Doktori (PhD) értekezés tézisei

Generalizations and stability of convexity

Molnár Gábor Marcell

Témavezető: Prof. Dr. Páles Zsolt

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024.

1. Fejezet
A Rådström-féle egyszerűsítési szabály kiterjesztése tölcsérekre

1.1. Bevezetés. A konvex halmazok elméletéhez tartozó Egyszerűsítési Szabályt Rådström [32] fedezte fel 1952-ben. Az eredeti cikkében a második Lemma szerint az

$$A + B \subseteq C + B$$

tartalmazásból következik, hogy $A \subseteq C$, feltéve, hogy az A, B, C nemüres halmazok részhalmazai egy X normált térnek, C zárt, konvex és B pedig korlátos.

Később ez a lemma alapvető eszköz lett a matematika különféle területein, és mára cikkek százai felhasználták ezt az eredményt. Például nemsíma analízis [8, 11–13, 20], optimalizálás [9], konvex halmazok és függvények elmélete [10,15–19,23,36,37], halmazértékű analízis [7,21,22,24,28–30], halmazértékű differenciálegyenletek [6,26,31], halmazértékű függvényegyenletek [4,25,33,35], iterációelmélet [1, 3, 14, 34, 38], stb.

1.2. Tölcsérek és konvexitási tulajdonságok tölcsérekben

1.1. Definíció. [27]. A $(X, +, \preceq)$ rendezett hármast *rendezett kommutatív félcsoportnak* nevezzük, ha

(i) $(X, +)$ egy kommutatív egységelemes félcsoport, aminek az egységeleme a 0;
(ii) $(X, \preceq)$ egy részbenrendezett halmaz, azaz $\preceq$ egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció X-en;
(iii) Bármely $x, y, z \in X$ és $x \preceq y$ esetén az $x + z \preceq y + z$ egyenlőtlenség fennáll.

Ha az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz teljes, azaz X bármely nemüres alulról korlátos részhalmazának létezik pontos felső korlátja, akkor az $(X, +, \preceq)$ hármast *teljes rendezett kommutatív félcsoportnak* hívjuk.

Egy $(X, +)$ félcsoportban természetes módon definiálható a természetes számokkal való szorzás az alábbi rekurzív módon

$$1 \cdot x := x, \qquad (n+1) \cdot x := n \cdot x + x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha a félcsoport egységelemes, akkor definiáljuk még az egységgel való szorzást is: $0 \cdot x := 0$.

A következő definíció ennek a fejezetnek a központi fogalma.

1.2. Definíció. [27]. Egy rendezett $(X, +, *, \preceq)$ négyest *tölcsér*nek nevezünk, ha $(X, +, \preceq)$ egy rendezett kommutatív félcsoport és „$*$” az X halmaz elemeinek pozitív egész számokkal való szorzását jelenti az alábbi feltételek szerint:

(i) Bármely $n, m \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ esetén $(nm) * x = n * (m * x)$;

(ii) Bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in X$ esetén $n * (x + y) = n * x + n * y$;

(iii) Bármely $n, m \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ esetén $(n + m) * x \preceq n * x + m * x$;

(iv) Bármely $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in X$ esetén az $x \preceq y$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $n * x \preceq n * y$;

(v) $1 * x = x$;

(vi) $n * 0 = 0$.

Ha az $(X, \preceq)$ részbenrendezett halmaz teljes, akkor az $(X, +, *, \preceq)$ négyest *teljes tölcsér*nek nevezzük. Az $(X, +, *, \preceq)$ tölcsérnek egy $(S, +)$ egységelemes részfélcsoportját, amely zárt a „$*$” műveletre nézve az $(X, +, *, \preceq)$ tölcsér *résztölcsér*jének hívjuk, ahol a rendezés alatt a rendezés S halmazra való leszűkítését értjük.

Világos, hogy ha $(X, +)$ egy olyan kommutatív egységelemes félcsoport, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az $n \mapsto n \cdot x$ leképezés injektív, akkor az $(X, +, \cdot, =)$ négyes tölcsér.

1.3. Definíció. [27]. Legyen $(X, +, *, \preceq)$ egy tölcsér és $n \in \mathbb{N}$. Az $x \in X$ elemet n-*konvex*nek nevezzük, ha $n * x = n \cdot x$. Rögzített $x \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$C_x := \{n \in \mathbb{N} \mid x\ n\text{-konvex}\} \quad \text{és} \quad C^n := \{x \in X \mid x\ n\text{-konvex}\}.$$

Ha $C_x = \mathbb{N}$, azaz ha x n-konvex bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy x *konvex*. Az $x \in X$ elem n-*convex burka* egy olyan $y \in C^n$ elem, hogy $x \preceq y$, továbbá ha $x \preceq z \in C^n$, akkor $y \preceq z$. Az x elem konvex burkát $\operatorname{conv}_n(x)$-szel jelöljük

Általában egy elem n-konvex burka nem feltétlenül létezik. Ha viszont létezik az n-konvex burok, akkor az egyértelmű. A létezés biztosításához további feltételekre van szükségünk. Azt mondjuk, hogy a $*$ szorzás művelet egy $(X, +, *, \preceq)$ teljes tölcséreben *n-folytonos* (a "$\preceq$" rendezésre nézve), ha bármely nemüres alulról korlátos $H \subseteq X$ részhalmaz esetén fennáll, hogy

$$\inf(n * H) = n * \inf(H).$$

1.4. Állítás. [27]. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(X, +, *, \preceq)$ egy teljes tölcsér, amiben a $*$ szorzás n-folytonos. Ekkor $(C^n, +, *, \preceq)$ egy teljes résztölcsére az $(X, +, *, \preceq)$ tölcsérnek. Továbbá bármely $x \in X$ esetén egy x elemnek pontosan akkor létezik az n-konvex burka, ha van n-konvex majoránsa.*

Egy $(X, +, *, \preceq)$ tölcsérben jelölje K^n azon elemek halmazát, amelyeknek létezik n-konvex burka és jelölje M^n azon elemek halmazát, amelyeknek létezik n-konvex majoránsa. Ekkor világos, hogy $C^n \subseteq K^n \subseteq M^n$. Ezen jelölésekkel az előző állítás azt mondja, hogy ha $(X, +, *, \preceq)$ egy teljes tölcsér, amiben a $*$ szorzás n-folytonos, akkor $K^n = M^n$.

A fenti fogalmak alkalmazhatóságának illusztrálására a következő három állításban alapvető példákat mutatunk tölcsérekre. Előtte bevezetjük az ék fogalmát Abel-csoportokban.

1.5. Definíció. [27]. Legyen $(G, +)$ egy Abel-félcsoport, $S \subseteq G$ és $n \in \mathbb{N}$. Definiáljuk

$$n^{-1}(S) := \{x \in G \mid n \cdot x \in S\}.$$

Egy S részfélcsoportját $(G, +)$-nak *n-oszthatónak* nevezzük, ha bármely $x \in S$ esetén az $n^{-1}(\{x\}) \cap S$ nemüres. Ha ez a halmaz egyelemű, akkor S-t *egyértelműen n-oszthatónak* nevezzük és ezt az egyértelmű elemet x/n-nel jelöljük. Egy G egységelemes Abel-félcsoportban egy $W \subseteq G$ részhalmazt *ék*nek hívjuk, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

(i) W egy egységelemes részfélcsoportja G-nek.

(ii) Ha $u, v \in W$ olyan, hogy $u + v = 0$, akkor $u = v = 0$.

(iii) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, az $n^{-1}(W)$ ősképet tartalmazza W.

Egy $W \subseteq G$ ék esetén definiálhatunk egy részbenrendezést, $\preceq_W$-t, az alábbi módon: Az $x, y \in G$ elemek esetén azt mondjuk, hogy $x \preceq_W y$, ha $y \in x + W$. Azonnal látható, hogy $\preceq_W$ egy reflexív és tranzitív reláció G-n. Ha még G ráadásul kancellatív is (ami mindig teljesül, ha G csoport), akkor $\preceq_W$ antiszimmetrikus is, tehát részbenrendezés G-n.

1.6. Állítás. [27]. *Legyen $(G, +)$ egy Abel-csoport és $W \subseteq G$ egy ék. Ekkor G egy S részfélcsoportja esetén, amely tartalmazza W-t, az $(S, +, \cdot, \preceq_W)$ négyes tölcsér, amelyben minden elem n-konvex bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Speciálisan az $W := \{0\}$ választással $(G, +, \cdot, =)$ tölcsér.*

1.7. Állítás. [27]. *Legyen $(G, +)$ egy Abel-félcsoport, W egy ék és legyen S részfélcsoportja G-nek. Jelölje $P_W(S)$ az S halmaz összes W-invariáns A részhalmazát, azaz az olyan halmazokat, amelyekre $A + W \subseteq A$ fennáll. Definiáljuk a $+$ és $*$ műveleteket az alábbi módon:*

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\} && (A, B \in P_W(S)), \\ n * A &:= \{n \cdot a + w \mid a \in A,\, w \in W\} && (A \in P_W(S),\, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1}$$

Ekkor $(P_W(S), +, *, \subseteq)$ egy teljes tölcsér, amelynek egységeleme W. Továbbá az

$$\varphi(x) := x + W \qquad (x \in S)$$

leképezés egy injektív rendezésváltó homomorf leképezése $(S, +, \cdot, \preceq_W)$-nek a $(P_W(S), +, *, \subseteq)$ tölcsérbe. Ha még ráadásul W n-osztható, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $A \in P_W(S)$ pontosan akkor n-konvex, ha bármely $x_1, \ldots, x_n \in A$ esetén

$$n^{-1}(\{x_1 + \cdots + x_n\}) \cap A \neq \emptyset.$$

1.8. Állítás. [27]. *Legyen $(G, +)$ egy Abel-csoport, W egy ék és S egy egyértelműen osztható részfélcsoportja G-nek, amely tartalmazza W-t. Legyen, $p \in]0, 1]$ esetén,*

$$F_W^p(S) := \{f : S \to [0, 1] \mid \sup f \geq p \text{ és } f \text{ } W\text{-nemcsökkenő}\} \tag{2}$$

és definiáljuk az összeadást és a számmal való szorzást $F_W^p(S)$-ben a következő-

képp:

$$
\begin{aligned}
(f \oplus g)(x) &:= \sup_{\substack{u,v\in S\\ u+v=x}} \min\big(f(u), g(v)\big),\\
(n \odot f)(x) &:= f\left(\frac{x}{n}\right) \qquad\qquad (f, g \in F_W^p(S),\, x \in S,\, n \in \mathbb{N}).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Végül jelölje $\leq$ a pontonkénti rendezést $F_W^p(S)$-ben. Ekkor az $(F_W^p(S), \oplus, \odot, \leq)$ négyes egy teljes tölcsér, aminek az egységeleme a W ék karakterisztikus függvénye. Továbbá a

$$\Phi(A) := \chi_A \qquad (A \in P_W(S))$$

leképezés egy injektív tölcsértartó leképezése a $(P_W(S), +, *, \subseteq)$ négyesnek az $(F_W^1(S), \oplus, \odot, \leq)$ négyesbe. Ráadásul az $f \in F_W^p(S)$ függvény pontosan akkor n-konvex, ha n-kvázikonkáv, azaz bármely $x_1, \dots, x_n \in S$ esetén

$$\min(f(x_1), \dots, f(x_n)) \leq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

1.3. Topologikus fogalmak és korlátosság tölcsérekben. A nemnegatív és Archimedesi elemek természetes módon vezethetők be tölcsérekben a következő definícióval.

1.9. Definíció. [27]. Legyen $(X, +, *, \preceq)$ egy tölcsér. Azt mondjuk, hogy az $x \in X$ elem *nemnegatív*, ha $0 \preceq x$ fennáll. Az x elemet *Archimedesi*nek mondjuk és $0 \prec x$-szel jelöljük, ha bármely $u \in X$ esetén van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy ha $n_0 \leq n$, akkor $0 \preceq u + n * x$ teljesül. Az X halmaz nemnegatív és Archimedesi elemeinek halmazát rendre $X_{\preceq}$ és $X_{\prec}$-szel jelöljük.

A következő állítás a nemnegatív és Archimedesi elemek tulajdonságait mutatja meg.

1.10. Állítás. [27]. *Legyen $(X, +, *, \preceq)$ egy tölcsér. Ekkor $X_{\preceq}$ tartalmazza $X_{\prec}$-et és*

$$X_{\prec} + X_{\preceq} \subseteq X_{\prec}.$$

Ráadásul $X_{\prec}$ és $X_{\preceq}$ résztölcsérei $(X, +, *, \preceq)$-nek.

A következőkben bevezetjük az összeadás folytonosságának fogalmát, valamint Archimedesi elemeket tartalmazó részfélcsoport korlátosságát és zártságát. Összehasonlításul először idézzük fel a klasszikus topologikus fogalmakat Abel-csoportokra.

1.11. Definíció. [27]. Ha $(G,+)$ egy Abel-csoport és $\mathcal{T}$ Hausdorff-topológia G-n, akkor azt mondjuk, hogy $(G,\mathcal{T},+)$ egy *topologikus csoport*, ha $(x,y)\mapsto x-y$ egy folytonos leképezése $G\times G$-nek G-be. Egy $U\subseteq G$ halmazt *konvex*nek nevezünk, ha bármely $n\in\mathbb{N}$ esetén

$$\{u_1+\cdots+u_n \mid u_1,\ldots,u_n\in U\}=\{n\cdot u \mid u\in U\}.$$

Azt mondjuk, hogy G *lokálisan konvex*, ha a 0 bármely környezete tartalmaz konvex környezetét 0-nak. A $H\subseteq G$ részhalmazt *topologikusan korlátos*nak nevezzük, ha 0 bármely U környezete esetén van olyan $n\in\mathbb{N}$, hogy $H\subseteq \{u_1+\cdots+u_n \mid u_1,\ldots,u_n\in U\}$.

1.12. Definíció. [27]. Legyen $(X,+,*,\preceq)$ egy tölcsér és $\mathcal{A}$ részfélcsoportja $X_{\prec}$-nek. Azt mondjuk, hogy az összeadás $\mathcal{A}$-*folytonos*, ha bármely $a\in\mathcal{A}$ esetén van olyan $b\in\mathcal{A}$, hogy $b+b\preceq a$. Az $x\in X$ elemet $\mathcal{A}$-*zárt*nak nevezzük, ha bármely $a\in\mathcal{A}$ esetén van olyan $n_0\in\mathbb{N}$, hogy ha $n\geq n_0$, akkor $x\preceq n*a$ fennáll.

1.13. Állítás. [27]. *Legyen $(X,+,*,\preceq)$ egy tölcsér és legyen $\mathcal{A}$ olyan részfélcsoportja $X_{\prec}$-nek, hogy az összeadás $\mathcal{A}$-folytonos. Ekkor az $\mathcal{A}$-korlátos elemek résztölcsért alkotnak $(X,+,*,\preceq)$-ben.*

1.14. Definíció. [27]. Legyen $(X,+,*,\preceq)$ egy tölcsér és $\mathcal{A}$ egy részfélcsoportja $X_{\prec}$-nek. Adott $x\in X$ esetén azt mondjuk, hogy $y\in X$ az x elem $\mathcal{A}$-*lezárt*ja, ha $y\preceq x+a$ teljesül minden $a\in\mathcal{A}$ esetén, és y a legnagyobb ilyen tulajdonságú elem X-ben, azaz ha $z\preceq x+a$ bármely $a\in\mathcal{A}$ esetén, akkor $z\preceq y$. Világos, hogy ha egy elemnek létezik az $\mathcal{A}$-lezártja, akkor az egyértelmű. Ezt az elemet $\mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(x)$-val jelöljük. Egy x elemet $\mathcal{A}$-*zárt*nak nevezünk, ha $x=\mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(x)$. Az összes $\mathcal{A}$-lezárható elemek halmazát $\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}$-val jelöljük.

A soron következő állításokban megvizsgáljuk az 1.6, 1.7 és 1.8 Állításokban bemutatott tölcséreket és megkeressük az összes korlátos, zárt és Archimedesi elemeket ezekben a struktúrákban.

1.15. Állítás. [27]. *Legyen $(G,+)$ egy olyan topologikus Abel-csoport, amelynek nincs valódi nyílt részcsoportja. Legyen $W \subseteq G$ egy ék, amelyre $W^\circ \neq \emptyset$ és legyen S egy W-t tartalmazó részfélcsoportja G-nek. Ekkor az alábbiak teljesülnek:*

(i) Az $(S,+,\cdot,\preceq_W)$ tölcsére nemnegatív elemeinek halmaza W.
(ii) Az W° halmaz részfélcsoportja az Archimedesi elemek halmazának.
(iii) S minden eleme W°-korlátos.
(iv) Ha még ráadásul G lokálisan konvex, W topologikusan zárt és $W^\circ = W^\circ + W^\circ$, akkor S minden eleme egyidejűleg W°-zárt.

1.16. Állítás. [27]. *Legyen $(G,+)$ egy olyan topologikus Abel-csoport, amelynek nincs valódi nyílt részcsoportja. Legyen W egy ék és S egy W-t tartalmazó részfélcsoportja G-nek. Jelölje $P_W(S)$ az S halmaz W-invariáns részhalmazait és definiáljuk a $+$ és $*$ műveleteket* (1) *szerint. Ekkor az alábbi állítások teljesülnek.*

(i) A $(P_W(S),+,*,\subseteq)$ tölcsér nemnegatív elemei S azon W-invariáns részhalmazaiból áll, amelyek tartalmazzák a 0 elemet (ami G neutrális eleme).
(ii) Azon W-invariáns részhalmazok $\mathcal{A}$ családja, amelyek tartalmaznak nyílt konvex környezetét 0-nak, részfélcsoportját alkotják az Archimedesi elemeknek.
(iii) A $P_W(S)$ halmaz egy eleme pontosan akkor $\mathcal{A}$-korlátos, ha előáll S és W topologikusan korlátos részhalmazai összegeként.
(iv) Ha még ráadásul G lokálisan konvex, akkor $P_W(S)$ bármely topologikusan zárt eleme $\mathcal{A}$-zárt is, és az összeadás $\mathcal{A}$-folytonos.

1.17. Állítás. [27]. *Legyen $(G,+)$ egy olyan topologikus Abel-csoport, amelynek nincs valódi nyílt részcsoportja. Legyen W egy ék és S egy W-t tartalmazó egyértelműen osztható részfélcsoportja G-nek. Definiáljuk $p \in]0,1]$ esetén az $F_W^p(S)$ halmazt* (2) *alapján, a műveleteket pedig* (3) *szerint. Ekkor teljesülnek az alábbi állítások.*

(i) Az $(F_W^p(S),\oplus,\odot,\leq)$ tölcsér nemnegatív elemei azok a W-invariáns f függvények, amelyekre $f(0)=1$ (ahol 0 jelöli G neutrális elemét).
(ii) Az $(F_W^p(S),\oplus,\odot,\leq)$ tölcsérnek nincs Archimedesi eleme $p \in]0,1[$ esetén. Másrészt az olyan $a \in F_W^1(S)$ elemek $\mathcal{A}$ halmaza, amelyekhez létezik a 0-nak, C-vel jelölt, nyílt konvex környezete, hogy $a|_C = 1$, részfélcsoportját alkotja az $(F_W^1(S),\oplus,\odot,\leq)$ tölcsér Archimedesi elemeinek.

(iii) *Minden* $f \in F_W^1(S)$ *elem* $\mathcal{A}$*-zárt, ha* $\mathrm{supp}(f) := \{u \in S \mid f(u) > 0\}$ *lefedhető* S *és* W *topologikusan zárt részhalmazának összegével.*

(iv) *Ha még ráadásul* G *lokálisan konvex, akkor bármely felülről félig folytonos eleme* $F_W^1(S)$*-nek* $\mathcal{A}$*-zárt is, az* $\oplus$ *összeadás művelet pedig* $\mathcal{A}$*-folytonos.*

1.4. Fő eredmények Ebben a részben kimondjuk a Rådström-féle Egyszerűsítési Szabály általánosítását.

1.18. Tétel. [27]. *Legyen* $(X, +, *, \preceq)$ *egy tölcsér és* $\mathcal{A}$ *olyan részfélcsoportja* $X_\prec$*-nek, hogy benne az összeadás* $\mathcal{A}$*-folytonos. Legyenek továbbá* $x, y, z \in X$ *olyanok, hogy* z $\mathcal{A}$*-korlátos,* y $\mathcal{A}$*-zárt és* m*-konvex, valamely* $m \geq 2$*-re. Ekkor, ha*

$$x + z \preceq y + z$$

teljesül, akkor $x \preceq y$.

1.19. Következmény. [27]. *Legyen* $(G, +)$ *egy olyan lokálisan konvex Abel-csoport, amelynek nincs valódi nyílt részcsoportja. Legyen* W *egy ék és* S *egy* W*-t tartalmazó részfélcsoportja* G*-nek. Jelölje* $P_W(S)$ *az* S *halmaz* W*-invariáns részhalmazait és definálјuk a* $+$ *és* $*$ *műveleteket* (1) *szerint. Legyen* $A, B, C \in P_W(S)$ *olyan, hogy* B *lefedhető* S *és* W *topologikusan korlátos részhalmazainak összegével,* C *pedig topologikusan zárt* m*-konvex részhalmaza* S*-nek, valamely* $m \geq 2$ *esetén. Ekkor, ha*

$$A + B \subseteq C + B$$

teljesül, akkor $A \subseteq C$.

1.20. Következmény. [27]. *Legyen* $(G, +)$ *egy olyan topologikus Abel-csoport, amelynek nincs valódi nyílt részcsoportja. Legyen* W *egy ék és* S *egy* W*-t tartalmazó egyértelműen osztható részfélcsoportja* G*-nek. Definiáljuk* $p \in]0, 1]$ *esetén az* $F_W^1(S)$ *halmazt* (2) *alapján, a műveleteket pedig* (3) *szerint. Legyenek* $f, g, h \in F_W^1(S)$ *olyanok, hogy* $\mathrm{supp}(h)$ *lefedhető* S *és* W *topologikusan korlátos részhalmazainak összegével, valamint* g *pedig felülről félig folytonos és* m*-kvázikonkáv valamely* $m \geq 2$ *esetén. Ekkor, ha*

$$f \oplus h \leq g \oplus h$$

teljesül, akkor $f \leq g$.

2. Fejezet
Konvex és konkáv sorozatokról és alkalmazásaikról

2.1. Bevezetés. A konvexitás elméletében a konvex függvények alapvető szerepet játszanak. A téma további tanulmányozásához az alábbi monográfokat javasoljuk: Hardy–Littlewood–Pólya [1], Kuczma [3], Mitrinović [4], Mitrinović–Pečarić–Fink [5, 6], Niculescu–Persson [8], Popoviciu [12] és Roberts–Varberg [13]. A konvex sorozatok vizsgálata valószínűleg Mitrinović [4]. könyvével kezdődött. A matematika ezen ága még most is nagyon aktív. Néhány friss eredmény található a következőkben: Krasniqi [2], Niezgoda [9–11], Sofonoea–Ţincu–Acu [14], Tabor–Tabor–Żoldak [15], Wu–Debnath [16], Yıldız [17]. Ebben a fejezetben bevezetjük a q-konvex, q-affin és q-konkáv konkáv sorozatok fogalmát és néhány alapvető eredményt mutatunk be róluk. Továbbá megmutatjuk a meglepő kapcsolatukat az első- és másodfajú Csebisev-polinomokkal. Végül egy alkalmazást mutatunk a fixponttételek elméletében.

Legyenek $n, m \in \mathbb{Z}$ olyanok, hogy $2 \leq m - n$ és jelölje $\mathcal{S}(n|m)$ az n-edik indextől az m-edik indexig tartó valós sorozatok lineáris terét, azaz az összes $p\colon \{n, \dots, m\} \to \mathbb{R}$ függvényt. A konkávítás, konvexitás és affinitás fogalmak természetes módon definiálhatók az $\mathcal{S}(n|m)$ halmazon. Azt mondjuk, hogy egy $p = (p_n, \dots, p_m) \in \mathcal{S}(n|m)$ *konvex*, ha bármely $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ esetén

$$2p_i \leq p_{i-1} + p_{i+1}. \tag{1}$$

Ha minden $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ esetén a fordított irányú egyenlőtlenség teljesül (1)-ben, akkor a sorozatot *konkáv*nak mondjuk. Végül, ha egy sorozat egyidejűleg konvex és konkáv, akkor *affin*nak nevezzük. Ha az (1) egyenlőtlenség szigorú, akkor rendre szigorúan konvex és szigorúan konkáv sorozatról beszélünk.

Ebben a részben egy $p = (p_n, \dots, p_m) \in \mathcal{S}(n|m)$ sorozatra a *q-konvex* elnevezést fogjuk használni, ha minden $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ esetén

$$2qp_i \leq p_{i-1} + p_{i+1}. \tag{2}$$

Ha bármely $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ esetén (2)-ben fordított irányú egyenlőtlenség teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat *q-konkáv*. Ha egy sorozat egyidejűleg q-konvex and q-konkáv, akkor a sorozatot *q-affin*nak nevezzük.

Könnyen belátható, hogy egy pozitív (vagy negatív) tagú sorozat szigorú konvexitásából következik a q-konvexitása, valamilyen q-ra. Hasonlóan, ha $p \in$

$\mathcal{S}(n|m)$ egy negatív tagú, szigorúan konvex sorozat, akkor p q-konvex valamely $0 < q < 1$ esetén.

A q-konvex és q-konkáv sorozatok halmazát $\mathcal{S}(n|m)$-ben rendre $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ és $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ jelöli. Végül a q-affin sorozatok halmazát $\mathcal{A}_q(n|m)$-mel jelöljük, azaz

$$\mathcal{A}_q(n|m) := \mathcal{C}_q^{\cup}(n|m) \cap \mathcal{C}_q^{\cap}(n|m).$$

Könnyen látható, hogy $\mathcal{A}_q(n|m)$ lineáris altere $\mathcal{S}(n|m)$-nek, továbbá $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ és $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ konvex kúpok $\mathcal{S}(n|m)$-ben, azaz zártak a lineáris kombináció képzésre nemnegatív együtthatókkal.

2.2. Segéderedemények Csebisev polinomokról. Jelölje $k \in \mathbb{Z}$ esetén $T_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az elsőfajú-, $U_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig a másodfajú k-adrendű Csebisev polinomok halmazát, amelyek rendre a következő egyenletrendszerekkel definiálhatók:

$$\begin{aligned} &T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x, \qquad T_{k-1}(x) + T_{k+1}(x) = 2xT_k(x), \\ &U_0(x) := 1, \quad U_1(x) := 2x, \quad U_{k-1}(x) + U_{k+1}(x) = 2xU_k(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Az utolsó egyenlőségeket (3)-ban átírva, felhasználhatók T_k és U_k ($k \geq 2$) kiszámítására:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x).$$

Átírva a fenti egyenleteket

$$T_{k-1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k+1}(x), \quad U_{k-1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k+1}(x),$$

alakba T_k és U_k kiszámítható $k \leq -1$ esetén. Könnyen igazolható, hogy ha $k \in \mathbb{Z}$, akkor

$$T_{-k} = T_k \quad \text{és} \quad U_{-k} = -U_{k-2}.$$

Speciálisan $U_{-1} = 0$. Világos, hogy ha $k \geq 0$, akkor T_k és U_k is k-adfokú. Jól ismert, hogy ezek a polinomok eleget tesznek bármely $u \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{Z}$ esetén az alábbi egyenleteknek:

$$T_k(\cos(u)) = \cos(ku), \qquad T_k(\cosh(u)) = \cosh(ku)$$

és

$$U_k(\cos(u)) = \frac{\sin((k+1)u)}{\sin(u)}, \quad U_k(\cosh(u)) = \frac{\sinh((k+1)u)}{\sinh(u)}.$$

Ezekből az alakokból jól látható, hogy T_k (ha $k \neq 0$) és U_{k-1} (ha $k \notin \{-1, 0, 1\}$) gyökei rendre megadhatók az alábbiak szerint:

$$\left\{ \cos\left(\frac{2i-1}{2k}\pi\right) \mid i \in \{1, \ldots, |k|\} \right\} \quad \text{és}$$
$$\left\{ \cos\left(\frac{i}{k}\pi\right) \mid i \in \{1, \ldots, |k|-1\} \right\}.$$

Tehát T_k (ha $k \neq 0$) és U_{k-1} (ha $k \notin \{-1, 0, 1\}$) legnagyobb gyöke rendre $\cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)$ és $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ alakban adható meg.

2.3. q-konkáv, konvex és affin sorozatok. A következő állítás szerint az affin sorozatok $\mathcal{A}_q(n|m)$ halmaza kétdimenziós alterét alkotja $\mathcal{S}(n|m)$-nek.

2.1. Állítás. [7]. *Egy $p \in \mathcal{S}(n|m)$ sorozat pontosan akkor q-affin, ha léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy*

$$p_i := aU_{i-n}(q) + bT_{i-n}(q) \qquad (i \in \{n, \ldots, m\}).$$

Továbbá, ha $p \in \mathcal{A}_q(n|m)$, akkor bármely $i, j, k \in \{n, \ldots, m\}$ esetén

$$U_{k-j-1}(q)p_i + U_{j-i-1}(q)p_k = U_{k-i-1}(q)p_j.$$

Speciálisan, ha $i \in \{n, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, \ldots, \min(i-n, m-i)\}$, akkor

$$p_{i-j} + p_{i+j} = 2T_j(q)p_i.$$

A következő állításban meghatározzuk a q-konkáv (és ezzel együtt a q-konvex) sorozatok néhány tulajdonságát.

2.2. Állítás. [7]. *A $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ kúp zárt a pontonkénti minimumképzésre, a $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ kúp pedig zárt a pontonkénti maximumképzésre.*

Mivel a q-affin sorozatok egyidejűleg q-konkávak és q-konvexek, ezért azt is kapjuk, hogy q-affin sorozatok véges családjának pontonkénti minimuma q-konkáv, a pontonkénti maximuma pedig q-konvex.

2.3. Állítás. [7]. *Legyenek $i, j, k \in \{n, \dots, m\}$ olyanok, hogy $i < j < k$ és tegyük fel, hogy*

$$q \geq \cos\left(\frac{\pi}{\max(j-i, k-j)}\right).$$

Ekkor bármely $p \in \mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ esetén

$$U_{k-j-1}(q)p_i + U_{j-i-1}(q)p_k \leq U_{k-i-1}(q)p_j.$$

Speciálisan, ha $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ és $j \in \{1, \dots, \min(i-n, m-i)\}$, valamint

$$q > \cos\left(\frac{\pi}{j}\right),$$

akkor

$$p_{i-j} + p_{i+j} \leq 2T_j(q)p_i.$$

2.4. Állítás. [7]. *Legyenek $j, k \in \{n, \dots, m\}$ olyanok, hogy $j < k$. Továbbá tegyük fel, hogy*

$$q > \cos\left(\frac{\pi}{k-j}\right).$$

Legyen $p \in \mathcal{C}^{\cap}(n|m)$ és tekintsük a következő kifejezést

$$r_i := p_k \frac{U_{i-j-1}(q)}{U_{k-j-1}(q)} + p_j \frac{U_{k-i-1}(q)}{U_{k-j-1}(q)} \qquad (i \in \{n, \dots, m\}).$$

Ekkor $r = (r_n, \dots, r_m)$ egy q-affin sorozat és $i \in \{n, \dots, m\}$ esetén

$$r_i \begin{cases} \geq p_i & \textit{ha } \ i < j \textit{ vagy } k < i. \\ = p_i & \textit{ha } \ i \in \{j, k\}. \\ \leq p_i & \textit{ha } \ j < i < k. \end{cases}$$

A következő állításban megfogalmazzuk a q-konkáv sorozatok egy karakterizációját.

2.5. Állítás. [7]. *A $p \in \mathcal{S}(n|m)$ sorozat pontosan akkor q-konkáv, ha bármely $j \in \{n, \dots, m-1\}$ esetén van olyan $r \in \mathcal{A}_q(n|m)$, hogy*

$$p_j = r_j, \quad p_{j+1} = r_{j+1}, \quad \textit{és} \quad p_i \le r_i \qquad (i \in \{n, \dots, m\}).$$

2.4. A q-konkáv sorozatok egy alkalmazása A következőkben egy tetszőleges $a \in \mathcal{S}(1|n)$ sorozatot kiterjeszthetünk úgy, hogy $\mathcal{S}(0|n+1)$-beli legyen, ha $a_0 :=$ 0 és $a_{n+1} := 0$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $\gamma = \left(\gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\right) \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ vektor esetén definiáljuk a $\mathcal{T}_\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést az alábbi módon

$$\left(\mathcal{T}_\gamma(a)\right)_i := \min_{1 \le j \le \min(i, n+1-i)} \left(\frac{a_{i-j} + a_{i+j}}{2} + \gamma_j\right),$$

ahol $a \in \mathbb{R}^n$ és $i \in \{1, \dots, n\}$).

Azt szeretnénk megmutatni, hogy fenti $\mathcal{T}_\gamma$ leképezés kontrakció egy megfelelő $\mathbb{R}^n$-beli normában. Ehhez jelölje $|\cdot|_\infty$ a maximumnormát $\mathbb{R}^n$-ben. Ha $p \in \mathcal{S}(1|n)$ egy pozitív tagú sorozat, akkor definiáljuk $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a következőképpen

$$\|a\|_p := \max_{1 \le i \le n} p_i^{-1} |a_i| = |p^{-1} a|_\infty \qquad (a \in \mathbb{R}^n).$$

Ekkor $\|\cdot\|_p$ norma $\mathbb{R}^n$-ben, sőt ezzel a normával $\mathbb{R}^n$ Banach-tér.

2.6. Tétel. [7]. *Legyen $p \in \mathcal{S}(1|n)$ egy pozitív tagú sorozat, valamint*

$$q := \max_{1 \le i \le n} \frac{p_{i-1} + p_{i+1}}{2p_i} \qquad \textit{és} \qquad q^* := \begin{cases} q & \textit{ha } q \le 1, \\ T_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(q) & \textit{ha } q > 1. \end{cases}$$

Ekkor a $\mathcal{T}_\gamma$ leképezés q^*-Lipschitz az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ normált téren ($\gamma \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$). Speciálisan, ha p szigorúan konkáv, akkor $\mathcal{T}_\gamma$ kontrakció.

2.7. Következmény. [7]. *Bármely $\gamma \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ esetén a $\mathcal{T}_\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezésnek egyértelműen létezik fixpontja $\mathbb{R}^n$-ben.*

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/492/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Molnár Gábor Marcell
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10083841

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

<u>Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban</u> (2)

1. **Molnár, G. M.**, Páles, Z.: On convex and concave sequences and their applications.
   Math. Inequal. Appl. : 3 (3), 727-750, 2022. ISSN: 1331-4343.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/mia-2022-25-47
   IF: 1

2. **Molnár, G. M.**, Páles, Z.: An extension of the Rådström cancellation theorem to cornets.
   Semigr. Forum. 102 (3), 765-793, 2021. ISSN: 0037-1912.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00233-021-10160-7
   IF: 0.717

Short thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD)

Generalizations and stability of convexity

written by Gábor Marcell Molnár

supervised by Prof. Dr. Zsolt Páles

UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2024.

Chapter I
An extension of the Rådström cancellation theorem to cornets

1.1. Introduction. In the theory of convex sets, a basic Cancellation Principle was discovered by Rådström [32] in 1952. The Lemma 2 of his paper states that the inclusion

$$A + B \subseteq C + B$$

implies $A \subseteq C$ provided that A, B, C are nonempty subsets of a normed space X, C is closed and convex and B is bounded.

This lemma turned out to be a basic tool in various fields and hundreds of papers have used it by now. For instance, in nonsmooth analysis [8, 11–13, 20], optimization theory [9], theory of convex sets and functions [10,15–19,23,36,37], set-valued analysis [7, 21, 22, 24, 28–30], set-valued differential equations [6, 26, 31], set-valued functional equations [4,25,33,35], iteration theory [1,3,14,34,38], etc.

1.2. Cornets and convexity properties in cornets

Definition 1.1. [27]. An ordered triplet $(X, +, \preceq)$ is called an *ordered commutative semigroup* if

(i) $(X, +)$ is a commutative unital semigroup with a unit element 0;
(ii) $(X, \preceq)$ is a partially ordered set, that is, $\preceq$ is a reflexive, antisymmetric and transitive binary relation on X;
(iii) For all $x, y, z \in X$ with $x \preceq y$, the inequality $x + z \preceq y + z$ holds.

If the partially ordered set $(X, \preceq)$ is complete, i.e., every nonempty lower bounded subset of X has a greatest lower bound, then $(X, +, \preceq)$ is called a *complete ordered commutative semigroup*.

In a semigroup $(X, +)$, we naturally have the multiplication by natural numbers which is defined recursively by

$$1 \cdot x := x, \qquad (n+1) \cdot x := n \cdot x + x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

If the semigroup is unital, then we also define $0 \cdot x := 0$.

In the next definition we present the central concept of our paper.

Definition 1.2. [27]. An ordered quadruple $(X, +, *, \preceq)$ is called a *cornet* if $(X, +, \preceq)$ is an ordered commutative semigroup and "$*$" is a multiplication of the elements of X by positive integers such that the following conditions hold:

(i) For all $n, m \in \mathbb{N}$ and $x \in X$, $(nm) * x = n * (m * x)$;
(ii) For all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in X$, $n * (x + y) = n * x + n * y$;
(iii) For all $n, m \in \mathbb{N}$ and $x \in X$, $(n + m) * x \preceq n * x + m * x$;
(iv) For all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in X$, the inequality $x \preceq y$ holds if and only if $n * x \preceq n * y$;
(v) $1 * x = x$;
(vi) $n * 0 = 0$.

If the partially ordered set $(X, \preceq)$ is complete, then $(X, +, *, \preceq)$ is called a *complete cornet*. A unital subsemigroup $(S, +)$ of a cornet $(X, +, *, \preceq)$ which is also closed with respect to the multiplication $*$ is called a *subcornet* of $(X, +, *, \preceq)$ with the ordering restricted to S.

It is obvious that if $(X, +)$ is a commutative unital semigroup such that, for all $n \in \mathbb{N}$, the mapping $n \mapsto n \cdot x$ is injective, then $(X, +, \cdot, =)$ is a cornet.

Definition 1.3. [27]. Let $(X, +, *, \preceq)$ be a cornet and $n \in \mathbb{N}$. An element $x \in X$ will be called *n-convex* if it fulfills the equality $n * x = n \cdot x$. For fixed elements $x \in X$ and $n \in \mathbb{N}$, we introduce the notations

$$C_x := \{n \in \mathbb{N} \mid x \text{ is } n\text{-convex}\} \quad \text{and} \quad C^n := \{x \in X \mid x \text{ is } n\text{-convex}\},$$

respectively. If $C_x = \mathbb{N}$, i.e., if x is n-convex for all $n \in \mathbb{N}$, then we say that x is *convex*. The *n-convex hull* of an element $x \in X$, denoted as $\mathrm{conv}_n(x)$, is an element $y \in C^n$ such that $x \preceq y$ and, whenever $x \preceq z \in C^n$, then $y \preceq z$.

In general, the n-convex hull of an element may not exist, but if it exists, then it is unique. In order to formulate conditions which are sufficient for the existence, we say that the $*$-multiplication in a complete cornet $(X, +, *, \preceq)$ is *n-continuous* (with respect to the ordering "$\preceq$") if, for all nonempty lower bounded subsets $H \subseteq X$, we have

$$\inf(n * H) = n * \inf(H).$$

Proposition 1.4. [27]. *Let $n \in \mathbb{N}$ and let $(X, +, *, \preceq)$ be a complete cornet in which the $*$-multiplication is n-continuous. Then $(C^n, +, *, \preceq)$ is a complete subcornet of the cornet $(X, +, *, \preceq)$. Furthermore, for every element $x \in X$, x admits an n-convex hull if and only if it has an n-convex majorant.*

In a cornet $(X, +, *, \preceq)$, let K^n denote the collection of those elements which have an n-convex hull and let M^n denote the set of those elements that have an n-convex majorant. Obviously, we have $C^n \subseteq K^n \subseteq M^n$. Using this terminology, the previous proposition asserts that if $(X, +, *, \preceq)$ is a complete cornet in which the $*$-multiplication is n-continuous, then $K^n = M^n$.

To illustrate the rich applicability of the above concepts, we provide the most basic examples for cornets in the subsequent three propositions. For these definitions, we introduce the notion of wedge in abelian group setting.

Definition 1.5. [27]. If $(G, +)$ is an abelian semigroup and $n \in \mathbb{N}$, then for a subset $S \subseteq G$, define

$$n^{-1}(S) := \{x \in G \mid n \cdot x \in S\}.$$

A subsemigroup S of the group $(G, +)$ is said to be *n-divisible* if, for all $x \in S$, the set $n^{-1}(\{x\}) \cap S$ is nonempty. If this set is a singleton, then S is called *uniquely n-divisible* and its unique element will be denoted by x/n.

In a unital abelian semigroup G, a subset $W \subseteq G$ is called a *wedge* if the following properties are satisfied:

(i) W is a unital subsemigroup of G.
(ii) If $u, v \in W$ such that $u + v = 0$, then $u = v = 0$.
(iii) For all $n \in \mathbb{N}$, the inverse image $n^{-1}(W)$ is contained in W.

In terms of a wedge $W \subseteq G$, we can define a partial order $\preceq_W$ in the following way: For $x, y \in G$, we say that $x \preceq_W y$ if $y \in x + W$. It immediately follows that $\preceq_W$ is a reflexive, and transitive relation on G. If, in addition, G is cancellative (which is always the case if G is group), then $\preceq_W$ is antisymmetric and hence it is a partial order on G.

Proposition 1.6. [27]. *Let $(G, +)$ be an abelian group and let $W \subseteq G$ be a wedge. Then, for a subsemigroup S of G containing W, the quadruple $(S, +, \cdot, \preceq_W)$ is a cornet in which every element is n-convex for all $n \in \mathbb{N}$. In particular, by taking $W := \{0\}$, it follows that $(G, +, \cdot, =)$ is a cornet.*

Proposition 1.7. [27]. *Let $(G,+)$ be an abelian group, W be a wedge and let S be a subsemigroup of G containing W. Let $P_W(S)$ denote the collection of all nonempty W-invariant subsets A of S, which means that $A+W \subseteq A$ holds. Define the operations $+$ and $*$ by:*

$$\begin{aligned} A+B &:= \{a+b \mid a \in A,\, b \in B\} && (A,B \in P_W(S)),\\ n*A &:= \{n\cdot a+w \mid a \in A,\, w \in W\} && (A \in P_W(S),\, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{1}$$

Then $(P_W(S),+,*,\subseteq)$ is a complete cornet with the unit element W. Furthermore, the mapping

$$\varphi(x) := x+W \qquad (x \in S)$$

is an injective order reversing homomorphic mapping of $(S,+,\cdot,\preceq_W)$ into the cornet $(P_W(S),+,*,\subseteq)$. In addition, if $n \in \mathbb{N}$ and W is n-divisible, then $A \in P_W(S)$ is n-convex if and only if, for all $x_1,\dots,x_n \in A$, we have

$$n^{-1}(\{x_1+\cdots+x_n\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Proposition 1.8. [27]. *Let $(G,+)$ be an abelian group, W be a wedge and let S be a uniquely divisible subsemigroup of G which contains W. Let, for $p \in]0,1]$,*

$$F_W^p(S) := \{f : S \to [0,1] \mid \sup f \geq p \text{ and } f \text{ is } W\text{-nondecreasing}\} \tag{2}$$

and define the addition and the scalar multiplication in $F_W^p(S)$ by

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &:= \sup_{\substack{u,v\in S\\ u+v=x}} \min\big(f(u),g(v)\big),\\ (n \odot f)(x) &:= f\left(\frac{x}{n}\right) && (f,g \in F_W^p(S),\, x \in S,\, n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3}$$

Finally, let $\leq$ denote the pointwise ordering in $F_W^p(S)$. Then the quadruple $(F_W^p(S),\oplus,\odot,\leq)$ is a complete cornet whose unit element is the characteristic function of the wedge W. Furthermore, the mapping

$$\Phi(A) := \chi_A \qquad (A \in P_W(S))$$

is an injective cornet-preserving mapping of $(P_W(S),+,*,\subseteq)$ into the quadruple $(F_W^1(S),\oplus,\odot,\leq)$. In addition, a function $f \in F_W^p(S)$ is n-convex if and only if it is n-quasiconcave, i.e., for all $x_1,\dots,x_n \in S$,

$$\min(f(x_1),\dots,f(x_n)) \leq f\Big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big).$$

1.3. Topological notions and boundedness in cornets In a natural way, we can introduce the notions of nonnegative and Archimedean elements in a cornet with the following definition.

Definition 1.9. [27]. In a cornet $(X, +, *, \preceq)$ an element $x \in X$ is said to be *nonnegative* if $0 \preceq x$ holds. The element x is called *Archimedean*, denoted by $0 \prec x$, if, for all $u \in X$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $0 \preceq u + n * x$ for all $n_0 \leq n$. The set of all nonnegative and Archimedean elements in X will be denoted by $X_{\preceq}$ and $X_{\prec}$, respectively.

The properties of nonnegative and Archimedean elements are established in the following assertion.

Proposition 1.10. [27]. *Let $(X, +, *, \preceq)$ be a cornet. Then $X_{\prec}$ is contained in $X_{\preceq}$ and*

$$X_{\prec} + X_{\preceq} \subseteq X_{\prec}.$$

In addition, $X_{\prec}$ and $X_{\preceq}$ are subcornets of $(X, +, *, \preceq)$.

In what follows, we introduce the notions of continuity of the addition, boundedness and closedness with respect to a subsemigroup of Archimedean elements. For comparison, we recall first the standard topological concepts for abelian groups.

Definition 1.11. [27]. If $(G, +)$ is an abelian group and $\mathcal{T}$ is a Hausdorff topology on G, then we say that $(G, \mathcal{T}, +)$ is a *topological group* if the $(x, y) \mapsto x - y$ is a continuous map of $G \times G$ into G. A subset $U \subseteq G$ is said to be *convex* if, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\{u_1 + \cdots + u_n \mid u_1, \ldots, u_n \in U\} = \{n \cdot u \mid u \in U\}.$$

We say that G is *locally convex* if every neighborhood of 0 contains a convex neighborhood of 0. A subset $H \subseteq G$ is said to be *topologically bounded* if, for all neighborhood U of 0, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $H \subseteq \{u_1 + \cdots + u_n \mid u_1, \ldots, u_n \in U\}$.

Definition 1.12. [27]. Let $(X, +, *, \preceq)$ be a cornet and let $\mathcal{A}$ be a subsemigroup of $X_{\prec}$. We say that the *addition is $\mathcal{A}$-continuous* if, for all $a \in \mathcal{A}$, there exists $b \in \mathcal{A}$ such that $b + b \preceq a$ holds. We say that an element $x \in X$ is *$\mathcal{A}$-bounded* if, for all $a \in \mathcal{A}$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that $x \preceq n * a$ for all $n \geq n_0$.

Proposition 1.13. [27]. *Let $(X, +, *, \preceq)$ be a cornet and let $\mathcal{A}$ be a subsemigroup of $X_{\prec}$ such that the addition is $\mathcal{A}$-continuous. Then the $\mathcal{A}$-bounded elements form a subcornet of $(X, +, *, \preceq)$.*

Definition 1.14. [27]. Let $(X, +, *, \preceq)$ be a cornet and let $\mathcal{A}$ be a subsemigroup of $X_{\prec}$. Given an element $x \in X$, we say that $y \in X$ is the $\mathcal{A}$-*closure* of x if $y \preceq x + a$ holds for all $a \in A$ and, y is the largest element of X with is property, i.e., if $z \preceq x + a$ holds for all $a \in A$, then $z \preceq y$. It is clear that the $\mathcal{A}$-closure of an element, if exists, is unique and is denoted by $\mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(x)$. An element x is called $\mathcal{A}$-*closed* if $x = \mathrm{cl}_{\mathcal{A}}(x)$. The set of all elements of X which has an $\mathcal{A}$-closure will be denoted by $\mathrm{Cl}_{\mathcal{A}}$.

In the subsequent propositions, we consider the cornets that were introduced in Propositions 1.6, 1.7, 1.8 and we determine all bounded, closed and Archimedean elements in these structures.

Proposition 1.15. [27]. *Let $(G, +)$ be a topological abelian group such that there is no proper open subgroup of G. Let $W \subseteq G$ be a wedge with $W^\circ \neq \emptyset$ and let S be a subsemigroup of G containing W. Then we have the following claims:*

(i) In the cornet $(S, +, \cdot, \preceq_W)$ the set of nonnegative elements is W.
(ii) The set W° is a subsemigroup of the Archimedean elements.
(iii) Every element of S is W°-bounded.
(iv) If, in addition, G is locally convex and W is topologically closed and $W^\circ = W^\circ + W^\circ$, then every element of S is also W°-closed.

Proposition 1.16. [27]. *Let $(G, +)$ be a topological abelian group such that there is no proper open subgroup of G. Let W be a wedge and let S be a subsemigroup of G containing W. Let $P_W(S)$ denote the collection of all nonempty W-invariant subsets of S. Define the operations $+$ and $*$ by* (1). *Then the following statements hold:*

(i) The set of nonnegative elements of the cornet $(P_W(S), +, *, \subseteq)$ consists of those W-invariant subsets of S that contain 0 (which denotes the neutral element of G).
(ii) The collection $\mathcal{A}$ of those W-invariant subsets which contain an open convex neighborhood $C \in P_W(S)$ of 0 is a subsemigroup of the Archimedean elements.

(iii) *An element of $P_W(S)$ is $\mathcal{A}$-bounded if it is the sum of a topologically bounded subset of S and W.*
(iv) *If, in addition, G is locally convex, then any topologically closed element of $P_W(S)$ is also $\mathcal{A}$-closed and the addition is $\mathcal{A}$-continuous.*

Proposition 1.17. [27]. *Let $(G,+)$ be a topological abelian group such that there is no proper open subgroup of G. Let W be a wedge and let S be a uniquely divisible subsemigroup of G containing W. Let, for $p \in]0,1]$, the set $F_W^p(S)$ be defined by* (2) *and define the operations $\oplus$ and $\odot$ by* (3). *Then, the following statements hold.*

(i) *The set of nonnegative elements of the cornets $(F_W^p(S), \oplus, \odot, \leq)$ consists of those W-invariant functions f such that $f(0) = 1$ (here 0 denotes the neutral element of G).*
(ii) *The cornet $(F_W^p(S), \oplus, \odot, \leq)$ has no Archimedean elements for $p \in]0,1[$. On the other hand, the set $\mathcal{A}$ of those $a \in F_W^1(S)$ or which there exists an open convex neighborhood C of 0 such that $a|_C = 1$ is a subsemigroup of the Archimedean elements of $(F_W^1(S), \oplus, \odot, \leq)$.*
(iii) *Any $f \in F_W^1(S)$ is $\mathcal{A}$-bounded if $\operatorname{supp}(f) := \{u \in S \mid f(u) > 0\}$ is covered by the sum of a topologically bounded subset of S and W.*
(iv) *If, in addition, G is locally convex, then any upper semicontinuous element of $F_W^1(S)$ is also $\mathcal{A}$-closed and the addition $\oplus$ is $\mathcal{A}$-continuous.*

1.4. Main results We now present the extension of the Rådström Cancellation Theorem.

Theorem 1.18. [27]. *Let $(X,+,*,\preceq)$ be a cornet and let $\mathcal{A}$ be a subsemigroup of $X_\prec$ such that the addition is $\mathcal{A}$-continuous. Let $x, y, z \in X$ such that z is $\mathcal{A}$-bounded and y is $\mathcal{A}$-closed and m-convex for some $m \geq 2$. If*

$$x + z \preceq y + z$$

holds, then we have $x \preceq y$.

Corollary 1.19. [27]. *Let $(G,+)$ be a locally convex topological abelian group such that there is no proper open subgroup of G. Let W be a wedge and let S*

be a subsemigroup of G containing W. Let $P_W(S)$ denote the collection of W-invariant subsets of S and define the operations $+$ and $*$ by (1)*. Let $A, B, C \in P_W(S)$ such that B is covered by the sum of a topologically bounded subset of S and W and C is a topologically closed m-convex subset of S for some $m \geq 2$. If*

$$A + B \subseteq C + B$$

holds, then $A \subseteq C$.

Corollary 1.20. [27]. *Let $(G, +)$ be a locally convex topological abelian group such that there is no proper open subgroup of G. Let W be a wedge and let S be a uniquely divisible subsemigroup of G containing W. Let the set $F_W^1(S)$ be defined by* (2) *and define the operations $\oplus$ and $\odot$ by* (3)*. Let $f, g, h \in F_W^1(S)$ such that* $\operatorname{supp}(h)$ *is covered by the sum of a topologically bounded subset of S and W and g is upper semicontinuous and m-quasiconcave for some $m \geq 2$. If*

$$f \oplus h \leq g \oplus h$$

holds, then $f \leq g$.

Chapter 2
On convex and concave sequences and their applications

2.1. Introduction. In the theory of convexity, the investigation of convex functions play a fundamental role. We refer to the following monographs for the details: Hardy–Littlewood–Pólya [1], Kuczma [3], Mitrinović [4], Mitrinović–Pečarić–Fink [5,6], Niculescu–Persson [8], Popoviciu [12], and Roberts–Varberg [13]. The investigation of convex sequences probably started in the book Mitrinović [4]. This subfield is still very active, some recent results and applications have been obtained by Krasniqi [2], Niezgoda [9–11], Sofonoea–Ţincu–Acu [14], Tabor–Tabor–Żoldak [15], Wu–Debnath [16], Yıldız [17]. In this chapter we introduce the notions of q-convex, q-affine and q-concave sequences and some basic results on them are presented and we establish their surprising connection to Chebyshev polynomials of the first and of the second kind. Finally, an application of them to fixed point theory is presented.

Given $n, m \in \mathbb{Z}$ with $2 \le m-n$, let $\mathcal{S}(n|m)$ denote the linear space $\mathbb{R}^{\{n,\dots,m\}}$ of all real sequences, i.e., the collection of all functions $p\colon \{n,\dots,m\} \to \mathbb{R}$. It is natural to define the notions of concavity, convexity and affinity for the elements of $\mathcal{S}(n|m)$. A sequence $p = (p_n,\dots,p_m) \in \mathcal{S}(n|m)$ is called *convex* if, for all $i \in \{n+1,\dots,m-1\}$,

$$2p_i \le p_{i-1} + p_{i+1}. \tag{1}$$

If, for all $i \in \{n+1,\dots,m-1\}$, the reversed inequality holds in (1), then the sequence is termed *concave*. Finally, if a sequence is simultaneously convex and concave, then it is said to be *affine*. If the inequality (1) holds with strict inequality sign, then we speak about strict convexity and concavity, respectively.

In what follows, a sequence $p = (p_n,\dots,p_m) \in \mathcal{S}(n|m)$ is called *q-convex* if, for all $i \in \{n+1,\dots,m-1\}$,

$$2qp_i \le p_{i-1} + p_{i+1}. \tag{2}$$

If, for all $i \in \{n+1,\dots,m-1\}$, the reversed inequality holds in (2), then the sequence is termed *q-concave*. If a sequence is simultaneously q-convex and q-concave, then it is said to be *q-affine*.

We can easily see that the strict convexity of a positive (or negative) sequence implies its q-convexity for some q. Analogously, $p \in \mathcal{S}(n|m)$ is a negative strictly convex sequence, then it is q-convex with $0 < q < 1$.

The subclasses of q-convex and q-concave sequences in $\mathcal{S}(n|m)$ will be denoted $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ and $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$, respectively. Finally, $\mathcal{A}_q(n|m)$ will stand for the subclass of q-affine sequences, that is,

$$\mathcal{A}_q(n|m) := \mathcal{C}_q^{\cup}(n|m) \cap \mathcal{C}_q^{\cap}(n|m).$$

It is easy to see that $\mathcal{A}_q(n|m)$ is a linear subspace of $\mathcal{S}(n|m)$ and $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ and $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ are convex cones in $\mathcal{S}(n|m)$, i.e., they are closed with respect linear combinations with nonnegative coefficients.

2.2. Auxiliary results for Chebyshev polynomials For $k \in \mathbb{Z}$, let $T_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $U_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denote the Chebyshev polynomials of the first and of the second kind of order k, which are defined by the system of equations for $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &T_0(x) := 1, \quad T_1(x) := x, \qquad T_{k-1}(x) + T_{k+1}(x) = 2xT_k(x),\\ &U_0(x) := 1, \quad U_1(x) := 2x, \quad U_{k-1}(x) + U_{k+1}(x) = 2xU_k(x), \end{aligned} \tag{3}$$

respectively. The last equalities in (3) rewritten as

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x),$$

can be used to compute T_k and U_k for $k \geq 2$ recursively. If we rewrite them as

$$T_{k-1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k+1}(x), \quad U_{k-1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k+1}(x),$$

then T_k and U_k can be determined for $k \leq -1$. One can easily prove that, for $k \in \mathbb{Z}$,

$$T_{-k} = T_k \quad \text{and} \quad U_{-k} = -U_{k-2}.$$

In particular, $U_{-1} = 0$. It is clear that, for $k \geq 0$, the degree of T_k and U_k equals k. It is well-known that these polynomials satisfy, for all $u \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{Z}$, the equalities

$$T_k(\cos(u)) = \cos(ku), \qquad T_k(\cosh(u)) = \cosh(ku)$$

and

$$U_k(\cos(u)) = \frac{\sin((k+1)u)}{\sin(u)}, \quad U_k(\cosh(u)) = \frac{\sinh((k+1)u)}{\sinh(u)}.$$

From these representations it easily follows that the roots of T_k (for $k \neq 0$) and U_{k-1} (for $k \notin \{-1, 0, 1\}$) are given by

$$\left\{ \cos\left(\frac{2i-1}{2k}\pi\right) \mid i \in \{1, \ldots, |k|\} \right\} \quad \text{and}$$
$$\left\{ \cos\left(\frac{i}{k}\pi\right) \mid i \in \{1, \ldots, |k|-1\} \right\},$$

respectively. Therefore, the largest root of T_k (for $k \neq 0$) and U_{k-1} (for $k \notin \{-1, 0, 1\}$) are given by $\cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)$ and $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ respectively.

2.3. q-concave, q-convex and q-affine sequences. The next proposition shows that $\mathcal{A}_q(n|m)$ is a two dimensional subspace of $\mathcal{S}(n|m)$.

Proposition 2.1. [7]. *A sequence $p \in \mathcal{S}(n|m)$ is q-affine if and only if there exist $a, b \in \mathbb{R}$ such that*

$$p_i := aU_{i-n}(q) + bT_{i-n}(q) \qquad (i \in \{n, \ldots, m\}).$$

In addition, if $p \in \mathcal{A}_q(n|m)$, then, for all $i, j, k \in \{n, \ldots, m\}$,

$$U_{k-j-1}(q)p_i + U_{j-i-1}(q)p_k = U_{k-i-1}(q)p_j.$$

In particular, for $i \in \{n, \ldots, m\}$ and $j \in \{1, \ldots, \min(i-n, m-i)\}$,

$$p_{i-j} + p_{i+j} = 2T_j(q)p_i.$$

In the following statement, we establish some properties of the class of q-concave (and hence of q-convex) sequences.

Proposition 2.2. [7]. *The cone $\mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$ is closed with respect to the pointwise minimum and the cone $\mathcal{C}_q^{\cup}(n|m)$ is closed with respect to the pointwise maximum.*

As q-affine sequences are q-concave and also q-convex, we obtain that the pointwise minimum and maximum of a finite family of q-affine sequences are q-concave and also q-convex, respectively.

Proposition 2.3. [7]. *Let $i, j, k \in \{n, \dots, m\}$ with $i < j < k$. Assume that*

$$q \geq \cos\left(\frac{\pi}{\max(j-i, k-j)}\right).$$

Then, for all $p \in \mathcal{C}_q^{\cap}(n|m)$,

$$U_{k-j-1}(q)p_i + U_{j-i-1}(q)p_k \leq U_{k-i-1}(q)p_j.$$

In particular, if $i \in \{n+1, \dots, m-1\}$ and $j \in \{1, \dots, \min(i-n, m-i)\}$ and

$$q > \cos\left(\frac{\pi}{j}\right),$$

then

$$p_{i-j} + p_{i+j} \leq 2T_j(q)p_i.$$

Proposition 2.4. [7]. *Let $j, k \in \{n, \dots, m\}$ with $j < k$. In addition, assume that*

$$q > \cos\left(\frac{\pi}{k-j}\right).$$

Let $p \in \mathcal{C}^{\cap}(n|m)$ and define

$$r_i := p_k \frac{U_{i-j-1}(q)}{U_{k-j-1}(q)} + p_j \frac{U_{k-i-1}(q)}{U_{k-j-1}(q)} \qquad (i \in \{n, \dots, m\}).$$

Then, $r = (r_n, \dots, r_m)$ is a q-affine sequence and, for $i \in \{n, \dots, m\}$,

$$r_i \begin{cases} \geq p_i & \text{if } i < j \text{ or } k < i. \\ = p_i & \text{if } i \in \{j, k\}. \\ \leq p_i & \text{if } j < i < k. \end{cases}$$

In the following proposition, we establish a characterization of q-concave sequences.

Proposition 2.5. [7]. *Let $p \in \mathcal{S}(n|m)$. Then p is q-concave if and only if, for all $j \in \{n, \dots, m-1\}$, there exists $r \in \mathcal{A}_q(n|m)$ such that*

$$p_j = r_j, \quad p_{j+1} = r_{j+1}, \quad \text{and} \quad p_i \leq r_i \quad \text{for} \quad i \in \{n, \dots, m\}.$$

2.4. An application of q-concave sequences In what follows, we will adopt the following convention: For an arbitrary sequence $a \in \mathcal{S}(1|n)$, let a be extended to be in $\mathcal{S}(0|n+1)$ by setting $a_0 := 0$ and $a_{n+1} := 0$. For $n \in \mathbb{N}$ and for a vector $\gamma = \big(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\big) \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, we define the map $\mathcal{T}_\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ by

$$\big(\mathcal{T}_\gamma(a)\big)_i := \min_{1 \le j \le \min(i, n+1-i)} \Big(\frac{a_{i-j} + a_{i+j}}{2} + \gamma_j\Big),$$

where $a \in \mathbb{R}^n$ and $i \in \{1, \ldots, n\}$).

In order to make the map $\mathcal{T}_\gamma$ a contraction with respect to a suitable norm on $\mathbb{R}^n$, we construct new norms in terms of positive sequences. Let $|\cdot|_\infty$ denote the maximum norm on $\mathbb{R}^n$. If $p \in \mathcal{S}(1|n)$ is a sequence with positive members, then we define $\|\cdot\|_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ by

$$\|a\|_p := \max_{1 \le i \le n} p_i^{-1} |a_i| = |p^{-1} a|_\infty \qquad (a \in \mathbb{R}^n).$$

Then $\|\cdot\|_p$ is a norm and $\mathbb{R}^n$ is a Banach space with respect to $\|\cdot\|_p$.

Theorem 2.6. [7]. *Let $p \in \mathcal{S}(1|n)$ be a sequence with positive members and define*

$$q := \max_{1 \le i \le n} \frac{p_{i-1} + p_{i+1}}{2p_i} \qquad \text{and} \qquad q^* := \begin{cases} q & \text{if } q \le 1, \\ T_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(q) & \text{if } q > 1. \end{cases}$$

Then, for all $\gamma \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, the mapping $\mathcal{T}_\gamma$ is q^*-Lipschitzian on the normed space $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. In particular, if p is strictly concave, then $\mathcal{T}_\gamma$ is a contraction on the normed space $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

Corollary 2.7. [7]. *For all $\gamma \in \mathbb{R}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, the mapping $\mathcal{T}_\gamma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ has a unique fixed point in $\mathbb{R}^n$.*

Selected references to Chapter 1 – Válogatott hivatkozások az 1. Fejezethez

[1] Aghajani, M., Nourouzi, K.: On Hukuhara's differentiable iteration semigroups of linear set-valued functions. Aequationes Math. **90**(6), 1129–1145 (2016)

[2] Azzam-Laouir, D., Boukrouk, W.: Second-order set-valued differential equations with boundary conditions. J. Fixed Point Theory Appl. **17**(1), 99–121 (2015)

[3] Azócar, A., Guerrero, J.A., Matkowski, J., Merentes, N.: Uniformly continuous set-valued composition operators in the spaces of functions of bounded variation in the sense of Wiener. Opuscula Math. **30**(1), 53–60 (2010)

[4] Baias, A.R., Moşneguţu, B., Popa, D.: Set-valued solutions of a generalized quadratic functional equation. Results Math. **73**(4), Paper No. 129, 8 (2018)

[5] Bendit, T., Sims, B.: The structure of the normed lattice generated by the closed, bounded, convex subsets of a normed space. J. Nonlinear Convex Anal. **17**(6), 1069–1081 (2016)

[6] Bąkowska, A., Gabor, G.: Topological structure of solution sets to differential problems in Fréchet spaces. Ann. Polon. Math. **95**(1), 17–36 (2009)

[7] Chistyakov, V.V., Tretyachenko, Y.V.: A pointwise selection principle for maps of several variables via the total joint variation. J. Math. Anal. Appl. **402**(2), 648–659 (2013)

[8] Correa, R., Gajardo, P., Thibault, L.: Various Lipschitz-like properties for functions and sets. I. Directional derivative and tangential characterizations. SIAM J. Optim. **20**(4), 1766–1785 (2010)

[9] Crespi, G.P., Kuroiwa, D., Rocca, M.: Convexity and global well-posedness in set-optimization. Taiwanese J. Math. **18**(6), 1897–1908 (2014)

[10] Dancs, S., Medvegyev, P., Magyarkuti, G.: Normability via the convergence of closed and convex sets. J. Optim. Theory Appl. **150**(3), 675–682 (2011)

[11] Dolgopolik, M.V.: Abstract convex approximations of nonsmooth functions. Optimization **64**(7), 1439–1469 (2015)

[12] Gaydu, M., Geoffroy, M.H., Marcelin, Y.: Prederivatives of convex set-valued maps and applications to set optimization problems. J. Global Optim. **64**(1), 141–158 (2016)

[13] Geoffroy, M.H., Marcelin, Y.: A concept of inner prederivative for set-valued mappings and its applications. ESAIM Control Optim. Calc. Var. **24**(3), 1059–1074 (2018)

[14] Gong, X.: Convex solutions of the multi-valued iterative equation of order n. J. Inequal. Appl. pp. 2012:258, 10 (2012)

[15] Grzybowski, J., Küçük, M., Küçük, Y., Urbański, R.: Minkowski-Rådström-Hörmander cone. Pac. J. Optim. **10**(4), 649–666 (2014)

[16] Grzybowski, J., Pallaschke, D., Przybycień, H., Urbański, R.: Commutative semigroups with cancellation law: a representation theorem. Semigroup Forum **83**(3), 447–456 (2011)

[17] Grzybowski, J., Pallaschke, D., Urbański, R.: A note on the dual of the Minkowski-Rådström-Hörmander lattice. Pac. J. Optim. **6**(2), 255–262 (2010)

[18] Grzybowski, J., Przybycień, H.: Completeness in Minkowski-Rådström-Hörmander spaces. Optimization **64**(3), 495–503 (2015)

[19] Grzybowski, J., Urbański, R.: Dual space of the Minkowski-Rådström-Hörmander space over $\mathbb{R}^2$. Funct. Approx. Comment. Math. **50**(1), 199–206 (2014)

[20] Huang, H., Ning, J.: Prederivatives of gamma paraconvex set-valued maps and Pareto optimality conditions for set optimization problems. J. Inequal. Appl. pp. Paper No. 243, 11 (2017)

[21] Khodaei, H.: Selections of generalized convex set-valued functions satisfying some inclusions. J. Math. Anal. Appl. **474**(2), 1104–1115 (2019)

[22] Kuroiwa, D., Popovici, N., Rocca, M.: A characterization of cone-convexity for set-valued functions by cone-quasiconvexity. Set-Valued Var. Anal. **23**(2), 295–304 (2015)

[23] Kwiecińska, G.: On the Carathéodory superposition of multifunctions and an existence theorem. Math. Slovaca **64**(2), 315–332 (2014)

[24] Leiva, H., Merentes, N., Nikodem, K., Sánchez, J.L.: Strongly convex set-valued maps. J. Global Optim. **57**(3), 695–705 (2013)

[25] Mainka-Niemczyk, E.: Some properties of set-valued sine families. Opuscula Math. **32**(1), 159–170 (2012)

[26] Malinowski, M.T.: Set-valued and fuzzy stochastic differential equations in M-type 2 Banach spaces. Tohoku Math. J. (2) **67**(3), 349–381 (2015)

[27] Molnár, G.M., Páles, Zs.: An extension of the Rådström cancellation theorem to cornets. Semigroup Forum **102**, 765-793 (2021)

[28] Orlov, I.V.: On the embedding of a uniquely divisible Abelian semigroup in a convex cone. Mat. Zametki **102**(3), 396–404 (2017)

[29] Piszczek, M.: On selections of set-valued inclusions in a single variable with applications to several variables. Results Math. **64**(1-2), 1–12 (2013)

[30] Piątek, B.: On the continuity of the integrable multifunctions. Opuscula Math. **29**(1), 81–88 (2009)

[31] Plotnikov, A.V., Skripnik, N.V.: Conditions for the existence of local solutions of set-valued differential equations with generalized derivative. Ukrainian Math. J. **65**(10), 1498–1513 (2014) Translation of Ukraïn. Mat. Zh. **6**5 (2013), no. 10, 1350–1362

[32] Rådström, H.: An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 165–169 (1952)

[33] Sikorska, J.: On a method of solving some functional equations for set-valued functions. Set-Valued Var. Anal. **27**(1), 295–304 (2019)

[34] Smajdor, A., Smajdor, W.: Concave iteration semigroups of linear continuous set-valued functions. Cent. Eur. J. Math. **10**(6), 2272–2282 (2012)

[35] Szczawińska, J.: On some equation for set-valued functions. Aequationes Math. **85**(3), 421–428 (2013)

[36] Vincze, C., Nagy, Á.: On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography. J. Approx. Theory **164**(3), 371–390 (2012)

[37] Vincze, C., Nagy, Á.: Generalized conic functions of hv-convex planar sets: continuity properties and relations to X-rays. Aequationes Math. **89**(4), 1015–1030 (2015)

[38] Xu, B., Nikodem, K., W., Z.: On a multivalued iterative equation of order n. J. Convex Anal. **18**(3), 673–686 (2011)

Selected References to Chapter 2 – Válogatott hivatkozások a 2. Fejezethez

[1] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G., Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934. (first edition), 1952. (second edition)

[2] Krasniqi, X.Z., On α-convex sequences of higher order, J. Numer. Anal. Approx. Theory **45**(2), 177–182 (2016)

[3] Kuczma, M., An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicac, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985, 2nd ed. (ed. by A. Gilányi), Birkhäuser, Basel, 2009.

[4] Mitrinović, D.S., Analytic inequalities, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970, In cooperation with P. M. Vasić.

[5] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Mathematics and its Applications (East European Series). **53**, (1991)

[6] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis, Mathematics and its Applications (East European Series). **61**, (1993)

[7] Molnár, G.M., Páles, Zs., On convex and concave sequences and their applications, Math. Inequal. Appl. **25**(3), 727–750 (2022)

[8] Niculescu C.P., Persson, L.E., Convex Functions and Their Applications, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23, Springer-Verlag, New York, 2006, A contemporary approach.

[9] Niezgoda, M., Remarks on convex functions and separable sequences, II, Discrete Math. **311**(2-3), 178–185 (2011)

[10] Niezgoda, M., Inequalities for convex sequences and nondecreasing convex functions, Aequationes Math. **91**(1), 1–20 (2017)

[11] Niezgoda, M., Sherman, Hermite-Hadamard and Fejér like inequalities for convex sequences and nondecreasing convex functions, Filomat **31**(8), 2321–2335 (2017)

[12] Popoviciu, T., Les fonctions convexes, Hermann et Cie, Paris, 1944.

[13] Roberts, A.W., Varberg, D.E., Convex Functions, Pure and Applied Mathematics. **57**, (1973)

[14] Sofonea, D.F., Ţincu, I., Acu, A.M., Convex sequences of higher order, Filomat. **32**(13), 4655–4663 (2018)

[15] Tabor, Ja., Tabor, Jó., Żołdak, M., Strongly convex sequences, Inequalities and applications 2010, Internat. Ser. Numer. Math. **161**, 183–188 (2012)

[16] Wu, Sh., Debnath, L., Inequalities for convex sequences and their applications, Comput. Math. Appl. **54**(4), 525–534 (2007)

[17] Yıldız, Ş., A general matrix application of convex sequences to Fourier series, Filomat. **32**(7), 2443–2449 (2018)

UNIVERSITY of DEBRECEN
UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/492/2023.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Gábor Marcell Molnár
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10083841

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. **Molnár, G. M.**, Páles, Z.: On convex and concave sequences and their applications.
   Math. Inequal. Appl. : 3 (3), 727-750, 2022. ISSN: 1331-4343.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/mia-2022-25-47
   IF: 1

2. **Molnár, G. M.**, Páles, Z.: An extension of the Rådström cancellation theorem to cornets.
   Semigr. Forum. 102 (3), 765-793, 2021. ISSN: 0037-1912.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00233-021-10160-7
   IF: 0.717

List of other publications

Hungarian scientific articles in Hungarian journals (1)

3. **Molnár, G. M.**: Az egyértelmű cáfolata magasabb dimenzióban.
   Debr. szle. 30 (1), 105-107, 2022. ISSN: 1218-022X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.59424/debreceniszemle/2022/30/1/105-107

Total IF of journals (all publications): 1,717
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,717

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

02 November, 2023