SZAKDOLGOZAT

EUKLIDÉSZ ÉLETE ÉS MUNKÁSSÁGA
AZ ELEMEK

Vezetőtanár:
Nagy Márta
egy. adjunktus

Készítette:
Kondor Edit
V. matematika tanár –
informatikus könyvtáros

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen
2007

Tartalomjegyzék

I. ELŐSZÓ

Szakdolgozatomban Euklidész nagy művével, az Elemekkel szeretnék foglalkozni. Természetesen nem az a célom, hogy valamiféle új, vagy annak tűnő megközelítésből szemléljem a matematika történetében eme tagadhatatlanul nagy jelentőségű - túlzás nélkül kijelenthetjük – alapműnek számító alkotást. Azt már nagyon sokan megtették. Én csupán szeretnék ennek a nagy matematikusnak, ha nem is az életébe, hiszen arról nem sokat tudunk, de legalább korának történetébe, az Elemek megalkotásával kitűzött céljába, az akkori kor matematikai tudományába betekintést nyerni, abban jobban elmélyülni, és ezeket az információkat összegyűjteni, papírra vetni.

Euklidész nevét többféle írásmódban olvastam már, s bevallom, míg nem kezdtem hozzá szakdolgozatom elkészítéséhez, nem is igazán voltam tisztában azzal, hogy vajon „Eukleidész”, „Euklides”, vagy „Euklidész” lehet-e a helyes írásmód.

Kutatásaim során aztán rájöttem ennek a titoknak a megfejtésére. A görög matematikus neve eredetileg az Eukleidész alakban volt ismert, amelyben az „ei”-t az akkoriak „ej”-nek ejtették, mivel ez az írásmód a diftongus jelölése volt ebben az esetben. De hogy a matematikus Eukleidészt ne tévesszék össze a szintén Eukleidész nevű megarai filozófussal, ezért az ő nevét a latinos Euklides alakban használják. Innen a „magyarosabb” írásmódú „Euklidész” névalak. Szakdolgozatomban ezt az írásmódot fogom használni.

Euklidész életét nem ismerjük. Csupán néhány utalás adhat némi képet egyéniségéről: írt róla kortársa, Papposz és az első nagy alexandriai tudósok közé tartozó Proklosz is, aki azt írja, hogy amikor I. Ptolemaiosz megkérdezte Euklidésztől, hogy nincs-e vajon a geometria megtanulásának rövidebb és könnyebb módja, mint az Elemek által mutatott út, akkor a nagy matematikus így válaszolt: "A geometriához nem vezet királyi út."

A geometriához vezető utat tehát az írások szerint egy csendes, szerény ember mutatta meg az emberiségnek. Az Elemek ismeretanyaga szolgáltatja a középiskolai geometriának az alapját. Az Elemek az első görög mű, amely teljes egészében ránk maradt. Anyagának nagy része már a mű keletkezése előtt ismert és feldolgozott volt. A mű tartalmazza más szerzők így például Eudoxosz, Theaitetosz, Thalész, Hippokratész felfedezéseit, elméleteit. Sok, olyan Eukleidész előtt munkálkodó hellén matematikus eredményeit őrizte meg az Elemek, akiknek elméletei más formában nrm maradtak fenn, tehát azt is mondhatjuk, hogy ezeket Euklidész mentette meg az utókor számára.

Műveiben azonban nyomát sem találjuk a geometria gyakorlati alkalmazásának. Ennek oka abban keresendő, hogy az Elemek alkotója a platóni filozófia híve volt.

Tudniillik Platón filozófiájának alapja az „idea tan”, mely szerint az érzékileg tapasztalható világon túl létezik egy másik világ, amely nem anyagi természetű, és ez pedig az ideák világa. Platón az egyes és az általános merev szétválasztásával eljutott a világ egyfajta idealista megkettőzéséhez, amelynek lényege az, hogy míg az érzéki világ alapja a mozgás, állandó változás és az ellentétek, addig az ideák világa abszolút állandó és mozdulatlan. Ez utóbbi teszi csak lehetővé az igazi tudást, és ez csak gondolkozással közelíthető meg. A görög filozófus olyan nagyra becsülte a geometriát, hogy nélküle a filozófiát el sem tudta elképzelni. Az Akadémiája bejárata fölött olvasható felirat is erre utal: „Ne lépjen ide be senki, aki nem ismeri a geometriát!” Platón azért, hogy a geometriát is "szalonképessé" tegye filozófiájában, a látszólagos világ és az ideák világa közé iktatta azt a birodalmat, amely maga változatlan, de amelyben a változások lefolynak, vagyis a teret. Ennek a változásokat magába foglaló, változatlan világnak, a térnek a tudománya a geometria. Egyébként az öt szabályos testet Platónról nevezték el platonikus testeknek.

De térjünk vissza a platoni eszméket valló Euklidészhez. Állítólag, amikor az ő egyik tanítványa megkérdezte, hogy mi a geometriának a haszna, így szólt egyik rabszolgájához : "Adj ennek az embernek három obulust, mert a geometria tanulásának hasznát keresi." (Az obulus görög eredetű szó, ezüst aprópénzt jelentett a régi görögöknél. Ezt tették a halott szájába, hogy kifizethesse Charonnak, az alvilág révészének a viteldíjat, aki a holtak lelkeit szállította át az alvilági folyón.)

Euklidész axiómarendszerénél, amelyet az Elemek első könyvében lefektet, tökéletesebbet a XIX. század végéig senkinek nem sikerült összeállítania. Ennek azonban fő hibája a hiányosság. Most hiányosságnak nevezzük, de Euklidész korában nyilván nem számított annak, hiszen akkor még nem volt szükség például azokra a rendezési axiómákra, amelyekkel David Hilbert (1862-1943) egészítette ki az euklidészieket. A ma is legelterjedtebb, általános elismerésnek örvendő axiómarendszer nyomtatásban először 1899-ben látott napvilágot. (Később aztán Hilbert tovább tökéletesítette, sok vonatkozásban kiegészítette axiómarendszerét.) Ezért tehát a Sztoikheia szerzőjét nem ítélhetjük meg szigorúan, bár Hilbert leszögezte, hogy egy axiómarendszernek három követelményt kell kielégítenie, ezek pedig a következők:

1. Legyen teljes, azaz tartalmazza mindazon axiómákat, amelyek szükségesek az általa megalapozott tudomány bármely tételéhez.

2. Legyen ellentmondásmentes, azaz ne forduljon elő olyan tétel, amelynek helyessége is, hamissága is egyidejűleg igazolható lenne.

3. Legyenek az axiómák egymástól függetlenek, azaz egyiket se lehessen igazolni a többi alapján.

Később aztán, a XX. században Kurt Gödel, (1906-1978), osztrák matematikus meggondolásai azt eredményezték, hogy az axiómarendszerek ellentmondás-mentességének bizonyítása elvi nehézségekbe ütközik, továbbá, hogy egy axiómarendszer nem lehet változtathatatlanul örök, hiszen új problémák felvetődése esetleg új axiómák bevezetését, vagy a régiek módosítását követelheti meg. Egy axiómarendszer tehát nem egyszer s mindenkorra tökéletes, hanem a tudományterülettel együtt folyamatosan fejlődik.

Nézzük tehát, milyen is volt az a kor, amely megkívánta és lehetővé tette az Elemek megszületését.

II. AZ ELEMEK ELŐZMÉNYEI

a) A KRÉTAI ÉS A MÜKÉNÉI KULTÚRA

Az Égei-tenger térségében a legrégibb civilizáció és kultúra Kréta szigetén fejlődött ki. Ennek kezdete az i. e. 3000. év tájékára tehető. Ettől kezdve a krétai kultúra töretlenül virágzott az i. e. 1500-as évekig. A krétaihoz nagyon hasonló mükénéi kultúra Görögország késői bronzkorszakának idején, i. e. 1600 és 1100 között virágzott, és hirtelen pusztulással ért véget az i. e. XII. században.

A gazdag mükénéi kultúra leleteiből az angol Arthur John Evans arra következtetett, hogy egy ilyen magas kultúrát teremtő nép már nem nélkülözhette az írást. Ilyen irányú kutatásai Krétára vezették, ahol 1900 tavaszán Knósszoszban meg is találta az első ismert krétai írott emléket.

Rengeteg írásos égetetlen agyagtáblát fedezett fel Phaisztoszban is. E leletek alapján háromféle írást különített el. Az i. e. 2000 és 1650 közötti időben képszerű jeleket (ember, ló, kocsi, kéz, csillag stb.), hieroglifákat használtak írásra. Ez a hieroglifikus írás i. e. 1750-re már vonalas (lineáris) jelekké egyszerűsödött. Ennek a lineáris írásnak kétféle változata különült el. Az első fajtát („lineáris A") kb. i. e. 1400-ig használták. Ez még megfejtetlen. A második fajta írás, a „lineáris A"-nak még tovább egyszerűsödött válfaja, az ún. „lineáris B" írás i. e. 1400 körül terjedt el, tehát a görögök Krétán való megjelenésével nagyjából egy időben.

A „lineáris B" írást az angol Michael Ventris (1922-1956) fejtette meg. Kiderült, hogy a „lineáris B" ősgörög nyelvű és alapjában szótagírás, amelynek jelei közé keveredtek a még felismerhetően képszerű, tárgyakat jelentő jelek is. A „lineáris A" írás eddig még megfejtetlen.

b) GÖRÖGORSZÁG ÉS A GÖRÖG MATEMATIKA ALAPJAINAK LERAKÁSA

A krétai, illetve a mükénéi kultúrák hirtelen pusztulása után, kb. az i. e. 1000. évtől a görögöknek mindent elölről kellett kezdeniük. Csak az i. e. VIII. századra alakult ki az új görög írás, a föníciai írás alapján. Ez az oka, hogy a közbeeső időszakról szinte semmit sem tudunk.

Az i. e. VIII. században Görögország területén már nagyjából békés viszonyok uralkodtak. Ebben az időben a civilizáció és a kultúra területén Athén volt a legkiemelkedőbb görög város. Az a korszak, amely a perzsák visszaverésétől (i. e. 478) a peloponnészoszi háborúig (i. e. 431) terjed, a görög történelem ún. klasszikus korszaka, a rabszolgákat leszámítva, igen széles népréteg számára biztosította a politikai szabadságot és a szellemi alkotás lehetőségét.

Ekkor épült az athéni Akropoliszon az Erekhtheion, Athéné istennő szentélye. Ekkor készítette szobrait Praxitelész és Pheidiasz. Ekkor írta tragédiáit Aiszkhülosz, Euripidész, Szophoklész, vígjátékait Arisztophanész és ódáit Pindarosz. Ekkor díszítette Athént festményeivel Polügnótosz. Ekkor tanította a filozófiát Szókratész, Platón mestere. Ekkor élt a peloponnészoszi háború történetírója: Thuküdidész. Ekkor ismerte fel a világ anyagi egységét Anaxagorasz. Ekkor fogalmazta meg Démokritosz az atomelméletet. Ekkor rakták le a természettudományok és a mai értelemben vett matematika alapjait.

Bizonyára nem véletlen, hogy az első görög tudósok zömmel a kis-ázsiai görög gyarmatok szülöttei. Ezekhez a gyarmatvárosokhoz, telepekhez földrajzilag közel volt az ősi babiloni kultúra. A görög kereskedők messze keletre eljutottak. Semmi csodálatos nincs abban, hogy a kisázsiai partvidék városai, szigetei többé-kevésbé a mezopotámiai civilizáció hatása alá kerültek. Ugyanígy lehetett Szicíliában is, ahol az egyiptomi befolyás érvényesülhetett.

Mivel az első görög gyarmatosítók a görögség ión törzséből kerültek ki, azért az általuk elindított görög kulturális fejlődés első korszakát, amely időben nagyjából az i. e. VI. századot jelenti, ióniai korszaknak szokás nevezni.

Ennek az időszaknak volt első képviselője Thalész, aki a kisázsiai Milétoszban született. Születésének és halálának éve bizonytalan. Adataira abból következtetnek, hogy megjósolt egy, az i. e. 585 május 28-án bekövetkezett napfogyatkozást. Ez volt az az égi jelenség, amely békekötésre késztette a médeket, amikor Ninive feldúlása után (i. e. 612) tovább akartak terjeszkedni nyugat felé. A csatát félbeszakította a napfogyatkozás, amelytől a katonák annyira megijedtek, hogy a küzdelmet beszüntették.

A Thalész által megjósolt és a harcoló feleket megbékéltető napfogyatkozás időpontja segített abban, hogy az ókori görög történelemben a mai időszámítás szerint tudjunk tájékozódni. Thalész csillagászati felkészültsége tette lehetővé a görög naptár reformját is, amelyet az ő megfigyelései és útmutatásai alapján egyik tanítványa hajtott végre.

Az i. e. VI. században működő Püthagorasz filozófus és matematikus volt, akit mondhatunk fizikusnak, csillagásznak és mágusnak, vagy akár vallásalapítónak is. A legendák ködébe burkolt életéről alig tudunk valami biztosat. Püthagorasz a Milétoszhoz közeli Szamosz szigetén született, állítólag Pherekűdész filozófus tanítványa volt, aki egy mitológiai kozmogóniát írt. Tanai, tudományos eredményei elválaszthatatlanul összekeveredtek tanítványai munkáival. Ezért legtöbbször közelebb járunk az igazsághoz, ha a püthagoreusokra gondolunk akkor is, amikor csak éppen magát Püthagorasz emlegetjük.

A püthagoreusok, mesterük nyomán, tudatosan kísérleteztek a monokhordon (egyhúrú hangszer) a szümphóniák és a húrhosszak közötti összefüggést keresve. A kifeszített húr közepén megpendítve hallatta az alaphangját. Ha a húrt felére rövidítették (ugyanolyan megfeszítés mellett), akkor az alaphang oktávját hallották. E két hang egymásutánja, hangköze a legtisztább konszonancia.

Valószínűleg éppen ennek a megfigyelésnek a nyomán alakult ki a püthagoreusokban az a nézet, hogy a természet a számok szerint van elrendezve, és fordítva: a számok törvényein keresztül ismerhető meg a mindenség, és hogy a számok közti harmónia ugyanaz, mint a lelkünkben élő örök törvények harmóniája. Ebből a harmóniaelméletből sarjadt ki a püthagoreusok két nagy kutatási területe: a zeneelmélet és a számelmélet, majdnem mindig teljes összefonódottságban.

c) HELLENIZMUS

Az Athén és Spárta egymás elleni harcában kimerült görög városok hatalmát II. Fülöp makedón király az i. e. 338-ban lezajlott khaironeiai csatában végképp megtörte, majd pedig uralmával megteremtette az egységes Görögországot.

Elég bölcs volt azonban ahhoz, hogy a görög kultúrát ne semmisítse meg, sőt támogassa a hellén szellem további kibontakozását, terjedését. Fiát is görög szellemben neveltette, hiszen Nagy Sándor egyik nevelője a matematikus Menaikhmosz volt, a másik pedig nem kisebb tudós, mint maga Arisztotelész. II. Fülöp világuralmi terveit aztán fia, Nagy Sándor rövid idő alatt teljesítette.

A nagy hódító Perzsia legyőzése után megteremtette az ókor legnagyobb birodalmát, amely Makedóniától Görögországon, Perzsián keresztül az Indiai-óceánig terjedt. Abban azonban, hogy e hatalmas birodalmat megszervezze, megakadályozta korai, hirtelen halála, ami után birodalmát hadvezérei felosztották maguk között.

Hadvezéreinek egyike, I. Ptolemaiosz vagy Ptolemaiosz Szótér (szótér=megmentő, fenntartó) néven lett Egyiptom ura. A művészeteket és tudományokat pártoló király és utódai, a Ptolemaidák Egyiptom új fővárosában, Alexandriában hatalmas kultúrközpontot építettek ki. Ebben a Muszeion nevű intézetben, amelynek óriási könyvtára mintegy 700 000 irodalmi és tudományos kéziratot őrzött, összegyűltek az akkori világ legnagyobb művészei és tudósai.

Ezek az első „államilag fizetett" művészek és tudósok Alexandriában a görög tudomány és művészet addig soha nem látott virágzását bontakoztatták ki. Ameddig csak az alexandriai iskola fennállt, képviselte a görög kultúrát, valamint azt a hellenizmusnak nevezett korszakot, amelyet Nagy Sándortól szoktunk számítani.

A hellenisztikus kor matematikájának egyik fellegvára – természetesen Athén mellett - szintén Alexandria lett, amelynek a matematikatörténetben kiemelkedő szerepét jól érzékelteti néhány nagy név : az alexandriai Euklidész, a szürakuszai Arkhimédész, a pergéi Apollóniosz, Ptolemaiosz Klaudiosz, az alexandriai Diophantosz, és még sorolhatnánk, hiszen ezek valóban csak a legnagyobb nevek.

d) HÍRES ÓKORI GÖRÖG FELADATOK

Ősidők óta felbukkannak a matematikában olyan problémák, feladatok, amelyek rejtélyes módon nem csupán a matematikusok érdeklődését keltik fel, hanem a laikusok fantáziáját is megmozgatják, és amelyek képesek évszázadokon, évezredeken át rejtélyesek maradni, megoldhatatlannak tűnő mivoltukkal megőrizve érdekességüket.

Ilyen például a három híres ókori görög feladat, amelyek talán nem véletlenül éppen geometriai tárgyúak. Ezek a szerkesztési feladatok a következők: a körnégyszögesítés, a kockakettőzés és a szögharmadolás. Lehetséges, hogy éppen a feladatok látszólagos egyszerűsége, ugyanakkor az euklideszi szerkesztéssel való megoldhatatlansága kelti azt a feszültséget, amely az érdeklődést felkelti matematikával rendszeresen, vagy csak igen ritkán foglalkozó emberben is.

Az említett feladatok eredete nem minden kétséget kizáróan ismert. Egyesek lehetségesnek vélik például, hogy a kockakettőzés babiloni származású, és az $x^3=2a$ alakú egyenlettel kapcsolatos köbgyökvonás geometriai értelmezéséhez fűződik.

A kockakettőzést déloszi problémának is szokták nevezni, méghozzá a következő legenda alapján: Állítólag, amikor Délosz szigetén pestisjárvány dühöngött, az istenek azt kívánták, hogy a kocka alakú oltárkövet kettőzzék meg, és akkor elmúlik a járvány. Ekkor gyorsan átépítették az eredeti oltárt, úgy, hogy megváltoztatták az alakját. De a pestis tovább pusztított, ezért újra ahhoz a papnőhöz fordultak, aki az istenek kívánságát közvetítette. Ő közölte, hogy nem csak meg kell kettőzni az oltár térfogatát, hanem kockaalakját is meg kell őrizni. A délosziak ekkor döbbentek rá arra, hogy nem tudják megmondani, mekkora a kétszer nagyobb térfogatú kocka éle., hiszen ehhez kellett volna az $x^3=2$ egyenlet megoldása, vagyis a $\sqrt[3]{2}$ hosszúság megszerkesztése. Eratoszthenésznek a Platónikosz című dialógusában olvasható elbeszélése szerint az építészek, mikor szembesültek ezzel a problémával, Platónhoz fordultak tanácsért, aki azt válaszolta nekik, hogy az istenek tulajdonképpen nem is kétszer akkora oltárt akarnak, hanem azt, hogy az emberek ne hanyagolják el a matematika művelését.

Platón válaszában jól látszik az a püthagoreusi felfogás, amely szerint a matematikával való foglalkozás isteni ügy. Ennek a legendának a igaz mivolta már csak azért sem valószínű, mert tudjuk, hogy Platón előtt már például Püthagorasz is foglalkozott a kockakettőzés problémájával.

Létezik egy másik legenda is, amely a feladat eredetét Mínósz király idejére viszi vissza, aki a Glaukosz tengeri isten számára emelt kocka alakú emlékmű megkétszerezését kívánta, tehát ott is hasonló okokból merült fel a probléma.

Felvetődött az a kérdés, hogy a rejtélyes feladatok megoldhatók-e euklideszi szerkesztéssel. Éppen ennek a kérdésnek a kutatása indított el a matematikában sokirányú fejlődést, és éppen ez adja meg a három feladat jelentőségét.

Nézzük, mit értünk euklideszi szerkesztésen, azaz, hogy az euklideszi szerkesztés során milyen adatokat és milyen eljárásokat szabad használnunk.

A szerkesztés adatai: ugyanabban a síkban adott pontok, egyenesek és körök. Ezekből kell újakat származtatni körzővel és egyélű vonalzóval, ha csupán az alábbi lépéseket engedjük meg:

1. Két egyenes metszéspontjának a kijelölése.

2. Két kör metszéspontjának a kijelölése.

3. Egyenes és kör metszéspontjának a kijelölése.

4. Két ponton át egyenes rajzolása.

5. Két pont távolságának körzőnyílásba vétele és ezzel adott, vagy már megszerkesztett pontból mint centrumból kör rajzolása.

Nem szabad továbbá tetszőleges nyílású körzővel kört rajzolni, a kör sugara mindig adott, vagy az adatokból megszerkeszthető távolság kell hogy legyen. A szerkesztési feladatot akkor tekintjük megoldottnak, ha megadtunk egy, a keresendő alakzatot előállító, véges számú lépésből álló általános eljárást, amely tehát valamely szerkesztési feladat bármilyen konkrét adatainál alkalmazható, és természetesen csak a felsorolt, megengedett mozzanatokból tevődik össze.

Kiderült, hogy az euklideszi szerkesztés egyik probléma megoldása során sem járható út. Itt azonban ezeknek a megoldásoknak a részletezésétől eltekintek.

e) EUKLIDÉSZ ÉLETÉRŐL

A matematikus Euklidészről személy szerint úgyszólván semmit sem tudunk. Mindazt, amit mégis elmondhatunk róla, műveiből, főként az Elemekből kell kiolvasnunk. Azt például, hogy mikor élhetett, ilyen okoskodással szokták megállapítani:

Munkájából azonnal kiderül, hogy ezt csak a Platón és Arisztotelész utáni időben írhatták. Mivel Arisztotelész i. e. 322-ben halt meg, biztosnak látszik, hogy ezután az időpont után íródott. De az is biztos, hogy Euklidész műve megelőzi a két híres ókori matematikust: Apollónioszt és Arkhimédészt. Arkhimédész, aki már idézi Euklidész Elemeit, i. e. 287 és 212 között élt. Euklidész tehát nagyjából i. e. 300 körül írhatta munkáját. - Jól összevág ezzel a datálással az is, amit annál a Proklosznál olvasunk, aki időszámításunk 5. századában élt, és akitől ránk maradt az euklidészi Elemek I. könyvéhez írt legjobb ókori kommentár. Van ugyanis Proklosz magyarázatai között egy olyan rövid áttekintés a legrégibb görög matematikusokról, amely újkori feltevés szerint még Arisztotelész tanítványától, a 4. századi Eudémosztól származhat. Ennek a többek által nagyra tartott eudémoszi áttekintésnek a gondolatmenete ugyancsak megerősíteni látszik az Euklidész életkorára vonatkozó kronológiai következtetést.

Ugyanígy felelhetünk arra a kérdésre is: Hol élhetett, vagy hol működött Euklidész? - A híres késő-antik matematikus, Papposz, akinek az életkora egyébként szintén meglehetősen bizonytalan (időszámításunk 4. századának a vége, vagy inkább az eleje?) - említi „Matematikai Gyűjtemény" című munkájában, hogy a nagy Apollóniosz hosszabb ideig együtt volt Alexandriában Euklidész tanítványaival. Eszerint tehát Euklidész is Alexandriában élt. Vagy csak ott tanított egy darabig? Talán éppen az alexandriai „Múszeion" gazdag könyvtára tette volna lehetővé számára nagy műve összeállítását? - Ezek már inkább csak találgatások Papposz adata nyomán.

Elmondja még Papposz, hogy Euklidész lelkiismeretes, nyíltszívű, barátságos, szerény egyéniség volt. Nem zárkózott el a nála fiatalabbak ötletei, okfejtése elől; szívesen meghallgatta, mérlegelte ezeket is. Az pedig soha eszébe nem jutott volna, hogy mások érdemeit, gondolatait úgy tüntesse föl, mintha azok tőle származnának. - Ez az utóbbi megállapítás nyilván azzal függ össze, hogy Euklidésznek az Elemekben túlnyomórészt korábbi matematikusok tételeit, bizonyításait kellett rendszerbe foglalnia. Összeállításának azonban nem az volt a célja, mintha ő mindazt, amit előad, teljes egészében saját műveként akarta volna az olvasó elé tárni - ezt a gondolatot akarja kiemelni Papposz megjegyzése.

III. ELEMEK

a) EUKLIDÉSZ FŐ MŰVEI

Euklidész Elemek című műve a matematika „klasszikusa”, tartalmazza a matematika azon részét, amely a mai középiskolai tananyag szerves részét is képezi. A könyvnyomtatás feltalálása óta az egyik legtöbb kiadásban megjelent mű.

Tudjuk, hogy Euklidész legjelentősebb és legismertebb műve az Elemek. De egyéb, hasonlóképpen matematikai tárgyú munkáiról is tudunk, bár ezeknek egy részéről nem sokat tudunk, hiszen a többségük elveszett. Mindenesetre valószínű, hogy ezek jelentőségükben messze elmaradtak az Elemek mögött. A matematikán kívül foglalkozott még zeneelmélettel és csillagászattal.

Az Elemeken kívül tehát a következő fennmaradt, részben fennmaradt, vagy teljesen megsemmisült, csupán más szerzők által említett műveiről tudunk Euklidésznek:

1. A „Pszeudaria"-t csak címéről ismerjük, a munka maga elveszett. A cím jelentése: „Hamis tételek" vagy „Álbizonyítások". A címből ítélve arról szólhatott, hogy hogyan kerülhetjük el a matematikában a téves gondolatokat, a helytelen levezetéseket.

2. A „Dedomena" című munkája megmaradt, címének jelentése „Adott mennyiségek". Azt mutatja be, hogy hogyan számíthatók ki bizonyos adott mennyiségekből más mennyiségek, amelyek az előbbiekkel összefüggnek, de közvetlenül nem ismertek. A művet vizsgáló modern elemzők ezt a munkát általában úgy fogják fel, mintha ez valami „euklidészi algebra" kulcsa lenne.

3. Egy másik, a síkidomok felosztásáról szóló műve csak arab fordításban maradt ránk, az is jóval később keletkezett, mint maga a mű.

4. A „Poriszmoi" című műve olyan tételeket mutat be, amelyek témájukat tekintve valahol a „theórémák" és a „szerkesztési feladatok" között helyezhetők el.

5. Euklidész külön munkájában foglalkozott a „mértani helyekkel".

6. Egy elveszett munkája a kúpszeletekről szólt. Az ebben lényeges részek feltehetően belekerültek Apollóniosz hasonló tárgyú munkájának abba a részébe, amely szerencsére fennmaradt. Itt meg kell említenünk azt is, hogy Apollóniosz a kúpszeletek elméletében messze túljutott Euklidész eredményein.

7. Fennmaradt Euklidésznek egy műve a perspektíváról, „Optika" címen.

8. A tükörképekkel foglalkozik a „Katoptrika" című munkája, amely a geometriai fénytan alapjait rakja le.

9. A Sectio Canonis című műve régi pythagoreusok zeneelméletét foglalja össze. A latin cím fordítása : „A kánon metszése".

10. A „Phainomena" című műve elemi asztronómiával foglalkozik, az égbolt félgömbjének látszólagos mozgását, a csillagok felkelését-lenyugvását tárgyalja.

b) ELEMEK

Azt, hogy már kortársai is sokkal fontosabbnak tartották egyéb műveinél az Elemeket, abból látható leginkább, hogy erről kapta szerzőjük kitüntető nevét: Sztoikheiótész, magyarul, „az, aki az Elemeket írta". Annál fogva, hogy az Elemek neve görögül: Sztoikheia.

Az Elemek latinul először 1482-ben vált hozzáférhetővé. Magyar nyelvre először Brassai Sámuel fordította 1865-ben. Mayer Gyula kitűnő magyar fordításában 1983-ban jelent meg.

Bár az Elemek legtöbb fennmaradt kéziratában van egy XIV., sőt még egy XV. könyv is, de tudjuk ezekről, hogy csak utólag csatolták őket Euklidész munkájához. A XIV. könyv szerzője az alexandriai Hypsziklész volt az i. e. 2. században, a XV. könyv pedig még későbbi eredetű, időszámításunk 6. századából való.

Mindenkinek, aki ezt a művet a kezébe veszi, feltűnik, hogy Euklidész túlnyomórészt a geometriával foglalkozik; az aritmetika ezen belül csak egészen alárendelt szerephez jut, nem is foglalkozik vele több, csupán az Elemek három könyve: a VII., VIII. és IX. Pedig ez egyáltalán nincs összhangban azzal, amit Proklosz az Elemekhez írt kommentárjában, az ún. „második előszóban" kifejt. Magyarázatában ugyanis egyértelműen leszögezi, hogy a matematika tudománya két részből áll: aritmetikából és geometriából. Proklosz nyomatékosan hangsúlyozza, hogy a geometriát csak a második hely illeti meg az aritmetika után.

Proklosz ezt a rangsorolást a következőképpen indokolja: Egyrészt a számok elvontabbak (absztraktabbak) mint a geometriai idomok. A számok között van olyan legkisebb, amelyből minden további szám felépíthető, méghozzá az 1. A görög aritmetika ragaszkodott az 1 oszthatatlanságának a gondolatához, ahhoz, hogy nincs kisebb szám, mint az 1. A törteket két-két szám aránya helyettesíti. De nem így van ez a geometriában, ahol nincs legkisebb, itt ugyanis megvan a „végtelenül osztható"; ahol pedig ez fellép, ott mindjárt jelentkezik az is, amit a görögök alogonnak (azaz „ésszel föl nem foghatónak") neveztek.

Az Elemek című mű 13 könyve terjedelmében, felépítésében és kidolgozottságában is eltér egymástól.

Az Elemek I. könyve az egyik legérdekesebb. Nemcsak azért, mert egyike a legjobban kidolgozottaknak, hanem azért is, mert ennek a könyvnek mind a 48 tétele szigorú sorrendben követi egymást egymásra épülnek, míg el nem éri a tárgyalás az előre kitűzött célt, vagyis a 47. tételben a Pythagorasz tételt, a 48. tételben pedig ennek a megfordítását. Az első könyv azért is érdekes, mert itt, rögtön az elején találjuk a legtöbb matematikai princípiumot. Euklidész ezeket három csoportba osztva sorolja fel, amelyek a következők:

<u>Definíciók</u>

1. Pont az, aminek nincs része.
2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.
3. A vonal végei pontok.
4. Egyenes vonal az, amelyik a rajta levő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.
5. Felület az, aminek csak hosszúsága és szélessége van.
6. A felület végei (=szélei) vonalak.
7. Síkfelület az, amelyik a rajta levő egyenesekhez viszonyítva egyenlően fekszik.
8. A síkszög két olyan egysíkbeli vonal egymáshoz való hajlása, amelyek metszik egymást, és nem fekszenek egy egyenesen.
9. Ha a szöget közrefogó vonalak egyenesek, egyenes vonalúnak nevezzük a szöget.
10. Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögei keletkeznek, akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amelyen áll.
11. Tompaszög az, amelyik nagyobb a derékszögnél.
12. Hegyesszög pedig, amelyik kisebb a derékszögnél.

13. Határ az, ami vége valaminek.
14. Alakzat az, amit egy vagy több határ vesz körül.
15. A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül [ezt nevezzük körvonalnak] úgy, hogy az e vonal és egy, az alakzat belsejében fekvő font közé eső szakaszok egyenlők egymással.
16. Ezt a pontot a kör középpontjának nevezzük.
17. A körnek átmérője bármely, a középponton át haladó egyenes vonal, amely mindkétoldalt a kör kerületén végződik. Az ilyen egyenes félbevágja a kört.
18. A félkör olyan alakzat, amelyet egy átmérő és az általa kimetszett körív vesz körül. < A félkör középpontja ugyanaz a pont, amelyik a köré is. >
19. Egyenes vonalú alakzatok (azaz sokszögek) azok, amelyeket egyenes vonalak vesznek körül, háromoldalúak, amelyeket három, négyoldalúak, amelyeket négy, sokoldalúak pedig, amelyeket négynél több egyenes vesz körül.
20. A háromoldalú alakzatok közül egyenlő oldalú háromszög az, amelynek három egyenlő oldala van, egyenlő szárú, amelynek csak két egyenlő oldala van, ferde pedig, amelynek három nem egyenlő oldala van.
21. Továbbá a háromoldalú alakzatok közül derékszögű háromszög az, amelynek van derékszöge, tompaszögű, amelynek van tompaszöge, hegyesszögű pedig, amelynek három hegyesszöge van.
22. A négyoldalú alakzatok közül négyzet az, amelyik egyenlő oldalú és derékszögű, téglalap, amelyik derékszögű, de nem egyenlő oldalú, rombusz, amelyik egyenlő oldalú, de nem derékszögű, romboid, amelynek a szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, de sem nem egyenlő oldalú, sem nem derékszögű. A többi négyoldalú neve legyen trapéz.
23. Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkétoldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.

Posztulátumok

1. Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.

2. És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.

3. És hogy minden középponttal és távolsággal legyen kör rajzolható.

4. És hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen.

5. És hogy ha két egyenest úgy metsz egy egyenes, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek (összegben) két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék azon az oldalon, amerre az (összegben) két derékszögnél kisebb szögek vannak.

Axiómák

1. Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.

2. Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, akkor az összegek egyenlők.

3. Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.

4. Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.

5. Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.

6. Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.

7. Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.

8. Az egész nagyobb a résznél.

9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.

A mai matematikai szemlélet nem egyezik azzal, hogy Euklidész definiál olyan fogalmakat is, mint pont, vonal, egyenes stb., hiszen manapság az ilyen alapvető fogalmakat nem definiáljuk, alapfogalmaknak tekintjük és akként kezeljük őket. Ennek csupán az lehet az oka, hogy a mai matematikai elgondolás másban látja a definíció szerepét, mint amiben ezt Euklidész és kortársai látták. Előfordulnak Euklidész definíciói között olyanok is, amelyeket később a tételek tárgyalása során soha nem használ. Például a 22. definíció rombuszról, romboidról és trapézról beszél anélkül, hogy a tételekben később egyetlen egyszer is ilyen néven említenének valamely paralelogrammát. Logikai szempontból persze, hibának tekinthető az ilyen „fölösleges definíció".

Történeti szempontból azonban tanulságosnak mondható. Hiszen bizonyítékként szolgál ez arra, hogy a korábbi, Euklidész előtti görög geometria is használt ilyen fogalmakat.

Ezen kívül ebből arra is következtethetünk, hogy hogyan dolgozott, dolgozhatott Euklidész. Feltehetően kitette maga elé a korábbi Elemeket, nem tudhatjuk melyiket, Hippokratész, León vagy Theudiosz munkáját, és amit ezekben használhatónak talált, azt átvette saját munkájába. A rombusz, romboid és trapéz nevek alighanem ilyen korábbi matematikai munkákból kerültek át hozzá, azt is mondhatnánk, hogy figyelmetlenségből.

Korábbi Elemeket említettünk, nem véletlenül. Bár igaz, hogy az egész korábbi, Euklidész előtti görög matematikáról nagyon keveset tudunk, mégis biztos forrásaink vannak arról, hogy éppen az Euklidészt megelőző nem egészen 150 év során hárman is kísérleteztek egy-egy olyan jellegű munkával, mint Euklidész műve. Az egyik az 5. század második felének híres szofistája - és egyben tehetséges matematikusa - a khioszi Hippokratész. Proklosz híradása szerint ő az első, aki Elemeket állított össze. Ugyancsak Proklosz említi, mint ilyen munkák szerzőit, az egyébként ismeretlen Leónt, és egy bizonyos magnésziai Theudioszt.

Bár a mi számunkra ezek már csak nevek, hiszen ezekből az összeállításokból semmi sem maradt fenn, sőt, úgy látszik, nem forgott közkézen ennek a háromnak a munkája már az ókorban sem és Prokloszon kívül egy antik szerző sem beszél ezekről a régi Elemekről, egy bizonyos szempontból azonban talán mégsem lényegtelen, hogy tudunk Euklidészen kívül még három korábbi kísérletezőről. Ez ugyanis arra utal, hogy egy bizonyos, történetileg jól körülhatárolható időszakaszban, amely talán éppen Euklidésszel zárult, különös aktualitása lehetett egy ilyen jellegű matematikai munka összeállításának.

A „posztulátum" latin fordítása a megfelelő görög aitéma szakkifejezésnek. A posztulátumok a tárgyalásra kerülő geometriai idomok megszerkeszthetőségét biztosítják, ennél fogva a matematikai egzisztencia problémájához kapcsolódnak. Megszerkeszthetők a geometriai idomok, mert ahogy az első két posztulátum kimondja, bármely két pont összeköthető egyenes vonallal, valamint bármely adott egyenes tetszés szerint meghosszabbítható. A harmadik posztulátum a tetszőleges sugarú kör megszerkeszthetőségét mondja ki. Ezek szerint az első három posztulátum lehetővé teszi a vonalzó és a körző használatát. Csak ez a kettő tekinthető a geometria klasszikus, megengedett segédeszközének.

Külön meg kell említenünk a híres 5. posztulátumot. Egyesek szerint ez a híres párhuzamossági posztulátum talán magától Euklidésztől származik. Mint ismeretes, Euklidész után több mint 2000 éven át többször is próbálták eldönteni a vitát, miszerint hátha nem is posztulátumról van szó, hanem tételről, amit be is lehetne bizonyítani. Az egyik legelső, aki a vitát eldöntötte, Bolyai János volt, aki enélkül a posztulátum nélkül építette fel ún. abszolút geometriáját, igazolva ezzel Euklidészt és eldöntve a vitát, vagyis a kérdéses állítás valóban eldönthetetlen posztulátum, és nem tétel.

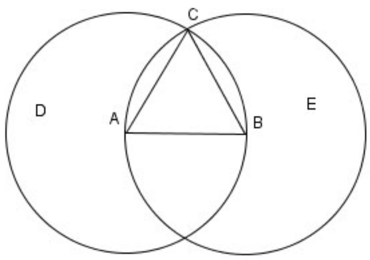
A princípiumok harmadik csoportja az axiómák. Több Arisztotelész-idézet igazolhatja, hogy korábban ezekre a bizonyítás nélkül elfogadott elvekre „axiómata" kifejezést használták. A másik név, amelyet ezekre Euklidész szövege használ, a „koinai ennoiai",amely feltehetően későbbi eredetű, és azzal a felfogással függ össze, amelyet ezekről az elvekről Arisztotelész nyomán vallottak. Arisztotelész ugyanis meg volt győződve arról, hogy az axiómák olyan állítások, amelyeknek igaz voltát „józaneszű ember nem vonhatja kétségbe", ahogyan ezt egyébként Proklosz is hangsúlyozza. Ezt a nézetet a későbbi görög matematikusok is elfogadták, magukévá tették.

Dolgozatomban arra is kerestem a választ, vajon mi lehet az, ami az Elemeket a Biblia után a legtöbb kiadást megért könyvvé tette. Ez nem más, mint a tárgyalás módszere. Az Elemek az első mű, amely nem csupán megkísérli, hanem következetesen végig is viszi az akkor ismert matematikai anyagon a deduktív módszert. Lássunk erre egy szemléletes példát rögtön a mű első könyvéből:

I. 1. Tétel

Állítsunk adott véges egyenesszakasz fölé egyenlő oldalú háromszöget!

Legyen AB az adott véges egyenesszakasz. Az AB véges egyenesszakasz fölé kell tehát egyenlő oldalú háromszöget állítani.

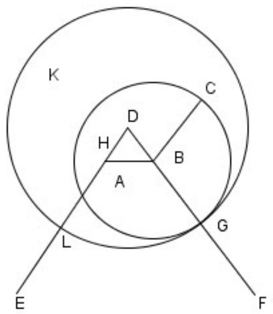


Legyen BCD az A középpontú, AB távolsággal rajzolt kör (3. Poszt.), továbbá ACE a B középpontú, BA távolsággal rajzolt kör, és a C pontból, amelyben metszik egymást a körök, illesszük az A, B pontokra a CA, CB egyeneseket (1. Poszt.).

Minthogy az A pont középpontja a CDB körnek, AC egyenlő AB-vel, továbbá, minthogy a B pont középpontja a CAE körnek, BC egyenlő BA-val. De megmutattuk, hogy CA is egyenlő AB-vel, tehát CA és CB mindketten egyenlők AB-vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát CA is egyenlő CB-vel (1. Ax.), így CA, AB és BC mindhárman egyenlők egymással. Tehát az ABC háromszög egyenlő oldalú, és az adott AB véges egyenesszakasz fölé állítottuk. Éppen ezt kellett megtenni.

I. 2. Tétel

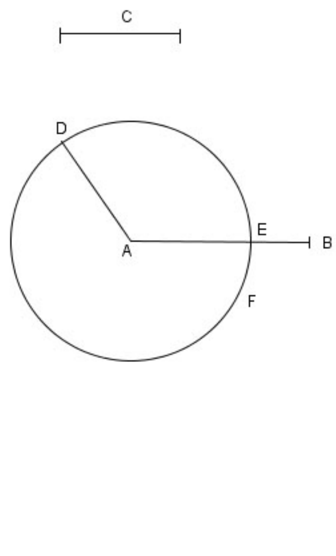
Helyezzünk el adott ponthoz adott szakasszal egyenlő szakaszt!



Legyen A az adott pont, BC pedig az adott szakasz. Az A ponthoz az adott BC szakasszal egyenlő szakaszt kell tehát elhelyezni.
Illesszük az A pontból a B pontra az AB szakaszt (1. Poszt.), és állítsuk fölé a DAB egyenlő oldalú háromszöget (I. könyv 1. tétel), és legyenek AE, BF a DA, DB egyenesszakaszok egyenes menti meghosszabbításai (2. Poszt.), és legyen CGH a B középpontú, BC távolsággal rajzolt kör (3. Poszt.), továbbá GKL a D középpontú, DG távolsággal rajzolt kör.
Minthogy a B pont középpontja a CGH körnek, BC egyenlő BG-vel. Továbbá, minthogy a D pont középpontja a KLG körnek, DL egyenlő DG-vel. Ezekből DA egyenlő DB-vel, tehát a maradék AL egyenlő a maradék BG-vel (3. Ax.). De megmutattuk, hogy BC is egyenlő BG-vel, tehát AL és BC mindketten egyenlők BG-vel. Amik viszont ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők, tehát AL is egyenlő BC-vel (1. Ax.).
Tehát az adott A ponthoz az adott BC szakasszal egyenlő AL szakasz fekszik. Éppen ezt kellett megtenni.

I. 3. Tétel

Vonjunk ki két adott, egyenes szakasz közül a nagyobbikból egy, a kisebbel egyenlő szakaszt!



Legyen AB és c a két adott, nem egyenlő szakasz, s legyen közülük AB a nagyobb. A nagyobb AB-ből kell tehát egy a kisebb c-vel egyenlő szakaszt kivonni.
Feküdjék az A pontnál a c szakasszal egyenlő AD (I. könyv 2. tétel), és legyen DEF az A középpontú, AD távolsággal rajzolt kör (3. Poszt.). Minthogy az A pont középpontja a DEF körnek,

AE egyenlő AD-vel. De c is egyenlő AD-vel. Tehát AE és c mindketten egyenlők AD-vel, úgyhogy AE is egyenlő c-vel. (1. Ax.).
Tehát a két adott AB és c szakasz közül a nagyobbikból, AB-ből kivontuk a kisebb c-vel egyenlő AE-t. Éppen ezt kellett megtenni.

A II. könyv jóval rövidebb, mint az első, hiszen csupán 14 tételből áll. Történeti szempontból különösen azért figyelemre méltó ez a könyv, mert ennek a tételeiben ismerte fel több modern kutató az ún. „geometrikus algebrát". Ebben a megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy ezeket a tételeket mi manapság algebrai formában tárgyaljuk. Az viszont, hogy vajon valóban algebrai problémák adtak-e alkalmat már az ókorban is ezeknek a kidolgozására, azt nem lehet tudni.

A III. és IV. könyv még szorosabban kapcsolódik egymáshoz, mint a megelőző kettő. A III. 37 tételből áll, és a körnek néhány alapvető tulajdonságát foglalja össze, a IV. 16 tételében a körbe (és a kör köré) írható szabályos sokszögeket - háromszög, négyszög, ötszög, hatszög és a körbe írt tizenötszöget - tárgyalja. A „kört", „középpontját", „átmérőjét" és a „fél- kört" már bemutatta egy-egy definíció az I. könyv elején, mert ezekre szükség volt már az I. és II. könyv néhány tételében is. A III. könyv további, körre vonatkozó 11 definícióval egészíti ki a korábbiakat.

Az Elemek V. könyve különböző mennyiségek egymással való kapcsolatával, arányával foglalkozik. Egy ókorból származó iskolai feljegyzés, egy ún. szkholion, amelynek szerzőjét nem ismerjük, azt állítja, hogy sokan úgy tudják, hogy Euklidész az Elemek V. könyvében Platón fiatalabb kortársának, a híres matematikusnak és csillagásznak, Eudoxosznak az arányelméletét foglalta össze. A szkholionok eredetileg margóra írt rövid feljegyzések voltak, amelyeket egy-egy, az iskolában tanított szerzőnek a művéhez fűztek. Később, még az ókorban, felismerték ezeknek az iskolai feljegyzéseknek a hasznosságát, és összegyűjtve külön ki is adták egy részüket.

Az ismeretlen ókori forrás igazsága mellett szól az ötödik könyvének ötödik definíciója, amelyet elolvasva meggyőződhetünk arról, hogy ezt a definíciót valóban csak olyan nagy matematikus alkothatta, aki rájött arra, hogyan lehet új alapokra helyezni az egész korábbi arányelméletet az úgynevezett összemérhetetlen, vagyis inkommenzurábilis mennyiségek felfedezése után.

Az említett definíció a következőképpen hangzik:

„Azt mondjuk, hogy mennyiségek ugyanazon arányban állnak, az első a másodikkal és a harmadik a negyedikkel, ha az elsőnek és a harmadiknak ugyanannyiszorosai a második és a negyedik ugyanannyiszorosainál, bárhányszoros is a többszörözés, páronként vagy egyszerre nagyobbak, vagy egyszerre egyenlők, vagy egyszerre kisebbek megfelelően párosítva őket. ”

Ez tehát Eudoxosz matematikai érdeme. Ugyanis biztosra vehető, hogy volt a görög matematikának arányelmélete már Eudoxosz előtt. Sőt, meg is maradt számunkra sok minden ebből a régi tanításból. Euklidész azonban az Elemek első négy könyvébe egyáltalán semmit sem vett be ebből a korábbi, Eudoxosz előtti elméletből. Úgy látszik, ő az arányok tárgyalását mindjárt azon a színvonalon akarta elkezdeni, amely az ő idejében a legkorszerűbb volt. Ezt tette az V. könyvben.

A VI. könyv annak az eudoxoszi arányelméletnek az alkalmazása a planimetriára, amelyet elöljáróban az V. könyv alapozott meg. Az arány a geometriában mindenekelőtt az idomok hasonlóságával kapcsolatban jut szerephez; ezért kezdődik a VI. könyv egy olyan definícióval, amely éppen az egyenesvonalú idomok hasonlóságát határozza meg.

A VI. könyv után átmenetileg félbeszakad a geometria tárgyalása. Anélkül, hogy az eddig előadottakhoz szervesen kapcsolódna, közbeékelődik a 3 aritmetikai könyv: VII-VIII-IX. Ennek a háromnak szorosabb egysége már abból is látható, hogy Euklidész a VII. könyv elején sorolja a fel azt a 23 definíciót, amelyre az aritmetikában szüksége lesz. A VIII. és IX. könyv nem vezet be újabb definíciókat. A páros és páratlan elméletére például csak a IX.

könyv végén kerül ugyan sor, de ennek a definíciói már a VII. könyv elején is olvashatók.

A VII. és VIII. könyv több tétele korábbi eredetű. Nemhogy az Eudoxosz előtti korból származnak, hanem feltehetően megelőzik azokat a geometriai tételeket is, amelyek „megkerülik az összemérhetetlenség problémáját."

A VII. könyvben számelméleti alapfogalmakat gyűjt össze, az egység és a törtrész kapcsolatával, a páros és páratlan, prím- és összetett számokkal foglalkozik. Megjelenik a „tökéletes szám” fogalma: „Egy szám tökéletes, ha egyenlő az osztói összegével.”

A VIII. könyvben mértani sorozatokkal, arányokkal, négyzet- és köbszámokkal, valamint ezek kapcsolatával foglalkozik.

Az Elemek IX. könyvének végén 16 tétel a páros és páratlan elméletéről szól. Ezek főként azért érdekesek, mert a szerencsés véletlen lehetővé tette datálásukat, amely i. e. 500 körülre tehető. A szicíliai költő, Epikharmosz egyik töredéke félreérthetetlenül céloz ezekre a tételekre. Jelenleg ez a páros és páratlan elmélet a görög matematika legrégibb ismert tételsorozata.

A X. könyv az Elemek 13 könyve között a legterjedelmesebb: 115 tételből és 4 definícióból áll, ezek a könyv elején találhatók. De ez egyúttal a legkevésbé olvasott és a legnehezebbnek tartott könyv is. Így nyilatkozott erről már a 13. században az itáliai Fibonacci, a 16. század végén a németalföldi Simon Stevens, és azóta még sokan mások, akik egyáltalán megkísérelték, hogy elmélyedjenek a matematikai irracionalitásoknak ebben az impozáns antik elméletében. Általában magasztalni szokták ennek a könyvnek „szigorú, logikus felépítését", rendkívül „tömör és rövid bizonyításait", amelyek kevés kivételtől eltekintve a modern igényeket is kielégítik, de bármilyen egyöntetű tisztelettel, elismeréssel beszélnek is erről a könyvről, részletes, meggyőző történeti elemzése a modern irodalomból eddig nem ismert.

Ahogyan az Elemek V. könyvében Eudoxosz eredményeit foglalta össze Euklidész, ugyanúgy ez a X. könyv tulajdonképpen Theaitétosz műve lenne. Valóban van nyoma annak, hogy megpróbálták ennek a könyvnek egyes tételeit már az ókorban annak az egyébként nem ismert és fiatalon elhunyt matematikusnak tulajdonítani, akinek nevét Platón egyik dialógusa, a „Theaitétosz" viseli. Úgy tűnik, ez a dialógus már az ókorban nagy hatással volt azokra, akiket érdekelt a matematika. Az újkorban is, egészen a legutóbbi időkig, ki akarták olvasni ebből a dialógusból a „történeti Theaitétosznak" egy matematikai felfedezését. Ez mindenesetre tévedés. Platón dialógusában ilyesmiről nincs szó. Hasonlóképpen bizonyos az is, hogy az a szkholion, amely az Elemek X. könyvének 9. tételét Platónra hivatkozva Theaitétosznak tulajdonítja, téved. Platón szövege nem erősíti meg állítását. Éppen azért, mert ebben a két részletkérdésben nyilvánvaló a tévedés, függőben kell maradnia annak a másik, általánosabb érdekű kérdésnek is, nevezetesen, hogy valóban Theaitétosz lenne-e a X. könyv szerzője. Azon érvek szerint, amelyekre eddig hivatkozni szoktak, ez a kérdés nemigen dönthető el. Az azonban mindenesetre tagadhatatlan, hogy a X. könyv szerzője kiváló matematikus volt.

A X. könyv is foglalkozik az arányokkal, összemérhető és összemérhetetlen szakaszok és mennyiségek kapcsolatával, közös mértékével foglalkozik.

A X. könyv összesen tizenötféle szakaszt különböztet meg; ezek közül kettő racionális, a többi irracionális. Euklidész a X. könyv tételeit csak a XIII. könyvben, a szabályos testekkel kapcsolatban alkalmazza.

A testmértannal, azaz a sztereometriával foglalkozik az Elemek utolsó három könyve, a XI., XII. és XIII. A görög geometria szó - amelyet magyarra mértannak szoktunk fordítani - eredetileg földmérést jelent. Ennek megfelelően a matematikának ez az ága korábban síkmértan, vagyis planimetria volt, erre épülhetett később a testmértan, azaz a sztereometria.

Euklidész a síkmértant az 5 posztulátummal vezette be. Igazában szüksége lett volna ezekhez hasonló más posztulátumokra a sztereometriában is, de a XI. könyv elején nincs egy posztulátum sem, csak 28 új definíció.

Azonban, ha jobban megvizsgáljuk ennek a XI. könyvnek első három tételét, hamar rájöhetünk, hogy ezeknek a bizonyításai úgyszólván nem sokat érnek. Ahogyan erre már többen is utaltak, ez a három tétel tulajdonképpen inkább három posztulátum lehetne, amelyet jobb lett volna bizonyítási kísérlet nélkül, elvként elfogadtatni. Hogy erre valóban megvolt a lehetőség, azt mutatja az eudoxoszi V. könyv példája. Bár itt sincs posztulátum, de van ennek a könyvnek a definíciói között egy olyan, amely minden további nélkül lehetne posztulátum is, méghozzá a negyedik, amelyet a 19. században nem éppen találó névvel „arkhimédészi alaptörvénynek" neveztek el.

A XI. könyv 39 tétele bevezetés a testmértanba. A tételek itt is bizonyos didaktikai szempontból „emelkedőnek" nevezhető sorrendben követik egymást. A térben elhelyezett egyenesek és síkok viszonylag egyszerűbb problémáitól lépésről-lépésre jutunk el a testszögeken keresztül a prizmákhoz, a parallelepipedonhoz és a kockához. Általában azzal jellemezhető a XI. könyv, hogy ebben, a párhuzamosságtól eltekintve, még csak olyan sztereometriai kérdésekről van szó, amelyek tárgyalhatók a végtelen problémájának érintése nélkül. Éppen ebben különbözik ez a könyv az utána következő XII.-től.

A XII. könyv jellemzője, hogy alkalmazza az úgynevezett „exhaustio módszerét", pl. a 2., 3., 4., 5., a 10., 11., 12. tételben, és egy kissé más formában a 16-18. tételekben. Arkhimédész szerint ez a módszer Eudoxosztól származik. Röviden az exhaustio-t, amely kimerítést jelent, és amelynek elnevezése erősen félrevezető, mert tulajdonképpen nem „kimerítésről", hanem éppen ellenkezőleg, valami kimeríthetetlennek a megközelítéséről van szó, a következőképpen jellemezhetjük: vegyük példának a kör területét. Ezt úgy közelítjük meg, hogy mind nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget írunk a körbe; bár ezeknek a területe mindig kisebb lesz, mint a kör területe, de minél nagyobb a sokszög oldalszáma, annál inkább megközelíti a sokszög területe a kör területét, úgy is mondhatnánk, alulról. Ha ugyanakkor szabályos sokszögeket írunk a kör köré kívülről, ezekkel is megközelítjük a kör területét, méghozzá felülről. Hiszen a kör köré írt szabályos sokszögek területe mindig nagyobb lesz ugyan a kör területénél, de minél nagyobb ezeknek a sokszögeknek az oldalszáma, annál közelebb jutunk a kör területéhez. Így aztán a két határ közé szorítva annyira közel juthatunk a kör területéhez, amennyire csak akarunk - bár tudjuk, hogy magát a kör-területet mégsem érjük el soha, de ott van ez valahol a két közelítő határ között.

Ezt a módszert alkalmazza a XII. könyv a felületek és köbtartalmak kiszámítására. Mikor azonban Euklidész térfogat-számításairól beszélünk, nem konkrét mérésekre, számokra kell gondolnunk, hiszen Euklidésznél inkább csak amolyan térfogat-megállapító tételeket találunk, mint például a XII. könyv 10. tételében: "Minden kúp harmadrésze az egyenlő magasságú és ugyanazon alapon fekvő hengernek."

A XIII. könyvben Euklidész több olyan tételt tárgyal, amely az aranymetszéssel foglalkozik. Ezeknek legalább egy része, úgy látszik, valami olyan húrtáblázatot készít elő, amilyet tulajdonképpen csak jóval későbbi korból, az időszámításunk 2. században élő csillagásznak, Klaudiosz Ptolemaiosznak a művéből ismerünk. A történeti kutatás eddig kevés figyelemre méltatta azt a kérdést: mennyiben készíti elő már Euklidész az asztronómia húrtáblázatát, ezt az „ókori trigonometriát".

Ezek után áttér az öt szabályos test tárgyalására. Az öt szabályos test a következő: tetraéder, hexaéder (kocka), oktaéder, pentagondódekaéder és ikoszaéder. Ezeknek a tárgyalásánál Euklidész mindig egy adott gömbből, illetve a gömb átmérőjéből indul ki.

Ahogyan a IV. könyv a szabályos sokszögeket egy körbe irta, úgy írja a XIII. könyv a szabályos testeket egy adott átmérőjű gömbbe. Kiszámítja továbbá Euklidész minden szabályos test élének és a köré írt gömb átmérőjének az arányát.

A későbbi ókor a szabályos testeket „platóni testek" néven tartotta számon, ahogyan ezekről Platón a „Timaiosz" című dialógusban is beszél. Biztos azonban, hogy ezeknek a szabályos testeknek egy része tudományos vizsgálódások tárgya volt, elsősorban a pythagoreusok körében, már jóval a Platón előtti korban.

Az egész XIII. könyv önmagában is kerek, zárt egész, olyannyira, hogy akadtak modern kutatók, akik feltételezték, hogy ez eredetileg Euklidész önálló műve lenne, amelyet talán csak utólag csatolt az Elemekhez. Mások azonban azt tartják valószínűnek, hogy éppen a szabályos testek tárgyalása lett volna az Elemek megalkotásának végső célja.

IV. UTÓSZÓ

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy Euklidész rendszere csodálatosan felépített, még akkor is, ha találhatók benne hiányosságok. A definíciókat például meg lehetne támadni azon az alapon, hogy segítségükkel nem kapnánk meg a pont, az egyenes vagy a felület igazi fogalmát.

Az azonban mindenképpen igaz, hogy sohasem definíciók alapján ismerjük meg a dolgokat, hiszen mielőtt az igazi megértéshez eljutnánk, tapasztalatokra kell szert tennünk az alapfogalmakkal kapcsolatosan, miközben vizsgáljuk őket, dolgozunk velük. Ugyanakkor a görögök vélhetően úgy érezték, hogy érdemes egyetlen rövid mondatba összesűríteni egy fogalom lényegét, bár nem valószínű, hogy tényleg hitték, hogy ez teljes biztonsággal átadhatja a fogalmat a hozzá nem értő, a témával nem foglalkozó olvasónak. A definíciókat tehát érdemes ebben a megvilágításban szemlélnünk.

Ahhoz nem fér kétség, hogy logikai nézőpontból kifogásolható lehet egy ilyen kijelentés : „Pont az, aminek nincs része." Hiszen a rész és egész kapcsolta nincs tisztázva. Ha azonban ezzel a definícióval csupán az a célunk, hogy a „pont" szó kimondásakor mindannyian ugyanarra a dologra gondoljunk, akkor nem rossz ez a meghatározás.

Kritika tárgyát képezheti ezenkívül esetleg az axiómák és a posztulátumok elrendezése is. Ennek oka azonban nem kizárólag Euklidész munkájában keresendő, hiszen tudjuk, hogy ezt a könyvet számtalanszor lemásolták és újra kiadták, éppen a híre és a használhatósága miatt. Ennek során nem csoda, ha a másolók hibákat követtek el. Ezenkívül némelyik kiadó néhol külön jelölés nélkül is belejavított a könyvbe az újbóli kiadás előtt, és az ilyen változásokat világos, hogy lehetetlen aztán később nyomon követni.

A filozófiailag iskolázott görögök számára teljesen világos volt, mi a különbség axiómák és posztulátumok között. Ez a különbség aztán később elhalványult, és így az eredeti kiadás bizonyos mondatai a későbbi kiadásokban más helyre kerültek át. Így fordulhatott elő az is, hogy egyes kiadások néhol egy-egy axiómát posztulátumként tüntettek fel, vagy éppenséggel fordítva.

Azt is mondhatjuk, hogy az a rendkívüli tökéletesség, amellyel a görögök a geometriát egzakt tudománnyá tették, elhomályosította a korábbi civilizációk geometriai teljesítményét, és történelmi ítéletünket is elkerülhetetlenül elfogulttá tette a görög módszerrel szemben.

IRODALOMJEGYZÉK

- Euklidész: Elemek - Bp., Gondolat, 1983.
- Sain Márton: Nincs királyi út! – Bp., Gondolat, 1986.
- Ribnyikov, K. A. : A matematika története – Bp., Tankönyvkiadó, 1968.
- Kofler, Edward: Fejezetek a matematika történetéből– Bp., Gondolat, 1965.
- Lévárdi László - Sain Márton: A ráció üzenetei: Feladatok a távoli múltból – Bp., Tipotex, 1993.
- http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/platonic/index.html#Plato
- http://czako-peter.hu/node/119
- http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/Bolyai/axioma/index.html
- http://members.iif.hu/visontay/ponticulus/jegyzetek/magyarazatok/o.html