

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Kombinatorikus számok általánosításairól

Mező István

Témavezető: Prof. Dr. Phạm Ngọc Ánh



Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Kombinatorikus számok általánosításairól

Mező István

Témavezető: Prof. Dr. Phạm Ngọc Ánh



Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Bevezetés

Dolgozatomban régi, és újabb keletű, kombinatorikában előforduló leszámlálási problémákból származó ún. kombinatorikus számok általánosításával foglalkozom.

Röviden arról van szó, hogy halmazokat partíciókra, illetve permutációkat ciklusokra bontva egyes elemeket (r darabot) „megkülönböztetünk”, és azt követeljük meg, hogy ezek különböző blokkokban, illetőleg ciklusokban szerepeljenek. Ezzel a plusz feltétellel egy új számcsalád bontakozik ki, az r -Stirling számoké. Ezeknek a vizsgálata a disszertáció legfőbb célja.

Ha ezt a kikötést nem tesszük, a „hagyományos” Stirling számokat kapjuk [10]. Érdekes tény, hogy az utóbbiak több száz éve ismeretesek ugyan, számos neves matematikus foglalkozott velük, ezek általánosításainak, az r -Stirling számoknak a tulajdonságait csak újabban tárták fel. Ezekre vonatkozóan Broder [2] és Carlitz [3, 4] cikkei alapvetőek, de valószínűségelméleti aspektusukat is tárgyalja Charalambides [5] kiváló könyve. Történeti érdekesség, hogy ezen számok először 1906-ban tűntek fel Nielsen [15] könyvében. Dolgozatomban az itt elkezdett munkát szándékoztam folytatni.

Az értekezés a következőképpen épül fel. Az első fejezet az elengedhetetlenül szükséges alapvető fogalmakat vezeti be. A rákövetkező fejezet a Bell polinomok r -Stirling számok ismeretében szinte automatikusan adódó általánosítását tárgyalja. A Bell polinomok számos kombinatorikai és valószínűségelméleti kérdésben felmerülnek (elegendő csak Comtet vagy Riordan klasszikus könyveit [6, 17] megemlítenünk). Ám az r -Stirlingekből képezhető polinomokról máig nincs összefoglaló, alapvetőnek nyilvánítható közlemény, elszört eredmények vannak csak. Céлом éppen ez a hiánypótlás – számos új eredménnyel kiegészítve.

A következő szakaszban az Euler- és Fubini számok neves szerzők által régen feltárt kapcsolatát veszem alapul (l. [16, 18, 19]), és ezen fogalomkör segítségével – mind analitikus, mind kombinatorikai úton – bemutatom, hogyan kell „áttérni” arra az esetre, amikor a partíciókra és ciklusokra a fentebb említett új feltételt kirójuk. Nevezetesen, egy kombinációs zár-játék segítségével (l. [19]) olyan általánosítását vezetem be az Euler számoknak, melyek egy sor kombinatorikai azonosságot írnak újabb formába. Ezzel a bekezdés elején idézett eredmények továbbfejlesztését nyújtom.

Ezt követően bebizonyítom az r -Stirling számok sorozatainak unimodalitási tulajdonságát, vagyis belátom, hogy ezek a sorozatok egy bizonyos indexig szigorúan növekednek, majd ugyanígy csökkennek. Becslést adok arra az indexre is, melyre ez a maximum felvétetik. Ezen eredmények Hammersley, Harper,

Wegner [8, 9, 20, 21] munkájának egyenes folytatásának tekinthetők. A Stirling számok „hagyományos” esetével többek között Erdős Pál foglalkozott [7].

Később az említett számokból képzett végtelen sorok összegezhetségét vizsgálom, és konvergencia esetén explicit vagy rekurzív képletet adok ezen sorok összegére. Ehhez szükség volt ún. hiperharmonikus számokat tartalmazó bizonyos sorösszegek meghatározására. Tekintve, hogy harmonikus számokat tartalmazó ilyen formátumú sorok összegét Euler írta le, elmondható, hogy ebben az értelemben Euler formuláit sikerült megjavítani.

Végül, egy további általánosító lépést téve olyan új számcsaládot konstruálok, melynek segítségével a Bernoulli polinomok igen régi fogalma kerül új megvilágításba. Nevezetesen, racionális helyeken felvett értékeit az itt definiált számokkal ki lehet számolni. Ezen számok egyébként az r -Stirlingeket és a geometriai hálók elméletében szereplő Whitney számokat [1] ötvözik, közös általánosítást képezve.

A Stirling- és Bell számok általánosításai

Mint szó volt róla, a disszertáció tárgyát a matematika „enumeratív kombinatorika” nevű ágának Stirling számok néven ismert fogalma – pontosabban ezek általánosítása – képezi. Ezek a fogalmak kerülnek most részletesebb kifejtésre.

Az elsőfajú, n és k paraméterű Stirling szám megadja, hogy hány olyan permutációja van n elemnek, mely k ciklusból áll. Ciklus alatt olyan sorrendcserét értünk, amikor valamely elemhez egy másik, ahhoz egy harmadik, s.í.t., végül az utolsóhoz a kiinduló elem rendelődik. Az ilyen permutációk összes számát $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ módon jelölik.

A másodfajú, n és k paraméterű Stirling szám azt adja meg, hogy n elemet hányféleképpen lehet k csoportba (blokkba) foglalni. Ezekre a számokra az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ jelölés eléggé elterjedt.

Ezen fogalmak régről ismertek és elméletük jól kidolgozott. Azonban létezik egy olyan módosításuk, melyről ugyanez egyáltalán nem mondható el. Nevezetesen, egy új, tipikusan r -rel jelölt paramétert is bevezetünk és ezzel az előbbi meghatározásokat a következőképpen módosítjuk.

Az n és k paraméterű elsőfajú r -Stirling szám n elem azon permutációit számlálja, melyekben r darab, meghatározott és rögzített elem *különböző* ciklusokban van. Hasonlóan módosul a másodfajú Stirling számok definíciója. Most is és a permutációknál is az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az r elem az első r elemet jelenti.

Új, a kombinatorikában igen sok helyen előforduló számsorozatot kapunk, ha

a partíciós számokat rögzített n mellett $k = 0, 1, 2, \dots, n$ értékekre összegezzük. Az így kapott sorozat elemeit Bell számoknak nevezik és B_n -nel jelölik. Ennél általánosabbat vezetünk be, a Bell polinomokat:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

$B_n(1)$ kombinatorikai jelentése a fentiek fényében világos. Természetesen megtehető, hogy az r paramétert is figyelembe vesszük egy ilyen sorozat képzésénél. Ekkor az ún. $B_{n,r}$ r -Bell számokat kapjuk. Az n -edik r -Bell szám tehát megadja, hogy hányféleképpen lehet n elemet úgy csoportokra bontani, hogy az első r elem különböző csoportokba kerüljön. (Ilyenkor természetesen $n \geq r$, ami miatt inkább $n+r$ elemet tekintünk, emlékeztetve arra, hogy van elkülönülve r „kitüntetett” elem.) Az értekezés első fejezetét az r -Bell számok és polinomok tulajdonságainak leírása teszi ki.

Az r -Bell polinomokkal, mint együtthatókkal képzett hatványsor (az ún. exponenciális generátorfüggvény) a következő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)+rz}.$$

Az r -Bell polinomok kifejezhetők a hagyományos Bell polinomokkal a következőképpen:

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n r^k \binom{n}{k} B_{n-k}(x).$$

Két további rekurzió is adott:

$$\begin{aligned} B_{n,r}(x) &= x \left(\frac{d}{dx} B_{n-1,r}(x) + B_{n-1,r}(x) \right) + r B_{n-1,r}(x), \\ e^x x^r B_{n,r}(x) &= x \frac{d}{dx} (e^x x^r B_{n-1,r}(x)). \end{aligned}$$

Az alábbi előállítások szintén érdekesek:

$$\begin{aligned} B_{n,r} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!}, \\ B_{n,r} &= \frac{2n!}{\pi e} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} e^{e^{e^{i\theta}}} e^{r e^{i\theta}} \sin(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

A Fubini- és Euler számok általánosításai

Ezt követően n elem csoportokra bontásánál azt is tekintetbe vesszük, hogy az egyes csoportok milyen sorrendben jelennek meg. Ha az r paramétert – és az ezzel járó plusz megkötést – nem figyeljük, klasszikus fogalomhoz jutunk, az ún. Fubini számokhoz:

$$F_n = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Ha azonban feltesszük, hogy a csoportba sorolásnál (mostmár $n + r$ elemet tekintve) az r megadott elem közül semelyik kettő nem kerülhet közös csoportba, akkor elegendő még feltáratlan fogalomhoz, az általunk r -Fubini számoknak nevezett és $F_{n,r}$ -rel jelölsorozathoz jutunk. Az r -Stirling számok definíciójából következően tehát

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^n (k+r)! \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}.$$

Az r -Fubini számok kapcsán az volt a fő cél, hogy a hagyományos Fubini számokra ismert eredményeket megfogalmazzuk $r > 0$ esetben is. Az egyik legfontosabb ilyen ezen számok és az ún. Euler számok közötti kapcsolatot:

$$F_n = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle 2^k.$$

Röviden, az n és k paraméterű $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$ Euler számok azon permutációkat számlálják össze n elem esetén, melyekben k -szor fordul elő, hogy két szomszédos szám közül a kisebbhez kisebbet rendel, mint a nagyobbikhoz. Egy kombinációs-zár konstrukciót hívtunk segítségül az $r > 0$ esetben érvényes definíció „megsejtéséhez”. Ez a következő:

Definíció: Az n, k paraméterű r -Euler szám $n + r$ elem azon permutációit számolja, melyekben k -szor fordul elő, hogy két szomszédos szám közül a kisebbhez kisebbet rendel, mint a nagyobbikhoz, és a hozzárendelt számok között legfeljebb egy kitüntetett van az r -ből. Az r -Euler számokra az $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle_r$ jelölést vezethetjük be.

Ezzel a következő azonosságot láttuk be, ismét csak a kombinációs-zár játékkal:

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^n \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle_r 2^k.$$

További azonosságok sorozata szerepel ezekre a számokra vonatkozóan a disszertáció harmadik fejezetében.

Unimodalitás

Egy sorozatot unimodálisnak neveziünk, ha növekszik, majd csökken. Ez az egyszerű tulajdonság gyakran csak igen nehézkesen bizonyítható. Ezt a tulajdonságot – sőt erősebbet, az ún. szigorú log-konkavitást – bizonyítottuk az r -Stirling számokra. Egyik tételünk a következő:

Tétel (Mező [11]): Az elsőfajú r -Stirling számokra létezik olyan n -től és r -től függő $K_{n,r}^1$ index, melyre

$$\cdots < \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 - 1 \end{matrix} \right]_r \leq \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 \end{matrix} \right]_r > \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 + 1 \end{matrix} \right]_r > \cdots$$

Továbbá ez az index nagyságrendileg:

$$K_{n,r}^1 = r + \left[\log \left(\frac{n-1}{r-1} \right) - \frac{1}{r} + o(1) \right].$$

Tétel (Mező [11]): A másodfajú r -Stirlingek is unimodálisak legfeljebb két maximumhellyel, melyek közül a kisebbikre

$$K_{n,r}^2 < \frac{n-r}{\log(n-r) - \log \log(n-r)} \quad (n \geq r+3),$$

$$\frac{n-r}{\log(n-r)} < K_{n,r}^2 \quad (n \geq r + \max \{18, \log 2 / \log(1+1/r)\}).$$

Végtelen összegek

A dolgozat ötödik fejezetében az r -Stirling számokból képzett, következő alakú végtelen összegeket vizsgáltuk (k, m, r, q tetszőleges paraméterek, ügyelve a konvergenciára):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+k+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+k+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+k \\ m \end{matrix} \right\}_r \frac{z^n}{n^q}.$$

A talált rekurziós vagy explicit képletek relatíve komplikáltak és hosszadalmasak, ezért csak egy egészen speciális paraméterre vonatkozót mutatunk be, nevezetesen az első sorban található összeget, melyben $k = 0, m = 1$. Mint az látható, ekkor a következő adódik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+r \\ r+1 \end{matrix} \right]_r \frac{z^n}{n^q n!}.$$

Ismeretes, hogy erre a speciális paraméterezésre az elsőfajú r -Stirling számok az ún. hiperharmonikus számokat adják. Ezek rekurzívan definiálhatók:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \\ H_n^{(2)} &= H_1 + H_2 + \dots + H_n, \\ H_n^{(3)} &= H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \dots + H_n^{(2)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Az első sor a „klasszikus” harmonikus számok esete, a további sorokban levő számokat adott rendű hiperharmonikus számoknak nevezzük. Visszatérve a fentiekre, megmutatható, hogy

$$H_n^{(r)} = \frac{1}{n!} \left[\begin{matrix} n+r \\ r+1 \end{matrix} \right]_r.$$

Ennek az eredménynek köszönhetően összegünk a sokkal áttekinthetőbb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m}$$

formára hozható. Ahhoz hogy legalább ennek az összegzését megmutathassuk, be kell még vezetnünk a hipergeometrikus függvényt:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\bar{k}} (a_2)_{\bar{k}} \dots (a_p)_{\bar{k}} x^k}{(b_1)_{\bar{k}} (b_2)_{\bar{k}} \dots (b_q)_{\bar{k}} k!},$$

ahol $(a)_{\bar{k}} = a(a+1) \dots (a+k)$ a Pochhammer-szimbólumnak nevezett mennyiség. Ha még bevezetjük az

$$S(r, m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} \quad (m > r),$$

és

$$B(k, m) := {}_{m+1}F_m \left(\begin{matrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & k+1 \\ 2, & 2, & \dots, & 2 & \end{matrix} \middle| 1 \right).$$

rövidítéseket, akkor nyerjük a következőt:

Tétel (Mező [13, 14]): Ha $r \geq 2$ és $m \geq r + 1$, akkor

$$S(r, m) = S(1, m) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k} [S(k, m-1) - B(k, m)].$$

A fejezet eredményei közül bemutatunk még egy következményként kapott összeget:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+2 \\ 4 \end{matrix} \right]_2 \frac{1}{2^n n n!} = \frac{1}{8} \zeta(3) + \ln^2(2) - 2 \ln(2) + 1 \approx 0.244416.$$

Itt ζ az ún. Riemann-féle függvény.

A későbbiekben speciálisan a hiperharmonikus számokra vonatkozó eredményeket idézünk, a teljesség igénye nélkül. Bebizonyítottuk például [12], hogy

$$H_n^{(2)} = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}.$$

Hasonlóan,

$$H_n^{(3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \frac{2!(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)},$$

$$H_n^{(4)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2^{(2)} + \binom{n}{3} H_3 + \sum_{k=4}^n \binom{n}{k} \frac{3!(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

és így tovább. A negatív rendű hiperharmonikusok bevezetésével (mikor $H_n^{(r)}$ -ben $r < 0$) a

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H_k^{(-r+1)}$$

képlet a fenti egyenlőségeket egyszerű formájúra transzformálja.

Egy további eredményként a régebből ismert

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^t t {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -t \right).$$

tételt általánosítottuk arra az esetre, amikor a számlálóban a hiperharmonikus számok szerepelnek.

Tétel (Mező [12]): Minden $r = 1, 2, \dots$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = e^t \left[\sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \frac{(r-1)!}{(r!)^2} t^r {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{matrix} \middle| -t \right) \right].$$

Bernoulli polinomok

Az utolsó fejezetben a több száz éve felfedezett Bernoulli polinomokra adunk új formulát azzal, hogy az r -Stirling és ún. Whitney számok [1] közös általánosítását adjuk. Ezt a következőképpen tesszük: két polinomról „kikényszerítjük”, hogy egyenlőek legyenek, amivel az együtthatókat egyértelműsítjük. Ezek a polinomok

$$(mx + r)^n = \sum_{k=0}^n m^k W_{m,r}(n, k) x^k$$

$$m^n x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n w_{m,r}(n, k) (mx + r)^k.$$

(A képletek tényleg egyértelműen definiálják a $W_{m,r}(n, k)$ és $w_{m,r}(n, k)$ számokat, mint polinomok együtthatóit. A dolgozatban ezen számokat r -Whitney számoknak nevezzük, hogy a két eredeti szám – r -Stirling és Whitney – nevét ötvözzük, innen a W és w jelölés.) Egyik tételünk szerint tehát a

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

módon definiált $B_n(x)$ polinomokat előállíthatjuk a

$$\binom{n+1}{l} B_{n-l+1} \left(\frac{r}{m} \right) = \frac{n+1}{m^p} \sum_{k=0}^n m^k W_{m,r}(n, k) \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} k+1 \\ l \end{bmatrix}$$

módon.

Summary

Introduction

In the thesis I generalize several combinatorial numbers coming from enumerative problems.

More precisely, when we construct partitions of sets and cycles of permutations, we distinct r fixed elements. These elements are enforced to be in different blocks or cycles. With this new assumption, a different class of numbers appear. They are called r -Stirling numbers [2, 3, 4]. The main aim of the dissertation is to investigate these numbers.

If we drop the mentioned restriction, we get the well known Stirling numbers. It is an interesting fact that these numbers appeared many centuries ago but the properties of their generalization (the r -Stirling numbers) have been revealed just one hundred years ago in the book of Nielsen [15] from 1906. It is worth to mention the above cited fundamental work of Broder, Carlitz and the accomplished book of Charalambides [5]. Latter deals with the probability-theoretical aspects of Stirling numbers.

The thesis is built up as follows. The first chapter describes the most fundamental definitions. The next one contains the results coming from the generalization of Bell numbers. The Bell polynomials appear in many different contexts in combinatorics and in probability theory, for example (it is enough to mention the classical book of Comtet and Riordan [6, 17]). But there are only sporadic results with respect to the generalization via the r -Stirling numbers. One of our goal is to fill this gap – with a number of new results.

In the next chapter I concern on the connection between Fubini and Eulerian numbers revealed by a number of noted authors (see [16, 18, 19]). With this, I show how should we “switch” to the case when we enforce the new assumption described above. Namely, with the aim of a combination lock-game (see [19]), I construct a kind of generalized Eulerian numbers. With this new notion I rephrased a couple of old identities in a more general form.

Next, I prove that the r -Stirling numbers form unimodal sequences, that is, for a fixed n they strictly increase to an index and then decrease. I give estimates to the indexes for which these maxima reached. These results can be considered as continuations of the work of Hammersley, Harper, Wegner [8, 9, 20] and others. The classical case of Stirling numbers was investigated by Pál Erdős also [7].

In the fifth and sixth chapters I deal with the summability of sequences

formed by the numbers mentioned above and give explicit or recursive formula for the sum of these series. To do this, I need some series involving the so-called hyperharmonic numbers. Since such series involving harmonic numbers were investigated by Euler, one can say that in this sense Euler's results are enriched.

Finally, going further, I construct again a new class of combinatorial numbers. With these we throw new light upon the very old notion of Bernoulli polynomials. Namely, we can calculate these polynomials at rational arguments with our new numbers. These numbers generalizes both the r -Stirlings and the Whitney numbers of geometric lattices.

A generalization of Stirling and Bell numbers

As we mentioned above, the main subject of this dissertation belongs to the theory of enumerative combinatorics. More exactly, we deal with the ways of generalizations of some known combinatorial numbers.

The Stirling number of the first kind with parameters n and k gives the number of permutations on n letters with exactly k cycles. These numbers are denoted by $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$.

Similarly, the Stirling number of the second kind with parameters n and k enumerates the number of partitions of n elements with k groups or blocks. The notation in this case is $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

These notions are very well known and their theory is fully developed. But there exists a modification of them, which seems to be relatively new. Namely, one can introduce a new parameter r . The r -Stirling number of the first kind with parameters n, k gives the number of permutations on n letters with k cycles such that the first r elements are in distinct cycles. The definition of the second kind case is similar. Sometimes we call these r elements as marked elements.

If we sum over the parameter k (while n is fixed), we get a new sequence. Its elements are called Bell numbers and denoted by B_n . A more general notion is the Bell polynomial:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k.$$

The combinatorial meaning of the $B_n = B_n(1)$ Bell numbers is obvious. Of course, one may consider the case when $r > 1$. In this case we get the so-called $B_{n,r}$ r -Bell numbers. Hence $B_{n,r}$ gives the number of partitions on n elements

when the marked ones are in distinct blocks. (Since $n \geq r$, we consider $n + r$ elements instead of n elements.)

The first chapter of the thesis contains the systematic description of the r -Bell numbers and polynomials. For example, a power series with general term $B_n(x)/n!$ (also known as exponential generating function) is

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z - 1) + rz}.$$

The r -Bell polynomials can be expressed with the ordinal ones as

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^n r^k \binom{n}{k} B_{n-k}(x).$$

Two additional recursion are also given:

$$\begin{aligned} B_{n,r}(x) &= x \left(\frac{d}{dx} B_{n-1,r}(x) + B_{n-1,r}(x) \right) + r B_{n-1,r}(x), \\ e^x x^r B_{n,r}(x) &= x \frac{d}{dx} (e^x x^r B_{n-1,r}(x)). \end{aligned}$$

Moreover, the next identities are verified:

$$\begin{aligned} B_{n,r} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!}, \\ B_{n,r} &= \frac{2n!}{\pi e} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} e^{e^{e^{i\theta}}} e^{r e^{i\theta}} \sin(n\theta) d\theta. \end{aligned}$$

A generalization of the Fubini and Euler numbers

When a partition is constructed, one may consider the order of the blocks. If the restriction on the marked elements is eliminated, we get the classical notion of Fubini numbers, denoted as F_n :

$$F_n = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

In the case when the parameter r is involved, an unrevealed notion appears. We gave the name r -Fubini numbers to these sequences.

Our goal was to phrase and derive the well known identities and other results on Fubini numbers with respect to r -Fubini numbers. One of the most interesting result is the connection of Fubini numbers and the Eulerian numbers:

$$F_n = \sum_{k=0}^n \left\langle n \atop k \right\rangle 2^k.$$

In short, the Eulerian number $\left\langle n \atop k \right\rangle$ with parameters n and k counts the permutations on n letters in which exactly k elements are greater than the previous element (“ascent”). We used a combination lock game to conjecture the proper definition of the r -Eulerian numbers. This is the following.

Definition: The r -Eulerian number with parameters n, k , denoted by $\left\langle n \atop k \right\rangle_r$, counts the permutations on n letters in which there are k ascents such that in the ascents there is at most one marked element.

We proved the next identity:

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^n \left\langle n \atop k \right\rangle_r 2^k.$$

There is a number of identities with respect to these numbers in the third Chapter.

Unimodality

A sequence is called unimodal, if it increases and then decreases. Often hard to prove this simple property. We deduced that even a stronger property also holds for r -Stirling numbers. Our theorem is as follows.

Theorem (Mező [11]): There is an index $K_{n,r}^1$, depending on n and r , for which

$$\cdots < \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 - 1 \end{matrix} \right]_r \leq \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 \end{matrix} \right]_r > \left[\begin{matrix} n \\ K_{n,r}^1 + 1 \end{matrix} \right]_r > \cdots.$$

Moreover, this index can be estimated as

$$K_{n,r}^1 = r + \left[\log \left(\frac{n-1}{r-1} \right) - \frac{1}{r} + o(1) \right].$$

Theorem (Mező [11]): The r -Stirling numbers are also unimodal with at

most two maxima, and the least maximum can be approximated by

$$K_{n,r}^2 < \frac{n-r}{\log(n-r) - \log \log(n-r)} \quad (n \geq r+3),$$

$$\frac{n-r}{\log(n-r)} < K_{n,r}^2 \quad (n \geq r + \max\{18, \log 2 / \log(1+1/r)\}).$$

In the fifth chapter we ran on the next series formed by r -Stirling numbers.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+k+r \\ m+r \end{matrix} \right]_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+k+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+k \\ m \end{matrix} \right\}_r \frac{z^n}{n^q}.$$

The recursions and explicit expressions are relatively complicated, so we cite only the results with some special parameters, like

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+r \\ r+1 \end{matrix} \right]_r \frac{z^n}{n^q n!}.$$

It is known that for this special case, the r -Stirling numbers of the first kind give back the so-called hyperharmonic numbers. Now we define them by recursion.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$H_n^2 = H_1 + H_2 + \dots + H_n,$$

$$H_n^3 = H_1^2 + H_2^2 + \dots + H_n^2,$$

$$\vdots$$

In the first line there is the n th harmonic number, while in the other lines there are the hyperharmonic numbers of order one, two, three... To go back to the former considerations, we cite a known identity

$$H_n^r = \frac{1}{n!} \left[\begin{matrix} n+r \\ r+1 \end{matrix} \right]_r.$$

Thanks to this, our series has a more readable form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^r}{n^m}.$$

We need also the hypergeometric function:

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_q \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\bar{k}}(a_2)_{\bar{k}} \dots (a_p)_{\bar{k}} x^k}{(b_1)_{\bar{k}}(b_2)_{\bar{k}} \dots (b_q)_{\bar{k}} k!},$$

where $(a)_{\bar{k}} = a(a+1)\dots(a+k)$ is the Pochhammer-symbol. We introduce the abbreviation

$$S(r, m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} \quad (m > r),$$

and

$$B(k, m) := {}_{m+1}F_m \left(\begin{matrix} 1, & 1, & \dots, & 1, & k+1 \\ 2, & 2, & \dots, & 2 \end{matrix} \middle| 1 \right).$$

With these we win the next

Theorem (Mező [13, 14]): Suppose that $r \geq 2$ and $m \geq r + 1$, then

$$S(r, m) = S(1, m) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k} [S(k, m-1) - B(k, m)].$$

As a corollary of the results in the cited chapter, we have calculated that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+2 \\ 4 \end{matrix} \right]_2 \frac{1}{2^n n n!} = \frac{1}{8} \zeta(3) + \ln^2(2) - 2 \ln(2) + 1 \approx 0.244416.$$

Here ζ is the Riemann function.

Without the sake of completeness, we cite some results with respect to the hyperharmonic numbers. For example, we pointed out (Mező [12]) that

$$H_n^{(2)} = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}.$$

Similarly,

$$H_n^{(3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} \frac{2!(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)},$$

$$H_n^{(4)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2}H_2^{(2)} + \binom{n}{3}H_3 + \sum_{k=4}^n \binom{n}{k} \frac{3!(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

and so on. Introducing the hyperharmonic numbers of negative order (that is, when $r < 0$ in $H_n^{(r)}$), the identities above can be compressed in the compact form

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H_k^{(-r+1)}.$$

As a further result, we generalized Gosper's theorem

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^t {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -t \right).$$

to the case when in the nominator there are hyperharmonic numbers.

Theorem (Mező [12]): For all $r = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = e^t \left[\sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \frac{(r-1)!}{(r!)^2} t^r {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{matrix} \middle| -t \right) \right].$$

Bernoulli polynomials

In the last chapter we give a new formula for the very old Bernoulli polynomials. To do this, we find a common generalization of the r -Stirling and Whitney numbers (latter appears in the theory of geometric lattices, see [1]). We enforce the next two polynomials to be equal.

$$\begin{aligned} (mx+r)^n &= \sum_{k=0}^n m^k W_{m,r}(n,k) x^k \\ m^n x(x-1) \cdots (x-n+1) &= \sum_{k=0}^n w_{m,r}(n,k) (mx+r)^k. \end{aligned}$$

(These formulae really define the numbers $W_{m,r}(n,k)$ and $w_{m,r}(n,k)$ uniquely as the coefficients of the polynomials above.) The Bernoulli polynomials are

determined by their generating function

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!},$$

and one of our theorem says that

$$\binom{n+1}{l} B_{n-l+1} \left(\frac{r}{m} \right) = \frac{n+1}{m^p} \sum_{k=0}^n m^k W_{m,r}(n,k) \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} k+1 \\ l \end{bmatrix}.$$

Irodalomjegyzék/References

- [1] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, *Disc. Math.* 159 (1996), 13-33.
- [2] A. Z. Broder The r -Stirling numbers *Disc. Math.* 49 (1984), 241-259.
- [3] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – I *Fibonacci Quart.* 18 (1980), 147-162.
- [4] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – II *Fibonacci Quart.* 18 (1980), 242-257.
- [5] Ch. A. Charalambides, Combinatorial methods in discrete distributions, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
- [6] L. Comtet, Advanced Combinatorics, D. Reidel, Boston, 1974.
- [7] P. Erdős, On a conjecture of Hammersley, *J. London Math. Soc.* 28 (1953), 232-236.
- [8] J. M. Hammersley, The sums of products of the natural numbers, *Proc. London Math. Soc.* 3(1) (1951), 435-452.
- [9] L. H. Harper, Stirling behavior is asymptotically normal, *Ann. Math. Stat.* 38 (1967), 410-414.
- [10] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addison Wesley, 1994.
- [11] I. Mező, *On the maximum of r -Stirling numbers* Adv. Appl. Math. 41 (2008), 293-306.
- [12] Mező I., A. Dil, Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence, *Cent. Eur. J. Math.* 7(2) (2009), 310-321.
- [13] I. Mező, A. Dil, Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function, *J. Number Theory* 130(2) (2010), 360-369.
- [14] I. Mező, *New properties of r -Stirling series*, *Acta Math. Hungar.* 119(4) (2008), 341-358.

- [15] N. Nielsen, Handbuch der Theorie des Gammafunktion, Chelsea, New York, Reprint (1966).
- [16] H. Prodinger, Ordered Fibonacci partitions, *Canadian Math. Bull.* 26 (1983), 312-316.
- [17] J. Riordan, Combinatorial identities, Wiley, New York, 1958.
- [18] S. M. Tanny, On some numbers related to the Bell numbers, *Canad. Math. Bull.* 17 (1975), 733-738.
- [19] D. J. Velleman, G. S. Call, Permutations and combination locks, *Math. Mag.* 68(4) 1995, 243-253.
- [20] H. Wegner, H. Über das Maximum bei Stirlingschen Zahlen zweiter Art, *J. Reine Angew. Math.* 262/263 (1973), 134-143.
- [21] H. Wegner, Stirling numbers of the second kind and Bonferroni's inequalities, *Elem. Math.* 60 (2005), 124-129.
- [22] J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* 94 (1883), 203-232.

A szerző publikációi/Publications of the author

1. Mező I., *Modulus of continuity and best approximation with respect to Vilenkin-like systems in some function spaces*, Georgian Math. J. 13(2) (2006), 315-332.
2. Mező I.; Simon P., *Integrals of weighted maximal kernels with respect to Vilenkin systems*, Publ. Math. Debrecen 71(1-2) (2007), 57-65.
3. Mező I., *Some inequalities for hyperharmonic series*, Advances in Inequalities for Special Functions, Nova Science Publishers, 121-125. (2006).
4. Mező I., *About the non-integer property of hyperharmonic numbers* Annales Univ. Sci. Budapest 50 (2007), 1-8.
5. Mező I., *New properties of r -Stirling series* Acta Math. Hungar. 119(4) (2008), 341-358.
6. Mező I., *On the maximum of r -Stirling numbers* Adv. Appl. Math. 41 (2008), 293-306.
7. A. Dil; Mező I., *A Symmetric Algorithm for Hyperharmonic and Fibonacci Numbers* Appl. Math. Comput. 206 (2008), 942-951.
8. Mező I.; A. Dil, *Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence* Cent. Eur. J. Math. 7(2) (2009), 310-321.
9. Mező I. *Analytic extension of hyperharmonic numbers* Online J. Anal. Comb. 4 (2009).
10. Mező I., *Several generating functions for second-order recurrence sequences*, J. Integer Seq. 12(3) (2009) Article 09.3.7.
11. Mező I.; A. Dil, *Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function*, J. Number Theory 130(2) (2010), 360-369.

A szerző konferencia-előadásai/Talks of the author

1. *Integrals of kernel functions on Vilenkin groups*, International Students' Conference on Analysis, 2008. 02. 03., Zamárdi (Hungary).
2. *r -Stirling numbers, Whitney numbers and their common generalization*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 2008. 09. 22., Anadia (Portugália/Portugal).
3. *Harmonic numbers, their generalizations and the integer property*, Winter School on Explicit methods in Number Theory, 2009. 01. 28., Debrecen (Hungary).
4. *Generating functions of powers of combinatorial sequences*, 2009. 04. 10., Antalya (Törökország/Turkey).
5. *On the maximum of r -Stirling numbers and generalized Bell polynomials*, 2009. 04. 12., Antalya (Törökország/Turkey).