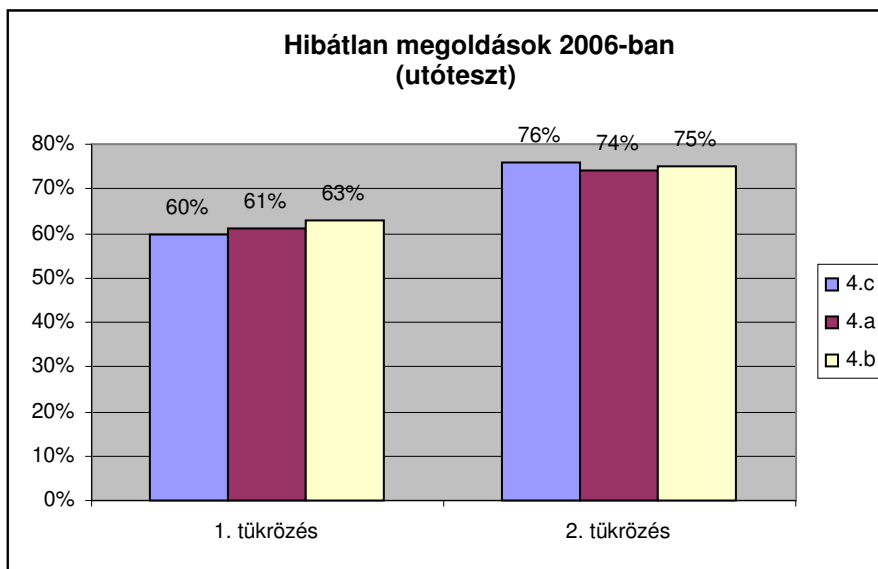
A kísérleti csoport eredményei – várakozásainknak megfelelően – kismértékben visszaestek.

A felmérő feladatlap 4. feladatában (9. sz. melléklet, 4. feladat) a gyerekeknek négyzethálóra rajzolt két alakzatot kellett megadott tengelyekre tükrözniük (2.67. ábra):



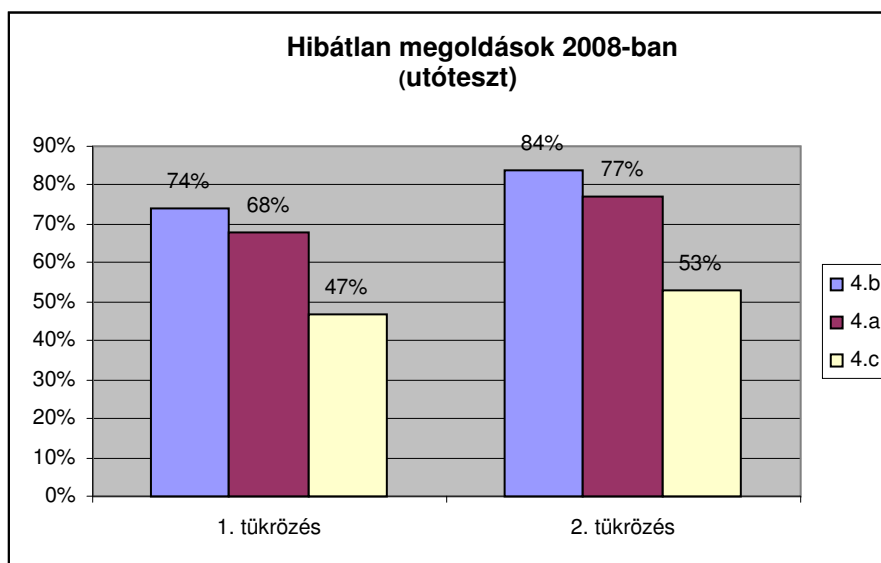
2.67. ábra

A feladat megoldásának eredményességét a következő grafikon szemlélteti, 2006-ban (2.68. ábra):



2.68. ábra

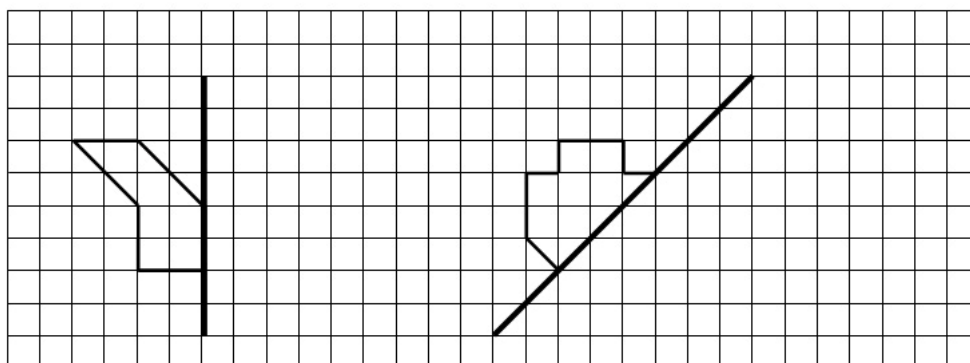
Ugyanez 2008-ban (2.69. ábra):



2.69. ábra

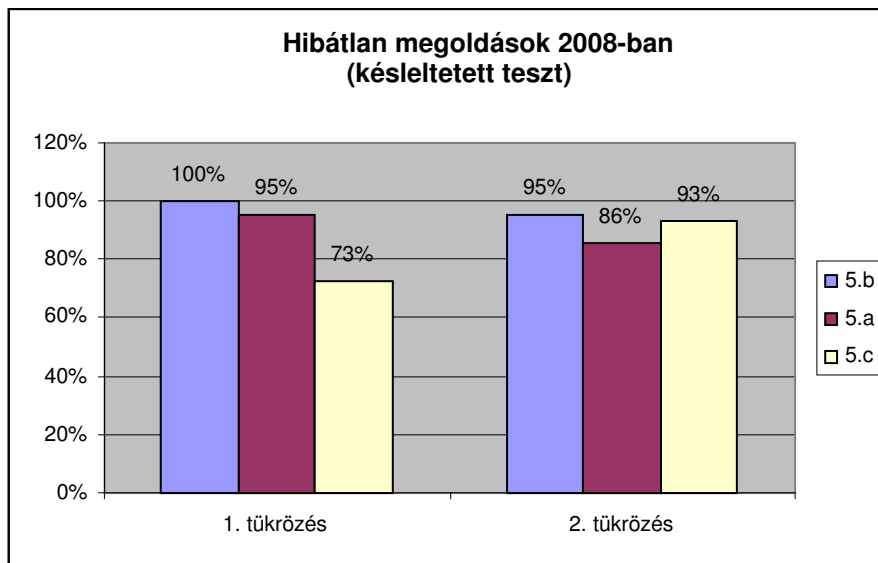
Ha összevetjük a kísérleti csoport ezen eredményeit a tájékoztató felmérés eredményeivel, pozitív irányú változást figyelhetünk meg (68%-ról 74%-ra, illetve 74%-ról 84%-ra).

A késleltetett teszt hasonló feladatában (11. sz. melléklet, 4. feladat) a következő két alakzatot kellett tükrözniük (2. 70. ábra):



2.70. ábra

Mindegyik osztályban jobb eredmények születtek (2.71. ábra), mint korábban. Valószínűleg könnyebb volt a feladat végrehajtása, mint a záró felmérésben.



*2.71. ábra*

A két feladat során előforduló hibák azt mutatják, hogy a szimmetria fogalma még nem elég stabil. A fejlesztő tanítás során nagy lépést tettünk ugyan előre, de a fogalom még további fejlesztést igényel.

### 3. KONKLÚZIÓ, TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Kutatásunk során a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alakulását vizsgáltuk. Elsősorban azt, hogy az alsó tagozat végére milyen szintre fejlődtek a fogalmak, milyen ismereteket sajátítottak el a negyedik osztályos gyerekek ezekkel a fogalmakkal kapcsolatban. A kutatás részeként 2006-ban és 2008-ban tanítási kísérletet hajtottunk végre negyedik osztályban, melynek során a rendelkezésünkre álló tanórák keretében, a gyerekek életkori sajátosságainak megfelelően a vizsgált fogalmakat – a jellemző tulajdonságain, illetve a legjobb példáin, prototípusain keresztül – igyekeztünk alaposan bemutatni.

A tanítási kísérlet célja – a fejlesztés mellett – a gyermeki gondolkodás jellemzőinek, jellegzetességeinek feltárása, ezáltal a *van Hiele*-féle fejlődési szintek realitásának igazolása a magyar alsó tagozatos geometria oktatásában.

Kutatásunkban a következő kérdésekre kerestük a választ:

- *A geometriai gondolkodás van Hiele-féle szintjei hogyan realizálódnak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában?*
- *Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek milyen hatékonysággal járulnak hozzá a vizsgált fogalmak fejlődéséhez?*

Úgy gondoljuk, hogy a kísérletező által irányított fejlesztő tanítás hatékonyan járult hozzá a téglalap és a négyzet fogalmának elmélyüléséhez, a párhuzamosság és a merőlegesség, valamint a szimmetria fogalmak alakulásához. A tájékozódó felmérések és a záró feladatlapok eredményeinek összehasonlítása is ezt igazolta. A hatékonyságot támasztja alá az a tény is, hogy mind 2006-ban, mind 2008-ban a párhuzamos osztályokban tapasztalt eredményekhez képest általában jobb, esetenként lényegesen jobb eredmények születtek a kísérleti csoportokban. A szimmetria fogalom vonatkozásában ugyanakkor megállapítható az is, hogy a 2008-as kísérlet során a hatékonyság jelentős mértékben nőtt. A 2008-as tájékozódó felmérés és záró feladatlap erre vonatkozó eredményeinek összehasonlítása – a 2006-oshoz viszonyítva – nagyobb fejlődést mutat. Ennek – álláspontunk szerint – az az indoka, hogy a korábbi tanítás tapasztalatai alapján részletesebben, elmélyültebben dolgoztuk fel a szimmetriával kapcsolatos feladatokat.

Megállapításaink csak a vizsgált – nem reprezentatív – mintákra vonatkoznak, ezért – a szignifikancia vizsgálatához szükséges – statisztikai próbákat nem végeztünk.

A kutatási kérdésekhez kapcsolódó hipotézisek beigazolódtak, miszerint:

- *A geometriai gondolkodás van Hiele-féle szintjei közül az első kettő, a globális felismerés szakasza, illetve az elemzés szakasza reális a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában.*
- *Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben járulnak hozzá a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.*

A mért adataink, az ismertetett interjúk és a játékok igazolják azt a hipotézist, miszerint a geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle 3. szintjére nem lehet átlépni az alsó tagozat végére, csak az első két szint megvalósítása reális. Kísérletünkben próbáltuk feszegetni a 2. és 3. szint közötti határokat (pl. azzal, hogy a négyzet egy különleges téglalap; vagy a többszörös osztályba sorolásokkal), de próbálkozásaink a tanulók döntő többsége számára hiábavalónak mutatkoztak.

A 2. szintet elérő tanulók az alakzatokat részeire bontják, majd összerakják. Az alakzatok alkotórészeit megkülönböztetik egymástól, közöttük kapcsolatot fedeznek fel. A tanítási kísérlet során a gyerekek a téglatestet (gyufásdobozt), a kockát kiterítették, a kiterített hálóról bizonyos lapokat levágtak. Megnevezték a téglatest, kocka, ötszög alapú hasáb, négyzet alapú gúla határoló lapjait. Megbeszéltük, hogy a szomszédos lapok élben találkoznak, az élek találkozásánál a csúcsok találhatók. Vizsgáltuk a különböző síkidomok határoló vonalait. Már az 1. szinten könnyen felismerik a tanulók a különböző alakzatokat a formájuk alapján, és gyorsan megtanulják a nevüket. A tanórákon tapasztaltuk, hogy milyen fogékonyak a különböző négyszögek neveinek elsajátítására (trapéz, paralelogramma, rombusz, deltoid). Ugyanakkor az is megállapítható, hogy a téglalapot és a négyzetet, a rombuszt és a négyzetet, a paralelogrammát és a rombuszt, a paralelogrammát és a téglalapot, a deltoidot és a rombuszt teljesen különböző dolgokként kezelik. Nem fedezik fel a négyzetben a téglalapot, illetőleg a rombuszt, vagy a rombuszban a paralelogrammát, illetve a deltoidot. Az utóteszték eredményei is azt mutatták, hogy a negyedik osztályos tanulók többsége számára a négyzet nem téglalap.

Konkrét tevékenységek – mint a mérés, hajtogatás, nyírás, modellezés, tükörhasználat stb. – segítségével megállapítják az alakzatok tulajdonságait, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismerik fel a 2. szinten. Nem látnak összefüggéseket az alakzatok tulajdonságai és az alakzatok között. Észrevették például, hogy a téglalaphoz és az általános paralelogrammához is 4 csúcsa, 4 oldala van, a szemközti oldaluk páronként egyenlők, valamint párhuzamosak egymással, de nem jutottak el arra a megállapításra, hogy a téglalap paralelogramma, vagy ehhez hasonlóan azt sem ismerték fel, hogy a négyzet téglalap, a kocka téglatest.

A barkóba játék során többször megfigyelhettük, hogy a gyerekek nem tudnak következtetni az alakzatok egyik tulajdonságáról a másikra. Így például a téglalap kitalálásakor elhangzott az a kérdés, hogy „van derékszöge?“, majd az „igen“ válasz után később – feleslegesen – az, hogy vannak-e merőleges oldalai. Egy másik játék során a kitalálandó négyszög szemközti oldalainak párhuzamosságából nem következett számukra a szemközti oldalak egyenlősége.

A felsoroltak mind azt támasztják alá, hogy a negyedik osztályos tanulók legfeljebb a *van Hiele*-féle 2. szintet tudják elérni.

A 6-10 éves tanulók gondolkodása erősen kötődik a tárgyi valósághoz, ezért a fogalmak kialakításakor a legkonkrétabb dologtól kiindulva – manuális tevékenységgel, illetve az őket körülvevő közvetlen világból vett példákkal – indokolt eljuttatni őket az elvontig. Sok példa, ellenpélda tanulmányozása, a fogalom többszörös konkretizálása, modellezése a feltétele annak, hogy a gyerekek felismerjék a kialakítandó fogalom lényeges jegyeit, majd képesek legyenek az absztrahálásra. Tanítási kísérletünkben ezért arra törekedtünk, hogy a tanulók sok konkrét tevékenység segítségével a téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség, illetve szimmetria fogalmával kapcsolatban gazdag tapasztalatokra tegyenek szert, fogalomképzetük sokoldalú legyen. Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben hozzájárultak a négyzet, téglalap,

párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez. Ennek megvalósulását támasztják alá – az óravezetést végző – szakvezetői vélemények: „Kiemelném a tanulók sokféle, változatos tevékenységeit – mint a nyírás, átdarabolás, összeillesztés, hajtogatás, tükör használata, ragasztás – , a használt eszközök sokféleségét: gyufásdobozok, gyufaszálak, hurkapálcikák, különböző síklapok, testek, modellek, a gyerekek kezeik, a körülöttük lévő tárgyak. Ezeknek a tevékenységeknek és eszközöknek köszönhetően az ismeretek könnyebben épülnek be a már meglévő ismereteikbe.” (Bakos Barbara, 2006)

„Az órákon a tanulók az ismereteket tapasztalati úton szerezték meg, akik minden órán felszabadultan, örömmel tevékenykedtek. Gondolataikat, megfigyeléseiket, észrevételeiket szívesen elmondták, viták is kialakultak.” (Bagóczy Zsuzsanna, 2008)

Ma is aktuálisak Pólya György nézetei: „Nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni.” (Pólya, 2000)

További kutatási lehetőségként a kísérleti tanítás kiterjesztését látjuk 5-6. osztályra, majd 7-8. osztályra. A kutatás tárgyát képezheti a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, valamint a szimmetria fogalmak további fejlődésének vizsgálata, illetőleg a *van Hiele*-féle 3. szintre eljutó tanulók gondolkodási jellegzetességeinek, jellemzőinek bemutatása.

Érdekes téma lehet a nyelvi problémák vizsgálata, a szavak tudományos és köznapi értelmezése (pl. szomszédos), továbbá az, hogy milyen nyelvi, szövegértési problémák állnak a háttérben, amelyek akadályozzák a megfelelő fogalmi fejlődést.

## IRODALOMJEGYZÉK

1. Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995, 35-40, 40-49, 66-72, 157-158.
2. Ambrus András: Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásban, <http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambus/tendenc.pdf>, 2002, 7-9.
3. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Ildikó – Szabados Anikó: Sokszínű matematika 3. Mozaik Kiadó, Szeged, 2005.
4. Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Ildikó – Szabados Anikó: Sokszínű matematika 4. Mozaik Kiadó, Szeged, 2006, 71.
5. Bruner, Jerome S.: Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat Budapest, 1974.
6. Caspary, R.: Lernen und Gehirn. Herder spectrum, Freiburg, 2006, 142-154.
7. C. Neményi Eszter – Sz. Oravecz Márta: Matematika munkafüzet 2. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2008, 97.
8. C. Neményi Eszter – Sz. Oravecz Márta: Útjelző a 2. osztályos matematika tanításához. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994, 147.
9. C. Neményi Eszter – Wéber Anikó: Matematika tankönyv általános iskola 3. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
10. C. Neményi Eszter – Káldi Éva: Matematika tankönyv általános iskola 4. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.
11. Czeglédy István – Orosz Gyuláné – Szalontai Tibor – Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I., Calibra Kiadó, Budapest, 1994.
12. Dávid Lajos: A két Bolyai élete és munkássága. Gondolat, Budapest, 1979, 94.
13. Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát. Gondolat, Budapest, 1973, 44, 66.
14. Eysenk, Michael W. – Keane, Mark T.: Kognitív pszichológia, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2003, 268-287.
15. Falus Iván (szerk.): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000.
16. Hajós György: Bevezetés a geometriába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
17. Holt, John: Iskolai kudarcok. Gondolat, Budapest, 1991, 99.
18. Klein Sándor: A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 29-48.
19. Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok. Gondolat, Budapest, 1981.
20. Majoros Mária: Oktassunk vagy buktassunk? Calibra Kiadó, Budapest, 1992.
21. Nahalka István: A tanulás. In: Falus Iván (szerk.): Didaktika. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998, 117-153.
22. Peller József: A matematikai ismeretszerzési folyamatról. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003, 39-41.
23. Peller József: A matematikai ismeretszerzés gyökerei. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
24. Piaget, Jean: Az értelem pszichológiája. Kairosz Kiadó, 1997, 167-215.
25. Piaget, Jean: Válogatott tanulmányok. Gondolat, Budapest, 1970, 66-75.
26. Piaget, Jean – Inhelder, Bärbel: Gyermelekélektan, Osiris, Budapest, 1999.
27. Piskalo, A. M.: Geometria az 1-4. osztályban. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977, 9-13.
28. Pólya György: A gondolkodás iskolája. Akkord Kiadó, Budapest, 2000, 17, 197.

29. Pólya György: A problémamegoldás iskolája II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, 78, 113-115.
30. Rakos Katalin: A mi matekunk 3. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, 149.
31. Rakos Katalin: A mi matekunk 4. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.
32. Revuz, André: Modern matematika – élő matematika. Gondolat, Budapest, 1973, 24-25.
33. Scherlein Márta – Czakó Anita – dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné: Matematika 3. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2005, 94.
34. Scherlein Márta – Czakó Anita – dr. Hajdu Sándor – Novák Lászlóné: Matematika 4. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2005.
35. Skemp, Richard R.: A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, Budapest, 1975, 20-69.
36. Skemp, Richard R.: Relational understanding and insrumental understanding. Arithmetic Teacher, 26 (3), 1978, 9-15.
37. Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005, 319, 401.
38. Szilágyiné Szinger Ibolya: The Development of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics Teaching (The square and the rectangle), Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, 6(2008)1, 153-171.
39. Szilágyiné Szinger Ibolya: The Evolvment of Geometrical Concepts in Lower Primary Mathematics (Paralell and Perpendicular), Annales Mathematicae et Informaticae, 35 (2008), 173-188.
40. Szilágyiné Szinger Ibolya: Developmental Teaching Experiment in the Field of Geometry, Creative Mathematics and Informatics, North University of Baia Mare, Romania, 17 (2008), No.2, 115-129.
41. Szilágyiné Szinger Ibolya: A párhuzamosság és merőlegesség fogalma 10-11 éves korban, XI. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia Tanulmányok, Győr, 2007, 391-399.
42. Szilágyiné Szinger Ibolya: Síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata 4. osztályban, XII. Apáczai Napok Nemzetközi Tudományos Konferencia Tanulmányok, Győr, 2008, 186-191.
43. Tall, David: The Mathematical Growth. <http://davidtall.com>, 2004.
44. Tall, D. – Vinner, S.: Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 1981, 151-169.
45. Teppo, Anne: Van Hiele Levels of Geometric Thought Revisited. Mathematics teacher, March 1991.
46. Török Tamás: Matematika II. általános iskola 3. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002, 54.
47. Török Tamás: Matematika II. általános iskola 4. osztály. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
48. Van Hiele, Pierre: Structure and Insight. Academic Press, New York, 1986, 39.
49. Varga Tamás: Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematika tanításban. Korszerű módszerek és eszközök az iskolareform szolgálatában. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966, 86-87.
50. Vigotszkij, Lev Szemjonovics: Gondolkodás és beszéd. Trezor Kiadó, Budapest, 2000, 135-325.

51. Nemzeti Alaptanterv (NAT 2007),  
<http://www.okm.gov.hu/kozoktatas/tantervek/nemzeti-alaptanterv-nat>
52. Kerettanterv az alapfokú nevelés-oktatás bevezető és kezdő szakaszára (1-4. évfolyam), <http://www.okm.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettanterv-2000>
53. A Nemzeti Tankönyvkiadó Műhelyének Kerettanterve, Budapest, 2004.
54. Apáczai Kerettantervcsalád, Győr, 2004.
55. Mozaik Kerettantervrendszer, Mozaik Kiadó, Szeged, 2004.
56. Nyíregyházi Tantervcsalád, Nyíregyháza, 2004.

## ÖSSZEFOGLALÓ

A dolgozat az alsó tagozatos tanulók négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmának fejlődését, illetve fejlesztési lehetőségeit mutatja be. Különböző életkorú tanulóknál, az ismeretszerzés különböző szintjein – eltérő mértékben ugyan – ugyanazok a hibák fordulnak elő, mint például:

- az általános paralelogramma téglalapokhoz sorolása;
- az általános paralelogramma átlóiban szimmetriatengelyek felismerése;
- a négyzet és a téglalap közös tulajdonságainak felismeréséből nem következik, hogy a négyzet téglalap is egyben (a kisiskolások geometriai gondolkodásával ez teljes mértékben összeegyeztethető, 6. osztálytól – a definíciók szerepének megértésétől – kezdve azonban már nem);
- a négyzet szomszédos oldalai párhuzamos helyzetűként történő jellemzése (valószínűleg a „szomszédos” szó nem megfelelő értelmezése a hiba forrása) stb.

A felsőbb osztályokban jelentkező – ilyen és hasonló jellegű – problémák gyökerei feltehetőleg az alsó tagozatos tanulmányaikra nyúlnak vissza. Az előbb említett – tanítószakos hallgatóknál is tapasztalt – problémák adták az indítást, hogy a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmakat vizsgáljuk negyedik osztályos fejlesztő tanítási kísérlet keretében.

Az általános iskola alsó tagozatán a geometria alapvető foglmainak – köztük a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria – alapozása történik. A geometriai fogalmak fejlődése hosszú folyamat, az első négy évfolyamon nem zárul le, más tanulási szinteken folytatódik tovább. A fogalmak kialakításánál a gyerekek életkorának megfelelő tényleges cselekvésekből indulunk ki, mivel a geometria tanulásának alapja a tapasztalatszerzésből kiinduló induktív megismerés. A konkrétból való kiindulás, a sokféle tevékenységből származó tapasztalatok összegyűjtése vezet el az általánosabb összefüggések megfogalmazásáig. Tanítási kísérletünk alatt végig arra törekedtünk, hogy a gyerekek saját tapasztalatszerzésük révén, sok munkaeszközzel, konkrét tárgyi tevékenységekkel fedezzék fel a fogalmak adott szinten elvárható tartalmi mélységeit.

Az **1. fejezetben** a kutatáshoz kapcsolódó pszichológiai és matematikadidaktikai elméleti háttérrel mutatjuk be, amelyre a tanítási kísérlet tervezésénél és megvalósításánál támaszkodtunk.

Fontosnak tartottuk az értelmi fejlődés *Piaget*-féle szakaszainak ismertetését, kiemelve az általunk vizsgált korosztályra jellemző konkrét műveletek szakaszát. Ebben a szakaszban a gyermek gondolkodása még kapcsolódik a konkrét tárgyakhoz vagy ezek manipulációjához, de már képes elképzelni konkrét tárgyakkal való tevékenységeket, melyek nincsenek a környezetében. Képes a belsővé vált (*interiorizált*) cselekvésekről, konkrét műveletekről beszélni, azokat fordított irányban is elképzelni (*reverzibilitás*). A dolgoknak az egyén cselekvéseihez való *asszimilációja* (a környezeti hatások beépülése, magyarázata a meglévő szellemi struktúrákba, sémákba) és a szubjektív sémának a dolgok módosulásához való *akkomodációja* (a meglévő séma korrigálása, módosítása vagy egy új séma létrehozása a környezet megértése, felfogása céljából) közötti egyensúly létrejötte

magyarázza a megfordíthatóságot. Adott szituációban a gyermek egyszerre több szempontot is figyelni tud, összefüggéseket képes felismerni (*decentralizáció*).

*Skemp* szerint egy fogalmat vagy valamilyen információt megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába. A tanár feladata úgy közvetíteni az új fogalmakat, hogy azok alkalmasak legyenek megfelelő, hosszútávon érvényes szkémák kialakítására. A tanulás kezdetén a tanár felelőssége az, hogy a tanulók szkémák szerint (értelmesen) tanuljanak, ne csupán szimbólumokkal való műveletek memorizálását (magolását) végezzék. Fel kell ismernie a pedagógusnak azokat a pontokat, amelyek csak egyszerű asszimilációt igényelnek, valamint azokat is, ahol akkomodációra van szükség. Utóbbi esetben lassúbb léptekkel kell haladnia és a tanulók haladását gondosabban kell ellenőriznie.

A matematikai fogalomalkotásban *Skemp* a következő két alapelvét fogalmazta meg:

1. Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csak is oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.
2. Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.

A megfelelő példák kiválasztása nehéz feladat, mert a példáknak rendelkezniük kell azokkal a közös tulajdonságokkal, amelyek a fogalmat alkotják, de nem szabad rendelkezniük semmiféle más közös tulajdonsággal.

*Bruner* szerint minden gondolkodási folyamat három különböző síkon mehet végbe: *materiális (enaktív)*, *ikonikus* vagy *szimbolikus* síkon. Ez a három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. Az alsóbb osztályokban az enaktív és az ikonikus reprezentáció dominál, mindemellett a nyelv (beszéd) is fontos szerepet játszik, amely szimbolikus síkot jelent. Kísérletünk tervezésekor az volt a célunk, hogy az általunk vizsgált geometriai fogalmak (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) tanítása során az enaktív reprezentációt alkalmazzuk a leghosszabb ideig, a későbbi megfelelő képzetrendszer kialakulása érdekében, valamivel kevesebb ideig az ikonikus reprezentációt. A nyelv – mint szimbolikus reprezentáció – folyamatosan jelen van.

*Shlomo Vinner* és *David Tall* vezették be a *fogalomképzet* (concept image) elnevezést a matematika-didaktika szakirodalomba. A képek, konkrét példák, konkrét tapasztalatok, konkrét tevékenységek (modellezés, hajtogatás, nyírás, rajzolás) jelentős szerepet játszanak a sokoldalú fogalomképzet kialakításában. A fogalomrealizálási és a fogalomazonosítási feladattípusok hozzájárulnak a fogalmak gazdag képzetének kialakulásához.

A matematikadidaktikai elméleti alapok közül *Pierre* és *Dina van Hiele* geometriai gondolkodásról szóló elméletét emeljük ki. A geometriai ismeretszerzés folyamatát 5 szintre tagolták:

1. szint: *alakzatok globális megismerése*,
2. szint: *alakzatok elemzése*,
3. szint: *lokális logikai rendezés (informális dedukció)*,
4. szint: *törekvés a teljes logikai felépítésre (formális dedukció)*,
5. szint: *axiomatikus felépítés*.

A geometriai fogalmak fejlődése, majd kialakulása ezen hierarchikus szinteken keresztül zajlik.

Az *alakzatok globális megismerésének szintjén* (1.szint) a gyerek a geometriai alakzatokat, mint egységes egészet fogja fel. Könnyen felismeri a különböző alakzatokat a formájuk alapján, megtanulja az alakzatok nevét. Nem tudja azonban összehasonlítani a különböző alakzatokat. Nem ismeri fel a négyzetben a téglalapot, mert számára ezek egészen különböző dolgok.

Az *alakzatok elemzésének szintjén* (2. szint) a gyermek az alakzatokat részeire bontja, majd összerakja. Az alakzat és részei között kapcsolatokat fedez fel. Megkezdődik a megismert alakzatok elemzése, a megfigyelések, mérések, rajzolások, hajtogatások, nyírások, ragasztások, modellezések, parkettázások, tükröhasználat révén. Ezen konkrét tevékenységek segítségével a tanuló megállapítja, felsorolja az alakzat tulajdonságait, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismeri fel. A tulajdonságok megállapítása csak az alakzatok megkülönböztetéséhez szükségesek. Nem érti a definíció szükségességét. Megindul az osztályba sorolás. Ezen a szinten a gyerek még nem veszi észre a az alakzatok közötti kapcsolatokat. Megállapítja ugyan az alakzatok közös tulajdonságait, például a négyzet és a téglalap vonatkozásában, de ebből nem következik számára az, hogy a négyzet téglalap is egyben.

Az alsó tagozaton (1-4. osztály) az első két szint megvalósítása reális, amit hipotézisünkben is megfogalmaztunk.

A négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak tanítási kérdéseinek vizsgálatában egyaránt támaszkodtunk a holland *realisztikus matematikaoktatás*, *Dienes Zoltán*, valamint *Pólya György* matematikaoktatási és a *Varga Tamás*-féle komplex matematikatanítási kísérlet alapelveire. Az alapelvek közül az alábbiakra helyeztük a legnagyobb hangsúlyt:

- A matematikatanításnak olyan jelenségekből, szituációkból kell kiindulnia, amelyek a tanulók számára fontosak, érdekesek, motiváló hatásúak, elősegítik a tanulási folyamatokat.
- Az ismeretszerzésnek konkrét tapasztalatokból kell kiindulnia, hiszen absztrahálni csak konkrétumokból lehet.
- A tanulók konfrontálódjanak a sajátjuktól eltérő, másféle megoldási módokkal is, szembesüljenek saját konstrukcióik előnyeivel és hibáival.
- A passzív tanulási módot az aktív tanulási módnak kell felváltania. A tanulók maguk fedezzék fel mindazt, jöjjenek rá mindarra, ami az adott körülmények között lehetséges.
- Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek.
- Az életkori sajátosságok figyelembevétele. Az alsó tagozatos tanulók életkori sajátosságainak figyelembevétele a játék és a manipulációk alkalmazását jelenti.

A dolgozat **2. fejezetében** a kutatás bemutatására kerül sor. Negyedik osztályos fejlesztő oktatási kísérlet keretében több geometriai fogalom (négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség, szimmetria) fejlesztésével foglalkoztunk, amelynek célja a *van Hiele*-modell szerinti geometriaoktatás megvalósítása. A kísérletet 2006 május-júniusában a bajai Eötvös József Főiskola Gyakorló Általános Iskolájának 4.c osztályában végeztük, majd ezt 2008 május-júniusában megismételtük az iskola 4.b osztályában. A választásunk azért esett a negyedik

évfolyamra, mert korábban a párhuzamosság és a merőlegesség fogalmát még nem tudtuk volna vizsgálni, mivel - az iskola helyi tanterve alapján - negyedik osztályban kerülnek bevezetésre ezek a fogalmak. A négyzetről és a téglalapról tanultak is az alsó tagozat negyedik osztályában teljesebben ki. A fejlesztő oktatási kísérlet mindkét alkalommal 17 tanítási órát foglalt magába.

*Kutatási kérdéseink a következők:*

- A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei hogyan realizálódnak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában?
- Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek milyen hatékonysággal járulnak hozzá a vizsgált fogalmak fejlődéséhez?

*A kutatás hipotézisei az alábbiak:*

- A geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle szintjei közül az első kettő, a globális felismerés szakasza, illetve az elemzés szakasza reális a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak alsó tagozatos tanításában.
- Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben járulnak hozzá a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.

A tanítási kísérletek megtervezése előtt tájékozódó felmérést végeztünk a kísérleti osztályokban. A tájékozódó-felmérő feladatlap összeállításánál az előző tanév (3. osztály) tananyagát, a kísérleti osztályban látogatott bemutató órai megfigyeléseinket, valamint az osztályt tanító szakvezető tapasztalatait, javaslatait vettük figyelembe. Célunk a négyzet és a téglalap, illetve a tengelyes szimmetria fogalmi szintjének felmérése volt. A párhuzamosság és merőlegesség fogalmával kapcsolatos feladatokat nem állt módunkban kitűzni, mert ezekkel a fogalmakkal a gyerekek eddigi tanulmányaik során még nem találkoztak. Ugyanakkor lehetőségünk volt – a merőlegességhez kapcsolódóan – tájékozódni a derékszög, a derékszögnél kisebb és a derékszögnél nagyobb szög fogalmi szintjéről. A tájékozódó felmérések értékelésével megállapítottuk, hogy a kísérleti osztályokban a gyerekek:

- jelentős része a négyszög szó kapcsán speciális esetekre (négyzetre, téglalapra) gondolt;
- 70%-a (2006-ban), illetve 79%-a (2008-ban) az általános paralelogrammát téglalapnak tartotta;
- közel egyharmada (2006-ban), illetve negyede (2008-ban) a csúcsára állított négyzetben nem fedezte fel a négyzetet;
- kb. fele nem ismerte fel az összes derékszöget az adott sokszögek esetén;
- majdnem háromnegyede hibázott a síkidomok tükrösségének megállapításánál vagy a tükrötengelyek berajzolásánál.

Ezek a *van Hiele*-féle első szintnek (az alakzatok globális megismerésének) felelnek meg.

A tájékozódó felmérés eredményeinek figyelembevételével terveztük meg a fejlesztő kísérlet tananyagát. Ennek során folyamatosan törekedtünk a zajsztint növelésére, a fokozatosság betartása mellett. Igyekeztünk a problémákat egyre nehezíteni. Az első órákon a téglatest és a kocka lapjaiként foglalkoztunk a téglalappal és a négyzettel. A *van Hiele*-féle második szintnek (alakzatok elemzése) megfelelően az alakzatokat részeire bontottuk, majd összeraktuk. Az alakzatok elemzését, a tulajdonságok megállapítását, felsorolását – a közöttük lévő logikai kapcsolatok felismerése nélkül – konkrét tevékenységek segítségével végeztük. A téglatest és a kocka szemközti, valamint a szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során vezettük be új fogalomként a párhuzamosságot és a merőlegességet, majd ezt követően a testek kiterítésével tértünk át a síkra. A szimmetriával is előbb testek, majd ezt követően síkidomok esetén találkoztak a gyerekek. A négyzet és a téglalap tulajdonságainak megállapítása az alakzatok megkülönböztetésére szolgált. A tananyag, illetve az órák tervezésekor azt tartottuk szem előtt, hogy a gyerekek előbb konkrét tapasztalatok alapján, valóságos játékok keretében, tárgyi tevékenykedés közben, majd vizuális síkon (rajzolás), végül absztrakt, nyelvi síkon fedezzék fel az elsajátítandó geometriai fogalmakat. Az órák jelentős részét a konkrét tárgyi tevékenységekre, cselekvésekre, manipulációkra szántuk.

#### *A tanítási kísérlet vázlatos tematikája:*

A négyzet és a téglalap fogalom fejlesztése:

- téglatest és téglalap, kocka és négyzet megkülönböztetése;
- négyzet, téglalap alkotása konkrét tárgyi tevékenységekkel;
- a négyzet és a téglalap tulajdonságainak összehasonlítása, tulajdonságkártyák;
- a téglalap és a paralelogramma, illetve a négyzet és a rombusz tulajdonságainak összehasonlítása;
- négyzetek alkotása vizuális síkon.

A párhuzamosság és merőlegesség fogalmának fejlesztése:

- a szemközti és szomszédos szavak matematikai értelmezése;
- a párhuzamosság és merőlegesség fogalmának bevezetése;
- különböző testek szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata;
- párhuzamos, merőleges egyenespárok előállítását síkban konkrét tárgyi tevékenységgel;
- síkidomok párhuzamos, illetve merőleges oldalpárjainak megfigyelése.

A szimmetria fogalom fejlesztése:

- testek tükörképének építése;
- szimmetriasíkok helyének meghatározása különböző testek esetén;
- síkbeli tükörképek vizsgálata konkrét tárgyi tevékenységgel;
- tengelyesen szimmetrikus alakzatok konstruálása;
- síkidomok tengelyes tükrösségének vizsgálata.

A vizsgált fogalmakkal kapcsolatos vegyes feladatok.

A fejlesztő tanítási kísérletet – 2006-ban és 2008-ban egyaránt – felmérő feladatlappal zártuk, amelyeket a kísérleti osztályokon kívül a párhuzamos osztályok tanulói is megoldottak. 2008-ban a tanítási kísérlet után 3 hónappal került sor a késleltetett tesztek megírására.

Úgy gondoljuk, hogy a kísérletező által irányított fejlesztő tanítás hatékonyan járult hozzá a téglalap és a négyzet fogalmának elmélyüléséhez, a párhuzamosság és a merőlegesség, valamint a szimmetria fogalmak alakulásához. A tájékozódó felmérések és a záró feladatlapok összehasonlítása is ezt igazolta. A hatékonyságot támasztja alá az a tény is, hogy mind 2006-ban, mind 2008-ban a párhuzamos osztályokban tapasztalt eredményekhez képest általában jobb, esetenként lényegesen jobb eredmények születtek a kísérleti csoportokban. A szimmetria fogalom vonatkozásában ugyanakkor megállapítható az is, hogy a 2008-as kísérlet során a hatékonyság jelentős mértékben nőtt. A 2008-as tájékozódó felmérés és záró feladatlap erre vonatkozó eredményeinek összehasonlítása – 2006-oshoz viszonyítva – nagyobb fejlődést mutat. Ennek – álláspontunk szerint – az az indoka, hogy a korábbi tanítás tapasztalatai alapján részletesebben, elmélyültebben dolgoztuk fel a szimmetriával kapcsolatos feladatokat. Megállapításaink csak a vizsgált – nem reprezentatív – mintákra vonatkoznak, ezért statisztikai próbákat nem végeztünk.

A mért adataink, az ismertetett interjúk, játékok igazolják azt a hipotézist, miszerint a geometriai gondolkodás *van Hiele*-féle 3. szintjére nem lehet átlépni az alsó tagozat végére, csak az első két szint megvalósítása reális.

A 2. szintet elérő tanulók az alakzatokat részeire bontják, majd összerakják. Az alakzatok alkotórészeit megkülönböztetik egymástól, közöttük kapcsolatot fedeznek fel. A tanítási kísérlet során a gyerekek a téglatestet (gyufásdobozt), a kockát kiterítették, a kiterített hálóról bizonyos lapokat levágtak. Megnevezték a téglatest, kocka, ötszög alapú hasáb, négyzet alapú gúla határoló lapjait. Megbeszéltük, hogy a szomszédos lapok élben találkoznak, az élek találkozásánál a csúcsok találhatók. Vizsgáltuk a különböző síkidomok határoló vonalait. Már az 1. szinten könnyen felismerik a tanulók a különböző alakzatokat a formájuk alapján, és gyorsan megtanulják a nevüket. A tanórákon tapasztaltuk, hogy milyen fogékonyak a különböző négyszögek neveinek elsajátítására (trapéz, paralelogramma, rombusz, deltoid). Ugyanakkor az is megállapítható, hogy a téglalapot és a négyzetet, a rombuszt és a négyzetet, a paralelogrammát és a rombuszt, a paralelogrammát és a téglalapot, a deltoidot és a rombuszt teljesen különböző dolgokként kezelik. Nem fedezik fel a négyzetben a téglalapot, illetőleg a rombuszt, vagy a rombuszban a paralelogrammát, illetve a deltoidot. Az utótesztek eredményei is azt mutatták, hogy a negyedik osztályos tanulók többsége számára a négyzet nem téglalap.

Konkrét tevékenységek – mint a mérés, hajtogatás, nyírás, modellezés, tükröhasználat stb. – segítségével megállapítják az alakzatok tulajdonságait, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismerik fel a 2. szinten. Nem látnak összefüggéseket az alakzatok tulajdonságai és az alakzatok között. Észrevették például, hogy a téglalapnak és az általános paralelogrammának is 4 csúcsa, 4 oldala van, a szemközti oldaluk páronként egyenlők, valamint párhuzamosak egymással, de nem jutottak el arra a megállapításra, hogy a téglalap paralelogramma, vagy ehhez hasonlóan azt sem ismerték fel, hogy a négyzet téglalap, a kocka téglatest.

A barkóba játék során többször megfigyelhettük, hogy a gyerekek nem tudnak következtetni az alakzatok egyik tulajdonságáról a másikra. Így például a téglalap kitalálásakor elhangzott az a kérdés, hogy „van derékszöge?”, majd az „igen” válasz után később – feleslegesen – az, hogy vannak-e merőleges oldalai. Egy másik játék során a kitalálendő négyszög szemközti oldalainak párhuzamosságából nem következett számukra a szemközti oldalak egyenlősége.

A felsoroltak mind azt támasztják alá, hogy a negyedik osztályos tanulók legfeljebb a *van Hiele*-féle 2. szintet tudják elérni.

A 6-10 éves tanulók gondolkodása erősen kötődik a tárgyi valósághoz, ezért a fogalmak kialakításakor a legkonkrétabb dolgoktól kiindulva – manuális tevékenységgel, illetve az őket körülvevő közvetlen világból vett példákkal – indokolt eljuttatni őket az elvontig. Sok példa, ellenpélda tanulmányozása, a fogalom többszörös konkretizálása, modellezése a feltétele annak, hogy a gyerekek felismerjék a kialakítandó fogalom lényeges jegyeit, majd képesek legyenek az absztrahálásra. Tanítási kísérletünkben ezért arra törekedtünk, hogy a tanulók sok konkrét tevékenység segítségével a téglalap, négyzet, párhuzamosság, merőlegesség, illetve szimmetria fogalmával kapcsolatban gazdag tapasztalatokra tegyenek szert, fogalomképzetük sokoldalú legyen. Az első két szintre vonatkozó tárgyi tevékenységek jelentős mértékben hozzájárultak a négyzet, téglalap, párhuzamosság, merőlegesség és szimmetria fogalmak fejlődéséhez.

## SUMMARY

In the dissertation the evolvement of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in lower primary and the development options are presented. In various age groups and at various levels of gaining knowledge the same typical mistakes occur, even if to various degree:

- including general parallelograms into rectangles;
- recognizing symmetry axes in the diagonals of general parallelograms;
- even if young learners recognize the common characteristics of squares and rectangles, it does not mean that they would realize that squares are actually rectangles. (This is completely in line with young learners' geometric thinking, but not from grade six, when they grasp definitions);
- describing the neighbouring sides of the square as parallel, this probably comes from the misinterpretation of word 'neighbouring' etc.

The above and similar problems in upper primary probably go back to the lower primary. Beside the above-mentioned, difficulties that teacher training college students face, gave reasons for studying the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in grade four within the framework of a development teaching experiment.

In the first four grades of lower primary the basic concepts of geometry, such as square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry are established. Teaching geometric concepts is as a matter of fact a long process, and it is not completed by the first four grades, but it continues at other levels of learning. During the formation of concepts we relied on activities which were in line with the age group of children, as learning geometry is based on inductive cognition by gaining experience. Starting out from the concrete, gathering experience from various activities can lead to the formulation of broader relationships. Throughout our teaching experiment every effort was made in order that children, through gaining experience and using various tools in diverse activities could discover the content of concepts at a given level.

**In chapter one** the psychological and didactic theories related to the research are presented, on which we relied in designing and conducting the teaching experiment.

We have attached great importance to the *Piaget* stages of cognitive development, highlighting the stage of concrete operations characteristic of the age group we are concerned with. At this particular stage children's thinking is connected to concrete objects, or activities with them, but children are also able to imagine activities with concrete objects, which cannot be found in their environment. Children are also able to talk about *interiorized* actions and concrete operations, and to imagine them in reverse direction (*reversibility*). The balance of *assimilation* of things into individual actions (incorporation of environmental influences into already existing cognitive structures) and the *accommodation* of subjective patterns to the modification of things (the correction or modification of the existing pattern, or creating a new pattern for a better understanding of the environment) gives account for the reversibility. In a particular situation children are able to pay attention to various points of views at the same time and are also able to grasp relationships (*decentralisation*).

According to *Skemp* to understand a concept or some information is nothing but its assimilation into a proper pattern. It is up to the teacher to transmit new concepts in a way that they should be suitable for the formation proper patterns, valid in the long run. In the beginning of the learning process it is the teacher's responsibility that learners study in terms of patterns, in a meaningful way and not only memorize operations with symbols (cramming). Teachers should recognize where learners need simple assimilation or accommodation. In the latter case progress ought to be slower and the learners' achievement should be carefully controlled.

Regarding the formation of mathematical concepts *Skemp* formulated the following two principles:

1. By means of definitions it is impossible to transmit concepts to anyone which are at a higher level than their knowledge; it can be done only by providing plenty of proper examples.
2. Since in mathematics the examples mentioned above are almost all of them various concepts, we have to make sure that learners have already acquired these concepts.

Selecting the proper examples is not an easy task, as the examples should possess the common characteristics that make up the concept, but they should not have any other common characteristics.

According to *Bruner* every process of thinking takes place at three levels: *material (enactive)*, *iconic* and *symbolic* level. These representation levels play a part in every stage of teaching, but in the lower primary classes the enactive and iconic levels are in the foreground, however language (speech), which is the symbolic level, is also very important. When designing our teaching experiment our aim was to make use of enactive representation for the longest time in the teaching of geometric concepts examined by us, such as square, rectangular, parallel, perpendicular and symmetry in order that the proper system of images could be established. Iconic representation was used for a shorter period of time, and language, as symbolic representation is always present.

*Shlomo Vinner* and *David Tall* introduced the term '*concept image*' in the literature of methodology of mathematics teaching. Pictures, relevant examples, experience and activities such as modelling, folding, clipping and drawing play an important part in the formation of versatile concept image and the tasks for realising and identifying concepts can contribute to well-established concept images.

Among the theories underlying the methodology of teaching mathematics we would like to focus on the theory of geometric thinking put forward by *Pierre* and *Dina van Hiele*. The process of acquiring knowledge in geometry is divided into five stages:

- Level 1: *global recognition of shapes*,
- Level 2: *analysis of shapes*,
- Level 3: *local logical arrangement*,
- Level 4: *aiming at a complete logical set-up (formal deduction)*,
- Level 5: *axiomatic set-up*.

The evolvement and then the establishment of geometric concepts take place through these hierarchic levels.

*At the level of global recognition of shapes (level 1)* children perceive geometrical shapes as a whole. They easily recognize various shapes according to their forms and they remember the names of the shapes. However they are not able to compare the various shapes. They do not recognize the rectangular prism in the cube and the rectangle in the square, because these are totally different things for them.

*At the level of analysing shapes (level 2)* children break down shapes into their components and then put them together. They discover the relationships between the shape and its components. At this point particular importance is attached to observation, measurement, folding, clipping, sticking, drawing, modelling, parquetry and using mirror. By means of these concrete activities children can establish and enlist the characteristics of shapes, but they are not able to recognize the logical relationships between the characteristics. The establishment of the characteristics is needed only to make difference between shapes and children do not really understand the importance of definition. They begin creating categories. At this level children do not see the relationships between shapes. Even if children notice what squares and rectangles have in common, but they cannot come to the conclusion that squares are actually rectangles.

In lower primary geometry teaching (classes 1- 4) the first two stages can be put into practice as it was also mentioned in the hypothesis.

In examining the issues of teaching the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry we also relied on the Dutch realistic mathematics teaching, the achievement of *Zoltán Dienes* and *György Pólya* and the principles of the complex way of teaching mathematics carried out by *Tamás Varga*. Most emphasis has been laid on the following principles:

- Mathematics teaching should be based on phenomena and situations which are relevant, interesting and motivating for the learners and also contribute to learning processes.
- In gaining knowledge concrete experience should be the starting point, since abstraction can be done only from the concrete.
- Learners should also meet solutions different from their own, and should also face the advantages and the mistakes in their own constructions.
- An active way of learning should replace the passive one. Learners should discover everything that is feasible under the given conditions.
- It seems to be proper to present the concept structures to the children in several equivalent forms, which however can be perceived as different by the children.
- The characteristics of the age groups should be taken into consideration. In lower primary it means that a great deal of games and activities are used with young learners.

**In chapter 2** the research is described. Within the framework of the developmental teaching experiment in grade four we were concerned with the development of some geometric concepts such as the square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry by putting *van Hiele's* model of geometry teaching into practice. The experiment was conducted in class 4.c of the Practice School of József Eötvös College in Baja in May-June 2006, and then the experiment was repeated in class 4.b. The reason why we selected grade four is that the concepts of parallel and

perpendicular are introduced in grade four in line with the local curriculum of the school. The young learners' knowledge about square and rectangle will have become more systematic by grade four of the lower primary. The teaching experiment covered seventeen lessons on both occasions.

### Research questions

- How are the *van Hiele* levels of geometric thinking and teaching of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry in lower primary put into practice?
- How efficiently the concrete activities used at these levels can contribute to the development of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry?

### Hypotheses

- In lower primary teaching of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry, the first two stages of the *van Hiele* levels of geometry thinking, i.e. global recognition and analysis are feasible.
- The concrete activities related to the first two levels contribute to the development of the concepts of square, rectangular, parallel, perpendicular and symmetry.

Prior to planning the teaching experimental preliminary survey was conducted in the classes of the experiment. When compiling the pre-test the syllabus of the previous class (class 3), the observations of the demonstration classes in the experimental classes as well as the comments and suggestions of the mathematics teacher of the class were taken into consideration. The aim was to measure the conceptual level of square, rectangle and axial symmetry. As children were not familiar with the concepts of parallel and perpendicular no tasks were given related to these concepts. However it was possible to gain information on the conceptual level of the right angle and angles smaller and larger than the right angle connected with the perpendicular. The findings of the pre-test in the classes of the experiment are as follows:

- in case of quadrangles most children think of special cases such as squares and rectangles;
- seventy percent of the children considered the general parallelograms as rectangles in 2006 and 79 % of them in 2008;
- as many as one third of them did not recognize squares turned on its point vertex in 2006 and one quarter of them in 2008;
- about 50% of the children did not recognize all the right angles in given polygons;
- almost three quarters of them failed to recognize reflection in plane figures or to draw symmetry axis.

All these mentioned above are in line with the *van Hiele* level of global recognition.

The content of the development teaching experiment was designed among others on the basis of the pre-test results. The level of noise was continuously increased by observing the principle of gradualness and the problems were made

more and more challenging. During the first lessons we dealt with rectangles and squares as the faces of rectangular prisms and cubes. According to *van Hiele* level 2, (the analysis of shapes) the shapes were broken into their components and put together again. The analysis of shapes, the establishment and enumeration of their properties took place by means of concrete, manual activities; however the logical relationships between them were not recognized. When examining the position of opposite and neighbouring faces of rectangular prism and cubes, the new concepts of parallel and perpendicular were introduced. Then after spreading the solids we moved on to the plane. Children were introduced to symmetry first through solids and then through plane figures. By establishing the properties of square and rectangle children were able to make difference between shapes.

When designing the course material and the lesson plans what we considered of utmost importance was that children could discover geometric concepts first through concrete experience in real games and activities, later at visual level (drawing) and later at abstract, linguistic level. During the lessons a large amount of time was allocated to concrete, manual activities.

#### *The outline of the topics of the teaching experiment*

The development of the concepts of square and rectangle:

- making difference between rectangular prism and rectangle, cube and square;
- producing square and rectangle through concrete activities;
- comparing the properties of square and rectangle, property cards;
- comparing the properties of rectangle and parallelogram as well as square and rhombus;
- producing squares at visual level.

The development of the concepts of parallel and perpendicular:

- the mathematical interpretation of the terms of opposite and neighbouring;
- the introduction of the concepts of parallel and perpendicular;
- examining the position of the opposite and neighbouring faces of various solids;
- producing parallel and perpendicular pairs of straight lines in planes by activities;
- observation of the parallel and perpendicular side-pairs of plane figures.

The development of the concept of symmetry:

- constructing reflection of solids;
- establishing the position of symmetry planes in various solids;
- examining reflected images in plane by activities;
- constructing axially symmetric shapes;
- examining axial reflections of plane figures.

Mixed tasks related to the concepts we have studied.

The development teaching experiment was completed by an evaluation worksheet both in 2006 and in 2008 which were filled not only by the learners of the experimental class but by the learners of parallel classes as well. In 2008 three months after the completion of the teaching experiment the delayed tests were done.

We are convinced that the development teaching experiment efficiently contributed to the better understanding of the concepts of square and rectangle and also to the formation of the concepts of parallel and perpendicular as well as symmetry. The comparison of the results of the pre-test and post-test also have

supported the above finding. The efficiency is also shown by the fact that the achievement in the experimental classes was better; occasionally much better than in the parallel control classes in 2006 and 2008. During the experiment conducted in 2008 the concept of symmetry was also firmly established. The comparison of the 2008 pre-test and evaluation worksheet with the ones done in 2006 shows considerable progress. This can be accounted for the fact that relying on our former experience we have dealt with symmetry in detail and depth.

Our findings are related only to the samples examined, which are not representative, and therefore no statistical trials have been carried out.

The data measured the interviews and the games support the hypothesis that it is not possible to reach the van Hiele level 3 of geometric thinking by the completion of lower primary; only reaching the first two levels is feasible.

Learners at level 2 break down the shapes into their components and then they put them together again. They are able to make a difference between the components and to discover the relationships between them. During the teaching experiment children spread rectangular prisms (match boxes) and cubes then cut some of the faces. They named the faces of rectangular prism, cube, pentagon prism, quadrilateral pyramid. The position of the neighbouring faces and edges and the vertexes was also discussed. The bordering segments of various planes figures were also presented. Children at level 1 easily recognize various shapes according to their form and remember their name, such as the names of various quadrangles: trapezoid, parallelogram, rhombus, and deltoid. However it can also be seen that they perceive rectangle and square, rhombus and square, parallelogram and rhombus, parallelogram and rectangle, deltoid and rhombus as totally different things. They are not able to discover the rectangle in the square, or the rhombus, and the parallelogram in the rhombus or the deltoid for that matter. It is also revealed in the post-test results that most of the learners in grade 4 do not consider square as rectangle.

By means of activities such as measuring, folding, drawing, clipping, modelling and the use of mirror learners establish the properties of shapes but they do not recognize the logical ties between them at level 2. They cannot see the relationships between the properties of the shapes and the shapes. They have actually noticed that both the rectangle and the general parallelogram have four vertexes, four sides, and that opposite side pairs are equal and parallel, but they were not able to come to the conclusion that the rectangle is a parallelogram or they did not realize that the square is a rectangle and the cube is a rectangular prism.

While playing the game twenty questions it was noticed that several times when children were not able to infer from one property of the shapes to the other. E.g. when guessing the rectangle it was asked 'Does it have a right angle?' after the answer 'yes', they still asked if it had perpendicular sides. During another game the parallel opposite sides of the quadrangle did not make them realize that the opposite sides are equal.

As it is shown by the above examples learners in grade 4 can get as far as *van Hiele* level 2.

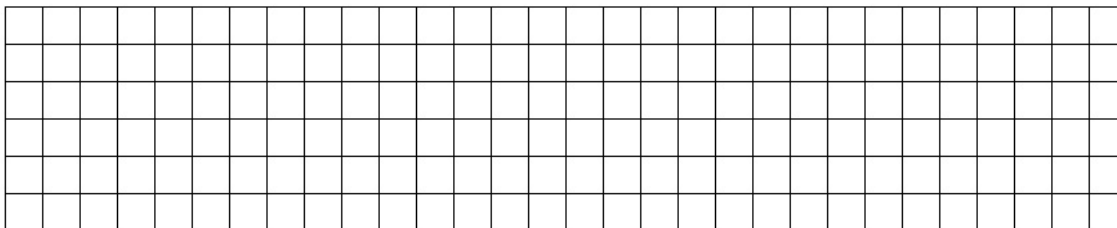
The cognition of learners of the 6-10 years old is highly attached to real life of objects, which is why during the formation of concepts only starting out from concrete activities and examples taken from their immediate experience is it possible for them to reach the level of abstraction. A large number of examples and counter examples and making the concept concrete and modelling are the preconditions that make it

possible that children could recognize the essential characteristics of a concept and reach the level of abstraction. This was the reason why we attempted to provide children with a wide range of experience in the concepts of rectangle, square, parallel and perpendicular and symmetry mainly through various concrete activities so that their concept image would be versatile. These activities related to level 1 and 2 contribute to the development of the concepts of square, rectangle, parallel, perpendicular and symmetry to a considerable degree.

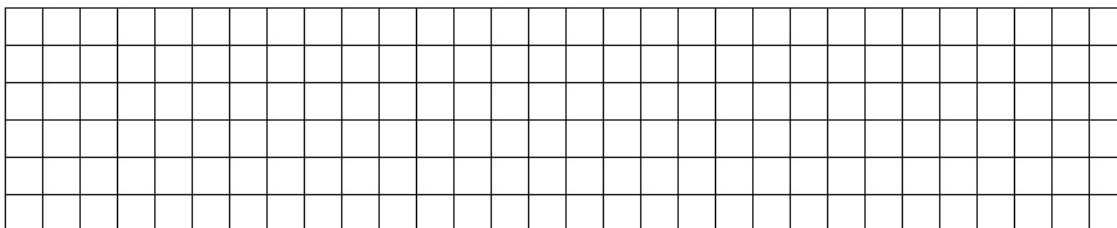
## **MELLÉKLETEK**

**1. sz. melléklet**  
**2006-os tájékozódó felmérés feladatai**

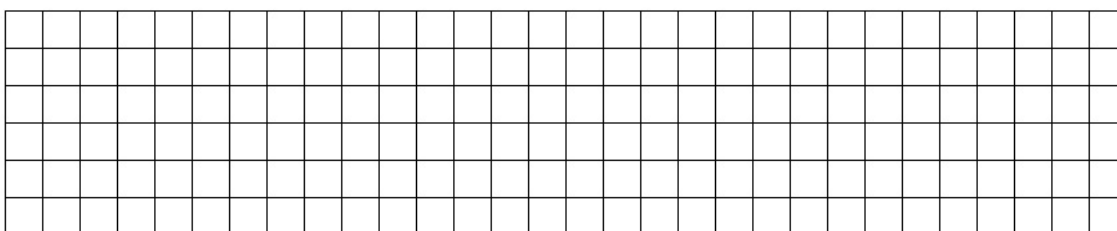
1. a) Rajzolj egy négyszöget!



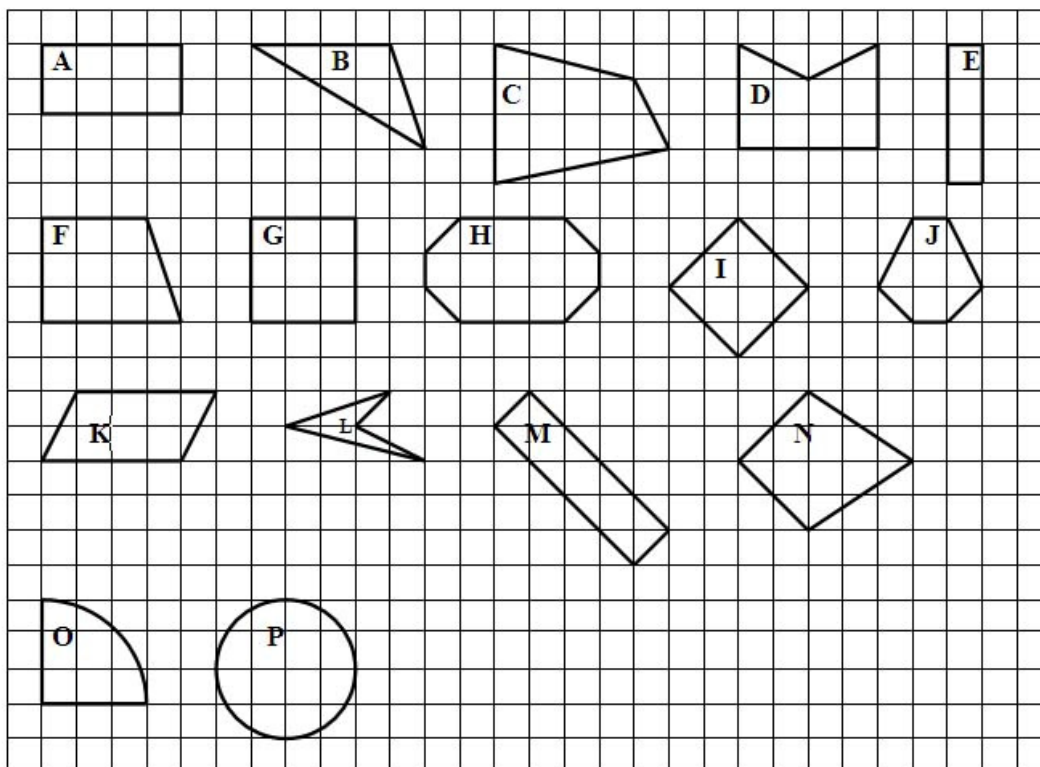
- b) Rajzolj egy téglalapot!



- c) Rajzolj egy négyzetet!



2.



a) Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjeleit, amelyeket csak egyenes vonal határol!

---

b) Sorold fel a négyszögek betűjeleit!

---

c) Sorold fel a téglalapok betűjeleit!

---

d) Sorold fel a négyzetek betűjeleit!

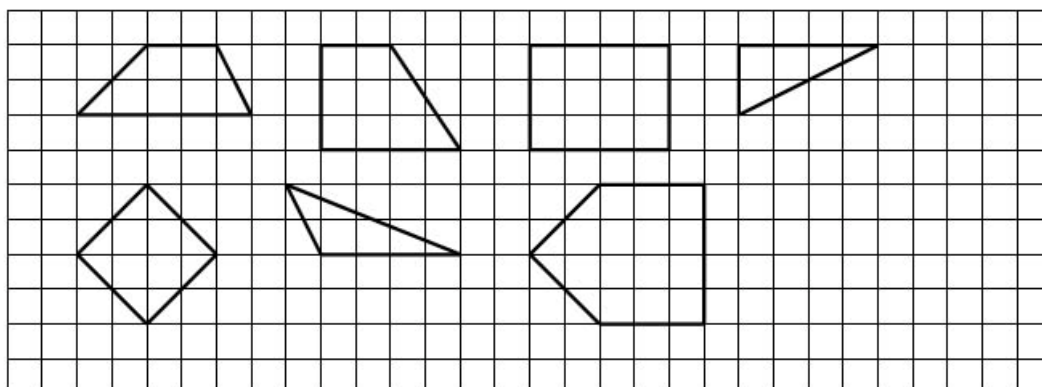
---

3. Hajtogatott derékszöggel dönts el, hogy a sokszögek oldalai milyen szöget alkotnak?

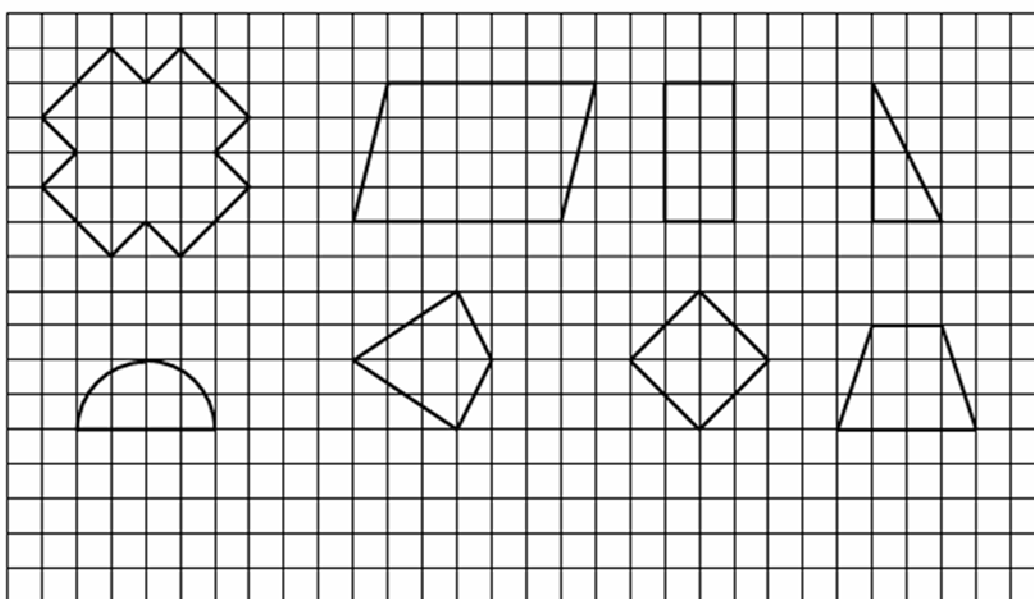
A derékszögeket színezd pirosra! Így: 

A derékszögnél kisebb szögeket kékre! Így: 

A derékszögnél nagyobb szögeket zöldre! Így: 

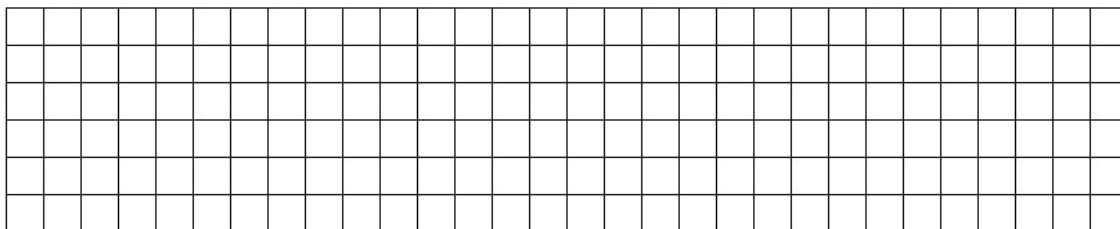


4. Melyik síkidom tükrös? Tükörrel ellenőrizd! Pirossal húzd meg a tükör helyét! (Ha több is van, akkor mindegyiket húzd meg pirossal!)

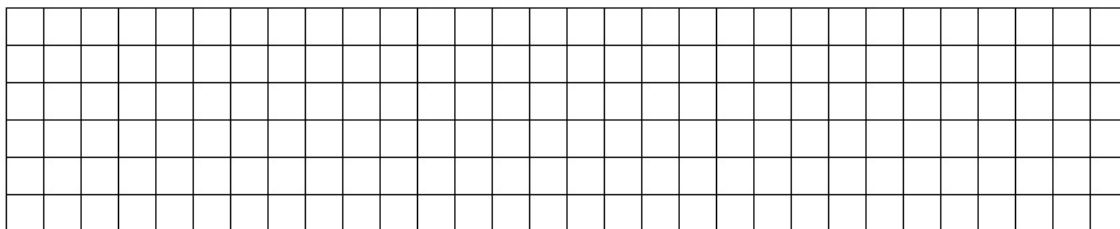


**2.sz. melléklet**  
**2008-as tájékoztató felmérés feladatai**

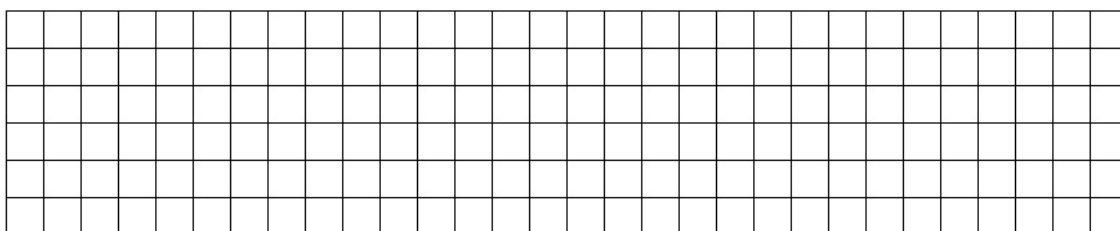
1. a) Rajzolj egy négyszöget!



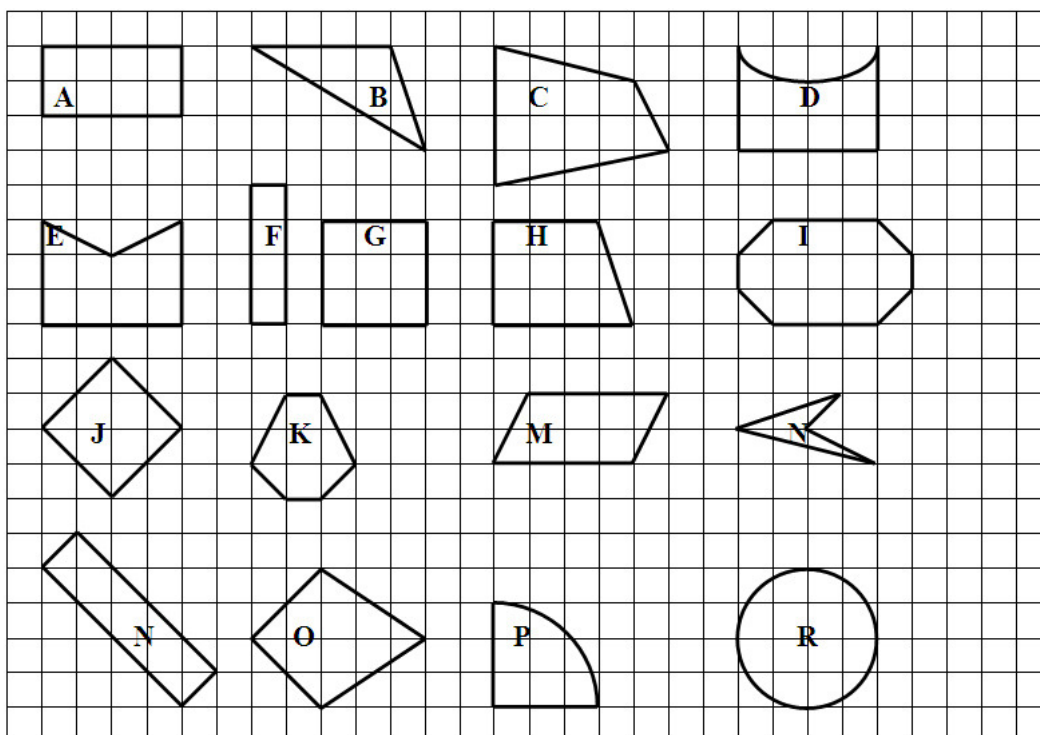
- b) Rajzolj egy téglalapot!



- c) Rajzolj egy négyzetet!



2.



a) Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjeleit, amelyeket csak egyenes vonal határol!

---

b) Sorold fel a négyszögek betűjeleit!

---

c) Sorold fel a téglalapok betűjeleit!

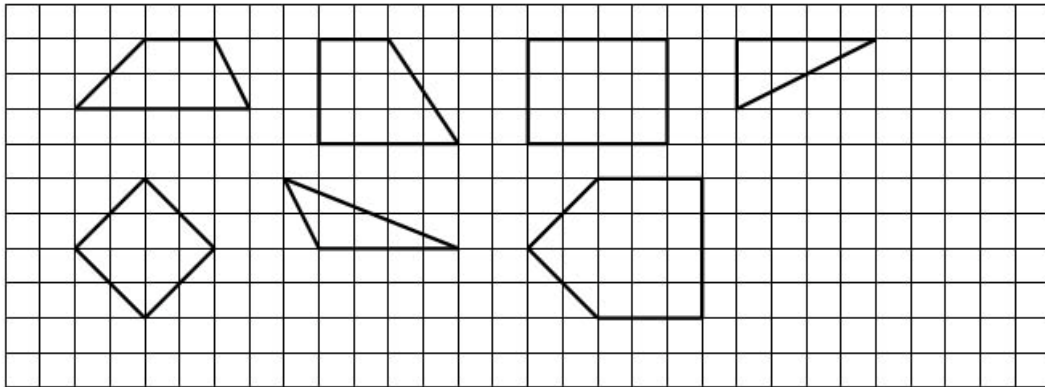
---

3. Hajtogatott derékszöggel dönts el, hogy a sokszögek oldalai milyen szöget alkotnak?

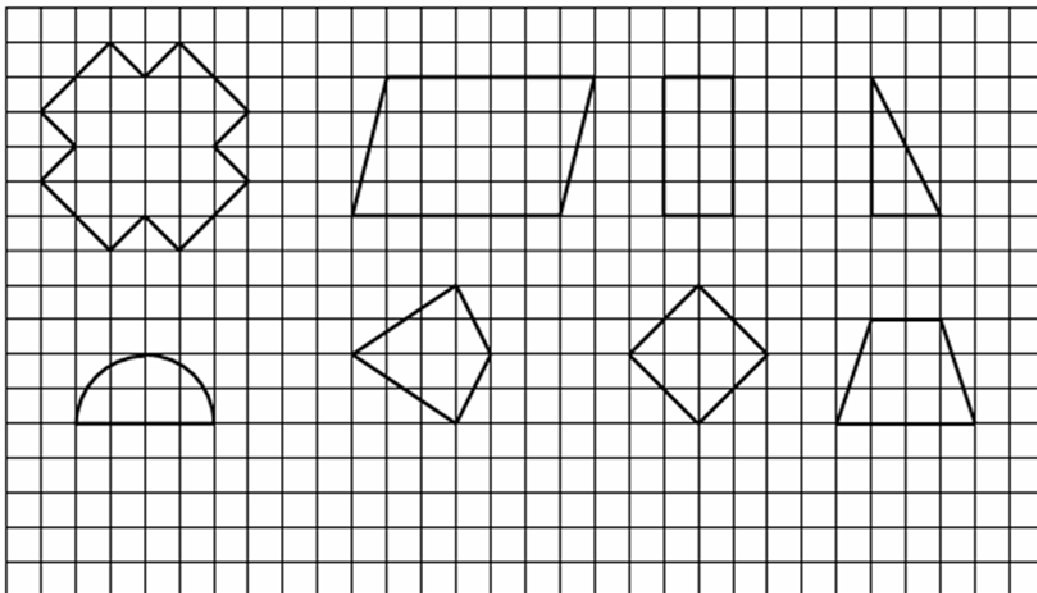
A derékszögeket színezd pirosra! Így: 

A derékszögnél kisebb szögeket kékre! Így: 

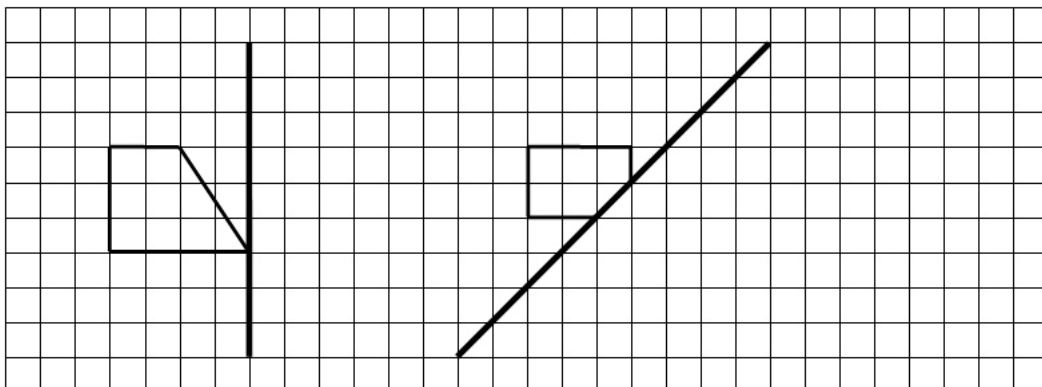
A derékszögnél nagyobb szögeket zöldre! Így: 



4. Melyik síkidom tükrös? Tükörrel ellenőrizd! Pirossal húzd meg a tükör helyét! (Ha több is van, akkor mindegyiket húzd meg pirossal!)

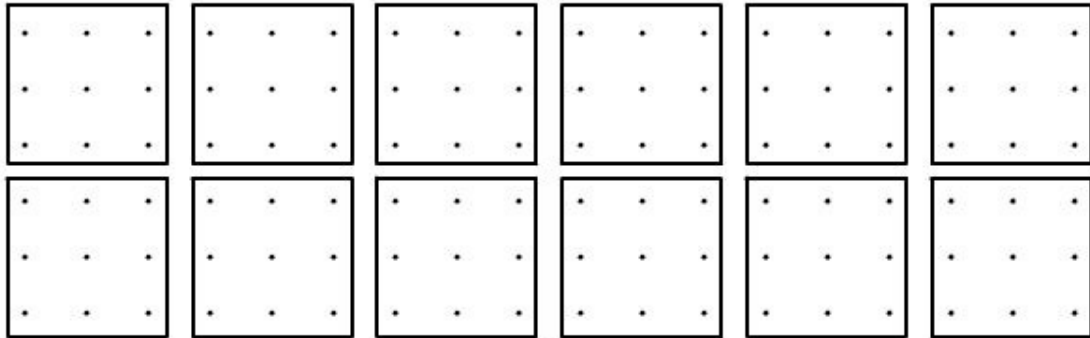


5. Tükrözd a síkidomokat a vastagon megrajzolt tükrötengelyekre!

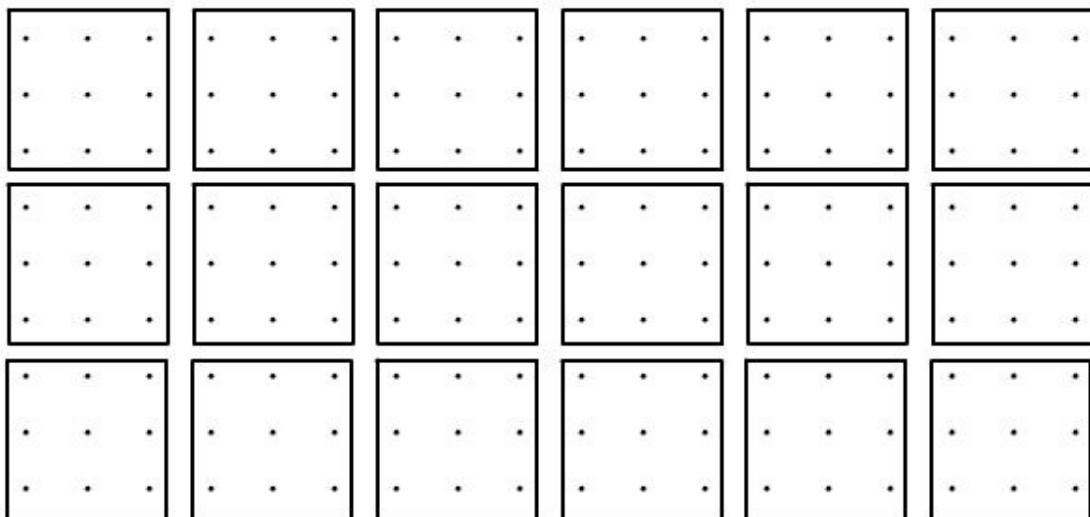


**3.sz. melléklet**  
**Négyzetek, négyszögek, háromszögek alkotása**

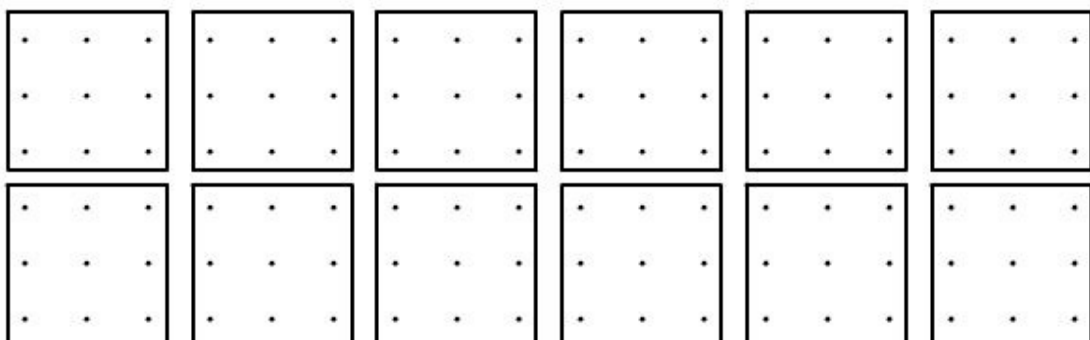
**1.** Hányféleképpen választhatunk ki négy pontot úgy, hogy azok négyzetet határozzanak meg?



**2.** Hány olyan különböző négyszöget lehet rajzolni, amelynek a csúcsai a pontokon vannak?

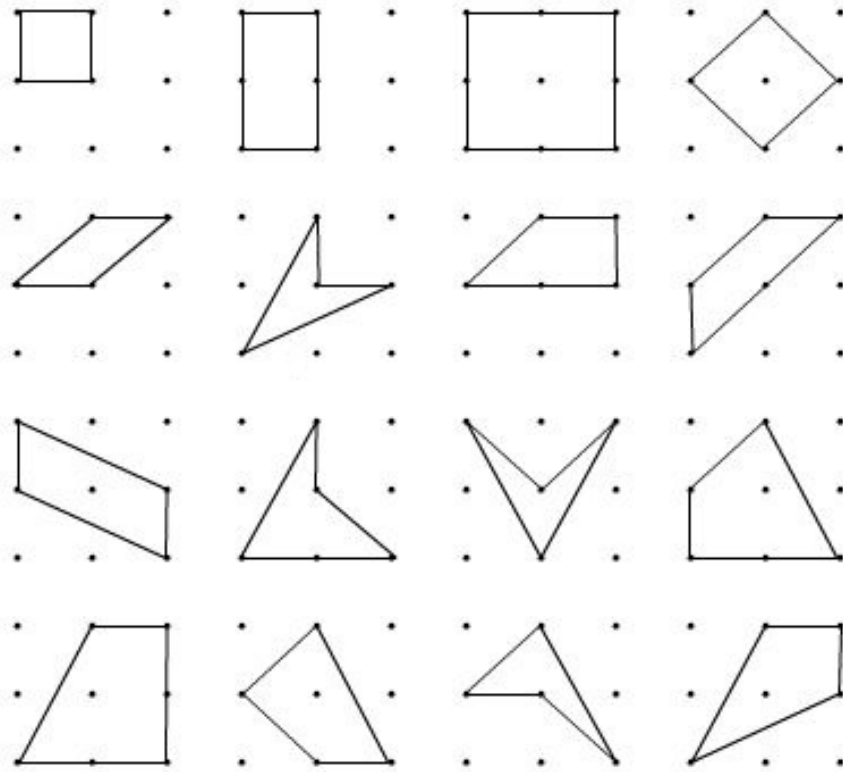


**3.** Hány olyan különböző háromszöget lehet rajzolni, amelynek a csúcsai a pontokon vannak?

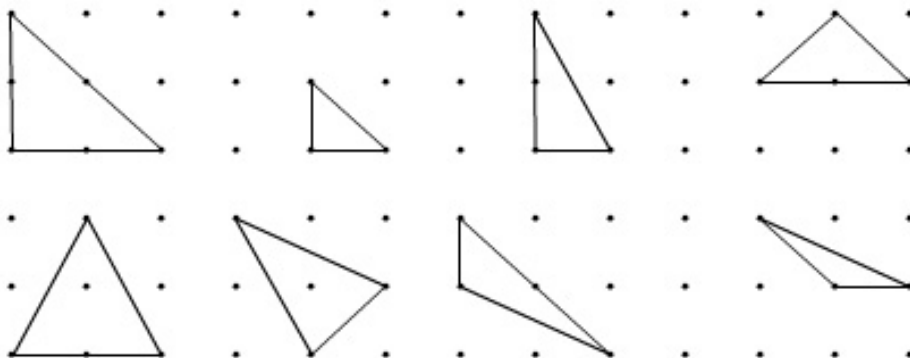


#### 4. sz. melléklet Párhuzamosság, merőlegesség

1. Színezd ki azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat! Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszögedet!

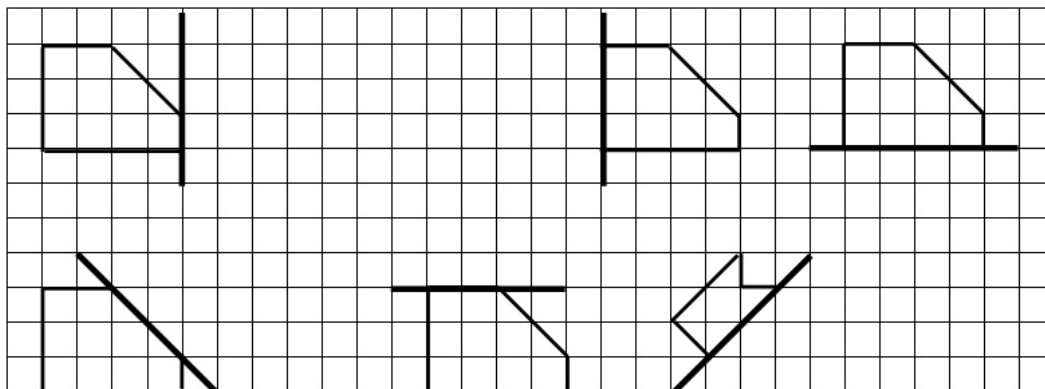


2. Színezd ki kékkel az egymásra merőleges oldalakat!

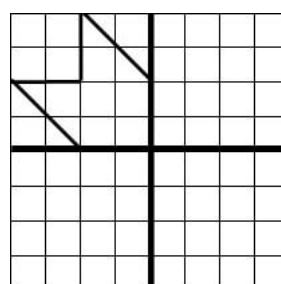
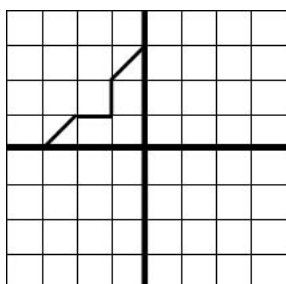


## 5.sz. melléklet I. feladatlap

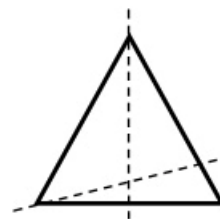
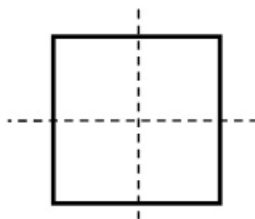
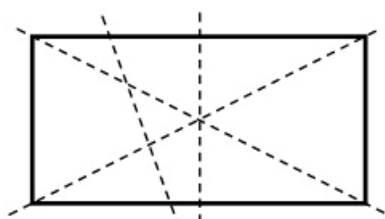
1. Tükrözd az ötszögeket! Az adott egyenes a tükör helye.



2. Tükrözd a mintát az egyik egyenesre! Tükrözd a mintát és a tükörképét is a másik egyenesre!

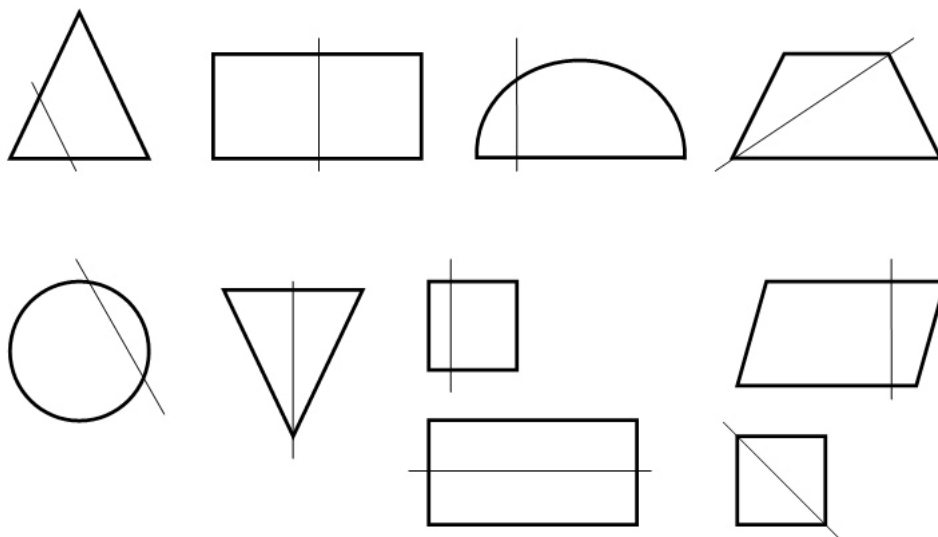


3. Húzd át pirossal a tükrötengelyeket!

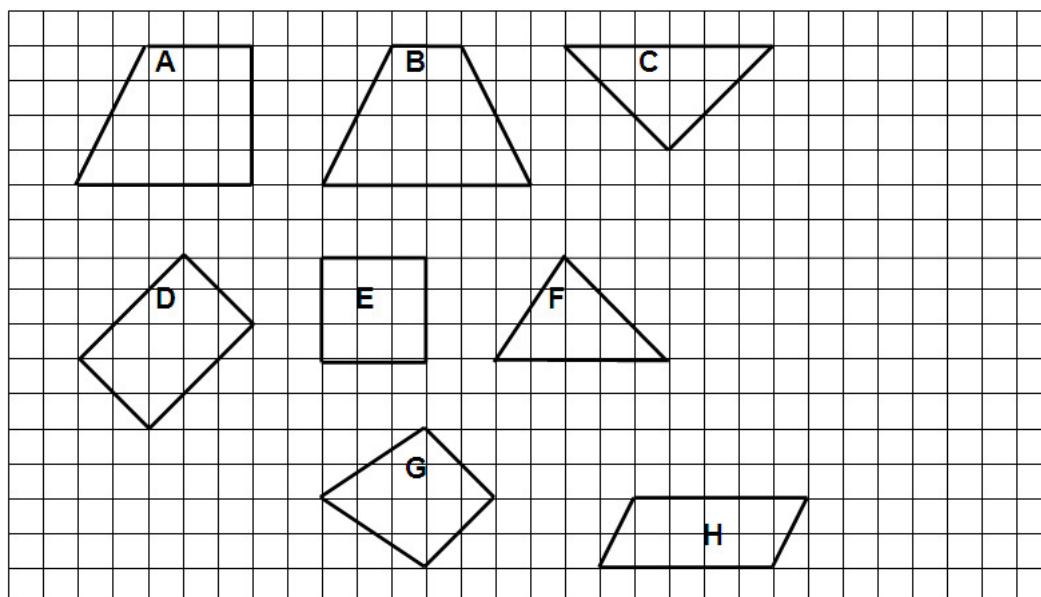


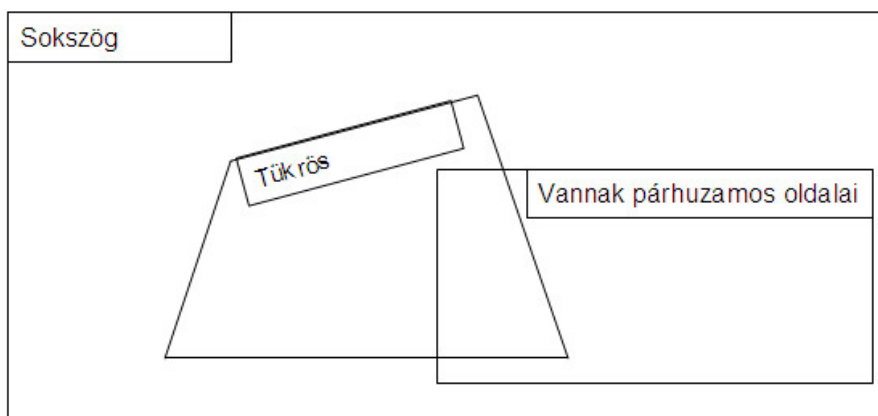
## 6.sz. melléklet II. feladatlap

1. Szerinted melyik ábrán van hibásan berajzolva a szimmetriatengely? Javítsd a hibát, ahol lehet!



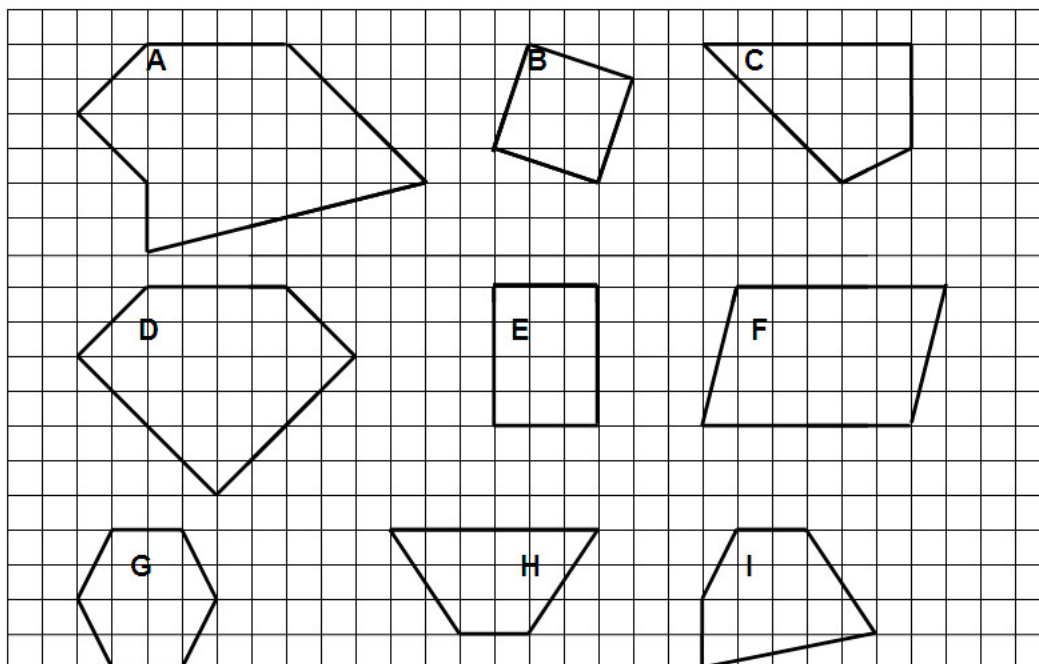
2. Írd be a sokszögek betűjelét az ábrán a megfelelő helyre!





**7.sz. melléklet**  
**III. feladatlap**

**1.**



- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat!
- Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszöget!
- Helyezd el a síkidomok betűjelét az ábrán a megfelelő helyre!

|                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| Síkido                    |                          |
| Vannak párhuzamos oldalai | Vannak merőleges oldalai |
|                           |                          |

d) Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

*Mindegyik síkidomnak van derékszöge.*

\_\_\_\_\_

*Van a síkidomok között ötszög.*

\_\_\_\_\_

*Mindegyik síkidomot csak egyenes vonal határol.*

\_\_\_\_\_

*Van olyan síkidom, amelyiknek nincsenek párhuzamos oldalai.*

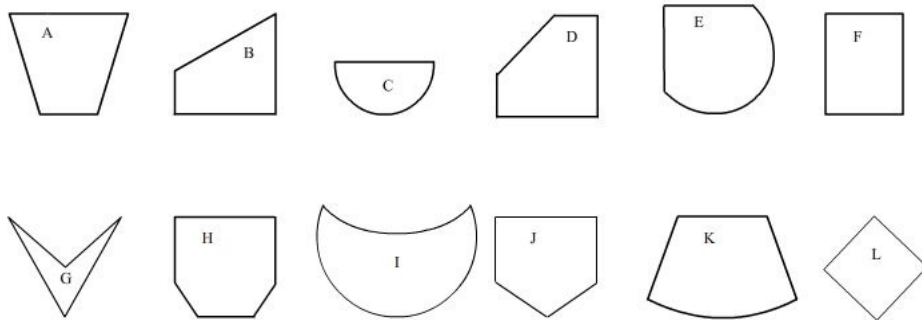
\_\_\_\_\_

*Mindegyik síkidomnak vannak merőleges oldalai.*

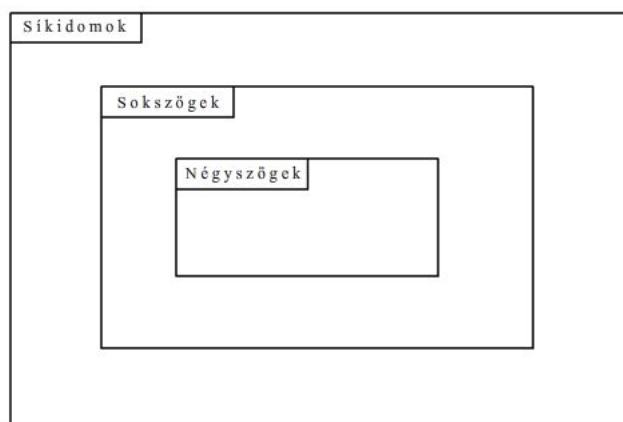
\_\_\_\_\_

## 8.sz. melléklet IV. feladatlap

1. Egy szabás-varrást ismertető könyvben a gyerekruhákon ilyen zsebek találhatók:



A síkidomok betűjelét írd be az ábrán a megfelelő helyre!



2. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

*A téglalap mindegyik szöge derékszög.*

\_\_\_\_\_

*A téglalap oldalai egyenlő hosszúak.*

\_\_\_\_\_

*A téglalap átlói tükörtengelyek.*

\_\_\_\_\_

*A téglalapnak van 2 tükörtengelye.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet oldalai egyenlő hosszúak.*

\_\_\_\_\_

*A négyzetnek 6 tükörtengelye van.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.*

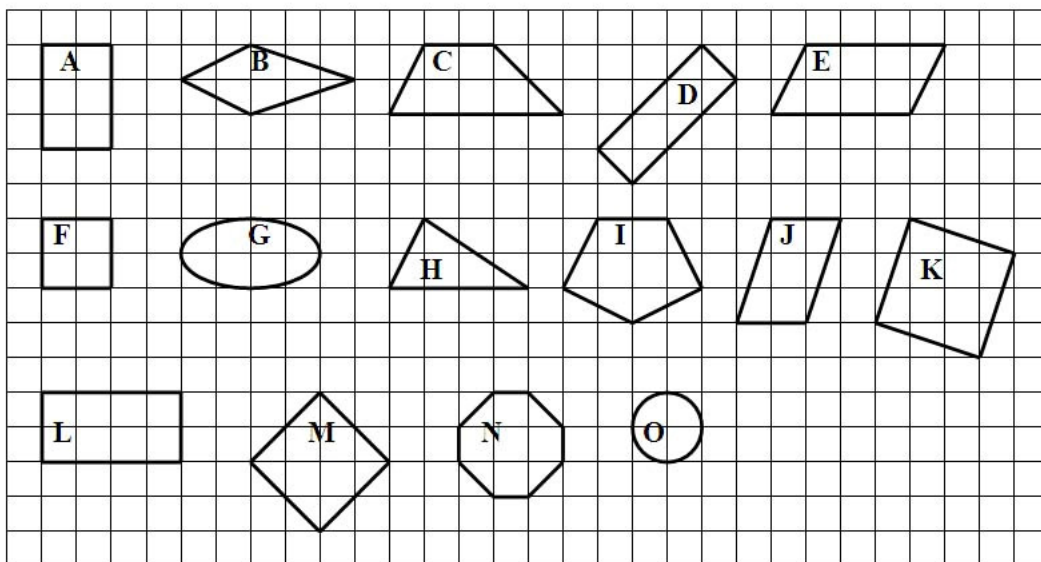
\_\_\_\_\_

*A téglalap szemközti oldalai nem párhuzamosak egymással.*

\_\_\_\_\_

**9.sz. melléklet**  
**2006-os felmérő feladatlap**

1.



a) Sorold fel a négyszögek betűjeleit!

---

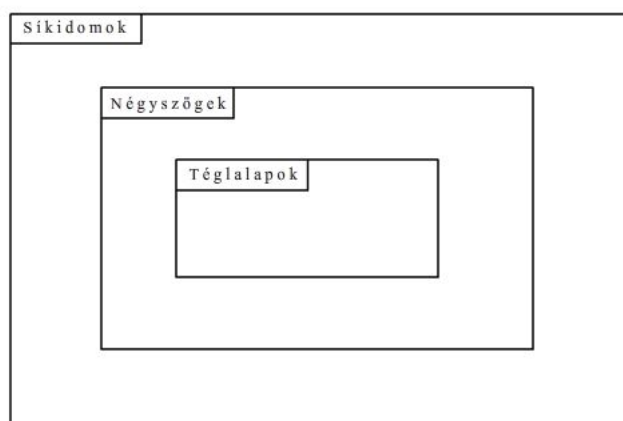
b) Sorold fel a téglalapok betűjeleit!

---

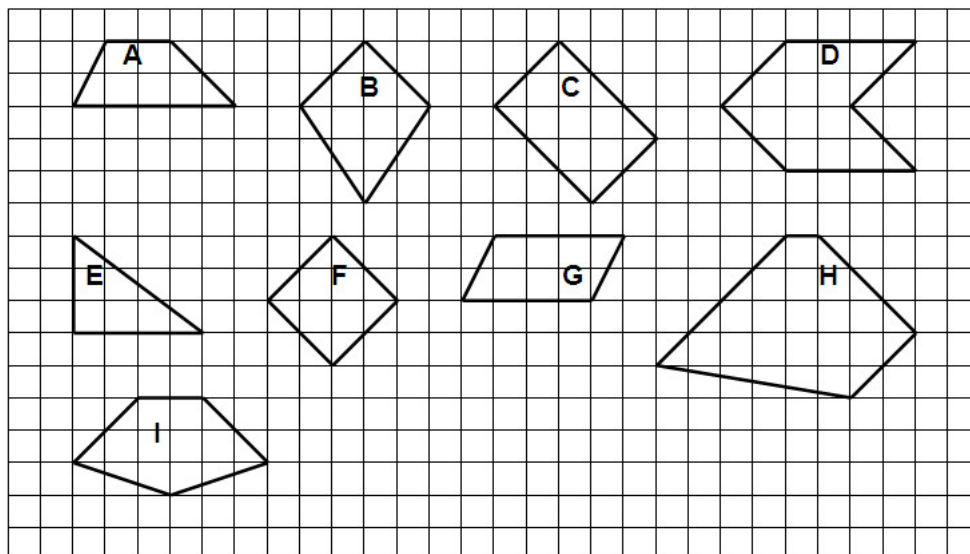
c) Sorold fel a négyzetek betűjeleit!

---

d) Helyezd el a síkidomok betűjelét az ábrán a megfelelő helyre!



2.



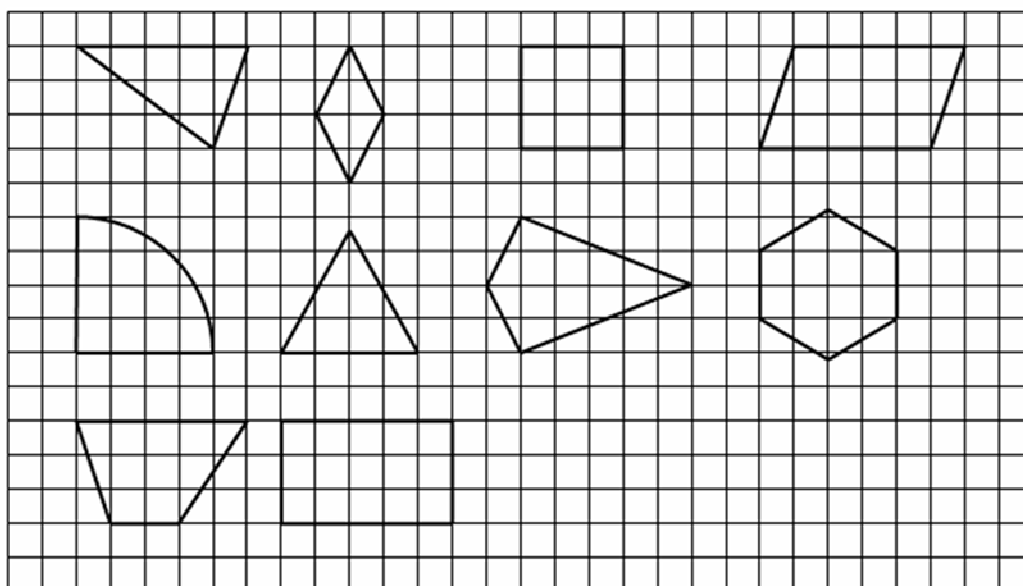
- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat!
- Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszöget!
- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak párhuzamos oldalai!

---

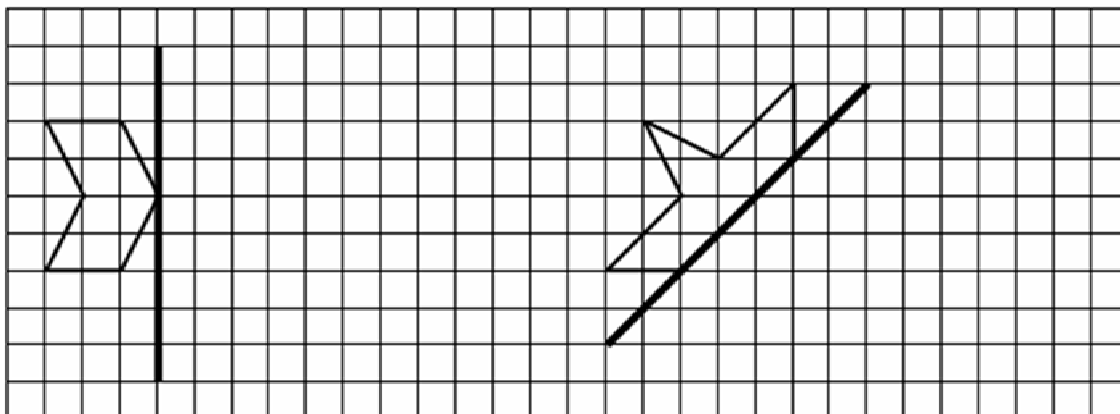
- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak merőleges oldalai!

---

- Melyik síkidom tükrös? Pirossal húzd meg a tükörtengelyeket! (Ha egy síkidomnál többet is találsz, akkor mindegyiket húzd meg pirossal!)



4. Tükrözd a síkidomokat a vastagon megrajzolt tükrötengelyekre!



5.

a) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a négyzetre!

Szemközti oldalai párhuzamosak.  
 Szemközti oldalai merőlegesek.  
 Szomszédos oldalai párhuzamosak.  
 Szomszédos oldalai merőlegesek.  
 Mindegyik szöge derékszög.  
 Nem mindegyik szöge derékszög.  
 Pontosan két tükrötengelye van.  
 4 tükrötengelye van.  
 8 tükrötengelye van.  
 Minden oldala egyenlő hosszúságú.  
 Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.



b) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a téglalapra!

Szemközti oldalai párhuzamosak.  
 Szemközti oldalai merőlegesek.  
 Szomszédos oldalai párhuzamosak.  
 Szomszédos oldalai merőlegesek.  
 Mindegyik szöge derékszög.  
 Nem mindegyik szöge derékszög.  
 4 tükrötengelye van.  
 Van 2 tükrötengelye.  
 Az átlók tükrötengelyek.  
 Minden oldala egyenlő hosszúságú.  
 Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.



6. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

*A téglalap egy különleges négyzet.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet egy különleges téglalap.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet oldalai nem egyenlők.*

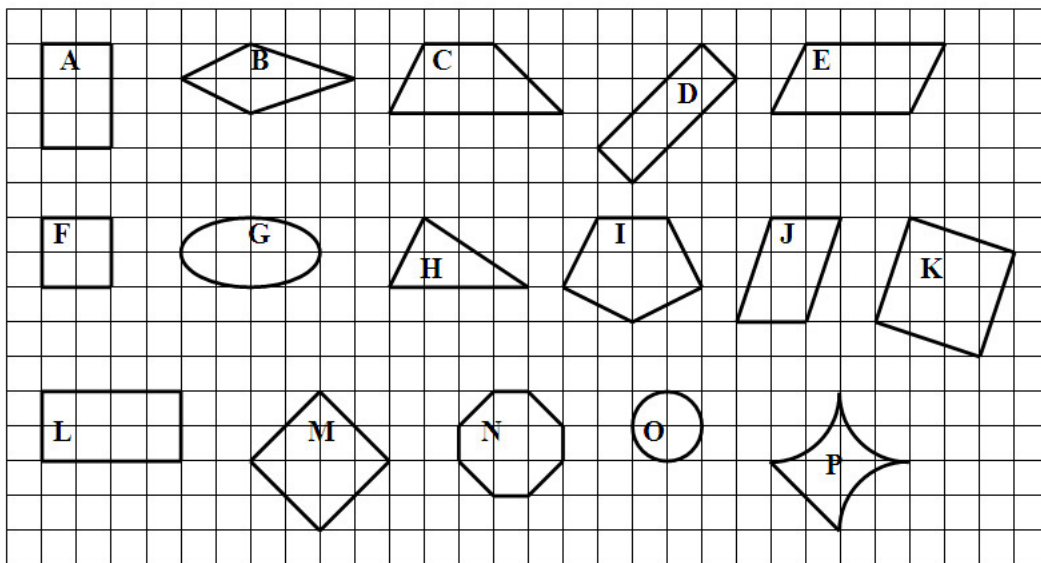
\_\_\_\_\_

*Minden négyzet téglalap is.*

\_\_\_\_\_

**10.sz. melléklet**  
**2008-as felmérő feladatlap**

1.



a) Sorold fel a négyszögek betűjeleit!

---

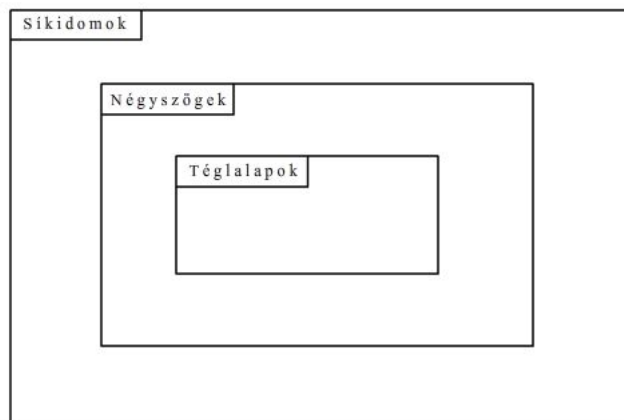
b) Sorold fel a téglalapok betűjeleit!

---

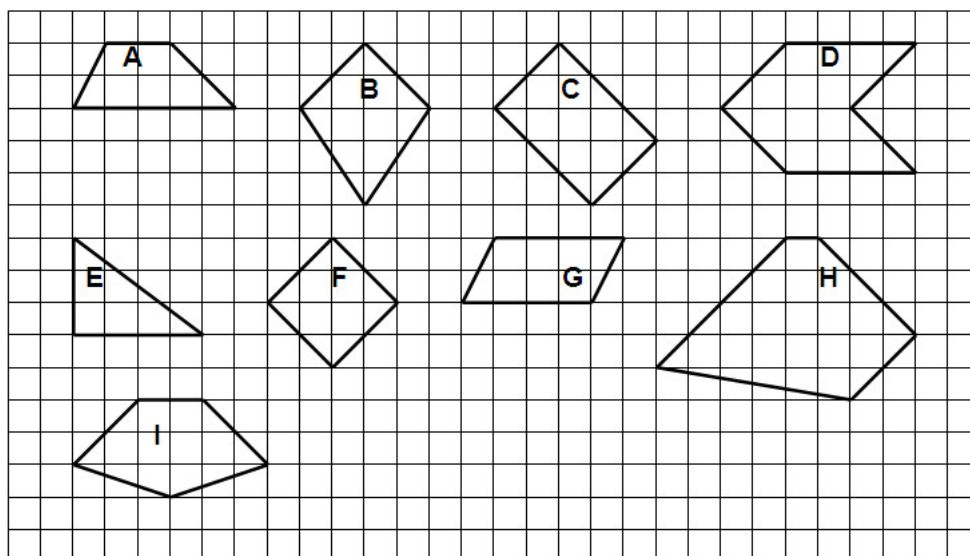
c) Sorold fel a négyzetek betűjeleit!

---

d) Helyezd el a síkidomok betűjelét az ábrán a megfelelő helyre!



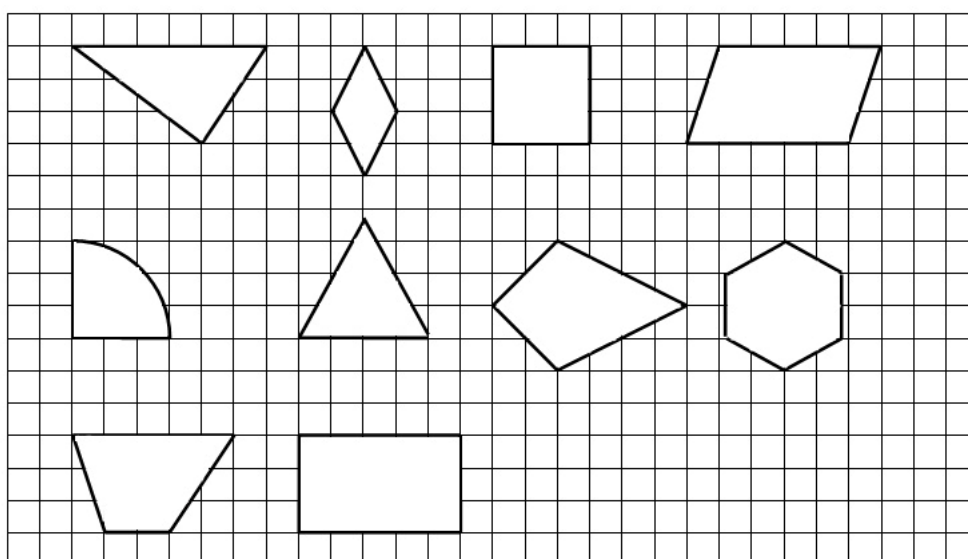
2.



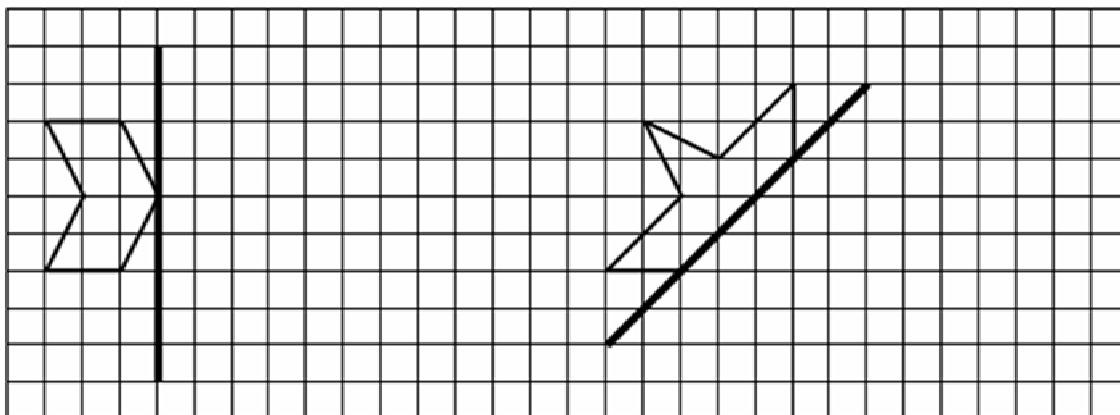
- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat!
- Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszöget!
- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak párhuzamos oldalai!

- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak merőleges oldalai!

3. Melyik síkidom tükrös? Pirossal húzd meg a tükrötengelyeket! (Ha egy síkidomnál többet is találsz, akkor mindegyiket húzd meg pirossal!)



4. Tükrözd a síkidomokat a vastagon megrajzolt tükrötengelyekre!



5.

a) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a négyzetre!

Szemközti oldalai párhuzamosak.  
 Szemközti oldalai merőlegesek.  
 Szomszédos oldalai párhuzamosak.  
 Szomszédos oldalai merőlegesek.  
 Mindegyik szöge derékszög.  
 Nem mindegyik szöge derékszög.  
 Pontosan két tükrötengelye van.  
 4 tükrötengelye van.  
 8 tükrötengelye van.  
 Minden oldala egyenlő hosszúságú.  
 Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.



b) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a téglalapra!

Szemközti oldalai párhuzamosak.  
 Szemközti oldalai merőlegesek.  
 Szomszédos oldalai párhuzamosak.  
 Szomszédos oldalai merőlegesek.  
 Mindegyik szöge derékszög.  
 Nem mindegyik szöge derékszög.  
 4 tükrötengelye van.  
 Van 2 tükrötengelye.  
 Az átlók tükrötengelyek.  
 Minden oldala egyenlő hosszúságú.  
 Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.



6. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

*A téglalap egy különleges négyzet.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet egy különleges téglalap.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet oldalai nem egyenlők.*

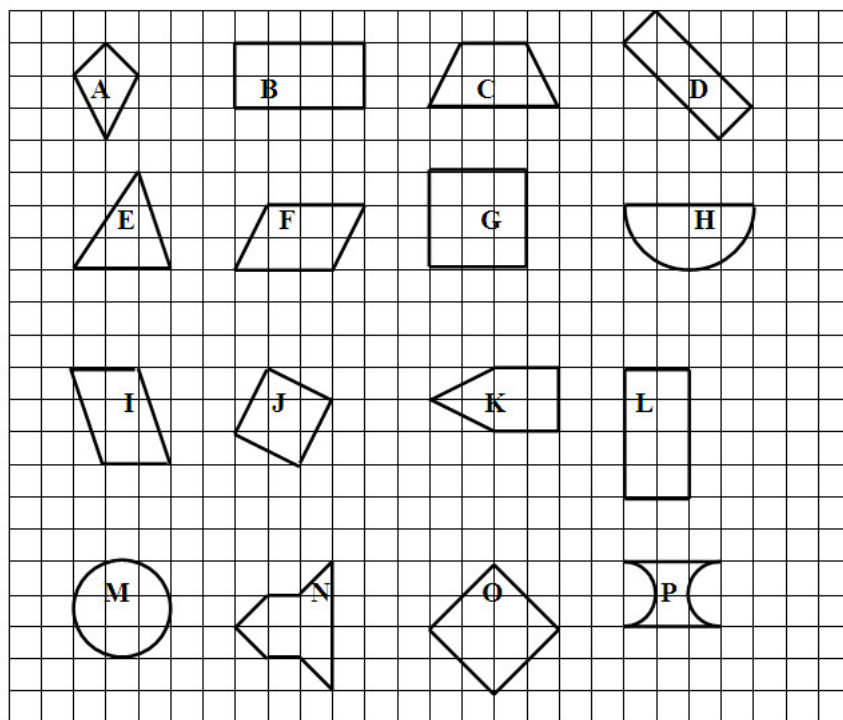
\_\_\_\_\_

*Minden négyzet téglalap is.*

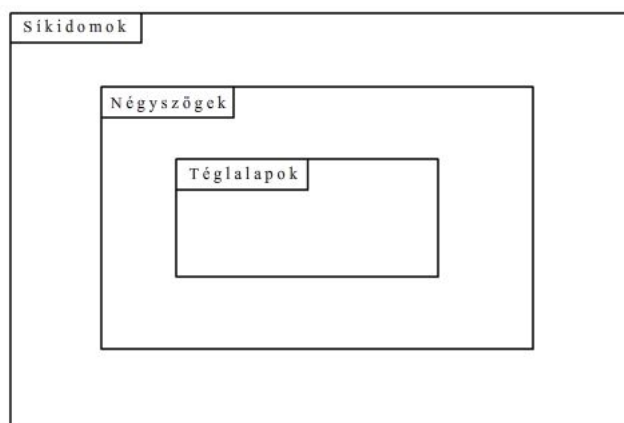
\_\_\_\_\_

# 11.sz. melléklet Késleltetett teszt

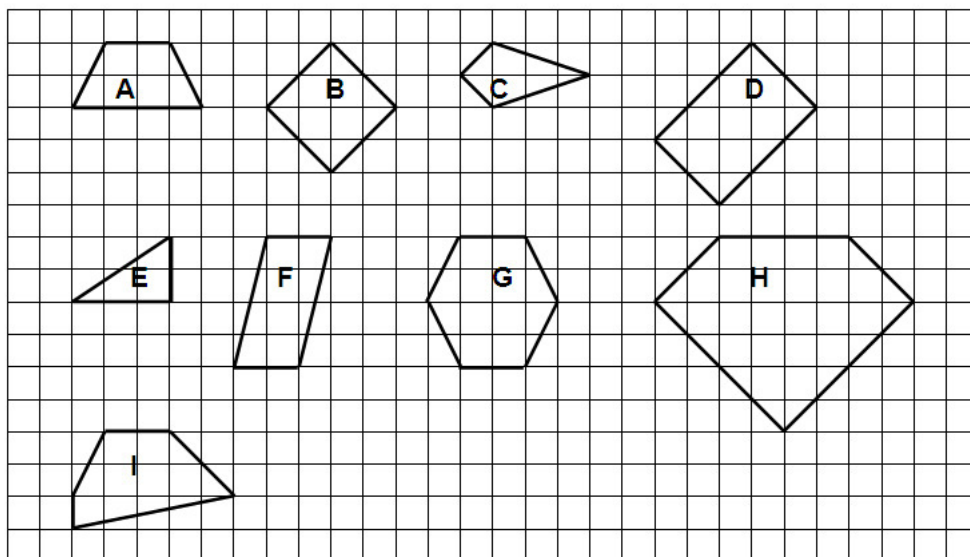
1.



- Sorold fel a négyszögek betűjeleit! \_\_\_\_\_
- Sorold fel a téglalapok betűjeleit! \_\_\_\_\_
- Sorold fel a négyzetek betűjeleit! \_\_\_\_\_
- Helyezd el a síkidomok betűjelét az ábrán a megfelelő helyre!



2.



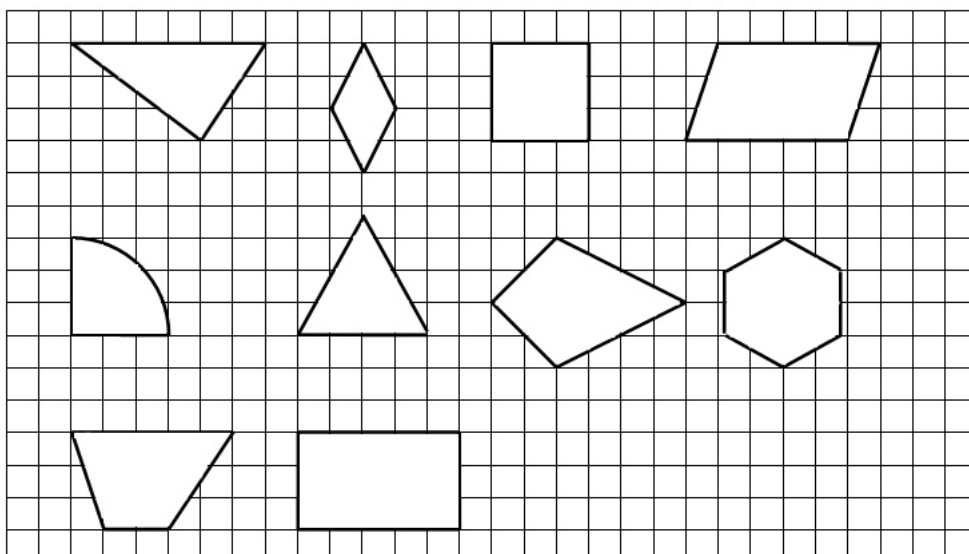
- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat!
- Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszöget!
- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak párhuzamos oldalai!

---

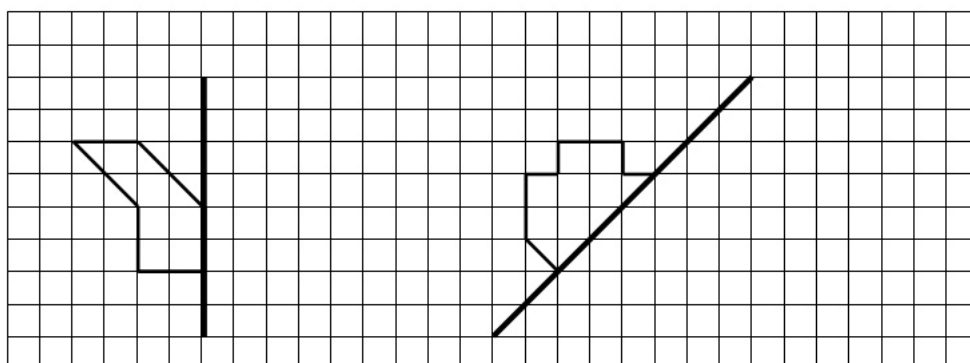
- Sorold fel azoknak a síkidomoknak a betűjelét, amelyeknek vannak merőleges oldalai!

---

**3.** Melyik síkidom tükrös? Pirossal húzd meg a tükörtengelyeket! (Ha egy síkidomnál többet is találsz, akkor mindegyiket húzd meg pirossal!)



4. Tükrözd a síkidomokat a vastagon megrajzolt tükörtengelyekre!



5.

a) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a négyzetre!

*Szemközti oldalai párhuzamosak.*  
*Szemközti oldalai merőlegesek.*  
*Szomszédos oldalai párhuzamosak.*  
*Szomszédos oldalai merőlegesek.*  
*Mindegyik szöge derékszög.*  
*Nem mindegyik szöge derékszög.*  
*Pontosan két tükörtengelye van.*  
*4 tükörtengelye van.*  
*8 tükörtengelye van.*  
*Minden oldala egyenlő hosszúságú.*  
*Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.*



b) Húzd alá a következő állítások közül azokat, amelyek igazak a téglalapra!

*Szemközti oldalai párhuzamosak.*  
*Szemközti oldalai merőlegesek.*  
*Szomszédos oldalai párhuzamosak.*  
*Szomszédos oldalai merőlegesek.*  
*Mindegyik szöge derékszög.*  
*Nem mindegyik szöge derékszög.*  
*4 tükörtengelye van.*  
*Van 2 tükörtengelye.*  
*Az átlók tükörtengelyek.*  
*Minden oldala egyenlő hosszúságú.*  
*Szemközti oldalai egyenlő hosszúak.*



6. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem!

*A téglalap egy különleges négyzet.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet egy különleges téglalap.*

\_\_\_\_\_

*A négyzet oldalai nem egyenlők.*

\_\_\_\_\_

*Minden négyzet téglalap is.*

\_\_\_\_\_