

Debreceni Egyetem

Informatikai Kar

**Problémák a portfóliómenedzsment és a tőkepiaci
modellek kérdésköréből**

témavezető:

Gáll József
egyetemi tanársegéd

készítette:

Borsós Dávid
IV. éves programozó-matematika
szakos hallgató

Debrecen

2008

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék	0
1. Bevezetés.....	2
2. Portfólió-elméleti bevezető	4
2.1 Rövid történeti áttekintés	4
2.2 A portfólióválasztás alapjai	5
2.3 Kockázat és bizonytalanság	6
2.4 Portfóliók és értékpapírok várható megtérülésének és kockázatának kiszámítása és a szükséges adatok becslése	7
2.5 Összefüggés az egyes részvények és a piaci portfólió között.....	11
2.6 Portfólióválasztás a várható érték - variancia elv alapján	12
2.7 Az elmélet problémái	14
3. A tőkepiaci árfolyamok modellje	15
3.1 A tőkepiaci egyenes.....	15
3.2 Egy egyedi eszköz kockázatának mérése	17
3.3 Egy eszköz kockázata és várható hozama közötti kapcsolat	18
3.3.1 Az értékpapír piaci egyenes	18
3.3.2 A tőkepiaci árfolyamok modellje, amikor a befektetők rendelkezésére áll a kockázatmentes eszköz, de csak vásárolhatnak belőle, el nem adhatják.....	19
4. Az elemzés során felhasznált eszközök és adatok	23
4.1 Az R.....	23
4.2 A felhasznált adatok	24
5. Az empirikus teszt	27
5.1 A tesztelés módszertana.....	28
5.2 A vizsgálatok eredményei	32
6. Összefoglaló.....	34
7. Irodalomjegyzék	35
8. Függelék.....	36
8.1 R scriptek forráskódja.....	36
8.2 Példa: Egymintás t-próba futási eredménye.....	37
8.3 Példa: Lineáris modell részletes adatai	38
8.4 Példa: Egy nem normális eloszlást követő részvény Q-Q diagramja.....	39
8.5 Példa: Normalitásvizsgálat ellenőrzéseként futtatott Kolmogorov-Smirnov próba.....	40

1. Bevezetés

Diplomamunkámban a portfóliók értékeléséről, hatékony portfóliók kiválasztásáról szóló elméletek közül mutatok be néhányat, majd az ismertetett elméleti megközelítéseket a magyar értékpapírpiac adatai alapján összehasonlítom. Fő célom a magyar adatokon való empirikus tesztek végrehajtása az R nyelv segítségével. A dolgozatom elején az ehhez szükséges elméleti háttérrel mutatom be.

Tegyük fel, hogy egy piaci szereplő az általa birtokolt tőke mennyiség egy részét szeretné értékpapírokba fektetni. Vagyonának ezt a részét többféle módon is allokálhatja a piacon megtalálható értékpapírok között. Kockázati attitűdjének megfelelően vásárolhat kötvényeket, részvényeket, illetve köthet különböző szerződéseket a piacon található származtatott termékekre is. Ezeket az értékpapír-kombinációkat – portfóliókat – összehasonlítva láthatjuk, hogy azok nem azonos módon viselkednek. Eltérő hozamszintet kínálnak a befektetőknek, de ezt általában eltérő kockázat mellett teszik. Ezek kombinációjaként a befektetők különböző portfóliókat hoznak létre.

Mi alapján választják ki a piaci szereplők a számukra optimális portfóliót?

Dolgozatom elején – rövid történeti bevezető után – bemutatok két elméleti megközelítést, ami alapján a piaci szereplők a számukra megfelelő tőkeallokációt meg tudják határozni. Az első elmélet szerint az adott portfólióknak kizárólag a várható értéke és varianciája alapján történik meg a portfóliók értékelése. A második esetben a befektetők az általuk tartott portfóliókba azokat a kockázatos eszközöket választják be olyan arányban, amelyek a piac értékelése szerint a piaci portfólió részét kell, hogy képezzék a hatékonyság szempontjából.

Az elméleti modellek ismertetése után a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról letöltött 1998 és 2006 közötti adatokkal számolva gyakorlati szempontból is megvizsgálom, hogy a magyar értékpapírpiacon az adott időintervallumban a befektetők felépíthették-e portfólióikat a piac értékelése alapján. Az egyszerűség kedvéért a vizsgált időszakban a BUX indexet meghatározó tíz legjelentősebb részvény felhasználásával végzem el a szükséges teszteket, de a vizsgálatok ugyanilyen módszertannal elvégezhetőek részletesebb, a teljes magyar értékpapírpiacon figyelembe vevő adatok mellett is.

Végül bemutatom az R programnyelv beépített funkcióinak a modell tesztelése közben alkalmazott részét, és olyan egyszerűbb függvényeket, amiket az elemzés elvégzéséhez, illetve az ellenőrzéshez készítettem. Az elemzés során az R több előre elkészített csomagját is igénybe vettem.

A dolgozatban szereplő minden ábra az R-ben lett létrehozva. A Függelékben a saját scriptek forráskódja mellett bemutatok olyan outputokat, amelyek az R függvényeinek eredményeként jelennek meg, és amely outputokat a végső következtetés levonásához elemeztem.

2. Portfólió-elméleti bevezető

2.1 Rövid történeti áttekintés

A portfólió-elmélet gyökerei az 1930- as évek elején született közgazdaságtani elméleti megközelítésekhez nyúlnak vissza. Legkorábban 1921-ben Frank H. Knight fogalmazza meg a bizonytalanság közgazdasági fontosságát Risk, Uncertainty and Profit címen megjelent művében. Ő volt az első, aki összekapcsolta a profitot, a vállalkozást és a szabad piac létét a kockázat és a bizonytalanság fogalmával. Knight nyomán indult el John Maynard Keynes- a modern makrókonómia megteremtője (1930, 1936), John Hicks- Nobel díjas közgazdász, az IS/LM modell megalkotója (1934, 1935, 1939) és Jacob Marschak- a keresleti rugalmasság fogalmának szülőatyja (1939), akiknek korabeli munkáiban szintén megjelenik a portfólió tudományát meghatározó bizonytalanság. Ezek a művek alapozzák meg a portfólió-elmélet kialakulását, annak ellenére, hogy még sok kérdést tisztázatlanul, válasz nélkül hagynak. Mindezek mellett az elmélet kialakulásának korai szakaszára jellemző, hogy a közgazdászok éppen a bizonytalan voltuk miatt szerencsejátékként tekintettek a pénzügyi piacokra, és nem igazi piacként kezelték őket.

John B. Williams, a befektetési érték teóriájának kitalálója kérdőjelezte meg először 1938-ban íródott művében (The Theory of Investment Value), a pénzügyi piacok „szerencsejáték”-hoz való hasonlatosságát, mikor ezeket az eszközárak alakulásával összefüggésben vizsgálta. Azt állította, hogy a pénzügyi eszközök ára tükrözi azok benső értékét, ami az eszközből várható jövőbeli osztalék diszkontált áramával mérhető. Megfogalmazása szerint, amennyiben egy vállalat értéke megegyezik a jövőbeli hozamok jelenértékével, akkor ez az érték nem függ a beruházási áldozat nagyságától.

Az 1973-74-es piaci visszaesés és recesszió adott újabb lökést a befektetési stratégiák kutatásának. Két iskola alakult ki, amelyek különböző eredményre jutottak,

és követők még ma is komoly vitában állnak egymással. Az egyik csoport kidolgozta a befektetések kezelésének modern portfólió elméletét. Egyik kiemelkedő képviselőjük, Harry Markowitz ennek lényegét abban ragadta meg, hogy annak érdekében, hogy esélyünk legyen nagyobb hozam elérésére, nagyobb kockázatot kell vállalnunk a befektetési portfóliónk összeállításánál. Így az a leghatékonyabb portfólió, amely a legmagasabb hozamot biztosítja a velejáró kockázat egy adott szintje mellett. A befektetés kezelők célja – mondta Markowitz –, hogy megfeleltessék a portfóliókat a befektetők kockázattvállalási hajlandóságának, és kerüljék a nem hatékony portfóliókat. Az ezt az utat követő befektetési stratégiák közös vonása, hogy a velük járó kockázatok csökkentése érdekében a befektetések szétterítését ajánlják. Ezzel gyakran együtt jár a befektetési portfólió aktív kezelése, azaz összetételük rendszeres felülvizsgálata és korrekciója. A korrekció itt a portfólióban lévő értékpapírok kisebb-nagyobb részének lecserélését, azaz azok eladását és más papírok vételét jelenti, ami többé-kevésbé számottevő költségekkel csökkenti annak hozamát.

Markowitz megalkotta az optimális portfólió-választás elméletét, ami a kockázatmegtérülés átváltási kapcsolatra épült. Ez lett a kockázatcsökkentési célú portfólió diverzifikáció alapja.

2.2 A portfólióválasztás alapjai

A portfólió befektetések sorozataként vagy csomagjaként tekinthető, amely tartalmazhat részvényeket, kötvényeket és egyéb beruházásokat. A portfólió elmélet ezen beruházások optimális sorozatának kiválasztásával, felülvizsgálatával, és felépítésével foglalkozik úgy, hogy figyelembe veszi azok anticipált hozamát és annak variabilitását.

Az elmélet elsősorban az optimális portfóliók kiválasztását helyezi előtérbe, mivel a felépítés vizsgálatára és a felülvizsgálatra csak meghatározott esetekben van szükség. Felépítésről akkor beszélünk, ha a befektetések csomagját meghatározott időtávra hozzuk létre, felülvizsgálatról pedig akkor, ha az értékpapírok teljesítménye

változik meg, vagy új értékpapírok válnak beválthatóvá, esetleg megváltoznak a befektetési attitűdök.

A portfólió elméletének számos kapcsolódási pontja van a kockázatos és egymással összefüggő beruházások analízisével. Azonban ez a kapcsolat mégsem tökéletes, mivel a portfólió-elmélet egyperiódusú mérlegelésen alapul.

Ez a periódus megegyezhet akár a befektető teljes tervezési időhorizontjával is, ami viszont nem a legmegfelelőbb háttér a termelő fizikai tőkeberuházások és kapacitások vizsgálatához, különösen akkor, ha ezek szabálytalan időbeli lefutású pénzhozamot generálnak.

A tőzsdei befektetésnek kötelező velejárója a kockázati tartózkodás, ezen az úton elindulva Harry Markovitz munkásságának köszönhető a portfólió választás problémájának modern megközelítése.

Markowitz új módszere abban rejlett, ahogyan a beruházáshoz kapcsolódó kockázatot kezelte, a megtérülés szórását vagy varianciáját alkalmazva a beruházási megtérülés kockázati mértékeként. A portfólió szelekciós probléma két fázisra bontható: az első a várható érték – variancia szabály alapján hatékony portfóliók keresése, másodsor azok közül egyetlen portfólió kiválasztása. A befektető mielőtt elkötelezné magát beruházási változatok adott csoportja mellett, becsülnie kell a portfólió teljesítményét.

A befektetőket racionálisnak feltételezzük, amennyiben a nagyobb megtérülést preferálják a kisebbel szemben a kockázat azonos vagy kisebb mértéke mellett, továbbá a kockázattól tartózkodónak tételezzük őket [1].

2.3 Kockázat és bizonytalanság

A kockázat és a bizonytalanság a közgazdaságtan legvitatottabb jelenségei közé tartoznak. Azt soha nem vitatták, hogy mindkettő hatással van a gazdasági döntésekre, de a hatás előjelét tekintve érezhető változás ment végbe az utóbbi néhány évtizedben. Az 1920-as évektől egészen az 1960 -1970-es évekig olyan kategóriaként tartották számon mindkettőt, amely mérséklő hatást gyakorol a számított-becsült értékre. Ennek legfőbb okát a jövőre vonatkozó döntéshozói tudás

korlátozottságában látták. Knight volt az első, aki megkülönböztette a kockázatot a bizonytalanságtól. Úgy vélte, hogy kockázatos az, ami ellen lehet védekezni biztosítással, tehát ismertnek tételezhető a lehetséges kimenetek valószínűségi eloszlása. A bizonytalanság ellen – véleménye szerint – nem lehet védekezni, mert a kimenetek valószínűségi eloszlása nem ismert. A kockázat olyan választást ír le, amelyben a profit teljes bizonyossággal nem látható előre, ugyanakkor az alternatív bekövetkezések a hozzárendelt valószínűséggel együtt ismertek. Más szavakkal kifejezve: kockázatosnak azt a beruházást nevezzük, amelynek profit eloszlása ismert. Az eloszlás egyaránt becsülhető az objektív vagy a szubjektív valószínűség alapján. Hétköznapi szóhasználatban a kockázat egyet jelent a hazardírozással, a veszteség keletkezésének veszélyével, s általában a balszerencsét vagy a „kárnak kitettséget” jelöli. Ha megmaradunk a kockázat tradicionális jelentésénél, akkor azonosítjuk azt a megtérülés szóródásával, azaz a várható megtérüléstől való pozitív és negatív irányú eltérésekkel. A másik értékelési mód szerint kockázatnak a nem kívánatos vagy hátrányos kimeneteket tekintjük. A veszteség lehetőségével vagy hátrányos bekövetkezéssel azonosított kockázatot az irodalomban „downside risk” elnevezéssel illetik, amely közelíthető a veszteség valószínűségével, várható értékével és az ún. félvarianciával (semi-variance) [1].

A várakozás - variancia elv az egyes alternatívák várható értékének variabilitására összpontosít. E nézőpont szempontjából a kimenetek változékonysága a legfontosabb, s ha kivitelezhető, akkor célszerű a bizonytalanság e mértékének minimalizálása. A várakozás - variancia elv szerint – ha két alternatívának ugyanaz a várható költsége és megtérülése – azt kell választani, amelyiknek a legkisebb a várható költsége vagy a legnagyobb a várható megtérülése [1].

2.4 Portfóliók és értékpapírok várható megtérülésének és kockázatának kiszámítása és a szükséges adatok becslése

Ebben az alfejezetben a portfólió várható hozamának és kockázatának kiszámítását mutatom be, illetve olyan alapvető statisztikai számításokról lesz még szó, amikkel a

szükséges adatokat meg tudjuk becsülni a megfigyelt mintából. Ezen felül a portfólió felépítésével kapcsolatban az egyes értékpapírok jellemzésével foglalkozom.

Egy portfólió befektetési időtávra jutó hozamának (**Holding Period Return**) meghatározása előtt tisztázni kell a portfólióba válogatott egyes részvények hozamát. A hozam az adott befektetési időszak alatt a befektetett eszköz után kapott jövedelmek (ilyen az osztalék és a kamat), valamint az időszak eleje és vége közötti árszint különbsége [2], azaz az árfolyamnyereség vagy veszteség:

$$E(r_0) = \frac{E(P_1 - P_0 + D)}{P_0}, \quad (1)$$

ahol

- r_0 : az időszakra számított hozam,
- P_0 : az értékpapír ára a befektetési időszak elején,
- P_1 : az értékpapír ára a befektetési időszak végén,
- D : az befektetési időszak alatt kapott egyéb jövedelmek (pl.: osztalék).

Amennyiben ismerjük a portfólióba választott értékpapírok (várható) hozamát, az n értékpapírból álló portfólió várható megtérülését a portfólióba választott értékpapírok várható megtérülésének súlyozott átlagából számolhatjuk:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(r_i), \quad (2)$$

ahol

- r_p : a képzett portfólió várható hozamát,
- r_i : a portfólióba választott i -dik részvény várható hozamát, míg
- w_i : az egyes értékpapírok portfólión belüli arányát jelenti úgy, hogy a

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3)$$

feltétel teljesül.

Ha w_i előjelére nem teszünk kikötést, az azt jelenti, hogy a modellben engedélyezzük a fedezetlen eladást. A „*short selling*” azt jelenti, hogy a befektető részvényeket vesz kölcsön, eladja őket a jelenlegi piaci áron, majd egy későbbi időpontban visszavásárolja őket. Ebben az esetben az adott részvényhez tartozó w_i súly negatív értékű.

Egy értékpapír kockázatát a hozamának a szórásával illetve varianciájával mérhetjük. Ezt tudjuk becsülni a korrigált empirikus szórásnégyzettel, ami az elemzés alapjául szolgáló minta értékeinek a mintaátlagtól való átlagos eltérését fejezi ki egyetlen számmal.

$$s^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}, \quad (4)$$

ahol

- s^{*2} : a minta korrigált empirikus szórásnégyzete,
- x_i : az i -dik elem a mintában,
- n : a mintaelemek száma,
- és $\bar{x}$ pedig a mintaátlagot jelöli $(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i)$.

A variancia becslésénél nagyon fontos szempont, hogy milyen időtávon elemezzük az adatokat. Minél rövidebb időt nézünk, annál kisebbek lesznek ezek az értékek, ami hosszabb távon félrevezető lehet. Lehetőségünk van különböző időtávok közötti átszámításra:

$$s_n^2 = \frac{s_e^2}{n}, \quad (5)$$

ahol s_n az n , míg s_e az egy év intervallumon vett hozamok empirikus szórásnégyzete. A portfólió szórássának kiszámításához az értékpapírok megtérülésének a szórásmátrixára van szükség, azaz a részvényhozamok szórásnégyzetét és a páronkénti kovarianciát vesszük figyelembe az alábbi módon [3]:

$$\sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma^2(r_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n w_i w_j COV(r_i, r_j), \quad (6)$$

ahol

- $\sigma^2(r_p)$: a portfólió megtérülésének szórásnégyzete;
- $\sigma^2(r_i)$: a portfólióba választott i -edik értékpapír hozamának szórásnégyzete;
- $COV(r_i, r_j)$ pedig az i -edik és j -edik értékpapír megtérülése közötti kovariancia.

A kovariancia határozza meg, hogy milyen szorosan mozognak együtt a részvények megtérülésének értékei. Ennek kimutatására szemléletes a két értékpapír hozama közötti korrelációs együttható:

$$\rho_{i,j} = \frac{COV(r_i, r_j)}{\sigma(r_i)\sigma(r_j)} \quad (7)$$

A portfólió egy kockázatos eszközzel való bővítése néha kockázatcsökkentő hatású lehet az egész portfóliót tekintve. A jól összeállított portfólió kockázata kisebb, mint az azt alkotó értékpapírok egyedi kockázatainak összege [1].

2.5 Összefüggés az egyes részvények és a piaci portfólió között

Az eddigiekben két tetszőleges értékpapírt viszonyítottam egymáshoz, illetve a befektető által választott portfólió értékelésével foglalkoztam. Ebben az alfejezetben bemutatok pár olyan statisztikát, amely képes leírni egy adott értékpapír (vagy portfólió) és a piaci portfólió közötti kapcsolatot. A piaci portfólió a gazdaságban található minden egyes kockázatos eszközt tartalmaz olyan arányban, ahogyan annak az eszköznek az értéke aránylik az összes többi eszköz értékéhez.

Egy értékpapír - vagy nem nagy súlyú portfóliórész - hozama (2), míg kockázata (6) egyenlőség szerint fejt ki hatását a piaci portfólióra. A kockázat esetében ez a hatás függ a piaci portfólió és az adott értékpapír közötti kovarianciától (korrelációs együtthatótól). Az elemzések során az értékpapír és a piaci portfólió hozama közötti összefüggést jellemezhetjük egy regressziós egyenessel (karakterisztikus egyenes), illetve annak meredekségével (β):

$$\beta = \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma^2(r_M)}, \quad (8)$$

ahol r_M a piaci portfólió hozama. Illetve (7)-t felhasználva:

$$\beta = \rho_{i,M} \frac{\sigma(r_i)}{\sigma(r_M)} \quad (9)$$

A (8) illetve (9) sorszámú egyenlőségekben szereplő β az az érték, amely egy adott értékpapír várható változásait méri a piac adott változása mellett [1]. Ezekből jól látszik, hogy az értékpapír kockázata egyrészt szórásának nagyságától, másrészt pedig a részvény és a piaci portfólió közötti korrelációs együtthatótól függ. Ez határozza meg, hogy ebből a szórásából mennyi nem eliminálódik a piaci portfólióban, illetve, hogy pozitív vagy negatív kapcsolatról van-e szó.

Egy értékpapír kockázata két részre bontható. Egy adott piacon belül a piaci kockázat az, ami ellen a befektető nem tehet semmit. Ez a kockázat nem diverzifikálható (szisztematikus).

Az egyedi kockázat az, ami ellen a befektető diverzifikálással védekezni tud. Ezt a típusú kockázatot tudja a számára kedvező szintre csökkenteni a portfóliója helyes összeállításával. Egy értékpapír esetében:

$$\sigma^2(r_p) = \beta_p^2 \sigma^2(r_M) + \sigma^2(\varepsilon_p)^*, \quad (10)$$

ahol

- $\beta_p^2 \sigma^2(r_M)$: a piaci kockázat mértéke
- $\sigma^2(\varepsilon)$: a diverzifikálással csökkenthető egyedi kockázat.

A piaci portfólió hatásaitól független rész ($\sigma^2(\varepsilon)$) zéró korrelációjú tagnak számít, hatása megszűnik a portfólióban [8].

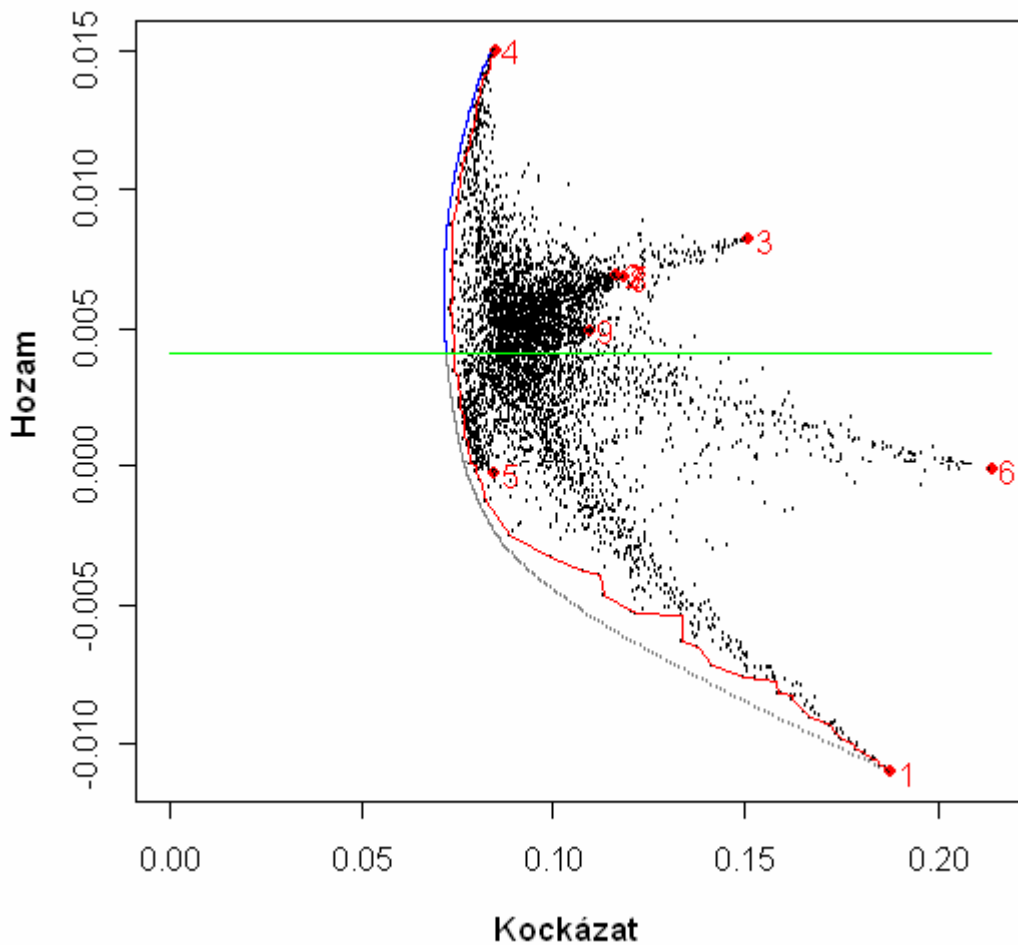
2.6 Portfólióválasztás a várható érték - varianca elv alapján

A Markowitz formula nem egyetlen optimális portfóliót határoz meg. A modell olyan portfólióhalmazt állít elő, melynek elemei a kockázat és hozam kapcsolata alapján hatékonynak minősülnek. Hatékonynak minősül minden portfólió, amely adott kockázati szint mellett a legmagasabb hozamot biztosítja, illetve adott hozamszint mellett a legalacsonyabb kockázattal jár [4]. A hatékony portfóliók alkotják az ábrán is látható portfólióhalmazt határoló görbét.

Az 1. ábrán látható egyenestől felfelé haladva a hatékony portfóliók görbéjén a várható hozam növelése csak a kockázat növelésével érhető el. Az egyenes és a hatékony portfóliók görbéjének metszéspontjában a globálisan minimális varianciájú portfólió található.

* A megállapítás éppúgy érvényes portfóliók, mint az egyedi értékpapírok esetében.

A Markowitz formula által meghatározott portfoliók



1. ábra

Amennyiben a befektetők kockázatkerülők, a hatékony határvonalról választják ki a számukra optimális portfóliót. A végső döntés azonban függ a saját kockázat-hozam preferenciájuktól is. A számozott pontok jelentik azokat a helyzeteket, amikor a befektető csak egy részvényt tart. A várható érték - variancia megközelítés talán legfontosabb aspektusa a várható érték - variancia szerinti hatékonyság, aminek értelmében a kockázatos eszközök kombinációjának halmaza két diszjunkt halmazra bontható. Az egyik a hatékony portfóliók halmaza a másik a nem hatékony portfólióké. A befektető a figyelmét így a hatékony részhalmazra fókuszálhatja [5].

A portfólióelemzés elméleti és gyakorlati munkái elsősorban a haszonmaximalizáláson alapultak. Ahol a befektető hasznfüggvényéről

feltételezték, hogy másodfokú polinomiális pozitív első és nem-pozitív második deriváltakkal, vagy az eloszlásfüggvényt feltételezték normálisnak. Ha ezen feltételek közül bármelyik érvényes, akkor bebizonyítható, hogy a kockázatos eszközök közötti várható érték és variancia alapján történő választás megegyezik a Neumann Morgenstern haszonmaximalizáló modellel. A döntéshozó gazdasági lehetőségei közül olyat választ, amely a legkedvezőbb jövőbeli kilátásokkal rendelkezik. A befektető a várható hasznossági teljesítményt próbálja meg maximalizálni, nem pedig az aktuálisan bekövetkezőt.

2.7 Az elmélet problémái

Néhány gondolat az eddig ismertett elmélet legfontosabb problémáiról. A hatékony portfóliók elméletének korlátai elsősorban a feltételezések gyakorlati megkérdőjelezhetőségében rejlenek. Az elmélet ugyanis racionálisan gondolkodó, haszonmaximalizáló befektetőket feltételez, akik számára a befektetés közben jelentkező költségek (tranzakciós költségek, adók) elhanyagolhatók.

Feltételezi továbbá, hogy a tőkepiacon található eszközök hozama normális eloszlást mutat, hogy a befektetések tetszőlegesen oszthatók és a hitelfelvétel és hitelnyújtás ugyanazon a kamatlábon, a kockázatmentes kamatlábon történik, és mennyiségileg nincs korlátozva. Empirikus kutatások bebizonyították, hogy a részvények árváltozásai nem teljesítik a normális eloszlásra tett feltételezéseket. Ezen kívül a gyakorlatban az értékpapírok megtérülése fokozott pozitív korrelációt mutat, mivel az egyes értékpapírok megtérülését ugyanazok a gazdasági és politikai tényezők befolyásolják. Sőt, azok a feltételezések, miszerint a hasznosságfüggvények kvadratikusak a hozamot tekintve megmutatják, hogy a kockázatkerülés mértéke fokozódik a hozam növekedésével, azaz előfordulnak olyan esetek, hogy a befektető a kisebb hozamot preferálja a nagyobb szemben.

A modellben azért bonyolult a befektetői választás, mert ahhoz, hogy egy befektetés releváns kockázatát meg tudjuk határozni, a portfólióban lévő összes többi befektetéssel való korrelációs kapcsolatot meg kell vizsgálni. A befektetők által tartott hatékony portfóliók szintén nem azonosak, így ez a kapcsolatrendszer még egyénenként is eltérő lesz.

3. A tőkepiaci árfolyamok modellje

Az eddigiekben szó volt a befektető, mint egyén, portfólió értékelési módszereiről. A dolgozat következő részében azt vizsgálom meg, hogy a piac hogyan árazza be a különböző termékeket.

Tegyük fel, hogy létezik egy kockázatmentes kötvény. Tegyük fel, hogy a lejárat ideje egybeesik a befektetési tervünk időhorizontjával, amikor is megkapjuk az utána járó kifizetést, ami állami garanciával bír. Továbbá tegyük fel, hogy a befektető tetszőleges mennyiségben adhat el és vehet ilyen kötvényt mindenféle kötöttség nélkül (azaz engedélyezett a fedezetlen eladás is).

A befektetők számára elérhető portfóliókat jellemezze azok várható értéke és varianciája úgy, mint a korábban ismertetett esetekben.

Az összes befektető ugyanazon portfóliókba fektethet be, így döntéseiket ugyanazon legkisebb szórású halmaz alapján fogják meghozni.

3.1 A tőkepiaci egyenes

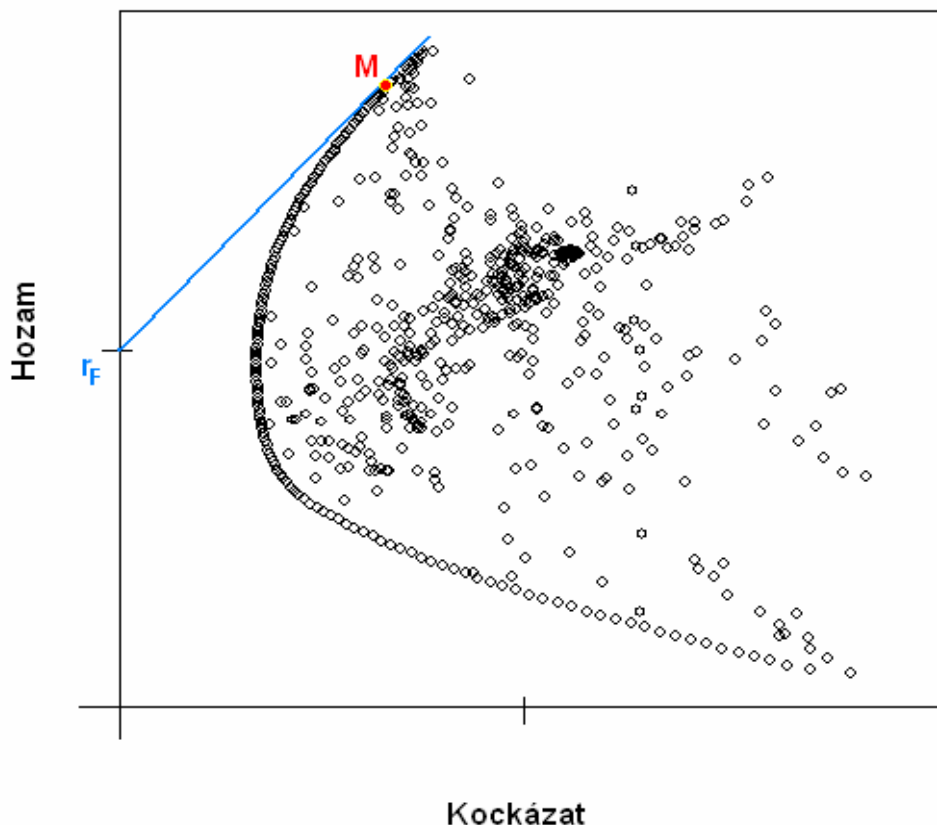
Amennyiben nem létezik a kockázatmentes befektetési lehetőség, az egyes befektetők a hatékony portfólió halmaz különböző pontjain alakítanak ki pozíciókat attól függően, milyen hasznosságfüggvénnyel rendelkeznek (várható érték - variancia modell).

Amennyiben létezik ilyen kockázatmentes kötvény (melynek hozama r_F), akkor minden piaci szereplő számára racionális döntés, ha ugyanazt a kockázatos befektetésekből álló portfóliót tartja, mégpedig azt, ami a hatékony halmazban van és az egységnyi szórásra eső várható értéke a legnagyobb mértékben haladja meg a kockázatmentes megtakarítási formáét.

Ha azonban mindenki ugyanolyan szerkezetű kockázatos portfóliót tart, akkor ennek szerkezete szükségszerűen megegyezik az egész tőkepiacot jellemző piaci portfólióéval. Ha ugyanis az egyes befektetők kockázatos portfóliója azonos szerkezetű, akkor az összességüknek is ugyanilyen szerkezetű a portfóliója. Viszont a befektetők összességének portfólióját ismerjük. Nevezzük ezt a portfóliót piaci portfóliónak (M). Így viszont ismerjük az egyenként tartott kockázatos portfóliók összetételét is, ez szintén M lesz [8].

Ezek után a befektetők számára a hatékony befektetéseket egy egyenes ábrázolja – függetlenül attól, hogy milyen a kockázati preferenciájuk – mely az M és az r_f pontokon halad át.

A tőkepiaci egyenes



2. ábra

Az M és r_F között vesznek fel pozíciót azok a befektetők, akik pénzük egy részét az M portfólióban, a többit pedig a kockázatmentes kötvényben tartják, azaz kötvényeket vásárolnak. Az egyenes M pont utáni részén azok a befektetők vesznek fel pozíciókat, akik eladják a biztonságos kötvényeket (short selling), hogy tovább fektethessenek be az M portfólióba. Egyensúlyi helyzetben pontosan annyi kötvényvásárló lesz, mint amennyi kötvény-eladó, így ennek megfelelően az M pont mindkét oldalán egyenlő mennyiségben oszlanak el a befektetők.

Ezt az M és r_F pontokat tartalmazó egyenest hívjuk tőkepiaci egyenesnek (**Capital Market Line**). Minden befektető – akár hitelez, vagy hitelt vesz fel – portfóliója ezen az egyenesen helyezkedik el, és ezek helyétől függetlenül minden befektető ugyanabba az M kockázatos portfólióba fektet.

3.2 Egy egyedi eszköz kockázatának mérése

Egy értékpapír kockázatát a piaci portfólió kockázatához való hozzájárulás alapján is mérhetjük, amit érdemes megtennünk mivel minden befektető a piaci portfóliót vásárolja. Ha a piaci portfóliót m darab értékpapír alkotja, akkor a piaci portfólió kockázata a következő módon is meghatározható:

$$COV(r_M, r_M) = \sigma^2(r_M) = \sum_{j=1}^m w_j COV(r_j, r_M) \quad (11)$$

Ez alapján láthatjuk, hogy egy értékpapír hozzájárulását a piaci portfólió kockázatához az értékpapír és a piaci portfólió kovarianciája illetve a portfólióban való részaránya határozza meg.

Mivel egy részvény béta faktora egyenlő a kovarianciájának és a piaci szórásnégyzetnek a hányadosával, és ez a szórásnégyzet minden részvényre azonos, így egy értékpapír kockázatát a kovarianciáján kívül a bétájával is mérhetjük.

A tőkepiaci árfolyamok modelljében így egy befektető portfóliójának a kockázata annak varianciájával, míg egy egyedi eszköz kockázata annak bétájával kerül mérésre.

Mint ahogy korábban már említettem, egy eszköz kockázata két részre bontható: szisztematikus és reziduális kockázatra. A modell szerint befektetőket a szisztematikus kockázat érdekli, ugyanis ez áll közvetlenül kapcsolatban az általuk tartott portfólióval, és a reziduális kockázat eltűnik a diverzifikálás során. Így a tőkepiaci árfolyamok modelljében nincs hatása a részvények áraira, illetve azok várható hozamára.

3.3 Egy eszköz kockázata és várható hozama közötti kapcsolat

3.3.1 Az értékpapír piaci egyenes

Egy adott értékpapír és annak kockázata közötti kapcsolat szemléltetésére fogjuk használni az értékpapír piaci egyenest (**Security Market Line**). Ezt az egyenest az értékpapírok várható hozama, és a bétájuk által meghatározott térben lehet ábrázolni. A tőkepiaci egyenessel ellentétben, amin csak azok a portfóliók jelennek meg, amiket az egyes befektetők tartani szeretnének, az értékpapír-piaci egyenesen minden portfólió és egyedi értékpapír megtalálható.

$$E(r_j) = r_F + [E(r_M) - r_F] \beta_j \quad (12)$$

Ez az egyenlőség megmutatja, hogy egy részvény várható hozama nem más, mint a kockázatmentes befektetési lehetőség hozama és egy kockázati prémium. A kockázati prémium további két részre bontható. A $E(r_M) - r_F$ a piacra vonatkozó kockázati prémium. Ahhoz, hogy egy választott részvény kockázati prémiumát megkapjuk, ezt a piaci kockázati prémiumot kell megszoroznunk a részvény bétájával.

3.3.2 A tőkepiaci árfolyamok modellje, amikor a befektetők rendelkezésére áll a kockázatmentes eszköz, de csak vásárolhatnak belőle, el nem adhatják

A modellnek ebben a formájában feltételezzük, hogy a befektetők eladhatnak rövidre bármilyen kockázatos eszközt, de nem adhatják el a kockázatmentes kötvényeket. Ennek oka lehet például, hogy a kötvényt az állam bocsátja ki, és korlátozza a befektetők államkötvény eladási jogait.

Tekintsük a kockázatos értékpapírok portfólióinak legkisebb szórású halmazát. Egyes befektetők képesek lesznek létrehozni a portfóliójukat a kockázatmentes eszköz és kockázatos értékpapírok segítségével úgy, hogy az

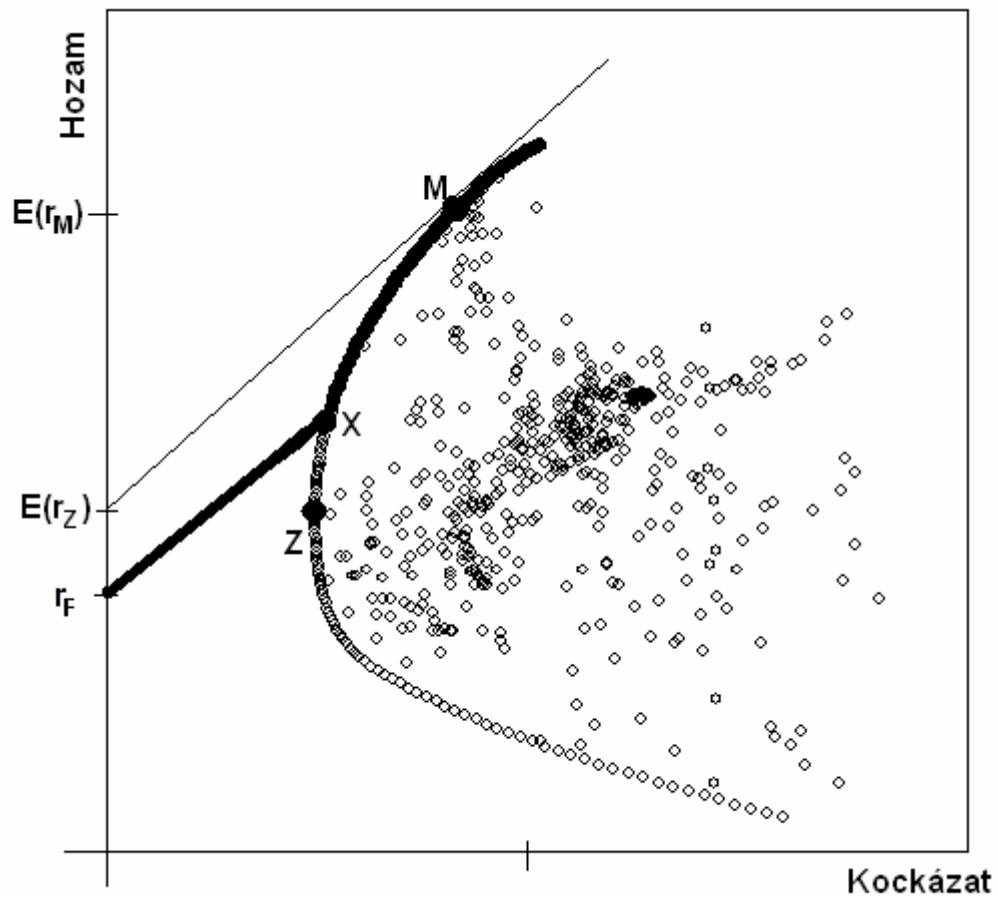
$$\frac{E(r_p) - r_F}{\sigma(r_p)} \quad (13)$$

arány maximális legyen. Nevezzük ezt a portfóliót X-nek. A konzervatív befektető pénzének egy részét ebbe az X portfólióba, a maradékot pedig a kockázatmentes kötvénybe fogja fektetni.

Ebben az esetben a hatékony halmaz vagy a tőkepiaci egyenes r_F -ben kezdődik, és egészen X-ig fut, ahol megtörik és ráhajlik a Markowitz formula által meghatározott hatékony görbére egészen az M pontig (3. ábra).

Tekintsük a kockázatos eszközökből álló portfóliókat, amiket a befektetők tartanak. Rengeteg konzervatív befektető fog az X portfólióból vásárolni. Ezeken kívül sok olyan lesz, aki olyan portfóliót fog tartani, ami az X fölött helyezkedik el a görbén. Az itt található portfóliók kizárólag kockázatos értékpapírokat tartalmaznak [8].

A tőkepiaci egyenes, amikor a kockázatmentes kötvény csak vásárolható

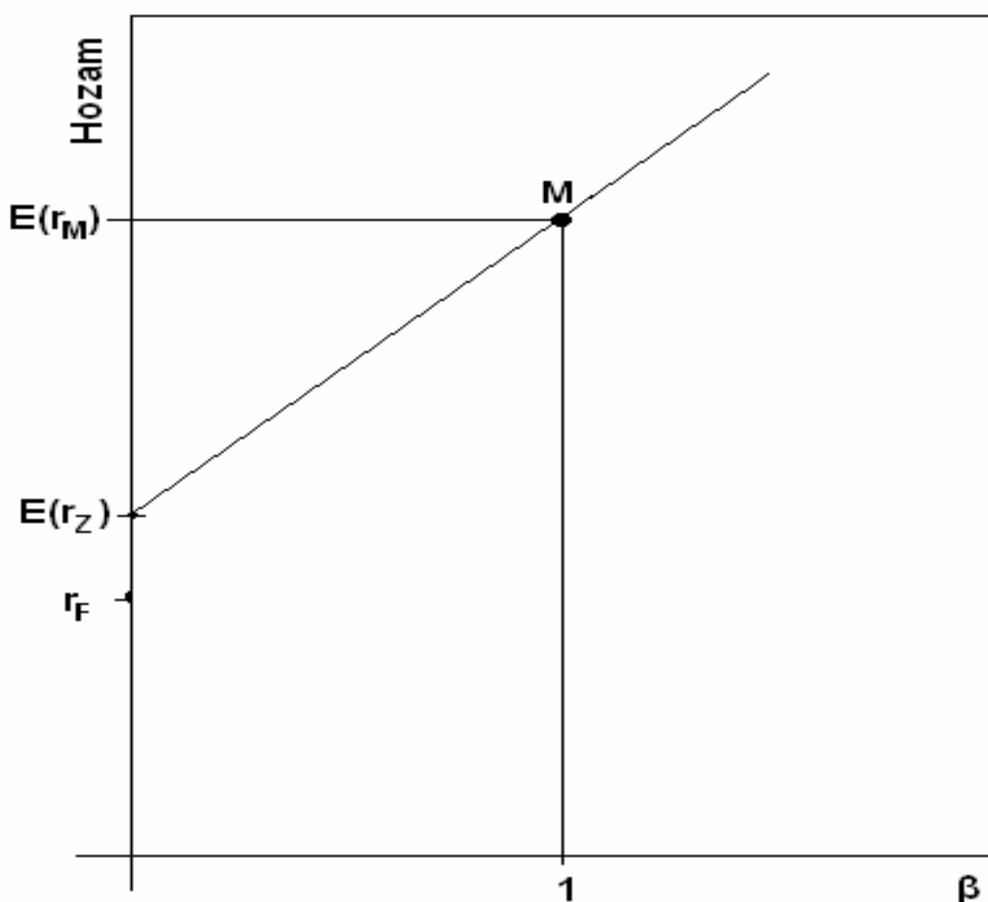


3. ábra

Mivel a befektetők X és az e felett található portfóliókat tartják, így a piaci portfólió is az X felett fog elhelyezkedni. Mivel a piaci portfólió hatékony, lineáris lesz a kapcsolat a béta és a várható megtérülés között. Ennek a meredeksége pozitív lesz és $E(r_Z)$ -ben fogja metszeni a várható hozam tengelyt, ami a legkisebb szórású, nulla bétájú portfólió várható hozamát jelenti. $E(r_Z)$ az r_F felett helyezkedik el, mivel a piaci portfólió is magasabb hozamot ígér, mint X.

A 4. ábrán értékpapír-piaci egyenes alapján láthatjuk, hogy a nulla bétájú portfólió $E(r_Z)$ -ben dominálja r_F -et, ugyanis mindkettőnek nulla a bétája, de e mellett $E(r_Z)$ magasabb hozamot ígér, mint r_F . Nem szabad elfelejteni, hogy bár a nulla bétájú portfóliónak ugyan nincs szisztematikus kockázata, továbbra is rendelkezik reziduális varianciával és pozitív szórással. A minimális szórású halmaz elemei között található meg (a 3. ábrán Z-vel jelölve), és ha így vizsgáljuk, akkor nem dominálja a kockázatmentes kötvényt.

Az értékpapír-piaci egyenes



4. ábra

A bemutatott portfólió-képzési modellek segítségével megtalálhatjuk a hatékony portfólió halmazt a várható érték - variancia térben. A tőkepiaci árfolyamok modellje olyan elméletnek tekinthető, amely egy meghatározott módon értékeli az

értékpapírokat, ha a piacon mindenki ezeket az eszközöket használná, és a hatékony halmaz portfóliói közül választaná ki a befektetését.

Amennyiben a fedezetlen eladás is engedélyezett a piacon, és összevonnánk a befektetők portfólióit, keresve a piaci portfóliót, azt kapnánk, hogy az így kapott piaci portfólió szintén a hatékony halmaz elemei közül kerül ki. Ezek után ez automatikusan magába foglal egy lineáris, pozitív meredekségű összefüggést a részvények várható hozama és bétájuk között.

A következő két feltételből bármelyik elegendő, hogy meggyőződjünk arról, hogy a racionális befektetők a várható érték - variancia alapján hatékony halmazból választják ki a portfóliójukat.

Az első, miszerint a portfóliók hozamainak eloszlásai normális eloszlást követnek. Ebben az esetben egy portfólió eloszlását egyértelműen meghatározza annak várható értéke és a szórása.

A másik feltétel szerint a befektető hasznosságfüggvénye kvadratikus. Ilyenkor a befektető a portfóliók eloszlásával kapcsolatban csak azok várható értékével és varianciájukkal foglalkozik.

A tőkepiaci árfolyamok modelljében egy befektető által tartott portfólió kockázatát annak szórásával mérjük, míg egy egyedi értékpapír kockázatát a befektetők által tartott portfóliók varianciájához való hozzájárulás mértékeként vesszük számításba. Ez a hozzájárulás a részvény bétája [8].

4. Az elemzés során felhasznált eszközök és adatok

4.1 Az R

Az R egy statisztikai számításokhoz és grafikához kifejlesztett rendszer. Tartalmazza a nyelvet, a grafikus futtató rendszert, egy nyomkövető programot, hozzáférést bizonyos rendszerfunkciókhoz, és azt a lehetőséget, hogy a programokat tárolt „script” fájlokból futtassuk.

Az R magja egy interpreteres nyelv, ami lehetővé teszi elágazások és ciklusok használatát éppúgy, mint a moduláris programozást függvények segítségével. Az R-ben található, felhasználók által elérhető függvények legnagyobb hányada R-ben íródott, de a nagyobb hatékonyság elérése érdekében lehetőség van más nyelveken megírt eljárások használatára is (például: C, C++, FORTRAN)

Az R lehetőséget nyújt statisztikai számítások (lineáris és nem-lineáris modellezés, klasszikus statisztikai próbák, idősor-elemzés, klaszterezés...) és grafikai technikák széles körének alkalmazásához, és nagyon egyszerűen bővíthető a „CRAN” (Comprehensive R Archive Network) oldalairól.

Az R egy GNU projekt. Az S nyelvi környezetéhez hasonlít, amit a Bell Laboratories (korábban AT&T, most Lucent Technologies) munkatársai fejlesztettek ki John Chambers vezetésével. Úgy is felfogható, hogy az R az S-nek egy más implementációja. Bár van néhány lényeges eltérés köztük, az S-ben megírt kód változatlan formában lefut az R programban is.

Az R különböző csomagok telepítésével bővíthető. Dolgozatomban felhasznált legfontosabb ilyen csomag a stats csomag volt. A csomagban található a t.test függvény, amivel a kiszámított adatok várható értékét tudtam megvizsgálni. Az lm függvényt használtam az elemzés során felállított egyenlőségek együtthatóinak

vizsgálatához. Az lm tetszőleges lineáris modell illesztését hajtja végre. Esetemben lineáris regressziós elemzés elvégzése volt a fő cél.

Ezen felül a modellek vizsgálatához használtam az fBasics és fPortfolio csomagokat. Az elsőben található függvények által tudtam ellenőrizni, hogy az adatok a vizsgált időintervallumában normális eloszlást követnek-e.

Az fPortfolio egy olyan környezet, amit pénzügyi kutatásokra és számítógépes pénzügyi elemzésre fejlesztettek ki. A csomagból a portfolioMarkowitz, frontierMarkowitz és montecarloMarkowitz függvények nyújtottak nagy segítséget az elemzésben.

A frontierMarkowitz függvény segítségével kiszámítható (és ábrázolható) a hatékony portfóliók görbéje. A montecarloMarkowitz véletlenszerűen állít elő portfóliókat a megadott befektetési lehetőségekből. A portfolioMarkowitz pedig adott elvart hozamszint mellett számolja ki a várható érték – variancia elv szerint optimális portfóliót. Ezek segítségével határoztam meg a számításokhoz és az ábrák megrajzolásához szükséges hatékony portfóliók görbéjét.

4.2 A felhasznált adatok

A dolgozatban felhasznált adatok mindenki számára elérhetőek a www.bet.hu weboldalon. Ez a hivatkozás a Budapesti Értéktőzsde honlapjára mutat.

A weboldalról olyan részvények adatait töltöttem le, amelyek döntően befolyásolták a Budapesti Értéktőzsde hivatalos indexének alakulását, így jól jellemezhető velük a magyar értékpapírpiac. A felhasznált részvények a következők:

- | | |
|---------------|-------------------|
| 1. BorsodChem | 6. Magyar Telekom |
| 2. DÉMÁSZ | 7. OTP |
| 3. Egis | 8. Richter |
| 4. Fotex | 9. Synergon |
| 5. MOL | 10. TVK |

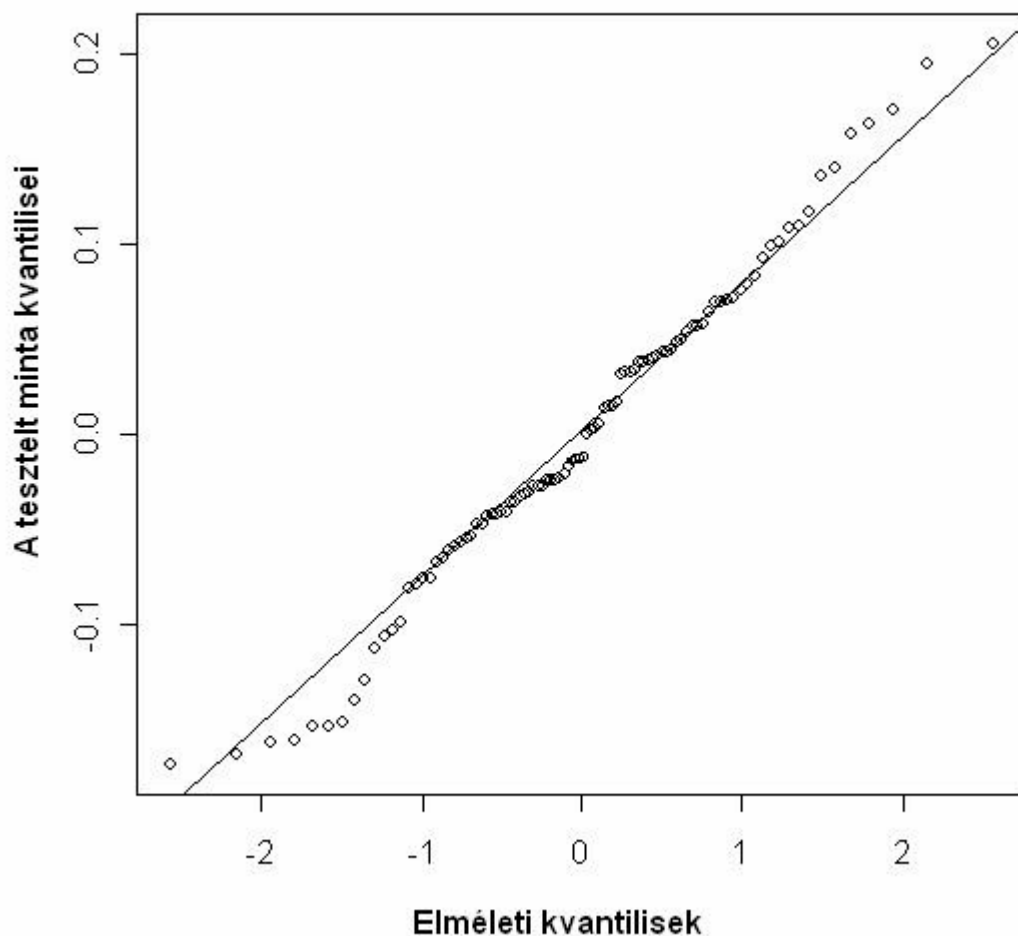
Az 1998. január 1. és 2006. január 1. közötti havi átlagárakkal dolgoztam. Ezekből az adatokból származik az a részvényenként 96 elemű minta, ami a részvények havi hozamait tartalmazza.

Ezen felül a Magyar Nemzeti Bank honlapjáról (www.mnb.hu) letöltött információkat használtam fel a kockázatmentes befektetési forma hozamának meghatározásához.

Az R használatával elvégzem azokat a szükséges próbákat, amikkel megállapítható, hogy a vizsgált időintervallumban a magyar értékpapírpiacra alkalmazhatók-e a dolgozatom elején ismertetett modellek az optimális befektetés meghatározására.

A normalitás ellenőrzéséhez a „qqnorm” illetve „qqline” függvényeket használtam. A qqnorm függvény normális kvantilis-kvantilis diagramot (Q-Q Plot) hozott létre a paraméterként kapott vektor alapján:

Q-Q Plot – Normális eloszlás



5. ábra

A qqline függvény az előzőekben elkészült ábrát egészítette ki azzal az egyenessel, amely az első és harmadik kvartilisen halad keresztül. Az 5. ábra alapján elmondható, hogy a tesztelt minta eloszlása meglehetősen jól közelíti az elméleti eloszlást, bár a farkaknál elég nagy eltérés figyelhető meg. Ezen az ábrán fel lett tüntetve az adott részvény nyolc évet átölelő adatsora. A későbbiek folyamán már elegendő volt egy-egy részvénynek csak a vizsgálat alatt álló egy évére elvégezni a tesztet. A Függelék 8.4 pontjában egy nem normális eloszlást követő értékpapír Q-Q diagramját is bemutatom.

A grafikus normalitásvizsgálat eredményét Kolmogorov-Smirnov teszt segítségével ellenőriztem le. Ehhez az „fBasic„ csomagba tartozó függvényt használtam. A függvény („ksnormTest”) segítségével végeztem el a Kolmogorov-Smirnov próbát az adatokon. A próbák egyik eredmény outputját a Függelék 8.5 részében mutatom be.

5. Az empirikus teszt

A továbbiakban az ismertetett CAPM modell empirikus tesztelésével foglalkozom.

A tőkepiaci árfolyamok modellje kimondja, hogy a befektetők a várható megtérülés - variancia szempontjából hatékony portfóliót tartanak. Ennek következményeként a piaci portfóliót is hatékonnak tekintjük. Ahhoz, hogy a modellt le tudjuk tesztelni, azt kell megvizsgálnunk, hogy a feltételezés, miszerint a piaci portfólió a hatékony halmazban található, helyes-e.

A tőkepiaci árfolyamok modellje a befektetők várakozásaira épít. A piaci portfólióról feltehetjük, hogy hatékony lesz egy bizonyos periódus alatt a jövőben. Feltesszük, hogy az értékpapírok hozamainak valószínűségi eloszlása nem változik meg az idő folytán. Ha ez a feltételezés teljesül, az azt jelenti, hogy a részvények (illetve portfóliók) várható megtérülése, varianciája és kovarianciái becsülhetővé válnak a múltbeli adatokból képzett minták alapján. Ezek után elkészíthetjük a hatékony portfólióhalmaz becslését, valamint megbecsülhetjük a piaci portfólió elhelyezkedését.

Nem szabad elfelejteni, hogy az így kapott becslések természetesen ki vannak téve a mintavételi hibáknak. A jövőre vonatkozó várakozások bizonytalanok. Ebből az következik, hogy a piaci portfólió lehet ugyan hatékony egy befektetési időszak elején, de semmi nem garantálja, hogy hatékony is marad a teljes időszakban. Ha a mintavételezési időszakban egyes részvénynek szélsőségesen mozog az árfolyama, akkor a hatékony halmaz becslésekor bizonyos részvények felhalmozása, míg mások fedezetlen eladása lesz az optimális megoldás. A piaci portfóliót a historikus adatokból készült becslés miatt ilyen szélsőséges felépítésű portfóliók dominálhatják, amik a befektetési időszak elején a várható jövőbeli hozamok alapján természetesen hatékonnak bizonyultak.

A tesztelés során azt kell meghatároznunk, hogy a piaci portfólió nem-illeszkedése a hatékony halmazra lehet-e véletlen események következménye. Ha az eltérés

magas fokú, akkor nem valószínű, hogy váratlan események okozták, így mondhatjuk, hogy a piaci portfóliót nem-hatékonyak várták el az időszak elején. A tőkepiaci árfolyamok modelljét ennek alapján utasíthatnánk el.

A becslés elvégzéséhez meg kell határozni egy időintervallumot, amiben mérjük a megtérüléseket. Az intervallum hosszának meg kell egyeznie a befektetők időhorizontjával. Erre azért van szükség, mert az egyik időszakban hatékonyak tekintett piaci portfólió nem biztos, hogy hatékonyak tekinthető egy eltérő hosszúságú befektetési időszakot vizsgálva.

Az elmélet tesztelése során kétváltozós regressziós technikát alkalmazunk. Első lépésben a portfóliók illetve értékpapírok bétáit határoztam meg. Ez egy idősoros alapuló regresszió, ahol a részvények és portfóliók hozamát a piaci portfólió hozamával vettem össze. A megfigyelésekre legjobban illeszkedő egyenes egy becslést adott az értékpapír karakterisztikus egyenesére. Az egyenes meredekségének a meghatározásával becsültem meg az értékpapír bétáját.

A második lépésben keresztmetszeti regresszió analízist végeztem. Az értékpapírok bétáját a várható hozamokkal vettem össze. Az ezekre a megfigyelésekre legjobban illeszkedő egyenes adta az értékpapír-piaci egyenes becslését.

5.1 A tesztelés módszertana

A modell tesztelését a Fama és MacBeth által 1974-ben készített tanulmány [6] alapján végeztem el a magyar piac adatain.

A rendelkezésemre álló idősorokat egy éves intervallumokban vizsgáltam. Az első év adatai alapján próbáltam meg következtetéseket tenni az elkövetkező egy évre, mint befektetési periódusra. Az egy éves adatokból kiszámoltam a részvények várható értékét és kockázatát. Használtam egy egyenlően súlyozott portfóliót, mint piaci portfóliót a részvények bétájának meghatározása közben.

Első lépésben kiszámoltam a részvények béta faktorát az 1998-as évre. A részvényeket öt portfólióba rendeztem a kapott béták alapján. A két legnagyobb bétával rendelkező részvény került egy portfólióba, majd a következő kettő és így tovább, ahogyan az 1. táblázatban látható.

Részvények és béta faktoruk				
1. portfólió	Richter	1,6506923	Synergon	1,6286732
2. portfólió	TVK	1,3293929	OTP	1,2037948
3. portfólió	Egis	1,1173903	MOL	0,9225852
4. portfólió	BorsodChem	0,9009139	FOTEX	0,7974453
5. portfólió	M. Telekom	0,6608690	DEMASZ	-0,2117569

1. táblázat

Ezek után a következő év adatainak figyelembe vételével ismét kiszámoltam a bétákat, de már az öt képzett portfólióra. Így 1999 végére rendelkezésre álltak a portfóliók bétái, amiket arra használtam fel, hogy előre jelezzem a portfóliók megtérülését a következő egy évre.

Minden hónapban összekapcsoltam a megtérüléseket a bétákkal, hogy megkapjam az értékpapír-piaci egyenes havi becsléseit. Így például 2000. januárjában egy ilyen kapcsolat látható. Az ábrán látható pontok a képzett portfóliók. Az ezeken a megfigyeléseken áthaladó egyenes képlete a következő:

$$r_{p,Jan00} = a_0 + a_1 \hat{\beta}_p + \varepsilon_{p,Jan00} \quad (14)$$

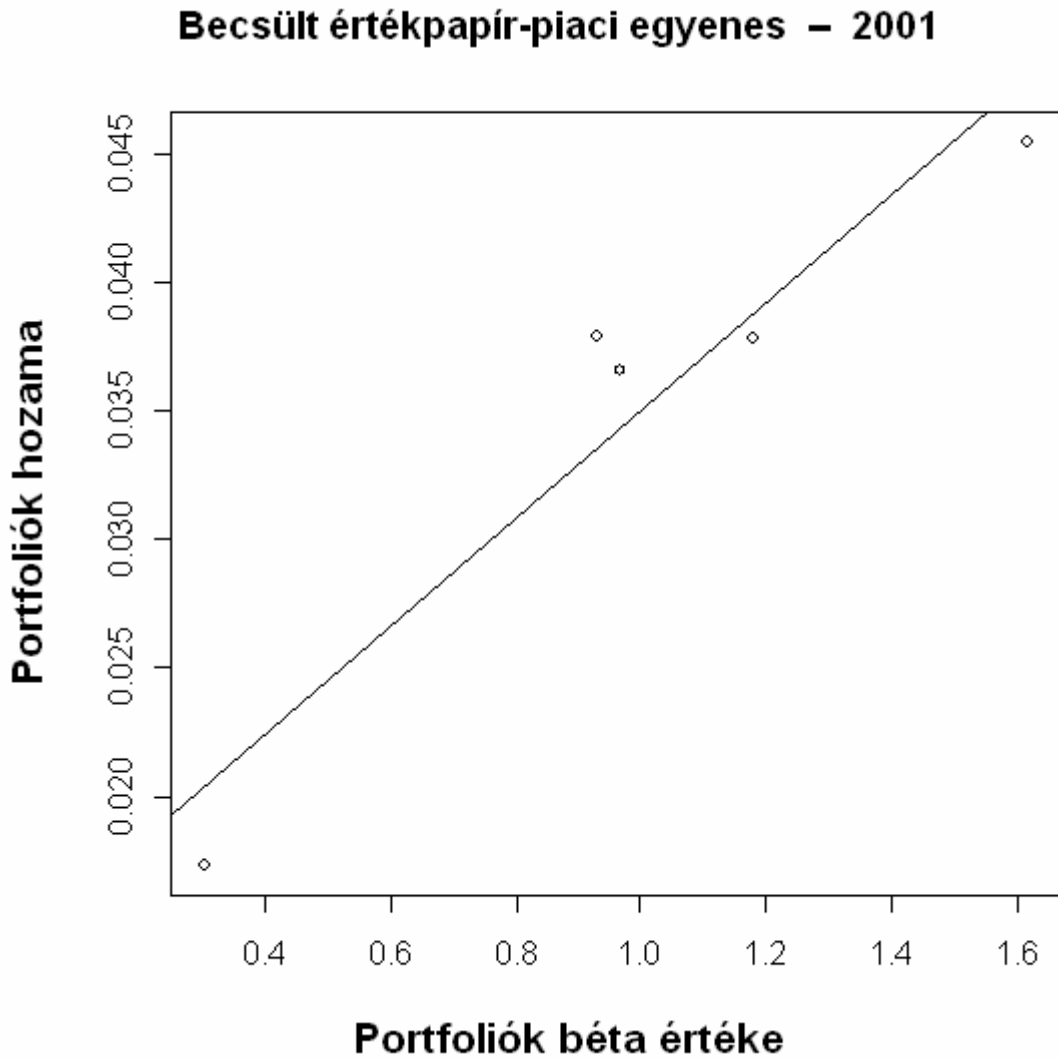
Az egyenlőség bal oldalán a **p** portfólió 2000. januárjára számított hozama található. A $\hat{\beta}_p$ a portfólió bétájának becslését jelöli, amit az 1999-es év adataiból számoltam ki, az $\varepsilon_{p,Jan00}$ egy minden portfólióhoz hozzárendelt hibát jelent.

A lineáris modell illesztéséhez az R-ben az „lm” függvényt használtam. Az $lm(y \sim x)$ utasítás az $y = \beta_0 + \beta_1 x + \text{hiba}$ lineáris modellt határozza meg, ahol a *hiba* változó a klasszikus regressziós feltételeket teljesíti [9], azaz normális eloszlású, egymástól független változókat jelent, melyek

- várható értéke: $E(\text{hiba}) = 0$,

- varianciája pedig: $VAR(hiba) = \sigma^2$.

A 6. ábrán az öt portfólió alapján becsült értékpapír-piaci egyenes látható.



6. ábra

Ahhoz, hogy meghatározható legyen, hogy az értékpapír-piaci egyenes mutat-e bármilyen nem-lineáris tulajdonságot, a (14) egyenlőséget kiegészítettem egy négyzetes taggal.

$$r_{p,Jan00} = a_0 + a_1 \hat{\beta}_p + a_2 \hat{\beta}_p^2 + \varepsilon_{p,Jan00} \quad (15)$$

A tőkepiaci árfolyamok modelljéből az következik, hogy az a_2 értéke nem térhet el jelentősen nullától, illetve hogy a négyzetes tag hozzáadása az egyenlőséghez nem javítja jelentősen a felírt egyenlőséget.

A (15) illesztéséhez az R-ben továbbra is alkalmazható marad az „lm” függvény. Amennyiben $lm(y \sim x + I(x^2))$ alakban használjuk, az $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \text{hiba}$ alakú modellt tudjuk vele meghatározni.

A modellből továbbá az is levezethető, hogy a béta vagy szisztematikus kockázat az egyetlen tényező, ami meghatározza a várható részvényhozamokat. A reziduális kockázat nem játszik fontos szerepet az árak és a várható részvényhozamok alakulásában, ugyanis a diverzifikáció folyamán a reziduális kockázat megszűnik. Ezt az állítást ellenőrzendő egy reziduális variancia elem is beépítésre került az egyenlőségbe.

Ahhoz, hogy meghatározható legyen, hogy az egyes részvények reziduális varianciája hogyan befolyásolja az adott részvény árát és ezen keresztül természetesen a részvényt tartalmazó portfólió várható megtérülését is, az egyenlőséget további taggal, a portfólióba választott részvények átlagos reziduális varianciájával kell bővíteni. Ezek után a (15) egyenlőség a következőképpen alakul át:

$$r_{p,Jan00} = a_0 + a_1 \hat{\beta}_p + a_2 \hat{\beta}_p^2 + a_3 RV_p + \varepsilon_{p,Jan00} \quad (16)$$

Amelyben a beépített reziduális variancia a következő módon kerül kiszámításra:

$$RV_p = \frac{\sum_{j=1}^M \sigma^2(\varepsilon_j)}{M}, \quad (17)$$

ahol

- M a p portfólióba választott részvények száma (jelen esetben 2)
- $\sigma^2(\varepsilon_j)$ a j -dik részvény reziduális varianciája.

5.2 A vizsgálatok eredményei

Ezek után a három (14) – (16) egyenlőség alapján meghatároztam a várható hozamot minden hónapban.

A befektetési időszak végén újrakalkuláltam a bétákat, ugyanúgy, ahogy az első befektetéshez tettem. Az új értékpapír béták alapján újból összeállítottam a portfóliókat a következő időszaki befektetés alapjaként, és ismét meghatároztam a (14) – (16) értékeket.

	a_0	a_1	a_2	a_3
(14)	0,00962	-0,00607	-	-
(15)	0,00331	0,01189	-0,00935	-
(16)	0,01012	0,02316	-0,00944	-7,40298

2. táblázat

Ezek után minden hónapra kiszámoltam az egyenlőségek alapján az $a_0 - a_3$ együtthatókat. Ahhoz, hogy meg tudjam határozni, hogy az így kapott értékek eltérnek-e nullától, egymintás t-próbát végeztem az R segítségével. Ehhez a „stats” csomag *t.test* függvényét használtam.

A (14) szerinti egyenes meredekségére kapott átlagos érték negatív lett. A t-próba értelmében a nullhipotézis ($a_1=0$) elvethető. Ez azt jelenti, hogy az első esetben a becsült értékpapír-piaci egyenes negatív meredekségű. A t-próba futási eredménye a Függelék 8.2 pontjában látható. A (15) és (16) szerinti a_1 együtthatók értéke is eltér

nullától. Ezen felül a két egyenlőségben vizsgált a_2 együttható jelentősen nem tér el nullától. Ez azt jelenti, hogy az összefüggés a részvények hozama és bétája között lineáris. A linearitás és a_1 pozitívága mindkét esetben pozitív meredekségű egyenest jelent. A kiszámított eredményeket öt tizedes pontossággal a 2. táblázatban mutatom be.

A tőkepiaci árfolyamok modelljének alkalmazhatósága esetén a kiszámított átlagokra következő megállapításoknak kellene teljesülnie:

1. a modellben az a_0 együttható (az értékpapír-piaci egyenes hozam tengellyel való metszéspontja) értéke nagyobb, vagy egyenlő, mint a kötvénypiacon található kockázatmentes befektetés hozama
2. a_1 (az értékpapír-piaci egyenes átlagos meredeksége) pozitív értékű
3. az értékpapír-piaci egyenes lineáris, azaz a_2 átlagos értéke nem térhet el jelentősen nullától
4. a reziduális variancia nem befolyásolhatja az egyensúlyi értéket, illetve egy részvény várható megtérülését, így az a_3 átlagos értéke szintén nem térhet el nagy mértékben nullától.

A fenti megállapításokból az 1. nem teljesült. A Magyar Nemzeti Bank adataiból számított kockázatmentes hozamráta a vizsgált időszakban 1%-nál magasabb volt. A 2. feltétel a három vizsgált egyenlőségből kettő esetén teljesült. Ez alapján meghatározható volt az értékpapír-piaci egyenes a vizsgált idő intervallumon. A kapcsolat linearitására utaló 3. feltétel minden esetben teljesült. A (16) egyenlőség a_3 együtthatója a tesztek során nullától jelentősen eltérőnek bizonyult, meglehetősen magas standard hibával. Ezt az okozta, hogy a vizsgált időszakban bizonyos részvénynek árfolyama meglehetősen szélsőségesen mozgott. A portfóliók meghatározásakor ezek a szélsőséges eredmények játszottak szerepet, amik a befektetési időszak elején a várható jövőbeli hozamok alapján természetesen még hatékonyak bizonyultak.

6. Összefoglalás

A dolgozat elején ismertetett elméletek gyakorlati tesztelését végeztem el 1998-2006 közötti magyarországi adatokkal. Ehhez az R nevű – matematikai, statisztikai számítások elvégzésére kifejlesztett – programnyelvet illetve környezetet használtam segítségül. A programban megtalálható beépített – illetve az utólag hozzáfűzhető – függvények nagy segítséget jelentettek az elemzések folyamán. Bizonyos funkciók így sem álltak rendelkezésemre. Ilyenek voltak a fedezetlen eladás megengedése mellett végzet várható érték - variancia tesztek. Ezeket saját „script”-ekkel pótoltam. A saját függvények létrehozásának másik célja a további, speciális elemzésekre való felkészülés volt.

Vizsgálataim során kiderült, hogy a magyar értékpapírpiacon az adott időszakban olyan jelentős volt bizonyos részvények volatilitása, hogy hiába sikerült meghatározni a részvények kockázata (jelen esetben bétája) és hozamuk közötti enyhe, de pozitív kapcsolatot, a reziduális variancia jelentősen befolyásolta az egyes részvények várható hozamát.

Richard Roll 1976-ban egy publikációjában kritizálta a tőkepiaci árfolyamok modelljének empirikus tesztelési módszereit. Állítása szerint Fama és MacBeth, illetve mások által elvégzett tesztek eredménye tautológiai. Szerinte a CAPM modell valódi jóslata az, hogy a piaci portfólió hatékony, és ez az egyetlen előrejelzés, amit tesztelni kell. Mivel a piaci portfólió a nemzetközi gazdasági rendszerben megtalálható minden eszközt magába foglal, egyszerűen nem lehet megmondani, hogy egy ilyen portfólió hatékony-e a várható megtérülés szempontjából. Amennyiben ez lehetetlen, a tőkepiaci árfolyamok modellje soha nem tesztelhető [8].

7. Irodalomjegyzék

- [1] Bélyácz Iván: Befektetés-elmélet. Pécsi Tudományegyetem Kiadó, 2001
- [2] Közép-Európai Brókerképző Alapítvány (1998): Tőzsdei szakvizsga felkészítő
- [3] Brealey - Myers: Modern vállalati pénzügyek. Budapest. Panem-McGraw-Hill, 1998
- [4] Nemzetközi Bankárképző Központ: Vagyon-, alap- és portfóliókezelés. Budapest. Aula, 2003
- [5] Porter, R. Burr and Gaumnitz, Jack E.: Stochastic Dominance vs. Mean-Variance Portfolio Analysis: An Empirical Evaluation. The American Economic Review, Vol 62. No. 3. (Jun.,1972), 438-446
- [6] Fama, E. F., and MacBeth, J., Tests of Multiperiod Two Parameter Model. Journal of Political Economy (May 1974)
- [7] Quirk, J. P. and Saposnik, R.: Admissibility and Measurable Utility Function. Review of Economic Studies (February 1962)
- [8] Haugen, Robert A.: Modern Investment Theory. Prentice-Hall International, Inc., 1993
- [9] Hunyadi László, Mundruczó György, Vita László: Statisztika. Aula Kiadó, 2001
- [10] <http://psycho.unideb.hu/statisztika/pages/toc.html>

8. Függelék

8.1 R scriptek forráskódja

Az elemzések során felhasznált fontosabb R kódrészletek:

```
#----- Konstansok

ev=8                                # Evék száma
honapok=evekszama*12
pszam=5                             # Portfoliók száma
rvszam=10                           # Részvények száma

#----- Piaci portfólió adatai    v

hozam_piac=matrix(nrow=honapok)

for(i in 1:honapok){
  hozam_piac[i]=0
  for(j in 1:rvszam){
    hozam_piac[i]=hozam_piac[i]+alapadatok[i,j]/rvszam
  }
}

ph <- function(t) # Adott (t) évre meghatározza a piaci portfólió hozamát
{
  h=mean(hozam_piac[((t-1)*12+1):(t*12)])
  return(h)
}

pv <- function(t) # Adott évre meghatározza a piaci portfólió varianciáját
{
  v=0
  for(i in 1:10){
    for(j in 1:10){
      v=v+(1/rvszam)*(1/rvszam) # Azonos súlyok a portfólióban
      *cov(alapadatok[((t-1)*12+1):(t*12),i],
          alapadatok[((t-1)*12+1):(t*12),j])
    }
  }
  return(v)
}

#----- Piaci portfólió adatai    ^
```

```

betacalc <- function(x,t) #Kiszámolja adott részvény adott évi bétáját
{
  b=cov(alapadatok[((t-1)*12+1):(t*12),x],
        hozam_piac[((t-1)*12+1):(t*12)]) / pv(t)
  return(b)
}

#----- Saját portfóliók adatai      v
portf_hozam=matrix(nrow=honapok,ncol=pszam,0)
d=0
for(t in (1+d):ev){
  for(p in 1:pszam){
    for(i in 1:12){
      portf[((t-1)*12+i),p]=0.5*alapadatok[((t-1)*12+i),komp_a[p,t-d]+1]+
                           0.5*alapadatok[((t-1)*12+i),komp_b[p,t-d]+1]
# A komp_a es komp_b a portfóliókba választott 2 reszveny sorszamat
# tartalmazza
    }
  }
}

d=1 # Ev eltolasi parameter
portf_beta=matrix(nrow=pszam,ncol=ev,0)
for(t in 1:ev){
  for(p in 1:pszam){
    portf_beta[p,t]=cov(portf[((t-1+d)*12+1):((t+d)*12),p],
                       hozam_piac[((t-1+d)*12+1):((t+d)*12)]/pv(t+d)
  }
}
#----- Saját portfóliók adatai      ^

```

8.2 Példa: Egymintás t-próba futási eredménye

A (14) szerinti a_1 együtthatóra végzett próba eredménye:

One Sample t-test

data: parameterrek[2,]

t = -0.6517, df = 7, p-value = 0.5354

alternative hypothesis: true mean is not equal to 0

95 percent confidence interval:

-0.02813127 0.01597582

sample estimates:

mean of x

-0.006077724

8.3 Példa: Lineáris modell részletes adatai

A következő futási eredményt a (16) egyenlőség utolsó éves adataiból kaptam:

Call:

lm(formula = hozamok ~ beta + I(beta^2) + rv)

Residuals:

1	2	3	4	5
-0.001662	0.003396	0.001851	-0.004314	0.000729

Coefficients:

	Estimate	Std.Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	0.024085	0.005944	4.052	0.154
beta	0.026292	0.008324	3.159	0.195
I(beta^2)	-0.006964	0.004788	-1.454	0.383
rv	-18.086001	12.936333	-1.398	0.395

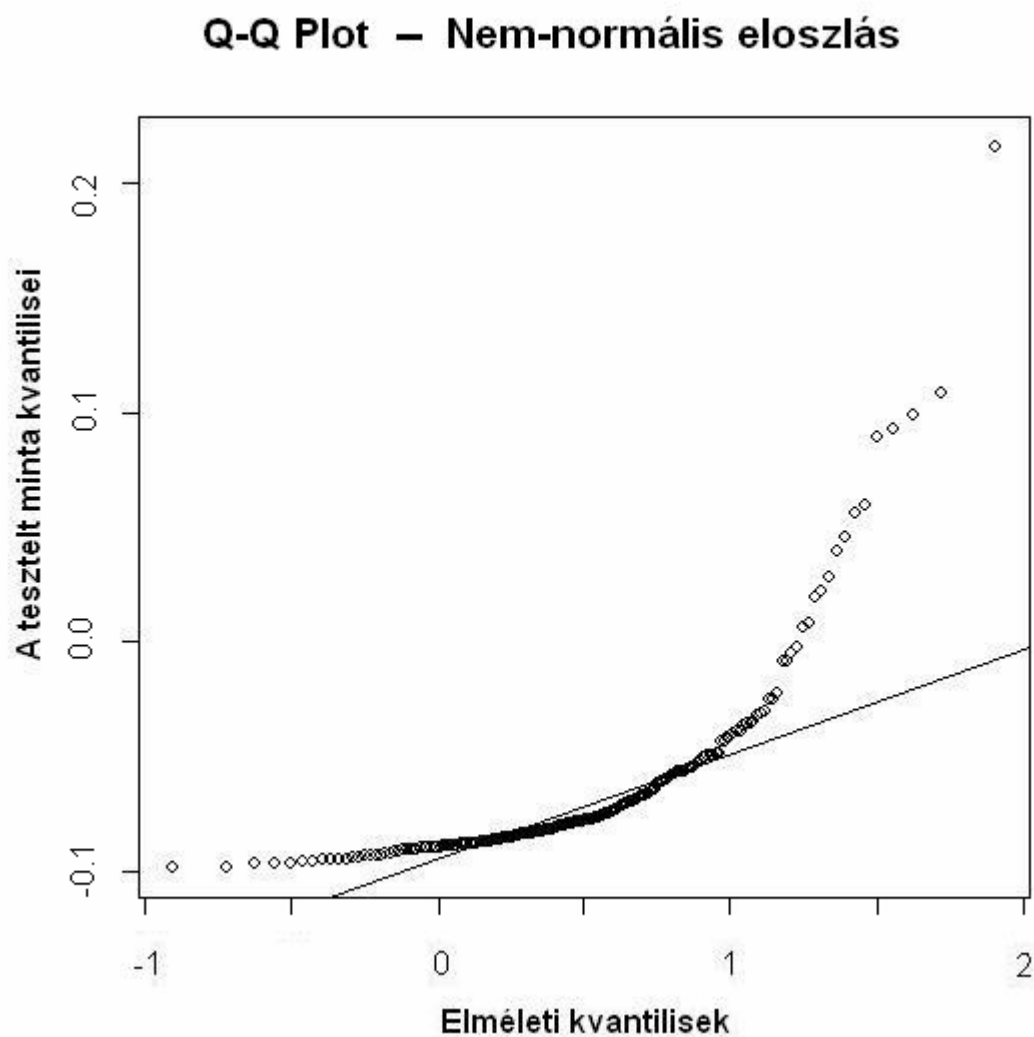
Residual standard error: 0.006071 on 1 degrees of freedom

Multiple R-Squared: 0.9517, Adjusted R-squared: 0.8067

F-statistic: 6.566 on 3 and 1 DF, p-value: 0.2776

8.4 Példa: Egy nem normális eloszlást követő részvény Q-Q diagramja

Az elemzés során a rendelkezésre álló adatokon elvégzett normalitás vizsgálat egyik eredménye:



8.5 Példa: Normalitásvizsgálat ellenőrzéseként futtatott Kolmogorov-Smirnov próba

MOL részvény normalitásvizsgálat - eredmény

Title:

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

Test Results:

STATISTIC:

D: 0.3975

P VALUE:

Alternative Two-Sided: 3.442e-14

Alternative Less: 1.710e-14

Alternative Greater: 8.553e-11

Description:

Sun May 04 21:39:48 2008