

# **SZAKDOLGOZAT**

**Barnák Albert László**

Debrecen

2010

**Debreceni Egyetem**

**Informatikai Kar**

## **Call centerek sztochasztikus modellezése**

**Szakdolgozat**

*Témavezető:*

**Dr. Sztrik János**

tanszékvezető egyetemi tanár

az MTA doktora

*Készítette:*

**Barnák Albert László**

Mérnök informatikus BSc

**Debrecen**

**2010**

# Köszönetnyilvánítás

*Dolgozatomat emlékül ajánlom dédnagyapámnak Dr. h. c. Stasney Albertnek és nagyapámnak Dr. Richter Richárdnak, akik már nem taníthattak engem.*

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Sztrik Jánosnak a dolgozatom elkészítéséhez nyújtott segítséget és mindazt az erkölcsi, szakmai támogatást amit eddig az egyetemi éveim alatt tőle kaptam.

További köszönetet szeretnék mondani volt és jelenlegi matematika tanárainknak, akik megszerettették velem ezt a tudományt:

- Biacsi Dávid SJ
- Dr. Pink István
- Dr. Páles Zsolt
- Szabóné Kató Hajnalka
- Dr. Sztrik János
- Velkey Balázs

Külön köszönet Szanati Lászlónak, aki a Nextent Informatika Zrt. részéről adatokat biztosított a rendelkezésemre a Voice Miner termékükkel kapcsolatban.

# Tartalomjegyzék

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Bevezetés</b>                                                        | <b>5</b>  |
| 1.1. Témaválasztás indoklása . . . . .                                     | 5         |
| 1.2. Call centerek világa . . . . .                                        | 5         |
| 1.2.1. Bevezetés . . . . .                                                 | 5         |
| 1.2.2. Mi is az a call center? . . . . .                                   | 6         |
| 1.2.3. Technológia . . . . .                                               | 7         |
| 1.2.4. Call centerek mint sorbanállási rendszerek . . . . .                | 8         |
| <b>2. Call centerek türelmetlen felhasználókkal</b>                        | <b>9</b>  |
| 2.1. Bevezetés és összegzés . . . . .                                      | 9         |
| 2.1.1. Egy call center modellezése . . . . .                               | 9         |
| 2.1.2. Az alkalmazotti létszám meghatározásának négyzetgyök-szabálya . . . | 11        |
| 2.1.3. Négyzetgyök-szabály az elhagyás figyelembevételével . . . . .       | 12        |
| 2.1.4. Alkalmazottak létszámát meghatározó rendszerek . . . . .            | 12        |
| 2.1.5. Rendszermodellezés eredménye . . . . .                              | 13        |
| 2.2. Az elhagyás jelentősége a gyakorlatban és a modellezésben . . . . .   | 14        |
| 2.3. Rendszerjellemzők számítása . . . . .                                 | 16        |
| 2.4. Üzemeltetési rendszerek és diffúz approximációk . . . . .             | 18        |
| 2.5. Implementáció . . . . .                                               | 20        |
| 2.5.1. A paraméterek becslése . . . . .                                    | 21        |
| 2.5.2. Approximációk . . . . .                                             | 21        |
| 2.5.3. Alkalmazotti létszám szabályai . . . . .                            | 23        |
| <b>3. Elhagyás és újrahívás hatása a call centerek teljesítményében</b>    | <b>25</b> |
| 3.1. A modell . . . . .                                                    | 27        |
| 3.2. Stacionárius analízis . . . . .                                       | 29        |

|                                                                                                 |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.1. A sztochasztikus modell . . . . .                                                        | 29        |
| 3.2.2. Fluid approximáció . . . . .                                                             | 32        |
| 3.3. Nem stacionárius rendszer analízise . . . . .                                              | 35        |
| <b>4. Kalkulátor</b>                                                                            | <b>37</b> |
| 4.1. Erlang-C applet . . . . .                                                                  | 37        |
| 4.2. Erlang-C applet működésének ellenőrzése . . . . .                                          | 38        |
| 4.3. Erlang-C applet képernyőképei . . . . .                                                    | 39        |
| <b>5. Voice Miner - érzelmek és kulcsszavak felismerése a rögzített telefonbeszélgetésekben</b> | <b>42</b> |
| 5.1. Kulcsszófelismerés . . . . .                                                               | 43        |
| 5.2. Érzelemdetektálás . . . . .                                                                | 43        |
| 5.3. Voice Miner architektúra . . . . .                                                         | 45        |
| 5.4. Hanganyag feldolgozó . . . . .                                                             | 45        |
| 5.5. Adminisztráció . . . . .                                                                   | 46        |
| 5.6. Riportoló (BI) . . . . .                                                                   | 46        |
| 5.7. Összefoglaló . . . . .                                                                     | 47        |
| <b>6. Összefoglalás</b>                                                                         | <b>48</b> |
| <b>Ábrák jegyzéke</b>                                                                           | <b>50</b> |
| <b>Irodalomjegyzék</b>                                                                          | <b>51</b> |

# 1. fejezet

## Bevezetés

### 1.1. Témaválasztás indoklása

Örömmel vettem Dr. Sztrik János megkeresését, hogy az Ő vezetése alatt írjam a szakdolgozatomat. Ugyanis az itt tárgyalt matematikai modellek, nemcsak call centerekénél használhatók, hanem az élet bármely területén, ahol sorbanállási rendszerre vezethetjük vissza a problémát. Például, ha nyílik egy postafiók, akkor meg kell határoznunk mennyi ügyintéző dolgozzon, mennyi ablak fogadjon ügyfelet, stb. A malacfialtatástól kezdve, az áruház parkolóján, a hivatalokon át egészen a különböző gyártási folyamatokig mindenhol ezekkel a sorbanállási rendszerrel találkozunk. Jónak tartom, hogy ezzel a témával foglalkozhattam, hiszen szervesen kapcsolódik a kedvenc informatikai területemhez, a hálózatokhoz. Csermely Péter biokémikus és hálózatkutató "A rejtett hálózatok ereje" című könyvében ([14]) bemutatja, hogy életünk minden területén megjelennek a hálózatok és mennyire fontos szerepet töltenek be. Továbbá szeretem a matematikát, így külön öröm volt, hogy erről az informatikát és a matematikát összefonó témáról írhattam.

### 1.2. Call centerek világa

#### 1.2.1. Bevezetés

Ma már rengeteg cég alkalmazza a call centereket (illetve annak örököseit a contact centereket), hogy kommunikáljon az ügyfeleivel. A call center hatalmas és rendkívül gyorsan fejlődő iparág.

Nagy, jól működő call centerekben többszáz ügyintéző is dolgozhat, akik óránként több ezer hívást is fogadhatnak, úgy, hogy az ügyintézők átlagos kihasználtsága 90 és 95% között alakul, illetve egy ügyfél sem kap foglalt vonalat, továbbá a hívások több mint a fele azonnal kiszolgálásra kerül. A várakozási idő néhány másodpercben mérhető, sőt csak elhanyagolható számú vásárló hagyja abba a várakozást (1-2%).

Egy call center ilyen tervezésének és teljesítményének menedzselésének tudományos alapon kell nyugodnia. Dolgozatomban ezt mutatom be.

### 1.2.2. Mi is az a call center?

Egy call center erőforrások (ügyintézők, számítógépek és telekommunikációs eszközök) halmazából álló rendszer, ami szolgáltatásokat nyújt telefonon keresztül.



1.1. ábra. Egy tipikus call center

Egy tipikus call centert úgy képzelhetünk el, mint egy végtelen szobát, ahol kis, nyitott fülkékben ülnek az ügyintézők egy-egy monitor előtt, fejükön mikrofonos fejhallgatóval, így telefonon keresztül biztosítva szolgáltatásokat láthatatlan ügyfeleknek. A legtöbb call center Interaktív Automata válaszoló (továbbiakban IVR<sup>1</sup>-t vagy VRU<sup>2</sup>-t) egységet is tartalmaz, amikor gépi hang ad tájékoztatást, illetve interakciót is lehet végezni. De a mai trend az, hogy a

---

<sup>1</sup>Interactive Voice Response

<sup>2</sup>Voice Response Unit

call centereket kiegészítik contact centerekké. Egy contact center nemcsak telefonon keresztül kommunikál az ügyfeleivel, hanem fax, email, chat és egyéb multimédiás csatornákon is.

A call centereket több dimenzió mentén kategorizálhatjuk:

- funkcionalitás (ügyfélszolgálat, segélyhívás, tele-marketing, ...)
- méret (néhány főtől több ezer alkalmazottig)
- földrajzi elhelyezkedés (egy-több telephely)
- ügyintéző jellemzők (alul-, jól képzett)
- stb.

### 1.2.3. Technológia

A call centerek nagymérvű elterjedését az utóbbi évtizedekben az információs és kommunikációs technológia (ICT<sup>3</sup>) fejlődése tette lehetővé.

Először jött a PABX<sup>4</sup>, ami azt biztosította, hogy ugyanazt a telefonszámot hívva, az alközpont egy csoportból más és más mellékállomást kapcsolhatott. A PABX trónkvonalakon (telefonvonalak) kapcsolja össze a publikus telefonhálózatot a call center telefonjaival. A PABX és az ügynökök között helyezkedik el az ACD<sup>5</sup> switch, aminek az a szerepe, hogy elosztja a hívásokat a tétlen ügyintézők között. Az ACD másodlagos feladata a működési adatok archiválása. Az ICT új trendje, hogy az ügyintéző automatikusan hozzáfér az ügyfél adataihoz. Gondoljunk arra az esetre, hogyha felhívjuk bankunk ügyfélszolgálatát, akkor először az automatával kommunikálunk, felhasználónevünk és jelszavunk megadása után a PABX automatikus számfelismerést (ANI<sup>6</sup>) használva a CTI<sup>7</sup> (telefonia és az informatika összeolvadása) szerver lekéri adatainkat. Majd kapcsolja az ügyintézőt, aki már látja a monitorán a mi adatainkat és hozzáfér a bankszámlánkhöz.

---

<sup>3</sup>Information and Communication Technology

<sup>4</sup>Private Automatic Branch Exchanges

<sup>5</sup>Automatic Call Distribution

<sup>6</sup>Automatic Number Identification

<sup>7</sup>Computer Telephony Integration

#### 1.2.4. Call centerek mint sorbanállási rendszerek

A call centereket egyszerűen és hasznosan tudjuk sorbanállási rendszerekként szemléltetni. Ez a call center sematikus működését bemutató 2.1. ábráról (10. oldal) tisztán látszik.

Egy call center sorbanállási modelljében az ügyfelek a hívók, az ügyintézők a kiszolgálók, a sor pedig a kiszolgálásra várakozó ügyfelek sora.

Dolgozatomban a klasszikus  $M/M/N$  Erlang-C,  $M/M/N + M$  Erlang-A és az  $M/M/C + M$  modelleket mutatom be.

## 2. fejezet

# Call centerek türelmetlen felhasználókkal<sup>1</sup>

### 2.1. Bevezetés és összegzés

Az utóbbi évtizedekben ugrásszerűen megnőtt a telefonos ügyfélszolgálattal rendelkező cégek száma. A szolgáltatások tervezésének és menedzselésének központi problémája, az hogy miképpen érjük el az optimális egyensúlyt a költségtakarékosság és szolgáltatásminőség között. Ez elég nagy kihívás, mivel egy nagy call center több ezer hívást szolgál ki naponta, másodperces várakozási idővel. Az analitikus modellek útmutatást adnak a keresett egyensúlyt illetően.

#### 2.1.1. Egy call center modellezése

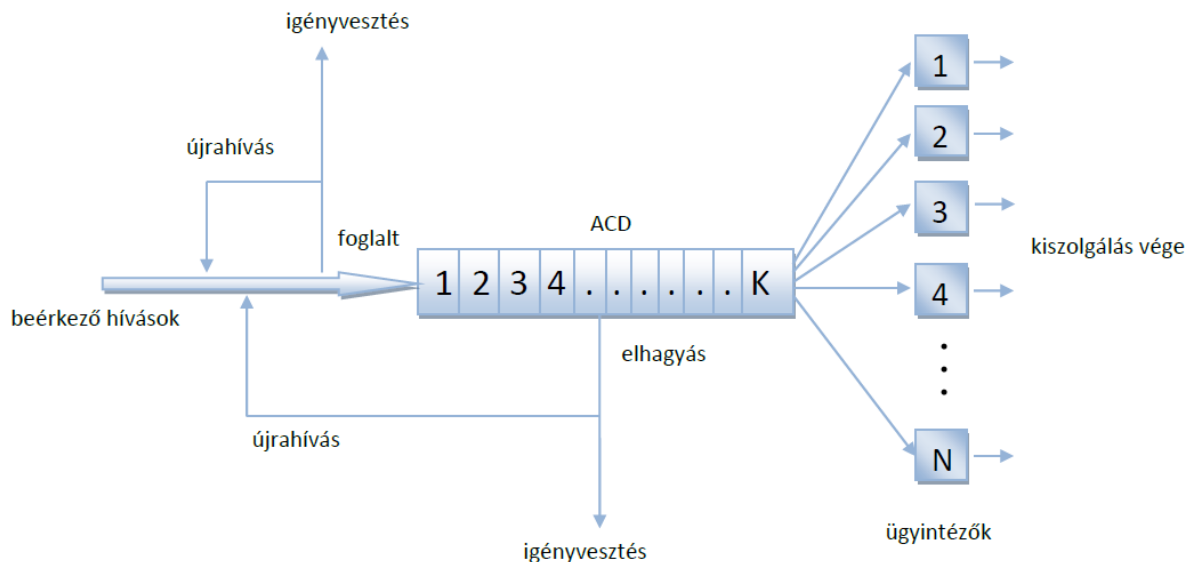
A sematikus 2.1. ábrán láthatjuk a call center áramlásait. A bejövő hívások egyszerű sort alkotnak, arra várva, hogy az  $N$  ügyintéző közül az egyik kiszolgálja (az ügyintézők statisztikailag azonosak).  $K + N$  telefonvonal csatlakozik az ACD<sup>2</sup>-hez. Az ACD kezeli a sort, összekapcsolja az ügyfeleket az elérhető ügyintézőkkel és archiválja a működési adatokat. Ha minden vonal foglalt és a várakozási sor megtelt, akkor az érkező ügyfelek foglalt jelzést kapnak. Néhány ügyfél később megpróbálja (újrAhívás) vagy feladja (igényvesztés) a call center elérését. Ha a hívás érkezésekor nincs szabad ügyintéző, de van hely a sorban (tehát legalább  $N$ , de kevesebb, mint  $K + N$  ügyfél van a rendszerben), akkor a hívó ügyfél bekerül a sorba. Ha

---

<sup>1</sup>Ebben a fejezetben, az irodalomjegyzékben szereplő, 5. számú tanulmányt mutatom be.

<sup>2</sup>Automatic Call Distributor - Automata híváselosztó

a sorban várakozó ügyfélnek a kiszolgálás előtt elfogy a türelme, akkor megszakítja a hívást. Ezen elhagyás után néhány ügyfél újra telefonál.



2.1. ábra. Call center sematikus ábrája

Call centerek alapmodelljeiben feltételezzük, hogy csak az alábbi két paraméter áll a rendszerüzemeltető felügyelete alatt:

- a telefonvonalak száma ( $K + N$ )
- az ügyintézők, kiszolgálók száma ( $N$ )

Mivel a telefonvonalak költsége elhanyagolható a humán erőforráséhoz képest, ezért az alkalmazotti létszám ( $N$ ) meghatározására koncentrálnunk és a modellezés során végtelen hosszú várakozási sorral ( $K = \infty$ ) dolgozunk.

A klasszikus  $M/M/N$  sorban állási vagy más néven az Erlang-C modellt kapjuk, illetve még azt is feltételezzük, hogy a hívások Poisson eloszlás szerint érkeznek, a kiszolgálási idők exponenciális eloszlásúak és nincs elhagyás. Call centerek vizsgálatakor ez a leggyakrabban használt modell, azonban van egy nagy hibája: nem veszi figyelembe az elhagyást, pedig az nem elhanyagolható egy valódi call center működésében.

### 2.1.2. Az alkalmazotti létszám meghatározásának négyzetgyök-szabálya

Nézzünk először egy fontos összefüggést a rendszer kapacitásának meghatározásához, az elhagyás figyelembe nem vételével. Jelölje  $R = \lambda/\mu$  a rendszer (átlagos) kihasználtságát, ahol  $\lambda$  az átlagos hívásérkezési intenzitás és  $1/\mu$  az átlagos kiszolgálási intenzitás. Így közepestől, egészen nagy  $R$  értékig, az alkalmazotti létszámot az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$N = R + \beta\sqrt{R} \quad (2.1)$$

ahol  $\beta$  egy a kiszolgálás elvárt szintjétől függő pozitív konstans. Természetesen a képlettel meghatározott  $N$  értéket egészre kell kerekíteni.

Az 2.1-es négyzetgyök formula levezetése<sup>3</sup> Ward Whitt nevéhez kötődik, a '70-es, '80-as években sokan állítottak fel hasonló szabályokat. Whitt érvelésének alapja, hogy ha több rendszert tekintünk úgy, hogy:

különböző  $R$  értékkel rendelkezzen és

az ügyintőzők számát ( $N$ ) a 2.1. formulával számoljuk ki

akkor minden rendszerben megközelítőleg egyező szolgáltatásminőséget kapunk.



2.2. ábra. Ward Whitt arcképe

Arra a valószínűségre, hogy  $(P\{W > 0\})$  azaz, a hívónak várakoznia kell a sorban kiszolgálása előtt, Erlang-C formulaként hivatkozunk.

---

<sup>3</sup>lásd a 10. hivatkozott irodalmat

### 2.1.3. Négyzetgyök-szabály az elhagyás figyelembevételével

Bővítsük az  $M/M/N$  modellünket és vegyük figyelembe az elhagyást. A következőket feltételezzük: minden egyes beérkező hívóhoz hozzárendelünk egy exponenciális eloszlású valószínűségi változót, ami az egyén türelmét számszerűsíti. Ha a hívó várakozási ideje a sorban eléri a türelmi szintjét, megszakítja a hívást. (Kezelhetőség érdekében most feltételezzük, hogy azon ügyfél, aki megszakítja a hívást, az nem próbálkozik újra.) A türelmi változók különböző hívókat jellemeznek, ezek független azonos eloszlásúak  $\theta^{-1}$  átlaggal és természetesen minden más modellelemtől függetlenek. A pozitív  $\theta$  mennyiségre szövegtől függően, hol elhagyási intenzitásként, hol pedig a türelmetlenség paramétereként hivatkozunk. Erre a modellre az  $M/M/N + M$  jelölést használjuk és Erlang-A modellként hivatkozunk rá. (Az  $A$  az elhagyást<sup>4</sup> jelöli.)

Megmutatjuk, hogy csak középestől nagyig terjedő intervallumba eső  $R$  értékű elhagyás eset-én lesz érvényes a négyzetgyök-szabály (2.1). Természetesen a  $\beta$  különbözik: most a  $\beta$  függ a  $\theta$  elhagyási intenzitástól és a  $P\{W > 0\}$  célértékétől is. A  $\beta$  esetünkben negatív is lehet, ha elég kicsi a várakozás valószínűsége. Ahhoz, hogy elérjük a  $P\{W > 0\}$  célértékét, elégséges, hogy az  $N$  értékét kisebbre vegyük, mint az  $R$ -ét.

Továbbá, a (2.1) formulában szereplő  $\beta$  értéke monoton csökkenő  $\theta$ -ban, fix  $P\{W > 0\}$  esetén. A nagyobb elhagyási intenzitás csökkenti a kívánt szolgáltatási szint eléréséhez szükséges kapacitást. Ez a tény meglepően hat, de a következők nyilvánvalóvá teszik: ideiglenesen jelölje  $Q$  az egyensúlyi rendszerben szereplő hívók számát.  $P\{W > 0\} = P\{Q \geq N\}$  és  $Q$  sztochasztikusan csökken  $\theta$  növekedésével. Természetesen a  $P\{W > 0\}$  nem az egyetlen mérték, ami számszerűsíti a kiszolgálás szintjét vagy minőségét.

### 2.1.4. Alkalmazottak létszámát meghatározó rendszerek

A kiszolgálás minőségének következő alapmértéke azon stabil állapot valószínűsége, hogy a beérkező ügyfél a kiszolgálás előtt elhagyja rendszert, ezt jelölje  $P\{Ab\}$ .

Az 2.3. táblázatban összegeztük a  $P\{W > 0\}$  és  $P\{Ab\}$  viselkedését a három alkalmazotti létszám-meghatározó rendszerben. Mindhárom rendszer különböző call center tervezési filozófiát követ.

---

<sup>4</sup>abandonment

2.1. táblázat. Teljesítmény a három alkalmazotti létszám-meghatározó rendszerben

| Rendszer          | Alkalmazotti szint                 | Teljesítmény karakterisztika                                      |
|-------------------|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Racionalizált     | $N = R + \beta\sqrt{R}$            | $P\{W > 0\} \rightarrow \alpha(\beta)$ és $P\{Ab\} \rightarrow 0$ |
| Minőségvezérelt   | $N = R + \epsilon R, \epsilon > 0$ | $P\{W > 0\} \rightarrow 0$ és $P\{Ab\} \rightarrow 0$             |
| Hatékonyságvérelt | $N = R - \epsilon R, \epsilon > 0$ | $P\{W > 0\} \rightarrow 1$ és $P\{Ab\} \rightarrow \epsilon$      |

A racionalizált rendszer az, ahol a négyzetgyök-szabályt használjuk (egyenlet 2.1) a rendszerkapacitást meghatározásához. A formula a  $P\{W > 0\}$  limitálásából ered, jelölje a 2.3. táblázatban szereplő  $\alpha(\beta)$  és ugye  $P\{Ab\} \rightarrow 0$ , ahogy  $R \rightarrow \infty$ , a  $\beta$  választásától függetlenül.

A minőségvezérelt rendszer az, ahol a rendszerkapacitás rögzített százalékkal túllépi a névleges követelményeket. Ha  $R \rightarrow \infty$ , akkor  $P\{W > 0\}$  és  $P\{Ab\} \rightarrow 0$  is eltűnik.

A hatékonyságvérelt rendszer pedig az, ahol a rendszerkapacitás rögzített százalékkal a névleges követelmény alatt van. A  $P\{Ab\}$  egyszerűen egyenlő ezzel a csökkentő százalékkal.

### 2.1.5. Rendszermodellezés eredménye

Matematikai szempontból a klasszikus  $M/M/N$  modell alapjaiban változik meg, ha az elhagyás jelensége fellép. Például az elhagyást figyelembevevő modell minden paraméterkombinációra stabil, a klasszikus modell akkor és csak akkor éri el a statisztikai egyensúlyt, ha  $R < N$ .

Jelölje  $Q(t)$  a  $t$ -edik időpillanatban a rendszerben tartózkodó (várakozó és kiszolgálás alatt lévő) hívók számát. Az alábbi sztochasztikus folyamatra koncentrálunk:  $Q = \{Q(t), t \geq 0\}$ . Most megmagyarázzuk, hogy ez miért központi folyamat egy call center esetén. Először is, ez a valósidejű érték látható a menedzsment, az ügynökök számára. Továbbá azokban a call centerekben, amelyek ingyenesen hívhatóak, ott  $Q$  arányos a bejövő hívások költségével. Azonban a vásárló szemszögében a várakozási idő áll. A 2.3 alfejezetben olyan módszert mutatunk be, amellyel változatos, a várakozási időt magukba foglaló rendszerjellemzőket lehet kiszámolni.

$Q$  egy születési halálozási folyamat és egyensúlyi állapot eloszlása explicit formulában

írható fel. Azonban ez a formula elég bonyolult ahhoz, hogy gondot okozzon mind a numerikus számításokban, mind a megértésben. Néhány rövid hozzászólás után a legtöbb tanulmány közelítésekkel dolgozik a nagy forgalmú rendszerekben, ahol  $R$  nagy és  $R/N$  majdnem 1.

Ahelyett, hogy csak az egyensúlyi állapotú mennyiségekhez dolgoznánk ki közelítéseket, egy megfelelően skálázott változatát mutatjuk be a  $Q$  sztochasztikus folyamatnak. Amit a nagy forgalmú rendszerekben a diffúz folyamat jól közelít.

## 2.2. Az elhagyás jelentősége a gyakorlatban és a modellezésben

Az elhagyást nem figyelembevevő modellek fő hátránya, hogy torzítják a call center menedzserei számára adott információkat. Mikor erős forgalmú, nagy call centert próbálunk irányítani, akkor figyelembe kell venni az elhagyásnak a kiszolgálás szintjére tett hatását. Nem elég csak a várakozási időt tekinteni.

Az elhagyás jelentőségét láthatjuk néhány egyszerű numerikus példán. A 2.3. ábrán látható grafikon mutatja a sor kihasználtságának és az ügyintézők számának viszonyát  $M/M/N$  és  $M/M/N + M$  modellek esetén. Tisztán látszik, hogy eléggé különböző képet mutat a két vonal (a 40-50 ügyintéző tartományban.) arról, hogy mi történik az általuk leírt rendszerben.

A 2.2. táblázat néhány eredményt mutat, az  $M/M/N$  és a hozzá tartozó  $M/M/N + M$  (csak 3%-os elhagyással dolgozó) modellre vonatkozóan. Jelentős eltérés mutatkozik a várakozási időben és a sorhosszban, főleg az átlagos várakozási idő és a sorhossz, ami meglepően rövidebb, ha az elhagyást is figyelembe vesszük. Fontos megjegyeznünk, hogy nem érünk el olyan jó teljesítményt, ha az  $M/M/N$  rendszerben a beérkezési intenzitás 3%-al csökken. Jegyezzük meg, hogy nagy forgalom esetén a rendszerek teljesítménye nagyon érzékeny az alkalmazottak számára. 3-4 ügyintézőt hozzáadva az elhagyás nélküli rendszerhez olyan teljesítményt kapunk eredményül, mint amit az elhagyásos rendszerben kaptunk. Mivel az alkalmazotti költségek teszik ki a call center költségvetésének nagy részét (ez becslések szerint 60-70%), a 6-8% -os személyzeti létszámcsökkentés jelentős.

A 2.2 táblázat és a 2.3 ábra alapján látszik, hogy nagy forgalom lebonyolítása mellett is el

2.2. táblázat. Eredmények, az elhagyást figyelembe és nem vevő modellekben

|                           | $M/M/N$  | $M/M/N + M$ |
|---------------------------|----------|-------------|
| Elhagyás hányada          | -        | 3,1%        |
| Átlagos válaszolási idő   | 20,8 sec | 3,6 sec     |
| Várakozási idő            | 58,1 sec | 12,5 sec    |
| Átlagos sorhossz          | 17       | 3           |
| Ügyintézők kihasználtsága | 96%      | 93%         |

lehet érni a közel 100%-os ügynökkihasználtságot és jó kiszolgálást.

A következő egy lehetséges forgatókönyv, ahol az alkalmazotti létszám-meghatározó rendszerünket használhatjuk: Adott egy call center

$N$  ügyintézővel

$\mu$  kiszolgálási intenzitással

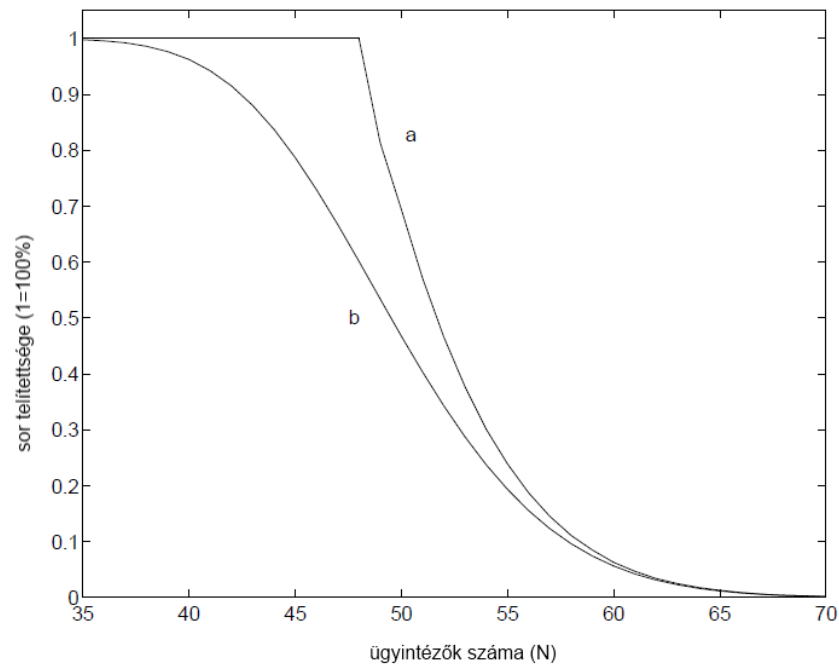
$\lambda$  beérkezési intenzitással (terhelés  $R = \lambda/\mu$ )

$\beta$  kiszolgálás-minőséggel (nagy érték nagyobb kiszolgálási szintet jelent).

Előrejelzést kaptunk, hogy a közelgő szünnapokon nagyobb lesz call centerünkben a beérkezési intenzitás lesz:  $\hat{\lambda}(\hat{R} = \hat{\lambda}/\mu)$ . A call center vezetősége a jelenlegi kiszolgálási szinten szeretné működtetni az ügyfélszolgálatot a szünnapok alatt. Ezért úgy döntenek, hogy ezeken a napokon növelik az ügyintézők számát:  $\hat{N} = \hat{N}(\beta)$ . A vezetőségnek először meg kell határoznia a call center működőképes rendszerét, a kívánt egyensúlyban tartva a minőséget és a hatékonyságot. Ezután következik a szabályaink szerint az  $\hat{N}(\beta)$  meghatározása. Például a racionalizált rendszerben javasolt alkalmazotti létszámunk:

$$\hat{N}(\beta) = \lceil \hat{R} + \beta \sqrt{\hat{R}} \rceil \quad (2.2)$$

ahol  $\beta = (N - R)/\sqrt{R}$ . Továbbá analízisünk explicit approximációkat szolgáltat rendszerjellemzők széles skálájáról, lásd a 2.5.2. alfejezetet. Különösen a sorban késleltetett vásárlók hányada várható, hogy változatlan marad. Mialatt az elhagyó vásárlók hányada valamint az átlagos várakozási idő  $\sqrt{N/\hat{N}}$  tényezővel csökken.

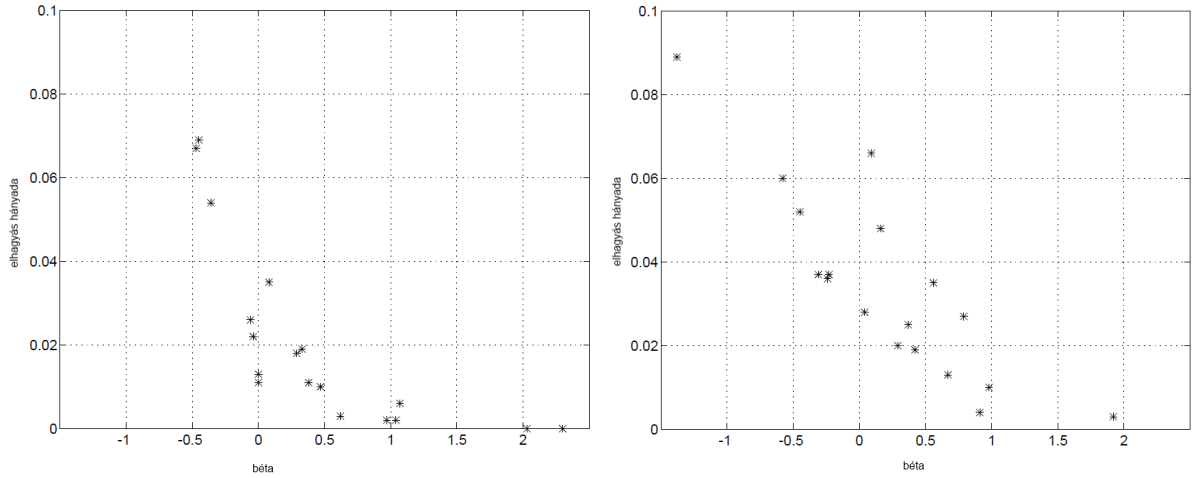


2.3. ábra. Sor telítettsége - (a):  $M(48)/M(1)/N$  és (b):  $M(48)/M(1)/N+M(0,5)$

Kérdés a fenti létszám-meghatározó szabályok gyakorlati haszna, mivel nagy rendszerek nagy forgalmú működésének limitjein alapulnak. Eredményeink nyugodtan alkalmazhatók olyan call centerekre, ahol mindössze 30 vagy 20, jól kihasznált ügyintéző található. Továbbá közepes- és nagyméretű call centerek adatanalízise megmutatja, hogy valóban elérhető magas hatékonyság és szolgáltatásminőség, ha a call center racionalizált rendszerben működik és  $-0,5 \leq \beta \leq 1$ . Ezt mutatja a 2.4. ábra. A pontok két call centerből vett valós adatokat ábrázolnak, egy átlagos munkanapon félóránként vett mintával gyűjtve (a call center ügyfélfogadásának nyitó- és záró óráit nem vettük figyelembe, mert akkor nem nagy a forgalom). A forgalommenyiség és az alkalmazotti létszám változott a nap folyamán (baloldali grafikon: 350-900 hívás óránként, 35-90 ügyintéző; jobboldali grafikon: 1400-3100 hívás óránként, 125-250 ügyintéző).

## 2.3. Rendszerjellemzők számítása

Itt hasznos formátumot mutatunk be egy egyensúlyi állapotban lévő  $M/M/N + M$  modell rendszerjellemzőinek kifejezésére.



2.4. ábra.  $\beta$  nagy call centerek szolgáltatásminősége - korreláció elhagyással (Minden ábrázolt pont 30 perces időközi adat jelöl. Az  $x$  koordinátát a  $\beta = (N - R)/\sqrt{R}$  képlettel számoltuk, ahol  $R$  és  $N$  félórás átlagok. Az  $y$  koordináta pedig az elhagyás hányada a félórás idő intervallumban. )

Legyen  $V$  az ügyfél lehetséges várakozási ideje, jelölje  $X$  a türelmét és legyen  $W$  az aktuális várakozási idő.

$$W = V \wedge X \quad (2.3)$$

Több, a call center menedzsereket érdeklő rendszerjellemező kifejezhető  $V$  és  $X$  egyszerű függvényeiként. A 2.3. táblázatban egy reprezentatív listát láthatunk. Itt az  $1_{(a,b]}(t)$  indikátorfüggvényeit használjuk, ahol

$$1_{(a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ha } a < t \leq b \\ 0 & , \text{egyébként} \end{cases} \quad (2.4)$$

Néhány fontos rendszerjellemezőt nem lehet ezzel a módszerrel közvetlenül kifejezni. Csak a  $E[f(V, X)]$  típusú rendszerjellemezők hányadosaiként. Például fontos mérőszám, hogy mennyi vásárló fogja feladni a sorban való várakozást. Néhány tapasztalt call center menedzser elbocsájtaná azokat a vásárlókat, akik rövid  $t$  időtartamot sem várnának. Ekkor:

$$P\{Ab|W > t\} = \frac{P\{V \wedge X > t; V > X\}}{P\{V \wedge X > t\}} = \frac{E[1_{(t,\infty)}(V \wedge X)1_{(X,\infty)}(V)]}{E[1_{(t,\infty)}(V \wedge X)]} \quad (2.5)$$

2.3. táblázat.  $E[f(V, X)]$  rendszerjellemzői

| $f(v, x)$                                                   | $E[f(V, X)]$      |
|-------------------------------------------------------------|-------------------|
| $1_{(x, \infty)}(v)$                                        | $P\{Ab\}$         |
| $1_{(t, \infty)}(v \wedge x)$                               | $P\{W > t\}$      |
| $1_{(t, \infty)}(v \wedge x)1_{(x, \infty)}(v)$             | $P\{W > t; Ab\}$  |
| $(v \wedge x)1_{(x, \infty)}(v)$                            | $E[W; Ab]$        |
| $(v \wedge x)1_{(t, \infty)}(v \wedge x)1_{(x, \infty)}(v)$ | $E[W; W > t; Ab]$ |
| $g(v \wedge x)$                                             | $E[g(W)]$         |

## 2.4. Üzemeltetési rendszerek és diffúz approximációk

Elméleti eredményeinkből (amik a gyakorlatban is érvényesültek) következik, hogy közepes és nagyméretű telefonos call centerek magas kiszolgálási szintet mutatnak nagyfokú kihasználtság alatt is. Ez igazolja, hogy olyan approximációkra koncentrálunk, ahol nagy forgalmat feltételezünk,  $N \rightarrow \infty$  (ez ekvivalens azzal, hogy  $R \rightarrow \infty$ , mivel feltételezzük, hogy  $N/R \rightarrow \infty$ ). Ezért a jelölési rendszerünkhöz hozzáadjuk az  $N$ -t, hogy jelezzük az  $N$ . rendszer folyamatait és paramétereit ( $M/M/N + M$  modell).

Két rendszerjellemzőt használunk (az elhagyó vásárlók hányadát ( $P_N\{Ab\}$ ) és a sorban késleltetettek hányadát ( $P_N\{W > 0\}$ )) támpontként a megfelelő üzemeltetési rendszer kiválasztásához. A legtöbb call center plusz ügyintézők alkalmazása nélkül szeretné elkerülni a nagyfokú elhagyást. Ez általában azt jelenti, hogy jelentéktelen számú vásárló tartózkodik a várakozási sorban és kicsi az elhagyási hányad.

Jellemezzük a modell paramétereinek  $N$ -től való függését. Nézzük először azt a sorozatot, ahol  $\lambda_N \rightarrow \infty$ , ha  $N \rightarrow \infty$  és  $\mu_N \equiv \mu$ . Ez megfelel annak, hogy a megnövekedett terheléshez ( $\lambda_N$ ) alkalmazkodva növeljük az alkalmazotti szintet ( $N$ ), míg fenntartjuk a kiszolgálási intenzitást ( $\mu$ ), ami sem az alkalmazotti szint, sem a terhelés függvényében nem változik. A továbbiakban arra az esetre szorítkozunk, hogy  $\lim_{N \rightarrow \infty} \theta_N = 0$ , ha  $0 < \theta < \infty$ .

Jelöljük a forgalom intenzitását  $p_N = \frac{\lambda_N}{N\mu}$ -el. A fenti irányelvek és lenti 1-2 tétel arra vezet minket, hogy koncentráljunk az alábbi rendszerre:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(1 - p_N) = \beta, -\infty < \beta < \infty. \quad (2.6)$$

**Tétel 1.** Feltételezzük, hogy  $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = p_\infty$ , ha  $0 \leq p_\infty < \infty$ . Ekkor az elhagyó ügyfelek hányadának limitáló tulajdonsága:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N\{Ab\} = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } 0 \leq p_\infty \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{p_\infty} & , \text{ ha } p_\infty > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Erre az eredményre alapozva, tisztán látszik, hogy az elhagyás szemszögéből nézve nincs értelme  $p_\infty < 1$ -val számolni, mivel  $p_\infty = 1$  eltűnő elhagyási valószínűséget szolgáltat. Másik oldalról viszont, mikor  $p_\infty \gg 1$  az elhagyási határvalószínűség nagyobb az általában várt-nál. Továbbá, az ügynökkeresés szempontjából (azaz az idő azon része, mit a hívások megválaszolásával töltenek:  $\frac{\lambda_N(1-P_N\{Ab\})}{N\mu}$ ) a kihasználtság maximális határát már elérte, ha  $p_\infty = 1$ . Tehát,  $p_\infty = 1$  egy speciális egyensúlyi pont a call center hatékonysága és szolgáltatásminősége között.

A lenti 2. tétel diffúz approximációkat mutat be a  $Q = \{Q(t), t \geq 0\}$  folyamatra vonatkozóan. Tekintsük a  $\{q_N\}$ -t, sztochasztikus folyamatok sorozatát, amit  $\{Q_N\}$ -ből kapunk:

$$q_N(t) = \frac{Q_N(t) - N}{\sqrt{N}} \quad (2.8)$$

Növekedést ad a folyamatnak az  $N$  kivonása, aminek abszolút értéke vagy a sorhossz ( $q_N \gg 0$ ) vagy a szabad kiszolgálók száma ( $q_N \leq 0$ ). Az normalizáló tényező  $\sqrt{N}$  felbukkan, mint a megfelelő nagyságrend, ami növekedést okoz a nem triviális, folytonos  $q$  határfolyamatban. Ezt a  $q$ -t használjuk, hogy az eredeti  $\{Q_N\}$  születési-kihalási folyamatunkat közelítsük:  $Q_N \stackrel{d}{\approx} N + q\sqrt{N}$ , ez közelítést ad mind az átmeneti ( $Q(t), t \geq 0$ ), mind az egyensúlyi állapot ( $Q_N(\infty)$ ) tulajdonságra.

**Tétel 2.** Feltételezzük, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(1 - p_N) &= \beta, -\infty < \beta < \infty \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \theta_N &= \theta, 0 < \theta < \infty \end{aligned}$$

Ha  $q_N(0) \xrightarrow{d} q(0)$ , akkor  $q_N \xrightarrow{d} q$ , ahol  $q$  az alábbi sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{cases} dq(t) = f(q)dt + \sqrt{2\mu}db(t) \\ f(x) = \begin{cases} -\mu(\beta + x) & , \text{ha } x \leq 0 \\ -(\mu\beta + \theta x) & , \text{ha } x > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2.9)$$

**Tétel 3.** Legyen  $v = [\frac{q}{\mu}]^+$ , ahol  $q$  a fenti Tétel 2.-ben lévő sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása. Ekkor:

1.  $\sqrt{N}\nu_N(t) \xrightarrow{d} v(t)$ ,  $0 \leq t \leq \infty$ , ahol  $\nu_N(\infty)$  és  $v(\infty)$  az eloszlásban vett határérték, ahogy  $t \rightarrow \infty$ .
2.  $v(\infty)$  eloszlásfüggvénye  $F_v$ :

$$1 - F_v(x) = \begin{cases} \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) & , \text{ha } x = 0 \\ \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \frac{h(\beta, \sqrt{\mu/\theta})}{\Psi(\beta\sqrt{\mu/\theta}, \sqrt{\mu/\theta}x)} & , \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Itt

$$\omega(x, y) = [1 + \frac{h(-xy)}{yh(x)}]^{-1}, \Psi(x, y) = \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(x + Y)} \quad (2.11)$$

Mivel  $\sqrt{N}\nu_N(\infty) \xrightarrow{d} v(\infty)$ , a használt approximációnk:

$$V \stackrel{d}{=} \nu_N(\infty) \approx v(\infty)/\sqrt{N} \quad (2.12)$$

amit így is írhatunk:  $F_V(x) \approx F_v(\sqrt{N}x)$ .

## 2.5. Implementáció

A 2.3 és 2.4. alfejezetben bemutatunk néhány  $M/M/ + M$  modellhez kapcsolódó eredményt. Mióta ezt a modellt támogatjuk az általánosan használt  $M/M/N$  modell helyett, ideje, hogy megmutassuk, hogyan alkalmazzuk és interpretáljuk eredményeinket. A közepes-nagyméretű call centerek menedzselését tárgyaljuk nagy forgalom (az elhagyási jelenség nem hagyható figyelmen kívül) mellett. Először röviden összegezzük a paraméterbecslések eredményét. Majd javaslatot teszünk arra, hogy mely rendszerjellemzőket használja a call center vezetősége a kiszolgálási szint meghatározásához. Végül említjük a közelítési eredményeink hasznát és a létszám-meghatározó szabályokat.

### 2.5.1. A paraméterek becslése

Ahhoz, hogy használhassuk a modellünket és eredményeket mutassunk, meg kell határoznunk különböző paraméterek értékét. Az egy műszakban dolgozó ügyintézők számát teljes mértékben a call center vezetősége határozza meg. A beérkezési- és kiszolgálási intenzitást általában az ACD adataiból becsüljük. Ahogy a 2.3. alfejezetben említettük az időtől függő beérkezési intenzitáshoz kis időablakot választunk, ahol a beérkezési intenzitás megközelítőleg konstans.

A fő nehézséget az elhagyási intenzitás ( $\theta$ ) illetve az átlagos türelem ( $1/\theta$ ) becslése jelenti. A nehézség abból a tényből ered, hogy a közvetlen adat, amit gyűjthetünk cenzúrázott: csak azon vásárlók türelmét tudjuk mérni, akik a kiszolgálás megkezdése előtt elhagyják a rendszert. Azon ügyfelekről, akik kiszolgálás alatt vannak, csak annyit tudunk, hogy mennyi időt várakoztak a sorban. Léteznek statisztikai módszerek, hogy ilyen cenzúrázott példákkal foglalkozzunk. Ezeket itt most nem tárgyaljuk<sup>5</sup>. Másik, egyszerűbb probléma a  $\theta$  becslésével az, hogy a legtöbb esetben az ACD adatai csak átlagok. Az alábbiakban javasolunk egy módszert az átlagos türelem becslésére, ami a következő egyensúlyi egyenleten alapul:

$$\theta \cdot E[\#varakozasasorban] = \lambda P\{Ab\} \quad (2.13)$$

Ez az egyenlet leírja az egyensúlyi állapotot az ügyfelek elhagyási intenzitása a sorban (baloldal) és az rendszerbe lépő elhagyó ügyfelek (vásárlók akik, végül elhagyják a rendszert) intenzitása között. A Little tétel ( $\lambda \cdot E[W] = E[\#varakozasasorban]$ ) következtében alternatív egyenlethez jutunk:

$$\theta \cdot E[W] = P\{Ab\} \quad (2.14)$$

Megjegyezzük, hogy a 2.13. és a 2.14. egyenlet csak exponenciális eloszlású türelem esetén áll fent.

### 2.5.2. Approximációk

Ahogy korábban is állítottuk, az elhagyási jelenség rendkívül fontos a call center menedzserének. Mindamellet ez nem azt jelenti, hogy az egyetlen rendszerjellemző, amire figyelniünk

---

<sup>5</sup>részletekért lásd az alábbi tanulmány mellékletét: Whitt. W., (1992) Understanding the efficiency of multi-server service systems. Management Science Vol. 38, No. 5, 708-723

kellene, csak a sort elhagyó ügyfelek hányada lenne. Még rengeteg más fontos rendszerjellemző van és fontos, hogy ezekből kiválasszuk azt a néhányat, amelyek legjobban kifejezik a call center kiszolgálási szintjét, illetve szolgáltatási célként szolgálhatnak.

Approximációkat használhatunk, hogy legyőzzük a számítási nehézségeket, amik a rendszerjellemzők kiszámításakor adódnak. Illetve megmutatják, hogyan függnek a rendszerjellemzők a modell paramétereitől.

A stacionárius virtuális várakozási idő (Tétel 3.) kombinálása a rendszerjellemzők általános reprezentálásával (2.3. alfejezet) megengedi, hogy több rendszerjellemzőre származtassunk approximációkat. Ezen közelítések sokkal pontosabbak magas forgalmú, nagy call centerek esetében (elhanyagolható blokkolódással).

**Példa:** Feltételezzünk egy rendszerjellemzőt, amit  $E[g(W)]$  -ként fejezhetünk ki ( $g$  egy függvény). Emlékezzünk vissza  $W \equiv X \wedge V$ , ahol  $X$  és  $V$  függetlenek, akkor:

$$E[g(W)] = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x \wedge v) \theta e^{-\theta x} dF_v(v) dx \approx E[g(0)](1 - \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta})) +$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty g(x \wedge v) \theta e^{-\theta x} \sqrt{N\mu\theta} \cdot \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \Psi(\sqrt{N\mu\theta}v + \beta\sqrt{\mu/\theta}, -\sqrt{N\mu\theta}v) dv dx$$

Néhány rendszerjellemző közelítése:

$$P\{W > 0\} \approx \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \quad (2.15)$$

$$P\{Ab|W > 0\} \approx 1 - \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{h(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)})} \quad (2.16)$$

$$P\{Ab\} \approx [1 - \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{h(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)})}] \cdot \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \quad (2.17)$$

$$E[W] \approx [1 - \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{h(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)})}] \cdot \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \frac{1}{\theta} \quad (2.18)$$

$$E[\#busyagents^6] \approx \frac{\lambda}{\mu} - \left[1 - \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{h(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)})}\right] \cdot \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.19)$$

$$E[\#waitinginqueue^7] \approx \left[1 - \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{h(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)})}\right] \cdot \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \frac{\lambda}{\theta} \quad (2.20)$$

$$P\{W > t\} \approx \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta}) \cdot \frac{h(\beta\sqrt{\mu/\theta})}{\Psi(\beta\sqrt{\mu/\theta}, \sqrt{N\mu\theta t})} \cdot e^{-\theta t}, t \geq 0 \quad (2.21)$$

$$P\{Ab|W > t\} \approx 1 - \frac{\Psi(\beta\sqrt{\mu/\theta}, \sqrt{N\mu\theta t})}{\Psi(\beta\sqrt{\mu/\theta} + \sqrt{\theta/(N\mu)}, \sqrt{N\mu\theta t})} \cdot e^{\theta t}, t \geq 0 \quad (2.22)$$

### 2.5.3. Alkalmazotti létszám szabályai

Fontos, hogy a call center menedzsere előre lássa a kiszolgálási szint változtatásának hatá-  
sait.

Az  $M/M/N + M$  modellt használva a legtöbb rendszerjellemző egyenlete elég összetett. Az 2.5.2. alfejezetben mutatott approximációk is mutatják, hogy mennyire összetett megérteni, hogyan hatnak a paraméterek a rendszerjellemzőkre. Elvárt azonban, hogy egyszerű ökölsza-  
bályt szolgáltatassunk a döntéshozatal támogatására.

**Tétel 4.** Feltételezzük, hogy  $\theta_N \equiv \theta$ ,  $0 < \theta < \infty$ . Ekkor:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(1 - p_N) = \beta, \quad -\infty < \beta < \infty$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N\{W > 0\} = \alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

akkor és csak akkor, ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}P_N\{Ab\} = \Delta, \quad 0 < \Delta < \infty$$

---

<sup>6</sup>foglalt ügyintézők

<sup>7</sup>várakozás a sorban

abban az esetben

$$\alpha = \omega(-\beta, \sqrt{\mu/\theta})$$

$$\Delta = [\sqrt{\theta/\mu} \cdot h(\beta\sqrt{\mu/\theta}) - \beta] \cdot \alpha$$

(Itt  $\omega$  és  $h$  ugyanazok mint a fenti 3. tételben.)

Így kapjuk a 2.1.4. alfejezetben szereplő 2.3. táblázat kiegészített változatát:

2.4. táblázat. Alkalmazotti létszámmeghatározó szabályok a különböző rendszerekben

| Rendszer          | Alkalmazotti szint                               | Irányelv                                                                                |
|-------------------|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Rationalizált     | $N = \lceil R + \beta\sqrt{R} \rceil$            | $P\{W > 0\} \rightarrow \alpha(\beta)$ és $P\{Ab\} \sim \frac{\Delta(\beta)}{\sqrt{N}}$ |
| Minőségvezérelt   | $N = \lceil R + \epsilon R \rceil, \epsilon > 0$ | $P\{W > 0\} \rightarrow 0$ és $P\{Ab\} = o(1/\sqrt{N})$                                 |
| Hatékonyságvérelt | $N = \lceil R - \epsilon R \rceil, \epsilon > 0$ | $P\{W > 0\} \rightarrow 1$ és $P\{Ab\} \rightarrow \epsilon$                            |

## 3. fejezet

# Elhagyás és újrahívás hatása a call centerek teljesítményében<sup>1</sup>

Tekintsük a következő problémát:

Egy call centerben bizonyos számú ügyintéző válaszol a felhasználók telefonhívásaira. Ha a beérkező telefonhívás pillanatában van szabad ügyintéző, akkor az azonnal kiszolgálja az ügyfelet. Viszont, ha minden ügyintéző foglalt az új hívás beérkezésekor, akkor az ügyfelet a rendszer várakozási sorba helyezi és megkéri, hogy várakozzon amíg elérhető ügyintéző nem lesz. Itt a rendszer tájékoztatja az ügyfelet a várható várakozási időről. Néhány ügyfél elég türelmes ahhoz, hogy várjon, míg számára elérhető szabad ügyintéző nem lesz. Mások viszont azonnal megszakítják a hívást, amikor meghallják, hogy mennyi a várható várakozási idő. A felhasználók harmadik csoportja pedig bizonyos várakozási idő után megunja és bontja a hívást.

A call center vezetősége szeretné limitálni az ügyfél várakozási idejét, ennek eredményeképpen, amikor a várakozási sorban lévő ügyfelek száma elér egy küszöbértéket, az ügyfelet megkéri, hogy telefonáljon később és megszakítják a hívást. Ezen felhasználók egy része újratelefonál és megpróbál kapcsolatba lépni egy ügyintézővel. Azonban az ügyfél nem szereti, ha szétkap-csolják, nem szeret várni vagy többször próbálkozni a hívással. Tehát az ügyfélszolgálat szemszögéből nézve a vezetőség megpróbálja meghatározni az ügyintézők számát, az előbb említett blokkolási küszöbértéket természetesen úgy, hogy a költségeket minimalizálja annak figyelembevételével, hogy bizonyos elégséges kiszolgálási szintet tartson. Általában a

---

<sup>1</sup> Ebben a fejezetben, az irodalomjegyzékben szereplő, 4. számú tanulmányt mutatom be.

call centerek ilyen vizsgálatát sorbanállási modellekre alapozva végzik.

Azonban mielőtt bármilyen sorbanállási modellre alapozva optimalizálnánk a rendszert, szükségünk van a beérkező hívások és karakterisztikáikra vonatkozó adatokra, hogy modellezhessük a rendszer teljesítményét.

A call centerek részletes adatokat gyűjtenek a hívásokról. Az összes létrehozott, blokkolt, megszakított hívás adatai könnyen megtekinthetők egy egyszerű adatbázisban, tetszőleges időablakra vonatkozóan (akár az elmúlt 20 másodperc, vagy az elmúlt 5 év). Ezeket és a hívás időtartamára, megszakítás idejére, várakozási időkre vonatkozó adatokat használhatjuk arra, hogy megbecsüljük a beérkezési-, kiszolgálási folyamatokat és megszakítási viselkedést.

Azonban egy adattípus nem áll rendelkezésünkre. Az adathalmazt vizsgálva a call center nem tudja megmondani, hogy adott időablakot tekintve a hívások melyik része első hívás és melyik része újrapróbálkozás, amit korábban megszakítottak vagy blokkoltak. Ez azt jelenti, hogyha ezekből az adatokból becsüljük meg a beérkezési intenzitást és határozzuk meg a kiszolgálói rendszert, akkor torzított számokat kapunk. Ha az adott időablakban nem számolunk a kapacitást meghaladó ügyfélszámmal, akkor ez rengeteg újrapróbálkozást generál a következő időablakban. Azonban, ha nem tudunk különbséget tenni az első- és újrapróbálkozások között, akkor az előrejelző módszer csak megnövekedett beérkező intenzitást jelez, ahelyett hogy a rendszer hibájára hívná fel a figyelmet. Ez később rossz méretezési döntésekhez vezethet.

A rendszert egy  $M/M/C + M$  sorral modellezzük újrahívással és blokkolással, ahol a  $+M$  az exponenciális elhagyást jelöli.

### 3.1. A modell

Tekintsük az alábbi call center modellt, ahol  $C$  számú ügyintéző<sup>2</sup> szolgálja ki a beérkező hívásokat. Feltételezzük, hogy a kiszolgálási időközök (amik tartalmazzák a tényleges ügyfél és ügyintéző közötti beszélgetési időt, illetve a hívás utáni adminisztrációs időt)  $\mu$  paraméterű exponenciális eloszlásúak. Az először próbálkozó ügyfelek hívásai pedig  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a rendszerbe. Ezeket a hívásokat elsődleges hívásnak is nevezhetjük. Azok az ügyfelek, akik az érkezés pillanatában szabad ügyintézőhöz jutnak, azonnal kiszolgálásra kerülnek, majd elhagyják a rendszert. Azon ügyfeleket, akik az érkezés pillanatában nem találnak szabad ügyintézőt a rendszer  $\beta$  valószínűséggel blokkolja. Ezen blokkolt ügyfelek  $\delta$  paraméterű exponenciális idő eltelte után  $p$  valószínűséggel újrapróbálkoznak a hívással. A gyakorlatban ez a  $p$  nem egy konstans valószínűség, azonban a könnyebb kezelhetőség miatt most ezt feltételezzük. Azok az ügyfelek, akik ugyan csatlakoztak a várakozási sorhoz (ez ugye  $1 - \beta$  valószínűséggel történik), de bizonyos várakozási idő után nem tudnak szabad ügyintézővel beszélni elhagyják a rendszert. Ez az elhagyás exponenciális eloszlású,  $\theta_1$  paraméterrel. Feltételezzük, hogy a távozó ügyfelek a blokkolt ügyfelekével azonos újrachívási viselkedéssel rendelkeznek, azaz egy bizonyos  $\delta$  paraméterű exponenciális idő eltelte után  $p$  valószínűséggel újrapróbálkoznak a hívással.

A jelölési rendszerünket így foglalhatjuk össze:

$\lambda$ : az elsődleges hívások, vagyis az először próbálkozó ügyfelek hívásainak beérkezési intenzitása

$\lambda_0$ : a megfigyelt hívási intenzitás: a teljes hívásbeérkezési intenzitás

$C$  az ügyintézők (CSR-ek) száma

$\mu$ : kiszolgálási intenzitás (tartalmazza az ügyfél és ügyintéző közötti beszélgetési időt, illetve a hívás utáni adminisztrációs időt is)

$\beta$ : pillanatnyi blokkolás valószínűsége azoknál az ügyfeleknél, akik a beérkezés pillanatában nem jutnak szabad ügyintézőhöz

$\theta_1$ : a várakozási sorba már csatlakozott ügyfelek távozási intenzitása

---

<sup>2</sup>Customer Service Representative - CSR

$p$ : blokkolt, távozott ügyfelek újrahívási valószínűsége

$\delta$ : blokkolt, távozott ügyfelek újrahívási intenzitása

A valóságban ezek a paraméterek erősen függnak az időtől.

Fontos megjegyeznünk, hogy a call centerbe érkező összes hívás két részből tevődik össze:

- elsődleges hívások ( $\lambda$  intenzitással)
- ismételt hívások

A teljes hívásérkezési intenzitást  $\lambda_0$  -val jelöljük, ahol  $\lambda_0 \geq \lambda$ .

Adaptáljuk ezt a modellt egy sokkal általánosabb esetre, mikor az érkezés pillanatában tájékoztatják az ügyfelet a várható várakozási idejéről.

Ez az ügyfélnek bejelentett pontos információ a várható várakozási idő becslése. Ez az információ minden esetben azon alapszik, hogy az aktuális érkező ügyfél előtt már a várakozási sorban mennyi ügyfél tartózkodik. Így az ügyfél blokkolódási tulajdonsága a már a várakozási sorban tartózkodó ügyfelek számának a függvénye. Legyen  $r(k)$  ( $k \geq C$ ) annak a valószínűsége, hogy az érkező ügyfél blokkolódik, ha  $k-C$  ügyfél tartózkodik a sorban. Ez annak a valószínűségét jelenti, hogy a közölt várakozási idő meghaladja az ügyfél várakozásait. Ezt a valószínűséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$r(k) = \beta + (1 - \beta)P(T < S_k) \quad (3.1)$$

Az egyenletben szereplő  $T$  egy valószínűségi változó, ami az ügyfél türelmének küszöbértékét fejezi ki. Az  $S_k$  szintén egy valószínűségi változó, ami kifejezi azt az időt, ami az ügyfél hívásának beérkezése és az ügyintézőhöz jutása között telik el. A kiszolgálási időközök exponenciális eloszlásúak, így az  $S_k$  Erlang eloszlású,  $k - C + 1$  és  $C\mu$  paraméterekkel. Hasznos, ha az (3.1). egyenletben szereplő  $P(T < S_k)$  -t  $P(T < E[S_k])$  -val közelítjük, ahol:

$$E[S_k] = \frac{k - C + 1}{C\mu} \quad (3.2)$$

Ha feltesszük, hogy a  $T$  küszöbérték exponenciális eloszlású  $\theta_1$  paraméterrel, akkor ezt kapjuk:

$$r(k) = 1 - (1 - \beta)e^{-\theta_1 \frac{k-C+1}{C\mu}} \quad (3.3)$$

A fenti vizsgálat feltételezi, hogy ha egy ügyfél csatlakozott a sorhoz, akkor nem szakítja meg a hívását. Azonban azt is feltételezhetjük, hogy a sorba csatlakozott ügyfelek  $\theta$  intenzitással hagyják el azt, ahol ez az új elhagyási intenzitás kisebb, mint az eredeti  $\theta_1$  elhagyási intenzitás. A fenti vizsgálat akkor közelít jól, ha  $\theta$  elég kicsi ahhoz, hogy jelentősen ne módosítsa  $S_k$ -t. Végezetül jegyezzük meg, hogy azok a rendszerek, ahol a várható várakozási időt nem jelentik be, csak speciális esetei egy általánosabb modellnek,  $r(k) = \beta$ .

## 3.2. Stacionárius analízis

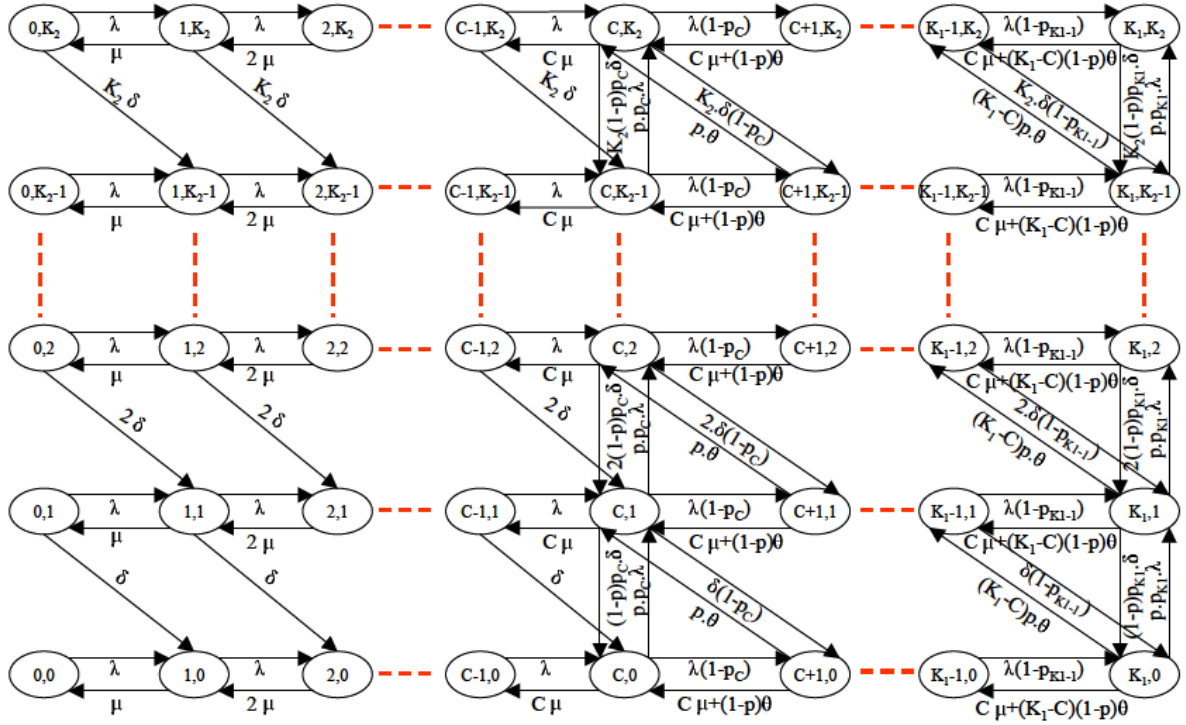
### 3.2.1. A sztochasztikus modell

Az előbbi feltételezések mellett a Markov lánc alkalmazható az újrahívásokkal is számoló call center modellezésére. A rendszer állapotát jelölje  $(m, n)$  úgy, hogy  $(m, n \geq 0)$ , ahol  $m$  jelöli az ügyfelek (kiszolgálás alatt lévők és a sorban várakozók) számát egy valós rendszerben, és ahol  $n$  jelöli azon ügyfelek számát, akik exponenciális  $\delta$  intenzitással ismétlik hívásaikat. Míg a valós sorok véges pufferrel rendelkeznek, addig  $m$  és  $n$  végtelenek. A numerikus megoldás miatt, közelítsük a végtelen rendszert egy csonkított rendszerrel, ahol  $m$ -et  $K_1$ -re és  $n$ -t pedig  $K_2$ -re vágjuk.

Most pedig írjuk le a Markov lánc átmenet intenzitásait. Legyen  $Q_{(m,n)(m',n')}$  az  $(m, n)$  állapotból az  $(m', n')$  állapotba való átmenet intenzitása,  $m, m' = 0, 1, \dots, K_1$ ,  $n, n' = 0, 1, \dots, K_2$ . A nem nulla átmeneti intenzitások a következők:

$$\begin{aligned}
 Q_{(m,n)(m+1,n)} &= \begin{cases} \lambda & , 0 \leq m < C, 0 \leq n \leq K_2 \\ \lambda(1 - r(m)) & , C \leq m < K_1, 0 \leq n \leq K_2 \end{cases} \\
 Q_{(m,n)(m-1,n)} &= \begin{cases} m\mu & , 0 < m \leq C, 0 \leq n \leq K_2 \\ C\mu + (m - C)(1 - p)\theta & , C < m \leq K_1, 0 \leq n \leq K_2 \end{cases} \\
 Q_{(m,n)(m+1,n-1)} &= \begin{cases} n\delta & , 0 \leq m < C, 0 < n \leq K_2 \\ n\delta(1 - r(m)) & , C \leq m < K_1, 0 < n \leq K_2 \end{cases} \\
 Q_{(m,n)(m-1,n+1)} &= (m - C)p\theta, C < m \leq K_1, 0 \leq n < K_2 \\
 Q_{(m,n)(m,n+1)} &= pr(m)\lambda, C \leq m \leq K_1, 0 \leq n < K_2 \\
 Q_{(m,n)(m,n-1)} &= n(1 - p)r(m)\delta, C \leq m \leq K_1, 0 < n \leq K_2
 \end{aligned}$$

A fenti Markov lánc állapot átmenet diagramja:



3.1. ábra. A Markov lánc állapot átmenet diagramja

Ez nem tűnik egy speciális struktúrának, ezért nem egyszerű analitikusan megoldani ezt a Markov láncot. Az állapottér csonkításával a stacionárius eloszláshoz numerikus megoldást kapunk, standard numerikus módszerek alkalmazásával. Mivel célunk pontos közelítést találni a végtelen állapottér problémára, ezért implementációkban a  $K_1$  és  $K_2$  csonkítási limitet egészen addig kísérreljük meg növelni, míg a növelés már nem lesz hatással a stacionárius eloszlásra. Legyen  $\pi_{m,n}$ ,  $m = 0, \dots, K_1$ ,  $n = 0, 1, \dots, K_2$  annak stacionárius valószínűsége, hogy az  $(m, n)$  állapotban vagyunk, és legyen  $T_r$  a stacionárius újrachívási intenzitás (az egységnyi idő alatt megismételt hívások száma). Ami:

$$T_r = \sum_{n=1}^{K_2} n\delta \sum_{m=0}^{K_1} \pi_{m,n} \quad (3.4)$$

A visszatérési intenzitást ezen felül a Markov lánc numerikus megoldásának és a 3.4 kifejezés használatával is megkaphatjuk, azonban ez a számítás igen sok időt igényel és megle-

hetősen számításigényes.

A rendszer stacionárius áramlás egyensúlyára alapozva alternatív kifejezést javasolunk a  $T_r$ -re. Az eredmény az alábbi tételben összegezhető:

**Tétel 1.** Legyen  $E[B]$  a foglalt kiszolgálók átlagos száma. Ekkor a rendszer újrahívási intenzitás ( $T_r$ ):

$$T_r = \frac{p}{1-p}(\lambda - E[B]\mu) \quad (3.5)$$

**Bizonyítás** Tekintsük a stacionárius áramlásokat a rendszerben. A teljes bejövő áramlás,  $\lambda_0$  két részből tevődik össze: az elsődleges- és az újrahívásokból. Tehát  $\lambda_0 = \lambda + T_r$ . A kimenő áramlás pedig három részből áll: jelölje  $A$  az elhagyás miatti kimenő folyamatot és  $R$  a blokkolódás miatt. A kiszolgálás befejeződése miatti kimenő folyamatot pedig az átlagos, tényleges kiszolgálási intenzitás  $E[B]\mu$ .

Stacionárius egyensúly esetén a kimenő áramlásnak meg kell egyeznie a bejövő áramlással, azaz:

$$\lambda_0 = A + R + E[B]\mu \quad (3.6)$$

Továbbá a körpálya átlagos beérkező és kimenő áramlásának is egyeznie kell. Egy hívás a körpályára kerül vagy a megszakítás vagy a blokkolódás miatt. A körpályára beérkező áramlás tehát  $p(A + R)$ . Mivel a körpálya elhagyási intenzitása  $T_r$ , így is írhatjuk:

$$T_r = p(A + R) \quad (3.7)$$

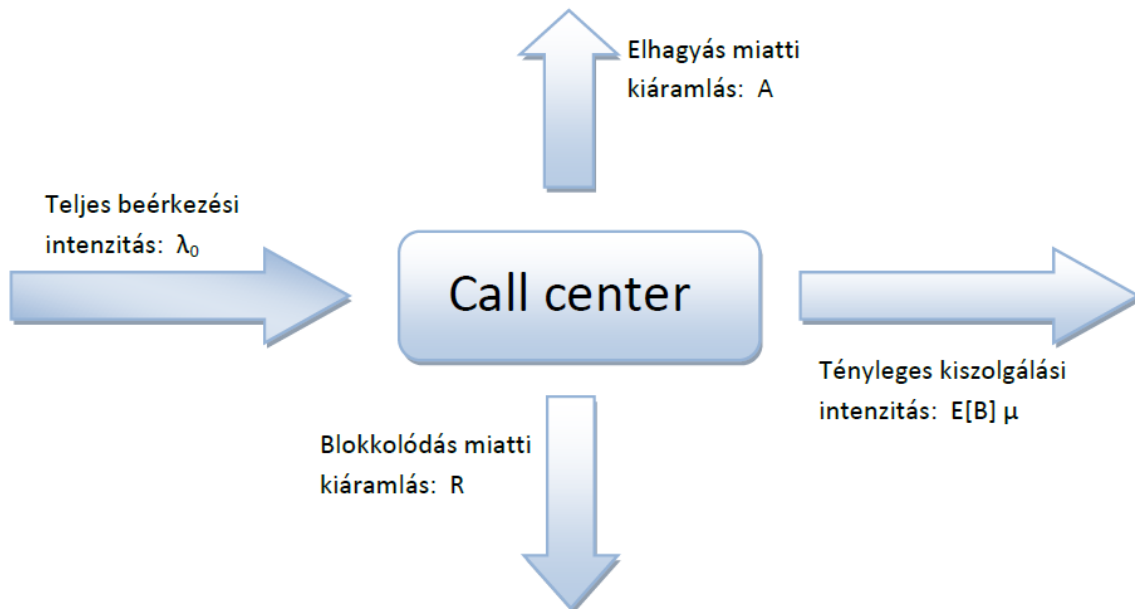
A körpálya beérkező és kimenő áramlását felhasználva (3.6 és 3.7 egyenletek):

$$\lambda_0 = \frac{T_r}{p} + E[B]\mu \quad (3.8)$$

Mivel  $\lambda_0 = \lambda + T_r$ , a 3.8 egyenletet így is írhatjuk:

$$\lambda + T_r = \frac{T_r}{p} + E[B]\mu \quad (3.9)$$

Q. E. D.



3.2. ábra. A be- és kiáramlások

Az 3.2 ábra mutatja a fenti bizonyításban felhasznált be- és kimenő áramlásokat. Annak ellenére, hogy a Tétel 1. nem segíti az újrahívási ráta pontos kiszámolását ( $E[B]$ -t még mindig ki kell számolnunk), valós adatból való becslését javasolja. Ha  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  és  $E[B]$  ismeretlenek, akkor a Tétel 1. egyszerű becslést ad  $T_r$ -re. A következő alfejezetben egy másfajta megközelítést mutatunk be erre a közelítésre.

### 3.2.2. Fluid approximáció

Habár az előző alfejezetben bemutatott sztochasztikus modellt használhatjuk az újrahívásokhoz kapcsolódó rendszerjellemzők numerikus számítására, ez igencsak nehézkes. Most egy olyan egyszerű approximációt mutatunk be, ami a Markov lánc átmenet intenzitásait determinisztikus áramlási intenzitásokra cseréli. Ennek eredménye egy determinisztikus, folytonos áramlási modell, ezért fluid approximációként hivatkozunk rá.

A modell leírását kezdjük azzal, hogy az eredeti sztochasztikus modell diszkrét állapotterét folytonosra cseréljük. Az approximációs modellben az állapotot  $(x_1(t), x_2(t))$ , ahol  $x_1(t)$  a valódi puffer folytonos szintje,  $x_2(t)$  pedig  $t$  időpillanatban a körpálya folytonos szintje. Ezzel a determinisztikus, folytonos approximációval a rendszer teljes beérkezési intenzitása:

$$\lambda_0(t) = \delta x_2(t) + \lambda(t) \quad (3.10)$$

Az  $x_1(t)$  -be érkező áramlás a  $\lambda_0(t)$  -től és a  $t$  időpillanatban lévő blokkolódási intenzitástól függ. A determinisztikus approximációt használva, a növekedés aránya  $x_1(t)$ -ben:  $(1 - r(x_1(t)))\lambda_0(t)$ , ahol  $r(x)$  a blokkolás valószínűsége, ha  $x$  a valódi puffer szintje. Hogy meghatározzuk ezt a valószínűséget kiterjesztjük az előző definíciót (a 3.3. egyenletet) folytonos állapottérre:

$$r(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \beta)e^{-\theta_1 \frac{x-C+1}{C\mu}} & , \text{ ha } x \geq C \\ 0 & , \text{ egyébként} \end{cases} \quad (3.11)$$

Az  $x_1(t)$  pufferszint a kiszolgálások befejezte és az elhagyások miatt csökken. Az approximációval ez a csökkenési intenzitás egyenlő az alábbi kifejezéssel:

$$\mu \text{Min}(x_1(t), C) + \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0). \quad (3.12)$$

Most már kifejezhetjük az  $x_1(t)$  változásának teljes intenzitását:

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))\lambda_0(t) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \quad (3.13)$$

Ugyanezzel az érveléssel kapjuk a következő differenciálegyenletet az  $x_2$  változási intenzitására:

$$\frac{dx_2}{dt} = p(r(x_1(t))\lambda_0(t) + \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0)) - \delta x_2(t) \quad (3.14)$$

A  $\lambda_0(t)$  helyére a 3.10. egyenlet jobboldalát helyettesítve megkapjuk  $(x_1(t), x_2(t))$  -t, az alábbi egyenletrendszer megoldásaként:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \\ \frac{dx_2}{dt} = pr(x_1(t))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \delta x_2(t) + \theta p \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \end{cases} \quad (3.15)$$

Stacionárius rendszerünkben ez pontosan:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_1(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_2(t)}{dt} = 0 \quad (3.16)$$

Ami lehetővé teszi, hogy megkapjuk  $x_1$  -et és  $x_2$  -őt:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2 \end{cases} \quad (3.17)$$

Könnyen látható, hogy ha az átlagos kihasználtság  $\rho = (\lambda/C\mu)$  kisebb vagy egyenlő, mint 1, akkor a körpálya stacionárius szintje, az  $x_2$  nulla. Ez esetben az approximáció semmilyen információt sem ad a rendszer újrahívási intenzitásáról. Figyeljük meg azt a sokkal érdekesebb esetet, amikor a  $p > 1$ . Ebben az esetben  $x_1 \geq C$ . Ezáltal írhatjuk, hogy  $\text{Min}(x_1, C) = C$  és  $\text{Max}(x_1 - C, 0) = x_1 - c$ . A stacionárius rendszerben a rendszer (3.15) a következő:

$$\begin{cases} (1 - r(x_1))(\delta x_2 + \lambda) = C\mu + \theta(x_1 - C) \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(\delta x_2 + \lambda) = pC\mu + \theta p(x_1 - C) + pr(x_1)(\delta x_2) + \lambda \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases} \quad (3.19)$$

ami végül ehhez vezet:

$$\begin{cases} p(\delta x_2 + \lambda) - \delta x_2 = pC\mu \\ \delta x_2 = pr(x_1)(\delta x_2 + \lambda) + \theta p(x_1 - C) \end{cases} \quad (3.20)$$

A fenti kifejezéssel megkapjuk a stacionárius pufferszinteket. A valódi puffer stacionárius szintje az alábbi egyenlet megoldása:

$$(\lambda - pC\mu)r(x_1) + \theta(1 - p)(x_1 - C) = \lambda - C\mu \quad (3.21)$$

A 3.21. egyenlet standard numerikus módszerekkel is megoldható, így megkapjuk az  $x_1$  értékét. Másrésztől kiderül, hogy az  $x_2$  -re sokkal egyszerűbb megoldás létezik. Érdekes, hogy az  $x_2$  nem függ a  $\theta$  -tól, a felhasználók türelmének küszöbintenzitásától. Ez egy rendkívül hasznos tulajdonság, mivel a gyakorlatban a többi paramétert ( $C$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  és  $p$ ) is könnyebb becsülni. A fenti tulajdonság (függetlenség a  $\theta$  -ra) egy másik hasznos konzekvenciája, hogy ugyanez az érzéketlenség igaz a stacionárius újrahívási intenzitásra. Emellett, ez a felfedezés igaz az előző alfejezet sztochasztikus modelljére is. Ezt az alábbi tétel mutatja be:

- Tétel 2.** i. A fluid modellel kapott újrahívási intenzitás, a (fluid)  $T_r$  nem függ a  $\theta$  -tól  
ii. Ahogy a  $\lambda$  növekszik, az újrahívási intenzitás fluid approximációja aszimptotikusan pontos

a sztochasztikus modellre (azaz ha létezik  $\lambda$  úgy, hogy  $T_r(\text{sztochasztikus}) - T_r(\text{fluid}) < \epsilon$ , ha  $(\epsilon > 0)$ ).

**Bizonyítás** A 3.20. egyenletből fejezzük ki  $x_2$ -t, a körpálya stacionárius szintjét:

$$x_2 = \frac{p}{1-p} \frac{\lambda - C\mu}{\delta} \quad (3.22)$$

Jegyezzük meg, hogy  $T_r(\text{fluid}) = \delta x_2$ , így azt kapjuk, hogy:

$$T_r(\text{fluid}) = \frac{p}{1-p} (\lambda - C\mu) \quad (3.23)$$

ami nem függ a  $\theta$ -tól.

Hogy bizonyítsuk a ii. részt, vegyük figyelembe a Tétel 1. 3.5. egyenletében kifejezett  $T_r(\text{sztochasztikus})$ -t. Így felírhatjuk:

$$T_r(\text{sztochasztikus}) - T_r(\text{fluid}) = \frac{\mu p}{1-p} (C - E[B]) \quad (3.24)$$

Egyszerű, direkt összehasonlítás mutatja, hogy  $E[B]$  a  $\lambda$ -ban növekszik. Ez azt jelenti, hogy minden  $\epsilon$  különbségre létezik egy  $\lambda$ , hogy  $(C - E[b]) < ((\mu p)/(1-p))\epsilon$ .

Q. E. D.

A következőt állítja a tétel 2.: a 3.23. kifejezéssel megadott újrachívási intenzitás közelítésének pontosnak kell lennie túlterhelt call centerekénél is. Valójában a közelítési hiba a  $C$ -nek  $E[B]$ -re történő lecserélése miatt van. Túlterhelt rendszereknél az  $E[B]$  meglehetősen közel van  $C$ -hez. Ahogy már korábban is említettük a közelítés nem ad hasznos információt, ha  $\lambda \leq C\mu$ . Mindazonáltal nagy call centerekénél az újrachívási jelenség a túlterhelés miatt alapvető. Csakugyan, a nagy és nem túlterhelt call centerek esetén jól ismert a következő jelenség: alacsony szinten a blokkolás és a várakozás is bekövetkezik, ami elhanyagolható újrachívási potenciált eredményez.

### 3.3. Nem stacionárius rendszer analízise

A legtöbb esetben a call center modellezéséhez használt paraméterek változnak az idővel. A beérkezések esetében például az ügyfélen múlik, hogy mikor telefonál a nap folyamán és ezt nem stacionárius érkezésként kell modellezni. Általában a nem napi 24 órában működő call centerek esetében nyitáskor (reggel) és záráskor (délután) van terhelés. Ugyanígy, egy nonstop

működő call center esetében különbözik a hívások intenzitása nappal és éjszaka. Az ügyintézők száma a nap folyamán folyamatosan változik. Egy napot tipikusan több részre osztanak, és a részekben az ügyintézők száma konstans. Ez az időintervallum általában 30 perc.

Tekintsünk a nap egy  $T$  hosszúságú periódusát. Ekkor a rendszerparaméterek  $\lambda(t)$ ,  $C$ ,  $\mu$ ,  $\theta$ ,  $p$ ,  $\delta$  és  $r(x)$  konstansak. Feltételezzük, hogy a periódus kezdetekor a valós sorhossz  $x_1^0$  és a körpálya mérete pedig  $x_2^0$ . A következő differenciál egyenletrendszer

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (1 - r(x_1(t)))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) - \mu \text{Min}(x_1(t), C) - \theta \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \\ \frac{dx_2}{dt} = pr(x_1(t))(\delta x_2(t) + \lambda(t)) + \theta p \text{Max}(x_1(t) - C, 0) \end{cases} \quad (3.25)$$

lehetővé teszi számunkra, hogy végigkövessük a sor változásait a tekintett perióduson belül. Ez lényegében azt jelenti, hogy ki tudjuk számolni a valós sor  $x_1^T$  illetve a körpálya  $x_2^T$  méretét a  $T$  periódus végén.

Mivel ezt a differenciál egyenletrendszert analitikus eszközökkel nem lehet megoldani, következzen egy numerikus megoldás rá. A következő algoritmus leírja, hogyan használjuk a 3.25. egyenletet a rendszer kiértékelésére. Az alapötlet az, hogy kapcsoljuk össze a periódusokat úgy, hogy mindig a megfelelő értékre állítjuk az  $x_1^T$ -t és az  $x_2^T$ -t.

- 1. lépés: Inicializálás:  $x_1^0 = x_2^0 = 0$ . A 3.25. differenciál egyenletrendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét a megfelelő paraméter értékekkel  $(C, \lambda, \dots)$   $0 \leq t \leq T$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(T)$  és  $x_2^T = x_2(T)$ .
- 2. lépés: Inicializálás:  $x_1^0 = x_1^T$  és  $x_2^0 = x_2^T$ . A 3.25. differenciál egyenletrendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét  $T \leq t \leq 2T$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(2T)$  és  $x_2^T = x_2(2T)$ .
- $i$ -edik lépés ( $i \geq 3$ ): Inicializálás:  $x_1^0 = x_1^T$  és  $x_2^0 = x_2^T$ . A 3.25. differenciál egyenletrendszer használatával határozzuk meg  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  értékét  $(i-1)T \leq t \leq (i)T$  esetén. Legyen  $x_1^T = x_1(iT)$  és  $x_2^T = x_2(iT)$ .
- Folytassuk, míg  $i = n$ .

## 4. fejezet

# Kalkulátor

Készítettem egy appletet az Erlang-C modell rendszerjellemzőinek számítására. A programozás során felhasználtam a call center optimalizációs Java könyvtárat (lásd [15] hivatkozott irodalom).

### 4.1. Erlang-C applet

Az Erlang-C formulát használjuk a hívás várakozásának valószínűségének ( $P\{W > 0\}$ ,  $W$  a várakozási idő) és a kiszolgálási szint ( $P\{W \leq awt\}$ ,  $awt$  az elfogadható várakozási idő) kiszámítására. A formula  $M/M/c$  sorbanállási modellt használ, ami egyfajta hívástípust és egy ügyintézőcsoportot feltételez. Ezt a modellt úgy vizsgálhatjuk, mint egy sztochasztikus folyamatot:  $X(t) \in \{0, \dots, c+q\}$  ábrázolja a rendszerben lévő hívások számát  $t$ -edik időpillanatban, legfeljebb  $c+q$  hívás lehet a rendszerben. A  $c$  jelöli a kiszolgálók számát,  $q$  pedig a sor kapacitását. Ha a rendszer tele van ( $Q(t) = c+q$ ), akkor a hívások blokkolódnak. A modell az ügyfél türelmetlenségének következtében bekövetkezett elhagyást nem veszi figyelembe.

Az intenzitások az egyes állapotokban:

$$\lambda_k = \lambda, k = 1, 2, \dots, c+q-1$$
$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , k = 1, 2, \dots, c-1 \\ c\mu & , k = c, c+1, \dots, c+q \end{cases}$$

## 4.2. Erlang-C applet működésének ellenőrzése

Appletem ellenőrzéseit az amszterdami VU University-n tanító Ger Koole<sup>1</sup> (alkalmazott valószínűségszámítás professzor) honlapján<sup>2</sup> illetve a CCMath weboldalon<sup>3</sup> található Erlang-C kalkulátorokkal végeztem.

4.1. táblázat. Kalkulátor eredményeinek összehasonlító táblázata - SL: kiszolgálási szint (SL1: saját Erlang-C applet, SL2: G. Koole féle applet)

| $\lambda$ | $\mu$ | $c$ | SL1 (%) | SL2 (%) | Differencia (%) |
|-----------|-------|-----|---------|---------|-----------------|
| 1         | 1     | 4   | 97,96   | 97,96   | 0,00            |
| 1         | 1     | 5   | 99,62   | 99,62   | 0,00            |
| 7         | 5     | 2   | 42,35   | 42,35   | 0,00            |
| 7         | 5     | 3   | 79,76   | 79,76   | 0,00            |
| 9         | 4     | 3   | 43,22   | 43,22   | 0,00            |
| 10        | 2     | 6   | 41,25   | 41,25   | 0,00            |
| 10        | 4     | 3   | 29,78   | 29,78   | 0,00            |
| 10        | 4     | 6   | 95,26   | 95,26   | 0,00            |
| 10        | 4     | 9   | 99,88   | 99,88   | 0,00            |
| 15        | 10    | 2   | 35,71   | 35,71   | 0,00            |
| 15        | 10    | 4   | 92,54   | 92,54   | 0,00            |

4.2. táblázat. Kalkulátor eredményeinek összehasonlító táblázata - SL: kiszolgálási szint (SL1: saját Erlang-C applet, SL2: CCMath applet) - awt: elfogadható várakozási idő

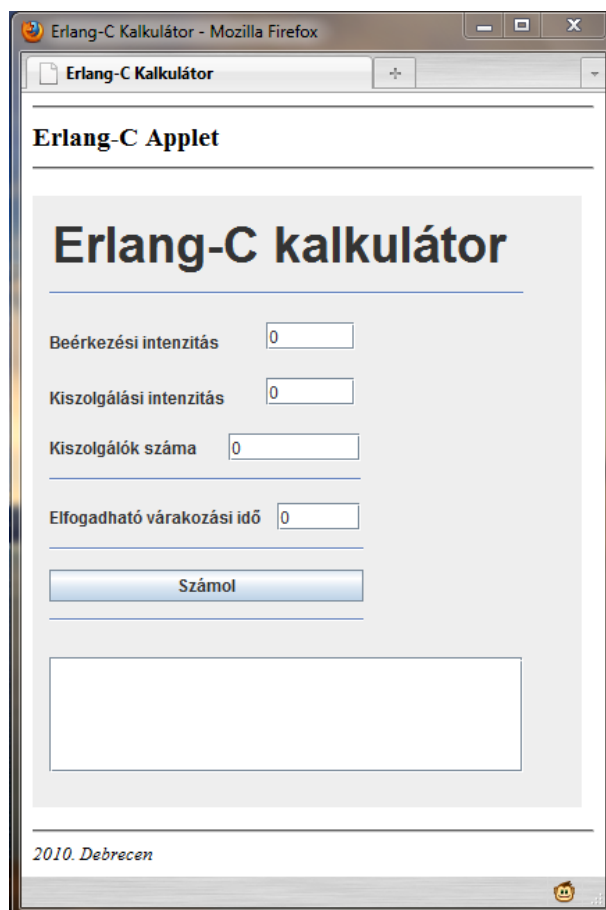
| $\lambda$ | $\mu$ | $c$ | awt (sec) | SL1 (%) | SL2 (%) | Differencia (%) |
|-----------|-------|-----|-----------|---------|---------|-----------------|
| 10        | 4     | 5   | 1         | 88,96   | 88,96   | 0,00            |
| 10        | 4     | 3   | 0         | 29,77   | 29,77   | 0,00            |
| 15        | 1     | 16  | 0         | 26,99   | 26,99   | 0,00            |
| 15        | 1     | 16  | 1         | 28,20   | 28,20   | 0,00            |
| 15        | 1     | 16  | 10        | 38,20   | 38,20   | 0,00            |
| 15        | 1     | 16  | 100       | 86,21   | 86,21   | 0,00            |
| 150       | 5     | 32  | 0         | 36,98   | 36,98   | 0,00            |
| 1498      | 5     | 301 | 2         | 28,43   | 28,43   | 0,00            |
| 1498      | 5     | 301 | 20        | 91,24   | 91,24   | 0,00            |
| 1498      | 2     | 750 | 200       | 99,88   | 99,88   | 0,00            |

<sup>1</sup><http://www.math.vu.nl/~koole/>

<sup>2</sup><http://www.few.vu.nl/~koole/ccmath/ErlangC/index.php>

<sup>3</sup><http://www.ccmath.com/ErlangC/>

### 4.3. Erlang-C applet képernyőképei



The screenshot shows a web browser window titled "Erlang-C Kalkulátor - Mozilla Firefox". The browser's address bar and tabs show the applet's URL. The applet itself has a title bar "Erlang-C Kalkulátor" and a main heading "Erlang-C Applet". Below this is a large heading "Erlang-C kalkulátor". The interface contains four input fields, each with a label and a text box containing the number "0":

- Beérkezési intenzitás
- Kiszolgálási intenzitás
- Kiszolgálók száma
- Elfogadható várakozási idő

Below these fields is a blue button labeled "Számol". Under the button is a large, empty rectangular box for the results. At the bottom left of the applet, it says "2010. Debrecen". At the bottom right, there is a small logo.

4.1. ábra. Erlang-C applet kezdőfelülete

## Erlang-C kalkulátor

Beérkezési intenzitás

Kiszolgálási intenzitás

Kiszolgálók száma

Elfogadható várakozási idő

Kiszolgálási szint : 0.2411053540587219

Hívás várakozásának valószínűsége: 0.7588946459412781

4.2. ábra. Erlang-C applet számítás

## Erlang-C kalkulátor

Beérkezési intenzitás

Kiszolgálási intenzitás

Kiszolgálók száma

Elfogadható várakozási idő

másodpercben megadva

Kiszolgálási szint : 0.378669615021649

Hívás várakozásának valószínűsége: 0.7588946459412781

4.3. ábra. Erlang-C applet súgószöveg

```

167         .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
168         .addComponent(jSeparator2, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 10, javax.swing.
169         .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.RELATED)
170         .addComponent(calculateButton, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 23, javax.sw
171         .addPreferredGap(javax.swing.LayoutStyle.ComponentPlacement.UNRELATED)
172         .addComponent(jSeparator4, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, 10, javax.swing.
173         .addGap(18, 18, 18)
174         .addComponent(jScrollPane1, javax.swing.GroupLayout.PREFERRED_SIZE, javax.swing.Gro
175         .addContainerGap(javax.swing.GroupLayout.DEFAULT_SIZE, Short.MAX_VALUE))
176     );
177     } // </editor-fold>
178
179     private void calculateButtonActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
180
181     }
182
183     private void calculateButtonMouseClicked(java.awt.event.MouseEvent evt) {
184
185         double arrival = Double.parseDouble(arrivalRateTextField.getText().toString());
186         double service = Double.parseDouble(serviceRateTextField.getText().toString());
187         int server = Integer.parseInt(numberOfServersTextField.getText().toString());
188         double awt = Double.parseDouble(acceptableWaitingTimeTextField.getText().toString()) / 60;
189
190         ErlangC c = new ErlangC(arrival, service);
191
192         String results = "Kiszolgálási szint : " + c.getServiceLevel(server, awt) + "\n";
193         results += "Hívás várakozásának valószínűsége: " + c.getProbDelay(server) + "\n";
194
195         resultsTextArea.setText(results);
196
197
198     }

```

4.4. ábra. Erlang-C applet forráskód részlet

## 5. fejezet

# Voice Miner - érzelmek és kulcsszavak felismerése a rögzített telefonbeszélgetésekben

Ma már minden telefonos ügyfélszolgálattal történő beszélgetést digitálisan rögzítenek. Ezek a hangfájlok rengeteg információt rejtnek az ügyfelek hangulatával, a cég szolgáltatásának minőségével kapcsolatban. Ezt teljes egészében feldolgozni és tőkét kovácsolni belőle számítógépek nélkül szinte lehetetlen feladat. Ebben a fejezetben ismertetem magyar fejlesztésű Voice Miner<sup>1</sup> (továbbiakban VM) hangbányászati szoftvert, ami erre a problémára nyújt megoldást.

A terméket a Nextent Informatikai Zrt.<sup>2</sup> forgalmazza. A VM lelket képező algoritmust pedig a Szegedi Tudományegyetem<sup>3</sup> mesterséges intelligenciával foglalkozó kutatói fejlesztették ki.

E szoftver nélkül a felvett beszélgetésekbe, csak véletlenszerű belehallgatás történt. Ennek a hatékonysága igen alacsony (kis mintavétel - ami általában csak 1% - miatt pontatlan a mérés, pedig átlagosan a hívások 8%-a bizonyul problémásnak), ezzel ellentétben a VM a hanganyag 100 százalékát képes feldolgozni. Mai, átlagos processzorral rendelkező számítógép egy óra alatt több, mint 17 órányi telefonbeszélgetést képes feldolgozni<sup>4</sup>. A szoftver licenz független

---

<sup>1</sup><http://www.voiceminer.hu>

<sup>2</sup><http://www.nextent.hu/>

<sup>3</sup><http://www.u-szeged.hu/>

<sup>4</sup>Ehhez, az adatvédelmi biztos állásfoglalása alapján nem szükséges explicit nyilatkozat az ügyfél részéről.

a processzorok számától, így a szoftver teljesítménye a rendelkezésre álló számítógépparkon múlik.

## 5.1. Kulcsszófelismerés

A rendszer felismeri a beszélgetés során elhangzott, előre definiált kulcsszavakat és tárolja a kimondásuk idejét ügyfél és ügyintéző oldalon egyaránt. A rendszer tetszőleges számú kulcsszó vizsgálatára alkalmas, sőt, a kulcsszavak utólagos módosításra és a hangállományok újbóli elemzésre is lehetőség van. A kulcsszavak felvitele az adminisztrátori felületen egyszerű szabad szöveges módon történik.

## 5.2. Érzelemdetektálás

| Attitűd  | Érzelmi szegmensek | Viselkedés jellemző              |
|----------|--------------------|----------------------------------|
| Negatív  | Elégedetlen        | Mérges, dühös, haragos, ingerült |
|          | Csalódott          | Elkeseredett, kiábrándult        |
|          | Bizonytalan        | Fáradt, ideges                   |
| Pozitív  | Elégedett          | Elégedett, lelkes, boldog        |
| Semleges | Neutrális          | Semleges                         |

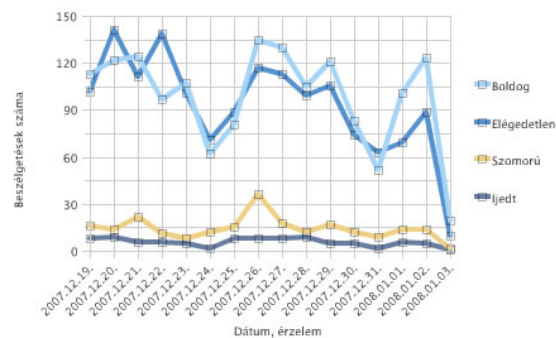
5.1. ábra. Érzelemdetektálás

Az érzelemdetektálás főbb jellemzői:

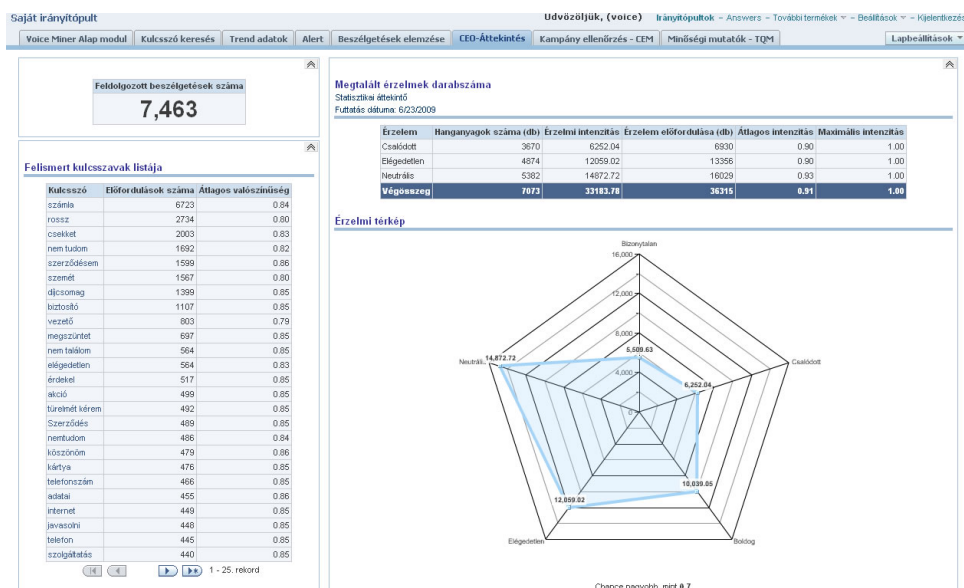
- A beszélgetés folyamatosan értékelésre kerül érzelmi állapot szerint
- Az érzelmi változások is tárolásra kerülnek (nyugodt ügyfél → ideges ügyfél) az átváltás idejét megadva
- A rendszer az ügyintéző és ügyfél oldalon egyaránt vizsgálja az érzelmi állapotot
- A rendszer érzelmi valószínűséget rendel hozzá az egyes beszélgetésekhez
- A rendszer nemcsak a beszélgetés egyes szeleteiről, hanem az egész beszélgetésről is összegző érzelmi értékelést ad

- A rendszer minden érzelmi szegmenshez valószínűséget rendel, így lehetővé válik ez alapján a sorba rendezés és a további elemzés, pl. rendszeres operatív jelentések az egyes napok leginkább elégedetlen beszélgetéseiről, ügyfeleiről.

Beszélgetések érzelmi megoszlása



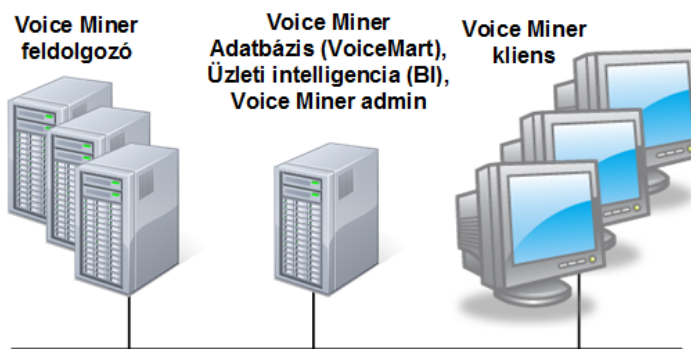
5.2. ábra. Beszélgetések érzelmi megoszlása az elemzett beszélgetésekben



5.3. ábra. Voice Miner irányítópult - érzelmi térkép, kulcsszavak

### 5.3. Voice Miner architektúra

A Voice Miner rendszer robosztus, skálázható architektúrával rendelkezik, a feldolgozási teljesítmény közel lineárisan növelhető. A számításigényes hanganyag-feldolgozást végző szerverek száma tetszőlegesen bővíthető. A felhasználói felületek korszerű Java / Ajax és Flash technológiával, vékony webes kliensekre épülnek a távoli, egyszerű menedzselhetőség biztosítása érdekében. A rendszer nagyvállalati IT környezetbe való illeszkedés követelményeire készült fel (központi felhasználói jogosultság kezelés, széles körű alkalmazáserver-kompatibilitás).



5.4. ábra. Voice Miner architektúra

### 5.4. Hanganyag feldolgozó

A hanganyag feldolgozó a letárolt hanganyagokat feldolgozza (érzelem- és kulcsszó-detektálást végez rajtuk), majd a feldolgozás végeredményét továbbítja az adatbázisba. A feldolgozással kapcsolatos paraméterek az adatbázisban vannak letárolva. Az alrendszer magja az érzelem- és kulcsszó-detektáló algoritmus, melyet körbevesz egy ütemező, menedzselő rendszer. Ezen rendszer feladata a fájl és a paraméterek beolvasása, az algoritmus elindítása, majd a végeredmény kiírása az adatbázisba. A feldolgozással kapcsolatban rendszernapló készül. Voice Miner adatbázis (VoiceMart) Az adatbázis tárolja a feldolgozó algoritmus működéséhez szükséges adatokat (modelladatokat, paraméterek), a naplózott események adatait és a feldolgozandó fájlok meta-adatait. Az adatbázis tárolja továbbá a hanganyag feldolgozó alrendszer által, a feldolgozás során előállított információkat, valamint adatot szolgáltat a statisztikai riportok és külső rendszerek számára.

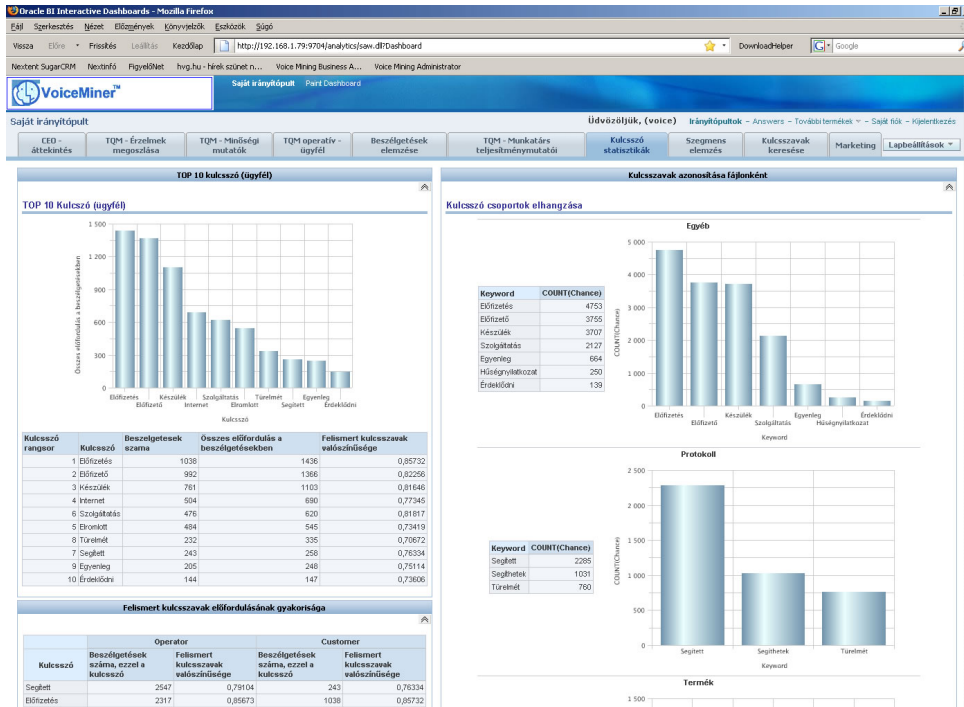
## 5.5. Adminisztráció

A Voice Miner adminisztrációs felülete elsősorban a rendszer kulcsszavainak és az ügyintézők adatainak módosítására szolgál. Jellemzői:

- Kulcsszavak, kulcsszó csoportok kezelése, érvényességi idő, fonetika kezelése
- Ügyintézők, ügyintéző csoportok kezelése
- Rendszerfelügyelet és feldolgozó kezelése
- Kényelmes, tetszőleges böngészővel elérhető felhasználóbarát adminisztrációs felület

## 5.6. Riportoló (BI)

Az elemző felület feladata az adatbázis (VoiceMart) adatai alapján ad-hoc elemzések biztosítása és dashboard, elemzési, statisztikai riportok előállítás a különböző üzleti területek részére.



5.5. ábra. Voice Miner kulcsszó statisztikák

## 5.7. Összefoglaló

A Voice Miner bevezetését követő pár hónap után számos feladat automatikusan a Voice Miner segítségével végezhető, ezzel a szakértők különösen a minőségellenőrök munkájának új irányait teremtve meg, jelentősen növelve a valós problémák feltárásának és megoldásának hatékonyságát. Különösen fontosnak tartjuk kiemelni azt, hogy a rendszer első pillanattól kezdve jelentős üzleti hozzáadott értéket teremt, valamint a rendszer által szolgáltatott információk később felhasználhatók elemzésekre, melyek eredményeként további üzleti hasznosítási lehetőségek nyílnak meg a jövőben a megrendelő számára.

## 6. fejezet

# Összefoglalás

Dolgozatom elején bevezettem az olvasót a call centerek világába. Rávilágítottam arra a tényre, hogy az itt tárgyalt matematikai modellek, nem csak call centereknél használhatók, hanem az élet bármely területén, ahol sorbanállási rendszerre vezethetjük vissza a problémát.

Megmutattam, hogyan modellezzünk call centereket türelmetlen felhasználókkal. Láttunk különböző szabályokat az alkalmazotti létszám meghatározására, illetve az erre épülő rendszereket. Ezután következett, hogy milyen jelentősége van az elhagyásnak a gyakorlatban és a modellezésben. Majd számoltunk rendszerjellemzőket különböző becslésekkel és approximációkkal.

Ezután megnézhattuk, hogy az elhagyás és újrahívás milyen hatással van a call centerek teljesítményére. Láthattuk a sztochasztikus modellezését a stacionárius rendszerű call centernek. Majd ennek nehézkes számítása miatt a fluid approximációt is megismerhettük. Mivel a legtöbb esetben a call center modellezéséhez használt paraméterek változnak az idővel, ezért a nem stacionárius rendszert is analizáltuk.

Láthattuk az appletemet, az Erlang-C modell rendszerjellemzőinek számítására. Amellyel könnyen, gyorsan, böngészőben, platformfüggetlenül lehet a különböző paraméterek változtatásainak eredményét ellenőrizni.

Végezetül bemutattam egy magyar hangbányászati szoftvert, ami képes az ügyfelek érzelmeit felismerni, ezáltal hatékony eszközt adva a call center tulajdonosok kezébe.

Dolgozatom írása közben megismerkedtem a  $\text{\LaTeX}$  magas szintű dokumentum-leíró nyelvvel és a TeXnicCenter programmal.

# Ábrák jegyzéke

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Egy tipikus call center . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 6  |
| 2.1. Call center sematikus ábrája . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 10 |
| 2.2. Ward Whitt arcképe . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 11 |
| 2.3. Sor telítettsége - (a): $M(48)/M(1)/N$ és (b): $M(48)/M(1)/N+M(0,5)$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 16 |
| 2.4. $\beta$ nagy call centerek szolgáltatásminősége - korreláció elhagyással (Minden ábrázolt pont 30 perces időközi adat jelöl. Az $x$ koordinátát a $\beta = (N - R)/\sqrt{R}$ képlettel számoltuk, ahol $R$ és $N$ félórás átlagok. Az $y$ koordináta pedig az elhagyás hányada a félórás idő intervallumban. ) . . . . . | 17 |
| 3.1. A Markov lánc állapot átmenet diagramja . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 30 |
| 3.2. A be- és kiáramlások . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 32 |
| 4.1. Erlang-C applet kezdőfelülete . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 39 |
| 4.2. Erlang-C applet számítás . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 40 |
| 4.3. Erlang-C applet súgószöveg . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 40 |
| 4.4. Erlang-C applet forráskód részlet . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                              | 41 |
| 5.1. Érzelemdetektálás . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 43 |
| 5.2. Beszélgetések érzelmi megoszlása az elemzett beszélgetésekben . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                  | 44 |
| 5.3. Voice Miner irányítópult - érzelmi térkép, kulcsszavak . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 44 |
| 5.4. Voice Miner architektúra . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 45 |
| 5.5. Voice Miner kulcsszó statisztikák . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                              | 46 |

# Irodalomjegyzék

- [1] **Sztrik János** Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba <http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/08/index.html> (Letöltve: 2010. március 9.)
- [2] **Koole G., Mandelbaum, A.** (2002) Queueing Models of Call Centers: An Introduction. *Annals of Operations Research* 113, 41-59.
- [3] **Artalejo J.R., Gómez-Corral A., Neuts M.F.** (2000) Analysis of multiserver queues with constant retrial rate. *European Journal of Operational Research* 135 (2001) 569-581.
- [4] **Salah Aguir M., Karaesmen F., Zeynep Akşin O., Chauvet F.** The Impact of Retrials on Call Centers Performance; 2004
- [5] **Garnett O., Mandelbaum A., Reiman M.** Designing a Call Center with Impatient Customers (2002)
- [6] **Salah Aguir M., Zeynep Akşin O., Karaesmen F., Dallery Y.** On the interaction between retrials and sizing of call centers; 2007.
- [7] **Kawanishi Ken'ichi** QBD approximations of a call center queueing model with general patience distribution; 2007.
- [8] **Artalejo J.R., Economou A., Gómez-Corral A.** Applications of maximum queue lengths to call center management *Computers & Operations Research* 34 (2007) 983-996.
- [9] **Whitt, W.,** (1992). Understanding the efficiency of multi-server service systems. *Management Science* Vol. 38, No. 5, 708-723.
- [10] **Lipsky Lester** Queueing Theory - A linear Algebraic Approach (<sup>2</sup>2009)

- [11] **Bodin M., Dawson K.** The Call Center Dictionary: The Complete Guide to Call Center & Customer Support Technology Solutions (2002)
- [12] **Oetiker T., Partl H., Hyna I., Schlegl E.** The Not So Short Introduction to  $\text{\LaTeX}$  2<sub>ε</sub>; 1997
- [13] Középiskolai Matematika és Fizika Lapok - TeX minitanfolyam <http://www.komal.hu/forum/forum.cgi?a=tk> (Letöltve: 2010. március 1.)
- [14] **Csermely Péter** A rejtett hálózatok ereje (Tudomány - Egyetem); 2005.
- [15] Call Center Optimization Java Library <http://www-etud.iro.umontreal.ca/~chanweya/callcenter/> (Letöltve: 2010.04.13.)
- [16] **HWSW** Az érzelmeket is kibányássza a telefonhívásokból egy magyar fejlesztésű szoftver [http://www.hwsz.hu/hirek/36884/nextent\\_voiceq\\_miner\\_hangbanyaszat\\_adatbanyaszat\\_beszedfelismeres\\_hangfelismeres.html](http://www.hwsz.hu/hirek/36884/nextent_voiceq_miner_hangbanyaszat_adatbanyaszat_beszedfelismeres_hangfelismeres.html) (Letöltve: 2010.04.11.)