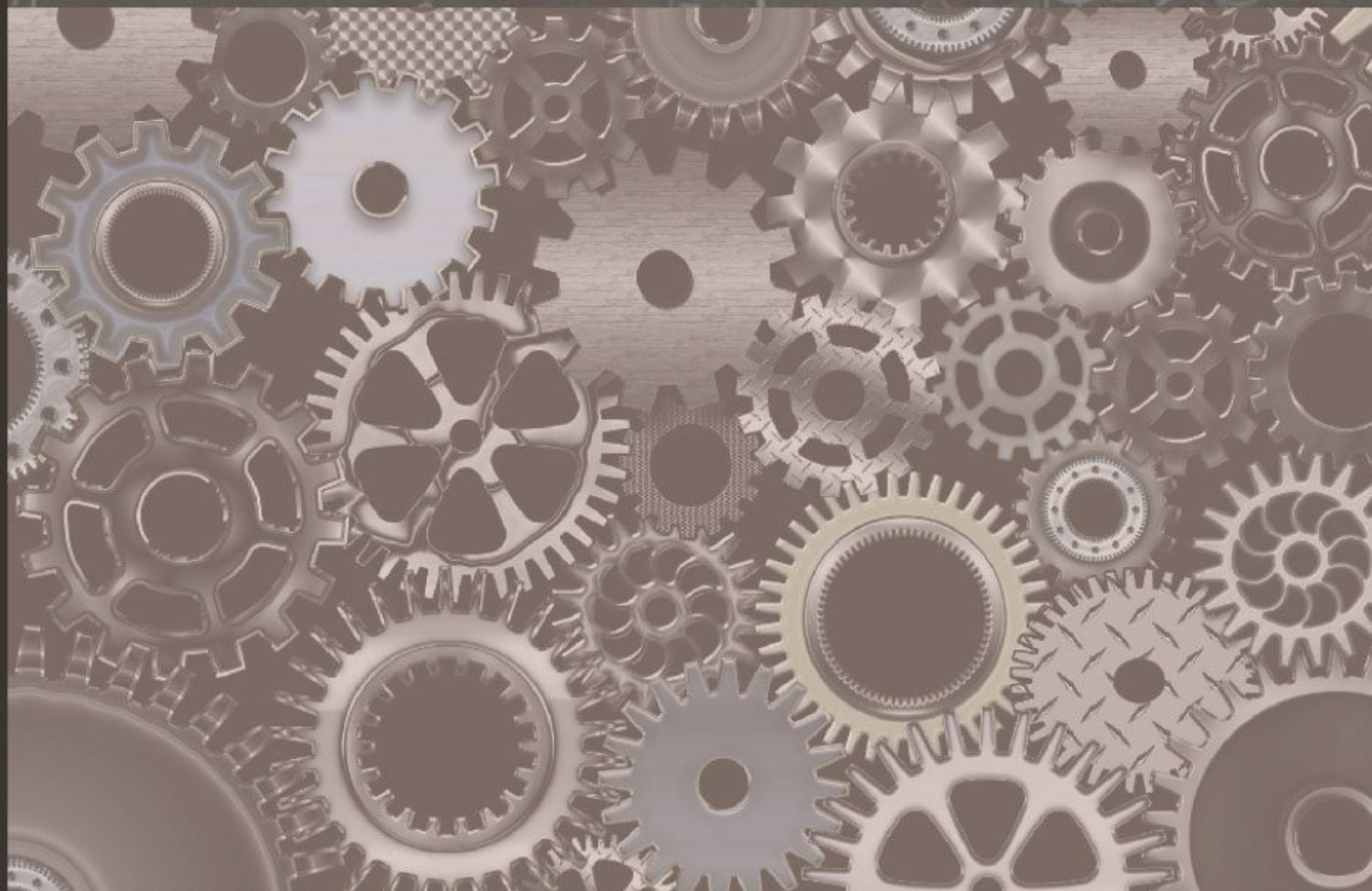


Dr. Szíki Gusztáv Áron,  
Dr. Szántó Attila

# Mechanika menedzsereknek



Debreceni Egyetem Műszaki Kar  
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR  
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Szíki Gusztáv Áron  
Dr. Szántó Attila

# MECHANIKA MENEDZSEREKNEK



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debrecen University Press

2019

# Tartalomjegyzék

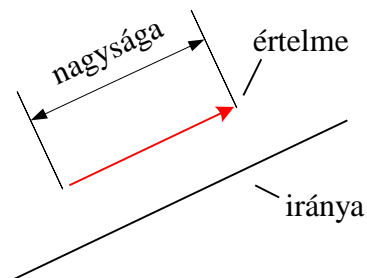
1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra .....	4
1.1 A vektor fogalma.....	4
1.2 A vektor leírása koordinátákkal .....	4
1.3 Vektorműveletek.....	6
2. Témakörök és alapfogalmak .....	12
3. Newton törvényei, erőtvénnyek .....	12
3.1 Newton törvényei .....	12
3.2 Erőtvénnyek .....	13
4. Anyagi pont statikája .....	18
4.1 Anyagi pont egyensúlya .....	18
4.2 Az eredő erő számítása .....	19
4.3 Egyensúlyi problémák megoldása .....	21
5. Az anyagi pont dinamikája .....	27
5.1 A pont kinematikája.....	28
5.1.1 A pont mozgásának leírása skalármennyiségekkel .....	28
5.1.2 A pont mozgásának leírása vektormennyiségekkel.....	32
5.2 A pont kinetikája.....	45
5.2.1 A mozgásegyenlet és megoldása .....	45
5.2.2 Impulzus- és munkatétel.....	45
6. Merev test statikája.....	53
6.1 Erőrendszer eredő vektorkettőse .....	55
6.2 Erőrendszerek egyenértékűsége és eredője .....	57
6.3 Erőrendszerek osztályozása .....	58
6.4 Síkbeli erőrendszerek.....	62
7. Homogén gravitációs erőrendszer eredő vektorkettőse és eredője. Súlypont 68	
7.1 Homogén gravitációs erőrendszer eredője .....	69
7.2 Súlypont .....	70
7.3 Síkidomok súlypontjának meghatározása .....	72
8. A merev test egyensúlyi állapota és egyenletei .....	75
8.1 A merev test egyensúlyi állapota.....	75
8.2 Egyensúlyi egyenletek merev testre.....	76
8.3 Kényszerek: támaszok és csatlakozások.....	77
8.4 Kényszererők kiszámítása .....	79

8.5	Tartók statikája.....	84
8.6	Valós kényszerek .....	88
8.6.1	Súrlódásos felület (támasz).....	88
8.6.2	Gördülési ellenállás.....	92
8.6.3	Kötélsúrlódás.....	97
8.6.4	Csapsúrlódás .....	101
8.6.5	Ék.....	105
8.6.6	Horony .....	107
8.6.7	Csavar.....	109
9.	Merev test dinamikája .....	109
9.1	Merev test síkmozgása, merev tárcsa fogalma .....	109
9.2	Merev tárcsa kinematikája.....	111
9.2.1	Haladó mozgás (transzláció).....	111
9.2.2	Forgómozgás.....	113
9.2.3	Általános síkmozgás .....	114
9.3	Merev tárcsa kinetikája.....	117
9.3.1	Alapfogalmak és összefüggéseik.....	117
9.3.2	Mozgásegyenletek merev tárcsára.....	125
10.	Szilárdságtan.....	131
10.1	Igénybevételi függvények és ábrák.....	134
10.2	Igénybevételi függvények kiszámítása és ábrázolása .....	134
11.	Igénybevételek .....	161
11.1	Húzó és nyomó igénybevétel .....	162
11.2	Hajlító igénybevétel.....	166
11.3	Nyíró igénybevétel.....	172
11.4	Csavaró igénybevétel.....	176
11.5	Összetett igénybevételek .....	179
	Irodalomjegyzék .....	180

# 1. Matematikai bevezetés – Vektoralgebra

## 1.1 A vektor fogalma

A **vektor** egy irányított szakasz, amelyet nagyságával, irányával és értelmével jellemezhetünk. A szakasz hossza a vektor nagysága, iránya a vele párhuzamos egyenes, értelmét a szakasz végén található nyílhegy rögzíti.

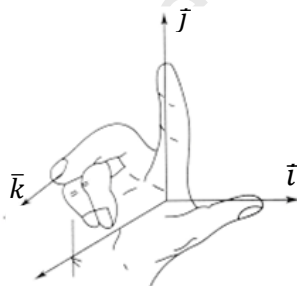


1. ábra. A vektor ábrázolása

## 1.2 A vektor leírása koordinátákkal

A vektor leírásához bevezetjük az  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  **bázisvektorokat** az alábbiak szerint:

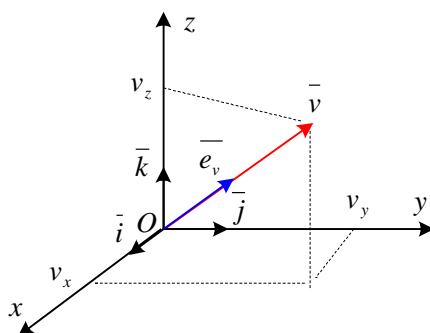
- $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  és  $\vec{k}$  egységvektorok:  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$
- $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  és  $\vec{k}$  páronként merőlegesek egymásra
- $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  és  $\vec{k}$  jobbsodrású rendszert alkotnak



2. ábra. Jobbsodrású rendszer

A  $\vec{v}$  vektort fel tudjuk írni az  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  bázisvektorokkal az alábbiak szerint:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \quad (1.1)$$



3. ábra. A vektor koordinátái

Az egyenletben (1.1)  $v_x$ ,  $v_y$  és  $v_z$  a  $\vec{v}$  vektor koordinátái. Oszlopvektoros jelöléssel:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

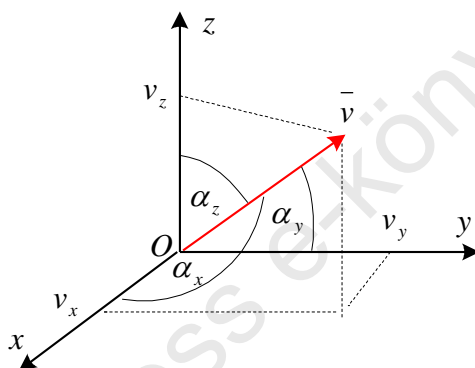
A vektor nagyságát a koordinátáiból az alábbi összefüggéssel számíthatjuk ki:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.3)$$

A  $\vec{v}$  vektor irányába mutató egységvektort az alábbi összefüggés értelmezi:

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Jelöljük a  $\vec{v}$  vektor és az  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordináta tengelyek által bezárt szögeket  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  és  $\alpha_z$ -vel az ábra szerint:



4. ábra. A  $\vec{v}$  vektor koordináta tengelyekkel által bezárt szögei

$\cos \alpha_x$ ,  $\cos \alpha_y$  és  $\cos \alpha_z$  az alábbiak szerint számítható:

$$\cos \alpha_x = \frac{v_x}{v}, \cos \alpha_y = \frac{v_y}{v}, \cos \alpha_z = \frac{v_z}{v} \quad (1.4)$$

Az  $\vec{e}_v$  egységvektor kifejezhető az  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  bázisvektorokkal:

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}}{v} = \cos \alpha_x \cdot \vec{i} + \cos \alpha_y \cdot \vec{j} + \cos \alpha_z \cdot \vec{k} \quad (1.5)$$

Az (1.3) és (1.5) egyenletek alapján:

$$|\vec{e}_v| = \sqrt{\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z} = 1 \quad (1.6)$$

Az (1.6) egyenletből az alábbi azonosságot kapjuk:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1 \quad (1.7)$$

## 1.3 Vektorműveletek

### Vektorok összeadása

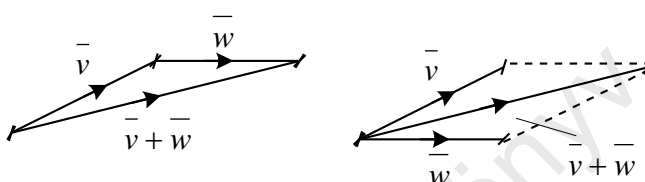
Számítással:

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}) + (w_x \cdot \bar{i} + w_y \cdot \bar{j} + w_z \cdot \bar{k}) \\ &= (v_x + w_x) \cdot \bar{i} + (v_y + w_y) \cdot \bar{j} + (v_z + w_z) \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\bar{v} + \bar{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Szerkesztéssel:



### Vektorok kivonása

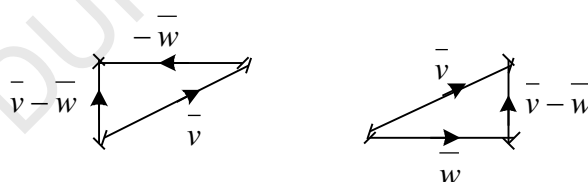
Számítással:

$$\begin{aligned}\bar{v} - \bar{w} &= (v_x \cdot \bar{i} + v_y \cdot \bar{j} + v_z \cdot \bar{k}) - (w_x \cdot \bar{i} + w_y \cdot \bar{j} + w_z \cdot \bar{k}) \\ &= (v_x - w_x) \cdot \bar{i} + (v_y - w_y) \cdot \bar{j} + (v_z - w_z) \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

Oszlopvektoros alakban:

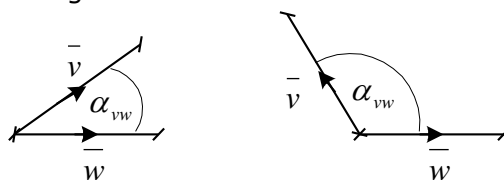
$$\bar{v} - \bar{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Szerkesztéssel:



### Vektorok által bezárt szög

Két vektor által bezárt szög  $0^\circ$  és  $180^\circ$  között változhat.



### Vektorok skaláris szorzása

A  $\bar{v}$  és  $\bar{w}$  vektorok skaláris szorzatát az (1.10) összefüggés értelmezi:

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = |\bar{v}| \cdot |\bar{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \quad (1.10)$$

A fenti definícióból a következőket állapíthatjuk meg:

- Ha  $0^\circ \leq \alpha_{vw} < 90^\circ$  akkor  $0 < \vec{v} \cdot \vec{w}$
- Ha  $\alpha_{vw} = 90^\circ$  akkor  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
- Ha  $90^\circ < \alpha_{vw} \leq 180^\circ$  akkor  $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$

### Skaláris szorzat számítása a vektor koordinátáiból

#### 1.1 tétel:

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok skaláris szorzata a következő összefüggéssel számítható a vektorok koordinátáiból:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \quad (1.11)$$

Bizonyítás:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \overbrace{\cos 90^\circ}^0 = 0 \rightarrow \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{|\vec{i}|}^1 \cdot \overbrace{\cos 0^\circ}^1 = 1 \rightarrow \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \cdot (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}^1 + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}^0 + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}^0 + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}^0 + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}^1 + v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}^0 \\ &\quad + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{i}}^0 + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{j}}^0 + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}^1 \\ &= v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z \end{aligned}$$

### Vektorok szögeinek kiszámítása a vektorok koordinátáiból

#### 1.2 tétel:

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok által bezárt szög koszinusza a következő összefüggéssel számítható:

$$\cos \alpha_{vw} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0} \quad (1.12)$$

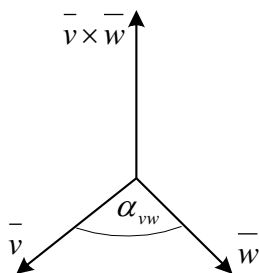
Bizonyítás:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha_{vw} \rightarrow \cos \alpha_{vw} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{v_x \cdot w_x + v_y \cdot w_y + v_z \cdot w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \cdot \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}$$

### Vektorok vektoriális (kereszt) szorzata

A  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok vektoriális szorzata a  $\vec{v} \times \vec{w}$  vektor, amelyet az alábbiak szerint értelmezünk:

- $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin \alpha_{vw}$
- $\vec{v} \times \vec{w}$  merőleges a  $\vec{v}$  és  $\vec{w}$  vektorok által meghatározott síkra
- $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  és  $\vec{v} \times \vec{w}$  jobbsodrású rendszert alkotnak



5. ábra. A  $\vec{v} \times \vec{w}$  vektor iránya és értelme

### 1.3 tétel:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

### Bizonyítás:

A fenti összefüggés a vektoriális szorzat definíciójából közvetlenül adódik.

### 1.4 tétel:

Ha a  $\vec{v}$  vektor párhuzamos a  $\vec{w}$  vektorral, akkor  $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ .

### Bizonyítás:

Ha  $\vec{v}$  vektor párhuzamos  $\vec{w}$  vektorral, akkor  $\alpha_{vw} = 0^\circ$  vagy  $180^\circ$ .  $\rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \overbrace{\sin \alpha_{vw}}^0 = 0 \rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

## A vektoriális szorzat kiszámítása a vektorok koordinátáiból

### 1.5 tétel:

A vektoriális szorzat a vektorok koordinátáiból az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

### Bizonyítás:

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$ ,  $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$   
 $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$ ,  $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ ,  $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$  (Ezek az egyenletek az 1.3 tételből következnek)  
 $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$  (Ezek az egyenletek az 1.4 tételből származnak)

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= (v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}) \times (w_x \cdot \vec{i} + w_y \cdot \vec{j} + w_z \cdot \vec{k}) = \\ &= v_x \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{i}}^0 + v_x \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{j}}^{\vec{k}} + v_x \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{i} \times \vec{k}}^{-\vec{j}} + v_y \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{i}}^{-\vec{k}} + v_y \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{j}}^0 \\ &+ v_y \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{j} \times \vec{k}}^{\vec{i}} + v_z \cdot w_x \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{i}}^{\vec{j}} + v_z \cdot w_y \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{j}}^{-\vec{i}} + v_z \cdot w_z \cdot \overbrace{\vec{k} \times \vec{k}}^0 \\ &= (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) \cdot \vec{i} + (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z) \cdot \vec{j} + (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Következtetésképp:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

### Módszer a vektori szorzat kiszámítására

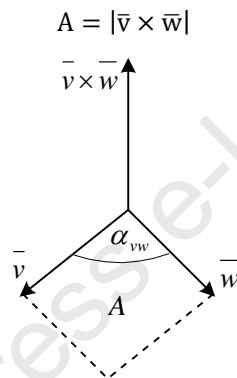
A vektoriális szorzat az 1.12. összefüggéssel számítható. Problémát jelent, hogy a fenti összefüggés nehezen megjegyezhető. Ezért most bemutatunk egy eljárást, amely hasonló a mátrixok determinánsának kiszámításához, és amelyre lényegesen könnyebb emlékezni:

$$\begin{aligned}\bar{v} \times \bar{w} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y) - \bar{j} \cdot (v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x) + \bar{k} \cdot (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x) \\ &= \begin{pmatrix} v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y \\ v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z \\ v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### A vektoriális szorzat nagyságának geometriai jelentése

1.6 tétel:

A  $\bar{v}$  és  $\bar{w}$  vektorok vektoriális szorzatának nagysága egyenlő az általuk kifeszített paralelogramma területével.



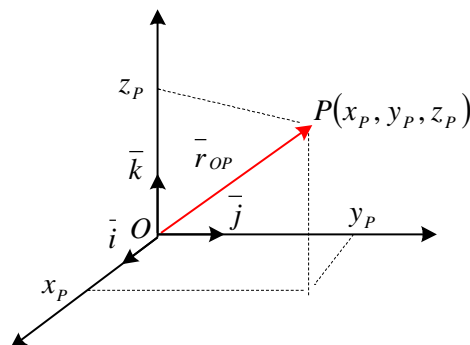
Bizonyítás:

A paralelogramma területét felírva:

$$A = |\bar{v}| \cdot |\bar{w}| \cdot \sin \alpha_{vw} = |\bar{v} \times \bar{w}| \quad (1.15)$$

### Helyvektor

A p pont  $\bar{r}_{OP}$  helyvektora a koordináta-rendszer origójából a P pontba mutat.



6. ábra. Helyvektor

$$\bar{r}_{OP} = x_p \cdot \bar{i} + y_p \cdot \bar{j} + z_p \cdot \bar{k},$$

Oszlopvektoros alakban:

$$\vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

## Számítási feladatok

1. feladat:

Adott három vektor a koordinátáival:

$$\vec{a} = 2,5 \cdot \vec{i} + 4,2 \cdot \vec{j} - 3 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = -3,5 \cdot \vec{i} + 5 \cdot \vec{j} + 6 \cdot \vec{k}$$

$$\vec{c} = 3,2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 4,8 \cdot \vec{k}$$

a) Számítsuk ki a  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$  vektort.

b) Számítsuk ki a  $\vec{a} \times \vec{b}$  és  $\vec{b} \times \vec{a}$  vektorokat.

c) Számítsuk ki a  $\vec{e}_1$  és  $\vec{e}_2$  egységvektorokat, amelyek merőlegesek az  $\vec{a}$  és  $\vec{b}$  vektorok síkjára.

d) Számítsa ki az  $\vec{e}_1$  és  $\vec{c}$  vektorok által bezárt szöget.

Megoldás:

a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left( \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0,8 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,2 \\ 2 \\ -4,8 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3,2 + (-0,8) \cdot 2 + (-9) \cdot (-4,8) = 60,8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4,2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3,5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2,5 & 4,2 & -3 \\ -3,5 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4,2 & -3 \\ -3,5 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & -3 \\ -3,5 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2,5 & 4,2 \\ -3,5 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \cdot (4,2 \cdot 6 - (-3 \cdot -3,5)) - \vec{j} \cdot (2,5 \cdot 6 - (-3 \cdot -3,5)) + \vec{k} \\ &\quad \cdot (2,5 \cdot 5 - (-4,2 \cdot -3,5)) = 40,2 \cdot \vec{i} - 4,5 \cdot \vec{j} + 27,2 \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} -40,2 \\ 4,5 \\ -27,2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(40,2)^2 + (-4,5)^2 + (27,2)^2}} = \frac{\begin{pmatrix} 40,2 \\ -4,5 \\ 27,2 \end{pmatrix}}{48,73} = \begin{pmatrix} 0,825 \\ -0,092 \\ 0,558 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0.825 \\ 0.092 \\ -0.558 \end{pmatrix}$$

d)

$$\cos \alpha_{e_1c} = \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{c}}{|\bar{e}_1| \cdot |\bar{c}|} = \frac{0,825 \cdot 3,2 + (-0,092 \cdot 2) + (0,558 \cdot -4,8)}{1 \cdot \sqrt{(3,2)^2 + (2)^2 + (-4,8)^2}} = -0,0367 \rightarrow \alpha_{e_1c} = 92,1^\circ$$

**2. feladat:**

Két pont koordinátáival adott:

$$A = (-2; 4; 8), B = (4; -8; 4).$$

a) Számítsuk ki az A és B pontok közötti távolságot.

b) Számítsuk ki az  $\bar{r}_{OA}$  és  $\bar{r}_{OB}$  vektorok által bezárt szöget.

c) Számítsuk ki azt az egységvektort, amely merőleges az OAB síkra.

**Megoldás:**

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.

a)

$$\bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_{AB} = |\bar{r}_{AB}| = |\bar{r}_{OB} - \bar{r}_{OA}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6)^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 14$$

b)

$$\cos \alpha_{AOB} = \frac{\bar{r}_{OA} \cdot \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA}| \cdot |\bar{r}_{OB}|} = -0.089 \rightarrow \alpha_{AOB} = 95,1^\circ$$

c)

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}}{|\bar{r}_{OA} \times \bar{r}_{OB}|} = \begin{pmatrix} 0,894 \\ 0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = -\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -0,894 \\ -0,447 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**3. feladat:**

Három pont koordinátáival adott:

$$A = (3; 5; 0), B = (0; -2; 3), C = (-4; 0; 2)$$

Számítsa ki az ABC háromszög területét.

**Megoldás:**

Javasoljuk, hogy készítsen ábrát a megoldás előtt.

$$\bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{r}_{OC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_{OB} - \bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{r}_{AC} = \bar{r}_{OC} - \bar{r}_{OA} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{\Delta} = \frac{|\bar{r}_{AB}| \cdot |\bar{r}_{AC}| \cdot \sin \alpha_{BAC}}{2} = \frac{|\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}|}{2} = 18,59$$

## 2. Témakörök és alapfogalmak

A jegyzetben a műszaki mechanika legfontosabb témaköreit érintjük. Elsőként az anyagi pont, majd a merev test statikai és dinamikai vizsgálatával, végül a rugalmas testek statikájával foglalkozunk. Ha egy test méretei elhanyagolhatók az adott mechanikai problémában szereplő egyéb méretekhez képest, akkor a testet **anyagi ponttal** modellezzük. Az anyagi pont egy geometriai pont, amelyhez hozzárendelhetjük a test tömegét. Számos olyan mechanikai probléma van, ahol a fenti modell már nem alkalmazható, és a test méreteit figyelembe kell venni. Ha a vizsgálat szempontjából a test deformációja elhanyagolható, akkor a **merev test** modellt alkalmazzuk. Egy test ideálisan merev, ha bármely két pontjának távolsága, bármely külső mechanikai hatás esetén állandó marad. Ha a deformáció nem hanyagolható el, de a mechanikai hatás megszűntével a test visszanyeri eredeti alakját, akkor a **rugalmas test modellt** alkalmazzuk.

A mechanika fő feladata a fenti modellek statikai és dinamikai vizsgálata. A **statika** a mechanikai egyensúlyban lévő testekre ható ismeretlen külső és belső erők és forgatónyomatékok meghatározásával foglalkozik. A **dinamika** feladata egyrészt a testek mozgásának leírása, másrészt annak vizsgálata, hogy adott erők és forgatónyomatékok hatása alatt hogyan fog mozogni a test, vagy fordítva, hogy a egy test egy előírt pálya vagy felület mentén történő mozgásához milyen erők (kényszererők) szükségesek, hogy azt biztosítsák.

A továbbiakban megismerjük Newton törvényeit, valamint a műszaki mechanikában előforduló legfontosabb erőtvényeket (3. fejezet), majd a 4.-11. fejezetekben részletesen tárgyaljuk az egyes statikai és dinamikai témaköröket.

## 3. Newton törvényei, erőtvények

### 3.1 Newton törvényei

**Newton törvényei** a műszaki mechanika alaptörvényei (axiómái). Newton alapfeltevése, hogy mindig található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben ezek a törvények érvényesek. Az ilyen vonatkoztatási rendszert **inerciarendszernek** nevezzük. A műszaki mechanikában a Földhöz rögzített vagy ahhoz képest állandó sebességgel haladó mozgást végző vonatkoztatási rendszer inerciarendszernek tekinthető. Minden más, a Földhöz képest gyorsuló vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer.

### **Newton első törvénye**

Egy anyagi pont lendülete mindaddig állandó marad, amíg mechanikai kölcsönhatásba nem kerül más testekkel. Tehát kölcsönhatás nélkül:

$$\vec{p}(t) = \vec{p} = \text{állandó} \quad (\vec{p} = m \cdot \vec{v}) \quad (2.1)$$

Speciálisan, ha a test tömege állandó ( $m(t) = m = \text{állandó}$ ), akkor sebessége is állandó:

$$\vec{v}(t) = \vec{v} = \text{állandó} \quad (2.2)$$

Tehát a test nyugalomban van, vagy a tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

### **Newton második törvénye**

Ha az anyagi pont mechanikai kölcsönhatásban van más testekkel, akkor lendületének idő szerinti változási gyorsasága bármely  $t$  időpillanatban megegyezik a többi test által kifejtett eredő erővel.

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad \vec{F} = [\text{N}] \quad (2.3)$$

Ha a test tömege állandó, akkor:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m \cdot \vec{v})}{\Delta t} = m \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \cdot \vec{a} \quad (2.4)$$

A fenti összefüggésben  $\vec{a}$  a test tömegközéppontjának gyorsulása.

### **Newton harmadik törvénye**

Két test mechanikai kölcsönhatása során teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.5)$$

A fenti egyenletben az  $\vec{F}_{12}$  az 1-es test által a 2-esre kifejtett erő. Tehát, a két erő egyenlő nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű (irányítású).

### **Newton negyedik törvénye**

Több test mechanikai hatása esetén az eredő erő az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots \quad (2.6)$$

A fenti egyenletben  $\vec{F}_i$  az az erő amelyet az  $i$ -edik test fejt ki a többi testtől függetlenül (a többi test hiányában).

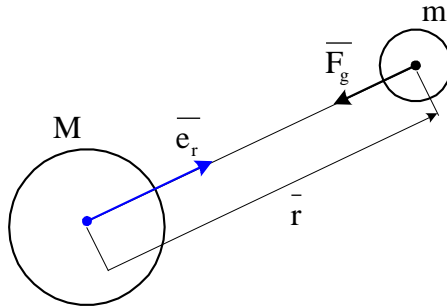
## **3.2 Erőtörvények**

Az **Erőtörvény** az erő megadva a kölcsönhatást leíró paraméterek függvényében. Az erőtörvényeket kísérleti úton, méréssel határozzák meg. A továbbiakban bemutatjuk a műszaki mechanikában előforduló fontosabb erőket és a hozzájuk tartozó erőtörvényeket.

### Gravitációs erő

Egy  $M$  és  $m$  tömegű test között fellépő gravitációs erő nagysága az alábbi összefüggéssel számítható:

$$|\vec{F}_g| = F_g = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \gamma = 6.674 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right] \quad (2.7)$$



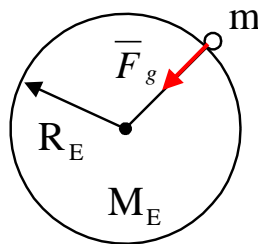
7. ábra. Gravitációs erő

A fenti egyenletben  $r$  a két test tömegközéppontjának távolsága,  $\gamma$  pedig a gravitációs állandó ( $\gamma = 6,674 \cdot 10^{-11} \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \right]$ ). Bevezetve az  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  radiális egységvektort a gravitációs erő a következő alakban írható:

$$\vec{F}_g = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (2.8)$$

ahol  $\vec{r}$  a helyvektor, amely az  $M$  tömegű test tömegközéppontjából az  $m$  tömegű test tömegközéppontjába mutat. Ha az egyik test a Föld és a másik egy hozzá képest elhanyagolható méretű tárgy annak felszínén, akkor a 2.8 egyenlet az alábbi alakban írható:

$$\vec{F}_g = \left( -\gamma \frac{M_E}{R_E^2} \cdot \vec{e}_r \right) \cdot m = m \cdot \vec{g} \quad (2.9)$$



8. ábra. Gravitációs erő a Föld felszínén

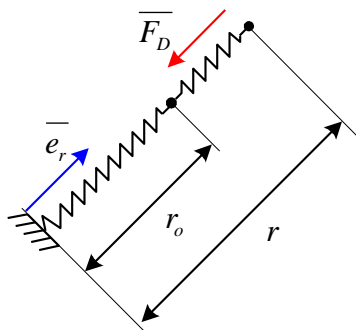
Az egyenletben (2.9)  $M_E$  és  $R_E$  a Föld tömege és sugara,  $\vec{g}$  a gravitációs gyorsulás. Mivel a Föld nem tökéletesen gömb alakú,  $\vec{g}$  nagysága függ a földrajzi helytől. Magyarország területén, vagy azzal azonos földrajzi szélességeken:

$$g = |\vec{g}| = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

### Rugóerő

Egy **ideális rugó** által kifejtett erő nagysága a következő összefüggéssel számítható (9. ábra):

$$|\vec{F}_D| = F_D = D \cdot |r - r_0| = D \cdot \Delta r \quad (2.10)$$



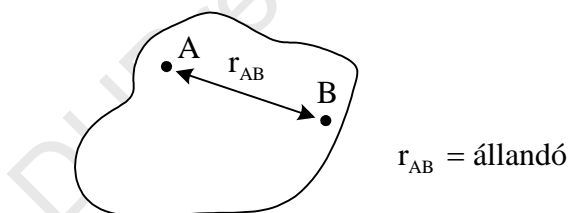
9. ábra. Rugóerő

ahol  $D$  a **rugóállandó**,  $r_0$  a rugó terheletlen hossza,  $\Delta r$  pedig a deformáció nagysága. A rugóerő iránya párhuzamos a rugó irányával, az értelme pedig ellentétes az  $(r - r_0) \cdot \vec{e}_r$  vektorral. Tehát a rugó erőtörvénye a következő:

$$\vec{F}_D = -D \cdot (r - r_0) \cdot \vec{e}_r \quad (2.11)$$

### Kényszererő

A kényszererő fogalmának értelmezéséhez szükségünk lesz a merev test és kényszer fogalmára. Egy **test merev**, bármely két pontjának távolsága a test bármely mechanikai terhelése esetén állandó marad.

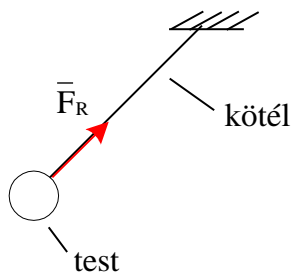


10. ábra. Merev test

A kényszer egy olyan merev test, amely egy másik testet egy adott görbe vagy felület mentén történő mozgásra vagy tartózkodásra kényszerít. A kényszer által a testre kifejtett erőt **kényszererő**nek nevezzük. A kényszererő nagysága legtöbbször ismeretlen, de általában meghatározható, ha a testre ható többi erő ismert.

A kényszerek típusai:

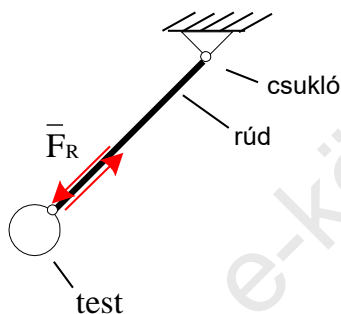
- 1) Nyújthatatlan kötél



11. ábra. Nyújthatatlan kötél

A kötél által kifejtett kényszererő párhuzamos a kötéllal. A kötelerő mindig húzó jellegű.

2) Merev rúd

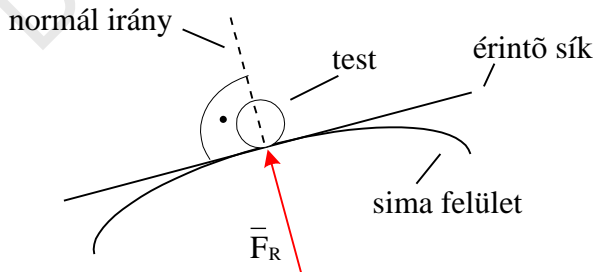


12. ábra. Merev rúd

Ha a rúd ideális csuklóhoz csatlakozik, akkor a kényszererő párhuzamos a rúddal. A rúderő egyaránt lehet húzó, vagy nyomó jellegű.

3) Sima vagy érdes merev felület:

Sima:

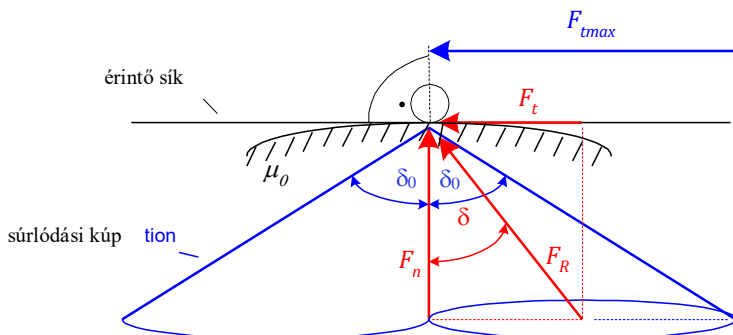


13. ábra. Sima merev felület

A **sima merev felület** által kifejtett kényszererő merőleges a felület adott pontbeli érintő síkjára, más szóval normál irányú. A felület csak nyomó jellegű erőt tud kifejteni.

**Érdes:**

Az **érdes merev felület** által kifejezett kényszererőnek van a felületre merőleges és azzal párhuzamos (az érintő síkba eső) komponense is. Ha a test nyugalomban van (14. ábra) akkor az érintő síkba eső (súrlódási) komponensnek van egy maximális értéke, ami felett a test megcsúszik.



14. ábra. Érdess merev felület – a test nyugalomban van

A fenti maximális érték, tapasztalat szerint, egyenesen arányos a kényszererő normál irányú komponensével.

$$F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (2.12)$$

A fenti egyenletben  $\mu_0$  a **tapadási súrlódási tényező**. A test egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

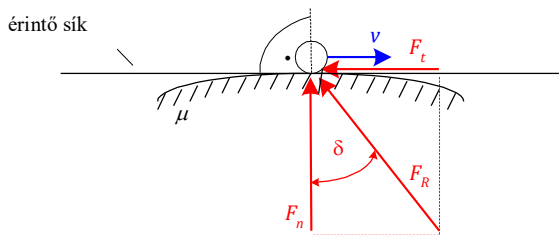
$$|F_t| \leq F_{tmax} = \mu_0 \cdot F_n \quad (2.13)$$

Bevezetjük a **súrlódási kúpot** (14. ábra), melynek félnyílásszöge az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\delta_0 = \mu_0 = \tan^{-1} \left( \frac{F_{tmax}}{F_n} \right) \quad (2.14)$$

Ha a test nyugalomban van, akkor a kényszererő ( $\bar{F}_R$ ) a kúpon belül vagy annak felületén helyezkedik el.

Ha a test csúszik az érdes felületen, akkor a kényszererő érintő irányú (súrlódási) komponense egyenesen arányos a normál irányú (nyomó) komponenssel, továbbá az érintő irányú komponens egyező irányú, de ellentétes értelmű a test sebességvektorával. (15. ábra, 3.15 egyenlet).



15. ábra. Érdess merev felület – a test csúszik

$$F_t = \mu \cdot F_n \quad (3.15)$$

A fenti egyenletben  $\mu$  a **csúszási súrlódási tényező**. Az alábbi táblázat a tapadási és csúszási súrlódási tényező értékét mutatja, különböző anyagpárok esetén, száraz és nedves körülmények között.

**Súrlódási tényezők közelítő értéke különböző anyagpárok esetén [11]:**

1. táblázat.

Anyagpár		Tapadási súrlódási tényező		Csúszási súrlódási tényező	
		Száraz	Nedves	Száraz	Nedves
Alumínium	Acél	0.61	-	0.47	-
Sárgaréz	Acél	0.35-0.51	0.19	0.44	-
Beton	Gumi	1	0.3	0.6-0.85	0.45-0.75
Acél	Acél	0.74-0.8	0.16	0.42-0.62	-
Fa	Fém	0.2-0.6	0.2	-	-
Fa	Fa	0.25-0.5	0.2	-	-

A fenti táblázat alapján megállapíthatóak az alábbiak:

- A tapadási súrlódási tényező mindig nagyobb, mint a csúszási súrlódási.
- A súrlódási tényező értéke mindig nagyobb száraz, mint nedves körülmények között.

## 4. Anyagi pont statikája

### 4.1 Anyagi pont egyensúlya

Az anyagi pont **egyensúlyban** van, ha a rá ható erők eredője zérus (4.1 egyenlet).

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad (4.1)$$

Newton második törvénye alapján egyensúlyi állapotban az anyagi pont gyorsulása zérus. Tehát nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Ha az anyagi pont nyugalomban van, akkor statikus egyensúlyi állapotról beszélünk.

## 4.2 Az eredő erő számítása

### 1. feladat (Eredő erő számítása általános térbeli erőrendszer esetén)

Egy, a koordináta-rendszer kezdőpontjába helyezett anyagi pontra az alábbi erők hatnak:

$$\vec{F}_1 = 5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = 30 \cdot (0,8\vec{i} - 0,6\vec{k}) [\text{N}]$$

$$|\vec{F}_3| = F_3 = 50 [\text{N}] \text{ és } \vec{F}_3 \text{ keresztülmegy a } P_3(0,6,2) \text{ ponton.}$$

$$|\vec{F}_4| = F_4 = 20 [\text{N}] \text{ és } \alpha_{4x} = 90^\circ, \alpha_{4y} = 45^\circ, \alpha_{4z} = 135^\circ.$$

Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!

*Megoldás:*

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

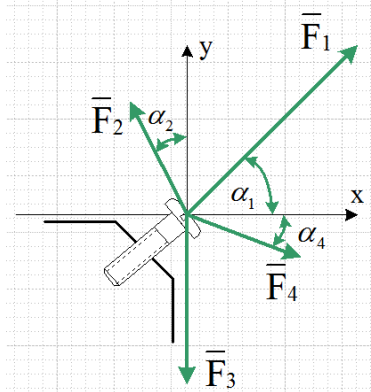
$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{e}_3 = 50 \cdot \frac{\vec{r}_{O_3}}{|\vec{r}_{O_3}|} = 50 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+6^2+2^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 47,43 \\ 15,81 \end{pmatrix} [\text{N}],$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_4 &= F_4 \cdot \vec{e}_4 = F_4 \cdot (\cos \alpha_{4x} \cdot \vec{i} + \cos \alpha_{4y} \cdot \vec{j} + \cos \alpha_{4z} \cdot \vec{k}) \\ &= 20 \cdot (\cos 90^\circ \cdot \vec{i} + \cos 45^\circ \cdot \vec{j} + \cos 135^\circ \cdot \vec{k}) = 0 \cdot \vec{i} + 14,14 \cdot \vec{j} - 14,14 \cdot \vec{k} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 14,14 \\ -14,14 \end{pmatrix} [\text{N}] \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 47,43 \\ 15,81 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 14,14 \\ -14,14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 64,57 \\ -17,33 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

### 2. feladat (Eredő erő számítása síkbeli erőrendszer esetén)

Egy csavarfejre négy erő hat az alábbi ábra szerint:



Adatok:  $F_1 = 150[\text{N}]$ ,  $F_2 = 80[\text{N}]$ ,  $F_3 = 110[\text{N}]$ ,  $F_4 = 100[\text{N}]$ ,  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 20^\circ$ ,  $\alpha_4 = 15^\circ$ .

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét!
- Számítsuk ki az eredő erő nagyságát!

Megoldás:

A feladat megoldható az általános térbeli erőrendszer esetén alkalmazott módszerrel, de síkbeli erőrendszer esetén célszerű az alábbi, egyszerű eljárást alkalmazni.

a)

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \vec{i} + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_2 = -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_3 = 0 \cdot \vec{i} - F_3 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \cdot \cos \alpha_4 \cdot \vec{i} - F_4 \cdot \sin \alpha_4 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\begin{aligned} \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \\ F_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ -F_4 \cdot \sin \alpha_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 200,26 \\ 14,29 \end{pmatrix} [\text{N}] \end{aligned}$$

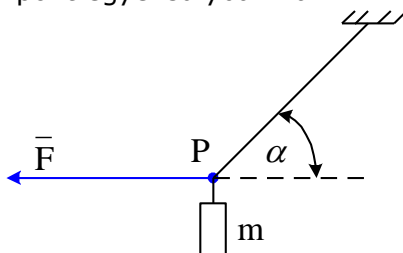
b)

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{(200,26)^2 + (14,29)^2} = 200,78[\text{N}]$$

### 4.3 Egyensúlyi problémák megoldása

#### 1. feladat

Az ábrán látható P anyagi pont egyensúlyban van.

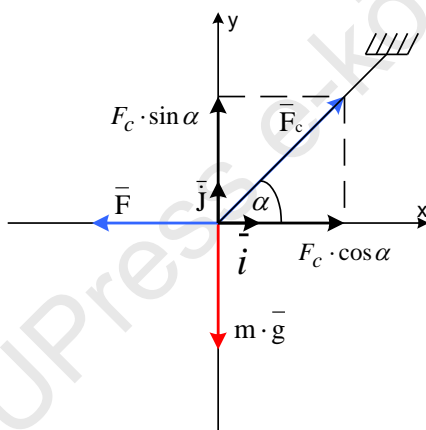


Adatok:  $F = 150[\text{N}]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $g = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ .

a) Számítsuk ki a kötélen ébredő erő nagyságát és az anyagi pont tömegét!

Megoldás:

a)



$$\vec{F} = -F \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_c = F_c \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + F_c \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = 0 \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

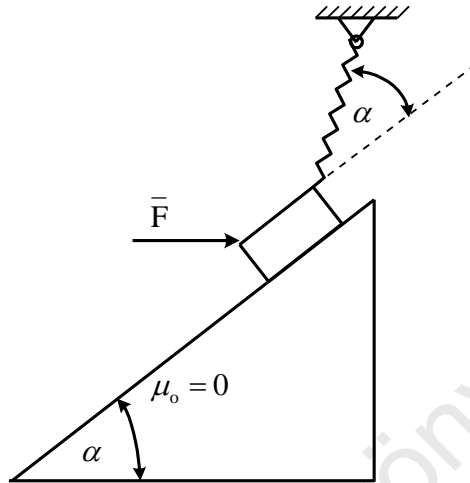
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -150 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_c \cdot \cos 30^\circ \\ F_c \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad -150 + F_c \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F_c = 173,2 [\text{N}]$$

$$\text{II.} \quad F_c \cdot \sin 30^\circ - m \cdot 9,81 = 0 \rightarrow m = 8,83 [\text{kg}]$$

## 2. feladat

Az ábrán látható, sima felületű lejtőn elhelyezkedő  $m$  tömegű anyagi pont egyensúlyban van. A rugó  $\Delta r$  deformációja és  $D$  rugómerevsége ismert.

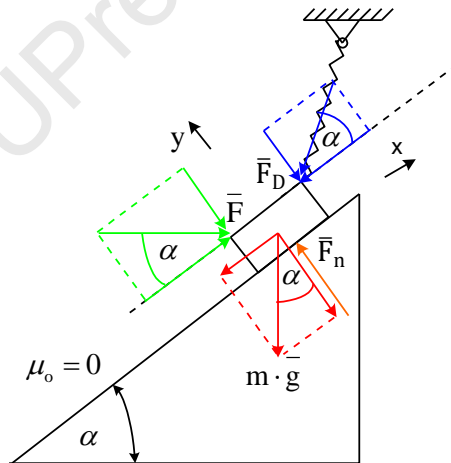


Adatok:  $m = 40[\text{kg}]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $D = 1000 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$ ,  $\Delta r = 2[\text{mm}]$ ,  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- Számítsuk ki az  $\bar{F}$  erő nagyságát ( $\bar{F}$  vízszintes irányú)!
- Számítsuk ki a lejtő által kifejtett kényszererő nagyságát ( $\bar{F}_n$ )!

Megoldás:

- és b)



$$\bar{F} = F \cdot \cos \alpha \cdot \bar{i} - F \cdot \sin \alpha \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \bar{g} = -m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \bar{i} - m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{F}_D = -F_D \cdot \cos \alpha \cdot \bar{i} - F_D \cdot \sin \alpha \cdot \bar{j} = \begin{pmatrix} -D \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha \\ -D \cdot \Delta r \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_n = 0 \cdot \vec{i} + F_n \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} [\text{N}]$$

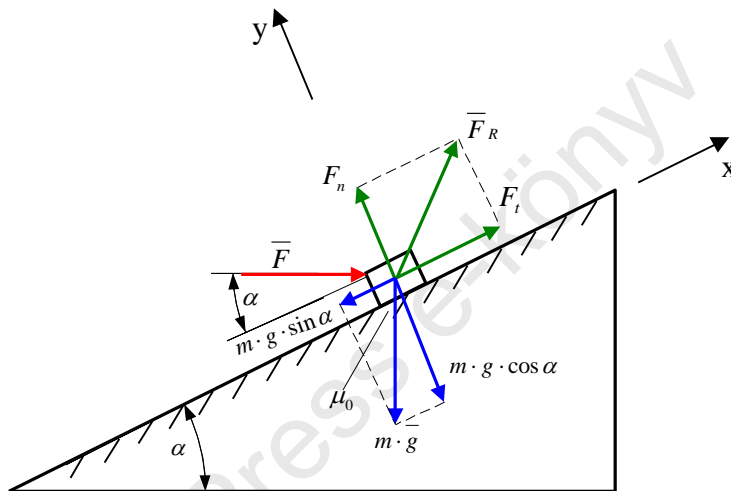
$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 30^\circ \\ -F \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ \\ -40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2000 \cdot \cos 30^\circ \\ -2000 \cdot \sin 30^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \sin 30^\circ - 2000 \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F = 2227 [\text{N}]$$

$$\text{II. } -F \cdot \sin 30^\circ - 40 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^\circ - 2000 \cdot \sin 30^\circ + F_n = 0 \rightarrow F_n = 2453,3 [\text{N}]$$

### 3. feladat

Az ábrán látható érdes felületű lejtőn elhelyezkedő anyagi pont egyensúlyban van.



Adatok:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m \cdot g = 100 [\text{N}]$ ,  $\mu_0 = 0,3$

- a) Számítsuk ki, hogy az  $\vec{F}$  erő milyen minimális és maximális értékek között változhat ( $F_{\min}$  és  $F_{\max}$ ), az anyagi pont egyensúlya esetén! ( $\vec{F}$  vízszintes irányú)  
 b) Számítsuk ki a kényszererő nagyságát – amelyet a lejtő kifejt az anyagi pontra – az előző minimális és maximális  $F$  értékek esetén.

Megoldás:

a)

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F} + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t + F \cdot \cos \alpha - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F \cdot \cos \alpha = 50 - 0,866 \cdot F$$

$$\text{II. } F_n - F \cdot \sin \alpha - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \alpha = 86,6 + 0,5 \cdot F$$

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F) \leq 50 - 0,866 \cdot F$$

$$0,716 \cdot F \leq 76$$

$$F \leq F_{max} = 106,14 \text{ [N]}$$

2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$50 - 0,866 \cdot F \leq 0,3 \cdot (86,6 + 0,5 \cdot F)$$

$$24 \leq 1,016 \cdot F$$

$$23,62 \text{ [N]} = F_{min} \leq F$$

$$23,62 \text{ [N]} \leq F \leq 106,14 \text{ [N]}$$

b)

$$F_{tmin} = 50 - 0,866 \cdot F_{min} = 50 - 0,866 \cdot 23,62 = 29,55 \text{ [N]}$$

$$F_{tmax} = 50 - 0,866 \cdot F_{max} = 50 - 0,866 \cdot 106,14 = -41,92 \text{ [N]}$$

$$F_{nmin} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{min} = 86,6 + 0,5 \cdot 23,62 = 98,41 \text{ [N]}$$

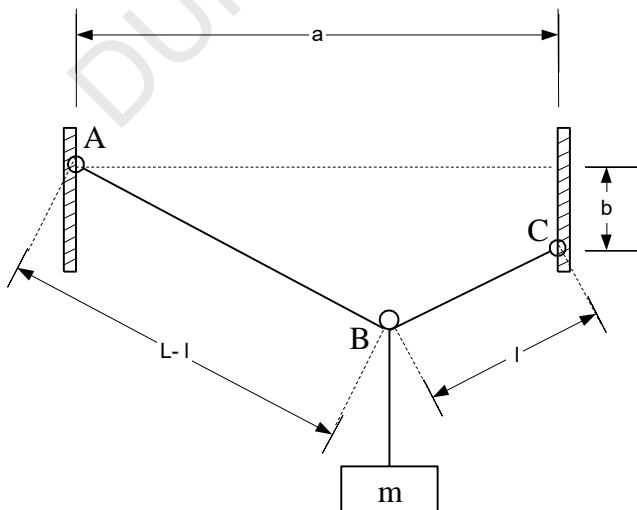
$$F_{nmax} = 86,6 + 0,5 \cdot F_{max} = 86,6 + 0,5 \cdot 106,14 = 139,67 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmin} = \sqrt{F_{tmin}^2 + F_{nmin}^2} = \sqrt{29,55^2 + 98,41^2} = 102,75 \text{ [N]}$$

$$F_{Rmax} = \sqrt{F_{tmax}^2 + F_{nmax}^2} = \sqrt{(-41,92)^2 + 139,67^2} = 145,83 \text{ [N]}$$

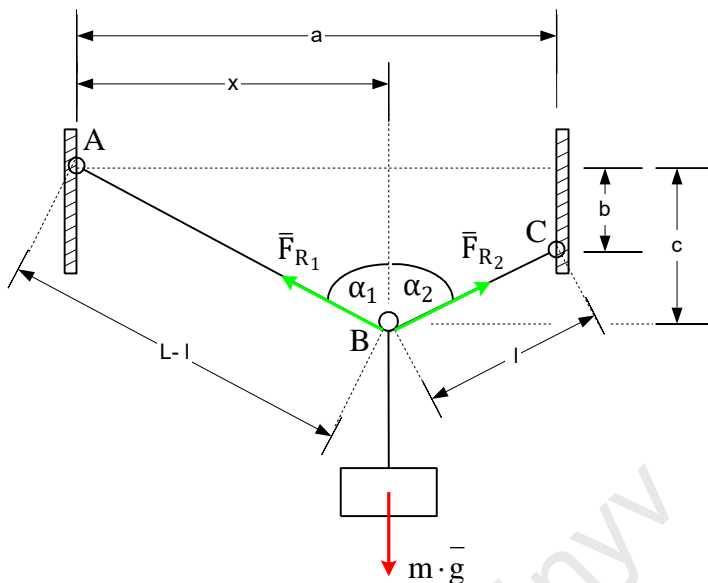
#### 4. feladat

Az ábrán látható kis görgő (B) az AC kötélen egyensúlyban van. A görgőn egy  $m$  tömegű teher függ, a kötélen  $L$  hosszúsága, valamint a szükséges geometriai adatok ismertek.



Adatok:  $m = 100 \text{ [kg]}$ ,  $L = 15 \text{ [m]}$ ,  $a = 10 \text{ [m]}$ ,  $b = 3,354 \text{ [m]}$ .  
Számítsuk ki a kötélen ébredő erő nagyságát!

Megoldás:



Mivel AB és BC szakaszok az AC kötélt részei:

$$|\vec{F}_{R1}| = |\vec{F}_{R2}| = F_R$$

$$\vec{F}_{R1} = -F_R \cdot \sin \alpha_1 \cdot \vec{i} + F_R \cdot \cos \alpha_1 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} -F_R \cdot \sin \alpha_1 \\ F_R \cdot \cos \alpha_1 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F}_{R2} = F_R \cdot \sin \alpha_2 \cdot \vec{i} + F_R \cdot \cos \alpha_2 \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} F_R \cdot \sin \alpha_2 \\ F_R \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$m \cdot \vec{g} = 0 \cdot \vec{i} - m \cdot g \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -F_R \cdot \sin \alpha_1 \\ F_R \cdot \cos \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_R \cdot \sin \alpha_2 \\ F_R \cdot \cos \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot 9,81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad -F_R \cdot \sin \alpha_1 + F_R \cdot \sin \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

$$\text{II.} \quad F_R \cdot \cos \alpha_1 + F_R \cdot \cos \alpha_2 - m \cdot 9,81 = 0 \rightarrow F_R = \frac{m \cdot 9,81}{2 \cdot \cos \alpha}$$

Érvényesek a következő geometriai egyenletek:

$$a^2 + (2c - b)^2 = L^2$$

$$\tan \alpha = \frac{x}{c} = \frac{a-x}{c-b}$$

Az első egyenletből:

$$c = \frac{\sqrt{L^2 - a^2} + b}{2} = 7,267 [\text{m}]$$

A második egyenletből:

$$\frac{x}{7,267} = \frac{10 - x}{7,267 - 3,354} \rightarrow x = 6,5[\text{m}]$$

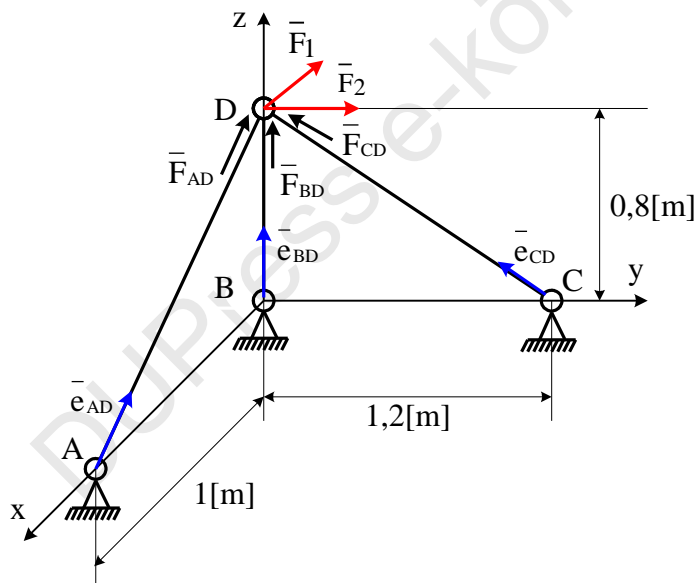
$$\tan \alpha = \frac{x}{c} = 0,894 \rightarrow \alpha = 41,81^\circ$$

A II. egyenletből:

$$F_R = \frac{100 \cdot 9,81}{2 \cdot \cos 41,81^\circ} = 658,1[\text{N}]$$

### 5. feladat

Az alábbi ábra egy három rúdból felépülő szerkezetet szemléltet. A rudak egyik vége ideális csuklókhoz (A,B,C pontok), másik vége a D pontban lévő anyagi ponthoz csatlakozik. Az anyagi pont az  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$ , valamint a rúderők hatása alatt egyensúlyban van.



Adatok:  $\vec{F}_1 = -1000 \cdot \vec{i}[\text{N}]$ ,  $\vec{F}_2 = 1000 \cdot \vec{j}[\text{N}]$

Számítsuk ki a rudakban ébredő kényszererők nagyságát ( $\vec{F}_{AD}$ ,  $\vec{F}_{BD}$ ,  $\vec{F}_{CD}$ )!

Megoldás:

A rudak irányába eső egységvektorok:

$$\vec{e}_{AD} = \frac{\vec{F}_{AD}}{|\vec{F}_{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0,8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (0,8)^2}} = \begin{pmatrix} -0,781 \\ 0 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_{CD} = \frac{\bar{F}_{CD}}{|\bar{F}_{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}}{\sqrt{(0)^2 + (-1,2)^2 + (0,8)^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,832 \\ 0,555 \end{pmatrix}$$

Az  $\bar{F}_{AD}$ ,  $\bar{F}_{BD}$  és  $\bar{F}_{CD}$  kényszererők az alábbi alakban írhatók:

$$\bar{F}_{AD} = F_{AD} \cdot \bar{e}_{AD} = F_{AD} \cdot \begin{pmatrix} -0,781 \\ 0 \\ 0,625 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}_{BD} = F_{BD} \cdot \bar{e}_{BD} = F_{BD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{F}_{CD} = F_{CD} \cdot \bar{e}_{CD} = F_{CD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0,832 \\ 0,555 \end{pmatrix}$$

A D anyagi pont egyensúlyban van:

$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_{AD} + \bar{F}_{BD} + \bar{F}_{CD} + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = F_{AD} \cdot \begin{pmatrix} -0,781 \\ 0 \\ 0,625 \end{pmatrix} + F_{BD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + F_{CD} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0,832 \\ 0,555 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad -0,781 \cdot F_{AD} - 1000 = 0 \rightarrow F_{AD} = -1281[\text{N}]$$

$$\text{II.} \quad -0,832 \cdot F_{CD} + 1000 = 0 \rightarrow F_{CD} = -1202[\text{N}]$$

$$\text{III.} \quad 0,625 \cdot F_{AD} + F_{BD} + 0,555 \cdot F_{CD} = 0 \rightarrow F_{BD} = 133,5[\text{N}]$$

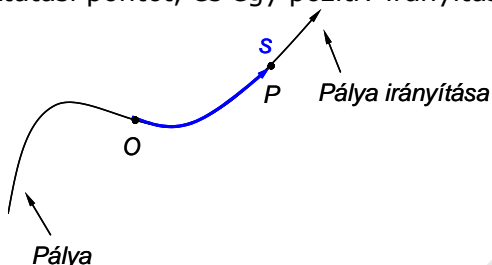
## 5. Az anyagi pont dinamikája

A továbbiakban anyagi pont dinamikájával, azon belül kinematikával és kinetikával foglalkozunk. A **kinematika** feladata a mozgás leírása, ehhez vezet be mozgásjellemező mennyiségeket (hely, sebesség, gyorsulás) és megadja kapcsolatukat. A **kinetika** azt vizsgálja, hogy adott erők hatása alatt hogyan fog mozogni a test (milyen hely-, sebesség- és gyorsulás-idő függvény szerint), vagy fordítva, a test egy előírt pálya vagy felület mentén történő mozgásához milyen erők szükségesek, hogy azt biztosítsák. Az első esetben **szabad-**, a másodikban **kényszermozgásról** beszélünk.

## 5.1 A pont kinematikája

### 5.1.1 A pont mozgásának leírása skalármennyiségekkel

Az anyagi pont mozgása során egy térgörbén halad végig, amelyet a mozgás **pályájának** nevezünk (16. ábra). Ha a mozgás pályája adott, akkor azon az anyagi pont helye egy előjeles skalármennyiséggel megadható. Ehhez jelöljük ki a pályán egy O vonatkoztatási pontot, és egy pozitív irányítást.

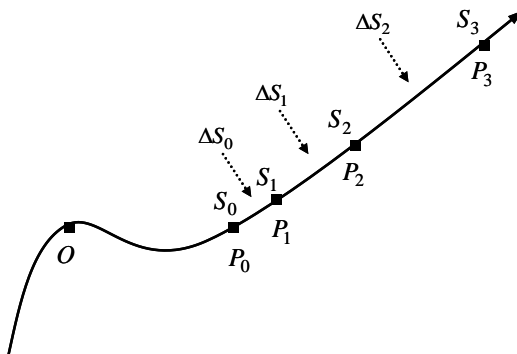


16. ábra. A pályakoordináta értelmezése

A P anyagi pont helyét a pályán az O-tól mért előjeles ívhossz ( $s$ ) – amelyet **pályakoordinátának** (rezgő mozgás esetén **kitérésnek**) nevezünk – egyértelműen meghatározza. Ha a P pont az O-tól pozitív irányban van, akkor a pályakoordináta pozitív, ha az O pontban, akkor nulla, egyébként pedig negatív. Így, szemléletesen szólva, a pálya egy „görbe számegyenes” lesz, amelynek az origója az O pont. Az pályakoordináta SI egysége a méter ( $s=[m]$ ). Példaként tegyük fel, hogy a térképen ismerjük egy gépkocsi útvonalát, és az útvonalon a nulla kilométerkő pontos helyét. Ha megadjuk, hogy a kilométerkőtől merre és pontosan hány kilométer távolságban van a gépkocsi, akkor megadtuk annak pontos helyét a térképen.

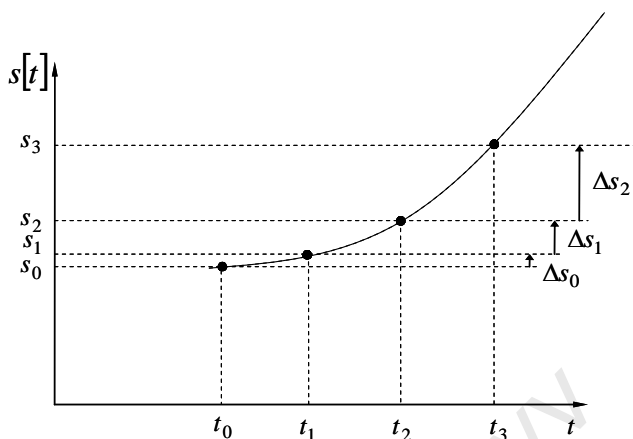
Ahogy az anyagi pont halad a pályán, helyét időről-időre más pályakoordináta érték jellemzi. A pályakoordinátát megadva az egymást követő időpillanatokban, megkapjuk az anyagi pont  $s(t)$  **pályakoordináta-idő függvényét**.

A pályán mozgó P anyagi pont helyét egyenlő,  $\Delta t$  nagyságú időközönként megjelöltük ( $P_0, P_1, P_2, \dots$ ) (17. ábra).



17. ábra. A mozgó anyagi pont pályakoordinátái

Ábrázoljuk az  $s$  pályakoordinátát, mint az eltelt idő függvényét (18. ábra). Az ábrán látható esetben például a  $\Delta s_i$  ívhosszak monoton nőnek az eltelt idővel, tehát a mozgás sebessége növekszik, azaz a mozgás gyorsul.



18. ábra. Pályakoordináta-idő függvény

Az  $i$ -edik szakaszon a pont átlagos sebességét a  $\frac{\Delta s_i}{\Delta t}$  hányados szolgáltatja. A  $\Delta t$  időtartam csökkentésével a fenti hányados egyre inkább a  $t_i$  időpillanatra lesz jellemző. Ez alapján például a  $\frac{\Delta s_0}{\Delta t}$  hányados a  $t_0$  időpillanatra. Ha  $\Delta t \rightarrow 0$ , akkor a  $\frac{\Delta s_0}{\Delta t}$  hányados pontosan a  $t_0$  időpillanat beli  $v(t_0)$  sebességet adja. Matematikai megfogalmazásban:

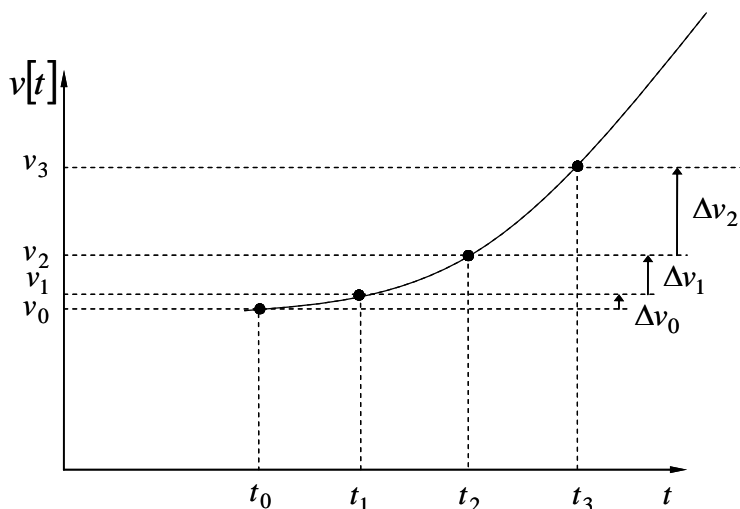
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{ds_0}{dt}, \quad v = \left[ \frac{m}{s} \right] \quad /5.1/$$

Az /5.1/ összefüggéssel értelmezett sebességet **pálya menti sebességnek** nevezzük. Az /5.1/ formula alapján a **pálya menti sebesség-idő függvény**, a pályakoordináta-idő függvény idő szerinti deriváltja. Az idő szerinti deriválást ponttal jelölve:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t) \quad /5.2/$$

Matematikából ismert, hogy egy függvény érintőjének meredeksége megegyezik a függvény deriváltjának értékével. Ezek alapján az  $s(t)$  függvény  $t_0$  pontbeli érintőjének meredekségét leolvastva, megkapjuk a  $t_0$  pontbeli pálya menti sebesség értékét.

Most ábrázoljuk a pálya menti sebességet az eltelt idő függvényében (19. ábra)!



19. ábra. Pálya menti sebesség-idő függvény

A pont gyorsulására az  $i$ -edik szakaszon a  $\frac{\Delta v_i}{\Delta t}$  hányados jellemző. Az ábrán látható esetben például a  $\Delta v_i$  pálya menti sebesség-változások monoton nőnek az eltelt idővel, tehát a mozgás gyorsulása növekszik. Minél nagyobb/kisebb a fenti hányados, annál nagyobb/kisebb az adott  $\Delta t$  időtartamon az átlagos gyorsulás. A pillanatnyi **pálya menti gyorsulást** a pálya menti sebességhez hasonlóan differenciálhányadosként értelmezzük. Például a  $t_0$  időpillanatban:

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{dv_0}{dt}, \quad a = \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad /5.3/$$

Azaz a pálya menti gyorsulás-idő függvényt a pálya menti sebesség-idő függvény idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) \quad /5.4/$$

A pálya menti gyorsulásnak, ugyanúgy ahogyan a pálya menti sebességnek, szemléletes geometriai jelentése van. Nevezetesen, a  $v(t)$  függvény  $t_0$  pontbeli érintőjének meredekségét leolvassva, megkapjuk a  $t_0$  pontbeli pálya menti gyorsulás értékét!

Ha a pálya menti gyorsulást ábrázoljuk az idő függvényében, akkor a pálya menti gyorsulás-idő függvényt kapjuk. Az  $s(t)$ ,  $v(t)$  és  $a(t)$  függvényeket összefoglaló néven **foronómiai függvényeknek** nevezzük. A foronómiai függvényeket általában együtt, egymás alatt ábrázoljuk.

Mint látjuk, az  $s(t)$  függvény ismeretében a  $v(t)$ , a  $v(t)$  függvény ismeretében az  $a(t)$  idő szerinti deriválással meghatározható.

### Kapcsolatok a foronómiai függvények között

Eddig már két kapcsolatot megállapítottunk:  $v(t) = \dot{s}(t)$ ,  $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ .

Ezek felhasználásával az  $s(t)$  függvény ismeretében a  $v(t)$ , a  $v(t)$  függvény ismeretében az  $a(t)$  függvény meghatározható. Vajon fordított esetben tudunk-e eljárást adni? Azaz meg tudjuk-e határozni az  $a(t)$  függvény ismeretében a  $v(t)$ , a  $v(t)$  függvény ismeretében az  $s(t)$  függvényt, és ha igen akkor milyen további információk birtokában?

A válaszhoz alakítsuk át a pálya menti gyorsulás-idő és pálya menti sebesség-idő függvények közötti összefüggést néhány lépésben!

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow a(t)dt = dv$$

A bal- és jobboldal határozott integrálját véve a  $t_0$ ,  $t_1$  és a hozzájuk tartozó  $v(t_0)$  és  $v(t_1)$  határok között:

$$\int_{t_0}^{t_1} a(t)dt = \int_{v(t_0)}^{v(t_1)} dv = v(t_1) - v(t_0)$$

Átrendezve:

$$v(t_1) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt \quad /5.5/$$

Azaz a  $v(t_0)$  kezdeti pálya menti sebesség, és a pálya menti gyorsulás-idő függvény ismeretében a pálya menti sebesség értéke tetszőleges  $t_1$  időpillanatban számolható!

Hasonlóan átalakítva a pálya menti sebesség-idő és pályakoordináta-idő függvények közti /5.2/ összefüggést:

$$s(t_1) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt \quad /5.6/$$

Azaz az  $s(t_0)$  kezdeti pályakoordináta, és a pálya menti sebesség-idő függvény ismeretében a pályakoordináta értéke tetszőleges  $t_1$  időpillanatban kiszámolható.

### **Az egyenletes és egyenletesen változó mozgás foronómiai függvényei**

A címben szereplő egyszerű mozgástípusokkal gyakran találkozunk feladatmegoldás során. Határozzuk meg, majd ábrázoljuk foronómiai függvényeiket!

**Egyenletes mozgásról** akkor beszélünk, ha:  $a(t)=0$ . Legyen  $t_0=0$ , ekkor:

$$v(t_1) = v(0) + \int_0^{t_1} 0dt = v(0) \Rightarrow v(t) = v = \text{állandó} \quad /5.7/$$

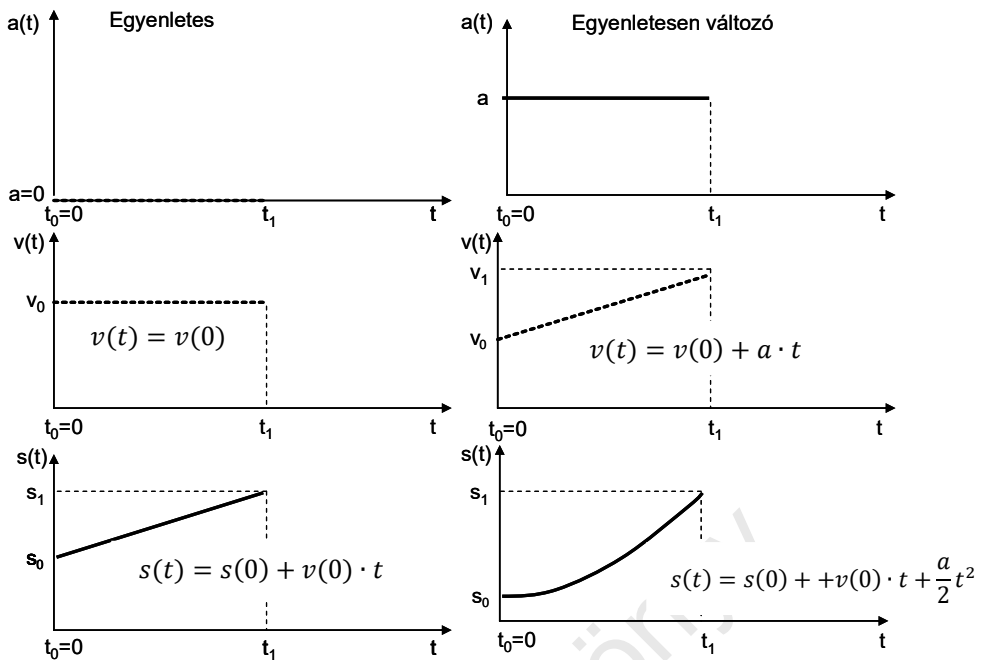
$$s(t_1) = s(0) + \int_0^{t_1} v dt = s(0) + v \cdot t_1 \Rightarrow s(t) = s(0) + v \cdot t \quad /5.8/$$

**Egyenletesen változó mozgásról** akkor beszélünk, ha  $a(t)=a=\text{állandó} \neq 0$ . Legyen  $t_0=0$ .

$$v(t_1) = v(0) + \int_0^{t_1} a dt = v(0) + a \cdot t_1 \Rightarrow v(t) = v(0) + a \cdot t \quad /5.9/$$

$$s(t_1) = s(0) + \int_0^{t_1} (v(0) + a \cdot t) dt = s(0) + v(0) \cdot t_1 + \frac{a}{2} \cdot t_1^2 \Rightarrow$$

$$s(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad /5.10/$$



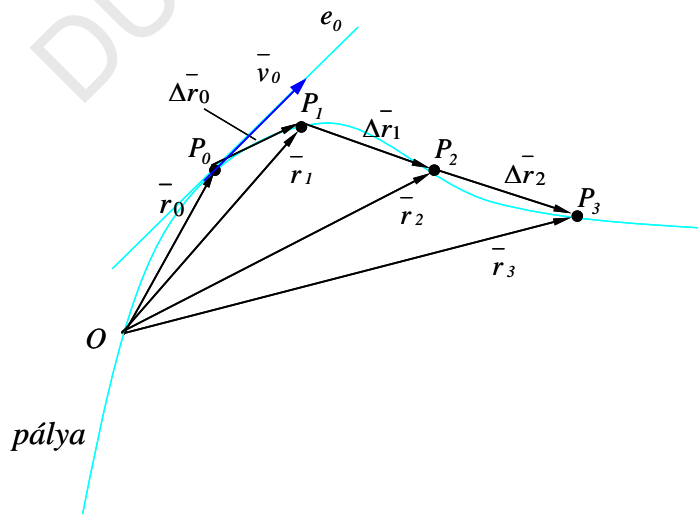
20. ábra. Egyenletes és egyenletesen változó mozgások foronómiai függvényei

### 5.1.2 A pont mozgásának leírása vektormennyiségekkel

A mozgás skaláris mennyiségekkel történő leírásánál ismernünk kell az anyagi pont pályáját. Ha a pálya nem ismert, vagy a feladat épp a pálya meghatározása, akkor a mozgás leírásához vektormennyiségeket kell bevezetni.

#### Hely-idő függvény (mozgásfüggvény) és sebesség

Tüntessük fel a mozgó anyagi pont helyét egyenlő,  $\Delta t$  időközönként ( $P_1, P_2, P_3$ , pontok, 21. ábra)! Az egyes  $P_i$  pontokhoz tartozó helyvektorokat jelölje  $\vec{r}_i$ .



21. ábra. Mozgó anyagi pont hely-idő függvénye és sebessége

A helyvektort megadva az idő függvényében megkapjuk a pont  $\vec{r}(t)$  **helyvektor-idő**, vagy más néven **mozgásfüggvényét**.

Vezessük be az **elmozdulás vektort**, mint két, időben egymást követő helyvektor különbségét. A későbbi időponthoz tartozó helyvektorból vonjuk ki a korábbi időponthoz tartozót (21. ábra). A vektoriális sebességet hasonlóan értelmezzük, mint a pályamenti sebességet, csak most a  $\Delta s_i$  ívkoordináta-megváltozás helyett, a  $\Delta \vec{r}_i$  elmozdulást használjuk a definícióban. Például a  $t_0$  pillanatbeli **sebesség**:

$$\vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{t_1 - t_0} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} \quad /5.11/$$

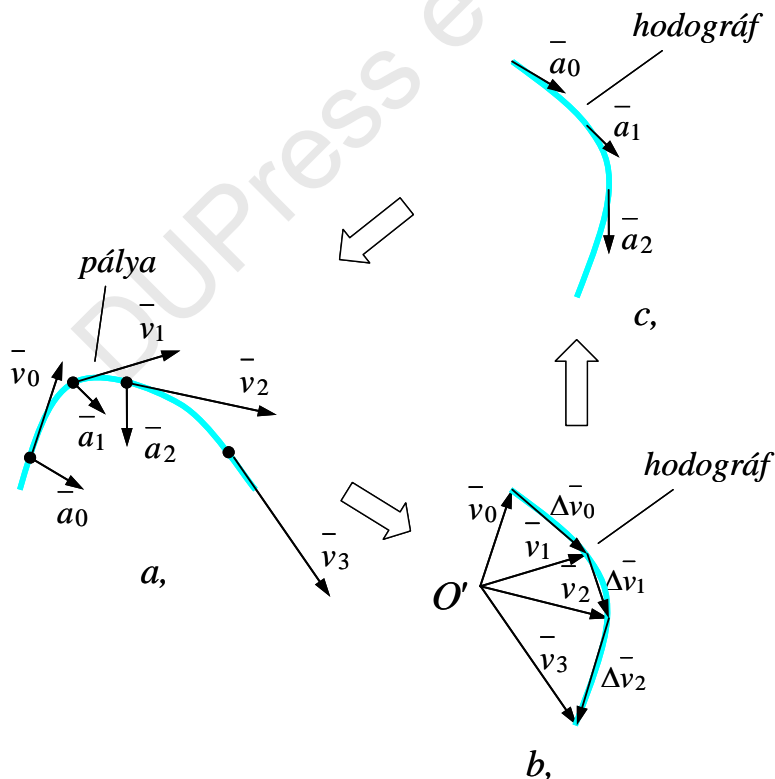
Azaz a **sebesség-idő függvény**, a hely-idő függvény idő szerinti deriváltja:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \quad /5.12/$$

A  $\Delta t$  időtartamot nullára csökkentve a  $\Delta \vec{r}_0$  elmozdulás nagysága tart a  $\Delta s_0$  ívhosszéhoz, így a /5.11/ összefüggéssel definiált sebességvektor nagysága megegyezik pálya menti sebesség nagyságával. Továbbá, ha  $\Delta t$  tart nullához, a  $\Delta \vec{r}_0$  elmozdulás vektor befordul a pálya adott pontbeli  $e_0$  érintőjének irányába. Ebből adódik, hogy a  $d\vec{r}_0$  elemi elmozdulás – és ezáltal a  $\vec{v}(t_0)$  sebesség vektor – érintőirányú a pályához (21. ábra).

### Gyorsulás

A gyorsulásvektor értelmezéséhez tekintsük a 22. ábrát!



22. ábra. Sebesség hodográf. A gyorsulásvektor értelmezése és iránya

Az ábra a) részén felrajzoltuk az anyagi pont pályáját és feltüntettük rajta az anyagi pont sebességvektorát néhány, egymást követő időpillanatban. Ezt követően a sebességvektorokat az ábra b) részén látható  $O'$  pontból, mint közös kezdőpontból felrajzoltuk. A sebességvektorok végpontjai egy görbét rajzolnak ki. Ezt a görbét a mozgás **sebesség-hodográfjának** nevezzük. (Ez alapján a pályát *helyvektor-hododráfnak* is nevezhetnénk.) A gyorsulást az ábra b) része alapján hasonlóan értelmezzük, mint ahogy azt a sebesség esetében tettük, csak most a  $\Delta \vec{r}_i$  elmozdulás helyett a  $\Delta \vec{v}_i$  sebességváltozást használjuk a definícióban. Például a  $t_0$  pillanatbeli **gyorsulás**:

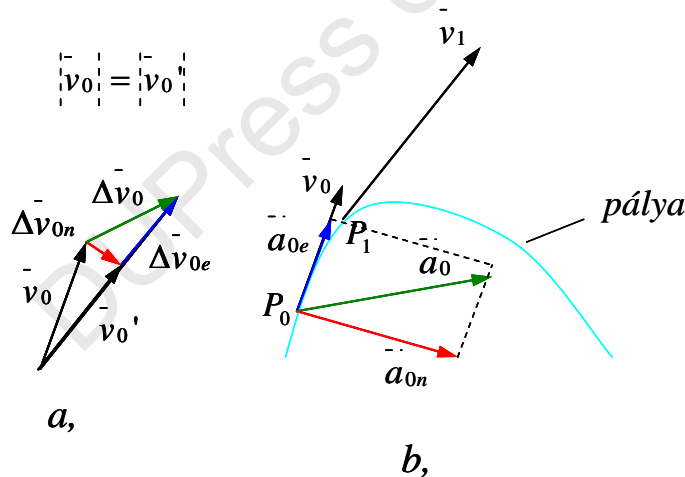
$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} \quad /5.13/$$

Szavakban megfogalmazva, az  $\vec{a}(t_0)$  gyorsulás a sebesség-idő függvény  $t_0$  pillanatban vett idő szerinti deriváltja. Ez alapján a **gyorsulás-idő függvény** a sebesség-idő függvény idő szerinti derivált függvénye:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) \quad /5.14/$$

Mint azt korábban említettük, a sebesség vektor a pálya adott pontbeli érintőjének irányába mutat. Analóg módon adódik, hogy a gyorsulás vektor pedig a sebesség-hodográf adott pontbeli érintőjének irányába. A 22. ábra c) részén feltüntettük a sebesség hodográf görbén a gyorsulásvektorokat. Fontos észrevétel tehetünk, ha a gyorsulásvektorokat átmásoljuk az ábra a) részére, a pálya megfelelő pontjaiba. Ekkor látható, hogy a gyorsulás vektor a pálya belseje (homorú oldal) felé mutat.

Most vizsgáljuk meg részletesebben a  $t_0$  pillanatbeli  $\vec{a}(t_0)$  gyorsulásvektort (23. ábra)!



23. ábra. A gyorsulásvektor érintő és normális irányú komponense

A 23. ábra a) részén feltüntetett  $\vec{v}'(t_0)$  vektort, a  $\vec{v}(t_0)$  vektornak a  $\vec{v}(t_1)$  irányába történő elforgatásával kaptuk. Bontsuk fel a  $\Delta \vec{v}_0$  vektort a  $\Delta \vec{v}_{0n} = \vec{v}'(t_0) - \vec{v}(t_0)$  és a  $\Delta \vec{v}_{0e} = \vec{v}(t_1) - \vec{v}'(t_0)$  komponensekre, ekkor:

$$\vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{0n} + \Delta \vec{v}_{0e}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{0n}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{0e}}{\Delta t} = \vec{a}_n(t_0) + \vec{a}_e(t_0) \quad /5.15/$$

Mivel  $\Delta t \rightarrow 0$  esetén  $\Delta \vec{v}_{0e}$  párhuzamos,  $\Delta \vec{v}_{0n}$  pedig merőleges  $\vec{v}(t_0)$  irányára, így a  $\vec{a}_e(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{0e}}{\Delta t}$  vektor párhuzamos, az  $\vec{a}_n(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{0n}}{\Delta t}$  vektor pedig merőleges a

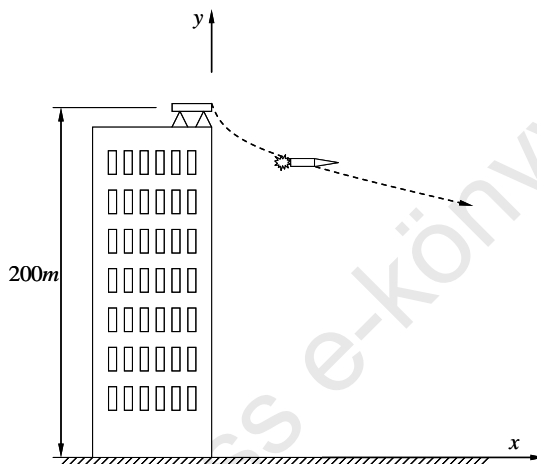
pálya  $P_0$  pontbeli érintőjére, és az utóbbi a pálya belseje (homorú oldala) felé mutat.

Tehát a gyorsulásvektor mindig felbontható egy **érintőirányú**, és egy rá merőleges **normálirányú komponensre**, ahol az utóbbi mindig a pálya belseje felé mutat.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_e \quad /5.16/$$

### Feladat

Egy rakétát egy 200 [m] magas épület tetejéről indítunk. A rakéta síkmozgást végez, hely-idő függvénye az ábrán vázolt koordinátarendszerben  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 + 2t^2 \\ 200 - 4,9t^2 \end{pmatrix}$  [m] alakú. Az időt másodpercben mérjük.



- Adja meg a rakéta  $\vec{v}(t)$  sebesség-idő függvényét, és a sebesség nagyságát az indítást követően 4 [s]-mal!
- Adja meg a rakéta  $\vec{a}(t)$  gyorsulás-idő függvényét, és a gyorsulás nagyságát az indítást követően 4 [s]-mal!
- Adja meg a rakéta pályájának  $y=f(x)$  egyenletét!

*Megoldás:*

a) A sebesség-idő függvényt a hely-idő függvényből idő szerinti deriválással kapjuk. A deriválást koordinátánként végezzük el.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^3 + 4t \\ -9,8t \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

A sebességvektor az indítás után 4[s]-al:

$$\vec{v}(4) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4 \\ -9,8 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 272 \\ -39,2 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

A sebesség nagysága:  $|\vec{v}(4)| = \sqrt{v_x^2(4) + v_y^2(4)} = 274,81 \left[ \frac{m}{s} \right]$

b) A gyorsulás-idő függvényt a sebesség-idő függvényből idő szerinti deriválással kapjuk:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12t^2 + 4 \\ -9,8 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

A gyorsulásvektor komponensei az indítás után 4s -al:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 4^2 + 4 \\ -9,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 \\ -9,8 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

A gyorsulás nagysága:  $|\vec{a}(4)| = \sqrt{a_x^2(4) + a_y^2(4)} = 196,24 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$

c) Az  $x(t)$  és  $y(t)$  koordináta-idő függvényekből az időt, mint paramétert kiküszöbölve megkapjuk a pálya egyenletét.

I.  $x = t^4 + 2t^2$

II.  $y = 200 - 4,9t^2 \rightarrow t^2 = \frac{200-y}{4,9}$

I.  $x = \left(\frac{200-y}{4,9}\right)^2 + 2\left(\frac{200-y}{4,9}\right) = \left(\frac{200-y}{4,9} + 1\right)^2 - 1 = \left(\frac{204,9-y}{4,9}\right)^2 - 1$

Az I. egyenletből az  $y$  koordinátát kifejezve az  $x$  függvényében, az alábbi két összefüggés adódik:

$$y_1(x) = -4,9\sqrt{x+1} + 204,9, \quad y_2(x) = 4,9\sqrt{x+1} + 204,9$$

A fenti két összefüggés közül az első a pálya egyenlete.

## Kapcsolatok a vektoriális mozgásjellemzők között

Korábban már megállapítottuk az alábbi kapcsolatot:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Ezek felhasználásával az  $\vec{r}(t)$  függvény ismeretében a  $\vec{v}(t)$ , a  $\vec{v}(t)$  függvény ismeretében az  $\vec{a}(t)$  függvény meghatározható. Vajon fordított esetben tudunk-e eljárást adni, úgy ahogy azt a foronómiai függvények esetében tettük? Végezzünk itt is hasonló átalakításokat!

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \rightarrow \vec{a}(t)dt = d\vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} d\vec{v} = \vec{v}(t_1) - \vec{v}(t_0)$$

Átrendezve:  $\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t)dt \quad /5.17/$

Azaz a  $\vec{v}(t_0)$  kezdeti sebesség, és a gyorsulás-idő függvény ismeretében a sebesség értéke tetszőleges  $t_1$  időpillanatban meghatározható. Ugyanúgy, ahogy a skaláris mozgásjellemzők esetében a pálya menti sebesség.

Hasonlóan az  $\vec{r}(t_1)$  helyvektorra:

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)dt \quad /5.18/$$

## SPECIÁLIS MOZGÁSOK

### Szabad mozgás állandó gyorsulással

Adott egy állandó gyorsulással mozgó anyagi pont. A gyorsuláson ( $\vec{a}$ ) kívül ismerjük a pont kezdeti helyét ( $\vec{r}(t_0)$ ) és sebességét ( $\vec{v}(t_0)$ ). A pálya nem ismert. Határozzuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényét, majd adjuk meg a pont pályáját leíró egyenletet!

Alkalmazzuk a /5.17/ és /5.18/ összefüggéseket, felhasználva, hogy  $\vec{a} = \text{állandó!}$

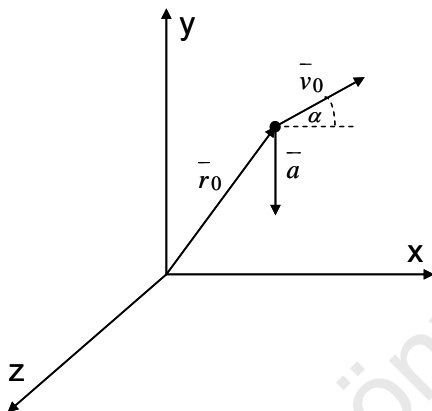
Legyen  $t_0 = 0$ .

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(0) + \int_0^{t_1} \vec{a}dt = \vec{v}(0) + \vec{a} \cdot t_1 \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a} \cdot t \quad /5.19/,$$

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(0) + \int_0^{t_1} (\vec{v}(0) + \vec{a} \cdot t) dt = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t_1 + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t_1^2 \quad \Rightarrow$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 \quad /5.20/$$

A mozgást **Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben** írjuk le. A koordinátarendszert úgy rögzítjük, hogy az anyagi pont kezdeti hely és sebesség vektora az xy síkba essen, továbbá a gyorsulás y tengely irányú és azzal ellentétes értelmű legyen (24. ábra).



24. ábra. Állandó gyorsulású mozgás vektoriális jellemzői

Ekkor a gyorsulás, a kezdeti sebesség, és a kezdeti hely koordinátái:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a = |\vec{a}|).$$

Felhasználva a fenti kezdeti értékeket, és a /5.19/ és /5.20/ összefüggéseket kiírva az egyes koordinátákra:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \vec{a} \cdot t = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) - a \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} \quad /5.21/$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0) \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t^2 =$$

$$\begin{pmatrix} x(0) + v_x(0) \cdot t \\ y(0) + v_y(0) \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad /5.22/$$

Látható, hogy az anyagi pont z irányban nyugalomban van, így mozgásának síkja az xy sík.

Most határozzuk meg **a pálya**  $y=f(x)$  **egyenletét!** Fejezzük ki az időt az  $x(t)$  függvényből, és helyettesítsük be az  $y(t)$  függvénybe. Az egyszerűség kedvéért legyen  $x(0)=y(0)=0$ .

$$x = v_x(0) \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{v_x(0)}$$

$$y = v_y(0) \cdot \frac{x}{v_x(0)} - \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_x(0)}\right)^2 = -\frac{a}{2 \cdot (v_x(0))^2} \cdot x^2 + \frac{v_y(0)}{v_x(0)} \cdot x \quad /5.23/$$

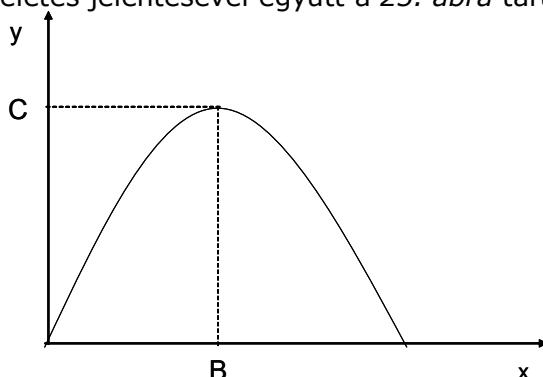
Az egyenlet egy kis matematikai ügyeskedéssel átírható az alábbi alakba:

$$y = -A(x - B)^2 + C \quad /5.24/$$

Az A, B és C paraméterek értékét az alábbi összefüggések szolgáltatják:

$$A = \frac{a}{2 \cdot (v_x(0))^2} \quad /5.25/, \quad B = \frac{v_x(0) \cdot v_y(0)}{a} \quad /5.26/, \quad C = \frac{(v_y(0))^2}{2a} \quad /5.27/$$

Az /5.24/ összefüggés egy **parabola egyenlete**. A parabola képét a B és C paraméterek szemléletes jelentésével együtt a 25. ábra tartalmazza.



25. ábra. A pálya B és C paramétereinek szemléletes jelentése

Állandó gyorsulású szabad mozgásra példa a Földfelszín közelében mozgásba hozott, majd magára hagyott anyagi pont (elhajított kődarab, kilőtt lövedék) mozgása, ha a közegellenállástól eltekintünk. További példát jelent egy homogén elektrosztatikus mezőben mozgó töltött részecske mozgása, ha a részecskére ható elektromos erőn kívül minden más erőt elhanyagolunk.

### Feladat

A vízszinteshez képest milyen  $\alpha$  szögben kell elhajítani egy pontszerű testet, hogy az ugyanolyan magasra emelkedjen, mint amilyen távol ér vissza az elhajítás szintjére? A közegellenállástól eltekintünk.

*Megoldás:*

Ebben a feladatban  $a=g$ , ahol  $g$  a gravitációs gyorsulás nagysága ( $g=9,81$  [m/s<sup>2</sup>]).

Jelöljük az elhajítástól a pálya tetőpontjának eléréséig eltelt időt  $t_1$ -el. A tetőpontban a sebesség  $y$  irányú komponense nulla. Ezt felhasználva:

$$v_y(t_1) = v_y(0) - g \cdot t_1 = 0 \rightarrow t_1 = \frac{v_y(0)}{g}$$

$$\vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} x_{MAX} \\ y_{MAX} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(0) \cdot t_1 \\ v_y(0) \cdot t_1 - \frac{g}{2} \cdot t_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(0) \cdot \frac{v_y(0)}{g} \\ v_y(0) \cdot \frac{v_y(0)}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_y(0)}{g}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_x(0) \cdot v_y(0)}{g} \\ \left(\frac{v_y(0)}{2g}\right)^2 \end{pmatrix}$$

A földet érés helyének az elhajítás helyétől mért távolsága:

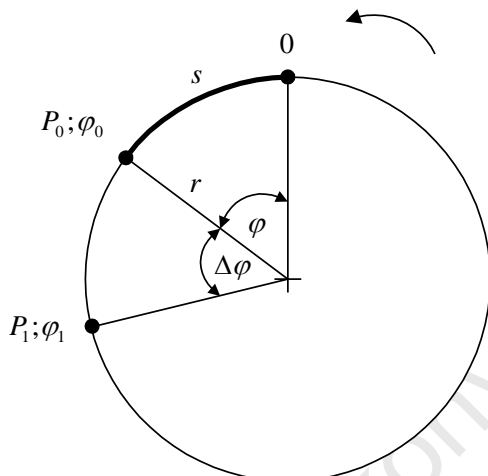
$$d_{MAX} = 2 \cdot x_{MAX} = \frac{2 \cdot v_x(0) \cdot v_y(0)}{g}$$

A feladat feltétele szerint:  $d_{MAX} = y_{MAX} \rightarrow \frac{v_y(0)}{v_x(0)} = 4 = tg\alpha \rightarrow \alpha = 76^\circ$

## Körmozgás

### Körmozgás leírása skalármennyiségekkel

Itt a pont pályája speciálisan körpálya, így célszerű az eddig használt pályamenti (kerületi) mennyiségek ( $a$ ,  $v$ ,  $s$ ) helyett **szögmennyiségeket** bevezetni (26. ábra).



26. ábra. Ábra a körmozgást jellemző szögmennyiségek értelmezéséhez

Vegyünk fel a körpályán egy  $O$  vonatkoztatási pontot! Legyen az  $s$  pályakoordináta értéke az  $O$  pontban nulla. Vezessük be a  $\varphi$  **szögkoordinátát**, mint az  $s$  pályakoordináta és a sugár hányadosát:

$$\varphi = \frac{s}{r} \quad \varphi = [\text{rad}] \quad /5.28/$$

Ha a kör középpontja és sugara adott, akkor az anyagi pont síkban elfoglalt helyét a  $\varphi$  szögkoordináta egyértelműen meghatározza. A definícióból adódóan a  $\varphi$  szög forgásszög, így értéke tetszőleges valós szám lehet, előjele pedig megegyezik a pályakoordináta előjelével.

A pálya menti sebesség és pálya menti gyorsulás mintájára bevezetjük a **szögsebességet** és **szöggyorsulást**, mint a  $\varphi(t)$  függvény idő szerinti első és második deriváltját.

Átlagos szögsebesség a  $[t_0, t_1]$  időtartamon:

$$\omega[t_0; t_1] = \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta t} = \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} \quad /5.29/$$

Pillanatnyi szögsebesség a  $t_0$  pillanatban:

$$\omega(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t_1) - \varphi(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\varphi_0}{dt} \quad /5.30/$$

Tehát az  $\omega(t_0)$  szögsebesség a  $\varphi(t)$  függvény  $t_0$  pillanatban vett idő szerinti differenciálhányadosa.

Azaz a szögkoordináta- és szögsebesség-idő függvények közötti kapcsolat:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) \quad /5.31/$$

Átlagos szöggyorsulás a  $[t_0, t_1]$  időtartamon:

$$\varepsilon[t_0, t_1] = \frac{\Delta\omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega(t_1) - \omega(t_0)}{t_1 - t_0} \quad /5.32/$$

Pillanatnyi szöggyorsulás a  $t_0$  pillanatban:

$$\varepsilon(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega_0}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\omega(t_1) - \omega(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{d\omega_0}{dt} \quad /5.33/$$

Azaz az  $\varepsilon(t_0)$  szöggyorsulás az  $\omega(t)$  függvény  $t_0$  pillanatban vett idő szerinti differenciálhányadosa. Tehát az  $\varepsilon(t)$ ,  $\omega(t)$  és  $\varphi(t)$  függvények közötti kapcsolat:

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad /5.34/ \quad \omega = \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]; \quad \varepsilon = \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

Természetesen az így értelmezett szögsebesség előjele megegyezik a pálya menti sebességével, a szöggyorsulás előjele pedig a pálya menti gyorsulásával. Néhány átalakítást elvégezve egyszerű kapcsolatot találunk a megfelelő szög- és pálya menti (kerületi) mennyiségek között:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{r \cdot dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{r} \cdot v = \frac{v}{r} \quad /5.35/$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{r \cdot dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{r} \cdot a = \frac{a}{r} \quad /5.36/$$

Azaz a szögmennyiségek a megfelelő kerületi mennyiségekből a sugárral való osztással adódnak. Ezt felhasználva a /5.5/ és /5.6/ összefüggésekből:

$$\omega(t_1) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon(t) dt \quad /5.37/$$

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \omega(t) dt \quad /5.38/$$

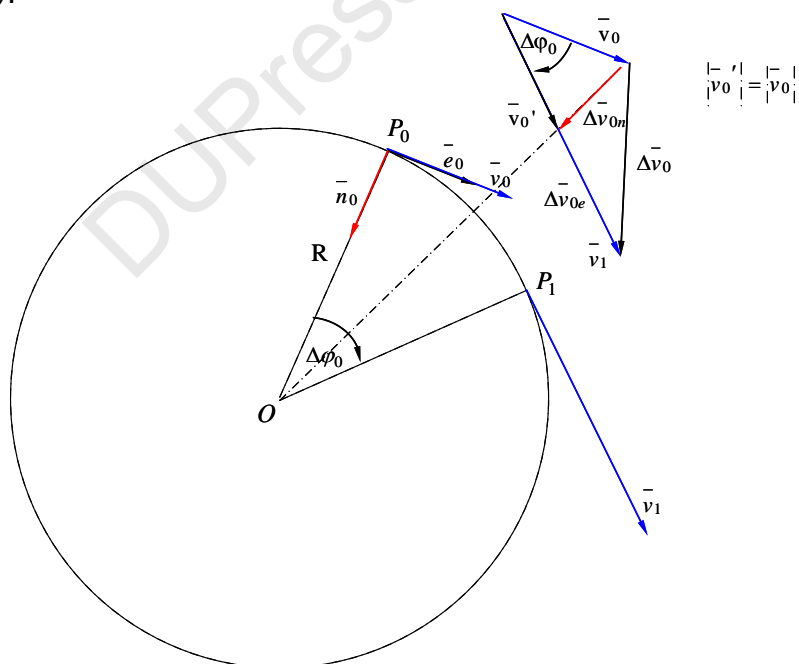
*Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás*

Az egyenletes és egyenletesen változó körmozgás esetében a mozgás  $s(t)$ ,  $v(t)$  és  $a(t)$  függvényeit elosztva a körpálya sugarával, és felhasználva a kerületi és szögmennyiségek közti összefüggéseket, megkapjuk a szögmennyiségekre vonatkozó megfelelő összefüggéseket. Tehát az egyenletes és egyenletesen változó körmozgás  $\varepsilon(t)$ ,  $\omega(t)$  és  $\varphi(t)$  függvényei:

Egyenletes mozgás:	Egyenletes körmozgás:
$a(t) = 0$	$\varepsilon(t) = 0$
$v(t) = v = \text{áll.}$	$\omega(t) = \omega = \text{áll.}$
$s(t) = s(0) + v \cdot t$	$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega \cdot t$
Egyenletesen változó mozgás:	Egyenletesen változó körmozgás:
$a(t) = a = \text{áll.}$	$\varepsilon(t) = \varepsilon = \text{áll.}$
$v(t) = v(0) + a \cdot t$	$\omega(t) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t$
$s(t) = s(0) + v(0) \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$	$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(0) \cdot t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^2$

### A körmozgás leírása vektormennyiségekkel

Most vizsgáljuk meg a körmozgást leíró vektormennyiségeket! Ehhez célszerű bevezetni az  $\vec{n}$  **normálirányú**, és az  $\vec{e}$  **érintőirányú egységvektorokat**. Az  $\vec{n}$  vektor merőleges a pálya érintőre, és a kör középpontja felé mutat, amíg az  $\vec{e}$  egységvektor érintő irányú, értelme egyező a pálya irányításával (értelmével) (27. ábra).



27. ábra. Az érintő- és normálirányú gyorsulásra vonatkozó összefüggések származtatása

Írjuk fel a pont sebesség- és gyorsulásvektorát a fenti egységvektorokkal, majd határozzuk meg koordinátáikat az egységvektorok által kifeszített koordinátarendszerben!

A sebességvektor érintőirányú a pályához és nagysága megegyezik a pálya menti sebesség nagyságával. Ebből adódóan:

$$\vec{v}(t_0) = v(t_0) \cdot \vec{e}_0 \quad /5.39/$$

Az összefüggésben  $v(t_0)$  a  $P_0$  pontbeli pálya menti sebesség. A  $P_0$  pontbeli gyorsulás az /5.16/ összefüggés alapján egy érintő és egy normálirányú komponensre bontható:

$$\vec{a}(t_0) = \vec{a}_n(t_0) + \vec{a}_e(t_0) = a_n(t_0) \cdot \vec{n}_0 + a_e(t_0) \cdot \vec{e}_0 \quad /5.40/$$

Most határozzuk meg az  $a_{0n}$  és  $a_{0e}$  koordinátákat!

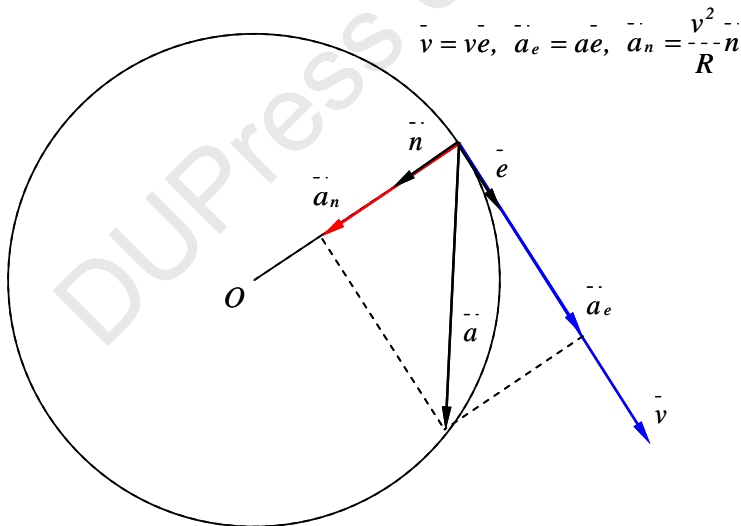
$$a_n(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{0n}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0) \cdot \Delta \varphi_0}{\Delta t} = v(t_0) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_0}{\Delta t} = v(t_0) \cdot \omega(t_0) = \frac{v^2(t_0)}{R} = \omega^2(t_0) \cdot R \quad /5.41/$$

$$a_{0e} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{0e}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_1) - v(t_0)}{\Delta t} = a(t_0) = \varepsilon(t_0) \cdot R \quad /5.42/$$

Az összefüggésekben  $v(t_0)$  és  $a(t_0)$  a  $P_0$  pontbeli pálya menti sebesség és gyorsulás. Tehát a  $P_0$  pontbeli gyorsulás:

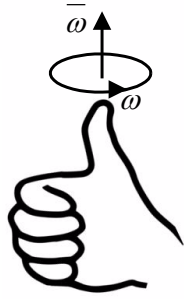
$$\vec{a}(t_0) = \frac{v^2(t_0)}{R} \cdot \vec{n}_0 + a(t_0) \cdot \vec{e}_0 = \omega^2(t_0) \cdot R \cdot \vec{n}_0 + \varepsilon(t_0) \cdot R \cdot \vec{e}_0 \quad /5.43/$$

A sebesség- és gyorsulásvektorokat a körpálya egy tetszőleges P pontjában a 28. ábra szemlélteti.



28. ábra. A sebesség- és gyorsulásvektorok iránya és komponensei körmozgás esetén

A szögsebességet és szöggyorsulást is értelmezhetjük, mint vektormennyiséget. A szögsebesség vektor nagysága, definíció szerint, megegyezik a skaláris szögsebesség nagyságával, iránya merőleges a körpálya síkjára, értelme pedig jobbcsvár szerinti. Azaz jobbkezünk 4 ujját a skaláris szögsebesség irányába helyezve hüvelykujjunk a szögsebesség vektor irányába mutat (lásd 29. ábra).

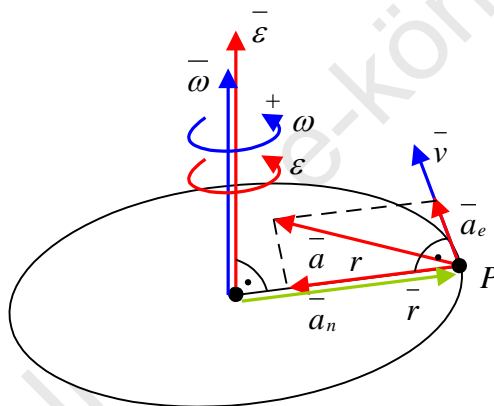


29. ábra. A szögsebességvektor iránya és értelme

A szöggyorsulás vektort hasonlóan, mint a skaláris mennyiségek esetében, a szögsebesség vektor idő szerinti deriváltjaként értelmezzük. Matematikai megfogalmazásban:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}(t) \quad /5.44/$$

Az egyes vektormennyiségek kölcsönös helyzetét az alábbi ábra szemlélteti:



30. ábra. A körmozgást leíró vektormennyiségek

Az szögsebesség vektor értelmezéséből adódóan a sebességvektorra érvényes az alábbi összefüggés:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad /5.45/$$

A sebességvektor nagyságát felírva visszakapjuk a pálya menti sebesség nagyságára vonatkozó összefüggést:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_1 \Rightarrow v = \omega \cdot r \quad /5.46/$$

Most származtassuk a gyorsulásra vonatkozó összefüggést az 5.45 összefüggés idő szerinti deriválásával:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \overbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}^{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \\ & - \vec{\omega} \overbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}^0 - \vec{r} \overbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})}^{\omega^2} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r} \quad /5.47/ \end{aligned}$$

A fenti levezetésben felhasználtuk a kettős vektori szorzat kifejtési tételét:

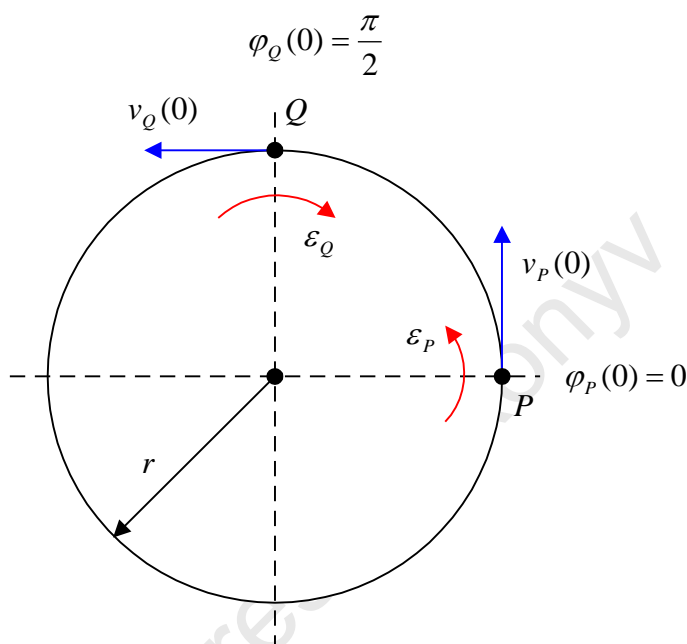
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad /5.48/$$

A 5.47 egyenlet elemzésével megállapíthatjuk, hogy az  $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$  mennyiség az érintő irányú, míg a  $\omega^2 \cdot \vec{r}$  mennyiség a normál irányú gyorsulás, azaz:

$$\vec{a}_e = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad /5.49/ \quad \vec{a}_n = \omega^2 \cdot \vec{r} \quad /5.50/$$

### Feladat:

Az  $r$  sugarú körpálya P és Q pontjából egyidejűleg elindul két anyagi pont. Az egyik egyenletesen gyorsuló, a másik egyenletesen lassuló körmozgást végez.



Adatok:

$$v_P(0) = 4 \left[ \frac{m}{s} \right], v_Q(0) = 10 \left[ \frac{m}{s} \right], r = 3[m], \varepsilon_P = 3 \left[ \frac{rad}{s} \right], \varepsilon_Q = -2 \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

a, Mennyi idő alatt éri utol a P pontból induló anyagi pont a Q pontból indulót? ( $t^* = ?$ )

b, Mekkora szöget fut be ez idő alatt a P pontból induló anyagi pont? ( $\varphi_P(t^*) = ?$ )

c, Mekkora az anyagi pontok szögsebessége az utolérés pillanatában?

( $t^*$ : az indulástól az utolérésig eltelt idő)

Megoldás:

a, utoléréskor:  $\varphi_P(t^*) = \varphi_Q(t^*)$

$$\varphi_P(t^*) = \underbrace{\varphi_P(0)}_0 + \underbrace{\omega_P(0)}_{\frac{4}{3}} \cdot t^* + \frac{\varepsilon_P}{2} \cdot t^{*2}$$

$$\omega_P(0) = \frac{v_P(0)}{r} = \frac{4}{3} \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

$$\varphi_P(t^*) = \frac{4}{3} \cdot t^* + \frac{3}{2} \cdot t^{*2}$$

$$\omega_Q(0) = \frac{v_Q(0)}{r} = \frac{10}{3} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\varphi_Q(t^*) = \varphi_Q(0) + \omega_Q(0) \cdot t^* + \frac{\varepsilon_Q}{2} \cdot t^{*2}$$

$$\varphi_Q(t^*) = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t^* + \frac{-2}{-1} \cdot t^{*2}$$

$$\text{utoléréskor: } \frac{4}{3} \cdot t^* + \frac{3}{2} \cdot t^{*2} = \frac{\pi}{2} + \frac{10}{3} \cdot t^* - t^{*2}$$

$$5t^{*2} - 4t^* - \pi = 0 \rightarrow t_1^* = 1,28[\text{s}]; t_2^* \neq -0,432[\text{s}]$$

$$b, \varphi_P(t^*) = \frac{4}{3} \cdot t^* + \frac{3}{2} \cdot t^{*2} = \frac{4}{3} \cdot 1,28 + \frac{3}{2} \cdot 1,28^2 = 4,16[\text{rad}]$$

$$c, \omega_P(t^*) = \omega_P(0) + \varepsilon_P \cdot t^* = \frac{4}{3} + 3 \cdot 1,28 = 5,17 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega_Q(t^*) = \omega_Q(0) + \varepsilon_Q \cdot t^* = \frac{10}{3} - 2 \cdot 1,28 = 0,77 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

## 5.2 A pont kinetikája

### 5.2.1 A mozgásegyenlet és megoldása

Ha az anyagi pont tömeg állandó, és a rá ható eredő erő független a pont helyétől és sebességétől, akkor a pont gyorsulása a tömeggel való osztással adódik a mozgásegyenletből (Newton II törvénye):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i) \quad /5.51/$$

Ha az eredő erő függ az anyagi pont sebességétől vagy helyétől, akkor a mozgásegyenlet megoldása egy **kezdeti érték probléma** (differenciálegyenlet) megoldására vezet. Ez utobbi, általános esettel itt nem foglalkozunk.

### 5.2.2 Impulzus- és munkatétel

Newton II. törvényéből kiindulva levezetünk két tételt. Ezen tételek alkalmazásával számos mozgástani probléma megoldása lényegesen egyszerűbb, mint a kezdeti érték probléma megoldásával. A továbbiakban feltételezzük, hogy az anyagi pont tömege állandó.

## Impulzustétel (lendülettétel)

Induljunk ki Newton második törvényéből és végezzünk el néhány átalakítást:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad / \cdot dt \quad (\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i)$$

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot \vec{a} \cdot dt = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt = m \cdot d\vec{v}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} m \cdot d\vec{v} = m \cdot \int_{\vec{v}(t_1)}^{\vec{v}(t_2)} d\vec{v} = m \cdot (\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)) = \\ &= m \cdot \vec{v}(t_2) - m \cdot \vec{v}(t_1) = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \Delta \vec{P}_{12} \end{aligned}$$

Tehát tömör alakban:

$$\bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} = \Delta \vec{P}_{12}$$

A fenti összefüggés az **impulzustétel**, ahol  $\bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2}$  az  $\vec{F}$  eredő erő lökete a  $t_1$ ,  $t_2$  időtartamon. Tehát az  $\vec{F}$  **erő lökete**t az alábbi összefüggés értelmezi:

$$\bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad /5.52/$$

Az impulzustétel szavakban megfogalmazva:

Az anyagi pontra ható eredő erő lökete egyenlő az anyagi pont lendületének (impulzusának) megváltozásával.

Feladatmegoldás során szükségünk lesz az alábbi tételre:

**Tétel:** Az eredő erő impulzusa egyenlő az egyes erők impulzusainak az összegével.

$$\bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} = \bar{I}_{F_1}^{t_1 \rightarrow t_2} + \bar{I}_{F_2}^{t_1 \rightarrow t_2} + \dots + \bar{I}_{F_i}^{t_1 \rightarrow t_2} + \dots$$

A fenti tétel belátásához tekintsük az alábbi bizonyítást:

$$\begin{aligned} \bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) + \dots + \vec{F}_i(t) + \dots) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_2(t) dt + \dots + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i(t) dt + \dots \\ &= \bar{I}_{F_1}^{t_1 \rightarrow t_2} + \bar{I}_{F_2}^{t_1 \rightarrow t_2} + \dots + \bar{I}_{F_i}^{t_1 \rightarrow t_2} + \dots \end{aligned}$$

Speciálisan, ha az anyagi pontra ható eredő erő időben állandó ( $\vec{F}(t) = \vec{F} =$  *állandó*), akkor az erő lökete vonatkozó összefüggés egyszerűsödik:

$$\bar{I}_F^{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = \vec{F} \cdot \Delta t_{12} \quad /5.53/$$

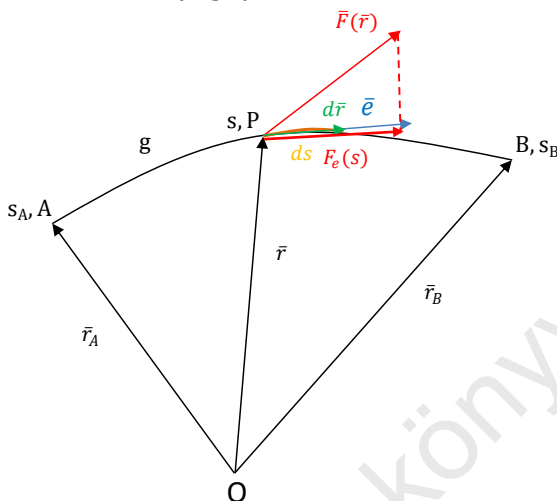
Azaz ekkor az impulzus az erő és az erőhatás időtartamának szorzata. Az impulzustételből adódóan nagyobb erő, vagy hosszabb időtartamú erőhatás nagyobb lendületváltozást okoz.

### Munkatétel

Haladjon egy anyagi pont valamely  $\vec{F}(\vec{r})$  erő hatása alatt a tér egy adott  $A$  pontjából annak  $B$  pontjába valamilyen  $g$  pályagörbe mentén. Ekkor az  $\vec{F}(\vec{r})$  erő munkáját az alábbi görbe menti integrál értelmezi (31. ábra):

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \int_{A,g}^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad /5.54/$$

A fenti összefüggésben  $d\vec{r}$  az anyagi pont elemi elmozdulása.



31. ábra. A munka kiszámítása pálya menti mennyiségekkel

Tehát a munkavégzés függ az  $\vec{F}(\vec{r})$  függvénytől, az  $A$  és  $B$  pontok megválasztásától és az  $A$  és  $B$  pontokat összekötő  $g$  pályagörbe alakjától.

A 31. ábra alapján származtathatjuk az /5.55/ összefüggést, amellyel a munkát pálya menti mennyiségekből számíthatjuk:

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \int_{A,g}^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{s_A}^{s_B} \overbrace{\vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{e}}^{F_e(s)} ds = \int_{s_A}^{s_B} F_e(s) ds \quad /5.55/$$

A fenti összefüggésben  $s_A$  és  $s_B$  az  $A$  és  $B$  pontokhoz tartozó pályakoordináta,  $F_e(s)$  az erő érintő irányú (pálya irányú) komponense,  $ds$  pedig a pályakoordináta elemi megváltozása.

A fenti összefüggésből leolvasható, hogy ha az erő minden pontban merőleges a pálya érintőjére, ezáltal a pillanatnyi elmozdulásra, akkor érintő irányú komponense, ezáltal munkavégzése zérus.

(Például egy ideálisan sima felület által kifejtett kényszererő munkavégzése minden esetben zérus.)

Speciálisan, ha  $F_e(s) = F_e = \text{állandó}$ :

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \int_{s_A}^{s_B} F_e ds = F_e \int_{s_A}^{s_B} ds = F_e \cdot (s_B - s_A) = F_e \cdot \Delta s_{AB} \quad /5.56/$$

Newton II. törvényéből kiindulva most vezessük le a munkatételt. A levezetés során feltételezzük, hogy az anyagi pont tömege állandó ( $m(t) = m = \text{állandó}$ ).

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad / \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot d\vec{v} = m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\begin{aligned} W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} &= \int_{\vec{r}_{A,g}}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \cdot \left[ \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right]_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} = \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \underbrace{\vec{v}_B \cdot \vec{v}_B}_{v_B^2} - \frac{1}{2} m \cdot \underbrace{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_A}_{v_A^2} = E_{m_B} - E_{m_A} = \Delta E_{m_{AB}} \end{aligned}$$

Tehát tömör alakban:

$$W_{\vec{F},g}^{A \rightarrow B} = \Delta E_{m_{AB}}$$

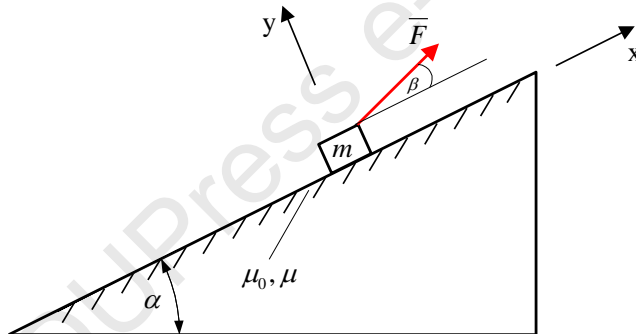
A munkatétel szavakban:

Az eredő erő munkája egyenlő az anyagi pont mozgási energiájának megváltozásával.

## Feladatok

### 1. feladat

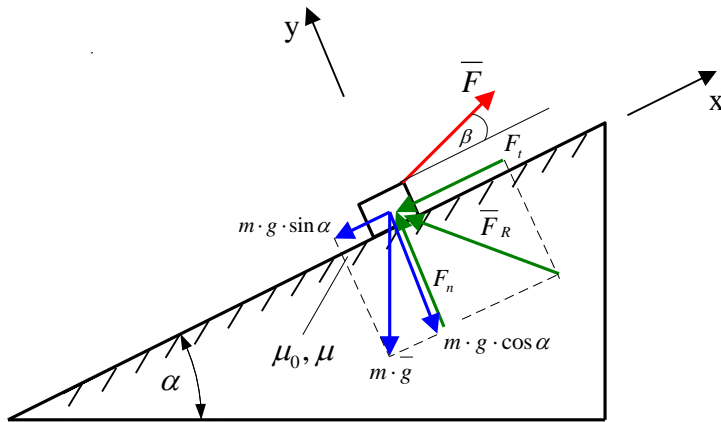
Az ábrán látható érdes lejtőre helyezett  $m$  tömegű, pontszerű testre állandó  $\vec{F}$  erővel hatunk az ábra szerint.



Adatok:  $\mu_0=0,15$ ,  $\mu=0,1$ ,  $\alpha=15^\circ$ ,  $\beta=10^\circ$ ,  $m=500[\text{kg}]$ ,  $g = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$

- Milyen határok között változhat az  $\vec{F}$  erő nagysága ahhoz, hogy a test nyugalomban maradjon?
- Mekkora lesz a test gyorsulása, ha  $F=5000[\text{N}]$ ?

Megoldás:



a)

Feltételezzük a test egyensúlyát, majd megvizsgáljuk, hogy milyen határok között változhat az  $\bar{F}$  erő nagysága, hogy az egyensúly fennálljon.

$$\sum_{i=1}^3 \bar{F}_i = m \cdot \bar{g} + \bar{F} + \bar{F}_k = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \beta \\ F \cdot \sin \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{I. } -m \cdot g \cdot \sin \alpha + F \cdot \cos \beta - F_t = 0 \\ \text{II. } -m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \beta + F_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{I. } F_t = F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \beta$$

A test akkor, és csakis akkor marad egyensúlyban, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

I. eset

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot (m \cdot g \cdot \cos \alpha + F \cdot \sin \beta)$$

$$F \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha - \mu_0 \cdot F \cdot \sin \beta$$

$$F \cdot (\cos \beta + \mu_0 \cdot \sin \beta) \leq m \cdot g (\mu_0 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$F \leq m \cdot g \cdot \frac{\mu_0 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \beta + \mu_0 \cdot \sin \beta} \rightarrow F \leq 1958,9[N] = F_{max}$$

II. eset

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$\begin{aligned}
-\mu_0 \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) &\leq F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha \\
-\mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - \mu_0 \cdot F \cdot \sin\beta &\leq F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha \\
\mu_0 \cdot F \cdot \sin\beta - F \cdot \cos\beta &\leq \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - m \cdot g \cdot \sin\alpha \\
F \cdot (\mu_0 \cdot \sin\beta - \cos\beta) &\leq m \cdot g \cdot (\mu_0 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)
\end{aligned}$$

*negatív,  
ezért osztásnál a relációs  
jel megfordul*

$$F \geq \frac{m \cdot g \cdot (\mu_0 \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)}{\mu_0 \cdot \sin\beta - \cos\beta} = 582,9[N] = F_{\min}$$

$$582,9[N] \leq F \leq 1958,9[N]$$

Ha  $F$  a fenti tartományba esik, a test egyensúlyban van.

b)

Az anyagi pont mozgásegyenlete:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_r = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} F \cdot \cos\beta \\ F \cdot \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I. F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_s = m \cdot a$$

$$II. F \cdot \sin\beta - m \cdot g \cdot \cos\alpha + F_n = 0$$

$$III. F_s = \mu \cdot F_n$$

$$II. \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta$$

$$F_s = \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta)$$

$$I. \rightarrow F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta) = m \cdot a$$

$$F \cdot \cos\beta - m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha + \mu \cdot F \cdot \sin\beta = m \cdot a$$

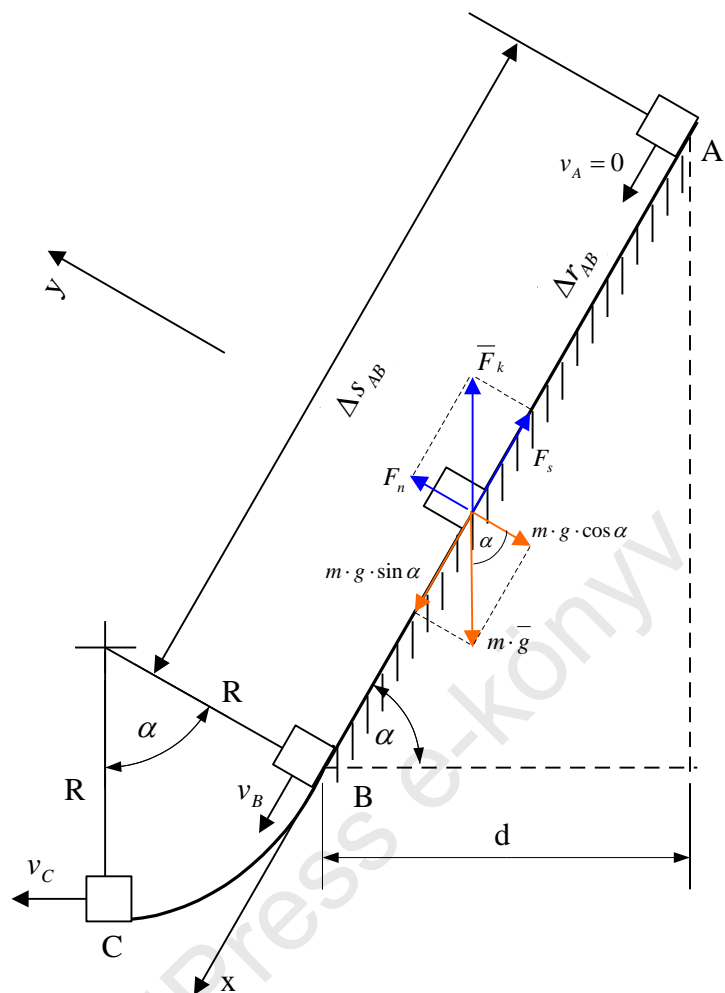
$$F \cdot (\cos\beta + \mu \cdot \sin\beta) - m \cdot g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) = m \cdot a \quad /: m$$

$$a = \frac{F}{m} \cdot (\cos\beta + \mu \cdot \sin\beta) - g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha)$$

$$a = 6,52 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

## 2. feladat

Az ábrán látható függőleges síkú kényszerpálya  $A$  pontjából, nyugalomból indul egy  $m$  tömegű anyagi pont. A pálya  $AB$  szakasza érdes, míg a  $BC$  szakasz tökéletesen sima.



**Adatok:**

$R=10$  [m],  $\alpha=60^\circ$ ,  $g=9,81$  [m/s<sup>2</sup>],  $d=6$  [m],  $\mu_{AB}=0,1$ ,  $m=2$  [kg]

- Számítsuk ki a test pálya menti gyorsulását az  $AB$  szakaszon (tudjuk, hogy a test elmozdul).
- A gyorsulás ismeretében számítsuk ki a test sebességének nagyságát a  $B$  pontban, valamint a  $\Delta t_{AB}$  időtartamot.
- Számítsuk ki a gravitációs- és a kényszererő által végzett munkát az  $AB$  szakaszon.
- Írja fel az  $AB$  szakaszra vonatkozó munkatételt, majd számítsa ki a test sebességének nagyságát a  $B$  pontban. Hasonlítsuk össze a b) és d) pontbankapott eredményeket!
- Írja fel a  $BC$  szakaszra vonatkozó munkatételt, majd számítsa ki a test sebességének nagyságát a  $C$  pontban.

Megoldás:

a) A mozgásegyenlet:

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_K = m \cdot \vec{a}$$

$$\begin{pmatrix} m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot a \\ 0 \end{pmatrix}$$

I.  $m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_s = m \cdot a$

II.  $-m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_n = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha$

III.  $F_s = \mu_{AB} \cdot F_n \rightarrow F_s = \mu_{AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$

I. és III.:  $m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu_{AB} \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = m \cdot a$

$$a = g \cdot \sin \alpha - \mu_{AB} \cdot g \cdot \cos \alpha = 8,005 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

b)  $\Delta t_{AB}$  kiszámítása:

$$\Delta s_{AB} = \frac{d}{\cos \alpha} = 12[m]$$

$$s_B = s_A + v_A \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Mivel  $v_A = 0$  és  $\Delta s_{AB} = s_B - s_A$ :

$$\Delta s_{AB} = \frac{a}{2} \cdot \Delta t_{AB}^2 \rightarrow \Delta t_{AB} = 1,73[s]$$

$$v_B = \overset{0}{\widehat{v}}_A + a \cdot \Delta t_{AB} = a \cdot \Delta t_{AB} = 13,86 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

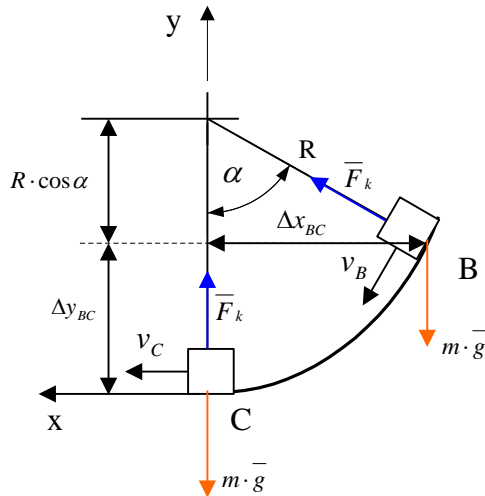
c)  $W_{mg}^{A \rightarrow B} = m \cdot \vec{g} \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta s_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = \overbrace{m \cdot g \cdot \sin \alpha}^{F_{ge}} \cdot \Delta s_{AB} = 203,9[J]$

$$W_{mg}^{A \rightarrow B} = \vec{F}_k \cdot \Delta \vec{r}_{AB} = \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta s_{AB} \\ 0 \end{pmatrix} = \overbrace{-F_s}^{F_{ke}} \cdot \Delta s_{AB} = -\mu_{AB} \cdot F_n \cdot \Delta s_{AB} = -11,77[J]$$

d)  $\sum_{i=1}^2 W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_{mg}^{A \rightarrow B} + W_{F_K}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_A^2}^0 \Rightarrow v_B = 13,86 \left[ \frac{m}{s} \right]$

Tehát a két különböző módszerrel kapott sebességek megegyeznek.

e)



$$\Delta y_{BC} = R - R \cdot \cos \alpha \rightarrow \Delta y_{BC} = 5[m]$$

A gravitációs erő munkavégzése:

$$W_{m\vec{g}}^{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_{BC} \\ -\Delta y_{BC} \end{pmatrix} = m \cdot g \cdot \Delta y_{BC}$$

Azaz a gravitációs erő munkavégzése az erő nagyságán kívül csak a test y irányú elmozdulásától függ.

A kényszererő munkavégzése:

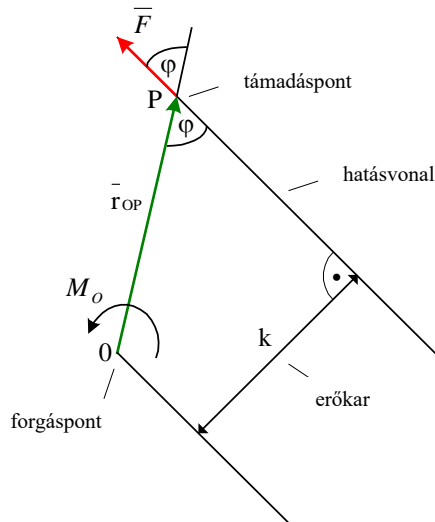
Mivel a pálya BC szakasza tökéletesen sima, így a kényszererő minden pontban merőleges a pálya érintőjére, így érintő irányú komponense, ebből adódóan munkavégzése zérus.

Munkatétel:

$$\sum_{i=1}^2 W_{F_i}^{B \rightarrow C} = W_{m\vec{g}}^{B \rightarrow C} + \underbrace{W_{F_K}^{B \rightarrow C}}_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 \Rightarrow v_C = 17,035 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

## 6. Merev test statikája

A továbbiakban a merev testek statikájával foglalkozunk. Míg egy anyagi pont csak haladó mozgást (transzláció) végezhet, addig egy merev test foroghat (rotáció) is. Az erő forgató hatását a **forgatónyomatékával** jellemezzük. (32. ábra).



32. ábra. Az  $\vec{F}$  erő  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomatéka

Az  $\vec{F}$  erő  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomatéka definíció szerint:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} \quad (6.1)$$

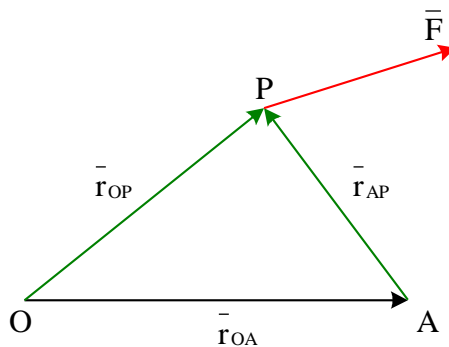
Tehát a forgatónyomaték az erő támadáspontjába mutató  $\vec{r}_{OP}$  helyvektor és az  $\vec{F}$  erő vektoriális szorzata. Tehát a pontra vonatkozó forgatónyomaték vektor mennyiség. Az  $\vec{M}_O$  nyomaték nagysága:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r}_{OP} \times \vec{F}| = |\vec{r}_{OP}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\varphi = \underbrace{|\vec{F}|}_{F} \cdot \underbrace{|\vec{r}_{OP}| \cdot \sin\varphi}_k = F \cdot k \quad (6.2)$$

ahol  $F$  az erő nagysága,  $k$  az erőkar, amely definíció szerint az  $\vec{F}$  erő hatásvonalának az  $O$  forgásponttól mért távolsága.

### Kapcsolat egy erő két különböző pontra ( $A$ és $O$ ) vonatkozó forgatónyomatékai között

A 33. ábra alapján felírhatjuk a kapcsolatot az  $\vec{F}$  erő  $O$  és  $A$  pontra vonatkozó forgatónyomatékai között.



33. ábra. Kapcsolat az  $\vec{F}$  erő  $O$  és  $A$  pontra vonatkozó forgatónyomatékai között

$$\bar{M}_A = \bar{r}_{AP} \times \bar{F} = \overbrace{(\bar{r}_{OP} - \bar{r}_{OA})}^{\bar{r}_{AP}} \times \bar{F} = \underbrace{\bar{r}_{OP} \times \bar{F}}_{\bar{M}_O} - \bar{r}_{OA} \times \bar{F} = \bar{M}_O - \bar{r}_{OA} \times \bar{F} = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F} \quad (6.3)$$

A két pont szerepét felcserélve:

$$\bar{M}_O = \bar{M}_A + \bar{r}_{OA} \times \bar{F} \quad (6.4)$$

## 6.1 Erőrendszer eredő vektorkettőse

Egy erőrendszer **eredő erejét** és **0 pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát** az alábbi összefüggések értelmezik:

$$\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_l + \dots \quad (6.5)$$

$$\bar{M}_O = \sum_i \bar{M}_{Oi} = \sum_i (\bar{r}_{Oi} \times \bar{F}_i) = \bar{r}_{O1} \times \bar{F}_1 + \bar{r}_{O2} \times \bar{F}_2 + \dots + \bar{r}_{Ol} \times \bar{F}_l + \dots \quad (6.6)$$

ahol  $\bar{r}_{Oi}$  az 0 pontból az  $\bar{F}_i$  erő támadáspontjába ( $P_i$ ) mutató helyvektor. Tehát az 0 pontra vonatkozó eredő forgatónyomaték az egyes erők 0 pontra vonatkozó forgatónyomatékainak összege.

Az eredő erőt és 0 pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékot együttesen az **0 pontra redukált eredő vektorkettősnek** nevezzük.

Matematikai jelölésekkel:  $(\bar{F}; \bar{M}_O)$

### Kapcsolat egy erőrendszer két különböző pontra (A és O) vonatkozó eredő forgatónyomatékai között

Írjuk fel az erőrendszer eredő forgatónyomatékát az A pontra, az egyes forgatónyomatékokra alkalmazva a  $\bar{M}_{Ai} = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}_i$  összefüggést:

$$\begin{aligned} \bar{M}_A &= \sum_i \bar{M}_{Ai} = \sum_i (\bar{M}_{Oi} + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}_i) = \sum_i \bar{M}_{Oi} + \sum_i (\bar{r}_{AO} \times \bar{F}_i) = \sum_i \bar{M}_{Oi} + \bar{r}_{AO} \times \sum_i \bar{F}_i = \\ &= \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F} \quad (6.7) \end{aligned}$$

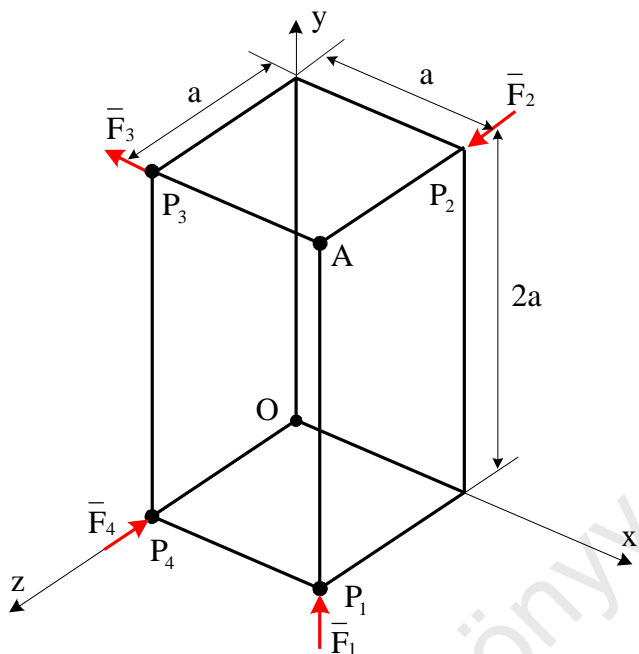
A fenti összefüggésben  $\bar{F}$  az eredő erőt,  $\bar{M}_A$  és  $\bar{M}_O$  az A és O pontokra vonatkozó eredő forgatónyomatékot jelöli. Tehát egy erőrendszer esetén ugyanarra az összefüggésre jutunk, mint egyetlen erő esetében.

### Feladat

Tekintsük az alábbi ábrát, majd:

- Számítsuk ki az erőrendszer eredő erejét és 0 pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát!
- Számítsuk ki az erőrendszer A pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát felhasználva az alábbi összefüggést:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}$$



Adatok:  $F_1 = 5[\text{N}]$ ,  $F_2 = 5[\text{N}]$ ,  $F_3 = 10[\text{N}]$ ,  $F_4 = 10[\text{N}]$ ,  $a = 2[\text{m}]$ .

Megoldás:

a)

$$\bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}]; \quad \bar{r}_{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} [\text{m}]; \quad \rightarrow \bar{M}_{1O} = \bar{r}_{OP_1} \times \bar{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

$$\bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} [\text{N}]; \quad \bar{r}_{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{m}]; \quad \rightarrow \bar{M}_{2O} = \bar{r}_{OP_2} \times \bar{F}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

$$\bar{F}_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{N}]; \quad \bar{r}_{OP_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} [\text{m}]; \quad \rightarrow \bar{M}_{3O} = \bar{r}_{OP_3} \times \bar{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

$$\bar{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} [\text{N}]; \quad \bar{r}_{OP_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} [\text{m}]; \quad \rightarrow \bar{M}_{4O} = \bar{r}_{OP_4} \times \bar{F}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^4 \bar{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} [\text{N}]$$

$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^4 \bar{M}_{Oi} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

b)

$$\bar{M}_A = \bar{M}_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F} = \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} [Nm]$$

## 6.2 Erőrendszerek egyenértékűsége és eredője

Két erőrendszer egyenértékű, ha a tér bármely pontjára vonatkozóan eredő forgatónyomatékuk egymással egyenlő. A fenti definíciót két erőrendszer egyenértékűség eldöntésére nem tudjuk direktben alkalmazni, mivel végtelen sok pontra kellene elvégezni a vizsgálatot. Ezért most kimondunk két tételt, amellyel két erőrendszer egyenértékűsége ténylegesen vizsgálható.

### 1. Tétel:

Ha két erőrendszer eredő ereje és egy adott pontra ( $O$ ) vonatkozó forgatónyomatéka egyenlő egymással, akkor a két erőrendszer egyenértékű.

*Bizonyítás:*

Jelöljük ' -vel az egyik, '' -vel a másik erőrendszert.

Teljesül az alábbi két egyenlőség:

$$\bar{M}'_A = \bar{M}'_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}' \quad \text{és} \quad \bar{M}''_A = \bar{M}''_O + \bar{r}_{AO} \times \bar{F}''$$

Mivel  $\bar{M}'_O = \bar{M}''_O$  és  $\bar{F}' = \bar{F}''$  a fenti két egyenlőségből adódik, hogy  $\bar{M}'_A = \bar{M}''_A$  bármely  $A$  pontra.

### 2. Tétel:

Ha két erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér három különböző, nem egy egyenesre eső pontjára ( $A, B, C$ ) vonatkozóan egyenlő egymással, akkor a két erőrendszer egyenértékű.

Matematikai megfogalmazásban:

1)  $A, B$  és  $C$  különböző, nem egy egyenesbe eső pontok,

2)  $\bar{M}'_A = \bar{M}''_A$ ;  $\bar{M}'_B = \bar{M}''_B$ ;  $\bar{M}'_C = \bar{M}''_C$ ,

akkor a két erőrendszer egyenértékű.

*Bizonyítás:*

$$\begin{aligned} \bar{M}'_B &= \bar{M}'_A + \bar{r}_{BA} \times \bar{F}', & \bar{M}''_B &= \bar{M}''_A + \bar{r}_{BA} \times \bar{F}'' \\ \bar{M}'_C &= \bar{M}'_A + \bar{r}_{CA} \times \bar{F}', & \bar{M}''_C &= \bar{M}''_A + \bar{r}_{CA} \times \bar{F}'' \end{aligned}$$

- $\bar{M}'_A = \bar{M}''_A$ ,  $\bar{M}'_B = \bar{M}''_B$ ,  $\bar{M}'_C = \bar{M}''_C \rightarrow$   
 $\bar{r}_{BA} \times \bar{F}' = \bar{r}_{BA} \times \bar{F}''$  és  $\bar{r}_{CA} \times \bar{F}' = \bar{r}_{CA} \times \bar{F}''$
- $A \neq B \neq C$  és  $A, B$  és  $C$  nem esnek egy egyenesbe

$\vec{r}_{BA} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{r}_{CA} \neq \vec{0}$  és  $\vec{r}_{BA}$  nem párhuzamos az  $\vec{r}_{CA}$  vektorral.

Bebizonyítjuk, hogy  $\vec{F}' = \vec{F}''$ :

1. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA}$  nem párhuzamos  $\vec{F}'$ -el, akkor az  $\vec{r}_{BA} \times \vec{F}' = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}''$  egyenletből – figyelembe véve, hogy  $\vec{r}_{BA} \neq \vec{0}$  – következik, hogy  $\vec{F}' = \vec{F}''$ .

2. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA}$  párhuzamos  $\vec{F}'$ -vel, akkor az  $\vec{r}_{CA}$  vektor nem lehet párhuzamos vele. (Mivel  $\vec{r}_{BA}$  nem párhuzamos  $\vec{r}_{CA}$ -val). Következtetésképp, az  $\vec{r}_{CA} \times \vec{F}' = \vec{r}_{CA} \times \vec{F}''$  egyenletből – figyelembe véve, hogy  $\vec{r}_{CA} \neq \vec{0}$  – következik, hogy  $\vec{F}' = \vec{F}''$ .

Így bebizonyítottuk, hogy  $\vec{F}' = \vec{F}''$ .

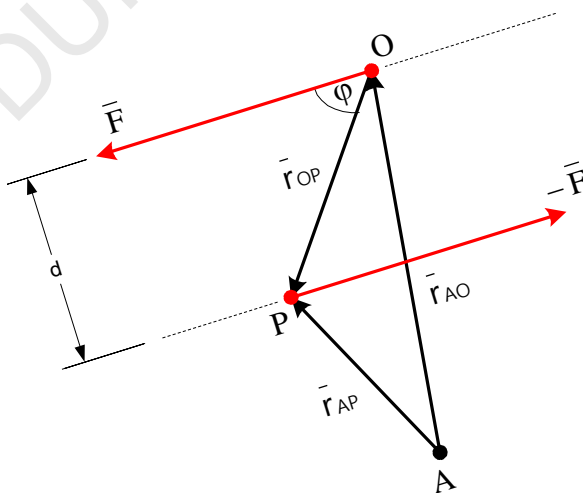
Mivel  $\vec{F}' = \vec{F}''$  és  $\vec{M}_A' = \vec{M}_A''$  a 1. tételből következik, hogy a két erőrendszer egyenértékű.

Mechanikai számítások során egy erőrendszert célszerű az **eredőjével** helyettesíteni. Egy **erőrendszer eredője** az erőrendszerrel egyenértékű legegyszerűbb erőrendszer.

### 6.3 Erőrendszerek osztályozása

A továbbiakban osztályozzuk az erőrendszereket eredő vektorkettősük alapján, és minden osztály esetén megadjuk az eredőt. Az osztályozás előtt vezessünk be az **erőpár** és **erőcsavar** fogalmát.

Az erőpár két azonos nagyságú, azonos irányú, de ellentétel értelmű erőből álló erőrendszer (34. ábra).



34. ábra. Erőpár eredő forgatónyomatéka

Az erőpár egy fontos tulajdonságára mutat rá a következő tétel.

**6.3.1 Tétel:** Egy erőpár forgatónyomatéka a tér bármelyik pontjára vonatkozóan ugyanaz.

*Bizonyítás:*

Tekintsük a 34. ábrát. Azt fogjuk bizonyítani, hogy az  $(\vec{F}; -\vec{F})$  erőpár forgatónyomatéka a tér bármely  $A$  pontjára vonatkozóan ugyanaz, mint az ábrán jelölt  $O$  pontra. Írjuk fel az  $A$  pontra vonatkozó forgatónyomatékot, majd végezzünk el néhány egyenértékű átalakítást.

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} + \vec{r}_{AO} \times (-\vec{F}) = \vec{r}_{AP} \times \vec{F} - \vec{r}_{AO} \times \vec{F} = \underbrace{(\vec{r}_{AP} - \vec{r}_{AO})}_{\vec{r}_{OP}} \times \vec{F} = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_O \quad (6.8)$$

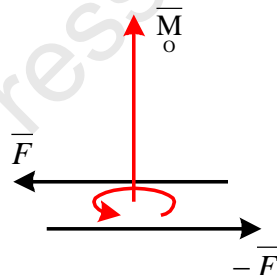
Tehát igazoltuk, hogy a forgatónyomaték bármely  $A$  pontra egyező az  $O$  pontra vonatkozó nyomatékkal.

Most írjuk fel az  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomaték nagyságát:

$$|\vec{M}_O| = |\vec{r}_{OP} \times \vec{F}| = |\vec{F} \times (-\vec{r}_{OP})| = |\vec{F} \times \vec{r}_{PO}| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}_{PO}| \cdot \sin\varphi = F \cdot d \quad (6.9)$$

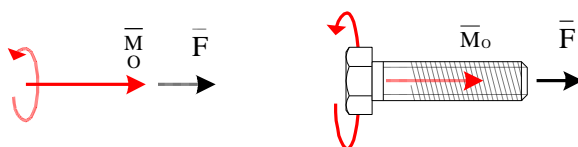
Tehát azt kaptuk, hogy az erőpár eredő forgatónyomatékának nagysága megegyezik az erő nagyságának ( $F$ ) és a két erő hatásvonala között mért távolságnak ( $d$ ) a szorzatával.

A vektoriális szorzat tulajdonságaiból adódóan egy erőpár forgatónyomatéka merőleges az erőpár síkjára (35. ábra).



35. ábra. Erőpár forgatónyomatéka

Az erőcsavar egy erő, és egy, az erő hatásvonalával párhuzamos forgatónyomaték együttese (36. ábra).



36. ábra. Erőcsavar

A továbbiakban osztályozzuk az erőrendszereket eredő vektorkettősük alapján és minden egyes osztály esetén megadjuk az eredőt. Jelölje a továbbiakban  $\vec{F}$  az eredő erőt és  $\vec{M}_O$  az  $O$  pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékat.

Minden erőrendszer besorolható a következő három osztály valamelyikébe:

1. Ha  $\vec{F} = \vec{0}$  akkor az erőrendszer eredője egy erőpár  $\vec{M}_O$  nyomatékkal.
2. Ha  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{M}_O$  merőleges  $\vec{F}$ -re, akkor az erőrendszer eredője  $\vec{F}$  a tér egy rögzített hatásvonalán.
3. Ha  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{M}_O$  nem merőleges  $\vec{F}$ -re, akkor az erőrendszer eredője egy erőcsavar.

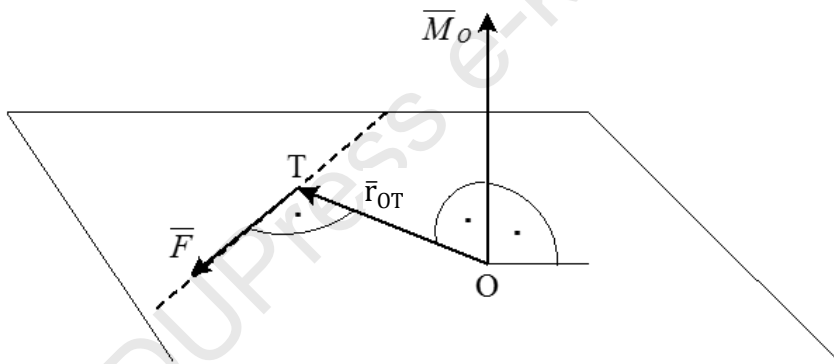
**Bizonyítás:**

1. Alkalmazzuk a következő összefüggést:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} = \vec{M}_O \rightarrow \vec{M}_A = \vec{M}_O \text{ bármely } A \text{ pontra} \rightarrow$$

Az erőrendszer eredője egy erőpár  $\vec{M}_O$  nyomatékkal.

2. Rögzítsünk egy síkot, amely átmegy az  $O$  ponton, és merőleges  $\vec{M}_O$ -ra (37. ábra). Mivel  $\vec{F}$  merőleges  $\vec{M}_O$ -ra, megjeleníthető a fenti síkon. Jelölje  $T$  pont az  $O$  pontnak az  $\vec{F}$  erő hatásvonalára eső merőleges vetületét.



37. ábra. Az  $\vec{F}$  eredő hatásvonalának helye  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{M}_O$  merőleges  $\vec{F}$  esetén

Mivel  $\vec{M}_O$  merőleges az  $\vec{r}_{OT}$  és  $\vec{F}$  vektorok által meghatározott síkra, így az  $\vec{F}$  eredő erő  $O$  pontra vonatkozó forgatónyomatéka az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OT} \times \vec{F} \quad (6.10)$$

A fenti egyenletben az  $\vec{r}_{OT}$  vektor kijelöli az  $\vec{F}$  erő hatásvonalának helyét. Fejezzük ki az  $\vec{r}_{OT}$  vektort az alábbi egyenletből:

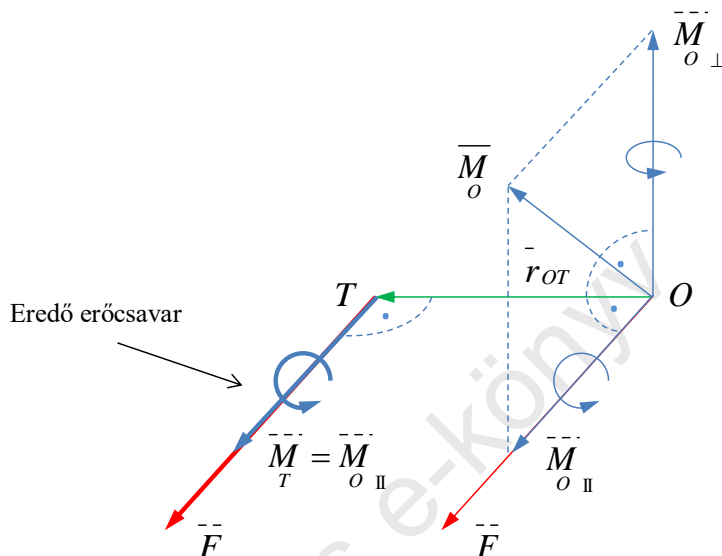
$$\vec{F} \times \vec{M}_O = \vec{F} \times (\vec{r}_{OT} \times \vec{F}) = \vec{r}_{OT} \cdot \overbrace{(\vec{F} \cdot \vec{F})}^{F^2} - \vec{F} \cdot \overbrace{(\vec{F} \cdot \vec{r}_{OT})}^0 = \vec{r}_{OT} \cdot F^2 \quad (6.11)$$

Tehát az  $\vec{r}_{OT}$  helyvektor:

$$\vec{r}_{OT} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \quad (6.12)$$

Az  $\vec{F}$  eredő erőt az  $\vec{r}_{OT}$  által kijelölt hatásvonalon alkalmazva megkapjuk az eredőt.

3. Bontsuk fel az  $\vec{M}_O$  eredő forgatónyomatékat két komponensre (38. ábra). Az egyik komponens ( $\vec{M}_{O//}$ ) párhuzamos az  $\vec{F}$  eredő erővel, míg a másik ( $\vec{M}_{O\perp}$ ) merőleges rá.



38. ábra. Az eredő erőcsavar  $\vec{F} \neq \vec{0}$  és  $\vec{M}_O$  nem merőleges  $\vec{F}$  esetén

Definiáljuk a T pontot hasonló módon, mint a 2. esetben. Ekkor az alábbi összefüggés érvényes:

$$\vec{M}_{O\perp} = \vec{r}_{OT} \times \vec{F} \rightarrow \vec{r}_{OT} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_{O\perp}}{F^2} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_{O\perp} + \vec{F} \times \vec{M}_{O//}}{F^2} = \frac{\vec{F} \times (\vec{M}_{O\perp} + \vec{M}_{O//})}{F^2} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \quad (6.13)$$

Az erőrendszer eredő forgatónyomatéka a T pontra:

$$\vec{M}_T = \vec{M}_O + \vec{r}_{TO} \times \vec{F} = \vec{M}_{O//} + \vec{M}_{O\perp} + \vec{r}_{TO} \times \vec{F} = \vec{M}_{O//} + \overbrace{\vec{M}_{O\perp} - \vec{r}_{OT} \times \vec{F}}^{\vec{0}} = \vec{M}_{O//} \quad (6.14)$$

Tehát az eredő erőcsavar a T pontban:

$$(\vec{F}, \vec{M}_T) = (\vec{F}, \vec{M}_{O//})$$

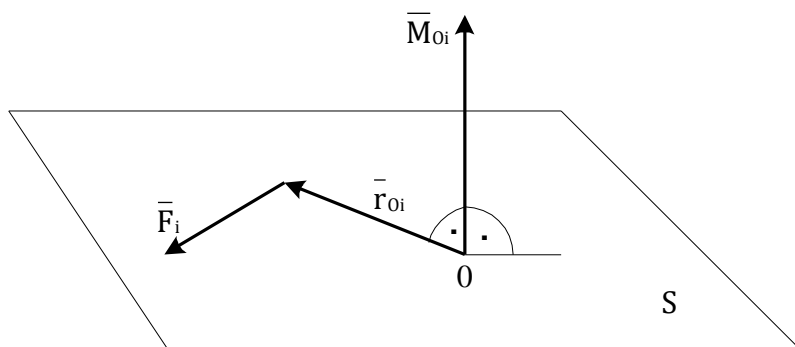
A T pontba mutató helyvektor a következő összefüggéssel számítható:

$$\vec{r}_{OT} = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_O}{F^2} \quad (6.15)$$

Összefoglalva, egy általános térbeli erőrendszer eredője lehet egy erő egy rögzített hatásvonalon, vagy egy erópár vagy egy erőcsavar. Azaz ha teljesen általánosan szemléljük, akkor bármely erőrendszer egy erőcsavarral helyettesíthető, csak speciálisan az erőcsavar egy erővé vagy egy erópárrá egyszerűsödhet (lásd 2. és 1. eset).

## 6.4 Síkbeli erőrendszerek

Egy erőrendszer síkbeli, ha az erőrendszert alkotó összes erő ugyanabban a síkban (S) fekszik.



39. ábra. Erő és forgatónyomatéka síkbeli erőrendszer esetén

### 6.4.1 Tétel:

Egy síkbeli erőrendszer eredő ereje és eredő nyomatéka merőleges egymásra.

*Bizonyítás:*

Jelölje a síkbeli erőrendszer O pontra vonatkozó eredő erejét és forgatónyomatékát  $\bar{F}$  és  $\bar{M}_O$  ( $O \in S$ ).

- $\bar{r}_{Oi}$  és  $\bar{F}_i \in S$
  - $\bar{M}_{Oi} = \bar{r}_{Oi} \times \bar{F}_i$
- }  $\bar{M}_{Oi}$  merőleges az S síkra  
 $\rightarrow \bar{M}_O = \sum_i \bar{M}_{Oi}$  szintén merőleges S-re.

Következtetés:

- $\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i \in S$
  - $\bar{M}_O$  merőleges S-re
- }  $\bar{M}_O$  merőleges  $\bar{F}$ -re.

### 6.4.2 Tétel:

Az összes síkbeli erőrendszer besorolható az alábbi két osztály valamelyikébe:

1. Ha  $\bar{F} = \bar{0}$  akkor az erőrendszer eredője egy erőpár  $\bar{M}_O$  nyomatékkal.
2. Ha  $\bar{F} \neq \bar{0}$  akkor az erőrendszer eredője az  $\bar{F}$  eredő erő egy rögzített hatásvonalon, amely átmegy a T ponton, amelyet az alábbi összefüggés határoz meg:

$$\bar{r}_{OT} = \frac{\bar{F} \times \bar{M}_O}{F^2} \quad (6.16)$$

*Bizonyítás:*

A térbeli erőrendszereknél elmondottakból direktben következik.

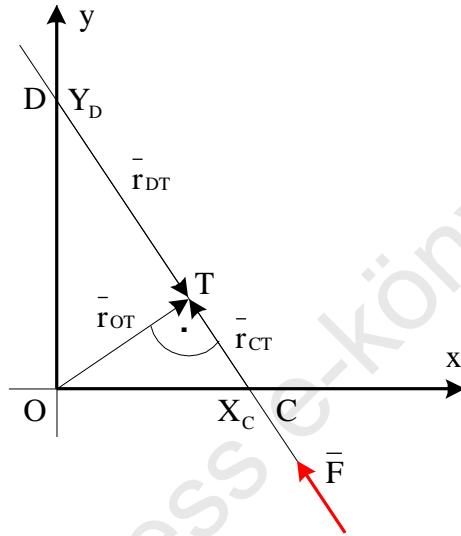
### 6.4.3 Tétel:

Ha a síkbeli erőrendszer eredő ereje és forgatónyomatéka a következő alakban adott:

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \bar{M}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_O \end{pmatrix}$$

akkor az eredő erő hatásvonalának  $x$  és  $y$  koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontjai az alábbi összefüggésekkel számíthatók:

$$x_C = \frac{M_O}{F_y}, \quad y_D = -\frac{M_O}{F_x}$$



40. ábra. Az  $\bar{F}$  eredő hatásvonalának  $x$  és  $y$  tengelyekkel alkotott metszéspontjai síkbelierőrendszer esetén ha  $\bar{F} \neq \bar{0}$

*Bizonyítás:*

$$\bar{r}_{OT} = \frac{\bar{F} \times \bar{M}_O}{F^2} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ F_x & F_y & 0 \\ 0 & 0 & M_O \end{vmatrix}}{F^2} = \frac{\bar{i} \cdot F_y \cdot M_O - \bar{j} \cdot F_x \cdot M_O}{F^2} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix}$$

Így az  $\bar{r}_{OT}$ ,  $\bar{r}_{CT}$  és  $\bar{r}_{DT}$  vektorok:

$$\bar{r}_{OT} = \begin{pmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_{CT} = \begin{pmatrix} x_{OT} - x_C \\ y_{OT} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O - x_C \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}_{DT} = \begin{pmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} - y_D \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_O \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_O - y_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mivel  $\vec{r}_{OT}$  merőleges  $\vec{r}_{CT}$ -re:

$$\vec{r}_{OT} \cdot \vec{r}_{CT} = \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 - x_C \\ -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 \cdot \left( \frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 - x_C \right) + \left( -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_0 \right) \cdot \left( -\frac{F_x}{F^2} \cdot M_0 \right) = 0$$

$$\frac{F_y^2}{F^4} \cdot M_0^2 + \frac{F_x^2}{F^4} \cdot M_0^2 = \frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 \cdot x_C$$

$$M_0^2 \cdot \frac{\overbrace{F_x^2 + F_y^2}^{F^2}}{F^4} = \frac{F_y}{F^2} \cdot M_0 \cdot x_C$$

$$M_0 = F_y \cdot x_C \rightarrow x_C = \frac{M_0}{F_y}$$

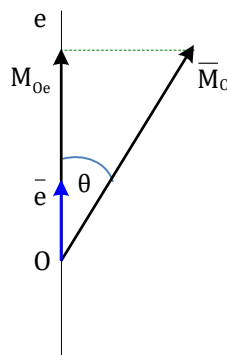
Mivel  $\vec{r}_{OT}$  és  $\vec{r}_{DT}$  szintén merőlegesek egymásra:

$$y_D = -\frac{M_0}{F_x}$$

## Skaláris forgatónyomaték

A **skaláris nyomaték** egy erő egy tengely körüli forgató hatását jellemzi (41. ábra.). Ha a tengely egy  $\vec{e}$  egységvektorral adott, akkor a skaláris forgatónyomatékot az alábbi összefüggés értelmezi:

$$M_{Oe} = \vec{M}_O \cdot \vec{e} = |\vec{M}_O| \cdot \overset{1}{|\vec{e}|} \cdot \cos \theta = |\vec{M}_O| \cdot \cos \theta \quad (6.17)$$

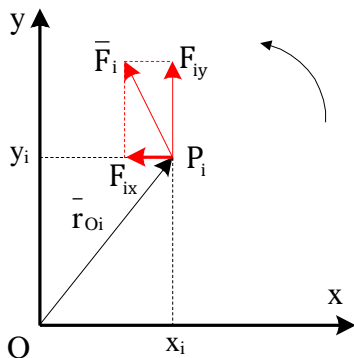


41. ábra. A skaláris (tengelyre vonatkozó) forgatónyomaték értelmezése

ahol  $\vec{M}_O$  az erőnek az O pontra vonatkozó forgatónyomatékvektora. Így a skaláris nyomaték a nyomatékvektor  $e$  egyenesre (tengelyre) eső merőleges vetülete ( $M_{Oe}$ , 41. ábra).

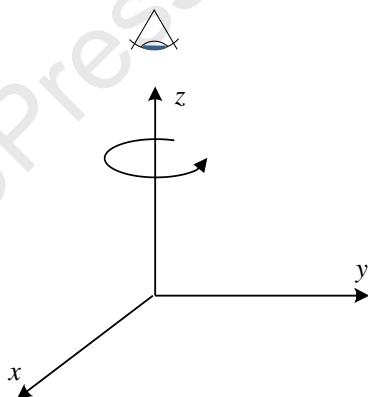
Egy az  $xy$  síkba eső erőrendszer esetén az egyes  $\vec{F}_i$  erők skaláris nyomatékát a  $z$  tengelyre szokás vonatkoztatni. Az  $\vec{F}_i$  erők skaláris nyomatéka:

$$M_{O_i} = \vec{M}_{O_i} \cdot \vec{k} = (\vec{r}_{O_i} \times \vec{F}_i) \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{y_i} \cdot x_i - F_{x_i} \cdot y_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = F_{iy} \cdot x_i - F_{ix} \cdot y_i$$



42. ábra. Ábra síkbeli erőrendszer skaláris forgatónyomatékának számításához

Ha a pozitív forgásirányt a  $z$  tengellyel szembe nézve az óramutató járásával ellentétes irányba vesszük fel (43. ábra.), akkor  $F_{iy} \cdot x_i$  az  $F_{iy}$  komponens skaláris nyomatéka, míg  $-F_{ix} \cdot y_i$  az  $F_{ix}$  komponensé.



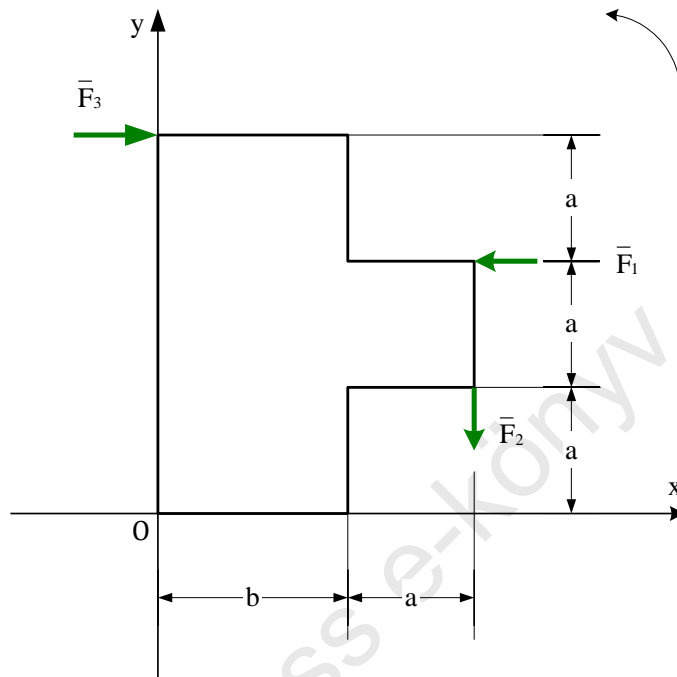
43. ábra. Pozitív forgásirány értelmezése

Tehát az  $\vec{F}_i$  erő skaláris nyomatéka kiszámítható az  $F_{ix}$  és  $F_{iy}$  komponensek nyomatékainak összegeként.

## Feladatok

### 1. Feladat

Az ábra egy merev lemezre ható három erőt szemléltet. A lemez méretei és az erők nagyságai adottak.



Adatok:  $F_1 = 4[N]$ ,  $F_2 = 5[N]$ ,  $F_3 = 10[N]$ ,  $a = 2[m]$ ,  $b = 3[m]$ .

- Számítsuk ki a lemezre ható síkbeli erőrendszer eredő erejét, valamint az O pontra vonatkozó eredő skaláris és vektoriális forgatónyomatékát!
- Számítsuk ki az eredő erő hatásvonalának x és y tengellyel alkotott metszéspontjait!

Megoldás:

a)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [N], \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} [N], \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [N]$$

Az eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} [N]$$

Az eredő skaláris forgatónyomaték az O pontra:

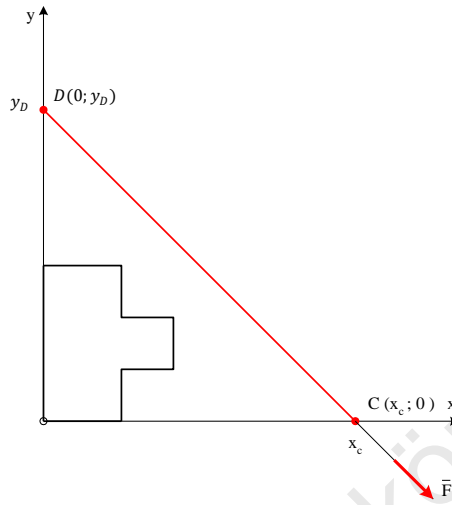
$$M_O = F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot (a + b) - F_3 \cdot 3a = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 5(2 + 3) - 10 \cdot 3 \cdot 2 = -69 [\text{Nm}]$$

Az eredő vektoriális forgatónyomaték az O pontra:

$$\bar{M}_O = M_O \cdot \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -69 \end{pmatrix} [\text{Nm}]$$

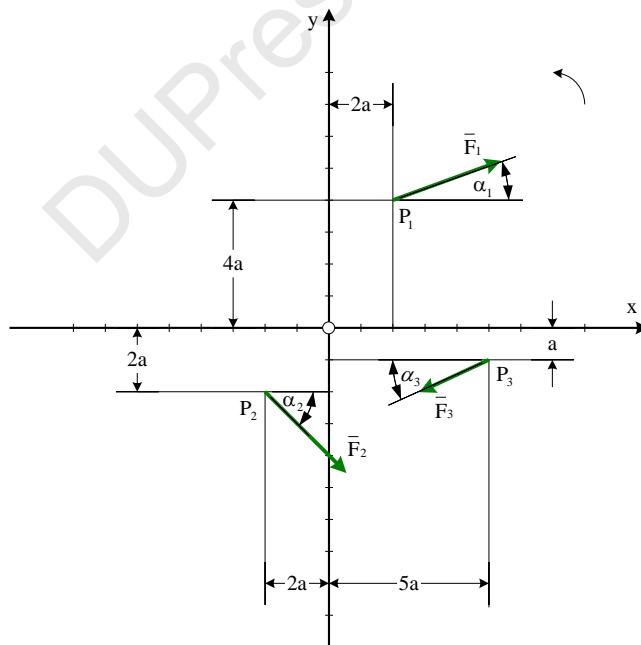
b)

$$x_c = \frac{M_O}{F_y} = \frac{-69}{-5} = 13,8[\text{m}], \quad y_D = -\frac{M_O}{F_x} = -\frac{-69}{6} = 11,5[\text{m}]$$



2. feladat:

Az ábrán látható három, egy síkba eső erő, valamint támadáspontjaik koordinátái ismertek.



Adatok:  $F_1 = 3[\text{N}]$ ,  $\alpha_1 = 20^\circ$ ,  $F_2 = 3[\text{N}]$ ,  $\alpha_2 = 45^\circ$ ,  $F_3 = 2[\text{N}]$ ,  $\alpha_3 = 25^\circ$ ,  $a = 0,1[\text{m}]$ .

- a) Számítsuk ki az erőrendszer O pontra vonatkozó eredő erejét és eredő skaláris és vektoriális forgatónyomatékát!  
 b) Számítsuk ki az eredő erő hatásvonalának x és y tengellyel alkotott metszéspontjait!

*Megoldás:*

a)

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ F_1 \cdot \sin \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,819 \\ 1,026 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ -F_2 \cdot \sin \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,121 \\ -2,121 \end{pmatrix} [N]$$

$$\vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -F_3 \cdot \cos \alpha_3 \\ -F_3 \cdot \sin \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,813 \\ -0,845 \end{pmatrix} [N]$$

Eredő erő:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 2,819 \\ 1,026 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,121 \\ -2,121 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,813 \\ -0,845 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,127 \\ -1,940 \end{pmatrix} [N]$$

Eredő skaláris nyomaték az O pontra:

$$M_0 = -F_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot 4a + F_1 \cdot \sin \alpha_1 \cdot 2a + F_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot 2a + F_2 \cdot \sin \alpha_2 \cdot 2a - F_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot a - F_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 5a = -0,678 [Nm]$$

Eredő vektoriális nyomaték az O pontra:

$$\vec{M}_0 = M_0 \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,678 \end{pmatrix} [Nm]$$

b)

$$x_c = \frac{M_0}{F_y} = \frac{-0,678}{-1,940} = 0,349 [m], \quad y_D = -\frac{M_0}{F_x} = -\frac{-0,678}{3,127} = 0,217 [m]$$

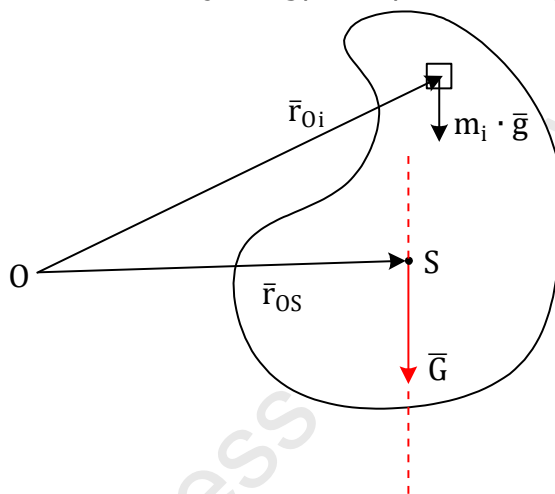
## 7. Homogén gravitációs erőrendszer eredő vektorkettőse és eredője. Súlypont

A gravitációs erő a test térfogatában megoszló párhuzamos erőrendszer. A továbbiakban megadjuk a fenti erőrendszer eredőjét, valamint értelmezzük a súlyvonal és súlypont fogalmát. Megoszló párhuzamos erőrendszer működhet nem csak térfogat, de felület vagy vonal mentén is. A felület vagy vonal súlypontja megközelítőleg egybeesik az egyező alakú, vékony lemezből vagy huzalból készült homogén test súlypontjával. A mechanikában használatos még a tömegközéppont fogalma. Érdemes megjegyezni, hogy ha a test teljes térfogatában a gravitációs mező homogén, akkor a test súlypontja egybeesik a tömegközéppontjával. Mivel a gyakorlati életben minden test mérete

elhanyagolható a Föld méretéhez képest, így a tömegközéppont és a súlypont egybeesik. Ebből adódóan a gyakorlati alkalmazásokban a súlypont és tömegközéppont egybeesik.

## 7.1 Homogén gravitációs erőrendszer eredője

Ebben a fejezetben a homogén gravitációs erőrendszer eredő erejére és eredő forgatónyomatékra vonatkozó összefüggéseket származtatunk, majd megadjuk az erőrendszer eredőjét. A 44. ábrán látható testet bontsuk fel a méretéhez képest elhanyagolható méretű darabokra. Az  $i$ . darab tömegét jelölje  $m_i$ . A gravitációs erőrendszer eredő erejét hagyományosan  $\bar{G}$ -vel jelöljük.



44. ábra. Ábra a homogén gravitációs erőrendszer eredő erejének és eredő forgatónyomatékának értelmezéséhez

A 44. ábra alapján a gravitációs erőrendszer eredő ereje és eredő forgatónyomatéka a következő:

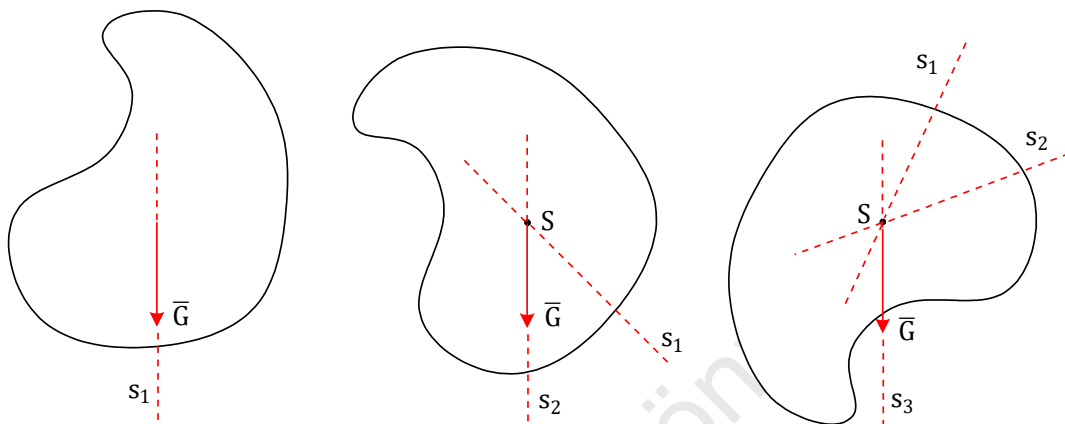
$$\bar{G} = \sum_i (m_i \cdot \bar{g}) = \left( \sum_i m_i \right) \cdot \bar{g} = m \cdot \bar{g}$$

$$\bar{M}_O = \sum_i \bar{M}_{Oi} = \sum_i (\vec{r}_{Oi} \times m_i \cdot \bar{g}) = \sum_i (m_i \cdot \vec{r}_{Oi} \times \bar{g}) = \left( \sum_i m_i \cdot \vec{r}_{Oi} \right) \times \bar{g}$$

A fenti összefüggésekből adódóan  $\bar{M}_O$  merőleges a  $\bar{g}$  gravitációs gyorsulásra, ebből adódóan a  $\bar{G}$  eredő erőre. Mivel  $\bar{G} \neq \bar{0}$  és  $\bar{M}_O$  merőleges  $\bar{G}$ -re adódik, hogy az erőrendszer eredője  $\bar{G}$  egy rögzített hatásvonalon, amelyet ebben az esetben súlyvonalnak nevezünk.

## 7.2 Súlypont

A 45. ábra egy merev testet szemléltet három különböző helyzetben. A különböző helyzetekhez különböző súlyvonalak tartoznak, melyek egy pontban metsződnek (S). Az S pontot **súlypontnak** nevezzük.



45. ábra. A test különböző helyzeteihez tartozó súlyvonalak és metszéspontjuk a súlypont

Írjuk fel a homogén gravitációs erőrendszer eredő forgatónyomatékát két különböző alakban:

- I.  $\bar{M}_O = (\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}) \times \bar{g}$
- II.  $\bar{M}_O = \bar{r}_{OS} \times \bar{G} = \bar{r}_{OS} \times m \cdot \bar{g} = \bar{r}_{OS} \times (\sum_i m_i) \cdot \bar{g} = (\sum_i m_i) \cdot \bar{r}_{OS} \times \bar{g}$

Egyenlővé téve a két kifejezést:

$$\left( \sum_i m_i \right) \cdot \bar{r}_{OS} \times \bar{g} = \left( \sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i} \right) \times \bar{g}$$

A fenti egyenletből kifejezve az  $\bar{r}_{OS}$  vektort, megkapjuk a súlypont helyére vonatkozó összefüggést:

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i m_i}$$

Az egyes darabkák tömegei felírhatók a sűrűségük és a térfogatuk szorzataként:

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i \rho_i \cdot V_i \cdot \bar{r}_{O_i}}{\sum_i \rho_i \cdot V_i}$$

Ha a test tömegeloszlása homogén ( $\rho_i = \rho = \text{állandó}$ ):

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i \rho \cdot V_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i \rho \cdot V_i} = \frac{\rho \cdot \sum_i V_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\rho \cdot \sum_i V_i} = \frac{\sum_i V_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i V_i}$$

Ha a test speciálisan egy  $d$  vastagságú homogén lemez (matematikailag egy síkidom):

$$\bar{r}_{OS} = \frac{\sum_i d \cdot A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i d \cdot A_i} = \frac{d \cdot \sum_i A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{d \cdot \sum_i A_i} = \frac{\sum_i A_i \cdot \bar{r}_{Oi}}{\sum_i A_i}$$

A fenti egyenletben  $\sum_i A_i = A$  a síklemez teljes területe. Az egyenletből az  $\bar{r}_{OS}$  helyvektor  $x_S$  és  $y_S$  koordinátái a következők:

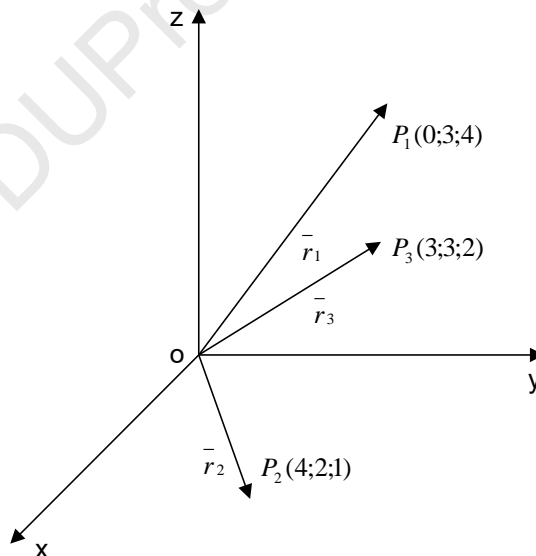
$$x_S = \frac{\sum_i A_i \cdot x_i}{\sum_i A_i}, \quad y_S = \frac{\sum_i A_i \cdot y_i}{\sum_i A_i}$$

A fenti összefüggések integrálokkal felírva:

$$x_S = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}, \quad y_S = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}$$

### Feladat

Adott három anyagi pont a térben, amelyeknek ismerjük a tömegét és helyvektorait. Feltételezve, hogy a gravitációs mező homogén, határozzuk meg a pontrendszer súlypontjába (tömegközéppontjába) mutató helyvektort!



Adatok:

$$m_1=2 \text{ [kg]}, m_2=3 \text{ [kg]}, m_3=4 \text{ [kg]}$$

Megoldás:

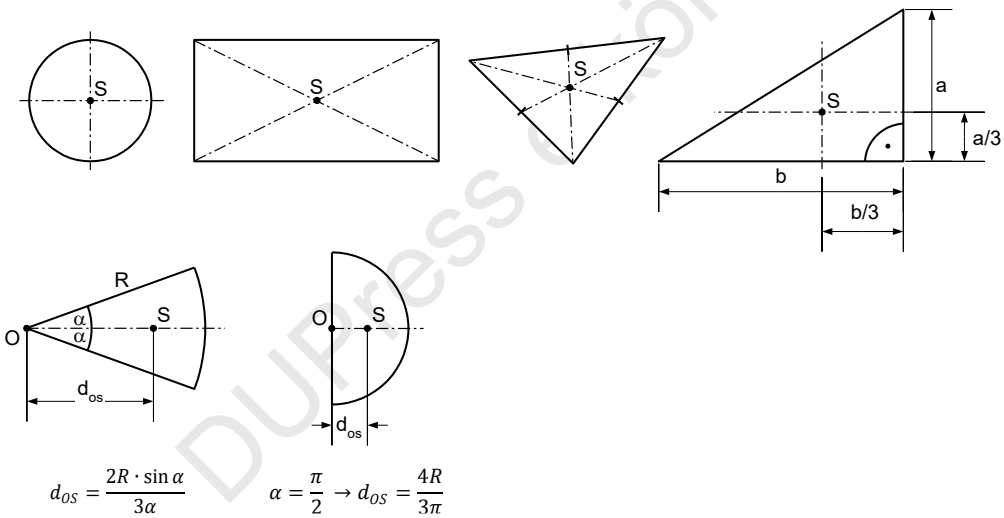
$$\bar{r}_S = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} [m], \quad \bar{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} [m], \quad \bar{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} [m]$$

$$\bar{r}_S = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \cdot \bar{r}_1 + m_2 \cdot \bar{r}_2 + m_3 \cdot \bar{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}}{9} = \frac{\begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 19 \end{pmatrix}}{9} = \begin{pmatrix} 2,66 \\ 2,66 \\ 2,11 \end{pmatrix} [m]$$

### 7.3 Síkidomok súlypontjának meghatározása

A 46. ábra a súlypont helyét szemlélteti különböző, egyszerű síkidomok esetén. A kör, tégalap és általános háromszög esetén a súlypont helye elemi geometriából ismert, míg derékszögű háromszög, körcikk és félkör esetében integrálszámítással határozható meg.



46. ábra. Egyszerű síkidomok súlypontja

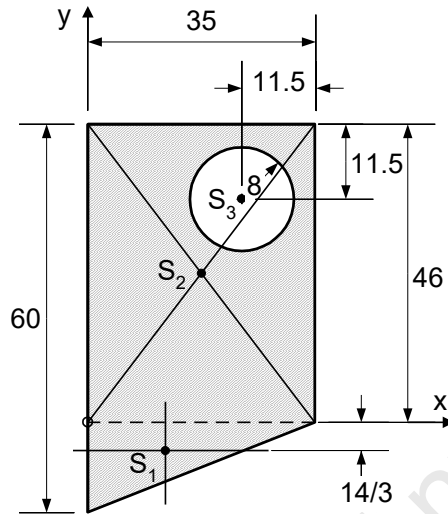
Ha a síkidom több egyszerű síkidomra felbontható, akkor a súlypont helye az alábbi összefüggésekkel meghatározható:

$$x_S = \frac{\sum_i A_i \cdot x_{Si}}{\sum_i A_i}, \quad y_S = \frac{\sum_i A_i \cdot y_{Si}}{\sum_i A_i},$$

ahol  $x_{Si}$  és  $y_{Si}$  a síkidomot felépítő  $i$ -dik síkidom súlypontjának koordinátái,  $A_i$  pedig annak felülete. Hiányzó (kivágott) síkidom esetén az  $A_i$  területet negatív előjellel vesszük figyelembe.

## Feladatok

### 1. feladat



Számítsuk ki az ábrán látható homogén vastagságú és anyagú síklemez súlypontjának koordinátáit!

*Megoldás:*

Bontsuk fel a lemezt három egyszerű síkidomra az ábra szerint. A derékszögű háromszög, téglalap és kör súlypontját jelölje rendre  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$ . A kör ki van vágva a lemezből, így a terület negatív. Az alábbi táblázatban megadtuk az egyes részek területét és súlypontjának koordinátáit.

i	$A_i$ [mm <sup>2</sup> ]	$x_{si}$ [mm]	$y_{si}$ [mm]
1	245	35/3	-14/3
2	1610	35/2	23
3	-201	23,5	34,5

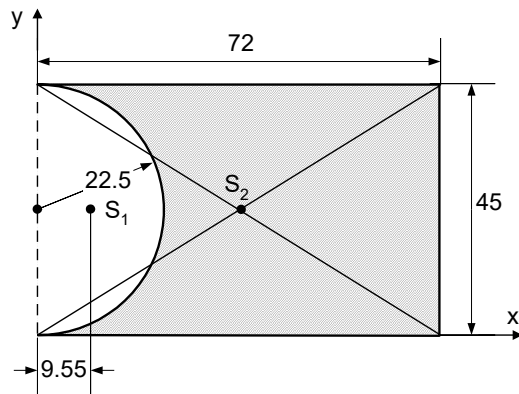
A fenti adatokból kiszámíthatóak a lemez súlypontjának  $x_s$  és  $y_s$  koordinátái:

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^3 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{x_{s1} \cdot A_1 + x_{s2} \cdot A_2 + x_{s3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} =$$

$$= \frac{\frac{35}{3} \cdot 245 + \frac{35}{2} \cdot 1610 - 23,5 \cdot 201}{245 + 1610 - 201} = 16,77 \text{ [mm]}$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^3 y_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{-\frac{14}{3} \cdot 245 + 23 \cdot 1610 - 34,5 \cdot 201}{245 + 1610 - 201} = 17,5 \text{ [mm]}$$

2. feladat



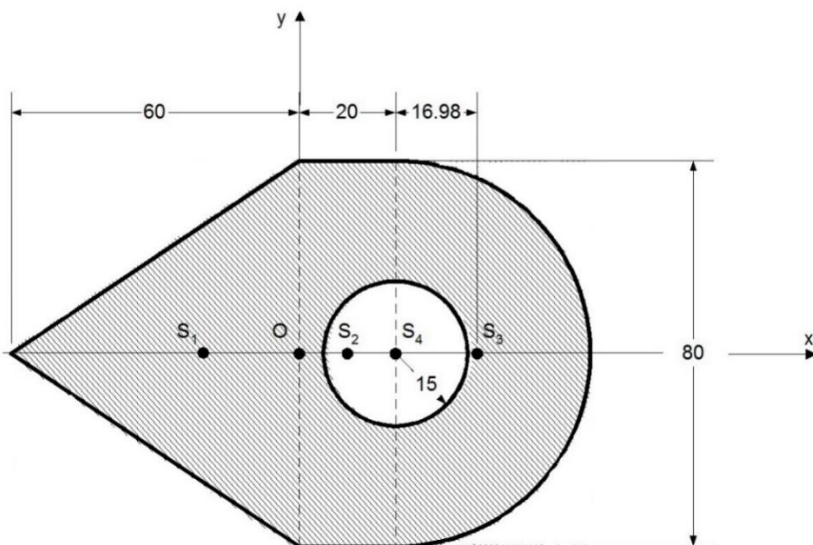
Számítsuk ki az ábrán látható homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!  
 Megoldás:

a)i	$A_i[\text{mm}^2]$	$x_{si}[\text{mm}]$	$y_{si}[\text{mm}]$
1	-795,2	9,55	22,5
2	3240	36	22,5

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^2 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{-9,55 \cdot 795,2 + 36 \cdot 3240}{-795,2 + 3240} = 44,6 \text{ [mm]}$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{-22,5 \cdot 795,2 + 22,5 \cdot 3240}{-795,2 + 3240} = 22,5 \text{ [mm]}$$

3. feladat:



Számítsuk ki az ábrán látható homogén síklemez súlypontjának koordinátáit!

Megoldás:

a)

i	$A_i$ [cm <sup>2</sup> ]	$x_{si}$ [cm]	$y_{si}$ [cm]
1	24	-2	0
2	16	1	0
3	25,13	3,698	0
4	-7,069	2	0

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^4 x_{si} \cdot A_i}{\sum_{i=1}^4 A_i} = \frac{24 \cdot (-2) + 16 \cdot 1 + 25,13 \cdot 3,698 - 7,069 \cdot 2}{24 + 16 + 25,13 - 7,069} = 0,8059 \text{ [cm]}$$

$$y_s = 0 \text{ [cm]}$$

## 8. A merev test egyensúlyi állapota és egyenletei

### 8.1 A merev test egyensúlyi állapota

Egy merev test definíció szerint **egyensúlyban** van, ha a rá ható erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan zérus.

$$\vec{M}_A = \vec{0}, \text{ bármely A pontra}$$

8.1 tétel:

Egy merev test egyensúlyban van, ha a rá ható erőrendszer eredő ereje és eredő forgatónyomatéka a tér egy adott O pontjára vonatkozóan egyaránt zérus.

$$\vec{F} = \vec{0} \text{ és } \vec{M}_O = \vec{0}$$

Bizonyítás:

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{r}_{AO} \times \vec{F} = \vec{0}$$

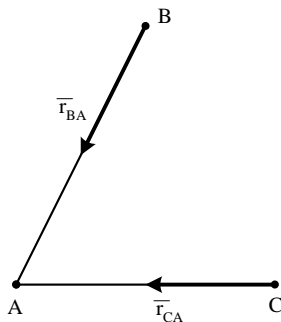
Tehát az erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér bármely A pontjára vonatkozóan zérus, így a test egyensúlyban van.

8.2 tétel:

Ha a merev testre ható erőrendszer eredő forgatónyomatéka a tér három különböző, nem egy egyenesbe eső pontjára (A, B, C) vonatkozóan zérus, akkor a test egyensúlyban van.

*Bizonyítás:*

Tekintsük a 48. ábrát.



48. ábra.

A tétel feltételei:

1) A, B és C különböző pontok  $\rightarrow \vec{r}_{BA} \neq \vec{0}, \vec{r}_{CA} \neq \vec{0}$

2) A, B és C nem esik egy egyenesre  $\rightarrow \vec{r}_{BA} \nparallel \vec{r}_{CA}$

3)  $\vec{M}_A = \vec{0}, \vec{M}_B = \vec{0}, \vec{M}_C = \vec{0}$

$$\vec{0} = \vec{0} = \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F} \rightarrow \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{0}$$

1. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA} \nparallel \vec{F}$  akkor  $\vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{r}_{BA} \neq \vec{0}$ , amelyből  $\vec{F} = \vec{0}$  adódik.

2. eset:

Ha  $\vec{r}_{BA} \parallel \vec{F}$  akkor  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{F}$  (Ez igaz, mivel  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{r}_{BA}$ .)

$$\vec{0} = \vec{0} = \vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{r}_{CA} \times \vec{F}, \text{ ebből adódóan } \vec{r}_{CA} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Mivel  $\vec{r}_{CA} \times \vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{r}_{CA} \nparallel \vec{F}$ , adódik, hogy  $\vec{F} = \vec{0}$ .

Következtetésképp a tételből adódik, hogy az  $\vec{F}$  eredő erő zérus.

Alkalmazva a 8.1 tételt, az  $\vec{F} = \vec{0}$  és  $\vec{M}_A = \vec{0}$  egyenletekből adódik, hogy a merev test egyensúlyban van.

## 8.2 Egyensúlyi egyenletek merev testre

A 8.1 tétel alapján a merev test egyensúlyban van, ha:

$$\vec{F} = \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \vec{0} \text{ a tér egy adott } O \text{ pontjára vonatkozóan.}$$

Térbeli erőrendszer esetén az  $\bar{F} = \bar{0}$  egyenletből az alábbi három skaláregyenletet kapjuk:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0$$

Az  $\bar{M}_O = \bar{0}$  egyenletből adódik, hogy:

$$\sum_i M_{Oix} = 0, \quad \sum_i M_{Oiy} = 0, \quad \sum_i M_{Oiz} = 0$$

Következtetésképp, térbeli erőrendszer esetén hat egymástól független egyensúlyi egyenlet van:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0, \quad \sum_i M_{Oix} = 0, \quad \sum_i M_{Oiy} = 0, \quad \sum_i M_{Oiz} = 0$$

Síkbeli erőrendszer esetén a fenti hat egyenletből három marad:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i M_i = \sum_i M_{iz} = 0$$

A 8.2 tétel alapján a merev test egyensúlyban van, ha:

$$\bar{M}_A = \bar{0}, \quad \bar{M}_B = \bar{0}, \quad \bar{M}_C = \bar{0}$$

Térbeli erőrendszer esetén a fenti vektor egyenletekből a következő kilenc skaláregyenlet adódik:

$$\sum_i M_{Aix} = 0, \quad \sum_i M_{Aiy} = 0, \quad \sum_i M_{Aiz} = 0$$

$$\sum_i M_{Bix} = 0, \quad \sum_i M_{Biy} = 0, \quad \sum_i M_{Biz} = 0$$

$$\sum_i M_{Cix} = 0, \quad \sum_i M_{Ciy} = 0, \quad \sum_i M_{Ciz} = 0$$

Belátható, hogy a fenti kilenc egyenletből csak hat független.

Síkbeli erőrendszer esetén a fenti kilenc egyenletből a következő három marad:

$$\sum_i M_{Ai} = \sum_i M_{Aiz} = 0, \quad \sum_i M_{Bi} = \sum_i M_{Biz} = 0, \quad \sum_i M_{Ci} = \sum_i M_{Ciz} = 0$$

Összefoglalva, síkbeli és térbeli erőrendszer esetén három illetve hat független egyensúlyi egyenlet van.

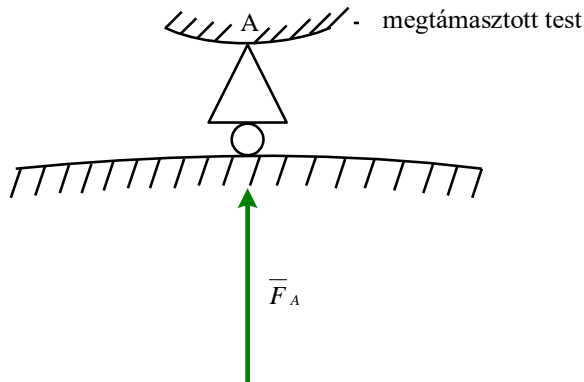
Egy mechanikai rendszer **statikailag határozott**, ha az egyensúlyi egyenletekből minden egyes ismeretlen meghatározható.

Így síkbeli és térbeli erőrendszer esetében három illetve hat ismeretlen határozható meg. Ha az ismeretlenek száma több, akkor a rendszer **statikailag határozatlan**.

### 8.3 Kényszerek: támaszok és csatlakozások

Az előzőekben már definiáltuk a kényszer fogalmát és példaként mutattuk be a nyújthatatlan kötelet, merev rúdat és felületet. A következőkben további kényszereket ismertetünk, melyeket a mérnöki gyakorlatban **támaszoknak** vagy **csatlakozásoknak** is nevezünk.

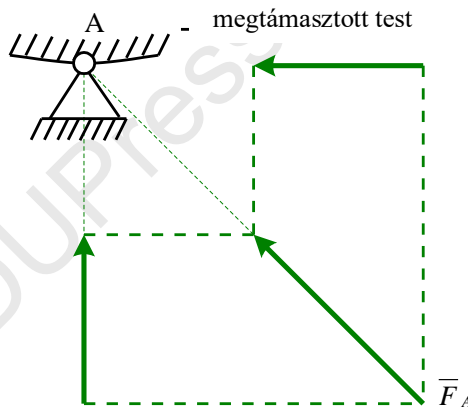
## Görgős támasz



49. ábra. Görgős támasz

A **görgős támasz** esetében egy ideális görgő biztosítja a megtámasztott test felülettel párhuzamos irányú elmozdulását, valamint a rögzítési pont (A) körüli szabad elfordulását, ellenben megakadályozza a felületre merőleges elmozdulást. A fentiekből adódóan a görgő 1 db skaláris ismeretlent jelent, nevezetesen a felületre merőleges támaszerő ( $F_A$ ) nagyságát.

## Csuklós támasz

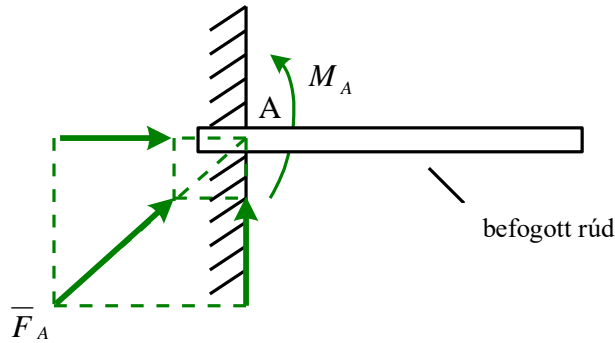


50. ábra. Csuklós támasz

A **csuklós támasz** a megtámasztott testet szabadon engedi elfordulni az A csatlakozási pont körül, de megakadályozza a test felülettel párhuzamos és arra merőleges elmozdulását. Így a csuklós támasz két ismeretlent jelent, az  $F_A$  támaszerő felületre merőleges és azzal párhuzamos komponenseit.

## Befogás

Az alábbi ábra egy befogott merev rudat szemléltet:



51. ábra. Befogás

A befogási pontnál (A) a rúddal párhuzamos és arra merőleges erő, valamint nyomaték is ébredhet. A nyomatékot, amit a befogás (támasz) fejt ki a testre, **reakció nyomatéknak** nevezzük. Így befogásnál három ismeretlennel kell számolnunk, nevezetesen a kényszererő rúdirányú és arra merőleges komponensével, valamint a reakciónyomatékkal.

#### 8.4 Kényszererők kiszámítása

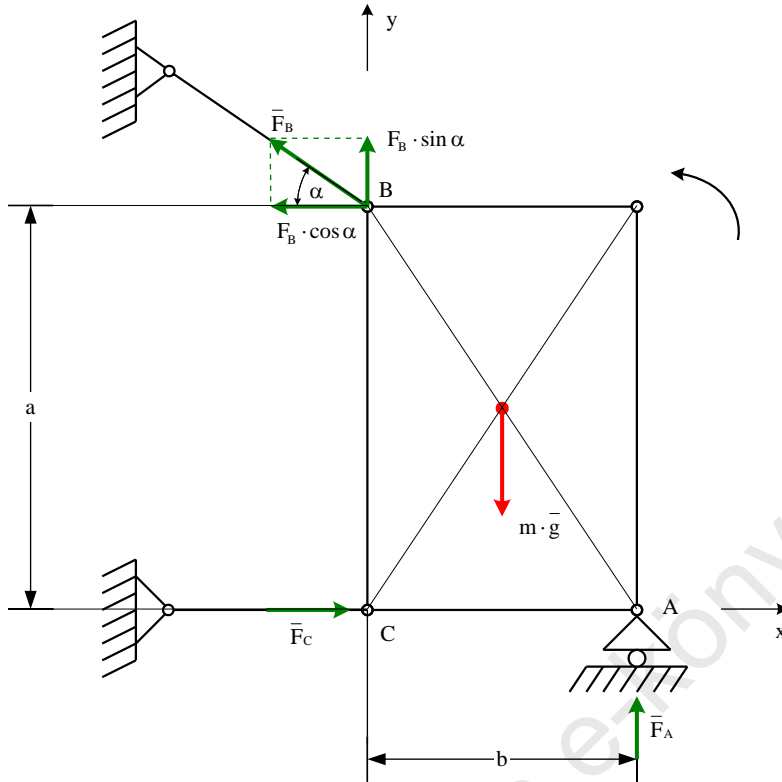
Egy mechanikai szerkezetre ható ismeretlen reakció (kényszer) erők és nyomatékok meghatározásánál kövessük a következő lépéseket:

- 1) Vizsgáljuk meg a kényszereket (támaszokat)
- 2) Döntsük el, hogy a szerkezet statikailag határozott-e
- 3) Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket (Megjegyzés: az egyensúlyi egyenleteket célszerű az ismeretlen erők hatásvonalainak metszéspontjára felírni.)
- 4) Oldjuk meg az egyenleteket
- 5) Ellenőrizzük az eredményt

#### Feladatok

##### 1. feladat:

Számítsuk ki az alábbi ábrán látható téglalap alakú merev lemezre ható  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  és  $\vec{F}_C$  kényszererők nagyságát. A lemez két ideális rúd által rögzített, melyek a B és C pontokhoz kapcsolódnak egy-egy ideális csuklóval. A lemez A pontja egy görgős támaszon nyugszik.



Adatok:  $m \cdot g = 500[\text{N}]$ ,  $a = 3 [\text{m}]$ ,  $b = 2 [\text{m}]$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Megoldás:

- 1) A két rúd és a görgős támasz együtt három ismeretlen jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C + m \cdot \vec{g} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ F_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_B \cdot \cos \alpha \\ F_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_A = F_B \cdot \cos \alpha \cdot a - F_B \cdot \sin \alpha \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 0$$

$$\text{I. } -F_B \cdot \cos \alpha + F_C = 0$$

$$\text{II. } F_A + F_B \cdot \sin \alpha - m \cdot g = 0$$

$$\text{III. } F_B \cdot \cos \alpha \cdot a - F_B \cdot \sin \alpha \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 0$$

4)

$$\text{III. } F_B \cdot (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot b) = -\frac{m \cdot g \cdot b}{2}$$

$$F_B = -\frac{m \cdot g \cdot b}{2 \cdot (\cos \alpha \cdot a - \sin \alpha \cdot b)} = -312,9 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } F_A = -F_B \cdot \sin \alpha + m \cdot g = 656,5 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } F_C = F_B \cdot \cos \alpha = -271 \text{ [N]}$$

Így az  $\bar{F}_A$ ,  $\bar{F}_B$  és  $\bar{F}_C$  reakcióerők:

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 656,5 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} -271 \\ 156,4 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_C = \begin{pmatrix} -271 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

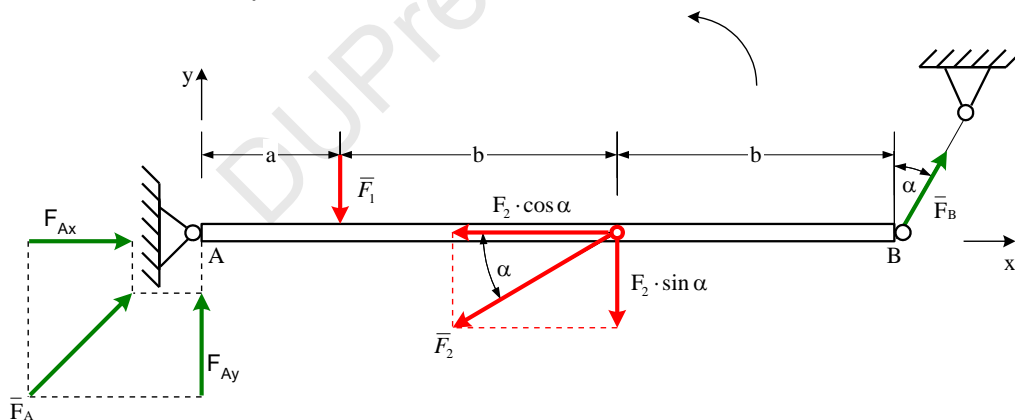
Az  $F_B$  és  $F_C$  esetében kapott negatív érték az  $\bar{F}_B$  és  $\bar{F}_C$  erők feltételezettel ellentétes értelmére utal.

5) Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = F_A \cdot b + F_C \cdot a - m \cdot g \cdot \frac{b}{2} = 656,5 \cdot 2 + (-271) \cdot 3 - 500 \cdot 1 = 0$$

2. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható vízszintes, súlytalan merev rúdra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  reakcióerőket. A rúd az A pontban ideális csúklóhoz, a B pontban pedig egy ideális kötélhez kapcsolódik.



Adatok:  $a=1\text{[m]}$ ,  $b=2\text{[m]}$ ,  $F_1 = 5\text{[kN]}$ ,  $F_2 = 10\text{[kN]}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

Megoldás:

- 1) A csúklós támasz és a kötél együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \cdot \cos \alpha \\ -F_2 \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \cdot \sin \alpha \\ F_B \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_i = -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) + F_B \cdot \cos \alpha \cdot (a + 2b) = 0$$

$$\text{I. } F_{Ax} - F_2 \cdot \cos \alpha + F_B \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{II. } F_{Ay} - F_1 - F_2 \cdot \sin \alpha + F_B \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\text{III. } -F_1 \cdot a - F_2 \cdot \sin \alpha (a + b) + F_B \cdot \cos \alpha (a + 2b) = 0$$

4)

$$\text{III. } F_B \cdot \cos \alpha \cdot (a + 2b) = F_1 \cdot a + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot (a + b)$$

$$F_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot \sin \alpha (a + b)}{\cos \alpha \cdot (a + 2b)} = 4,619 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = F_1 + F_2 \cdot \sin \alpha - F_B \cdot \cos \alpha = 6 \text{ [kN]}$$

$$\text{I. } F_{Ax} = F_2 \cdot \cos \alpha - F_B \cdot \sin \alpha = 6,351 \text{ [kN]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 6,351 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ [kN]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 2,310 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ [kN]}$$

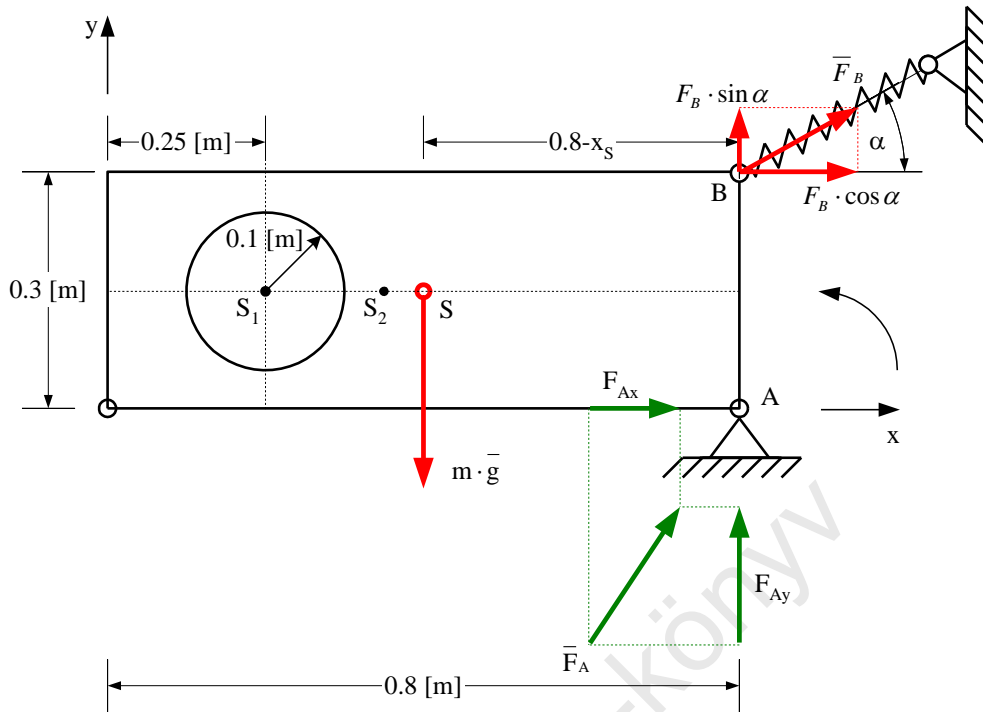
5) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned} \sum_i M_i &= -F_{Ay} \cdot (a + 2b) + F_1 \cdot 2b + F_2 \cdot \sin \alpha \cdot b = \\ &= -6 \cdot (1 + 4) + 5 \cdot 4 + 10 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = 0 \end{aligned}$$

3. feladat:

Az ábrán látható merev lemez A pontja egy csúklóhoz csatlakozik, B pontja pedig egy lineáris rugóhoz.

- Számítsuk ki a lemez súlypontjának  $x_s$  és  $y_s$  koordinátáit.
- Számítsuk ki az  $\bar{F}_A$  kényszer-, és  $\bar{F}_B$  rugóerőket.
- Számítsuk ki a rugó  $\Delta r$  megnyúlását.



Adatok:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $m \cdot g = 50 \text{ [N]}$ ,  $D = 100 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ .

Megoldás:

a)

i	$A_i \text{ [m}^2\text{]}$	$x_{si} \text{ [m]}$	$y_{si} \text{ [m]}$
1	-0,0314	0,25	0,15
2	0,24	0,4	0,15

$$x_s = \frac{\sum_i A_i x_{si}}{\sum_i A_i} = \frac{-0,0314 \cdot 0,25 + 0,24 \cdot 0,4}{-0,0314 + 0,24} = 0,4226 \text{ [m]}$$

$$y_s = \frac{\sum_i A_i y_{si}}{\sum_i A_i} = \frac{-0,0314 \cdot 0,15 + 0,24 \cdot 0,15}{-0,0314 + 0,24} = 0,15 \text{ [m]}$$

b)

- 1) A csuklós támasz és a rugó együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = m \cdot \bar{g} + \bar{F}_A + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \cdot \cos \alpha \\ F_B \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_A = (0,8 - x_S) \cdot m \cdot g - F_B \cdot \cos \alpha \cdot 0,3 = 0$$

4)

$$\text{I. } F_{Ax} + F_B \cdot \cos 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ax} = -F_B \cdot \cos 30^\circ = -62,9 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -m \cdot g + F_{Ay} + F_B \cdot \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ay} = m \cdot g - F_B \cdot \sin 30^\circ = 13,68 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } 0,3774 \cdot 50 - F_B \cdot \cos 30^\circ \cdot 0,3 = 0 \rightarrow F_B = 72,63 \text{ [N]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} -62,90 \\ 13,68 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 62,90 \\ 36,31 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

5) Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = F_{Ax} \cdot 0,3 + m \cdot g \cdot (0,8 - x_S) = 0$$

c)

$$F_B = D \cdot \Delta r \rightarrow \Delta r = \frac{F_B}{D} = 0,726 \text{ [m]}$$

## 8.5 Tartók statikája

A tartó terhek viselésére, hordozására alkalmas szerkezet.

A tartókat az alábbi szempontok szerint osztályozhatjuk:

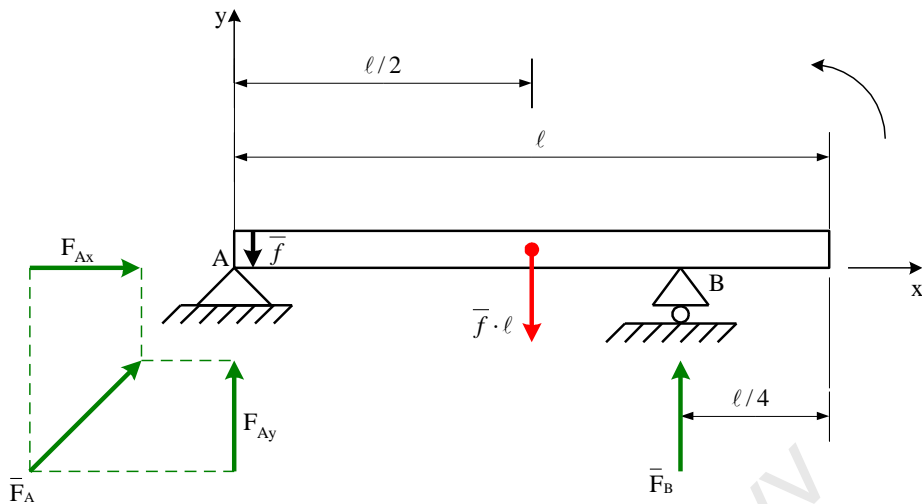
- Rögzítésük szerint: kéttámaszú vagy több támaszú tartók (végükön alátámasztva vagy konzolos kivitel), befogott tartók
- Szerkezetük szerint: tömör tartók, rácsos tartók
- Terhelésük szerint: koncentrált erőkkel terhelt tartók, megoszló erőkkel terhelt tartók, vegyes terhelésű tartók

Kéttámaszú tartó például egy két helyen csapágyazott tengely, egy képpilléres híd vagy egy két helyen alátámasztott gerenda.

### Feladatok

1. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket.



Adatok:  $f = 300 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ ,  $l = 4 \text{ [m]}$ .

Megoldás:

- 1) A görgős és csúklós támasz együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_A = -f \cdot l \cdot \frac{l}{2} + F_B \cdot \frac{3l}{4} = 0$$

I.  $F_{Ax} = 0$

II.  $F_{Ay} + F_B - f \cdot l = 0$

III.  $-f \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{4} F_B = 0$

4)

III.  $-f \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{4} F_B = 0 \rightarrow F_B = \frac{2f \cdot l}{3} = 800 \text{ [N]} (\uparrow)$

II.  $F_{Ay} = -F_B + f \cdot l = 400 \text{ [N]} (\uparrow)$

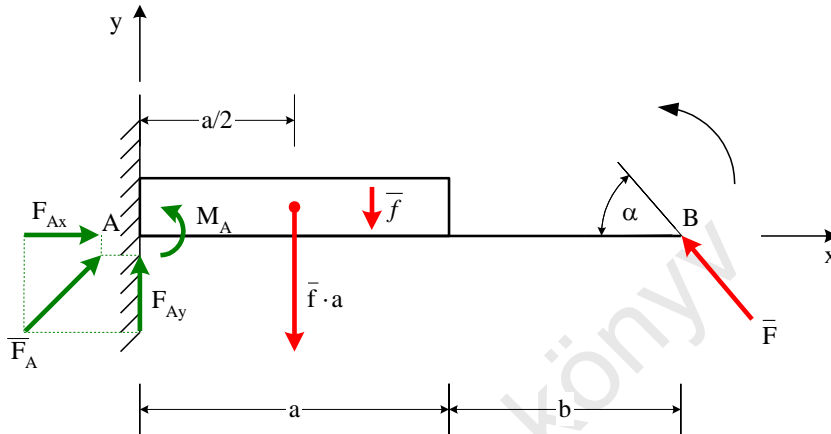
$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \end{pmatrix} \text{ [N]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

5) Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = -F_{Ay} \cdot \frac{3l}{4} + f \cdot \frac{l}{4} = -400 \cdot \frac{3 \cdot 4}{4} + 300 \cdot \frac{4}{4} = 0$$

## 2. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható befogott tartó A pontjában ébredő  $\bar{F}_A$  reakcióerőt és  $M_A$  reakció nyomatékot.



*Adatok:*  $F=600$  [N],  $f=200$  [N/m],  $\alpha = 50^\circ$ ,  $a=4$  [m],  $b=3$  [m].

*Megoldás:*

1) A befogás három ismeretlent jelent.

2) A szerkezet statikailag határozott.

3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{f} \cdot a + \bar{F}_A = \begin{pmatrix} -F \cdot \cos \alpha \\ F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F \cdot \cos \alpha + F_{Ax} = 0$$

$$\text{II. } F \cdot \sin \alpha - f \cdot a + F_{Ay} = 0$$

$$\text{III. } \sum_i M_A = M_A - f \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) = 0$$

4)

$$\text{I. } F_{Ax} = F \cdot \cos \alpha = 385,67 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = f \cdot a - F \cdot \sin \alpha = 340,37 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } M_A = f \cdot \frac{a^2}{2} - F \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) = -1617,38 \text{ [Nm]}$$

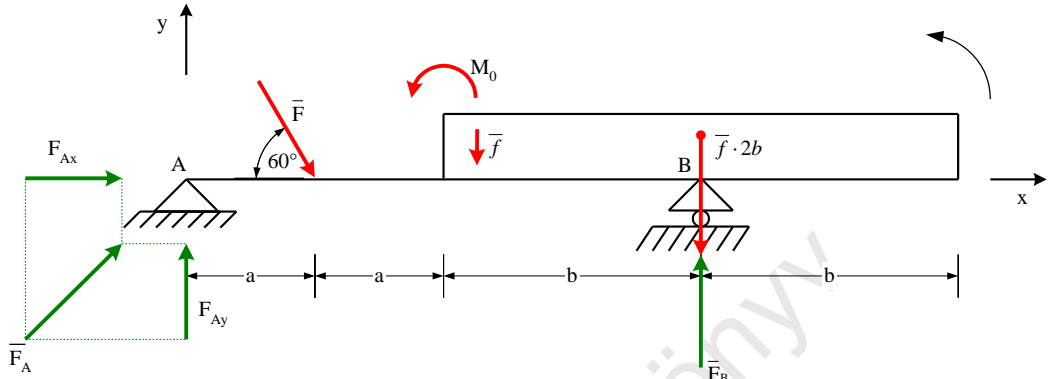
$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} 385,67 \\ 340,37 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

5) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned}\sum_i M_B &= -F_{Ay} \cdot (a+b) + f \cdot a \cdot \left(b + \frac{a}{2}\right) + M_A = \\ &= -340,37 \cdot (4+3) + 200 \cdot 4 \cdot \left(3 + \frac{4}{2}\right) + (-1617,38) = 0\end{aligned}$$

### 3. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket.



Adatok:  $a=1$  [m],  $b=2$  [m],  $F=40$  [kN],  $f=8$  [kN/m],  $M_0=5$  [kNm]

Megoldás:

- 1) A csuklós és görgős támasz együtt három ismeretlent jelent.
- 2) A szerkezet statikailag határozott.
- 3)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F} + F_A + f \cdot 2b + F_B = \begin{pmatrix} F \cdot \cos 60^\circ \\ -F \cdot \sin 60^\circ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F \cdot \cos 60^\circ + F_{Ax} = 0$$

$$\text{II. } -F \cdot \sin 60^\circ + F_{Ay} - f \cdot 2b + F_B = 0$$

$$\text{III. } \sum_i M_A = -F \cdot \sin 60^\circ \cdot a + F_B \cdot (2a + b) - f \cdot 2b \cdot (2a + b) + M_0 = 0$$

4)

$$\text{III. } F_B = \frac{F \cdot \sin 60^\circ \cdot a + f \cdot 2b \cdot (2a + b) - M_0}{2a + b} = 39,41 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} = F \cdot \sin 60^\circ + f \cdot 2b - F_B = 27,23 \text{ [kN]}$$

$$\text{I. } F_{Ax} = -F \cdot \cos 60^\circ = -20 \text{ [kN]}$$

$$\bar{F}_A = \begin{pmatrix} -20 \\ 27,23 \end{pmatrix} \text{ [kN]}, \quad \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 39,41 \end{pmatrix} \text{ [kN]}$$

5) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned}\sum_i M_B &= -F_{Ay} \cdot (2a + b) + F \cdot \sin \alpha \cdot (a + b) + M_O + f \cdot b \cdot \frac{b}{2} - f \cdot b \cdot \frac{b}{2} = \\ &= -27,23 \cdot (2 + 2) + 40 \cdot \sin 60^\circ \cdot (1 + 2) + 5 = 0\end{aligned}$$

## 8.6 Valós kényszerek

Eddig ideális kényszerekkel foglalkoztunk. Ebben a fejezetben kiterjesztjük vizsgálatainkat valós kényszerekre, mint például egy érdes (súrlódásos) felület, amelyen egy test, vagy egy kötélnyugszik (csúszik), vagy egy érdes belső felületű csapágyház, amelyben egy csap elfordul. További példát jelent egy felület, amelyen egy kerék gördül, abban az esetben, ha vagy a felület, vagy a kerék puha.

### 8.6.1 Súrlódásos felület (támasz)

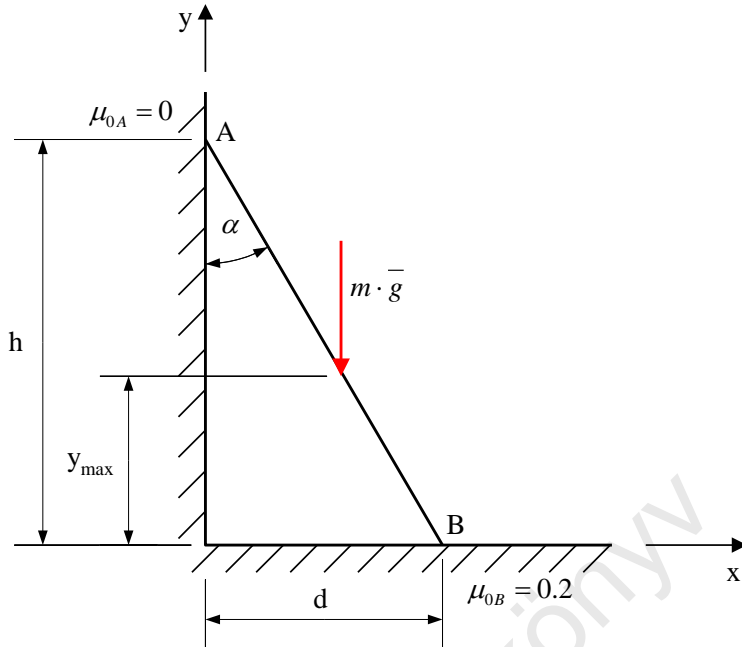
A 3.2 fejezetben az ide tartozó elméleti részt már megtárgyaltuk és megoldottunk egy feladatot anyagi pont esetén (2.4 fejezet, 5. feladat). Ebben a fejezetben érdes felületen támaszkodó, egyensúlyban lévő merev testekre (tárcsákra) mutatunk be feladatokat.

#### Feladatok

##### 1. feladat

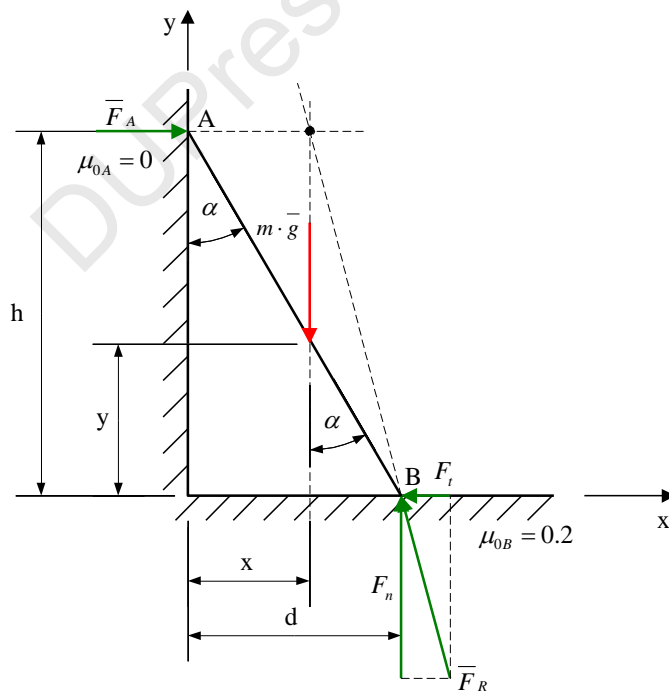
Az ábrán látható, elhanyagolható tömegű létra B végpontja az érdes padlóra, míg A végpontja a tökéletesen sima falhoz támaszkodik.

Milyen magasra mászhat fel egy  $m$  tömegű ember maximálisan a létrán ( $y_{max}$ ) anélkül, hogy az megcsúszna a padlón?



Adatok:  $m \cdot g = 1000 \text{ [N]}$ ;  $d = \sqrt{3} \text{ [m]}$ ;  $h = 3 \text{ [m]}$ ;  $\mu_{0B} = 0,2$ .

Megoldás:



Számítás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_A - F_t = 0 \rightarrow F_t = F_A$$

$$\text{II. } F_n - m \cdot g = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g$$

$$\sum_i M_i = m \cdot g \cdot (d - x) - F_A \cdot h = 0 \rightarrow F_A = \frac{m \cdot g \cdot (d - x)}{h}$$

$$\tan \alpha = \frac{d}{h} = \frac{d - x}{y} \rightarrow d - x = y \cdot \tan \alpha$$

$$F_A = \frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h}$$

$$|F_t| \leq \mu_{0B} \cdot F_n \rightarrow -\mu_{0B} \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_{0B} \cdot F_n$$

1. eset:

$$F_t \leq \mu_{0B} \cdot F_n$$

$$F_A \leq \mu_{0B} \cdot m \cdot g$$

$$\frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h} \leq \mu_{0B} \cdot m \cdot g$$

$$\frac{y \cdot \tan \alpha}{h} \leq \mu_0 \rightarrow y \leq \frac{h \cdot \mu_{0B}}{\tan \alpha} = \frac{h \cdot \mu_{0B}}{\frac{d}{h}} = \frac{h^2 \cdot \mu_{0B}}{d} = 1,039 \text{ [m]} = y_{\max}$$

2. eset:

$$-\mu_{0B} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{0B} \cdot m \cdot g \leq F_A$$

$$-\mu_{0B} \cdot m \cdot g \leq \frac{m \cdot g \cdot y \cdot \tan \alpha}{h}$$

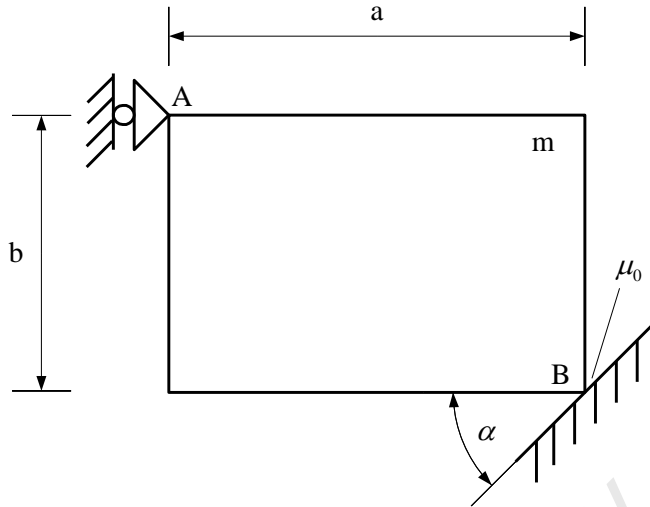
$$-\mu_{0B} \leq \frac{y \cdot \tan \alpha}{h} \rightarrow y \geq \frac{-\mu_{0B} \cdot h}{\tan \alpha} = \frac{-h^2 \cdot \mu_{0B}}{d} = -1,039 \text{ [m]} \rightarrow \text{Ez nem valós megoldás.}$$

Tehát az ember max. 1,039 [m] magasra mászhat a létrán anélkül, hogy az megcsúszna a padlón.

2. feladat:

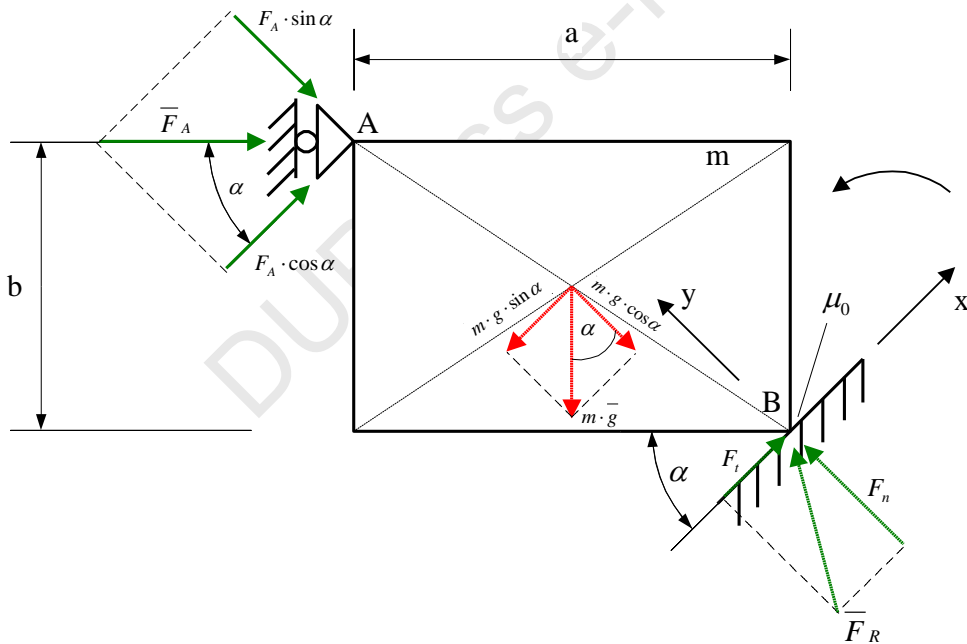
Az ábrán látható, m tömegű merev lemez A pontja egy ideális görgőhöz kapcsolódik, B végpontja pedig egy érdes felületre támaszkodik.

Számítsuk ki a súrlódási tényező azon minimális értékét, amely esetében a lemez még egyensúlyban marad!



Adatok:  $a=60$  [mm],  $b=40$  [mm],  $m=5$  [kg],  $\alpha=45^\circ$

Megoldás:



Számítás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F_A \cdot \cos \alpha \\ -F_A \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_A \cdot \cos \alpha + F_t - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\text{II. } -F_A \cdot \sin \alpha + F_n - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum_i M_B = -F_A \cdot b + m \cdot g \cdot \frac{a}{2} = 0 \rightarrow F_A = m \cdot g \cdot \frac{a}{2b} = 5 \cdot 9,81 \cdot \frac{60}{80} = 36,79 \text{ [N]}$$

$$\text{I. } F_A \cdot \cos \alpha + F_t - m \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = 8,669 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -F_A \cdot \sin \alpha + F_n - m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = 60,698 \text{ [N]}$$

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t \rightarrow -\mu_0 \cdot 60,698 \leq 8,669 \rightarrow \mu_0 \geq -0,1428 \text{ (Ez nem ad megoldást.)}$$

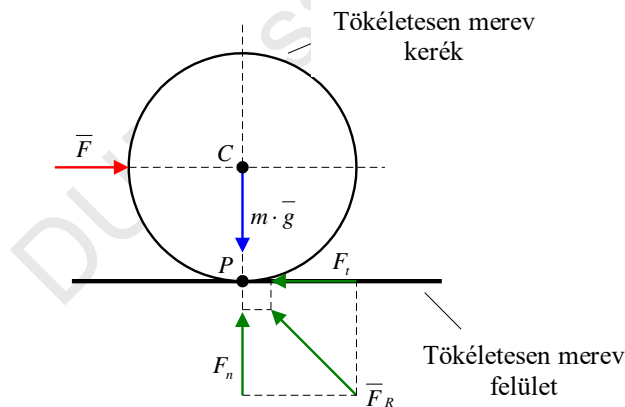
2. eset:

$$F_t \leq \mu_0 \cdot F_n \rightarrow 8,669 \leq \mu_0 \cdot 60,698 \rightarrow 0,1428 \leq \mu_0 \rightarrow \mu_{0\min} = 0,1428$$

### 8.6.2 Gördülési ellenállás

Ahhoz, hogy megértsük a gördülési ellenállás jelenségét, célszerű összehasonlítani az ideális esetet - amikor a kerék és a talaj tökéletesen merev (kemény) - a valós esettel, amikor az egyikük vagy mindkettő puha.

*Ideális eset:*

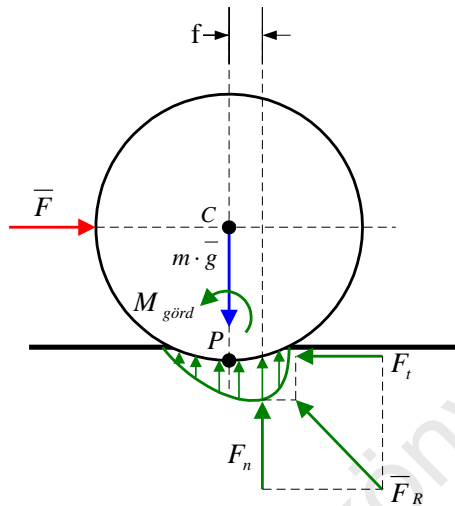


52. ábra. A kerékre ható erők ideális esetben

- A kerék és a talaj tökéletesen merev (kemény).
- A kerék a talajjal egy ideális vonal mentén érintkezik, ami átmegy a P ponton.
- A kényszererő  $F_n$  komponensének hatásvonala átmegy a P és C pontokon, így nyomatéka azokra vonatkozóan zérus.

- A kerék akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a vízszintes irányú  $\bar{F}$  erő zérus.

Valós eset:



53. ábra. A kerékre ható erők valós esetben

- A kerék vagy a felület puha.
- A kerék egy felület mentén érintkezik a talajjal. Jelöljük a felület mentén megoszló normál irányú erőrendszer eredő erejét  $F_n$ -el.
- Az  $F_n$  hatásvonala a P és C pontoktól  $f$  távolságban, azok „előtt” halad el.
- A kerék akkor és csak akkor nem gördül el, ha  $f \leq f_0$ , ahol  $f_0$   $f$  lehetséges maximális értéke egyensúly esetén. (Az  $f$  távolságot a gördülési ellenállás karjának nevezzük.)
- Következtetésképp a kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

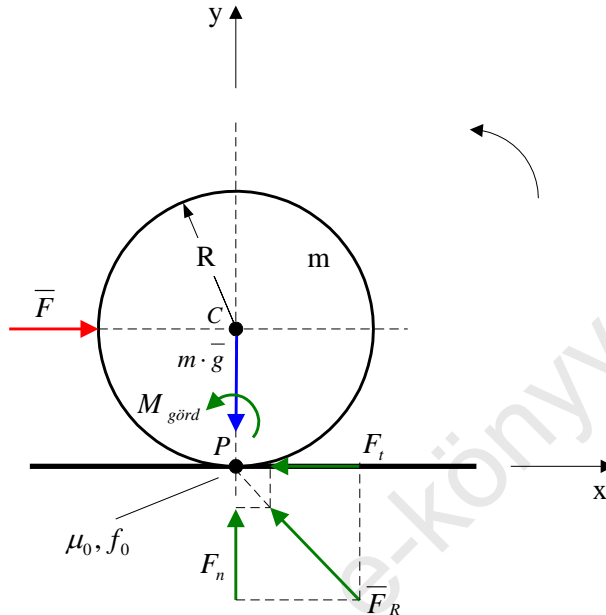
$$|M_{\text{görd}}| = f \cdot F_n \leq f_0 \cdot F_n$$

ahol  $M_{\text{görd}}$  a gördülési ellenállási nyomaték.

Ahogy az  $\bar{F}$  erőt növeljük, az  $f$  távolság is növekszik, amíg el nem ér egy  $f_0$  maximális értéket, amely fölött bekövetkezik a gördülés.

1. feladat:

Milyen határok között változhat az ábrán látható  $\bar{F}$  erő értéke a kerék egyensúlya esetén. A tapadási súrlódási tényező ( $\mu_0$ ), valamint a gördülési ellenállás karja ( $f_0$ ) ismert.



Adatok:  $m=20$  [kg],  $R=0,5$  [m],  $g=9,81$  [m/s<sup>2</sup>],  $\mu_0=0,6$ ,  $f_0=0,02$  [m].

Megoldás:

Egyensúly esetén:  $F_{min} \leq F \leq F_{max}$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum \bar{F} = \bar{F} + \bar{F}_R + m \cdot \bar{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F - F_t = 0 \rightarrow F_t = F$$

$$\text{II. } F_n - m \cdot g = 0 \rightarrow F_n = m \cdot g$$

$$\sum_i M_P = M_{görd} - F \cdot R = 0 \rightarrow M_{görd} = F \cdot R$$

A kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_{görd}| \leq F_n \cdot f_0$$

1. eset:

$$M_{görd} \leq F_n \cdot f_0$$

$$F \cdot R \leq m \cdot g \cdot f_0$$

$$F \leq \frac{m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

2. eset:

$$-F_n \cdot f_0 \leq M_{görd}$$

$$-m \cdot g \cdot f_0 \leq F \cdot R$$

$$F \geq \frac{-m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

$$\frac{-m \cdot g \cdot f_0}{R} \leq F \leq \frac{m \cdot g \cdot f_0}{R}$$

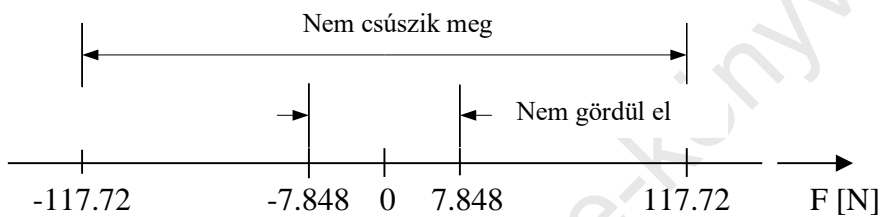
$$-7,848 [N] \leq F \leq 7,848 [N]$$

A kerék nem csúszik meg akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \leq F \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$-117,72 [N] \leq F \leq 117,72 [N]$$



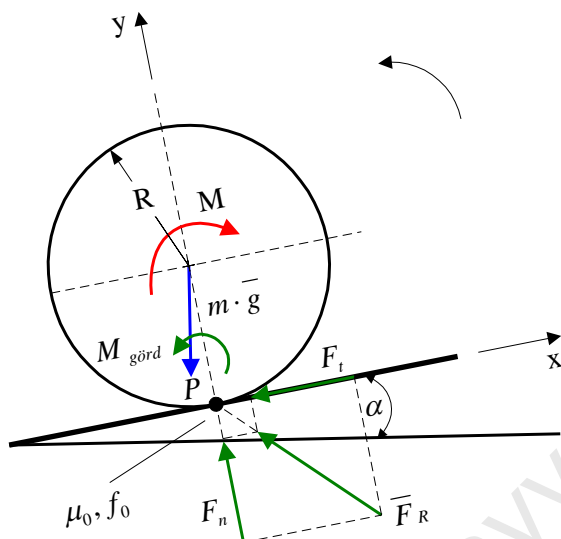
A kerék egyensúlyban van, ha egyidejűleg nem csúszik meg és nem gördül el.

Tehát egyensúlyban van akkor, és csakis akkor, ha:

$$-7,848 [N] \leq F \leq 7,848 [N] \rightarrow F_{max} = 7,848 [N].$$

2. feladat:

Számítsa ki az M nyomaték azon minimális és maximális értékét, amely estén az R sugarú kerék egyensúlyban van az ábrán látható érdes lejtőn. A tapadási súrlódási tényező ( $\mu_0$ ) és a gördülési ellenállás karja ( $f_0$ ) ismert.



Adatok:  $R=200$  [mm],  $m \cdot g=5$  [kN],  $\alpha=10^\circ$ ,  $\mu_0=0,3$ ,  $f_0=1,5$  [cm].

Megoldás:

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_R + m \cdot \vec{g} = \vec{0} = \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t = -m \cdot g \cdot \sin \alpha = -0,868 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_n = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 4,924 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_P = -M + m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot R + M_{g\ddot{o}rd} = 0$$

$$M_{g\ddot{o}rd} = M - m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot R = M - 0,1736 \text{ [kNm]}$$

A kerék nem gördül el, ha:

$$|M_{g\ddot{o}rd}| \leq F_n \cdot f_0 \rightarrow -F_n \cdot f_0 \leq M_{g\ddot{o}rd} \leq F_n \cdot f_0$$

$$-0,07386 \leq M - 0,1736 \leq 0,07386$$

$$0,09974 \text{ [kNm]} \leq M \leq 0,2475 \text{ [kNm]}$$

A kerék nem csúszik meg, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \leq -m \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$-\mu_0 \leq -\tan \alpha \leq \mu_0 \rightarrow \mu_0 \geq \tan \alpha \geq -\mu_0$$

$$-16,7^\circ \leq \alpha \leq 16,7^\circ$$

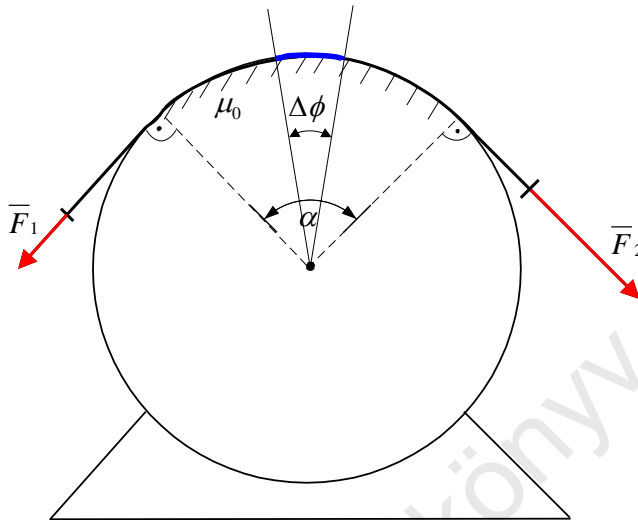
$$10^\circ \leq 16,7^\circ \rightarrow \text{A kerék nem csúszik.}$$

A kerék egyensúlyban van, ha:

$$0,09974 \text{ [Nm]} \leq M \leq 0,2475 \text{ [Nm]}$$

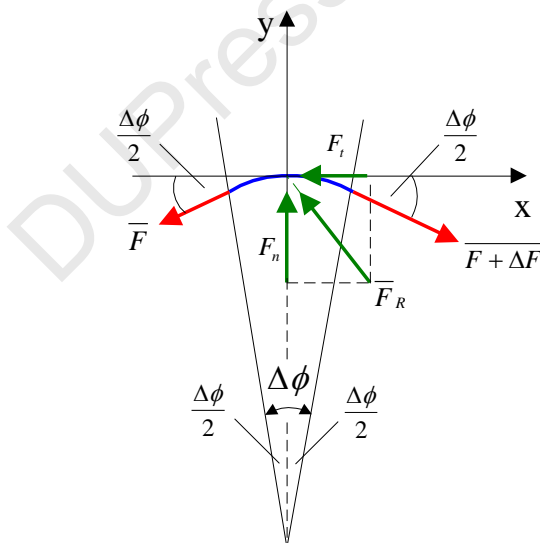
### 8.6.3 Kötélsúrlódás

Az alábbi ábra egy érdes felületű hengeren felfekvő kötelet szemléltet. A henger pozíciója rögzített (nem tud elfordulni), a kötélnél  $\alpha$  középponti szögű köríven érintkezik a hengerrel. A kötélnél végeit  $\vec{F}_1$  és  $\vec{F}_2$  erőkkel húzzuk.



54. ábra. Ábra a kötélsúrlódás értelmezéséhez

Vizsgáljuk meg egy végtelenül kicsiny kötélszakasz (kék ív az ábrán) egyensúlyi állapotát. Az 55. ábra a fenti kötélszakaszra ható erőket szemlélteti.



55. ábra. Egy kicsiny,  $\Delta\phi$  nyílásszögű kötélszakaszra ható erők

Az egyensúlyi egyenletek a fenti kicsiny kötélszakaszra az alábbiak:

$$\sum \vec{F} = \vec{F} + \vec{F} + \Delta\vec{F} + \vec{F}_R = \vec{0} = \begin{pmatrix} -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \\ -F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \\ -(F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - F_t = 0$$

$$\text{II. } -F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} - (F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + F_n = 0$$

$$\text{I. } F_t = -F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \Delta F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{II. } F_n = F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + (F + \Delta F) \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\text{I. } dF_t = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( \Delta F \cdot \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = dF \cdot 1 = dF$$

$$\text{II. } dF_n = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + \Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right) = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 2 \cdot F \cdot \frac{d\varphi}{2} = F \cdot d\varphi$$

Megjegyzés: Ha  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  akkor  $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$

Ezért  $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} (\Delta F \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2})$  másodrendben kis mennyiség, így elhanyagolható.

A kötélszakasz egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|dF_t| \leq \mu_0 \cdot dF_n$$

$$|dF| \leq \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot F \cdot d\varphi \leq dF \leq \mu_0 \cdot F \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot d\varphi \leq \frac{dF}{F} \leq \mu_0 \cdot d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi \leq \int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} \leq \mu_0 \cdot \int_0^\alpha d\varphi$$

$$-\mu_0 \cdot \alpha \leq \ln \frac{F_2}{F_1} \leq \mu_0 \cdot \alpha$$

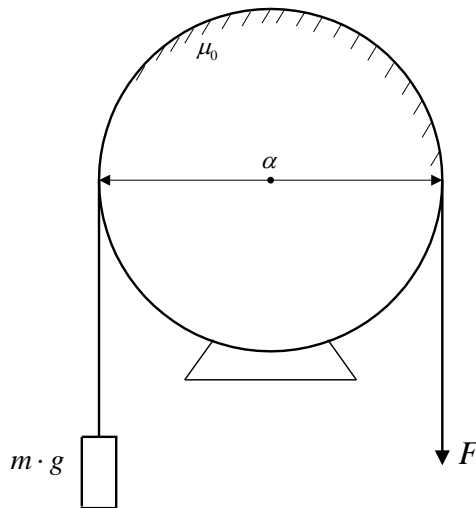
$$e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq \frac{F_2}{F_1} \leq e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

Így a kötéel egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$F_1 \cdot e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq F_2 \leq F_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

### 1. feladat:

Számítsuk ki a minimum és maximum értékét ( $F_{min}, F_{max}$ ) ami között az  $F$  erő nagysága változhat, ha az alábbi mechanikai rendszer egyensúlyban van. (Az érdes felületű henger nem tud elfordulni.)



Adatok:  $m \cdot g = 100 \text{ [N]}$ ,  $\alpha = \pi$ ,  $\mu_0 = 0,3$

Megoldás:

A rendszer egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$m \cdot g \cdot e^{-\mu_0 \cdot \alpha} \leq F \leq m \cdot g \cdot e^{\mu_0 \cdot \alpha}$$

$$100 \cdot e^{-0,9425} \leq F \leq 100 \cdot e^{0,9425}$$

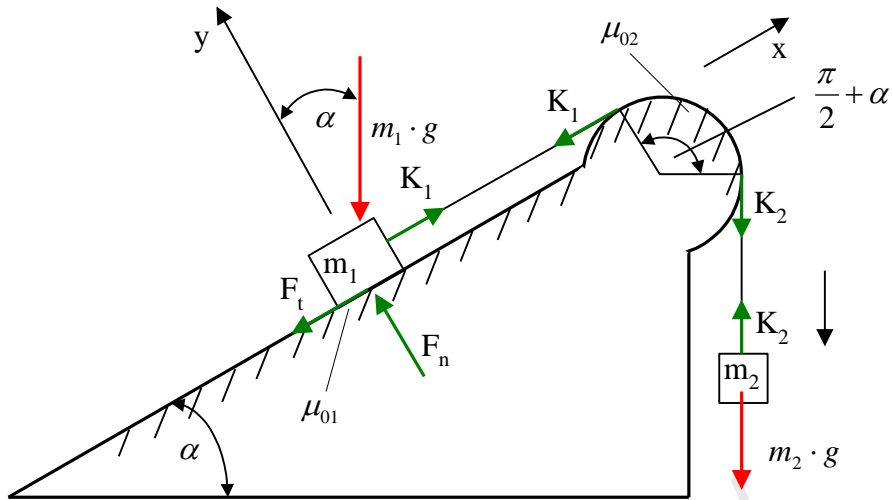
$$38,96 \text{ [N]} \leq F \leq 256,64 \text{ [N]}$$

$$F_{\min} = 38,96 \text{ [N]}$$

$$F_{\max} = 256,64 \text{ [N]}$$

2. feladat:

Számítsuk ki azon minimális és maximális értéket, amely között az  $m_2$  tömeg változhat, az ábrán látható mechanikai rendszer egyensúlya esetén.



Adatok:  $m_1=10$  [kg],  $\alpha=30^\circ$ ,  $\mu_{01} = 0,2$ ,  $\mu_{02} = 0,3$

Megoldás:

Egyensúlyi állapotban:

$$m_{2min} \leq m_2 \leq m_{2max}$$

Egyensúlyi egyenletek  $m_1$  tömegű anyagi pontra:

$$\text{I. } \sum_i F_{ix} = K_1 - F_t - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \rightarrow F_t = K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } \sum_i F_{iy} = F_n - m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_n = m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$\text{III. } |F_t| \leq \mu_{01} \cdot F_n$$

Egyensúlyi egyenletek  $m_2$  tömegű anyagi pontra:

$$\text{IV. } \sum_i F_i = m_2 \cdot g - K_2 = 0 \rightarrow K_2 = m_2 \cdot g$$

A kötélúrlódást az alábbi egyenlőtlenséggel vesszük figyelembe:

$$\text{V. } K_1 \cdot e^{-\mu_{02} \cdot (\frac{\pi}{2} + \alpha)} \leq K_2 \leq K_1 \cdot e^{\mu_{02} \cdot (\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

$$\text{Ha } F_t \leq \mu_{01} \cdot F_n$$

$$K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha \leq \mu_{01} \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$K_1 \leq m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu_{01} \cdot \cos \alpha)$$

$$K_1 \leq 66 \text{ [N]} = K_{1max}$$

$$\text{Ha } -\mu_{01} \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_{01} \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha \leq K_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

$$K_1 \geq m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha - \mu_{01} \cdot \cos \alpha)$$

$$K_1 \geq 32 \text{ [N]} = K_{1min}$$

$$32 [N] \leq K_1 \leq 66 [N]$$

$$K_{1min} \cdot e^{-\mu_{02} \cdot (\frac{\pi}{2} + \alpha)} \leq K_2 \leq K_{1max} \cdot e^{\mu_{02} \cdot (\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

$$17 [N] \leq K_2 \leq 123,7 [N]$$

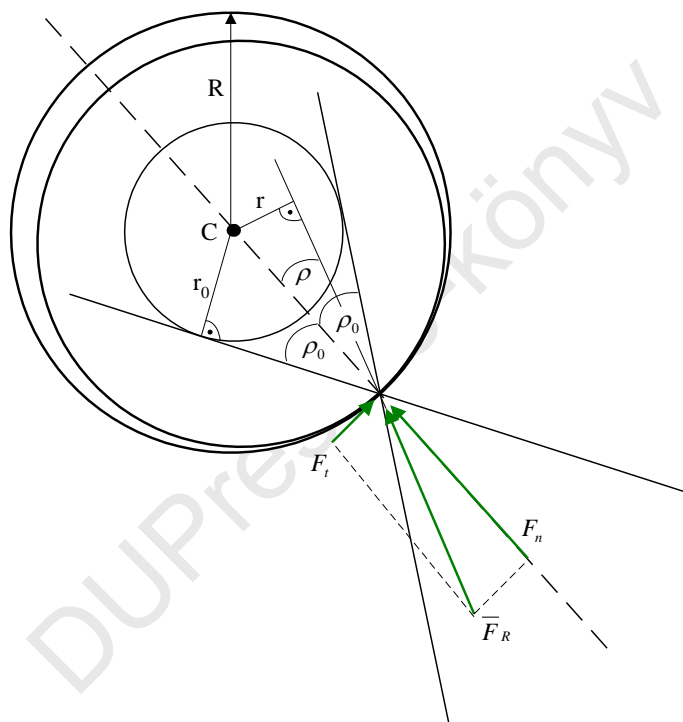
$$K_{2min} = 17 [N] \rightarrow m_{2min} = 1,73 [kg]$$

$$K_{2max} = 123,7 [N] \rightarrow m_{2max} = 12,6 [kg]$$

$$1,73 [kg] \leq m_2 \leq 12,6 [kg]$$

### 8.6.4 Csapsúrlódás

Az alábbi ábra egy siklócsapágy belsejét mutatja.



56. ábra. Ábra a csapsúrlódás értelmezéséhez

A csapágyház és a csap között fellépő súrlódás miatt a reakcióerő – amelyet a ház a csapra fejt ki – hatásvonala egy  $r$  távolságra tolódik a csapágy (C) középpontjától. Következésképpen, a kényszererők nyomatéka ( $M_c$ ) lesz a C középpontra. A csap egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_c| = F_R \cdot r \leq F_R \cdot r_0 = F_R \cdot \sin \rho_0 \cdot R$$

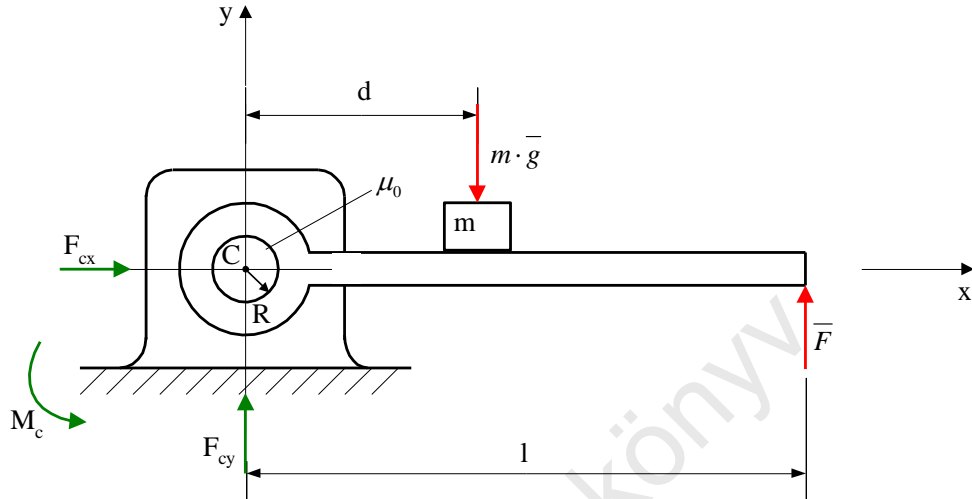
A fenti egyenletben:

$$\sin \rho_0 = \frac{r_0}{R}, \quad \rho_0 = \arctan \mu_0 \quad F_R = \sqrt{F_n^2 + F_t^2},$$

ahol  $r_0$  az  $r$  maximális értéke egyensúly esetén.

1. feladat:

Számítsuk ki azon minimális és maximális értéket ( $F_{min}, F_{max}$ ) amelyek között az  $F$  erő nagysága változhat, az ábrán látható mechanikai rendszer egyensúlya esetén.



Adatok:  $m=50$  [kg],  $l=2$  [m],  $d=0,8$  [m],  $R=0,01$  [m],  
 $\mu_0=0,3=\tan\rho_0 \rightarrow \rho_0=16,7^\circ$

Megoldás:

A rendszer egyensúlyban van, ha:  $F_{min} \leq F \leq F_{max}$

Egyensúlyi egyenletek:

$$\text{I. } \sum_i F_{ix} = F_{cx} = 0 \rightarrow F_{cx} = 0$$

$$\text{II. } \sum_i F_{iy} = F_{cy} - m \cdot g + F = 0$$

$$F_c = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = m \cdot g - F$$

$$\text{III. } \sum_i M_i = M_c - m \cdot g \cdot d + F \cdot l = 0 \rightarrow M_c = m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq M_c \leq F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

1. eset:

$$\text{Ha } -F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq M_c$$

$$-(m \cdot g - F) \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-m \cdot g \cdot R \cdot \sin \rho_0 + F \cdot R \cdot \sin \rho_0 \leq m \cdot g \cdot d - F \cdot l$$

$$-1,41 + 0,0029 \cdot F \leq 392,4 - 2 \cdot F$$

$$2,0029 \cdot F \leq 393,81$$

$$F \leq 196,62 \text{ [N]} = F_{max}$$

2. eset:

$$\text{Ha } M_c \leq F_c \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$m \cdot g \cdot d - F \cdot l \leq (m \cdot g - F) \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$m \cdot g \cdot d - F \cdot l \leq m \cdot g \cdot R \cdot \sin \rho_0 - F \cdot R \cdot \sin \rho_0$$

$$392,4 - 2 \cdot F \leq 1,41 - 0,0029 \cdot F$$

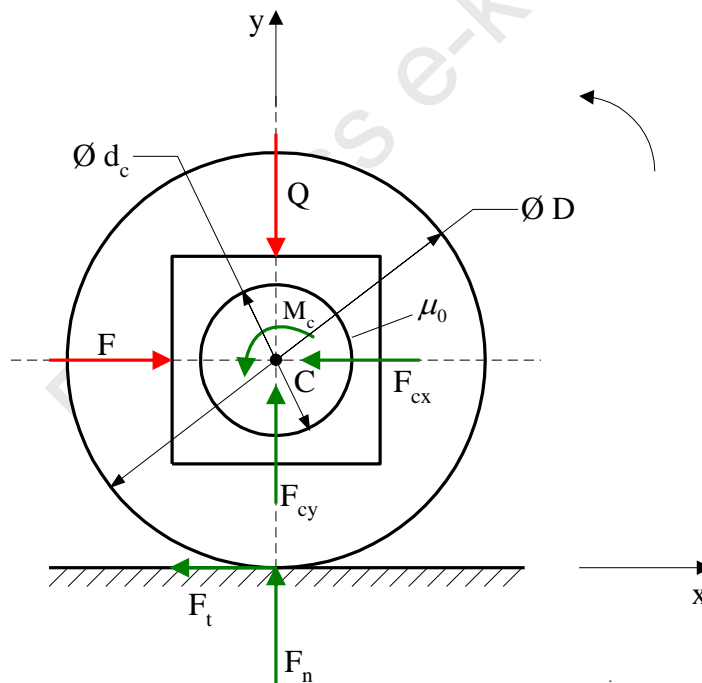
$$-1,9971 \cdot F \leq -390,99$$

$$F \geq 195,78 \text{ [N]} = F_{min}$$

$$195,78 \text{ [N]} \leq F \leq 196,62 \text{ [N]}$$

2. feladat:

Számítsuk ki a minimális és maximális értéket ( $F_{min}, F_{max}$ ) amelyek között az F erő nagysága változhat, ha az ábrán látható kerék nem gördül el. A kerék tömege és gördülési ellenállása elhanyagolható, így a kerék biztosan előbb gördül el, mint megcsúszik.



Adatok:  $D=300 \text{ [mm]}$ ,  $d_c=50 \text{ [mm]}$ ,  $Q=10 \text{ [kN]}$ ,  $\mu_0=0,1$

Megoldás:

Egyensúlyi egyenletek a kerékre:

$$\sum_i F_{ix} = F - F_t = 0 \rightarrow F_t = F$$

$$\sum_i F_{iy} = F_n - Q = 0 \rightarrow F_n = Q$$

$$\sum_i M_C = M_C - F_t \cdot \frac{D}{2} = 0 \rightarrow M_C = F_t \cdot \frac{D}{2}$$

$$\mu_0 = 0,1 = \tan \rho_0 \rightarrow \rho_0 = 5,71^\circ$$

Mivel a kerék tömege elhanyagolható:

$$F_n = F_{cy}, F_t = F_{cx}$$

$$F_C = \sqrt{F_{cx}^2 + F_{cy}^2} = \sqrt{F^2 + Q^2}$$

A kerék nem gördül el akkor, és csak akkor, ha:

$$|M_C| \leq F_C \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

1. eset:

$$M_C \leq F_C \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

$$F_t \cdot \frac{D}{2} \leq \sqrt{F^2 + Q^2} \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0$$

$$0,15 \cdot F \leq \sqrt{F^2 + 100} \cdot 0,0025$$

$$60 \cdot F \leq \sqrt{F^2 + 100}$$

Ha  $F > 0$

$$60 \leq \frac{\sqrt{F^2 + 100}}{F}$$

$$60 \leq \sqrt{\frac{F^2 + 100}{F^2}}$$

$$3600 \leq \frac{F^2 + 100}{F^2}$$

$$F \leq \sqrt{\frac{100}{3599}}$$

$$0 \leq F \leq 0,1667 \text{ [kN]}$$

Ha  $F < 0$ : Ezt az esetet nem szükséges megvizsgálni.

2. eset:

$$-F_c \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0 \leq M_c$$

$$-\sqrt{F^2 + Q^2} \cdot \frac{d_c}{2} \cdot \sin \rho_0 \leq F_t \cdot \frac{D}{2}$$

$$-\sqrt{F^2 + 100} \cdot 0,0025 \leq 0,15 \cdot F$$

Ha  $F < 0$

$$60 \leq \frac{-\sqrt{F^2 + 100}}{F}$$

$$60 \leq -\sqrt{\frac{F^2 + 100}{F^2}}$$

$$3600 \geq \frac{F^2 + 100}{F^2}$$

$$3600 \cdot F^2 \geq F^2 + 100$$

$$3599 \cdot F^2 \geq 100$$

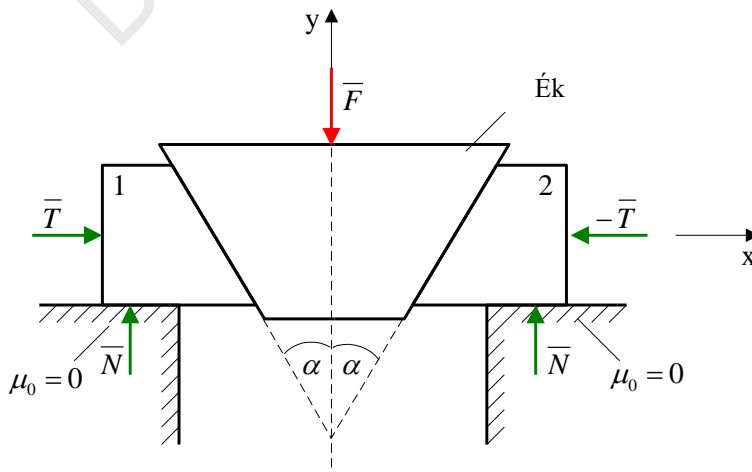
$$F^2 \geq 0,0277$$

$$-0,1667 \text{ [kN]} \leq F \leq 0$$

$$-0,1667 \text{ [kN]} \leq F \leq 0,1667 \text{ [kN]}$$

### 8.6.5 Ék

Az 57. ábra egy elhanyagolható tömegű éket mutat. Számítsuk ki és szerkesszük meg azon minimális és maximális értéket amely között az  $F$  erő változhat, ha az ék egyensúlyban van.



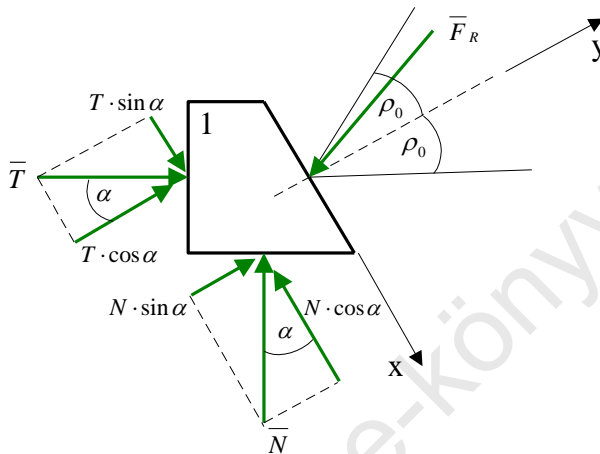
57. ábra Az egyensúlyban lévő ékre ható erők

A mechanikai rendszer - melynek eleme az ék és az 1-es és 2-es blokk is - egyensúlyban van. Tehát:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} - \vec{T} + \vec{F} + 2 \cdot \vec{N} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot N \end{pmatrix} = 0 \rightarrow N = \frac{F}{2}$$

Az 1-es blokk szintén egyensúlyban van:



58. ábra. Az 1-es blokkra ható erők

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_R = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} T \cdot \sin \alpha \\ T \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N \cdot \cos \alpha \\ N \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ -F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_t = N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$$

$$\text{II. } F_n = T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha$$

Az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

1. eset:

$$N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot (T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha)$$

$$N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha \leq \mu_0 \cdot T \cdot \cos \alpha + \mu_0 \cdot N \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{F}{2} - T \cdot \tan \alpha \leq T \cdot \tan \rho_0 + \tan \rho_0 \cdot \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{F}{2} - \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \rho_0 \leq T \cdot \tan \rho_0 + T \cdot \tan \alpha$$

$$\frac{F}{2} \cdot (1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho_0) \leq T \cdot (\tan \rho_0 + \tan \alpha)$$

$$F \leq 2 \cdot T \cdot \frac{\tan \rho_0 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \rho_0}$$

$$F \leq 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha + \rho_0)$$

2. eset:

$$-\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

$$-\mu_0 \cdot (T \cdot \cos \alpha + N \cdot \sin \alpha) \leq N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$$

$$-\mu_0 \cdot T \cdot \cos \alpha - \mu_0 \cdot N \cdot \sin \alpha \leq N \cdot \cos \alpha - T \cdot \sin \alpha$$

$$-T \cdot \tan \rho_0 - \tan \rho_0 \cdot \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \leq \frac{F}{2} - T \cdot \tan \alpha$$

$$T \cdot \tan \alpha - T \cdot \tan \rho_0 \leq \frac{F}{2} + \frac{F}{2} \cdot \tan \alpha \cdot \tan \rho_0$$

$$T \cdot (\tan \alpha - \tan \rho_0) \leq \frac{F}{2} \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho_0)$$

$$2 \cdot T \cdot \frac{\tan \alpha - \tan \rho_0}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho_0} \leq F$$

$$2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq F$$

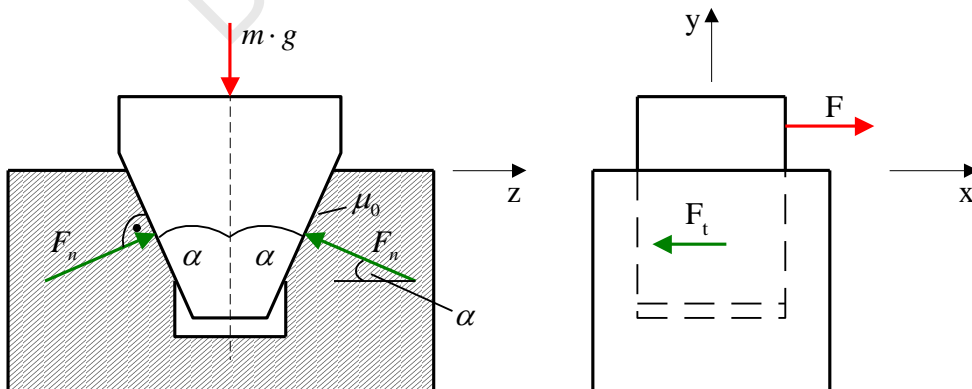
Így az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq F \leq 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha + \rho_0)$$

Ha  $F_{min} = 2 \cdot T \cdot \tan(\alpha - \rho_0) \leq 0 \rightarrow \alpha \leq \rho_0$  akkor az ék önzáró. Ez azt jelenti, hogy ha az  $\bar{F}$  erő nagyságát zérusra csökkentjük, az ék egyensúlyban marad.

### 8.6.6 Horony

Az 59. ábra egy fém blokkba mart hornyot ábrázol. A horonyban egy  $m$  tömegű ék helyezkedik el. Számítsuk ki az  $F$  erő azon maximális értékét, amely mellett az ék még egyensúlyban marad a horonyban.



59. ábra. Horonyba helyezett ékre ható erők

Egyensúlyi egyenletek az ékre:

$$\sum_i F_{ix} = F - 2 \cdot F_t = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = -m \cdot g + 2 \cdot F_n \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sum_i F_{iz} = F_n \cdot \cos \alpha - F_n \cdot \cos \alpha = 0$$

Az ék egyensúlyban van akkor, és csak akkor, ha:

$$|F_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$\text{Ha } F_t \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$F \leq \frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g$$

$$\text{Ha } -\mu_0 \cdot F_n \leq F_t$$

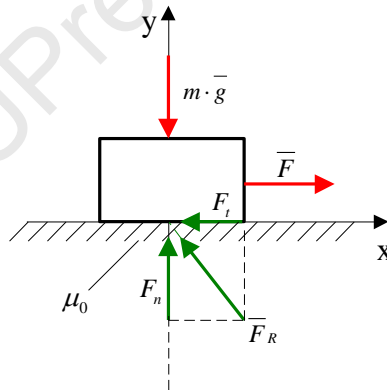
$$-\frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g \leq F$$

$$-\frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g \leq F \leq \frac{\mu_0}{\sin \alpha} \cdot m \cdot g$$

Bevezetjük a virtuális tapadási súrlódási tényezőt, az alábbiak szerint:

$$\mu'_0 = \frac{\mu_0}{\sin \alpha} > \mu_0$$

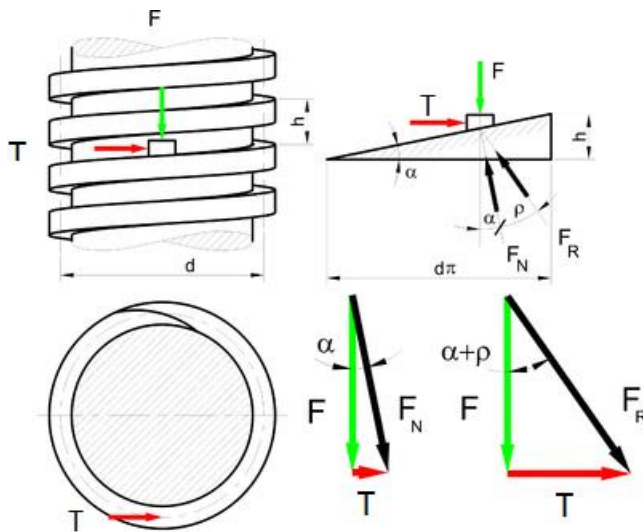
Ha  $\alpha = 90^\circ$  akkor  $\mu'_0 = \mu_0$ . Az alábbi ábra ezt a speciális esetet szemlélteti.



60. ábra. Az ébredő erők  $\alpha = 90^\circ$  esetén

### 8.6.7 Csavar

Az alábbi ábra egy lapos menetes csavart ábrázol:



61. ábra. Lapos menetes csavar meghúzásakor ébredő erők

A 61. ábra alapján az alábbi egyenletek érvényesek:

$$\tan \alpha = \frac{h}{d \cdot \pi}, \quad \mu = \tan \rho, \quad \tan(\alpha + \rho) = \frac{T}{F}, \quad T = F \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

A csavar által F nagyságú erő kifejtéséhez szükséges nyomaték:

$$M_1 = \frac{d}{2} \cdot F \cdot \tan(\alpha + \rho)$$

A csavar meglazításához szükséges nyomaték:

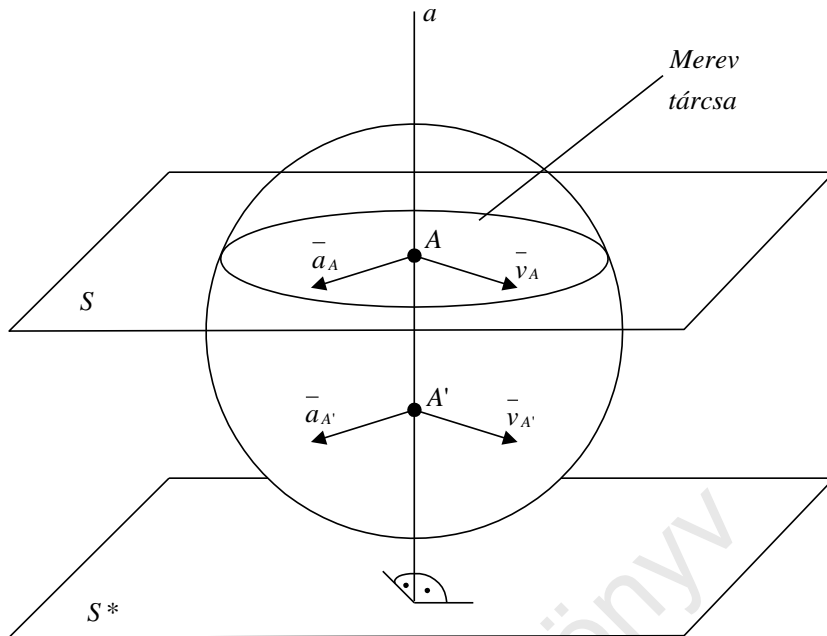
$$M_2 = \frac{d}{2} \cdot F \cdot \tan(\alpha - \rho)$$

## 9. Merev test dinamikája

A továbbiakban merev test dinamikájával (mozgástanával), azon belül kinematikával és kinetikával foglalkozunk. A merev testek általános térbeli mozgását itt nem tárgyaljuk, csak a síkmozgás esetére szorítkozunk. Ez a megszorítás elfogadható, tekintve, hogy például a gépészeti alkalmazások túlnyomó többségénél a mozgás síkmozgás.

### 9.1 Merev test síkmozgása, merev tárcsa fogalma

Síkmozgás esetén a test bármely pontja mindvégig egy rögzített alapsíkkal ( $S^*$ ) párhuzamosan mozog.



62. ábra. Síkmozgást végző merev test

A merev testek síkmozgásának kinematikai vizsgálata síkbeli problémává redukálható az alábbi tétel alapján.

**9.1 Tétel:**

A merev test síkmozgásának leírásához elegendő egyetlen, a testhez rögzített, az alapsíkkal párhuzamos sík mozgását leírni. A fenti síkot mozgósíknak (*S*, 62. ábra) nevezzük.

A merev test és a mozgósík metszete a merev tárcsa. Azaz a tétel állítása úgy is megfogalmazható, hogy bármely síkmozgási probléma tárcsa feladattá redukálható. Most bizonyítsuk be a fenti tételt:

**Bizonyítás:**

Vegyünk fel egy „*a*” egyenest, amely merőleges az alap, ezáltal a mozgósíkra:  $a \perp S$ ;  $a \perp S^*$

Az elrendezésből adódóan az „*a*” egyenes bármely pontjának, bármely időpillanatban, ugyanaz a sebessége és a gyorsulása, mint az „*A*” pontnak. Azaz az „*A*” pont mozgását leírva leírjuk az „*a*” egyenes mozgását. Ebből adódóan a mozgósík összes pontjának mozgását leírva leírjuk a teljes tér, azon belül a test mozgását. Ebből már adódik a tétel állítása.

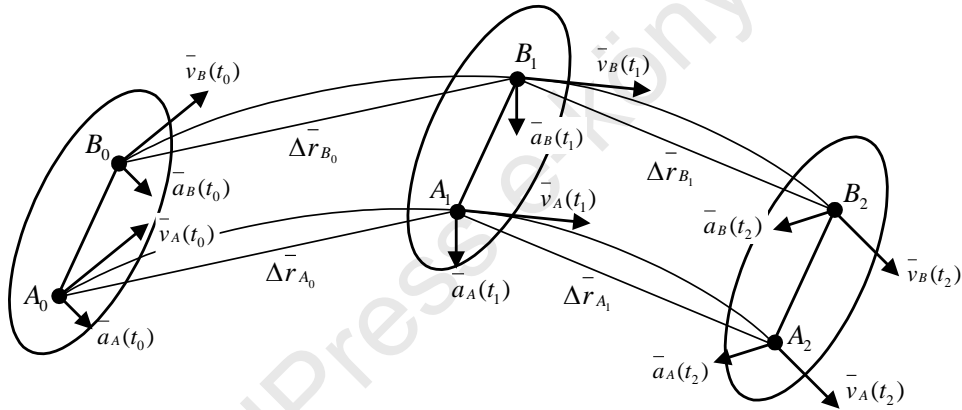
Azaz merev test síkmozgásának leírásánál elegendő a merev tárcsa és a hozzá rögzített sík mozgását leírni.

## 9.2 Merev tárcsa kinematikája

A továbbiakban először a tárcsa egy adott pillanatra vonatkozó mozgásállapotát, részletesebben sebesség és gyorsulás állapotát, adjuk meg annak különböző mozgástípusai esetén. A sebesség és gyorsulás állapot megadása azt jelenti, hogy az adott pillanatban megadjuk a tárcsa összes pontjának sebesség és gyorsulás vektorát. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy levezetünk összefüggéseket, amelyekkel egy adott pillanatban kiszámítható a tárcsa valamennyi pontjának sebesség és gyorsulás vektora. Először a tárcsa haladó, majd forgómozgásával, végül általános síkmozgásával foglalkozunk.

### 9.2.1 Haladó mozgás (transzláció)

A tárcsa úgy mozog, hogy bármely két pontját összekötő szakasz önmagával párhuzamos marad a mozgás során (63. ábra).



63. ábra. Haladó mozgást végző merev tárcsa

Haladó mozgás esetén egy adott pillanatban a tárcsa bármely pontja ugyanazon sebesség és gyorsulásvektorral mozog. Ennek belátásához tekintsük az alábbi gondolatmentet.

A haladó mozgás definíciójából adódóan:

$$\overline{A_0B_0} \parallel \overline{A_1B_1} \parallel \overline{A_2B_2}$$

A fenti összefüggésből következik, hogy az  $A_0A_1B_1B_0$  valamint az  $A_1A_2B_2B_1$  négyszögek paralelogrammák, tehát teljesül, hogy:

$$\Delta \vec{r}_{B0} = \Delta \vec{r}_{A0} \text{ és } \Delta \vec{r}_{B1} = \Delta \vec{r}_{A1}$$

A fenti egyenleteket a  $\Delta t$  időtartammal beosztva, és zérushoz tartva, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{B0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{A0}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v}_B(t_0) = \vec{v}_A(t_0)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{B1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{A1}}{\Delta t} \rightarrow \vec{v}_B(t_1) = \vec{v}_A(t_1)$$

A fentiekből adódóan:

$$\vec{v}_B(t_1) - \vec{v}_B(t_0) = \vec{v}_A(t_1) - \vec{v}_A(t_0)$$

Ebből már következik, hogy:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{B0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{A0}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a}_B(t_0) = \vec{a}_A(t_0)$$

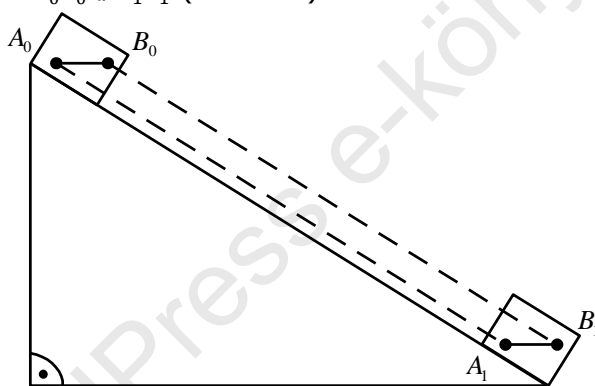
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{B1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_{A1}}{\Delta t} \rightarrow \vec{a}_B(t_1) = \vec{a}_A(t_1)$$

Azaz haladó mozgás esetén a tárcsa sebesség és gyorsulás állapotának megadásához elegendő egyetlen pont sebesség- és gyorsulásvektorát megadni.

Most mutatunk néhány példát egyenes, és görbe vonalú haladó mozgásra.

*Egyenes vonalú haladó mozgás:*

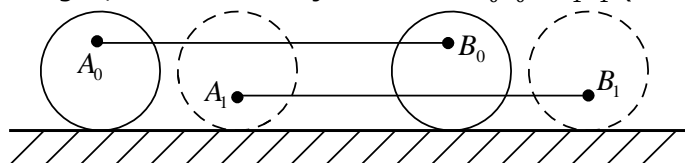
Egy síkfelületű lejtőn lecsúszó láda egyenes vonalú haladó mozgást végez, mivel az ábra jelöléseivel  $\overline{A_0B_0} \parallel \overline{A_1B_1}$  (64. ábra).



64. ábra. Példa egyenes vonalú haladó mozgásra

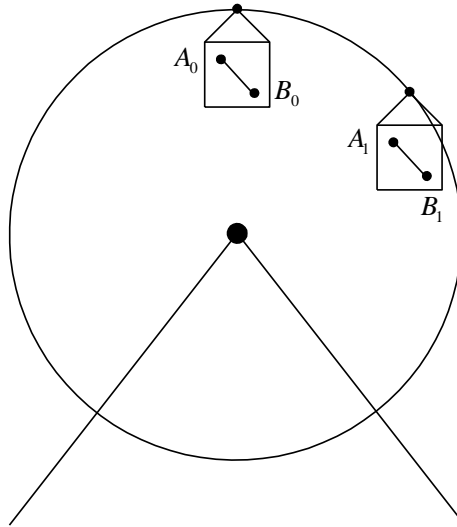
*Görbe vonalú haladó mozgás:*

Például egy gőzmozdony kerekeit összekötő csatlórúd görbe vonalú haladó mozgást végez, mivel az ábra jelöléseivel  $\overline{A_0B_0} \parallel \overline{A_1B_1}$  (65. ábra).



65. ábra. Példa görbe vonalú haladó mozgásra

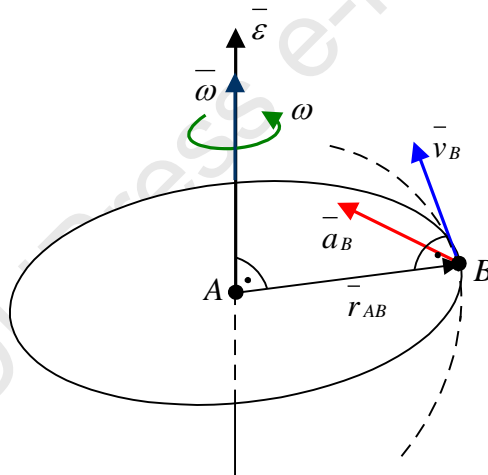
Görbevonalú (körvonalú) haladó mozgásra további példát jelent egy óriáskerék kosarainak mozgása (66. ábra).



66. ábra. Példa körvonalú haladómozgásra

### 9.2.2 Forgómozgás

Forgómozgás esetén a tárcsa bármely pontja egy rögzített „A” pont körüli körpályán mozog.



67. ábra. Forgómozgást végző merev tárcsa

Azaz a tárcsa bármely pontjára így például a B pontra is érvényesek a körmozgásnál megismert alábbi összefüggések:

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \cdot \vec{r}_{AB}$$

Mint korábban említettük, síkmozgás esetén a szögsebesség és szöggyorsulás vektor merőleges a tárcsa síkjára.



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi_B}{\Delta t} = \dots = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \rightarrow \omega_A = \omega_B = \dots = \omega$$

Természetesen a fenti összefüggés nem csak a skaláris, de a vektoriális szögsebességre is igaz:

$$\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B = \dots = \vec{\omega}$$

A 68. ábra alapján a B pont elmozdulása előállítható egy haladó és forgómozgási járulékok összegeként az alábbiak szerint:

$$\Delta \vec{r}_{B0} = \Delta \vec{r}_{A0} + \Delta \vec{r}_{BA}$$

A fenti összefüggés beosztva a mozgás  $\Delta t$  időtartamával, és zérushoz tartva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\vec{v}_B(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{B0}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{A0}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{BA}}{\Delta t} = \vec{v}_A(t_0) + \vec{v}_{BA}(t_0) == \vec{v}_A(t_0) + \vec{\omega}(t_0) \times \vec{r}_{AB}(t_0)$$

A fenti összefüggésben  $\vec{v}_{BA}$  az A pont körüli forgáshoz tartozó sebesség.

Azaz általános síkmozgás esetén igazak az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \\ \vec{a}_B &= \vec{\dot{v}}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} - \omega^2 \cdot \vec{r}_{AB} \end{aligned}$$

Azaz általános síkmozgás esetén a sebesség állapot megadásához elegendő egyetlen pont sebességét és a tárcsa szögsebességét megadni, míg a gyorsulás állapot esetében egyetlen pont gyorsulásának, valamint a szögsebességnek és szöggyorsulásnak a megadása szükséges.

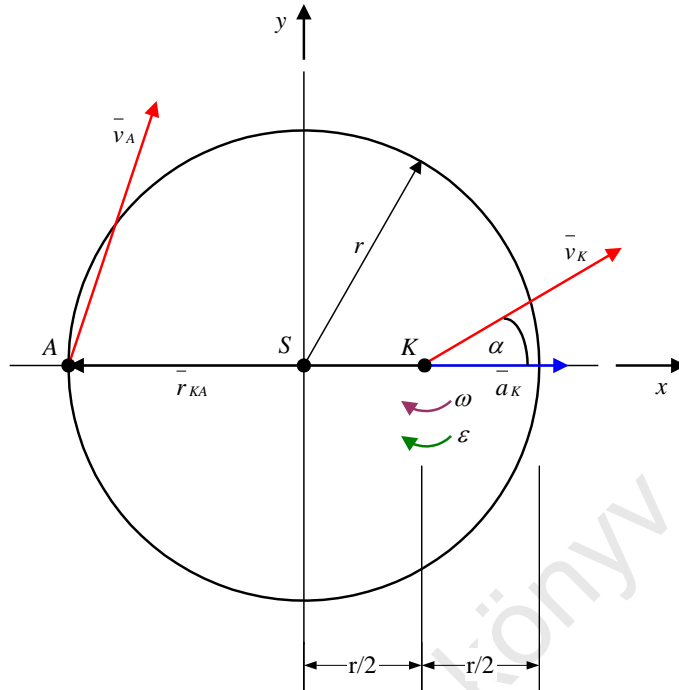
## Feladat

Egy vízszintes jégpályán csúszó jégkorong „K” pontjának, egy adott pillanatban, ismerjük a sebesség- és gyorsulásvektorát, továbbá a korong szögsebesség és szöggyorsulás vektorát.

Számítsuk ki a korong „A” pontjának sebesség és gyorsulás vektorát az adott pillanatban!

Adatok:

$$v_k = 4 \left[ \frac{m}{s} \right]; a_k = 3 \left[ \frac{m}{s^2} \right]; \omega = 10 \left[ \frac{rad}{s} \right]; \alpha = 30^\circ; r = 0,6[m]; \varepsilon = 2 \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$



Megoldás:

$$\bar{a}_K = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$\bar{v}_K = \begin{pmatrix} v_K \cdot \cos \alpha \\ v_K \cdot \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,46 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \left[ \frac{rad}{s} \right]; \quad \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$\bar{r}_{KA} = \begin{pmatrix} -0,9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\bar{v}_A = \bar{v}_K + \bar{\omega} \times \bar{r}_{KA}$$

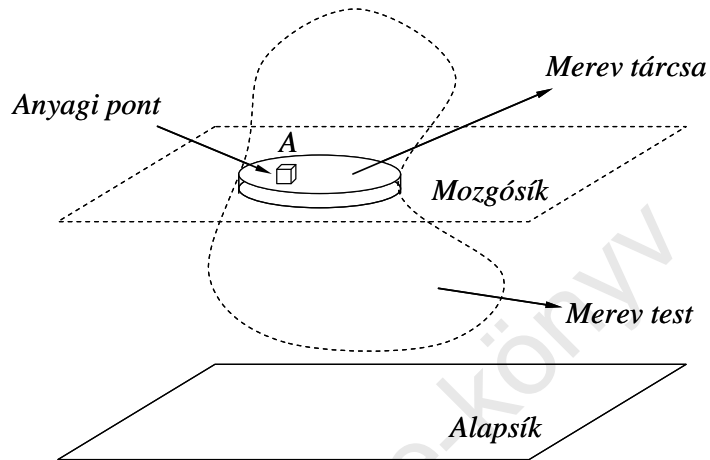
$$\bar{v}_A = \begin{pmatrix} 3,46 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,46 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,46 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_K + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{KA} - \omega^2 \cdot \bar{r}_{KA}$$

$$\bar{a}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 100 \cdot \begin{pmatrix} -0,9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 93 \\ 1,8 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

### 9.3 Merev tárcsa kinetikája

Egy merev testet gondolatban – a méretéhez képest elhanyagolható nagyságú darabokra bontva (például kockákra vágva) – anyagi pontokhoz jutunk. Azaz a merev test modellezhető, mint egymással szoros kölcsönhatásban lévő anyagi pontok összessége. A fenti modell tárcsára is alkalmazható, ha a tárcsát a merev test egy ideálisan vékony szeletének képzeljük el (70. ábra). Ekkor érvényben maradnak a kinematikai részben elmondottak is.



70. ábra Síkmozgást végző merev test és tárcsa

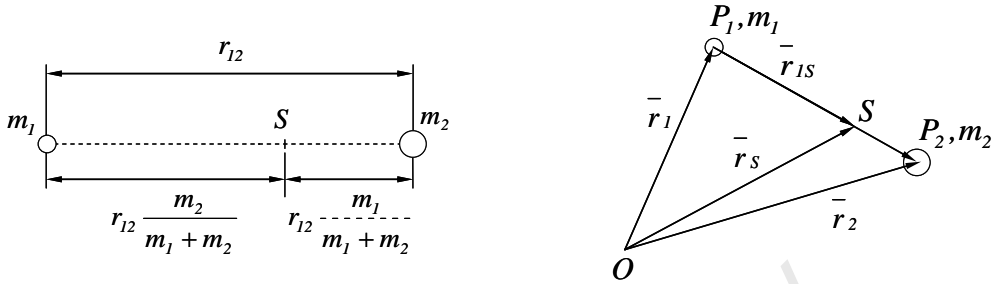
A fentiekből adódóan az anyagi pontra szerzett ismereteinket felhasználhatjuk a merev testek, speciálisan tárcsák vizsgálatánál. A tárcsa egyes pontjaira alkalmazhatjuk Newton törvényeit, és a kinetika alaptételeit. Természetesen ekkor a külső erőhatások mellett figyelembe kell venni a tárcsa szomszédos pontpárjai között fellépő belső erőket is. A feladat összetettnek tűnik, de felismerve, hogy a szomszédos pontpárok által egymásra kifejtett belső erők, valamint forgatónyomatékaik és munkavégzéseik összege zérus, a helyzet lényegesen egyszerűsödik. Hiszen így a belső erőket, nyomatékaikat és munkavégzéseiket az egész testre összegezve zérust kapunk. Tehát végül csak a külső erők hatásával kell számolni. Ez jelentős egyszerűsödést jelent, és lehetővé teszi, hogy a kinetika alaptörvényeit és tételeit kiterjesszük merev testekre, speciálisan tárcsákra.

#### 9.3.1 Alapfogalmak és összefüggéseik

Mielőtt megfogalmazzuk Newton törvényeit és a kinetika alaptételeit, értelmeznünk kell a tömegközéppont fogalmát, valamint a kinetika alapmennyiségeit (lendület, perdület, mozgási energia) ki kell terjesztenünk merev testekre, speciálisan tárcsákra.

## Tömegközéppont

Két anyagi pontból álló rendszer  $S$  **tömegközéppontja** az a pont, amely a pontokat összekötő szakaszt a pontok tömegének arányában osztja (71. ábra). A definícióból kiindulva megadhatjuk a két pontból álló rendszer tömegközéppontjába mutató  $\vec{r}_S$  helyvektort (lásd az 71. ábrát, és a /9.3.1/ összefüggést):



71. ábra. Tömegközéppont két anyagi pontból álló rendszer esetén

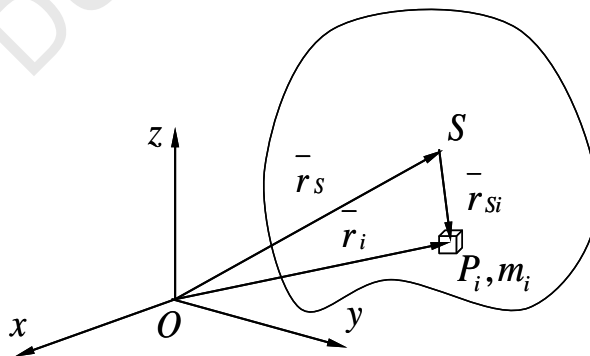
$$\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \vec{r}_{1S} = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad /9.3.1/$$

A fenti /9.3.1/ összefüggést általánosíthatjuk tetszőleges számú ( $n$  db) anyagi pontra:

$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + \dots + m_n \cdot \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad /9.3.2/$$

Az általánosítás alap gondolata az, hogy  $n-1$  db tömegpont helyettesíthető a tömegközéppontjukba helyezett  $m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$  össztömeggel.

Mivel bármely test modellezhető, mint anyagi pontok összessége, a /9.3.2/ összefüggés egyben a test tömegközéppontjába mutató  $\vec{r}_S$  helyvektort is megadja (72. ábra).



72. ábra. Merev test tömegközéppontja

Az összefüggésben ekkor  $m_i$  illetve  $\vec{r}_i$  az egyes  $P_i$  anyagi pontok tömege illetve helyvektora,  $m = \sum_i m_i$  pedig a test össztömege. A test egyes darabkájának tömegét azok  $\Delta V_i$  térfogatával és  $\rho_i$  sűrűségével kifejezve:

$$\bar{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i \Delta V_i} \quad /9.3.3/$$

Ha a test sűrűsége a helyvektornak folytonos függvénye, és a  $\Delta V_i$  térfogatokkal zérushoz tartunk, akkor a fenti kifejezés átírható az alábbi alakba:

$$\bar{r}_S = \frac{\int_V \rho(\bar{r}) \cdot \bar{r} dV}{\int_V \rho(\bar{r}) dV} \quad /9.3.4/$$

A /9.3.4/ összefüggésben szereplő integrálok térfogati (hármass) integrálok. Speciálisan, ha a test homogén tömegeloszlású, azaz  $\rho(\bar{r}) = \rho = \text{állandó}$ :

$$\bar{r}_S = \frac{\rho \int_V \bar{r} dV}{\rho \int_V dV} = \frac{\int_V \bar{r} dV}{V} \quad /9.3.5/$$

Ha a test teljes térfogatában a gravitációs tér homogén, akkor a test tömegközéppontja és **súlypontja** (azaz a testre ható súlyerő eredőjének támadáspontja) egybeesik. Az általunk vizsgált testek esetében – azok Földhöz viszonyított elhanyagolható mérete miatt – ez természetesen teljesül.

A későbbiekben szükségünk lesz néhány egyszerű azonosságra. Ehhez alakítsuk át a /9.3.2/ összefüggést, felhasználva, hogy  $\bar{r}_i = \bar{r}_S + \bar{r}_{Si}$  (72. ábra), ahol  $\bar{r}_{Si}$  a tömegközéppontból a test egy tetszőleges  $P_i$  pontjába mutató vektor.

$$\bar{r}_S = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \cdot (\bar{r}_S + \bar{r}_{Si})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_S + \sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Si}}{\sum_i m_i} = \bar{r}_S + \frac{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Si}}{\sum_i m_i}$$

A fenti egyenletből adódóan:

$$\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Si} = \bar{0} \quad /9.3.6/$$

Ha a test mozog, akkor az egyes  $\bar{r}_i$  helyvektorok függvényei az időnek. Ebben az esetben a /9.3.6/ összefüggést idő szerint deriválva:

$$\sum_i m_i \cdot \dot{\bar{r}}_{Si} = \sum_i m_i \cdot \bar{v}_{iS} = \bar{0} \quad /9.3.7/$$

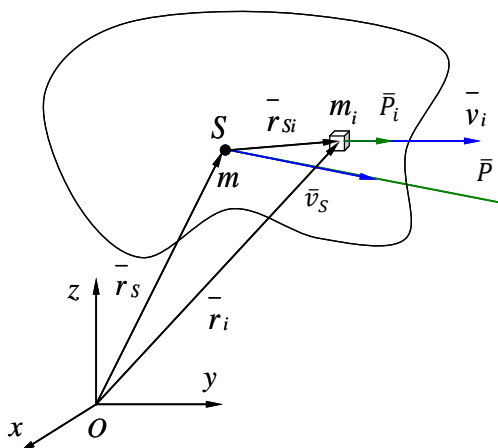
Az összefüggésben  $\bar{v}_{iS}$  a  $P_i$  pont  $S$  ponthoz viszonyított sebessége.

### Lendület

Egy merev test **lendületét** egyes pontjai lendületének összegeként értelmezzük:

$$\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i = \sum_i m_i \cdot \bar{v}_i \quad /9.3.8/$$

A test lendülete átírható egy igen szemléletes alakba. Ehhez tekintsük az 73. ábrát!



73. ábra. Ábra a merev test lendületének értelmezéséhez

A rögzített  $O$  pontból induló  $\vec{r}_s$  és  $\vec{r}_i$ , valamint a tömegközéppontból a  $P_i$  ponthoz mutató  $\vec{r}_{si}$  vektorok között fennáll az alábbi összefüggés:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_s + \vec{r}_{si} \quad /9.3.9/$$

Ha a test mozog, akkor a fenti vektorok függvényei az időnek. A /9.3.9/ összefüggést idő szerint deriválva megkapjuk a megfelelő sebességek közötti kapcsolatot:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{is} \quad /9.3.10/$$

Ezt felhasználva:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i m_i \cdot (\vec{v}_s + \vec{v}_{is}) = \sum_i m_i \cdot \vec{v}_s + \sum_i m_i \cdot \vec{v}_{is}$$

Az összefüggésben  $m = \sum_i m_i$  a test össztömege, az átalakítások során felhasználtuk a /9.3.7/ összefüggést. Végül a test lendülete:

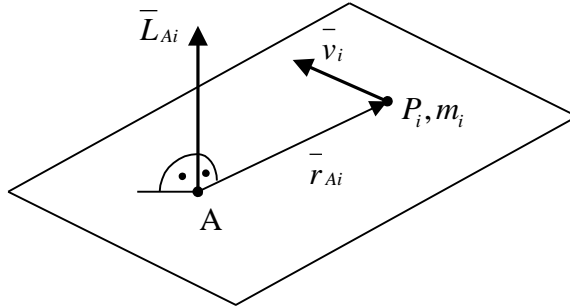
$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}_s \quad /9.3.11/$$

Tehát a test lendülete egyenlő a tömegközéppontjába helyezett,  $m$  tömegű,  $\vec{v}_s$  sebességű anyagi pont lendületével. Azaz, ha a test csak haladó mozgást végez, akkor kinetikai szempontból helyettesíthető a tömegközéppontjába helyezett  $m$  tömegű, és  $\vec{v}_s$  sebességű anyagi ponttal.

### Perdület és tehetetlenségi nyomaték

Egy merev test (speciálisan tárcsa) forgómozgásának kinetikai vizsgálatához bevezetjük a perdület fogalmát. Értelmezzük először egy anyagi pont perdületét egy tetszőleges  $A$  pontra vonatkozóan (74. ábra, 9.3.12 összefüggés):

$$\vec{L}_{Ai} = \vec{r}_{Ai} \times m_i \cdot \vec{v}_i \quad /9.3.12/$$



74. ábra. Anyagi pont A pontra vonatkozó perdülete

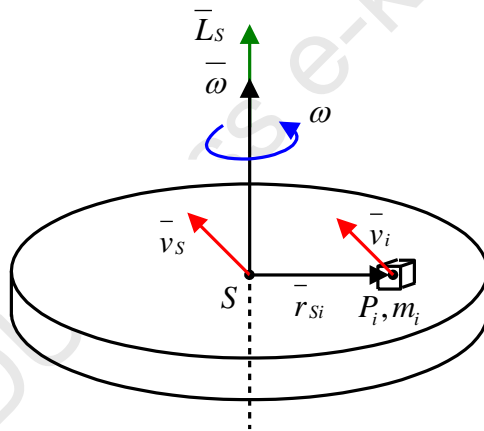
Egy merev test (speciálisan tárcsa) perdületét az egyes darabkái perdületeinek összegeként értelmezzük, feltételezve, hogy a darabkák mérete elhanyagolható a test méreteihez képest:

$$\bar{L}_A = \sum_i \bar{L}_{Ai} = \sum_i (\bar{r}_{Ai} \times m_i \cdot \bar{v}_i) \quad /9.3.13/$$

Speciálisan ha az A forgáspont a tárcsa S tömegközéppontja:

$$\bar{L}_S = \sum_i \bar{L}_{Si} = \sum_i (\bar{r}_{Si} \times m_i \cdot \bar{v}_i) \quad /9.3.14/$$

Alakítsuk át a /9.3.14/ kifejezést feltételezve, hogy a test egy merev tárcsa (75. ábra):



75. ábra. Merev tárcsa tömegközéppontra vonatkozó perdületének értelmezéséhez

$$\begin{aligned} \bar{L}_S &= \sum_i (\bar{r}_{Si} \times m_i \cdot \bar{v}_i) = \sum_i [\bar{r}_{Si} \times m_i (\bar{v}_S + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Si})] = \sum_i [m_i \cdot \bar{r}_{Si} \times (\bar{v}_S + \bar{\omega} \times \bar{r}_{Si})] = \\ &= \sum_i (m_i \cdot \bar{r}_{Si} \times \bar{v}_S) + \sum_i [m_i \cdot \bar{r}_{Si} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_{Si})] = \\ &= \left( \underbrace{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Si}}_0 \right) \times \bar{v}_S + \sum_i \left[ \bar{\omega} \left( \frac{m_i \cdot \bar{r}_{Si} \cdot \bar{r}_{Si}}{r_{Si}^2} \right) - \bar{r}_{Si} \left( \frac{m_i \cdot \bar{r}_{Si} \cdot \bar{\omega}}{0} \right) \right] \end{aligned}$$

Az átalakítás során felhasználtuk, hogy  $\bar{\omega} \perp \bar{r}_{Si} \rightarrow \bar{r}_{Si} \cdot \bar{\omega} = 0$ .

Tehát a perdület végül az alábbi alakban írható:

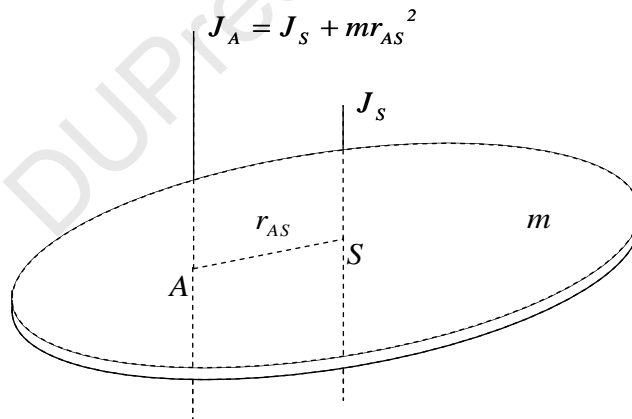
$$\bar{L}_S = \sum_i \bar{\omega} \cdot m_i \cdot r_{Si}^2 = \bar{\omega} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \cdot r_{Si}^2}_{J_S} = \bar{\omega} \cdot J_S \quad /9.3.13/$$

A fenti összefüggésben szereplő  $J_S = \sum_i m_i \cdot r_{Si}^2$  mennyiség a tárcsa **tehetetlenségi nyomatéka** az  $S$  ponton átmenő, a tárcsa síkjára merőleges tengelyre. A tehetetlenségi nyomaték csak a tárcsa  $S$  ponthoz viszonyított tömegeloszlásától függ, így független a tárcsa mozgásállapotától.

Eszerint a tömegközéppontra vonatkozó perdület és szögsebesség egymással egyenesen arányosak, az arányossági tényező a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték. Érdemes megjegyezni, hogy a fenti összefüggések szerkezete nagyon hasonló a lendületre vonatkozó /9.3.11/ összefüggéséhez, csak itt a tömeg szerepét a tehetetlenségi nyomaték, a test (tömegközéppont) sebességének szerepét a szögsebesség játssza. Ahogyan a tömeg a haladómozgási, úgy a tehetetlenségi nyomaték a tárcsa forgómozgási tehetetlenségét jellemzi.

### Steiner tétele merev tárcsára, a tehetetlenségi nyomaték kiszámítása

**Steiner-tétele** a tárcsa tetszőleges  $A$  pontján, és tömegközéppontján átmenő, a tárcsa síkjára merőleges tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok között teremt kapcsolatot. Írjuk fel a tehetetlenségi nyomatékok az  $A$  ponton átmenő tengelyre, majd alakítsuk át néhány lépésben (76. ábra):



76. ábra. Steiner tétele

$$\begin{aligned}
J_A &= \sum_i m_i \cdot r_{Ai}^2 = \sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Ai} \cdot \bar{r}_{Ai} = \sum_i m_i \cdot (\bar{r}_{AS} + \bar{r}_{Si}) \cdot (\bar{r}_{AS} + \bar{r}_{Si}) = \\
&= \overbrace{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{AS} \cdot \bar{r}_{AS}}^{m \cdot r_{AS}^2} + 2 \cdot \bar{r}_{AS} \cdot \overbrace{\sum_i m_i \cdot \bar{r}_{Si}}^{\bar{0}} + \sum_i m_i \cdot \overbrace{\bar{r}_{Si} \cdot \bar{r}_{Si}}^{r_{Si}^2} = \\
&= m \cdot r_{AS}^2 + \overbrace{\sum_i m_i \cdot r_{Si}^2}^{J_S}
\end{aligned}$$

Ebből adódik Steiner tétele:

$$J_A = m \cdot r_{AS}^2 + J_S \quad /9.3.14/$$

Az összefüggésben  $r_{AS}$  a tömegközéppont és az A pont távolsága,  $m$  a tárcsa tömege (76. ábra).

Az összefüggésből leolvasható, hogy a sík pontjai közül a tömegközépponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a legkisebb. Az elmondottakból adódóan, elegendő a tömegközépponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot ismerni, a többi, vele párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték Steiner tételével kiszámítható. A további feladatunk tehát a tömegközépponti tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték meghatározása, amit az alábbi összefüggés értelmez:

$$J_S = \sum_i m_i \cdot r_{Si}^2 = \sum_i \rho_i \cdot \Delta V_i \cdot r_{Si}^2 \quad /9.3.15/$$

Ha a test sűrűsége a helyvektornak folytonos függvénye, és a  $\Delta V_i$  térfogatokkal nullához tartunk, akkor a /9.3.15/ kifejezés az alábbi, integrálos alakban írható:

$$J_S = \int_V \rho(\vec{r}) \cdot r^2 dV \quad /9.3.16/$$

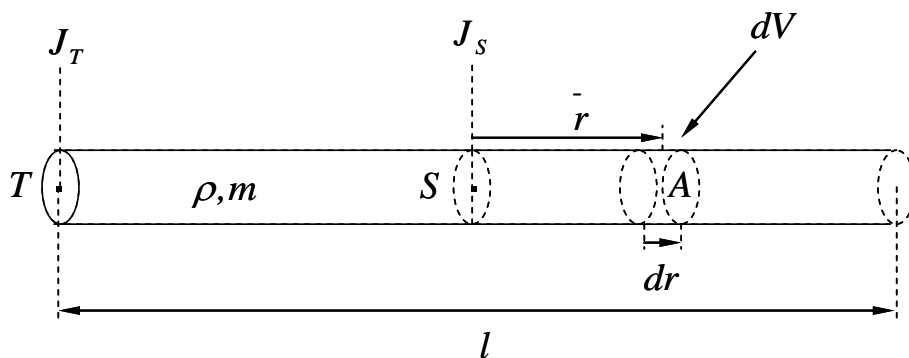
A fenti összefüggésben  $\vec{r}$  a tömegközéppontból indított helyvektor. Ha a tárcsa homogén tömegeloszlású, azaz  $\rho(\vec{r}) = \rho = \text{állandó}$ , akkor:

$$J_S = \rho \int_V r^2 dV \quad /9.3.17/$$

Most nézzünk néhány példát a /9.3.17/ összefüggés alkalmazására!

*Vékony, homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, hossz tengelyére merőleges tengelyre*

Az alábbi példában a rúd homogén tömegeloszlású, továbbá a keresztirányú méretei elhanyagolhatóak hosszúságához képest (77. ábra).



77. ábra. Vékony, homogén rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, hossz tengelyére merőleges tengelyre

Alkalmazva a /9.3.17/ összefüggést:

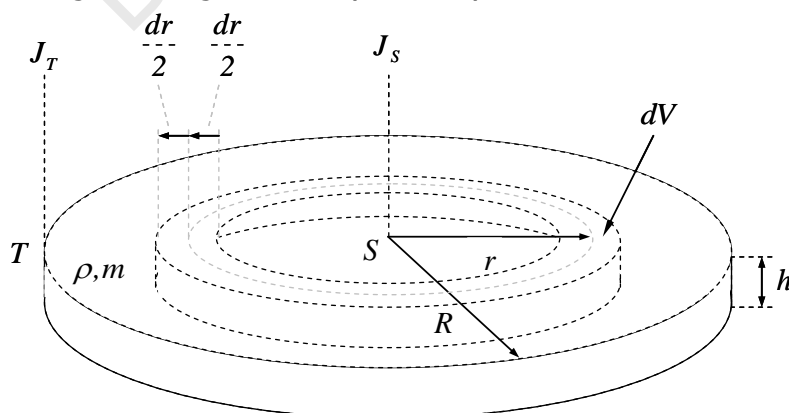
$$\begin{aligned}
 J_S &= \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \cdot A dr = \rho \cdot A \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \rho \cdot A \left[ \frac{1}{3} \cdot r^3 \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot \overbrace{A \cdot l}^V \cdot l^2 = \\
 &= \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 \quad /9.3.18/
 \end{aligned}$$

A tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték ismeretében, példaként (Steiner tételével) számítsuk ki a T végponton átmenő, az előzővel párhuzamos tengely vonatkozó nyomatékot:

$$J_T = J_S + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2 \quad /9.3.19/$$

Homogén korong tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre

A korong homogén tömegeloszlású (78. ábra):



78. ábra. Homogén korong tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre

Alkalmazva a /9.3.17/ összefüggést:

$$J_S = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_V r^2 \left[ \left( r + \frac{dr}{2} \right)^2 \cdot \pi - \left( r - \frac{dr}{2} \right)^2 \cdot \pi \right] \cdot h = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot \int_0^R r^3 dr = 2 \cdot \rho \cdot \pi \cdot h \cdot \left[ \frac{1}{4} \cdot r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \overbrace{R^2 \cdot \pi \cdot h}^V \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \quad /9.3.20/$$

A tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték ismeretében példaként (Steiner tételével) számítsuk ki a korong szélső pontján átmenő, az előzővel párhuzamos tengelyre vonatkozó nyomatékot:

$$J_T = J_S + m \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2 \quad /9.3.21/$$

### 9.3.2 Mozgásegyenletek merev tárcsára

Deriváljuk a tárcsa lendületét idő szerint feltéve, hogy a tárcsa tömege állandó ( $m(t) = m = \text{állandó}$ ):

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d \sum_i \bar{P}_i}{dt} = \sum_i \frac{d\bar{P}_i}{dt} = \sum_i \frac{d(m_i \cdot \bar{v}_i)}{dt} = \sum_i m_i \cdot \frac{d\bar{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \cdot \bar{a}_i \stackrel{\text{Newton II.}}{\hat{=}} \sum_i \bar{F}_i = \bar{F} \quad /9.3.22/$$

ahol  $\bar{F}_i$  a tárcsa  $P_i$  pontjára ható külső és belső erők eredője,  $\sum_i \bar{F}_i$  pedig a tárcsára ható összes külső és belső erő eredője.

Megjegyzés: A tárcsában ébredő belső erők Newton III. törvénye értelmében páronként kioltják egymást, így a tárcsában ébredő összes belső erő összege zérus. Tehát  $\bar{F} = \sum_i \bar{F}_i$  a tárcsára ható összes külső erő eredőjét jelenti végül. Másrészt felhasználva a 9.3.11 összefüggést:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{v}_s)}{dt} = m \cdot \frac{d\bar{v}_s}{dt} = m \cdot \bar{a}_s \quad /9.3.23/$$

Összevetve a 9.3.22 és 9.3.23 egyenleteket, megkapjuk Newton II. törvényét testekre (speciálisan: merev tárcsára):

$$\sum_i \bar{F}_i = m \cdot \bar{a}_s \quad /9.3.24/$$

A tárcsára ható külső erők összege egyenlő a tárcsa tömegének és tömegközépponti gyorsulásának szorzatával. Newton II. törvénye más néven a mozgásegyenlet haladó mozgásra.

Deriváljuk a tárcsa tömegközéppontra vonatkozó perdületét idő szerint, feltéve, hogy a tárcsa tömege állandó ( $m(t) = m = \text{állandó}$ ):

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{L}_s}{dt} &= \frac{d\sum_i \bar{L}_{si}}{dt} = \frac{d\sum_i (\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{v}_i)}{dt} = \sum_i \frac{d(\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{v}_i)}{dt} = \\
&= \sum_i \left( \frac{d\bar{r}_{si}}{dt} \times m_i \cdot \bar{v}_i + \bar{r}_{si} \times m_i \cdot \frac{d\bar{v}_i}{dt} \right) = \sum_i (\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_i + \bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{a}_i) = \\
&= \sum_i (\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_i) + \sum_i (\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{a}_i) = \\
&= \sum_i \bar{v}_{is} \times m_i \cdot (\bar{v}_s + \bar{v}_{is}) + \sum_i (\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{a}_i) = \\
&= \sum_i (\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_s) + \sum_i (\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_{is}) + \sum_i (\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{a}_i) = \\
&= \underbrace{\left( \sum_i m_i \cdot \bar{v}_{is} \right)}_0 \times \bar{v}_s + \sum_i \underbrace{(\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_{is})}_0 + \sum_i (\bar{r}_{si} \times m_i \cdot \bar{a}_i) \rightarrow \\
\frac{d\bar{L}_s}{dt} &= \sum_i \left( \bar{r}_{si} \times \underbrace{m_i \cdot \bar{a}_i}_{\bar{F}_i} \right) = \sum_i (\bar{r}_{si} \times \bar{F}_i) = \sum_i \bar{M}_{si} = \bar{M}_s \quad /9.3.25/
\end{aligned}$$

Másrészt felhasználva a 9.3.13 összefüggést:

$$\frac{dL_s}{dt} = \frac{dJ_s \cdot \bar{\omega}}{dt} = J_s \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} = J_s \cdot \bar{\varepsilon} \quad /9.3.26/$$

ahol  $\bar{v}_{is}$  a  $P_i$  pont tömegközépponrhoz viszonyított sebessége ( $\bar{v}_{is} \parallel m_i \cdot \bar{v}_{is}$  és  $\bar{v}_{is} \times m_i \cdot \bar{v}_{is} = 0$ ),  $\bar{r}_{si} \times \bar{F}_i$  a  $P_i$  anyagi pontra ható külső és belső erők összegének tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatéka,  $\sum_i \bar{M}_{si}$  pedig a merev tárcsára ható külső és belső erők tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatékainak összege.

Newton III. törvényéből következik, hogy a belső erők összegzett forgatónyomatéka zérus, így a  $\sum_i \bar{M}_{si}$  kifejezés a külső erők összegzett forgatónyomatékát jelenti a tömegközéppontra vonatkozóan.

A perdülettétel differenciál alakja merev tárcsára:

$$\bar{M}_s = J_s \cdot \bar{\varepsilon} \quad /9.3.27/$$

Speciálisan, skaláris egyenlet formájában:

$$M_s = J_s \cdot \varepsilon \quad /9.3.28/$$

Tehát a mozgásegyenletek a tárcsa haladó és forgó mozgására:

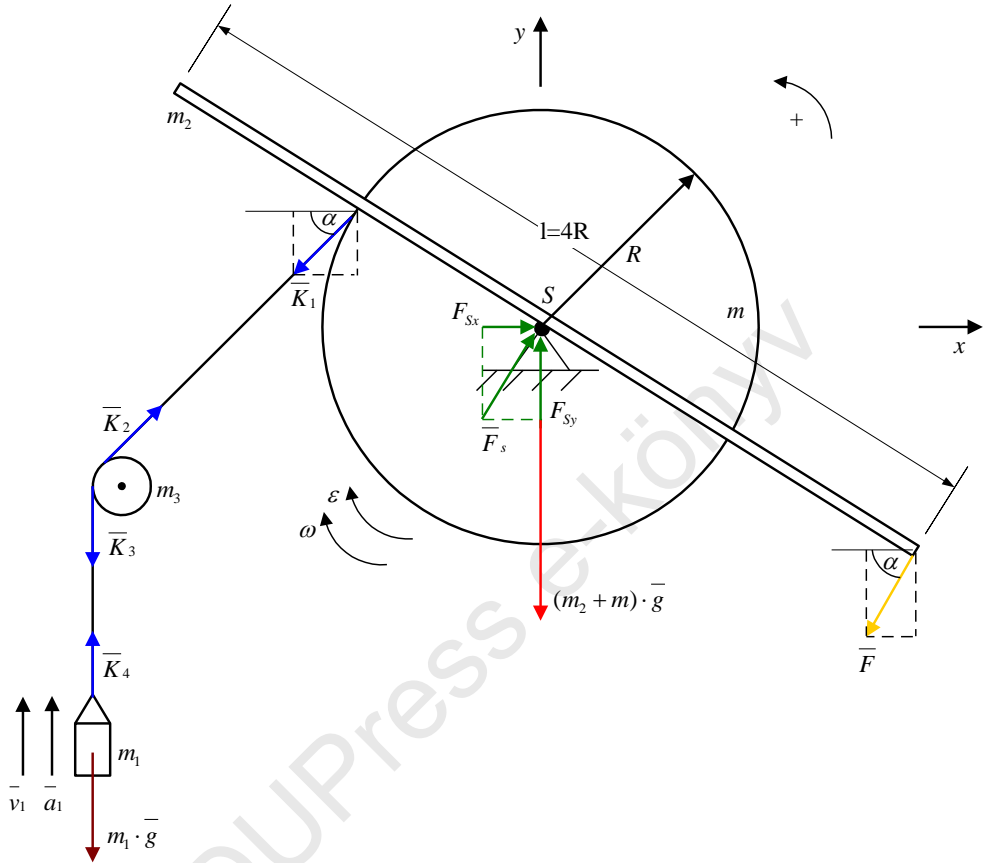
$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}_s \quad /9.3.29/$$

$$M_s = J_s \cdot \varepsilon \quad /9.3.30/$$

## Feladatok

### 1. feladat

Az ábrán látható szerkezet segítségével vödört húzunk fel egy kútból.



Adatok:

$R=0,221[\text{m}]$ ,  $m_1=10[\text{kg}]$ ,  $m_2=5[\text{kg}]$ ,  $m_3=0[\text{kg}]$ ,  $m=37,11[\text{kg}]$ ,  $\alpha=30^\circ$ ,  
 $g=9,81\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ ,  $F=50[\text{N}]$

a, Mekkora az  $m$  tömegű dob és az  $m_2$  tömegű rúd együttes tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjukon átmenő, síkjukra merőleges tengelyre vonatkozóan?

b, Mekkora a dob szöggyorsulása valamint az  $m_1$  tömegű vödör gyorsulása a felhúzás során?

c, Mekkora lesz a nyugalomból induló vödör sebessége a tárcsa (dob) 10 teljes körfordulását követően?

Feltételek:

- A kötélt ideális:
  - tökéletesen hajlékony
  - a dobokon (dobokon) nem csúszik meg
    - $v_1 = R \cdot \omega$
  - nyújthatatlan
    - $a_1 = R \cdot \varepsilon$
  - tömege elhanyagolható
- Az  $m_3$  tömegű dob ellenállásmentesen forog, tömege elhanyagolható
  - $|\vec{K}| = |\vec{K}_1| = |\vec{K}_2| = |\vec{K}_3| = |\vec{K}_4|$
- Az  $m$  tömegű dob ellenállásmentesen forog

Megoldás:

$$a, J_S = J_{Srúd} + J_{Sdob} = \frac{1}{12} m_2 \cdot (4R)^2 + \frac{1}{2} m \cdot R^2 = 0,295 [kg \cdot m^2]$$

b, Mozgásegyenletek:

- $m$  tömegű dob +  $m_2$  tömegű rúdra:

$$I. \sum_i \vec{F}_i = (m + m_2) \cdot \vec{g} + \vec{F}_S + \vec{K}_1 + \vec{F} = (m + m_2) \cdot \vec{a}_s$$

$$II. \sum_i \vec{M}_{Si} = K \cdot R - F \cdot 2R = J_S \cdot \varepsilon$$

- $m_1$  tömegű vödörre:

$$III. \sum_i F_{iy} = m_1 \cdot g - K = m_1 \cdot a_1$$

$$IV. a_1 = \varepsilon \cdot R$$

$$IV. \rightarrow III. \quad m_1 \cdot g - K = m_1 \cdot \varepsilon \cdot R \rightarrow K = m_1 \cdot g - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R \rightarrow II - ba$$

$$(m_1 \cdot g - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R) \cdot R - F \cdot 2R = J_S \cdot \varepsilon$$

$$m_1 \cdot g \cdot R - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R^2 - F \cdot 2R = J_S \cdot \varepsilon$$

$$m_1 \cdot g \cdot R - F \cdot 2R = \varepsilon \cdot (J_S + m_1 \cdot R^2)$$

$$\varepsilon = \frac{m_1 \cdot g \cdot R - F \cdot 2R}{J_S + m_1 \cdot R^2} = -0,57 \left[ \frac{rad}{s^2} \right]$$

$$a_1 = R \cdot \varepsilon = -0,126 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$$

$$c, \Delta\varphi = -20\pi$$

$$\varphi(t^*) = \varphi(0) + \overbrace{\omega(0)}^0 \cdot t^* + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^{*2}$$

$$\Delta\varphi = \varphi(t^*) - \varphi(0) = \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^{*2}$$

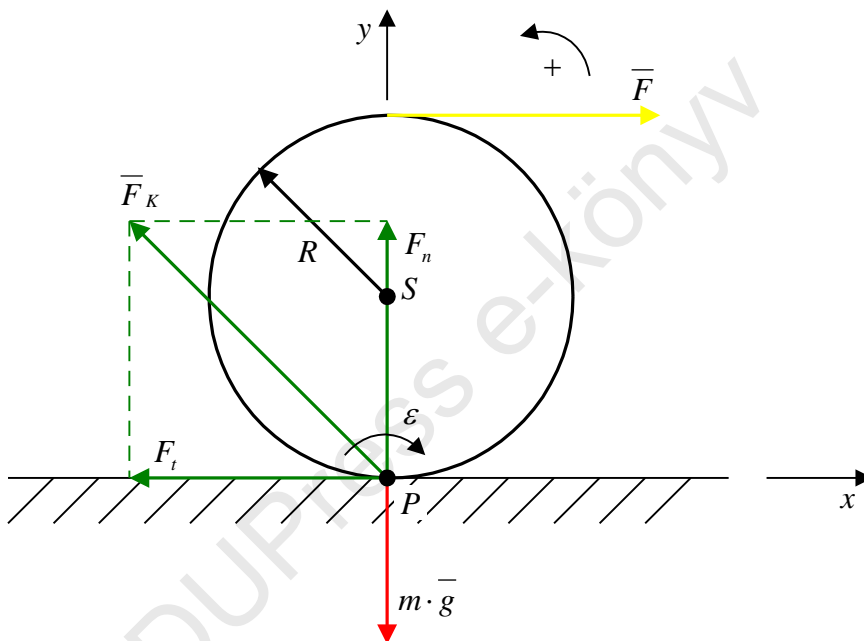
$$t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\varphi}{\varepsilon}} = 14,85[\text{s}] \quad (\text{a felhúzás ideje})$$

$$\omega(t^*) = \omega(0) + \varepsilon \cdot t^* = -8,46 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$v_1(t^*) = \omega(t^*) \cdot R = -1,87 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

## 2. feladat

Az ábrán látható tömör korongra  $F$  erővel hatunk.



Adatok:

$$\mu_0 = 0,3, R=5[\text{m}], F=600[\text{N}], m=100[\text{kg}], g = 9,81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

- Feltételezve a korong tiszta, ellenállásmentes gördülését, számítsuk ki a szöggyorsulását és tömegközéppontjának gyorsulását!
- Ha a korong nyugalomból indul, mekkora lesz a szögsebessége 5 teljes fordulat megtétele után?
- Adjuk meg az  $F$  erő maximális értékét, amely mellett a korong még tisztán gördül!

Megoldás:

$$\text{a) Mozgásegyenlet: } \sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + m \cdot \vec{g} + \vec{F}_k = m \cdot \vec{a}_s$$

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_t \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow F - F_t = m \cdot a_s \text{ I.}$$

$$\rightarrow -m \cdot g + F_n = 0 \text{ II.}$$

$$\text{III. } \sum_i M_{Si} = -F \cdot R - F_t \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$

$$\text{IV. tiszta gördülés: } \bar{a}_s = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{PS} = -\varepsilon \cdot R \cdot \bar{i} \rightarrow \bar{a}_s = -\varepsilon \cdot R$$

$$\text{I. } F_t = F - m \cdot a_s \rightarrow \text{III} - ba$$

$$\text{III. } -F \cdot R - \left( F - m \cdot \underset{-\varepsilon \cdot R}{a_s} \right) \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

$$-F \cdot R - (F + m \cdot \varepsilon \cdot R) \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

$$-F \cdot R - F \cdot R - m \cdot \varepsilon \cdot R^2 = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

$$-2F \cdot R = \frac{3}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{-4 \cdot F \cdot R}{3 \cdot m \cdot R^2} = -16 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\bar{a}_s = -\varepsilon \cdot R = 8 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\text{b) } \Delta\varphi = -10\pi$$

$$\Delta\varphi = \overset{0}{\omega(0)} \cdot \Delta t + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \Delta t^2 \rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta\varphi}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{-10\pi}{-16}} = 1,4[\text{s}]$$

$$\omega(\Delta t) = \overset{0}{\omega(0)} + \varepsilon \cdot \Delta t = \varepsilon \cdot \Delta t = -22,41 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\text{c) A korong tisztán csúszásmentesen gördül} \Rightarrow |\bar{F}_t| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$|F - m \cdot a_s| \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$|F + m \cdot \varepsilon \cdot R| \leq \mu_0 \cdot m \cdot g \quad \left[ \varepsilon = \frac{-4F}{3mR} \right]$$

$$\left| F - m \cdot \frac{-4F}{3mR} \cdot R \right| \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$\left| -\frac{1}{3}F \right| \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

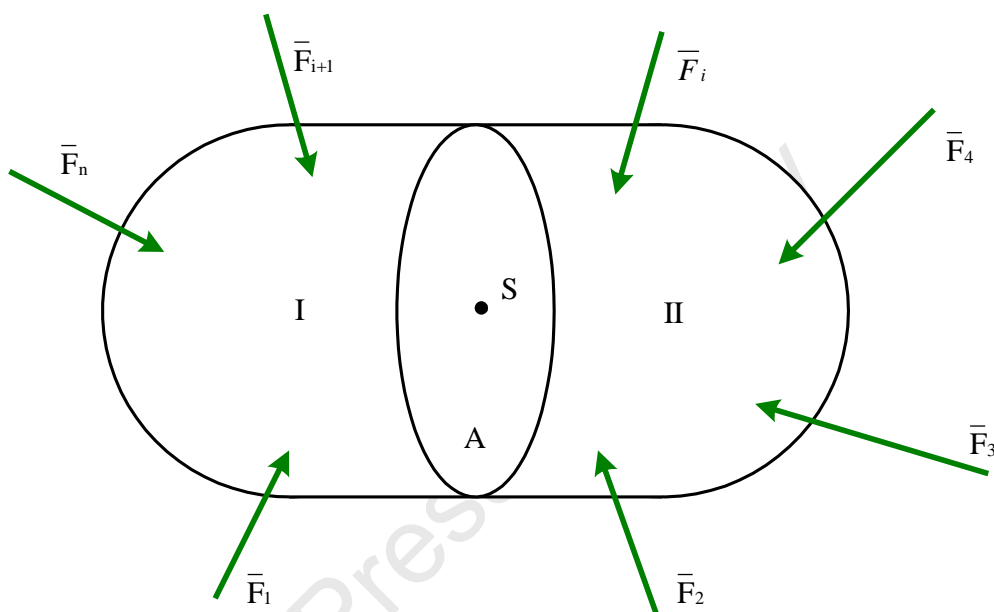
$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \leq -\frac{1}{3}F \leq \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$-3 \cdot \mu_0 \cdot m \cdot g \leq F \leq 3 \cdot \mu_0 \cdot m \cdot g$$

$$F_{\max} = 3 \cdot \mu_0 \cdot m \cdot g = 882,9[\text{N}]$$

## 10. Szilárdságtan

Az előző fejezetekben azzal foglalkoztunk, hogy hogyan lehet kiszámítani az ismeretlen külső erőket és nyomatékokat egy egyensúlyban lévő mechanikai rendszer esetén. Ebben a fejezetben tovább lépünk, és a belső erők és nyomatékok kiszámításával foglalkozunk. A 79. ábra egy merev testet szemléltet, amelyre az  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_i, \bar{F}_{i+1}, \dots, \bar{F}_n$  külső erők (terhelések) hatnak.



79. ábra. Külső erőkkel terhelt merev test

Gondolatban vágjuk két részre a testet egy síkkal ( $A$ ). Az  $A$  metszősík súlypontját jelölje  $S$ .

Mivel a test egyensúlyban van:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_i + \bar{F}_{i+1} + \dots + \bar{F}_n = \bar{0} \quad (10.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_{Si} \times \bar{F}_i) = \bar{0} \quad (10.2)$$

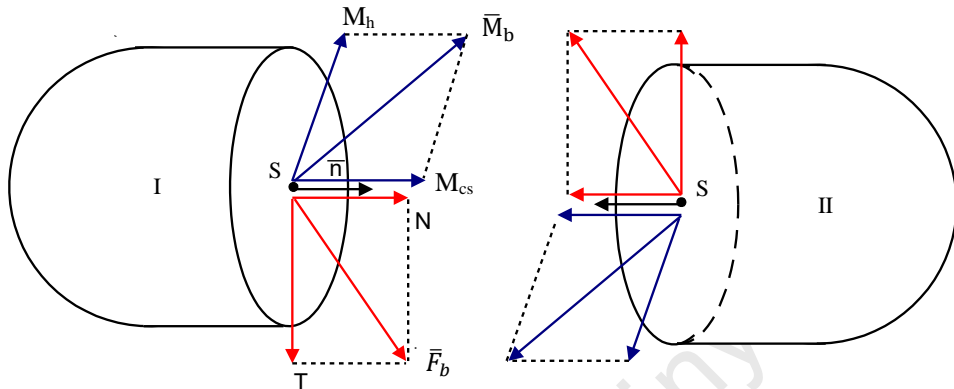
( $\bar{r}_{Si}$  azt a vektort jelöli, amely az  $S$  pontból az  $\bar{F}_i$  erő támadáspontjába mutat)

A test és minden egyes része egyensúlyban van. Az I-es rész egyensúlyát az  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_i, \bar{F}_{i+1}, \dots, \bar{F}_n$  külső erők és az  $A$  sík mentén megoszló belső erőrendszer együttesen

biztosítja. A belső erőrendszer eredő erejét és S pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékát tehát jelölje  $\vec{F}_b$  és  $\vec{M}_S$ . Ekkor:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_{i+1} + \dots + \vec{F}_n + \vec{F}_b = \vec{0} \quad (10.3)$$

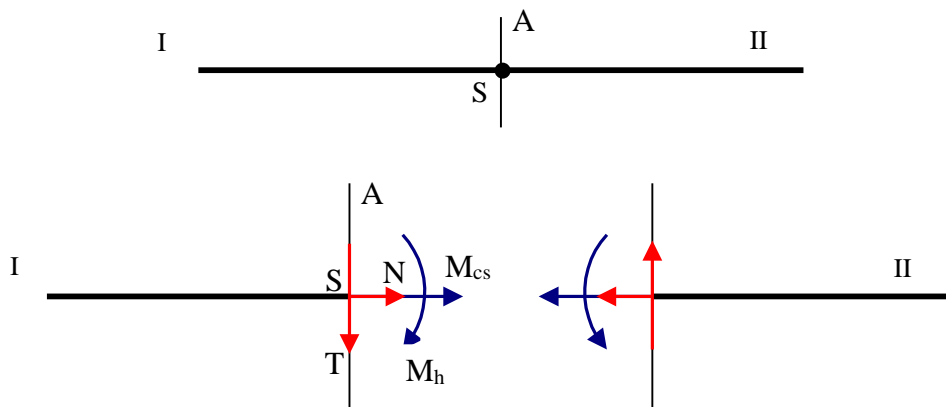
$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_{i+1} + \dots + \vec{M}_n + \vec{M}_S = \vec{0} \quad (10.4)$$



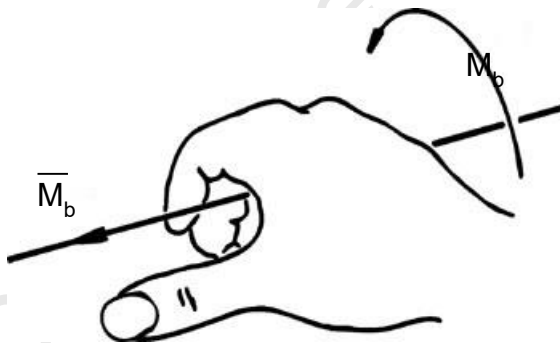
80. ábra. A metsző síkon megoszló belső erőrendszer eredő erejének és S pontra vonatkozó eredő forgatónyomatékának komponensei

Bontsuk fel az  $\vec{F}_b$  és  $\vec{M}_S$  vektorokat az A síkkal párhuzamos és arra merőleges komponensekre. Az  $\vec{F}_b$  erő  $T$  és  $N$  komponenseit nyíró és normál erőnek, míg az  $\vec{M}_S$  nyomaték  $M_h$  és  $M_{cs}$  komponenseit hajlító és csavaró nyomatéknak nevezzük. Az ábrán feltüntetett  $\vec{n}$  vektor a normális irányú egységvektor, amely merőleges a felületre, a testből kifelé mutat és egységnyi hosszúságú. Ebből adódóan a normál erő és a csavarónyomaték normális irányú. A metszősíkon megoszló belső erőrendszer  $(\vec{F}_b; \vec{M}_S)$  eredő vektorkettősét igénybevételnek nevezzük.

Speciálisan, ha a test egy ideális tartó,



81. ábra. Normál és nyíróerő, hajlító és csavaró nyomaték ideális tartó esetén akkor az  $\bar{M}_b$  vektor merőleges az N és T komponensek síkjára és az I rész esetében befelé, míg a II rész esetén kifelé mutat az ábra síkjából. Az 82. ábra a skaláris és vektoriális hajlítónyomaték közötti kapcsolatot szemlélteti jobb kezünk segítségével.



82. ábra. Kapcsolat a skaláris és vektoriális forgatónyomaték között

Egy adott komponenst az alábbi táblázatban szereplő esetekben tekintünk pozitívnak:

3. táblázat.

$N > 0$			vagy
$T > 0$			vagy

$M_{cs} > 0$			vagy
$M_h > 0$			vagy

## 10.1 Igénybevételi függvények és ábrák

Ha az igénybevétel egyes komponenseit megadjuk a tartó hosszának függvényében, akkor megkapjuk a tartó **igénybevételi függvényeit**. A fenti függvényeket grafikusán ábrázolva megkapjuk az **igénybevételi ábrákat**.

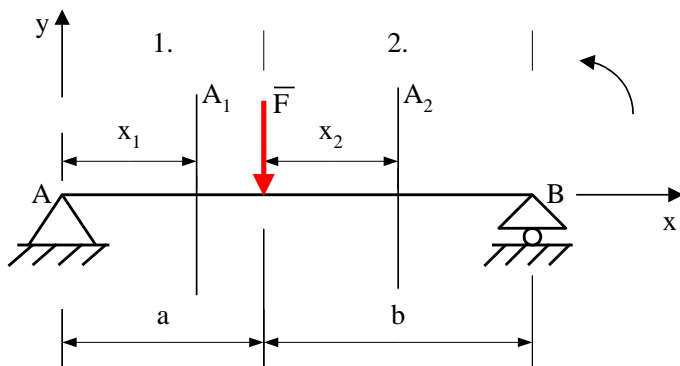
## 10.2 Igénybevételi függvények kiszámítása és ábrázolása

Az igénybevételi függvények kiszámolásához a tartót szakaszokra osztjuk, és az egyes szakaszokra egyensúlyi egyenleteket írunk fel. Az egyensúlyi egyenletekből kifejezve az igénybevétel különböző komponenseit, meg tudjuk adni a tartó hosszának függvényében. A fenti eljárás alkalmazására mutatunk most néhány példát.

### Feladatok

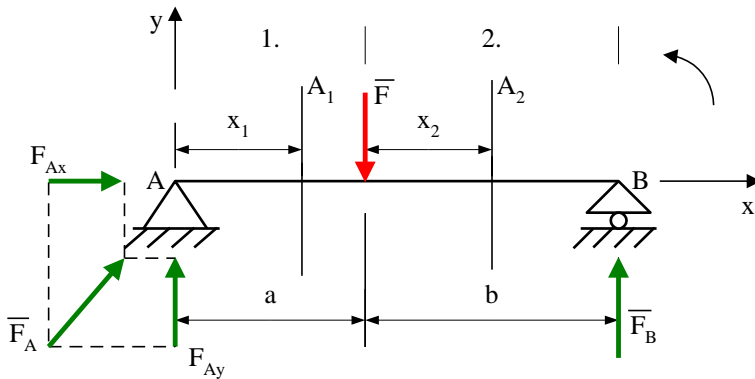
1. feladat:

- Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékot az x koordináta függvényében!
- Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $F=100$  [N],  $a=3$ [m],  $b=4$  [m]

Megoldás:



a)

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_{Ax} = 0$$

$$\text{II. } -F + F_{Ay} + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = F - F_B = 57,14 \text{ [N]}$$

$$\text{III. } \sum_i M_A = -F \cdot a + F_B \cdot (a + b) = 0 \rightarrow F_B = F \cdot \frac{a}{a+b} = 42,86 \text{ [N]}$$

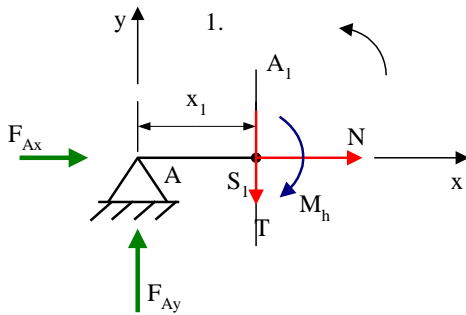
Ellenőrzés:

$$\sum_i M_B = -F_{Ay} \cdot (a + b) + F \cdot b = -57,14 \cdot (3 + 4) + 100 \cdot 4 = 0$$

b)

A koncentrált erők és nyomatékok szakaszokra osztják a tartót.

Ebben a feladatban az  $\vec{F}$  erő a tartót két szakaszra osztja (1-es és 2-es szakasz). Metszük el az 1-es és 2-es szakaszt egy  $A_1$  és  $A_2$  síkkal tetszőleges  $x_1$  és  $x_2$  távolságban az adott szakasz kezdőpontoktól. Jelölje  $S_1$  és  $S_2$  az  $A_1$  és  $A_2$  sík tartóval alkotott metszéspontjait. Az  $A_1$  sík az A-B tartót két részre osztja. Mindkét rész egyensúlyban van. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az A- $S_1$  szakaszra, figyelembe véve a külső valamint belső erőket és nyomatékokat.

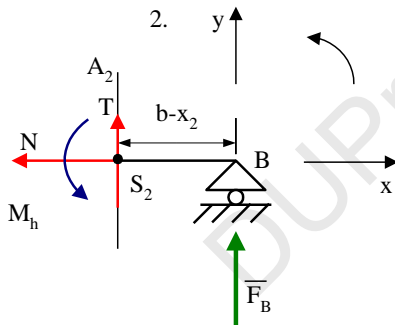


$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} = 57,14 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S1} = -F_{Ay} \cdot x_1 - M_h = 0 \rightarrow M_h = -F_{Ay} \cdot x_1 = -57,14 \cdot x_1 \text{ [Nm]}$$

Az  $A_2$  sík az A-B tartót két részre osztja. Mindkét rész egyensúlyban van. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az  $S_2$ -B szakaszra.



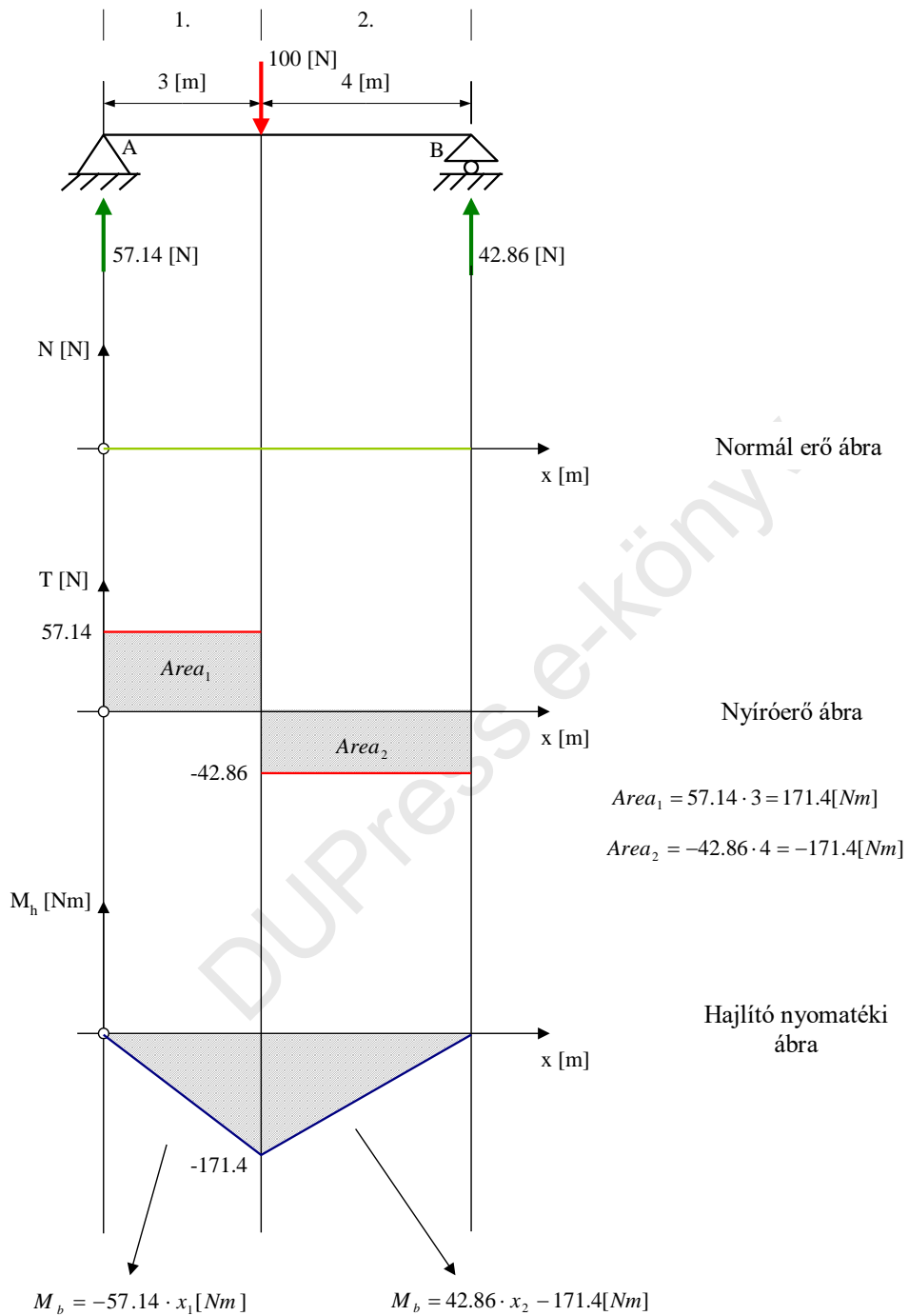
$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -42,86 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S2} = M_h + F_B \cdot (b - x_2) = 0 \rightarrow M_h = -F_B \cdot (b - x_2) = F_B \cdot x_2 - F_B \cdot b$$

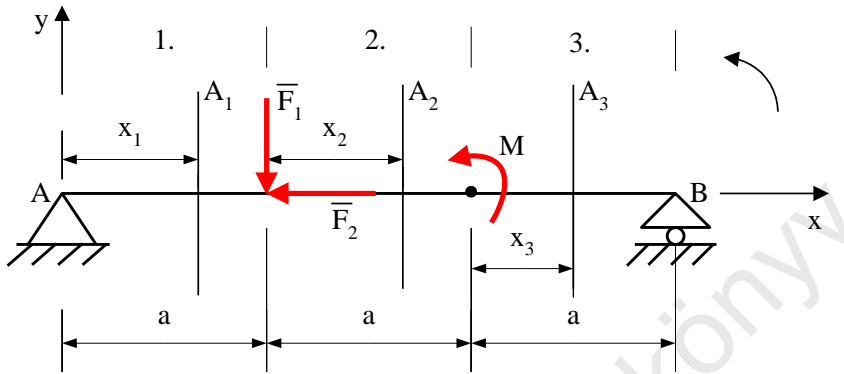
$$= 42,86 \cdot x_2 - 171,4 \text{ [Nm]}$$

c)



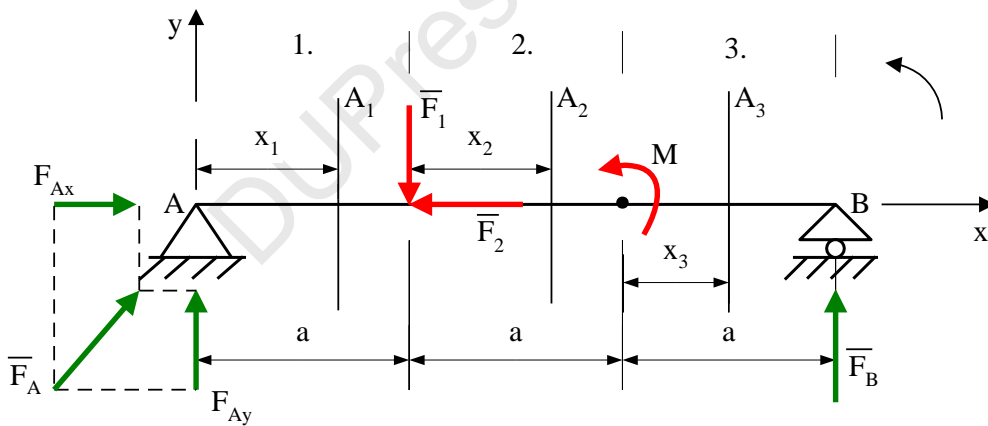
2. feladat:

- Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékat az x koordináta függvényében!
- Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $F_1=100$  [N],  $F_2=100$  [N],  $M=30$  [Nm],  $a=3$  [m].

Megoldás:



a)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_A + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } -F_2 + F_{Ax} = 0 \rightarrow F_{Ax} = F_2 = 100 \text{ [N]}$$

$$\text{II. } -F_1 + F_{Ay} + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = F_1 - F_B = 70 \text{ [N]}$$

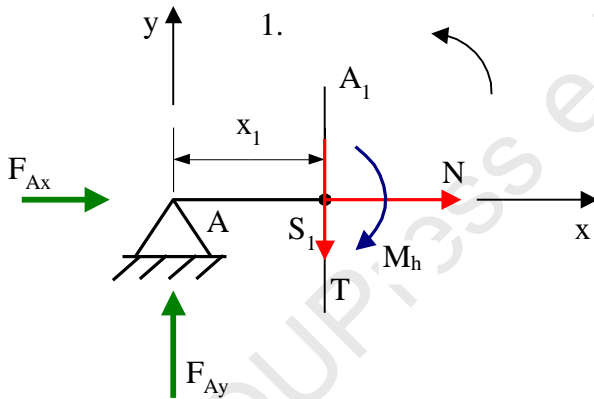
$$\text{III. } \sum_i M_i = -F_1 \cdot a + M + F_B \cdot 3a = 0 \rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot a - M}{3a} = 30 \text{ [N]}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = M + F_1 \cdot 2a - F_{Ay} \cdot 3a = 30 + 100 \cdot 6 - 70 \cdot 9 = 0$$

b)

Az  $\bar{F}_1$  és  $\bar{F}_2$  erők és az  $M$  nyomaték a tartót három szakaszra osztja. Metszük el az 1, 2 és 3 szakaszt  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  síkokkal tetszőleges  $x_1$ ,  $x_2$  és  $x_3$  távolságra a kezdőpontoktól. Jelölje  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  az  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  sík tartóval alkotott metszéspontjait. Az  $A_i$  sík az A-B tartót két részre osztja. Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az A- $S_1$  szakaszra, figyelembe véve a külső és belső erőket valamint nyomatékokat.

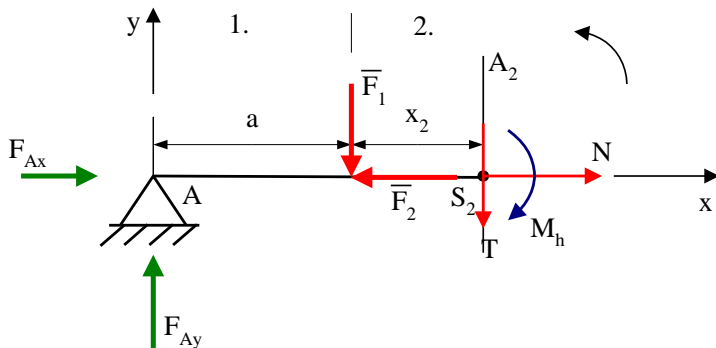


$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = -100 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} = 70 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S_1} = -F_{Ay} \cdot x_1 - M_h = 0 \rightarrow M_h = -F_{Ay} \cdot x_1 = -70 \cdot x_1 \text{ [Nm]}$$

Írjuk fel az egyensúly egyenleteket az A- $S_2$  szakaszra.



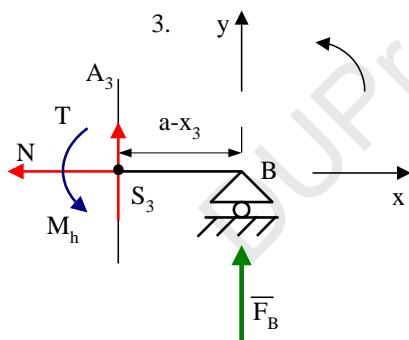
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} - F_2 + N = 0 \rightarrow N = F_2 - F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - F_1 - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - F_1 = -30 \text{ [N]}$$

$$\sum_i M_{S_2} = -F_{Ay} \cdot (a + x_2) + F_1 \cdot x_2 - M_b = 0 \rightarrow$$

$$M_b = 30 \cdot x_2 - 210 \text{ [Nm]}$$

Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket az S<sub>3</sub>-B szakaszra.

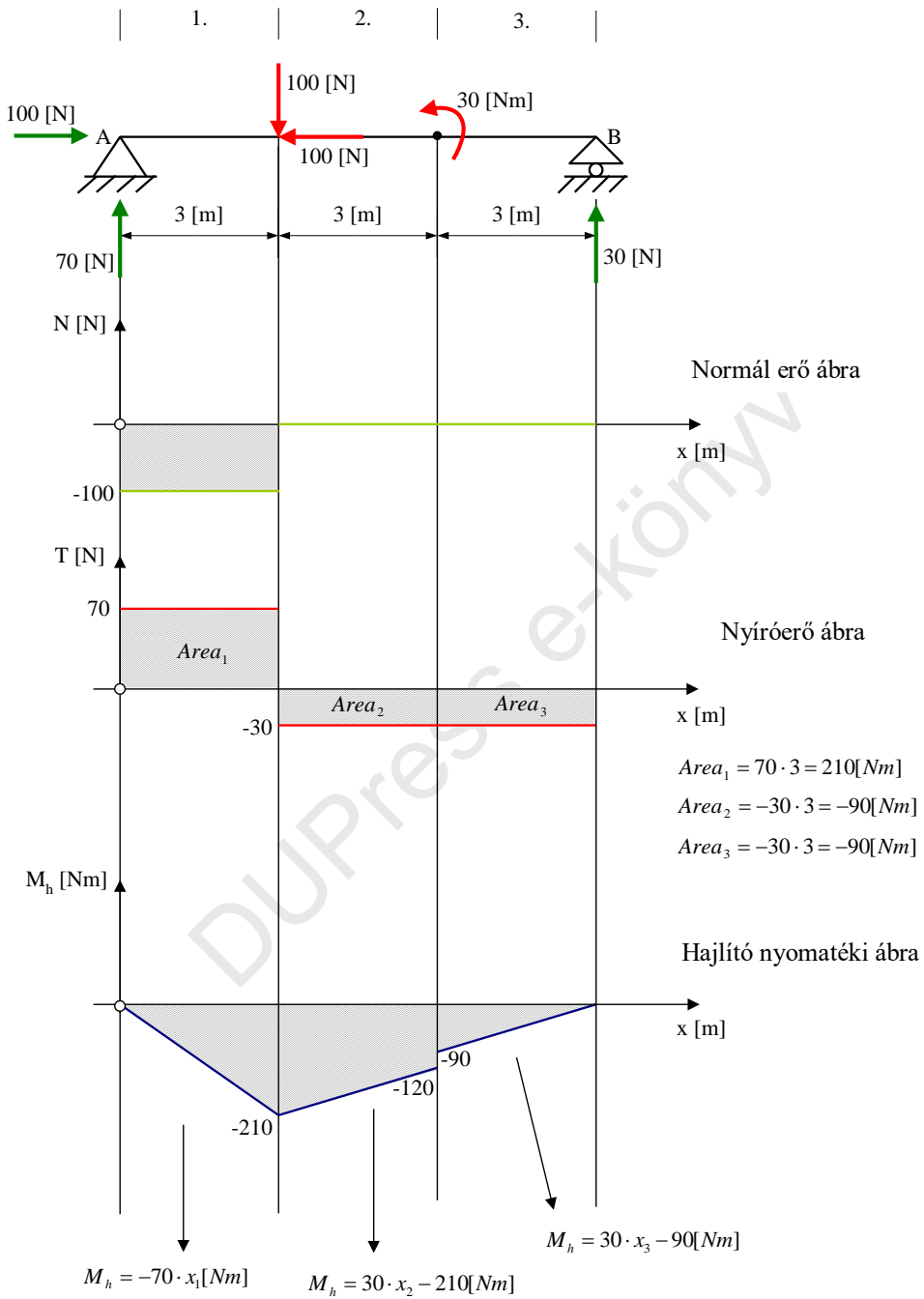


$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -30 \text{ [N]}$$

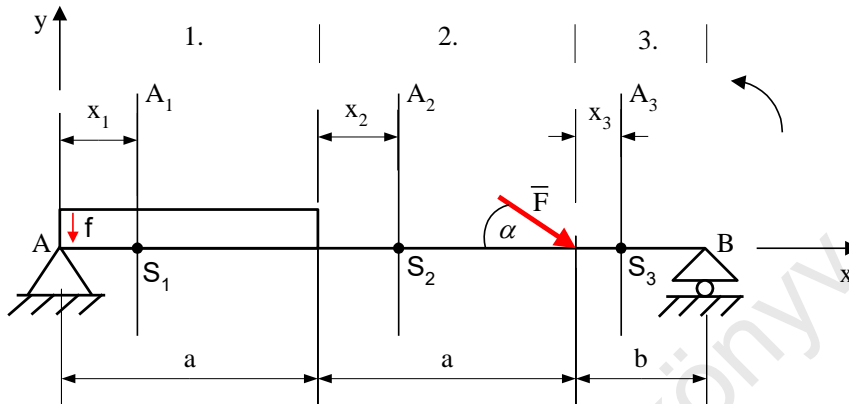
$$\sum_i M_{S_3} = M_b + F_B \cdot (a - x_3) = 0 \rightarrow M_b = 30 \cdot x_3 - 90 \text{ [Nm]}$$

c)



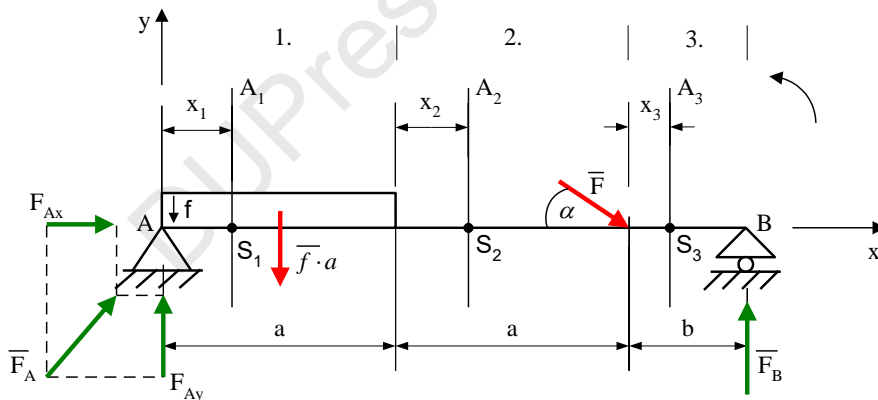
3. feladat:

- Számítsuk az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket!
- Számítsuk ki a normál erőt, nyíróerőt és hajlítónyomatékok az x koordináta függvényében!
- Rajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $a=2$  [m],  $b=1$  [m],  $\alpha=30^\circ$ ,  $f=5$  [kN/m],  $F=10$  [kN].

Megoldás:



a)

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F}_A + \bar{f} \cdot a + \bar{F} + \bar{F}_B = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \cdot a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \cdot \cos \alpha \\ -F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I. } F_{Ax} + F \cdot \cos \alpha = 0 \rightarrow F_{Ax} = -F \cdot \cos \alpha = -8,66 \text{ [kN]}$$

$$\text{II. } F_{Ay} - f \cdot a - F \cdot \sin \alpha + F_B = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{Ay} = f \cdot a + F \cdot \sin \alpha - F_B = 9 \text{ [kN]}$$

$$\text{III. } \sum_i M_i = -f \cdot a \cdot \frac{a}{2} - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + F_B \cdot (2a + b) = 0 \rightarrow$$

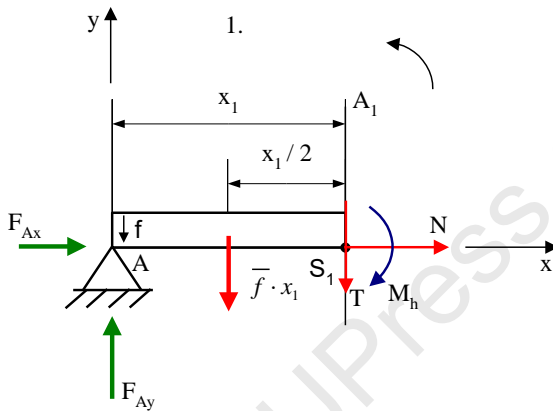
$$\rightarrow F_B = \frac{\frac{f \cdot a^2}{2} + F \cdot \sin \alpha \cdot 2a}{2a + b} = 6 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

$$\sum_i M_i = -F_{Ay} \cdot (2a + b) + f \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + a + b\right) + F \cdot \sin \alpha \cdot b = -9 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 10 \cdot$$

$$\sin 30^\circ \cdot 1 = 0$$

b)



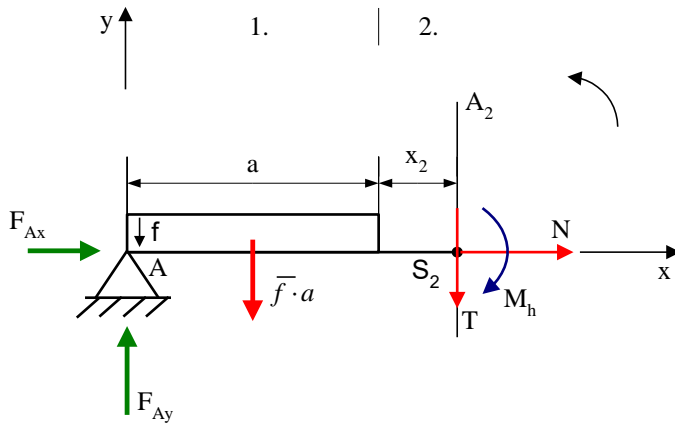
Egyensúlyi egyenletek az A-S<sub>1</sub> szakaszra:

$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 8,66 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - T - f \cdot x_1 = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - f \cdot x_1 = 9 - 5 \cdot x_1 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_i = -F_{Ay} \cdot x_1 + f \cdot x_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_h = 0 \rightarrow M_h = f \cdot \frac{x_1^2}{2} - F_{Ay} \cdot x_1$$

$$= \frac{5}{2} \cdot x_1^2 - 9 \cdot x_1 \text{ [kNm]}$$



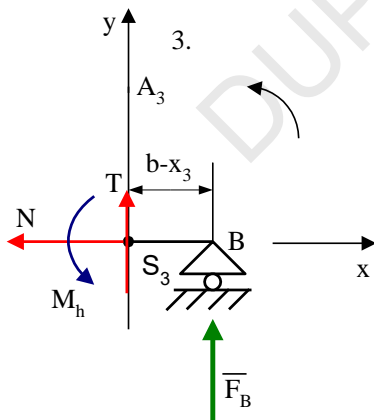
Egyensúlyi egyenletek az A-S<sub>2</sub> szakaszra:

$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} + N = 0 \rightarrow N = -F_{Ax} = 8,66 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - f \cdot a - T = 0 \rightarrow T = F_{Ay} - f \cdot a = -1 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_{S_2} = -F_{Ay} \cdot (a + x_2) + f \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + x_2\right) - M_h = 0$$

$$M_h = (f \cdot a - F_{Ay}) \cdot x_2 + f \cdot \frac{a^2}{2} - F_{Ay} \cdot a \rightarrow M_h = x_2 - 8 \text{ [kNm]}$$



Egyensúlyi egyenletek az  $S_3$ -B szakaszra:

$$\sum_i F_{ix} = -N = 0 \rightarrow N = 0 \text{ [kN]}$$

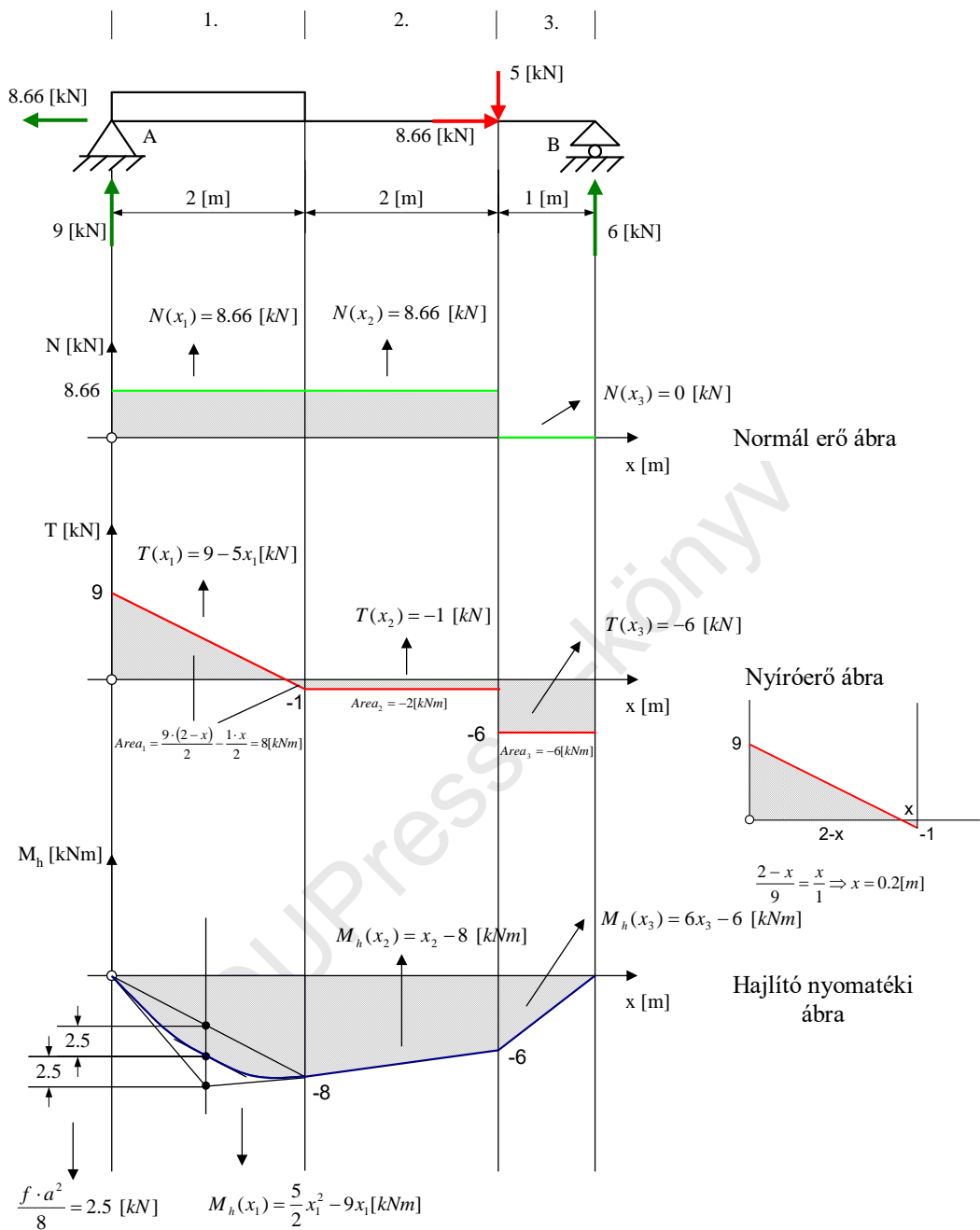
$$\sum_i F_{iy} = T + F_B = 0 \rightarrow T = -F_B = -6 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i M_{S_3} = M_h + F_B \cdot (b - x_3) = 0 \rightarrow M_h = F_B \cdot x_3 - F_B \cdot b \rightarrow$$

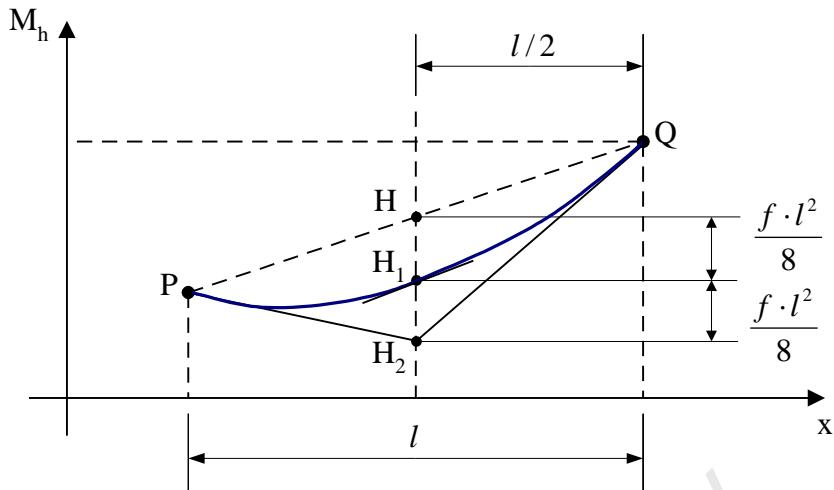
$$M_h = 6 \cdot x_3 - 6 \text{ [kNm]}$$

c)

DUPress e-könyv



Az alábbi ábra a parabolaív szerkesztési eljárását szemlélteti. Az ábrán  $f$  jelöli a megoszló terhelés intenzitását az adott szakaszon.



83. ábra. A parabolaív szerkesztése

A szerkesztés lépései:

- 1) Kössük össze az ábra adott szakaszhoz tartozó kezdő és végpontjait (P és Q) szaggatott vonallal.
- 2) Húzzunk függőleges egyenest a szakasz felezőpontján (H) keresztül szintén szaggatott vonallal.
- 3) Mérjük fel a  $\frac{f \cdot l^2}{8}$  kifejezés értékét a H pontból kétszer lefelé (H<sub>1</sub> és H<sub>2</sub> pontok)
- 4) Kössük össze a P és Q pontokat a H<sub>2</sub> ponttal. A P-H<sub>2</sub> és H<sub>2</sub>-Q szakasz a parabola érintőjét adja a P és Q pontokban.
- 5) Húzzunk a P-Q szakasszal párhuzamost a H<sub>1</sub> ponton keresztül, így megkapjuk a parabola érintőjét a H<sub>1</sub> pontban.
- 6) Rajzoljuk meg a parabolaívet figyelembe véve a P, H<sub>1</sub> és Q pontokban berajzolt érintőket.

### Egyszerű szabályok az igénybevételi ábrák megrajzolására

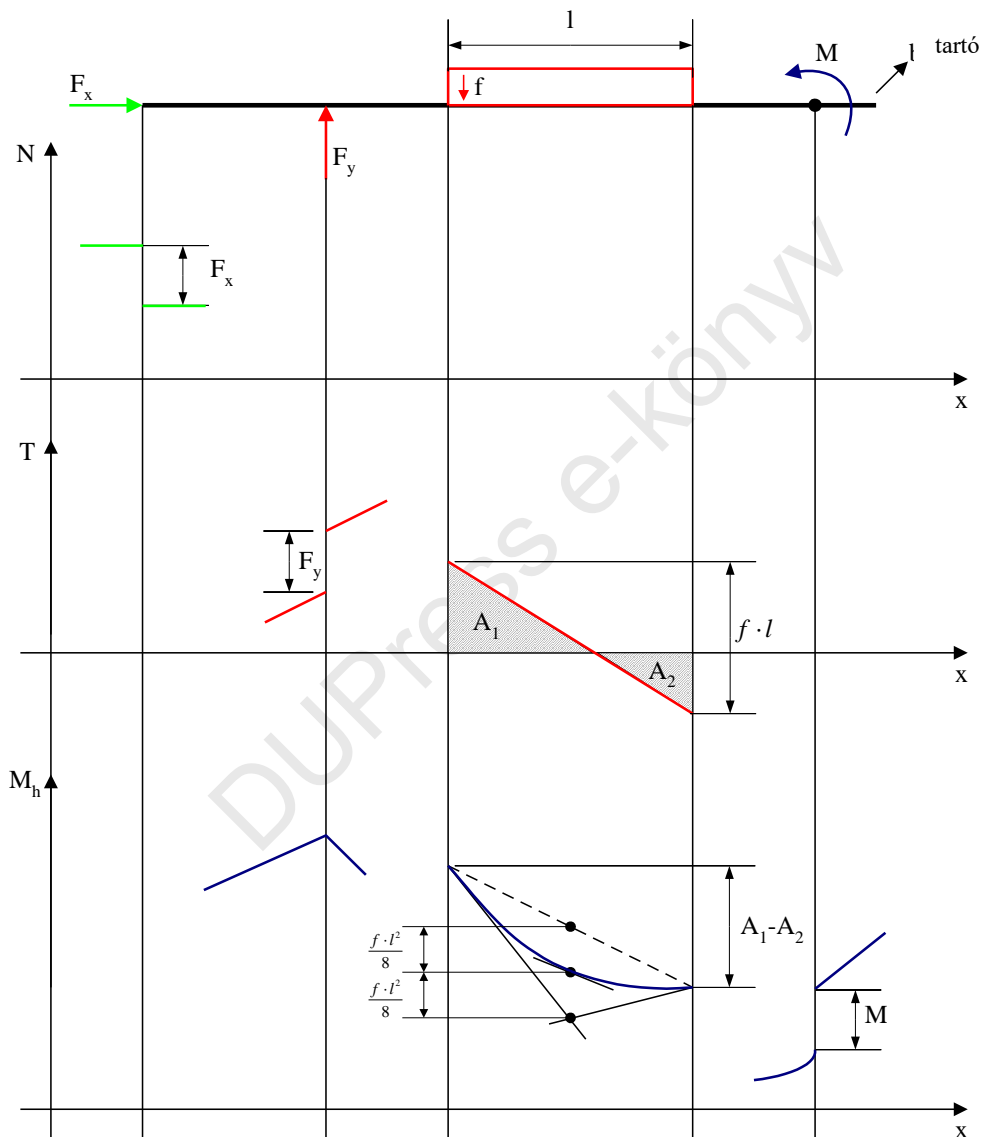
A 10. fejezetben megrajzolt igénybevételi ábrák részletes megfigyelésével kimondhatunk néhány egyszerű szabályt az ábrák rajzolásához. A következő szabályok alkalmazásával könnyen felrajzolhatjuk az ábrákat anélkül, hogy kiszámolnánk az igénybevételi függvényeket. Az alábbi három szabályt kell alkalmaznunk.

1. szabály:

Az ábrák rajzolásakor mindig zérus függvényértékből indulunk el.

2. szabály:

A különböző típusú erők és nyomatékok hatását az igénybevételi ábrákra az alábbi ábra szerint vesszük figyelembe:



84. ábra. A különböző típusú erők és nyomatékok hatása az igénybevételi ábrákra

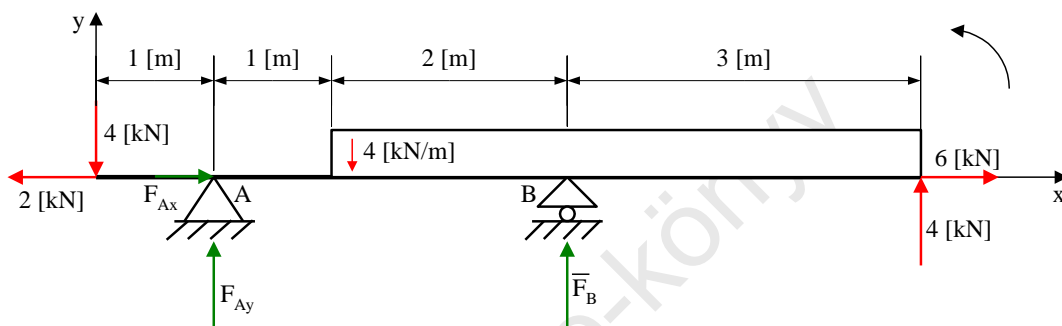
### 3. szabály:

A tartó végén minden esetben zérus függvényértékbe kell érkezünk.

### Feladatok

#### 1. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i F_{ix} = -2 + F_{Ax} + 6 = 0 \rightarrow F_{Ax} = -4[kN]$$

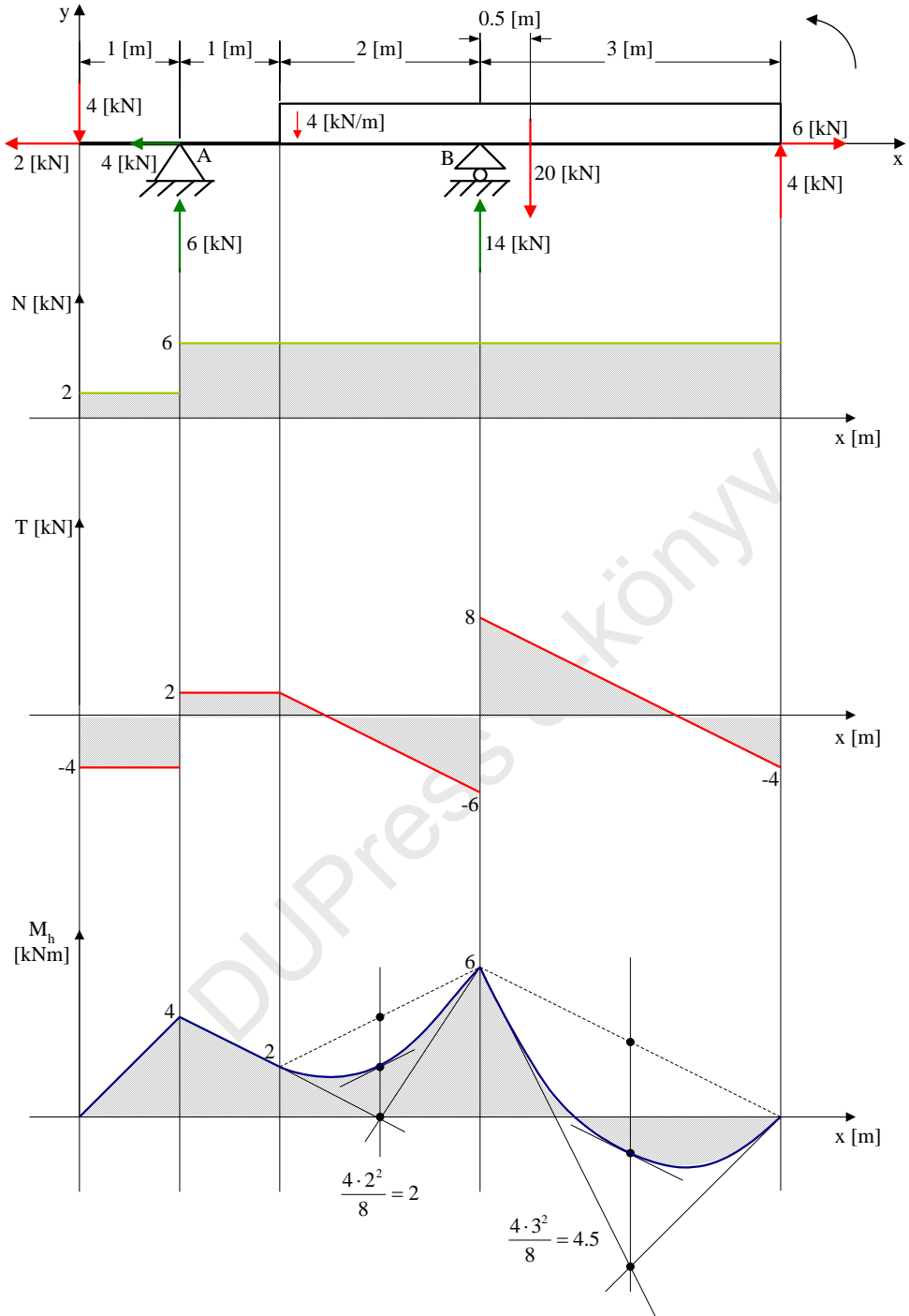
$$\sum_i F_{iy} = -4 + F_{Ay} - 4 \cdot 5 + F_B + 4 = 0 \rightarrow F_{Ay} = 6[kN]$$

$$\begin{aligned} \sum_i M_A &= 4 \cdot 1 - 4 \cdot (2 + 3) \cdot (1 + 2 + 0,5) + F_B \cdot 3 + 4 \cdot (1 + 2 + 3) = \\ &= 0 \rightarrow F_B = 14[kN] \end{aligned}$$

Ellenőrzés:

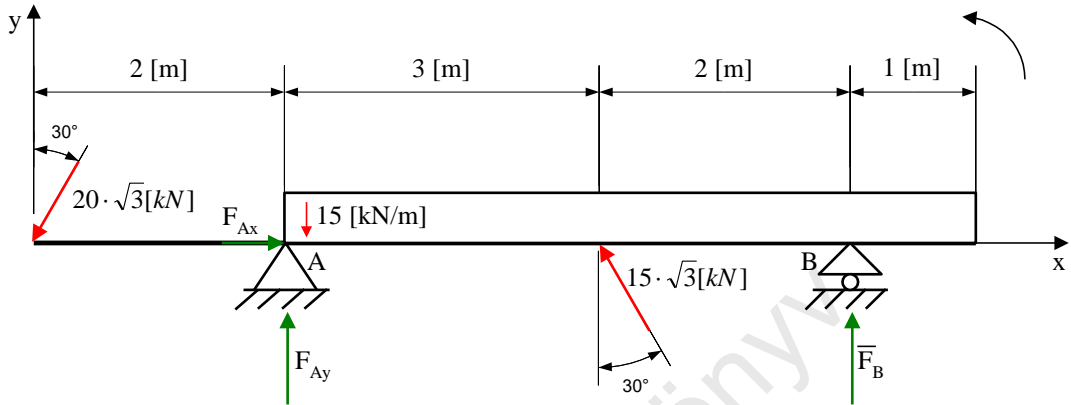
$$\sum_i M_B = 4 \cdot (1 + 1 + 2) - F_{Ay} \cdot (1 + 2) - 4 \cdot (2 + 3) \cdot 0,5 + 4 \cdot 3 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



2. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i F_{ix} = -20 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ + F_{Ax} - 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ = 0 \rightarrow F_{Ax} = 30,31 [kN]$$

$$\sum_i F_{iy} = -20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + F_{Ay} - 15 \cdot (3 + 2 + 1) + 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ + F_{By} = 0$$

$$\rightarrow F_{Ay} = 69 [kN]$$

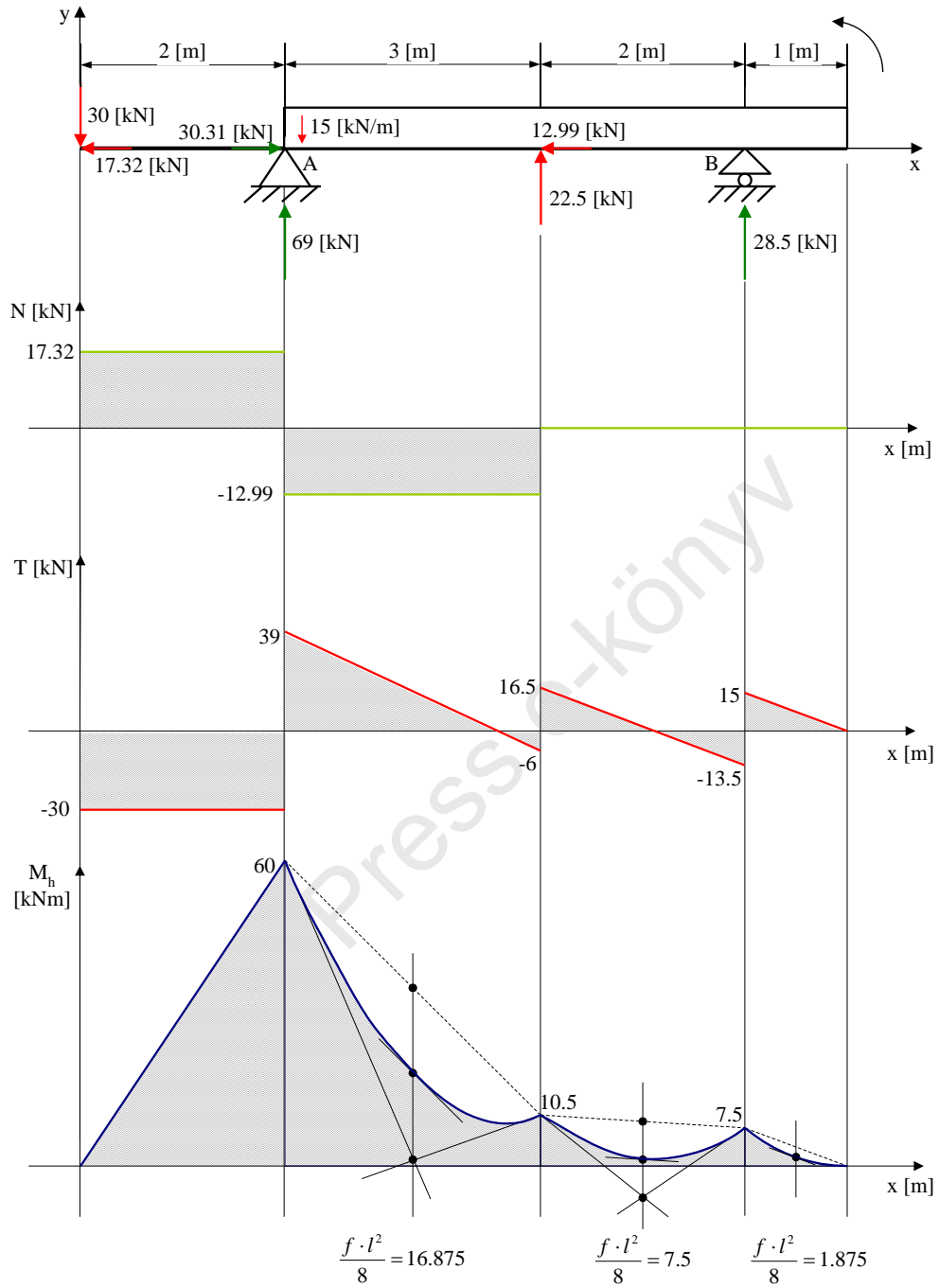
$$\sum_i M_A = 20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 + 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 3 + F_{By} \cdot 5 - 15 \cdot (3 + 2 + 1) \cdot 3 = 0$$

$$\rightarrow F_{By} = 28,5 [kN]$$

Ellenőrzés:

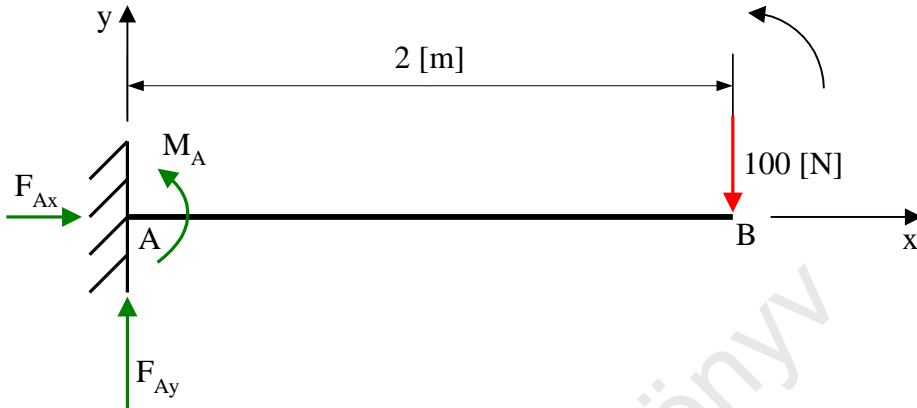
$$\sum_i M_B = -15 \cdot 1 \cdot 0,5 + 15 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 - 69 \cdot 5 + 20 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ \cdot 7 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



### 3. feladat:

Számítsuk ki az A pontban ébredő reakcióerőt és nyomatékot az ábrán látható befogott tartó esetén. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit.



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_A = M_A - 100 \cdot 2 = 0 \rightarrow M_A = 200 \text{ [Nm]}$$

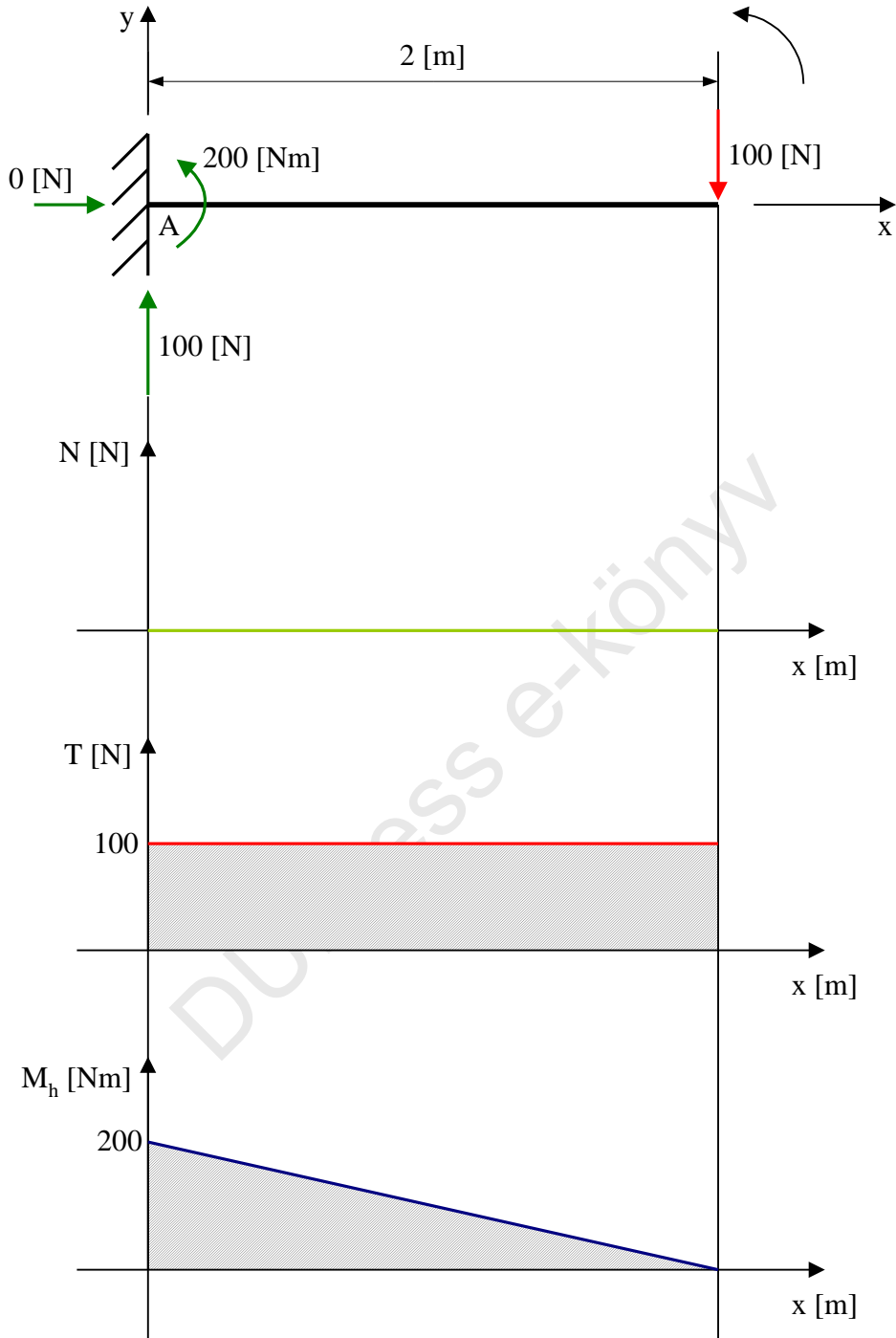
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [N]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 100 = 0 \rightarrow F_{Ay} = 100 \text{ [N]}$$

Ellenőrzés:

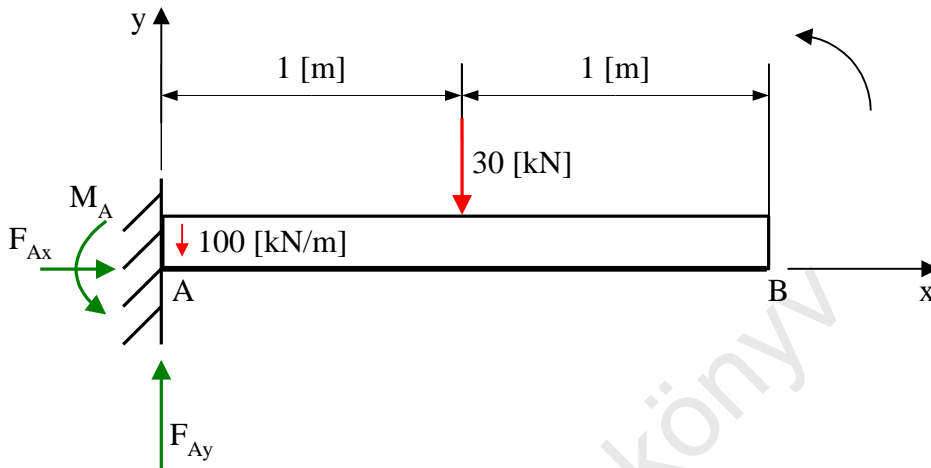
$$\sum_i M_B = -100 \cdot 2 + 200 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



#### 4. feladat:

Számítsuk ki az A pontban ébredő reakcióerőt és nyomatékot az ábrán látható befogott tartó esetén. Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit.



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = M_A - 30 \cdot 1 - 100 \cdot (1 + 1) \cdot 1 = 0 \rightarrow M_A = 230 \text{ [kNm]}$$

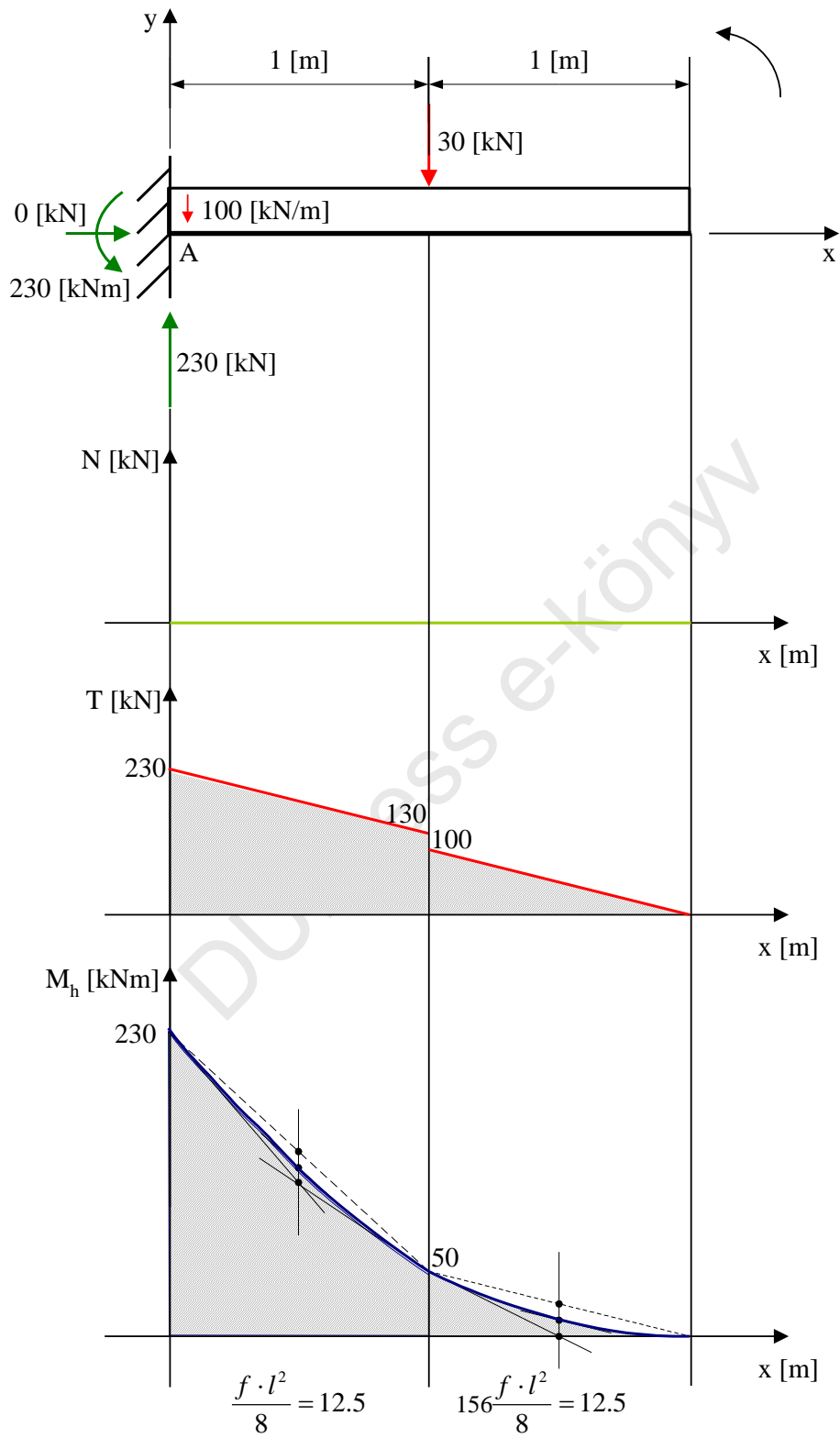
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 30 - 100 \cdot (1 + 1) = 0 \rightarrow F_{Ay} = 230 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

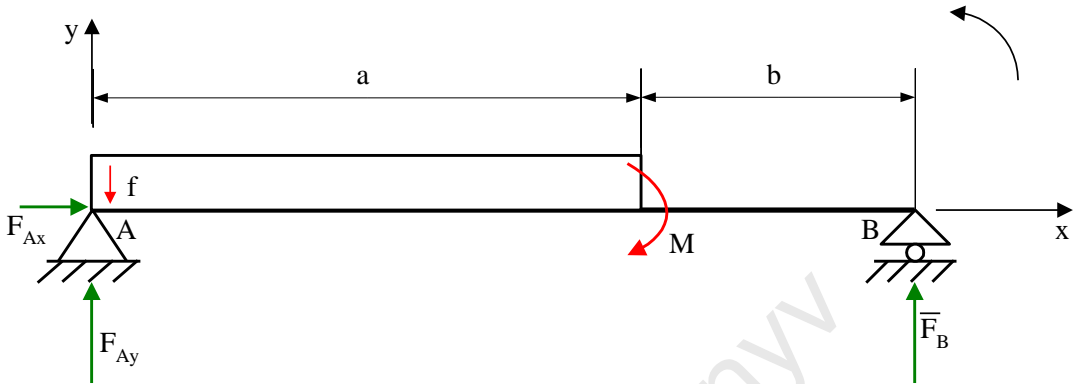
$$\sum_i M_i = 30 \cdot 1 + 100 \cdot 2 \cdot 1 - 230 \cdot 2 + 230 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



5. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható kéttámaszú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_B$  kényszererőket, majd rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Adatok:  $f=10$  [kN/m],  $a=0,4$  [m],  $b=0,2$  [m],  $M=2$  [kNm]

Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = -f \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M + F_B \cdot (a + b) = 0 \rightarrow F_B = 4,666 \text{ [kN]}$$

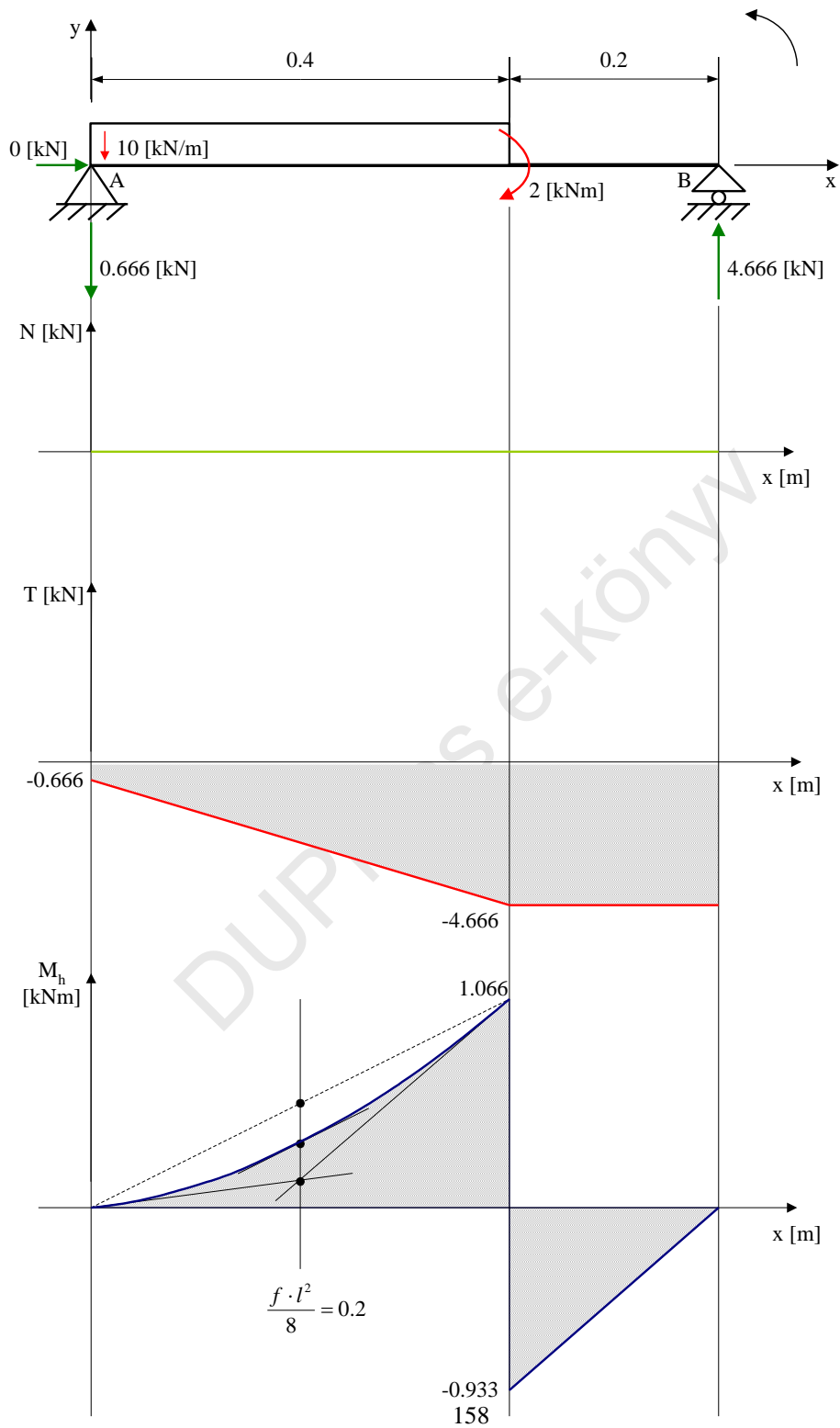
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} = 0 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - f \cdot a + F_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = -0,666 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

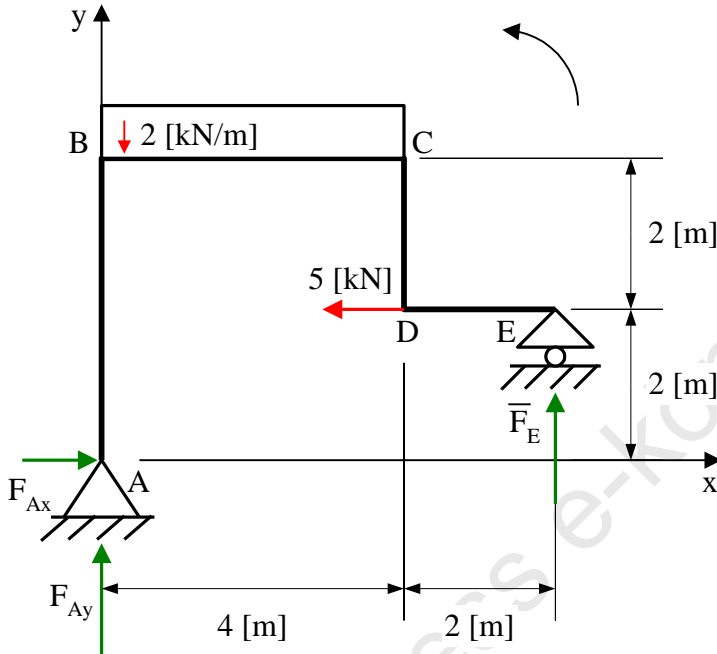
$$\sum_i M_i = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,666 \cdot 0,6 - 2 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



6. feladat:

Számítsuk ki az ábrán látható törtvonalú tartóra ható  $\bar{F}_A$  és  $\bar{F}_E$  kényszererőket!  
Rajzoljuk meg a tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Számítás:

$$\sum_i M_i = -2 \cdot 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + F_E \cdot 6 = 0 \rightarrow F_E = 1 \text{ [kN]}$$

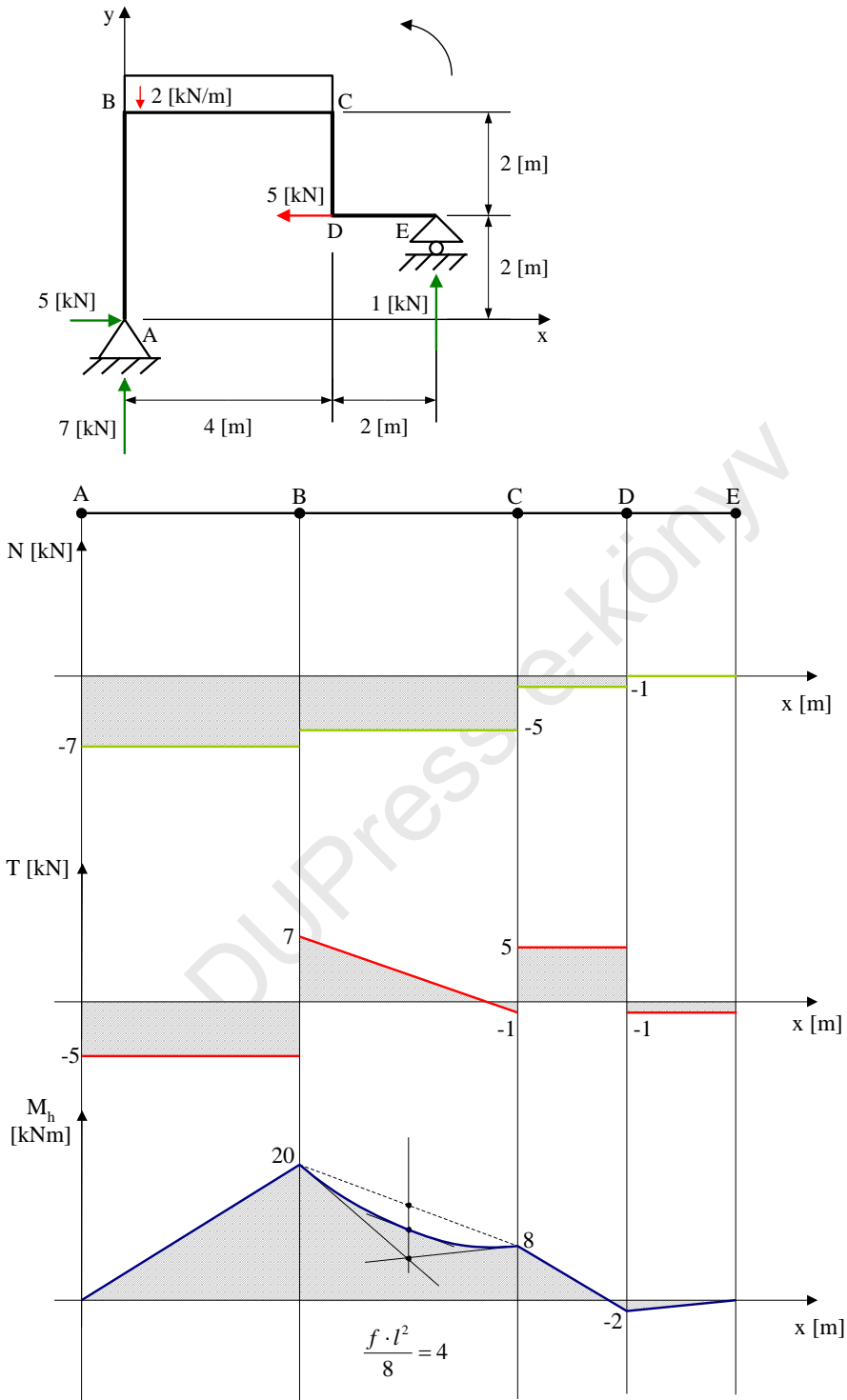
$$\sum_i F_{ix} = F_{Ax} - 5 = 0 \rightarrow F_{Ax} = 5 \text{ [kN]}$$

$$\sum_i F_{iy} = F_{Ay} - 2 \cdot 4 + F_E = 0 \rightarrow F_{Ay} = 7 \text{ [kN]}$$

Ellenőrzés:

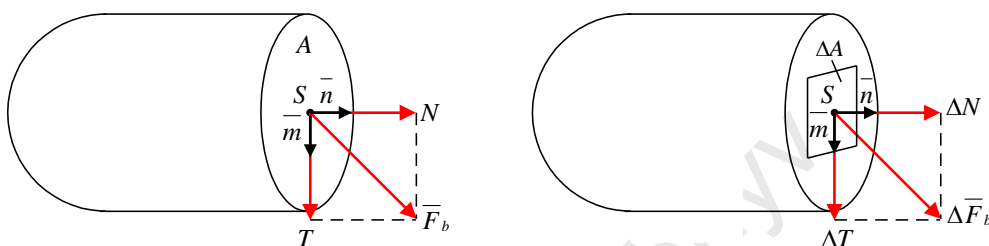
$$\sum_i M_i = 2 \cdot 4 \cdot 4 - 7 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 0$$

Igénybevételi ábrák:



## 11. Igénybevételek

A szilárdságtan, másnéven a rugalmas szilárd testek statikája, az egyensúlyban lévő szilárd testekben – a külső terhelések hatására – ébredő belső erőket és nyomatékokat és az azok által okozott alakváltozásokat vizsgálja. Mint a 10. fejezetben említettük, a test egy metszősíkján megoszló belső erőrendszer eredő vektorkettőjét ( $\bar{F}_b$ ;  $\bar{M}_{Sb}$ ) igénybevételnek nevezzük (80. ábra). A 85. ábra első részén berajzoltuk a metszősíkon megoszló belső erőrendszer eredő erejét ( $\bar{F}_b$ ) és annak síkra merőleges és síkkal párhuzamos komponenseit, azaz a normál (N) és a nyíróerőt (T).



85. ábra. A feszültségvektor értelmezése

Vegyünk fel az S pont körül egy  $\Delta A$  nagyságú felületet, majd annak méretét fokozatosan nullára csökkentve értelmezhetjük az  $\bar{n}$  normálisú felülethez tartozó **feszültség vektort** az S pontban:

$$\bar{\rho}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}_b}{\Delta A}$$

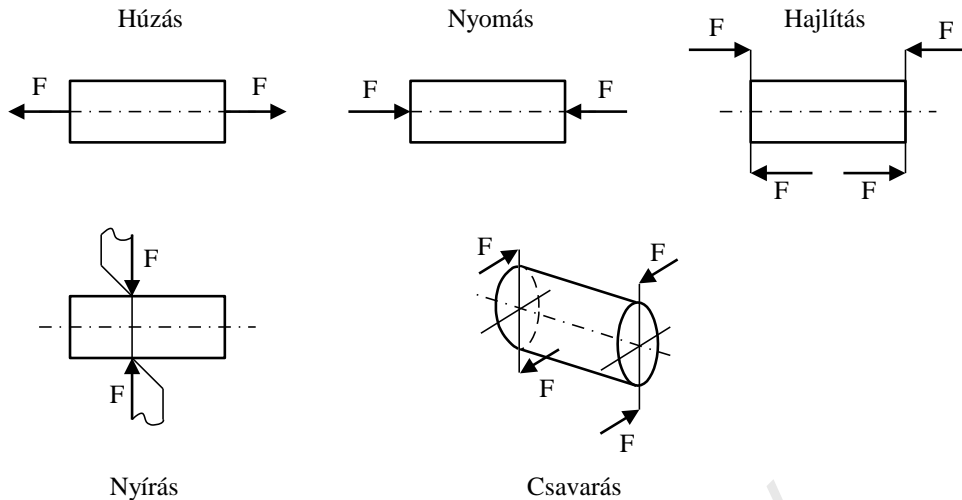
Tehát a feszültségvektor felírható a felületre merőleges ( $\bar{n}$ ) és a felülettel párhuzamos ( $\bar{m}$ ) egységvektorokkal:

$$\bar{\rho}_n = \sigma \cdot \bar{n} + \tau \cdot \bar{m} \qquad |\bar{m}| = |\bar{n}| = 1$$

A fenti összefüggésben  $\sigma_n$  és  $\tau_{nm}$  **normál** és **csúsztató (nyíró) feszültség**, amelyek kiszámolhatók az alábbiak szerint:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \qquad \tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A}$$

A külső terhelésének hatására, a létrejött igénybevételekkel párhuzamosan, a test alakváltozást szenved el. Az alakváltozás szerint az igénybevételek lehetnek **egyszerű igénybevételek**, mint **húzás**, **nyomás**, **hajlítás**, **nyírás** és **csavarás** (86. ábra),



86. ábra. Egyszerű igénybevételek

vagy **összetett igénybevételek**, mint például nyírás és hajlítás; hajlítás, húzás és nyírás; hajlítás és nyírás; hajlítás és csavarás.

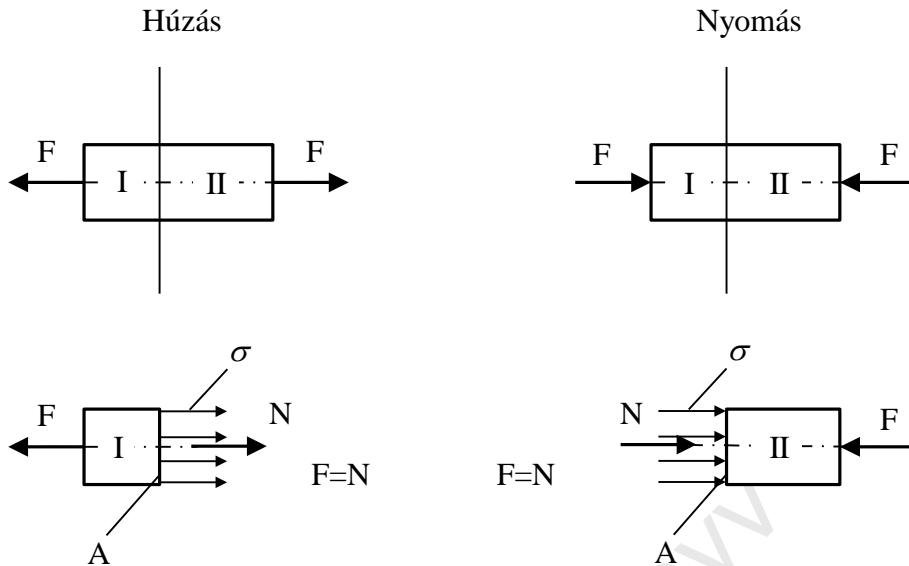
Normál feszültség ( $\sigma$ ) keletkezik, húzás, nyomás, hajlítás esetén, és csúsztató feszültség ( $\tau$ ) nyírás, csavarás esetén.

A szilárdságtannak alapvetően három feladata van. Egyik a **méretezés**, amikor a tervezés során egy adott (feltételezett) terheléshez határozzuk meg a szerkezet elemeinek a méreteit. A második az **ellenőrzés**, ekkor egy valamilyen szempontból (pl. rendelkezésre álló hely) megtervezett szerkezetet vizsgálunk meg, hogy az adott geometriai méretek, anyagminőség mellett kibírja-e a szerkezet a feltételezett terhelést. A harmadik a **terhelhetőség vizsgálat**, amikor egy már meglévő kész szerkezetnek szeretnénk meghatározni, hogy mekkora terhelést bír el, amivel gond nélkül üzemeltetni tudjuk.

### 11.1 Húzó és nyomó igénybevétel

Vegyünk egy egyenes, állandó keresztmetszetű, csavarodásmentes rudat. Az ilyen rudat prizmatikus rúdnak nevezzük. Metsszük el a fenti rudat a hossz tengelyére merőleges felületekkel. Ezen felületek súlypontjait összekötő görbét a rúd **súlyponti szálának** nevezzük.

**Húzó és nyomó igénybevételről** a prizmatikus rúd súlyponti szálában ható, két egyenlő nagyságú és hatásvonalú, de ellentétes értelmű erő esetén beszélünk.



87. ábra. Húzó és nyomó igénybevétel

Húzás és nyomás esetén a felület mentén egyenletesen megoszló feszültség jön létre. A feszültség előjele húzásnál pozitív, nyomásnál negatív.

A feszültség nagysága húzás és nyomás esetén:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \left[ \frac{N}{m^2} \right]; \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$$

### Valódi feszültségek diagramja, szakítóvizsgálat

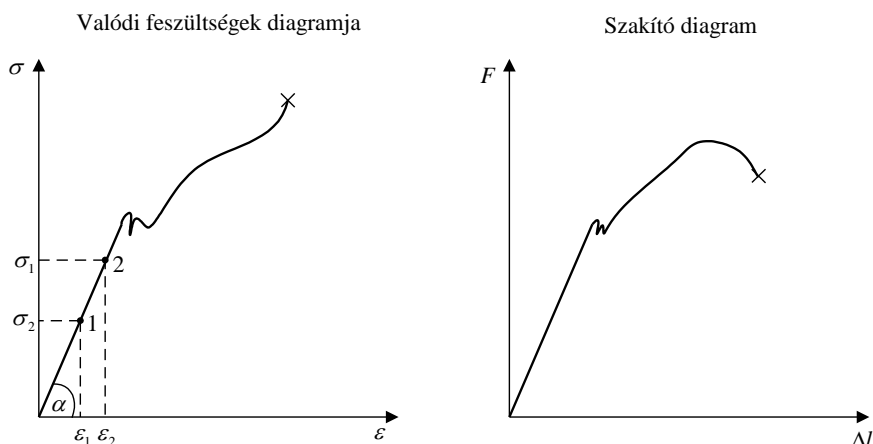
A következőkben bemutatjuk a **valódi feszültségek diagramját** és a **szakító diagramot**. Majd a diagramokat megvizsgálva levezetünk néhány fontos összefüggést.

A szakítóvizsgálat során egy prizmatikus rudat egy szakító gépbe fogunk, ami egyenletes sebességgel húzza a rudat. A szakító diagram a hosszváltozás ( $\Delta l$ ) függvényében adja meg a húzóerő nagyságát ( $F$ ), a valódi feszültségek diagramja pedig a fajlagos alakváltozás ( $\varepsilon$ ) függvényében a normál feszültséget ( $\sigma$ ).

A fajlagos alakváltozást az alábbi összefüggés adja meg:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

ahol  $\Delta l$  a hosszváltozás,  $l_0$  pedig a rúd kezdeti mérőhossza.



88. ábra. Lágycél szakítódiagramja és valódi feszültségek diagramja

A valódi feszültségek diagramja alapján, a lineáris szakaszra felírható az alábbi összefüggés:

$$\tan \alpha = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \dots = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{állandó} = E$$

ahol  $E$  a rugalmasság modulusz (amely anyagjellemző). Ez acél esetén:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \left[ \frac{N}{m^2} \right] = 200 \text{ [GPa]}.$$

A fenti összefüggésből  $\sigma = E \cdot \varepsilon$  a Hooke-törvény húzás és nyomás esetén.

### Méretezés húzó és nyomó igénybevételre:

Húzó és nyomó igénybevétel esetén méretezhetünk megengedett feszültségre:

$$\sigma_{\text{tényleges}} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{\text{megengedett}}$$

vagy megengedett alakváltozásra:

$$\Delta l_{\text{tényleges}} \leq \Delta l_{\text{megengedett}}$$

A hosszváltozás az alábbi összefüggésekkel számítható:

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} \cdot l_0, \quad \Delta l = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E}$$

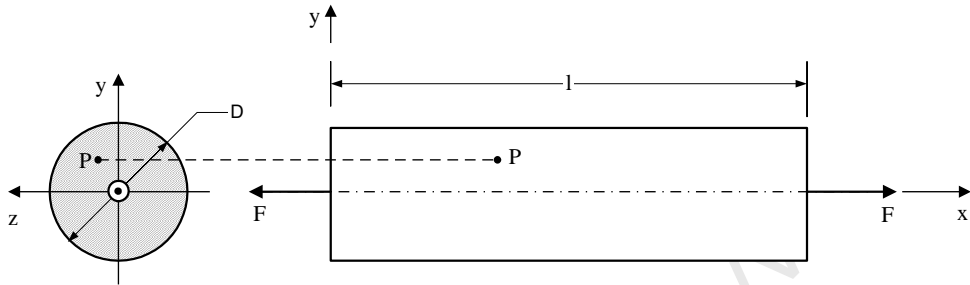
Húzás vagy nyomás hatására nem csak hosszirányú, hanem keresztirányú alakváltozás is bekövetkezik. A keresztirányú ( $\varepsilon_k$ ) és hosszirányú ( $\varepsilon_h$ ) relatív alakváltozás viszonyát a Poisson tényező ( $\nu$ ) adja meg. Ez egy mértékegység nélküli szám, tipikus értéke acélra  $\nu=0,33$ .

$$\nu = -\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_h}$$

## Feladatok

### 1. feladat

Egy kör keresztmetszetű prizmatikus rudat  $F$  erővel húzunk az alábbi ábra szerint. Számítsuk ki a rúd  $P$  pontjában ébredő feszültséget, valamint a rúd hossz és keresztirányú alakváltozását!



Adatok:  $l = 800$  [mm],  $D = 30$  [mm],  $E = 2,1 \cdot 10^5$  [MPa],  $\nu = 0,33$ ,  $F = 40$  [kN]

Megoldás:

A feszültség a  $P$  pontban:

$$\sigma_x(P) = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{D^2 \cdot \pi}{4}} = \frac{40000 \text{ [N]}}{706,86 \text{ [mm}^2\text{]}} = 56,59 \text{ [MPa]}$$

Fajlagos hosszirányú alakváltozás:  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{56,59}{2,1 \cdot 10^5} = 2,69 \cdot 10^{-4}$

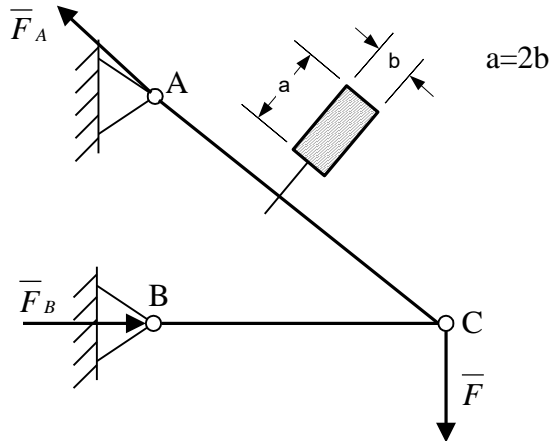
Hosszirányú alakváltozás:  $\Delta l = \varepsilon_x \cdot l = 0,21558$  [mm]

Fajlagos keresztirányú alakváltozás:  $\varepsilon_k = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -0,8089 \cdot 10^{-4}$

Keresztirányú alakváltozás:  $\Delta D = D \cdot \varepsilon_k = -2,668 \cdot 10^{-3}$  [mm]

### 2. feladat

Adott az ábrán látható  $F$  erővel terhelt szerkezet esetében a korábban tanultak szerint kiszámíthatjuk az  $F_A$  kényszererőt. Az  $F_A$  kényszererő ismeretében méretezzük az AC rudat, majd számítsuk ki a rúd megnyúlását ( $a = ?$   $b = ?$   $\Delta l_{AC} = ?$ )!



Adatok:

$$F_A = 13,39 \text{ [kN]}, \sigma_{meg} = 80 \text{ [MPa]}, l_0 = 5 \text{ [m]}, E = 2 \cdot 10^{11} \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

Megoldás:

$$1 \text{ [MPa]} = 1 \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

A megengedett feszültségből kiszámítjuk a minimálisan szükséges keresztmetszet területét:

$$\sigma_{meg} = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{meg}} = \frac{1,333 \cdot 10^4 \text{ [N]}}{8 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]} = 1,66 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

A keresztmetszetről visszszámíthatjuk a rúd minimálisan szükséges méreteit:

$$A = a \cdot b = 2b^2 = 1,66 \text{ [cm}^2\text{]} \rightarrow b^2 = 0,83 \text{ [cm}^2\text{]} \rightarrow b = 0,91 \text{ [cm]}$$

Ezt követően szabványos méreteket választunk:  $b=10 \text{ [mm]}$ ,  $a=20 \text{ [mm]}$

A választott méreteknek minden esetben nagyobbak kell lennie a számított minimális méreteknél.

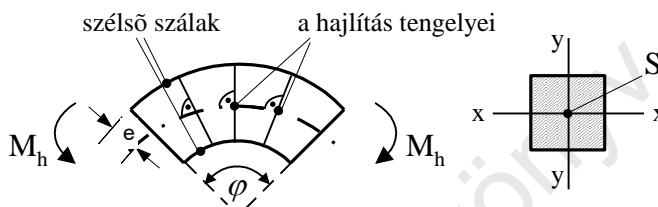
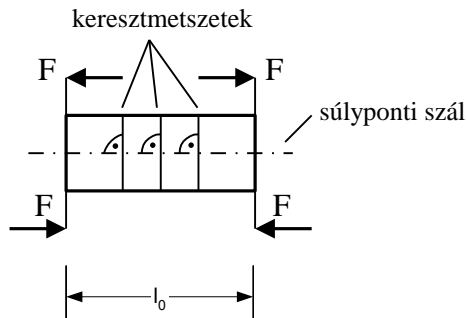
Az AC rúd megnyúlása:

$$\Delta l_{AC} = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E} = \frac{1,333 \cdot 10^4 \cdot 5}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} = 1,66 \text{ [mm]}$$

## 11.2 Hajlító igénybevétel

A hajlító igénybevétel létrejön két azonos nagyságú, de ellentétes értelmű forgatónyomatékkal jellemzett erőpár hatására, amelyek közül mindkettő a prizmatikus rúd súlyponti szálát tartalmazó síkba esik, amelyet a hajlítás síkjának is nevezünk (89. ábra).

A keresztmetszetek (km) a rúdnak a súlyponti szálra merőleges szelvényei.



89. ábra. Hajlító igénybevétel

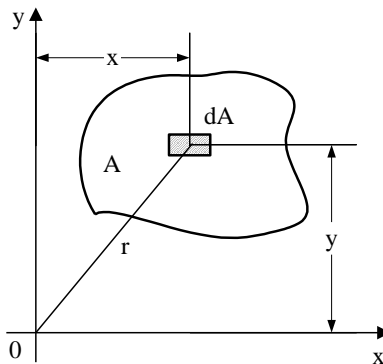
Bebizonyítható, hogy az ábrán bejelölt szögelfordulás értéke radiánban az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\varphi = \frac{M_h \cdot l_0}{I_x \cdot E}$$

ahol  $M_h$  a hajlító nyomaték,  $I_x$  az  $x$  tengelyre számított inercianyomaték.

A piciny  $dA$  felületelem  $x$  és  $y$  tengelyekre ( $I_x$  és  $I_y$ ) és  $O$  pontra ( $I_p$ ) vonatkozó inercianyomatékait az alábbi módon értelmezzük (90. ábra):

$$dI_x = y^2 \cdot dA, \quad dI_y = x^2 \cdot dA, \quad dI_p = r^2 \cdot dA$$

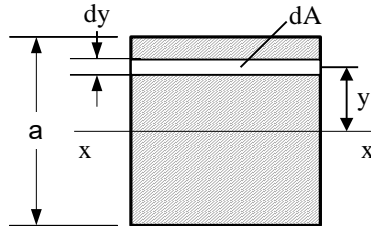


90. ábra. Az inercianyomatékok értelmezése

Az O pontra vonatkozó inercianyomaték esetén a P index a „poláris” elnevezésre utal. A teljes síkidomra vonatkozó inercianyomatékok:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA, \quad I_y = \int_A x^2 \cdot dA, \quad I_p = \int_A r^2 \cdot dA$$

Például a 91. ábrán szereplő négyzet keresztmetszetű rúd x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka az alábbi eljárással számítható:



91. ábra. Négyzet keresztmetszetű rúd x tengelyre vonatkozó inercianyomatéka

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \cdot dA = \int_A y^2 \cdot a \cdot dy = a \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 \cdot dy = a \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot y^3 \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = a \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{a}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot a^4 \end{aligned}$$

Más alakú keresztmetszetek inercianyomatékait a 4. táblázat tartalmazza.

#### A hajlítás következményei:

##### 1. alakváltozások

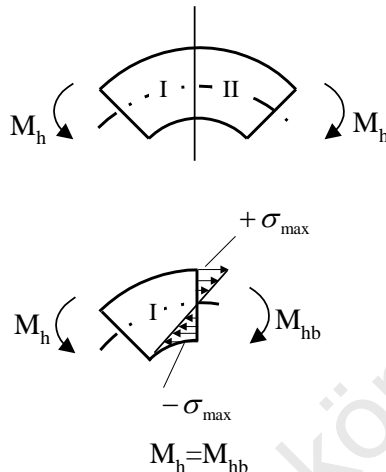
- a szálak változásai:
  - o valamennyi szál meggörbül
  - o a semleges szál fölött illetve alatt lévő szálak megnyúlnak, illetve rövidülnek, attól függően, hogy milyen irányú a hajlítás
- a keresztmetszetek elfordulnak eredeti párhuzamos helyzetükből a hajlítás tengelye(i) (ábra síkjára merőleges tengelyek) körül, de továbbra is merőlegesek maradna a súlyponti szálra.

#### Fogalmak:

- *Semleges szál:* a prizmatikus rúdnak az a szála, amelynek hossza nem változik a hajlítás hatására.
- *Semleges réteg:* a semleges szálak összessége.
- *Szélső szál(ak):* a hajlítás tengelyétől legtávolabb lévő szálak.
- *Szélső szál távolság (e):* a szélső szálaknak a hajlítás tengelyétől mért távolsága [m].
- *Hajlítás tengelye (x-x):*

- az a tengely, amely körül egy adott keresztmetszet elfordul, és amely a semleges rétegnek és az adott keresztmetszetnek a metszésvonala
- átmegy a keresztmetszet súlypontján és merőleges a hajlítás síkjára

## 2. feszültség



92. ábra. A hajlításnál ébredő feszültség

A feszültség hajlításnál a felület mentén  $y$  irányban lineárisan változik, az  $y$  változó (92. ábra) függvényében az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\sigma(y) = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot y$$

Ezt követően a hajlítónyomaték az alábbi integrállal számítható:

$$|M_{hb}| = \int_A y \cdot \overbrace{\sigma(y)}^{dF(y)} dA = \int_{-e}^e y \cdot \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot y dA = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot \int_{-e}^e y^2 dA = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot I_x$$

Tehát végül azt kaptuk, hogy:

$$|M_{hb}| = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot I_x \rightarrow |M_h| = \frac{\sigma_{max}}{e} \cdot I_x \quad (\text{Navier - képlet})$$

A fenti összefüggésből felírható:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_h|}{I_x} \cdot e$$

Vezessük be a keresztmetszeti tényezőt ( $K_x$ ), ami az alábbi alakban írható fel:

$$K_x = \frac{I_x}{e} \quad [m^3]$$

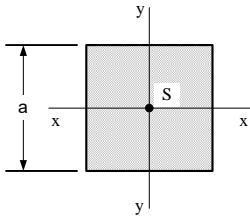
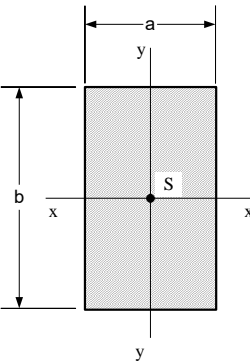
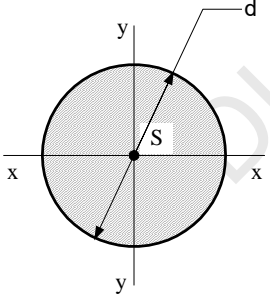
Ezt behelyettesítve az előző összefüggésbe, megkapjuk a hajlítás alapegyenletét:

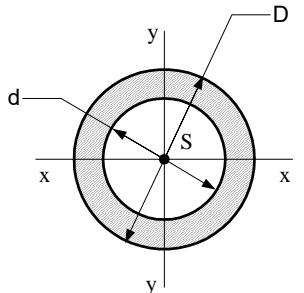
$$\sigma_{max} = \frac{|M_h|}{K_x}$$

## Szelvények tengelyre számított inercianyomatéka (I) és keresztmetszeti tényezője (K)

Most megadjuk néhány jellegzetes keresztmetszet inercianyomatékát és keresztmetszeti tényezőjét, ha x és y a hajlítás tengelye.

4. táblázat.

Keresztmetszet:	Inercianyomaték:	Keresztmetszeti tényező:
	$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$	$K_x = K_y = \frac{a^3}{6}$
	$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12} ; I_y = \frac{b \cdot a^3}{12}$	$K_x = \frac{a \cdot b^2}{6} ; K_y = \frac{b \cdot a^2}{6}$
	$I_x = I_y = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$	$K_x = K_y = \frac{d^3 \cdot \pi}{32}$

	$I_x = I_y = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{64}$	$K_x = K_y = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32 \cdot D}$
---	--	--

### Méretezés hajlító igénybevételre

Feszültségre történő méretezés esetén:

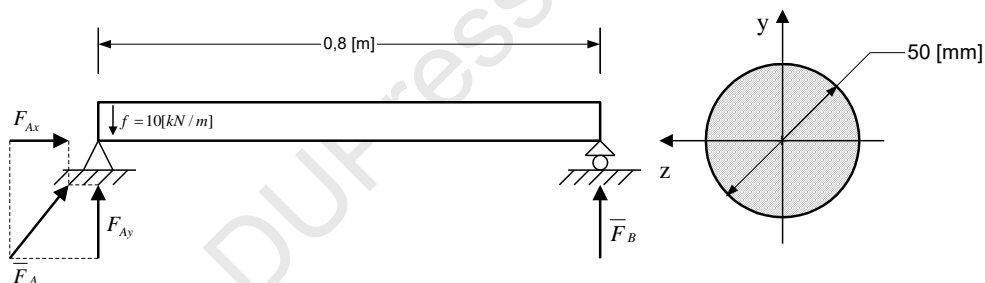
$$\sigma_{tényl} = \frac{M_h}{K_x} \leq \sigma_{meg}$$

Alakváltozásra történő méretezés esetén:

$$\varphi_{tényl} = \frac{M_h \cdot l_0}{I_x \cdot E} \leq \varphi_{meg}$$

### Feladat

Az ábrán látható 50 [mm] átmérőjű kör keresztmetszetű kéttámaszú tartót megoszló terheléssel terheljük. Ellenőrizze, hogy a tartó kibírja-e a terhelést, ha a  $\sigma_{meg} = 10^8 \left[ \frac{N}{m^2} \right]$ ?



### Megoldás:

A korábban tanult számítási eljárást alkalmazva a reakcióerőkre az alábbi értékeket kapjuk:

$$F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ay} = 4[kN]$$

$$F_B = 4[kN]$$

Ezt követően a korábban tanultak szerint felrajzoljuk a tartó igénybevételi ábráit, és leolvassuk a hajlítónyomaték maximális értékét, amelyet ebben az esetben a tartó közepén vesz fel:

$$M_{hmax} = -0,8[kNm] = -800[Nm]$$

A keresztmetszet adatai alapján számítsuk ki a keresztmetszeti tényezőt:

$$K_z = \frac{d^3\pi}{32} = 12,27 \cdot 10^{-6} [\text{m}^3]$$

Majd a fentiek ismeretében számítsuk ki a tényleges maximális feszültséget, és hasonlítsuk össze a megengedett feszültséggel:

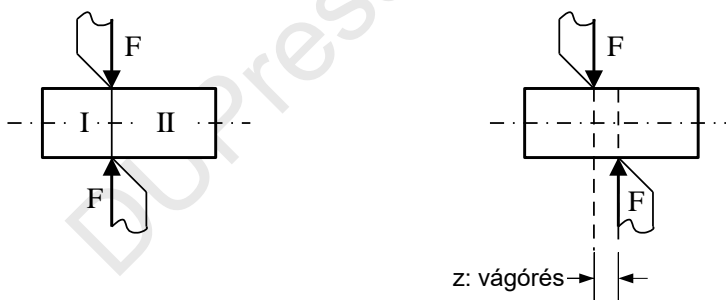
$$\sigma_{\text{tényl}} = \frac{800}{12,27 \cdot 10^{-6}} = 6,5 \cdot 10^7 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] < \sigma_{\text{meg}}, \text{ tehát a tartó megfelel az adott terhelésnek.}$$

### 11.3 Nyíró igénybevétel

A nyíró igénybevétel létrejön a prizmatikus rúd súlyponti szálára merőlegesen ható azonos nagyságú erők hatására, melyek azonos irányúak, de ellentétes értelműek. Tiszta nyírásról akkor beszélünk, amikor a két erő hatásvonalja közös, de a legtöbb valós esetben (például egy olló két vágóéle között) mindig van valamekkora vágórés, így az erőknek erőkarja, és hajlító nyomatéka is van. Ezt az esetet hajlítással párosult nyírásnak nevezzük. Ha a vágórés túl nagy, akkor már a hajlításnak van nagyobb szerepe, a nyírás csak járulékos igénybevétel.

Tiszta nyírás

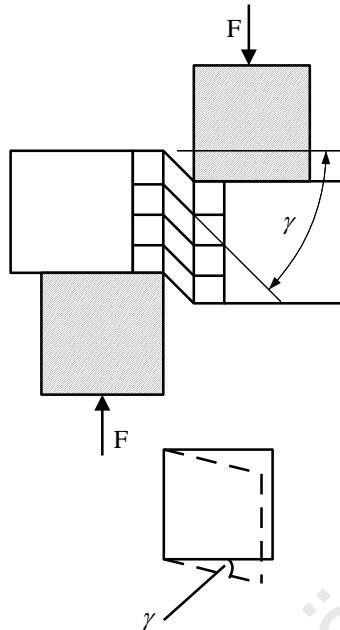
Hajlítással párosult nyírás



93. ábra. A nyírás esetei

#### A nyírás következményei:

1. Alakváltozás



94. ábra. Alakváltozás nyírásnál

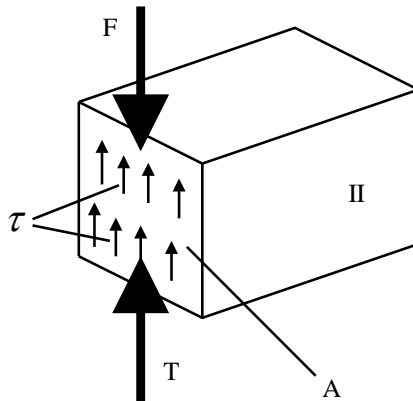
Az ábrán jelzett gamma szög az alábbi összefüggéssel számítható:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \rightarrow \tau = G \cdot \gamma$$

ez a Hooke-törvény nyírás esetén, ahol  $G$  a csúszási rugalmassági modulusz,  $G = 0,4 \cdot E$ . Acélra:  $G = 8 \cdot 10^{10} \left[ \frac{N}{m^2} \right]$

## 2. Feszültség

- Tiszta nyírásnál:



95. ábra. Feszültség tiszta nyírásnál

A feszültség kiszámítása tiszta nyírásnál:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{F}{A}$$

ahol A a nyírt keresztmetszet területe, T a nyíróerő nagysága,  $F = T$ .

A keresztmetszet síkjában egyenletesen eloszló a feszültség.

- Hajlítással párosult nyírásnál a maximális feszültség:

$$\tau_{max} = \tau = C \cdot \frac{F}{A}$$

ahol C az alaktényező, keresztmetszetre jellemző érték,  $C > 1$ . Az alaktényező értéke néhány keresztmetszet esetében:

$$C_{kör} = \frac{4}{3} \quad C_{négyzet} = \frac{3}{2} \quad C_{körgyűrű} = 2$$

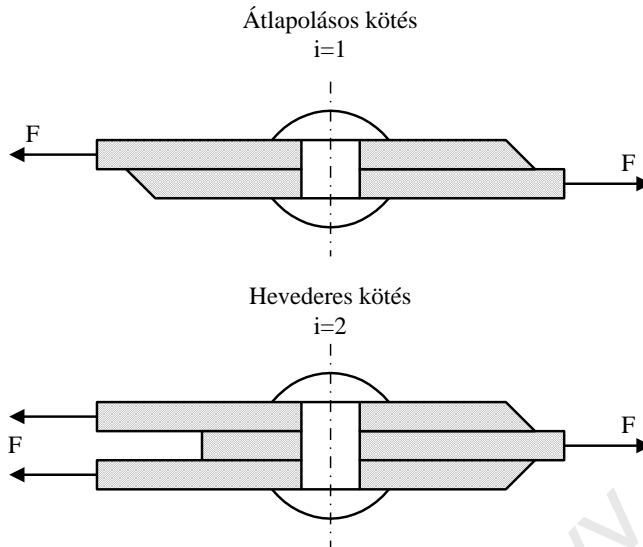
### **Példa tiszta nyírásra történő méretezésre**

Szegecs (szegecskötés) méretezése.

Alapelv:

$$\tau_{tényl} = \frac{F}{A_{\bar{o}}} \leq \tau_{meg}$$

ahol  $A_{\bar{o}}$  az összes nyírt szegecskeresztmetszet,  $A_{\bar{o}} = i \cdot z \cdot A_1$ , ahol  $A_1 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$  az egy nyírt keresztmetszet, i az egy szegecs nyírt keresztmetszeteinek száma, z pedig a szegecs száma.



96. ábra. Egy szegecs nyírt keresztmetszeteinek száma

Tehát a szegecsméretezés alapegyenlete:

$$\tau_{tényl} = \frac{F}{i \cdot z \cdot A_1} \leq \tau_{meg}$$

### Feladat:

Milyen átmérőjű szegecs szükséges az alábbi adatokkal rendezkező szegecskötéshez?

Adatok:

$$i=1 \quad z=1 \quad F=47 \text{ [kN]} \quad \tau_{meg}=90 \text{ [MPa]}$$

Megoldás:

A szegecsméretezés alapegyenletéből számítsuk ki egy szegecs minimális keresztmetszetét:

$$A_1 = \frac{F}{i \cdot z \cdot \tau_{meg}}$$

$$A_1 = \frac{47000 \text{ N}}{1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 5,22 \cdot 10^{-4} [\text{m}^2]$$

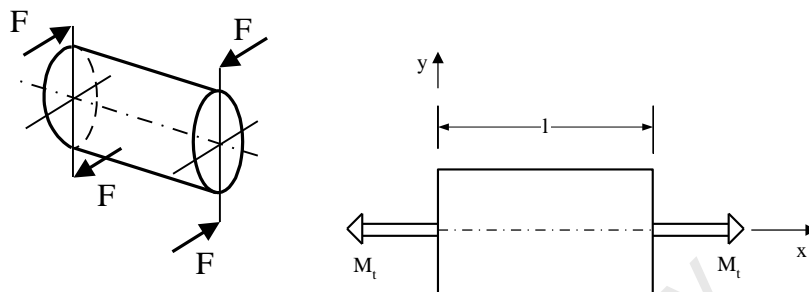
Majd ebből számítsuk ki a szükséges szegecs átmérőt, aztán válasszunk szabványos méretet.

$$A_1 = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = 5,22 [\text{cm}^2] \rightarrow d = 2,57 \text{ cm} \rightarrow d_{szabv} = 26 [\text{mm}]$$

A szabványos méretnek minden esetben nagyobbak kell lennie a számítottnál.

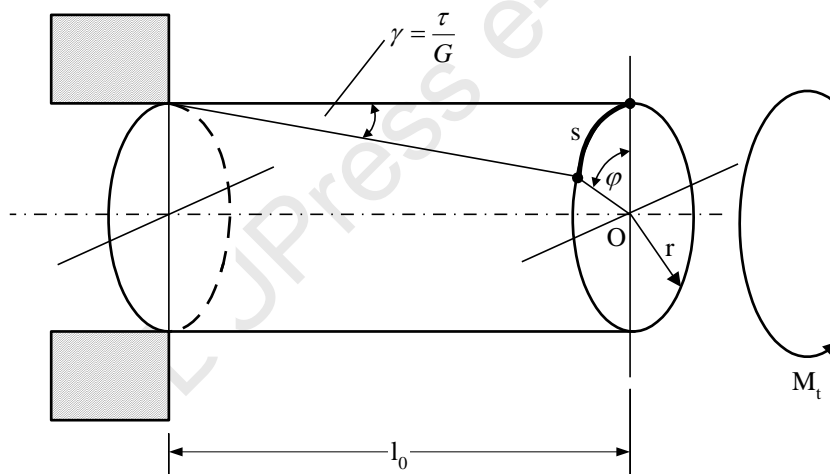
## 11.4 Csavaró igénybevétel

A csavaró igénybevétel létrejön a prizmatikus rúd súlyponti szálára merőleges, különböző síkban ható, azonos nagyságú, de ellentétes forgatónyomatékkal jellemzett erőpárok hatására.



97. ábra. Csavaró igénybevétel

**A csavarás következményei:**



98. ábra. Szögelfordulások csavarásnál

Az ábrán a két szögelfordulás az alábbi összefüggésekkel írható fel:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad \varphi = \frac{M_t \cdot l_0}{I_p \cdot G}$$

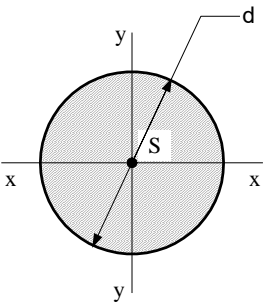
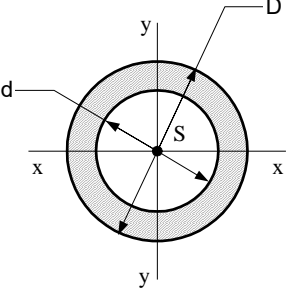
ahol  $I_p$  a poláris inercianyomaték (pontra számított). Kör és körgyűrű keresztmetszetnél:

$$I_p = 2I_x = 2I_y$$

$$K_p = 2K_x = 2K_y$$

ahol  $K_p$  a poláris keresztmetszeti tényező.

$G$  a csúszási rugalmassági modulusz,  $G = 0,4 \cdot E$ . Acélra:  $G = 8 \cdot 10^{10} \left[ \frac{N}{m^2} \right]$

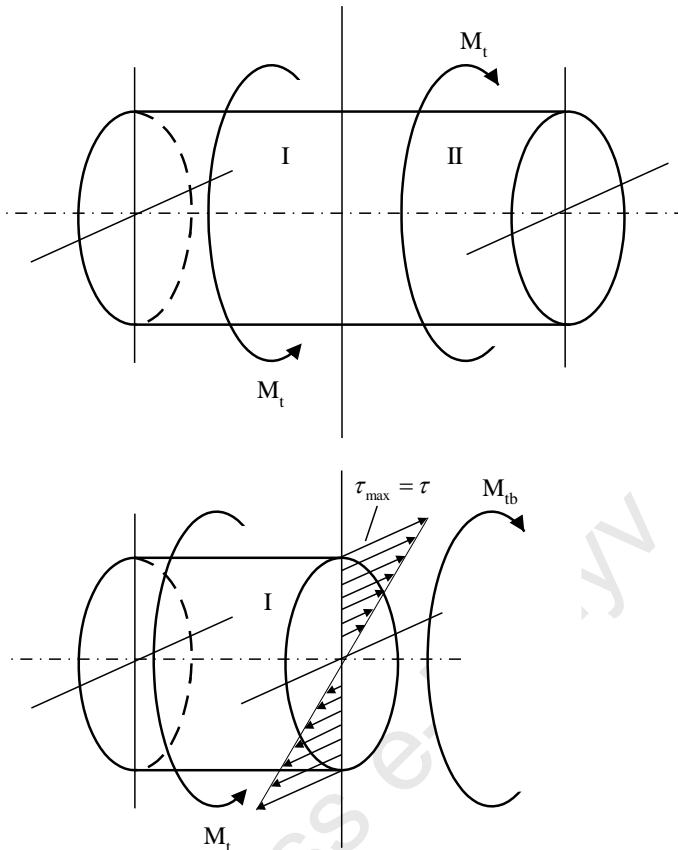
Keresztmetszet:	Poláris inercianyomaték:	Poláris keresztmetszeti tényező:
	$I_P = \frac{d^4 \cdot \pi}{32}$	$K_P = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$
	$I_P = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{32}$	$K_P = \frac{(D^4 - d^4) \cdot \pi}{16 \cdot D}$

**a) Alakváltozások:**

A keresztmetszetek elfordulnak a középpontjuk körül. A szálak hosszanti szögelfordulása  $\gamma$ . Az  $s$  ívhossz az alábbi módokon írható fel (95. ábra):

$$\left. \begin{array}{l} s = r \cdot \varphi \\ s = l_0 \cdot \gamma \end{array} \right\} \rightarrow l_0 \cdot \gamma = r \cdot \varphi$$

**b) Feszültség:**



99. ábra. Feszültségeloszlás csavarásnál

A feszültségeloszlás csavarásnál a keresztmetszet síkjában lineárisan változó. A csúsztató(nyíró) feszültség kiszámítása csavarás esetén:

$$\tau = \frac{M_t}{K_p}$$

### Méretezés csavaró igénybevételre:

*Feszültségre történő méretezés:*

$$\tau_{tényl} = \frac{M_t}{K_p} \leq \tau_{meg}$$

Ezt általában rövid közlő tengelyeknél alkalmazzák.

*Alakváltozásra történő méretezés:*

$$\tau_{tényl} = \frac{M_t \cdot l_0}{I_p \cdot G} \leq \tau_{meg}$$

Ezt általában hosszú közlő tengelyeknél alkalmazzák.

**Feladat:**

Rövid közlő tengelyt kell méretezni. Milyen átmérőjű ( $d=?$ ) tengely szükséges az alábbi adatok ismeretében?

*Adatok:*

Teljesítmény:  $P = 5[kW]$

Fordulatszám:  $n = 420[1/min] = 7[1/s]$

$\tau_{meg} = 40[MPa] = 4 \cdot 10^7 \left[ \frac{N}{m^2} \right]$

*Megoldás:*

$$\tau_{tényl} = \frac{M_t}{K_p} \leq \tau_{meg}$$

Számítsuk ki a minimális poláris keresztmetszeti tényezőt, és a csavaró nyomatékot az adatok ismeretében:

$$K_p = \frac{M_t}{\tau_{meg}} = \frac{113,68}{4 \cdot 10^7} = 2,842 \cdot 10^{-6}[m^3]$$

$$M_t = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot n} = \frac{5000}{2 \cdot \pi \cdot 7} = 113,68[Nm]$$

Számítsuk ki a minimális tengelyátmérőt, majd válasszunk szabványosat:

$$K_p = 2K_x = 2K_y = 2 \cdot \frac{d^3 \cdot \pi}{32} = \frac{d^3 \cdot \pi}{16}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot K_p}{\pi}} = 0,02437[m]$$

$$d_{szabv} = 25[mm]$$

## 11.5 Összetett igénybevételek

Egyidejűleg kettő vagy több egyszerű igénybevétel lép fel az ezekben megfelelő feszültségekkel.

A keletkező feszültségek szempontjából az összetett igénybevételeknek három alapesete van:

- Főigénybevétel + járulékos igénybevétel

(Pl.: tartók igénybevételei, mint a hajlítás + nyírás, hajlítással párosult nyírás)

- Egyirányú összetett igénybevételek

(Pl.: húzás (nyomás) + hajlítás, ferde hajlítás)

- Többirányú összetett igénybevételek

(Pl.: húzás (nyomás) + csavarás, hajlítás + csavarás)

Az összetett igénybevételek részletes bemutatásával a jegyzetben nem foglalkozunk.

## Irodalomjegyzék

- 1) M. Csizmadia Béla, Nándori Ernő (2002): Mechanika mérnököknek - Statika, Nemzeti Tankönyvkiadó 2002, ISBN-9789631928501
- 2) Kassai L., Somorjai T. (1989): Mechanika I, Tankönyvkiadó, Budapest
- 3) Dr. Szíki Gusztáv Áron, Dr. Mankovits Tamás, Hajdu Sándor, Deák Krisztián, Huri Dávid: *Műszaki mechanika példatár* (2015) Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Debrecen (2390) ISBN: 978-963-473-909-8, TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013  
([http://old.eng.unideb.hu/gepesz/wpcontent/uploads/2016/03/Muszaki\\_mechanika\\_peldatar.pdf](http://old.eng.unideb.hu/gepesz/wpcontent/uploads/2016/03/Muszaki_mechanika_peldatar.pdf))
- 4) Russel C. Hibbeler (2006): Engineering Mechanics – Statics and Dynamics, Prentice Hall, 2006. ISBN-13 9780132215091
- 5) Lakshmana C. Rao, J. Lakshminarasimhan, Raju Sethuraman, Srinivasan M. Sivakumar (2004): Engineering Mechanics: Statics and Dynamics, PHI Learning Pvt. Ltd., ISBN 8120321898, 9788120321892
- 6) Lawrence E. Goodman, Susan Goodman, William H. Warner (2001): Statics
- 7) Courier Dover Publications, ISBN 0486420051, 9780486420059
- 8) Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., (1987): University of Connecticut, Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics
- 9) Nagy-Kondor, R. (2011). Technical Mathematics in the University of Debrecen. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 38, 157-167.
- 10) Nagy-Kondor, R. (2005). Special characteristics of engineer students' knowledge of functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 10, 1-9.
- 11) Approximate coefficients of friction, In:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Friction#Static\\_friction](https://en.wikipedia.org/wiki/Friction#Static_friction)

Lektorálta:

Deák Krisztián

Debreceni Egyetem Műszaki Kar  
Gépészmérnöki Tanszék

DUPress e-könyv

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-813-2

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press  
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi  
Nyomdai munkálatokat  
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben  
[dupress.unideb.hu](http://dupress.unideb.hu)

