Aszimptotikus eredmények a valószínűségelméletben

Doktori (PhD) értekezés

TÓMÁCS TIBOR

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
DEBRECEN, 2003

Édesapámnak, aki már nem lehet közöttünk, továbbá édesanyámnak, feleségemnek és kislányomnak, akik ideális hátteret biztosítottak az értekezés megírásához.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Valószínűségelmélet és matematikai statisztika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2003.

Tómács Tibor

Tanúsítom, hogy Tómács Tibor doktorjelölt 1995—1998. között a fent megnevezett Doktori Iskola Valószínűségelmélet és matematikai statisztika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2003.

Dr. Fazekas István

Tartalomjegyzék

1. Az értekezés eredményeinek illeszkedése a szakirodalmi előzményekhez

1.1. A nagy számok törvényei

A nagy számok törvényeinek történeti fejlődése

Jacob Bernoulli (1654—1705) svájci matematikus Ars coniectandi (A találgatás művészete) című könyvében a kockajátékokkal kapcsolatos példákban feltételezi, hogy a kocka szimmetriája miatt a különböző dobások valószínűsége azonos. A feladatok megoldása azt mutatja, hogy Bernoulli a valószínűséget úgy értelmezte, mint a „kedvező" és a „lehetséges" esetek számának hányadosát. Azt, hogy a kocka minden oldalára egyforma valószínűséggel eshet, Bernoulli kísérlettel is ellenőrizte. A kockadobást nagyon sokszor elvégezte, s közben azt figyelte, hogy például a hatos számnak mennyi a relatív gyakorisága, mely azt mutatja, hogy az addig elvégzett dobások számához képest mennyi a hatos dobások aránya. Tapasztalata szerint ez az érték a dobások számának növelésével egyre közelebb kerül az 1/6-hoz. Ezt általánosítva bizonyította, hogy egy esemény relatív gyakorisága, az esemény nagyszámú bekövetkezése esetén igen közel kerül a valószínűséghez. Ezt a törvényt Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) német matematikussal folytatott levelezésében „nagy számok törvényének" nevezte el. Bernoulli tehát észrevette azt a lehetőséget, hogy a valószínűségszámítást statisztikai adatokra is alkalmazhatja.

Pofnutyij Lvovics Csebisev (1821—1894), aki négy tanulmányával megteremtette a pétervári iskolát, 1866-ban bizonyítja a Bernoulli-féle nagy számok törvényének egy általánosabb alakját, mely az ő megfogalmazásában a következő.

Legyen A egy kísérlet egy lehetséges eredménye. Az A relatív gyakoriságát jelöljük ϱ_n-nel, ahol n a kísérlet ismétléseinek számát jelenti. Ekkor minden $\varepsilon, \delta > 0$-hoz létezik N, hogy $n > N$ esetén $\mathrm{P}(|\varrho_n - \mathrm{P}(A)| < \varepsilon) \geq 1-\delta$. (Másképpen fogalmazva, a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez.)

Ezt a Csebisev-egyenlőtlenséggel lehet bizonyítani, mely szerint, ha az X valószínűségi változónak létezik véges várható értéke és szórása, akkor $\mathrm{P}(|X - \mathrm{E}X| > \lambda \mathrm{D}X) < 1/\lambda^2$ minden $\lambda > 1$ esetén. Ebből az egyenlőtlenségből könnyen bizonyítható a Bernoulli-féle nagy számok törvényének egy egyszerű általánosítása, az úgynevezett nagy számok gyenge törvénye.

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású, véges várható értékű és szórású valószínűségi változók. Ekkor $S_n = X_1 + \dots + X_n$ jelöléssel S_n/n sztochasztikusan konvergál $\mathrm{E}X_1$-hez.

Ezt a tételt Markov tovább általánosította, melyben az azonos eloszlás helyett azt feltételezte, hogy $(\mathrm{E}X_1 + \dots + \mathrm{E}X_n)/n \to m(\in \mathbb{R})$ és $(\mathrm{D}^2 X_1 + \dots + \mathrm{D}^2 X_n)/n^2 \to 0$. Ekkor S_n/n sztochasztikusan konvergál m-hez.

A tétel további általánosítása Bernstein nevéhez kapcsolódik, amely már a függő esetre vonatkozik.

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véges várható értékű és szórású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $(\mathrm{E}X_1 + \dots + \mathrm{E}X_n)/n \to m(\in \mathbb{R})$, $(\mathrm{D}^2 X_1 + \dots + \mathrm{D}^2 X_n)/n < K(\in \mathbb{R})$, továbbá $\mathrm{corr}(X_i, X_j) \le R(|i-j|)$, ahol R olyan nemnegatív valós értékű függvény, melyre $R(0) = 1$ és $(R(1) + \dots + R(n))/n \to 0$ teljesül. Ekkor S_n/n sztochasztikusan konvergál m-hez.

Hincsin bizonyította, hogy a független, azonos eloszlású valószínűségi változókra vonatkozó nagy számok gyenge törvényében nem kell a szórás létezése. A bizonyítás lényege, hogy az

$$X_k^* = \begin{cases} X_k, & \text{ha } |X_k| \le k \\ 0, & \text{ha } |X_k| > k \end{cases}$$

valószínűségi változókra alkalmazható az eredeti nagy számok gyenge törvénye.

Ezen törvények általánosításában az első komolyabb előrelépés nem a feltételek gyengítése, hanem az állítás erősítése volt, mely Kolmogorov nevéhez fűződik. Ez az úgynevezett Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye.

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\mathrm{E}|X_1| < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha S_n/n 1 valószínűséggel konvergál $\mathrm{E}X_1$-hez.

Tehát itt már a sztochasztikusnál erősebb, 1 valószínűséggel történő (más szóval majdnem biztos) konvergenciát állítunk. A fenti állítások részletes bizonyítása magyar nyelven Rényi A. [59] közismert tankönyvében elérhető. Ezen tankönyv 1954-ben kiadott változatában számos történeti adat is fellelhető a témakörről.

A nagy számok törvényének néhány változata

A nagy számok törvényeit számos irányban kiterjesztették. Egyik lehetőség az erős törvényben a (teljes) függetlenség helyett a páronkénti függetlenség feltételezése.

Etemadi (1981) [17] és Petrov (1987) [57] eredményei alapján kiderült, hogy a Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye érvényben marad páronként független esetben is. (Etemadi a konvergencia elégséges feltételét, míg Petrov a szükséges feltételét mutatta meg. Etemadi tételének bizonyítása magyar nyelven megtalálható például Fazekas [22] jegyzetében.)

Számosan vizsgálták a nagy számok erős törvényeit nem független valószínűségi változók esetén. Például Csörgő, Tandori és Totik (1983) [13] a következőt bizonyították.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *páronként független valószínűségi változók. Ha* $\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{D}^2 X_m / m^2 < \infty$ *és* $n^{-1} \sum_{m=1}^{n} \mathrm{E}|X_m - \mathrm{E}X_m|$ *korlátos sorozat, akkor* $n^{-1}(S_n - \mathrm{E}S_n) \to 0$ *majdnem biztosan.*

Marcinkiewicz és Zygmund (1937) [48] tételében az állítás már nemcsak S_n/n, hanem általánosabban $S_n/n^{1/r}$ $(0 < r < 2)$ majdnem biztos konvergenciájára ad elégséges feltételt.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Legyen* $0 < r < 2$*. Továbbá tegyük fel, hogy* $\mathrm{E}X_1 = 0$*, ha* $\mathrm{E}|X| < \infty$*. Ha* $\mathrm{E}|X_1|^r < \infty$*, akkor* $S_n/n^{1/r}$ *majdnem biztosan konvergál 0-hoz.*

Az állítás megfordítása is érvényes. ($r = 2$ esetén már más jellegű állítás, a központi határeloszlás-tétel teljesül.)

A vizsgálatokat kiterjesztették azokra az esetekre is, amikor a valószínűségi változók sorozata többindexes. Lásd például Gut (1978) [31], Klesov (1982) [42], illetve (1995) [43] és Fazekas (1985) [19]. A többindexes eset az erős törvény esetén érdekes, hiszen a gyenge törvényben szereplő sztochasztikus konvergencia metrizálható, így az egyindexes részsorozatok sztochasztikus konvergenciájából következik a többindexes sorozat sztochasztikus konvergenciája is.

Viszont a majdnem biztos konvergencia nem metrizálható, így a fenti gondolatmenet nem alkalmazható. Smythe (1973) [69] megadta a Kolmogorov-féle erős törvény szükséges és elégséges feltételét d-indexes esetben: $\mathrm{E}(|X_{\mathbf{1}}|(\log^+ |X_{\mathbf{1}}|)^{d-1}) < \infty$. Ugyanez Gut (1978) [31] szerint a Marcinkiewicz—Zygmund-féle erős törvényre: $\mathrm{E}(|X_{\mathbf{1}}|^r(\log^+ |X_{\mathbf{1}}|)^{d-1}) < \infty$.

Az azonos eloszlás feltétel is gyengíthető. Például az eloszlások domináltságát használják Hu, Móricz és Taylor (1989) [37], Gut (1992) [33] és Fazekas (1992) [21].

A Banach-térbeli értékű valószínűségi változók esetén kiderült, hogy vagy a tér geometriájára, vagy pedig magára az S_n sorozatra kell feltételeket tenni a nagy számok törvényének teljesüléséhez. Kimutatták például, hogy r-típusú Banach-térben teljesül a Marcinkiewicz-féle törvény (Azlarov és Volodin (1981) [4], de Acosta (1981) [1]).

Az értekezés eredményei a nagy számok törvényeiről

Kruglov (1994) [44] Theorem 1-ben a következőt állítja.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ nemnegatív valószínűségi változók, $b_1, b_2, \ldots$ pedig nemnegatív valós számok egy korlátos sorozata. Ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{P}(|S_n - B_n| > \varepsilon n) < \infty$$

bármely $\varepsilon > 0$ esetén, ahol $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, akkor

$$\frac{1}{n}(S_n - B_n) \to 0$$

majdnem biztosan.

A 2. fejezetben, mely Fazekas és Tómács (1998) [29] cikkén alapul, a 2.3.1. tétel Kruglov fenti tételének kiterjesztése többindexes valószínűségi változók sorozatára. (Itt az indexek szorzata tart végtelenbe.) Ez a tétel annyiban is általánosabb Kruglov tételénél, hogy itt az állítás nem Kolmogorov típusú, hanem Marcinkiewicz—Zygmund típusú, ahol $0 < r \le 1$.

Ebben a fejezetben a 2.3.1. tétel segítségével további két tételt fogunk bizonyítani. Az egyik, a 2.4.1. tétel, melynek a második állítása a Kolmogorov-féle nagy számok törvénye, többindexes, páronként független, átlagban gyengén dominált (lásd 2.1.1. definíció) valószínűségi változók esetén. Ez a tétel egyébként Kruglov (1994) [44] Theorem 2 kiterjesztése többindexes esetre.

Ismert, hogy a Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvénye érvényben marad azonos eloszlású, tetszőleges függőségi struktúrával rendelkező valószínűségi változók esetén is, ha $0 < r < 1$. (Lásd például Petrov (1987) [57], 4. fejezet, 16. tétel.) Ezt a tételt a 2.5.1. tétel második állítása terjeszti ki többindexes esetekre. Ebből a tételből az is kiderül, hogy az azonos eloszlás feltétele is gyengíthető az átlagban való gyengén domináltsággal.

Megjegyezzük, hogy a 2. fejezetben található tételek néhány része bizonyított Etemadi (1981) [17] cikkében, illetve a 2.5.1. tétel eredményét implicite tartalmazza Fazekas (1992) [21] Theorem 4.1 bizonyítása.

A 3. fejezet, mely Noszály és Tómács (2000) [55] cikkén alapul, szintén a többindexes valószínűségi változók sorozatára vonatkozó nagy számok erős törvényeivel foglalkozik. (A 2. fejezettől eltérően itt azt feltételezzük, hogy minden index tart végtelenbe.) Ennek a témakörnek óriási az irodalma. Lásd például Peligrad és Gut (1999) [56], Móricz (1983) [53], Klesov (1980) [41], Fazekas (1983) [18]. Az ebben a fejezetben található eljárás, a többindexes esetre való kiterjesztése Fazekas és Klesov (2000) [23] cikkében található módszernek.

A fejezet fő eredménye a 3.2.3. tétel, mely Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 2.1 kiterjesztése. Ez a tétel (és a kiinduló Fazekas-Klesov cikkbeli tétel is) egy Hájek—Rényi típusú maximális egyenlőtlenségből vezeti le a nagy számok erős törvényét. Maximális egyenlőtlenségek bizonyításával nem foglalkozunk, csupán a már ismertekből vezetünk le nagy számok törvényét. Az eljárásunk a normáló konstansok megválasztásában nyújt segítséget. A fejezet további eredményei a 3.2.3. tételnek az alkalmazásai.

— Móri (1993) [54] Theorem 1-ben bizonyítja, hogy

$$(\log^+ n)^{-1} \sum_{k=1}^{n} X_k/k \to 0$$

majdnem biztosan, bizonyos általános feltételek esetén. Fazekas és Klesov (2000) [23] cikkben az általános módszerükkel Theorem 9.1-ben bizonyították Móri tételének egy speciális esetét. A 3.3.2. tétel ennek a kiterjesztése többindexes esetre.

— A 3.4.2. tétel egy Marcinkiewicz—Zygmund típusú nagy számok erős törvénye, szuperadditív momentum struktúrájú, többindexes valószínűségi változókra (lásd 3.2.4. definíciót). Ez az eredmény Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 8.1 kiterjesztése.

— A 3.5.3. és a 3.5.4. tételek Brunk—Prohorov típusú állítások.

1.2. A konvergencia sebessége

A Kolmogorov-féle, illetve a Marcinkiewicz—Zygmund-féle nagy számok törvényében a konvergencia sebességére vonatkozó klasszikus eredmények Hsu, Robbins, Erdős, Baum és Katz nevéhez fűződnek.

Az $S_n/n^{1/r}$ sorozat sztochasztikusan konvergál 0-hoz, ha

$$\mathrm{P}(|S_n| > \varepsilon n^{1/r}) \to 0$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ez nyilván teljesül, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|S_n| > \varepsilon n^{1/r}) < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy $S_n/n^{1/r}$ *teljesen konvergál* 0-*hoz*. (Az elnevezés — angolul „*converge completely to* 0" — Hsu és Robbins (1947) [36] cikkéből származik.) A Borel—Cantelli lemma segítségével ebben az esetben bizonyítható, hogy $S_n/n^{1/r}$ majdnem biztosan konvergál 0-hoz. Hsu és Robbins (1947) [36] elégséges feltételt adtak a teljes konvergenciához ($r = 1$ esetén), míg Erdős (1949) [15] és (1950) [16] cikkekben belátta Hsu és Robbins tételének megfordítását is. Így a következő eredmény született.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\mathrm{E}X_k = 0$ és $\mathrm{E}X_k^2 < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha S_n/n teljesen konvergál 0-hoz.

Spitzer (1956) [70] bizonyította a következő tételt.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor $\mathrm{E}|X_1| < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathrm{P}(|S_n - nm| > \varepsilon n) < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén. (Ekkor $m = \mathrm{E}X_1$.)

Az előző két tétel egy jól ismert általánosítása, Baum és Katz tétele (1965 [5]).

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $\mathrm{E}X_k = 0$ teljesül, ha $\mathrm{E}|X_k| < \infty$. Legyen $r > 0$, $t \geq 1$ és $2t > r$. Ekkor $\mathrm{E}|X_k|^r < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} \mathrm{P}(|S_n| > \varepsilon n^{t/r}) < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén.

A klasszikus Baum—Katz-féle eredményt számos irányba kiterjesztették.

Gut (1978) [31] teljesen független valószínűségi változók többindexes sorozataira bizonyított Baum—Katz-típusú eredményt.

Egy másik sokat vizsgált irány a Banach-térbeli értékű eset. Jain (1975) [40] és Woyczyński (1980) [74] Banach-térbeli értékű teljesen független valószínűségi változókra kapott Baum—Katz-típusú eredményeket.

Fazekas (1985) [19] ezt a két irányt összekapcsolva, Banach-térbeli értékű valószínűségi változók többindexes sorozataira bizonyította a Baum—Katz-tételt.

További vizsgálati irány a változók (teljes) függetlenségétől való eltekintés.

Spitzer tételét Kruglov (1994) [44] Theorem 2-ben általánosította arra az esetre, amikor a valószínűségi változók páronként függetlenek és átlagban gyengén domináltak. Jelen értekezés 2.4.1. tételének első fele azt mutatja, hogy ez az eredmény kiterjeszthető többindexes valószínűségi változók sorozatára is. Másrészt a 2.5.1. tétel első felében be fogjuk bizonyítani, hogy a Baum—Katz-tétel $t = 1$ és $0 < r < 1$ esetén érvényben marad átlagban gyengén dominált többindexes valószínűségi változók esetén is, tetszőleges függőségi struktúrával.

Sorozatok helyett lehet vizsgálni (a központi határeloszlás-tételek tárgyalásánál általánosan használt) szériasorozatokat is. Hu, Móricz és Taylor (1989) [37] gyengén dominált szériasorozatokat, míg Gut (1992) [33] átlagban gyengén dominált szériasorozatokat tekintett.

Ezen az úton tovább haladva lehet Banach-térbeli értékű szériasorozatokra is kiterjeszteni a Baum—Katz-féle eredményt, lásd például Fazekas (1992) [21], Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [38].

A 4. fejezetben, mely Tómács (2003) [72] cikkén alapul, egy általános konvergenciasebesség-tételt mondunk ki (4.3.1. tétel) Banach-térbeli értékű, soronként független, átlagban gyengén dominált valószínűségi változók szériasorozatára. Ez a tétel általánosítása Jain (1975) [40] Theorem 3.3-nak. Bár a tétel feltételrendszere bonyolultnak tűnik, mégis alkalmas súlyfüggvények választásával ismert tételeket kapunk belőle. A 4.3.2. és a 4.3.3. következmények Fazekas (1992) [21] Theorem 6.2 és Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [38] Corollary 4.1 változatai. A 4.4. paragrafusban bizonyos geometriai tulajdonságú Banach-terekre specializáljuk a 4.3.1. tételt, mellyel új bizonyításait kapjuk Fazekas (1992) [21], illetve Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [38] eredményeinek.

1.3. Majdnem biztos központi határeloszlás-tételek

A nagy számok erős törvénye trajektóriánként teljesül, azaz majdnem minden ω esetén $S_n(\omega)/n$ konvergens. A központi határeloszlás-tétel esetén viszont $S_n/\sqrt{n}$ csupán eloszlásban konvergál a normális eloszláshoz. Lehet-e egyetlen $S_n(\omega)/\sqrt{n}$ realizációból a normális eloszláshoz eljutni? Erre ad feleletet a majdnem biztos központi határeloszlás-tétel.

Jelölje $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel-mérhető részhalmazainak σ-algebráját. δ_x jelölje az $x \in \mathbb{R}$ *pontra koncentrált egységnyi tömeget*, azaz $\delta_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, $\delta_x(B) = 1$, ha $x \in B$ és $\delta_x(B) = 0$, ha $x \notin B$. Jelöljük $\Rightarrow$ módon a gyenge konvergenciát, azaz μ_n és μ eloszlások esetén $\mu_n \Rightarrow \mu$ teljesül, ha

$$\lim_{n\to\infty} \int f \mathrm{d}\mu_n = \int f \mathrm{d}\mu$$

minden korlátos és folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre.

Legyen $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségi változók egy sorozata az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben. A majdnem biztos központi határeloszlás-tételek a következőt állítják:

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} d_k \delta_{\zeta_k(\omega)} \Rightarrow \mu \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

A majdnem biztos központi határeloszlás-tételek legegyszerűbb alakjában $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} X_k/\sqrt{n}$, ahol X_k $(k \in \mathbb{N})$ független azonos eloszlású 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változók, továbbá $d_k = 1/k$, $D_n = \log n$, végül μ a standard normális eloszlás. (Lásd például Brosamler (1988) [8], Schatte (1988) [65], Lacey és Philipp (1990) [45], Berkes (1998) [6], Major (2000) [47].)

Eleinte ettől általánosabb d_k és D_n súlyokkal csak kevesen foglalkoztak, például Rodzik és Rychlik (1994) [62]. Manapság ezeknek a tételeknek már az általános alakjait vizsgálják. Lásd például Ibragimov és Lifshits (1999) [39], Berkes és Csáki (2001) [7], Chuprunov és Fazekas (2002) [12]. Ez utóbbi két cikk alaperedményeit általánosítja Fazekas és Rychlik (2002) [27] Theorem 1.1.

Legyen (B, ϱ) teljes metrikus tér és $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ B-értékű véletlen elemek. μ_{ζ_k} jelölje a ζ_k eloszlását. Legyenek $C > 0$, $\varepsilon > 0$, c_n monoton növekvő sorozat, $c_n \to \infty$, c_{n+1}/c_n korlátos. Tegyük fel, hogy ζ_{kl} $(k, l \in \mathbb{N},\ k < l)$ olyan B-értékű véletlen elemek, melyekre ζ_k és ζ_{kl} függetlenek, továbbá

$$\mathrm{E} \min\{\varrho(\zeta_{kl}, \zeta_l), 1\} \le C\{\log^+ \log^+(c_l/c_k)\}^{-1-\varepsilon}$$

minden $k < l$ esetén. Legyen d_k olyan sorozat, melyre teljesül, hogy $0 \le d_k \le \log(c_{k+1}/c_k)$ és $\sum_{k=1}^{\infty} d_k = \infty$. Legyen $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$. Ekkor minden μ eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens:

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k \delta_{\zeta_k(\omega)} \Rightarrow \mu \text{ majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ esetén;}$$

$$\frac{1}{D_n}\sum_{k=1}^{n} d_k \mu_{\zeta_k} \Rightarrow \mu.$$

A majdnem biztos központi határeloszlás-tételek tipikus bizonyítása súlyozott átlagokra vonatkozó nagy számok erős törvényeire épül. Sőt maga is egy nagy számok erős törvénye, csak éppen mértékekre vonatkozik. Tehát az egyindexes eredményből itt sem következik a többindexes.

Az előbbiekben részletezett tételt Fazekas és Rychlik (2001) [28] Theorem 1.1 kiterjesztette többindexes sorozatokra. (Itt a határátmenetben minden index tart végtelenbe.)

Az 5. fejezetben, mely Tómács (2002) [71] cikkén alapul, ennek a tételnek az alkalmazásaként, az úgynevezett m-függő többindexes valószínűségi változókra vonatkozó majdnem biztos központi határeloszlás-tételeket tárgyaljuk (5.3.1. és 5.3.2. tételek).

Klasszikus központi határeloszlás-tételeket sokan vizsgáltak m-függő esetben, lásd például Rosén (1969) [63], illetve Zototukhina és Chugueva (1973) [75]. Ezekben a konvergencia sebességének a becslésével foglalkoztak például Maejima (1978) [46], Shergin (1976) [66], továbbá Prakasa Rao (1981) [58]. Ez utóbbi cikk eredményeit is felhasználtuk a fent említett tételek bizonyításában.

1.4. Rosenthal-egyenlőtlenség

Az úgynevezett Rosenthal-egyenlőtlenség fontos szerepet játszik a gyengén függő valószínűségi változókból álló sorozatok aszimptotikus tulajdonságainak becslésében (lásd például Fazekas és Kukush (1997) [25]). Az első ilyen típusú állítást Rosenthal (1970) [64] fogalmazta meg független valószínűségi változókra.

Keverő sorozatokra a Rosenthal-egyenlőtlenséggel Utev (1984) [73] foglalkozott, míg keverő mezőkkel, azaz a többindexes sorozatokkal Doukhan (1994) [14]. Doukhan ebben a könyvben megjegyzi, hogy Utevnek az előbbi cikkében, az úgynevezett interpolációs lemmának a bizonyításában van egy hibás lépés. Nevezetesen a (4.5) képletet megelőző egyenlőtlenség bizonyítása helytelen. Így Utev Rosenthal-egyenlőtlenségének a kiterjesztése pozitív páros egész kitevőkről tetszőleges pozitív valós számokra nyitott kérdés.

Másrészt Doukhan bizonyítja a Rosenthal-egyenlőtlenséget α- és φ-keverő mezőkre. Bár a Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] cikkben —

mely a 6. fejezet alapját képezi — a szerzők véleménye szerint Doukhan fenti könyvében a Theorem 1 bizonyítása hiányos.

A 6. fejezetben α-keverő esetre bizonyítjuk a Rosenthal-egyenlőtlenséget, kissé erősebb feltételekkel, mint Doukhannál. Az eredmények és a bizonyítások csak csekély mértékben térnek el Doukhanétól és Utevétől. A cél annyi volt, hogy összegezzük, mi világos a fenti bizonyításokban, és az ugrásokat saját meggondolásokkal áthidaljuk.

2. Páronként független, többindexes valószínűségi változókra vonatkozó nagy számok erős törvényei

Ebben a részben Kruglov (1994) [44] eredményeit terjesztjük ki a többindexes esetre. Az eredmények Fazekas és Tómács (1998) [29] cikkben lettek publikálva.

2.1. Jelölések, definíciók

Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza és $d \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \ldots \in \mathbb{N}^d$ rácspontok koordinátáit jelöljük ugyanazon indexelt betűkkel, azaz például $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. Bevezetjük a következő jelöléseket: $(\mathbf{n}, \mathbf{m}] := (n_1, m_1] \times \cdots \times (n_d, m_d]$, $|\mathbf{n}| := n_1 \cdots n_d$, továbbá az $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ relációt értelmezzük koordinátánként, azaz ekkor $n_i \leq m_i$ minden $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén. $\sum_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d}$, $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$, továbbá $\mathrm{I}(A)$ jelentse az A halmaz indikátorfüggvényét, $\mathrm{card}(A)$ pedig a számosságát. Legyen $\log^+ x := \max\{1, \log x\}$, ha $x > 0$ és $\log^+ x := 1$, ha $x \leq 0$.

Tegyük fel, hogy az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók ugyanabban az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben vannak értelmezve. Legyen $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $X_{\mathbf{n}}^+ := \max\{0, X_{\mathbf{n}}\}$ és $X_{\mathbf{n}}^- := \max\{0, -X_{\mathbf{n}}\}$. Használni fogjuk még a következő operátorokat:

$$X(\lambda) := |X|\,\mathrm{I}(|X| > \lambda),$$
$$X^*(\lambda) := |X|\,\mathrm{I}(|X| \leq \lambda) + \lambda \mathrm{I}(|X| > \lambda),$$

ahol X valószínűségi változó és $\lambda > 0$.

2.1.1. definíció. (Gut (1992) [33].) Azt mondjuk, hogy az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók sorozata az X valószínűségi változóval *átlagban gyengén dominált*, ha létezik $c > 0$ úgy, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > x) \leq c\mathrm{P}(|X| > x) \tag{2.1.1}$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és $x \geq 0$ esetén.

2.2. Lemmák

A következő két lemma bizonyítását lásd például a következő cikkekben: Gut (1978) [31], Fazekas (1985) [19].

2.2.1. lemma. *Legyen X egy valószínűségi változó és $r > 0$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:*

1) $\mathrm{E}\left(|X|^r (\log^+ |X|)^{d-1}\right) < \infty$,

2) $\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{\alpha r-1} \mathrm{P}(|X| \geq |\mathbf{n}|^{\alpha} \varepsilon) < \infty$, *minden $\alpha > 0$ és $\varepsilon > 0$ esetén.*

Bizonyítás. Csak az 1)$\Rightarrow$2) irányt bizonyítjuk be, azt is csak akkor, ha $\alpha = 1/r$ és $\varepsilon = 1$, ugyanis a későbbiek során erre lesz szükségünk. Legyen $d(k) := \mathrm{card}\left\{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d : |\mathbf{n}| = k\right\}$ és $M(x) := \sum_{k \leq x} d(k)$, ahol $k \in \mathbb{N}$ és $x > 0$. Ismert, hogy $M(x) \sim \mathrm{konst.}x \left(\log^+ x\right)^{d-1}$. Így

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X| \geq |\mathbf{n}|) &= \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=|\mathbf{n}|}^{\infty} \mathrm{P}(i \leq |X| < i+1) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} M(i) \mathrm{P}(i \leq |X| < i+1) \leq \\
&\leq c \sum_{i=1}^{\infty} i (\log^+ i)^{d-1} \mathrm{P}(i \leq |X| < i+1) \leq \\
&\leq c\mathrm{E}\left(|X| \left(\log^+ |X|\right)^{d-1}\right).
\end{aligned}$$

□

2.2.2. lemma. *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, $0 < r < p \leq 2$ és $\varepsilon > 0$. Ha*

$$\mathrm{E}\left(|X_{\mathbf{1}}|^r (\log^+ |X_{\mathbf{1}}|)^{d-1}\right) < \infty,$$

akkor

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{E}\left| |\mathbf{n}|^{-1/r} X_{\mathbf{n}} \mathrm{I}\left(|X_{\mathbf{n}}| \leq \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right)\right|^p < \infty.$$

A következő lemma Gut (1992) [33] Lemma 2.1-nek egy változata. (Lásd még Fazekas (1992) [21] Lemma 2.7.)

2.2.3. lemma. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Lemma 2.4.) *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *az* X *valószínűségi változóval átlagban gyengén dominált valószínűségi változók egy sorozata. Ekkor létezik* $c > 0$, *hogy*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}(X^*_{\mathbf{k}}(\lambda))^p \leq c\mathrm{E}(X^*(\lambda))^p, \tag{2.2.1}$$

és

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}(X_{\mathbf{k}}(\lambda))^p \leq c\mathrm{E}(X(\lambda))^p \tag{2.2.2}$$

teljesül minden $p > 0$ *és* $\lambda > 0$ *esetén.*

Bizonyítás. Ismert, hogy nemnegatív Y valószínűségi változó esetén $\mathrm{E}Y^p = p\int_0^\infty y^{p-1}\mathrm{P}(Y > y)\mathrm{d}y$. Ezt felhasználva, (2.1.1) alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}(X^*_{\mathbf{k}}(\lambda))^p = \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} p \int_0^\infty y^{p-1}\mathrm{P}(X^*_{\mathbf{k}}(\lambda) > y)\mathrm{d}y = \\
&= p\int_0^\lambda y^{p-1} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > y)\mathrm{d}y \leq p\int_0^\lambda y^{p-1} c\mathrm{P}(|X| > y)\mathrm{d}y = \\
&= c\mathrm{E}(X^*(\lambda))^p.
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}(X_{\mathbf{k}}(\lambda))^p = p\int_0^\infty y^{p-1} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{k}}(\lambda) > y)\mathrm{d}y = \\
&= p\int_0^\lambda y^{p-1} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > \lambda)\mathrm{d}y + p\int_\lambda^\infty y^{p-1} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > y)\mathrm{d}y \leq \\
&\leq p\int_0^\infty y^{p-1} c\mathrm{P}(X(\lambda) > y)\mathrm{d}y = c\mathrm{E}(X(\lambda))^p.
\end{aligned}$$

□

2.2.4. lemma. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Lemma 2.5.) *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *páronként független valószínűségi változók egy sorozata és* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *pozitív számok egy sorozata. Ha*

$$\left\{ \frac{a_{\mathbf{n}-\mathbf{v}}}{a_{\mathbf{n}}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{v} \in V \right\}$$

korlátos halmaz, ahol $V = \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) : v_i \in \{0, 1\}\}$*, továbbá*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{a_{\mathbf{n}}} \to 0 \ (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan},$$

akkor

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{n}}| \geq a_{\mathbf{n}}) < \infty.$$

Bizonyítás. $d = 1$ esetén lásd Petrov (1987) [57] 222. oldal. Általános esetben vegyük észre, hogy

$$\frac{X_{\mathbf{n}}}{a_{\mathbf{n}}} = \sum_{\mathbf{v} \in V} (-1)^{v_1 + \dots + v_d} \frac{S_{\mathbf{n}-\mathbf{v}}}{a_{\mathbf{n}-\mathbf{v}}} \cdot \frac{a_{\mathbf{n}-\mathbf{v}}}{a_{\mathbf{n}}},$$

melyből következik, hogy $X_{\mathbf{n}}/a_{\mathbf{n}} \to 0$ $(|\mathbf{n}| \to \infty)$ majdnem biztosan. Így

$$\mathrm{P}\big(\{|X_{\mathbf{n}}| \geq a_{\mathbf{n}}\} \text{ végtelen sok } \mathbf{n}\text{-re}\big) = 0.$$

Innen a lemma következik a páronként független valószínűségi változókra vonatkozó Borel—Cantelli lemmából. (Lásd például Petrov (1987) [57] 214. oldal.) □

2.2.5. lemma. (Kronecker) *Legyenek* $x_{\mathbf{n}}$ *és* $b_{\mathbf{n}}$ *nemnegatív számok minden* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *esetén. Tegyük fel, hogy* $b_{\mathbf{m}} \leq b_{\mathbf{n}}$*, ha* $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$*,* $b_{\mathbf{n}} \to \infty$ $(|\mathbf{n}| \to \infty)$ *és* $\sum_{\mathbf{n}} x_{\mathbf{n}} < \infty$*. Ekkor*

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} b_{\mathbf{k}} x_{\mathbf{k}} \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty).$$

Bizonyítás. Hasonlóan bizonyítható, mint a $d = 1$ esetben. (A $d = 1$ esetet lásd például Shiryayev (1984) [67] 365. oldal.) □

2.3. Egy általános konvergenciatétel

A következő tétel Kruglov (1994) [44] Theorem 1 általánosítása, mely tulajdonképpen egy Kolmogorov- illetve Marcinkiewicz-típusú törvényt vezet le egy Spitzer-típusú feltételből.

2.3.1. tétel. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Theorem 3.1.) *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *nemnegatív valószínűségi változók egy sorozata,* $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *nemnegatív számoknak egy korlátos sorozata, továbbá* $B_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} b_{\mathbf{k}}$. *Ha*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty \tag{2.3.1}$$

minden $\varepsilon > 0$ *esetén, ahol* $0 < r \le 1$, *akkor*

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^{1/r}} (S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.} \tag{2.3.2}$$

Bizonyítás. Legyenek $\alpha > 1$, $\varepsilon > 0$ rögzítettek. Jelöljük α^{n_i} egész részét k_{n_i}-vel ($i = 1, \ldots, d$), továbbá legyen $\mathbf{k_n} := (k_{n_1}, \ldots, k_{n_d})$. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{n}} \frac{|\mathbf{k}_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{k}_{\mathbf{n}}|}{|\mathbf{k}_{\mathbf{n}+\mathbf{1}}|} \min_{\mathbf{k} \in (\mathbf{k_n}, \mathbf{k_{n+1}}]} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}}| > \varepsilon |\mathbf{k}|^{1/r}\right) \le \\
&\le \sum_{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{k} \in (\mathbf{k_n}, \mathbf{k_{n+1}}]} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{k}} - B_{\mathbf{k}}| > \varepsilon |\mathbf{k}|^{1/r}\right) \le \\
&\le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}} - B_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right).
\end{aligned}$$

Ebből és (2.3.1) miatt léteznek olyan $\alpha^{n_i} < m_{n_i} \le \alpha^{n_i+1}$ számok, hogy $\mathbf{m_n} := (m_{n_1}, \ldots, m_{n_d})$ jelöléssel

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{m_n}} - B_{\mathbf{m_n}}| > \varepsilon |\mathbf{m_n}|^{1/r}\right) < \infty. \tag{2.3.3}$$

A Borel—Cantelli lemma miatt, (2.3.3) alapján következik, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{m_n}|^{1/r}} |S_{\mathbf{m_n}} - B_{\mathbf{m_n}}| \le \varepsilon \tag{2.3.4}$$

teljesül majdnem biztosan, véges sok $\mathbf{m_n}$-től eltekintve. Tetszőleges $\mathbf{t} \in \mathbb{N}^d$ esetén $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ legyen olyan, hogy $\mathbf{t} \in (\mathbf{m_n}, \mathbf{m_{n+1}}]$. Ilyen jelöléssel $X_{\mathbf{k}}$ nemnegativitása miatt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} (B_{\mathbf{m_n}} - B_{\mathbf{t}}) + \frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} (S_{\mathbf{m_n}} - B_{\mathbf{m_n}}) \le \frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} (S_{\mathbf{t}} - B_{\mathbf{t}}) \le \\
&\le \frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} (S_{\mathbf{m_{n+1}}} - B_{\mathbf{m_{n+1}}}) + \frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} (B_{\mathbf{m_{n+1}}} - B_{\mathbf{t}}).
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Vegyük észre, hogy $b := \sup\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ jelöléssel

$$\frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}}(B_{\mathbf{t}} - B_{\mathbf{m_n}}) \leq (\alpha^{2d} - 1) b \alpha^{(1-1/r)(n_1+\cdots+n_d)} \leq (\alpha^{2d} - 1) b,$$

$$\frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}}(B_{\mathbf{m_{n+1}}} - B_{\mathbf{t}}) \leq (\alpha^{2d} - 1) b,$$

továbbá $|\mathbf{t}|^{-1/r} \leq \alpha^{2d/r} |\mathbf{m_{n+1}}|^{-1/r}$. Ezeket figyelembe véve kapjuk (2.3.4) és (2.3.5) miatt, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{t}|^{1/r}} |S_{\mathbf{t}} - B_{\mathbf{t}}| \leq \varepsilon \alpha^{2d/r} + (\alpha^{2d} - 1) b$$

majdnem biztosan, véges sok $\mathbf{t}$-től eltekintve. Mivel bármely $\delta > 0$ esetén létezik $\varepsilon > 0$ és $\alpha > 1$ úgy, hogy $\varepsilon \alpha^{2d/r} + (\alpha^{2d} - 1) b < \delta$, ezért (2.3.2) bizonyított. □

2.4. Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye

A következő tétel Kruglov (1994) [44] Theorem 2 általánosítása többindexes esetre. A tétel a Kolmogorov-féle és a Spitzer-féle állításokat foglalja magába a többindexes páronként független, átlagban gyengén dominált esetben.

2.4.1. tétel. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Theorem 4.1.) *Legyen az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ páronként független valószínűségi változók sorozata X-szel átlagban gyengén dominált. Tegyük fel, hogy $\mathrm{E}\left(|X|(\log^+|X|)^{d-1}\right) < \infty$. Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\big(|S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|\big) < \infty \tag{2.4.1}$$

minden $\varepsilon > 0$ esetén, továbbá, ha még $\sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}| < \infty$ is teljesül, akkor

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|}(S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}S_{\mathbf{n}}) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.} \tag{2.4.2}$$

Bizonyítás. Legyen $Y_{\mathbf{k}} := X_{\mathbf{k}} \mathrm{I}(|X_{\mathbf{k}}| \leq |\mathbf{n}|)$, ahol $\mathbf{k} \leq \mathbf{n}$, továbbá $T_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} Y_{\mathbf{k}}$. Nyilván ekkor az $Y_{\mathbf{k}}$ valószínűségi változók is páronként függetlenek. Ekkor (2.2.1) miatt a 2.2.3. lemmában $\lambda = |\mathbf{n}|$ és $p = 2$ választással

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}Y_{\mathbf{k}}^2 \leq c|\mathbf{n}|^2 \mathrm{P}(|X| > |\mathbf{n}|) + c\mathrm{E}\left(X^2 \mathrm{I}(|X| \leq |\mathbf{n}|)\right),$$

melyből

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \mathrm{D}^2 T_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{D}^2 Y_{\mathbf{k}} \le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{E} Y_{\mathbf{k}}^2 \le$$
$$\le c \sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X| > |\mathbf{n}|) + c \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^2} \mathrm{E}\left(X^2 \mathrm{I}(|X| \le |\mathbf{n}|)\right).$$

Könnyen látható még, hogy

$$\mathrm{P}(|S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}T_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|) \le \mathrm{P}(|T_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}T_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|) + \mathrm{P}\Bigg(\bigcup_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \{|X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|\}\Bigg).$$

Az utóbbi két egyenlőtlenségből, a Csebisev-egyenlőtlenségből, a 2.2.1. és a 2.2.2. lemmákból kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}(|S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}T_{\mathbf{n}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|) \le$$
$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \mathrm{D}^2 T_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|) \le$$
$$\le c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}(|X| > |\mathbf{n}|) + \frac{c}{\varepsilon^2} \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^2} \mathrm{E}\left(X^2 \mathrm{I}(|X| \le |\mathbf{n}|)\right) < \infty.$$

Ezzel (2.4.1) bizonyított, ugyanis (2.2.2) miatt a 2.2.3. lemmában ($\lambda = |\mathbf{n}|$ és $p = 1$ választással)

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} |\mathrm{E}S_{\mathbf{n}} - \mathrm{E}T_{\mathbf{n}}| \le \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{E}\Big(|X_{\mathbf{k}}| \mathrm{I}(|X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|)\Big) \le$$
$$\le c\mathrm{E}\Big(|X| \mathrm{I}(|X| > |\mathbf{n}|)\Big) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty).$$

Most rátérünk (2.4.2) bizonyítására. Mivel $|X_{\mathbf{n}}| = X_{\mathbf{n}}^+ + X_{\mathbf{n}}^-$, ezért a gyengén domináltság miatt

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{n}}^\pm > x) \le c\mathrm{P}(|X| > x)$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ és $x > 0$ esetén. Így (2.4.1) teljesül akkor is, ha abban $X_{\mathbf{k}}$ helyére $X_{\mathbf{k}}^+$ vagy $X_{\mathbf{k}}^-$ kerül. Mivel $\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|$ korlátos sorozat, így alkalmazhatjuk a 2.3.1. tételt. Kapjuk, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \left(X_{\mathbf{k}}^\pm - \mathrm{E}X_{\mathbf{k}}^\pm\right) \to 0 \quad (|\mathbf{n}| \to \infty) \quad \text{majdnem biztosan.}$$

Ebből már következik (2.4.2). □

Tételünkből azonnal adódik a Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye a páronként független, (nem átlagban!) dominált esetben. Ha páronként független, azonos eloszlású esetre koncentrálunk, akkor az alábbi következményt kapjuk (az egyindexes esetben ez éppen Kruglov (1994) [44] Corollary 1).

2.4.2. következmény. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Corollary 4.2.) *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ páronként független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. A következő állítások ekvivalensek:*

1) $\mathrm{E}|X_{\mathbf{1}}|(\log^+ |X_{\mathbf{1}}|)^{d-1} < \infty$,

2) $|\mathbf{n}|^{-1} S_{\mathbf{n}} \to c \in \mathbb{R}$ $(|\mathbf{n}|\to\infty)$ *majdnem biztosan,*

3) *létezik* $b \geq 0$, *hogy bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\left|\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} (|X_{\mathbf{k}}| - b)\right| > \varepsilon |\mathbf{n}|\right) < \infty.$$

Bizonyítás. A 2.4.1. tételből $c = \mathrm{E}|X_{\mathbf{1}}|$ választással következik 1)⇒2), $b = \mathrm{E}|X_{\mathbf{1}}|$ választással pedig 1)⇒3). A 2)⇒1) implikáció következménye a 2.2.4. és a 2.2.1. lemmáknak. Végül 3)⇒1)-et bizonyítjuk. A 2.3.1. tétel miatt

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| \to b \quad (|\mathbf{n}|\to\infty) \quad \text{majdnem biztosan.}$$

Így 3)⇒1) következik a 2)⇒1) implikációból. □

2.5. Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvénye

Az alábbi állítás szerint a Marcinkiewicz-féle normálásnál, ha $0 < r < 1$ (azaz az „egyszerű” esetben) érvényes mind a nagy számok törvénye, mind a Spitzer-féle állítás a függetlenség feltételezése nélkül is.

2.5.1. tétel. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Theorem 5.1.) *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók X-szel átlagban gyengén dominált sorozata. Tegyük fel, hogy* $\mathrm{E}(|X|^r (\log^+ |X|)^{d-1}) < \infty$, *ahol* $0 < r < 1$. *Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty$$

bármely $\varepsilon > 0$ *esetén, továbbá*

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/r}} \to 0 \quad (|\mathbf{n}|\to\infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Bizonyítás. Legyen $Y_{\mathbf{k}} := X_{\mathbf{k}} \mathrm{I}(|X_{\mathbf{k}}| \le |\mathbf{n}|^{1/r})$, ahol $\mathbf{k} \le \mathbf{n}$. Ekkor

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(|S_{\mathbf{n}}| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) \le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|^{1/r}\right) + \\ + \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\left|\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} Y_{\mathbf{k}}\right| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right).$$

A gyenge domináltság és a 2.2.1. lemma miatt

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|^{1/r}\right) \le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{P}\left(|X_{\mathbf{k}}| > |\mathbf{n}|^{1/r}\right) \le \\ \le c \sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}\left(|X| > |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty.$$

Legyen $0 < \delta < 1 - r$. Ekkor a Markov-egyenlőtlenség, a c_p-egyenlőtlenség és a 2.2.3. lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\left|\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} Y_{\mathbf{k}}\right| > \varepsilon |\mathbf{n}|^{1/r}\right) \le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \frac{1}{|\mathbf{n}|^{(r+\delta)/r}} \frac{1}{\varepsilon^{r+\delta}} \mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} Y_{\mathbf{k}}\right|^{r+\delta} \le \\ \le \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \frac{1}{|\mathbf{n}|^{(r+\delta)/r}} \frac{1}{\varepsilon^{r+\delta}} \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} \mathrm{E}\left|Y_{\mathbf{k}}\right|^{r+\delta} \le c \sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{-(r+\delta)/r} \mathrm{E}\left|X'\right|^{r+\delta},$$

ahol $X' = X\mathrm{I}(|X| \le |\mathbf{n}|^{1/r}) + |\mathbf{n}|^{1/r}\mathrm{I}(|X| > |\mathbf{n}|^{1/r})$. Könnyen látható, hogy

$$\mathrm{E}|X'|^{r+\delta} = \int_0^{|\mathbf{n}|^{(r+\delta)/r}} \mathrm{P}\left(|X|^{r+\delta} > x\right) \mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 |\mathbf{n}|^{(r+\delta)/r} s^{\delta/r} \frac{r+\delta}{r} \mathrm{P}\left(|X| > |\mathbf{n}|^{1/r} s^{1/r}\right) \mathrm{d}s.$$

Most legyen $0 < \varrho < \delta/r$ és $\varrho_0 = \varrho/(d-1)$, ha $d > 1$. Ekkor az előző egyenlőtlenség és a 2.2.1. lemma bizonyításában szereplő egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\left|\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} Y_{\mathbf{k}}\right| > \varepsilon|\mathbf{n}|^{1/r}\right) \le c\int_0^1 s^{\delta/r} \sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}\left(|X| > |\mathbf{n}|^{1/r} s^{1/r}\right) \mathrm{d}s \le$$

$$\le c\int_0^1 s^{\delta/r} \mathrm{E}\left(|X|^r s^{-1}\left(\log^+(|X|^r s^{-1})\right)^{d-1}\right) \mathrm{d}s \le$$

$$\le c\int_0^1 s^{\delta/r} \mathrm{E}\left(|X|^r s^{-1}\left(\log^+|X|^r + s^{-\varrho_0}\right)^{d-1}\right) \mathrm{d}s \le$$

$$\le c\int_0^1 s^{\delta/r-1-\varrho} \mathrm{E}\left(|X|^r\left(\log^+|X|\right)^{d-1}\right) \mathrm{d}s < \infty.$$

Az itt kapott végeredmény érvényes $d = 1$-re is. Így a tétel első állítását bizonyítottuk. A második állítás ebből következik a 2.3.1. tétel alapján. Megjegyezzük, hogy itt (ellentétben a 2.4.1. tétellel) a 2.3.1. tételben $b_{\mathbf{n}} \equiv 0$, azaz a korlátossága automatikusan teljesül. □

Az alábbi következmény Kruglov (1994) [44] Theorem 3 kiterjesztése.

2.5.2. következmény. (Fazekas és Tómács (1998) [29] Corollary 5.2.) *Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata és $0 < r < 1$. A következő állítások ekvivalensek:*

1) $\mathrm{E}|X_{\mathbf{1}}|^r\left(\log^+|X_{\mathbf{1}}|\right)^{d-1} < \infty$,

2) $\sum_{\mathbf{n}} |X_{\mathbf{n}}|/|\mathbf{n}|^{1/r} < \infty$ *majdnem biztosan,*

3) $|\mathbf{n}|^{-1/r} S_{\mathbf{n}} \to 0$ $(|\mathbf{n}|\to\infty)$ *majdnem biztosan,*

4) *bármely* $\varepsilon > 0$ *esetén*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{n}|} \mathrm{P}\left(\sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |X_{\mathbf{k}}| > \varepsilon|\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy 3) teljesül. Ekkor a 2.2.4. lemma miatt

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}\left(|X_{\mathbf{1}}| \ge |\mathbf{n}|^{1/r}\right) < \infty.$$

Így 1) teljesül a 2.2.1. lemma alapján.

1)$\Rightarrow$4) a 2.5.1. tételből adódik. A 4)$\Rightarrow$3) implikáció a 2.3.1. tétel következménye.

Most teljesüljön 1). Legyen $Y_{\mathbf{n}} := X_{\mathbf{n}} \mathrm{I}(|X_{\mathbf{n}}| \leq |\mathbf{n}|^{1/r})$. Ekkor a 2.2.2. lemmából kapjuk, hogy $\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{E}\left||\mathbf{n}|^{-1/r} Y_{\mathbf{n}}\right| < \infty$. Azaz $\sum_{\mathbf{n}} |\mathbf{n}|^{-1/r} |Y_{\mathbf{n}}|$ integrálható, vagyis majdnem biztosan véges. $\sum_{\mathbf{n}} \mathrm{P}(X_{\mathbf{n}} \neq Y_{\mathbf{n}}) < \infty$ a 2.2.1. lemma alapján. Ezekből a Borel—Cantelli lemma alapján következik 2).

Végül 2)$\Rightarrow$3) következik a 2.2.5. lemmából. □

2.5.3. megjegyzés. A 2.5.2. következményben 1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3) továbbá 1)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$3) teljesül páronkénti függetlenség nélkül is, de 3)$\Rightarrow$1) nem.

3. A többindexes valószínűségi változókra vonatkozó nagy számok erős törvényeinek egy általános megközelítése

Ebben a részben Fazekas és Klesov (2000) [23] tételeit terjesztjük ki a többindexes esetre. Az eredmények Noszály és Tómács (2000) [55], illetve részben Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] cikkekben lettek publikálva.

Ezen rész központja a 3.2.3. tétel, amely egy maximális egyenlőtlenségből vezeti le a nagy számok erős törvényét. Maximális egyenlőtlenségek igazolásával nem foglalkozunk, hanem csupán a már ismertekből vezetünk le nagy számok törvényeit.

3.1. Jelölések

Legyen $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza, $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $d \in \mathbb{N}$ rögzített. $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$. A $\mathbf{k}, \mathbf{n}, \ldots \in \mathbb{N}_0^d$ rácspontok koordinátáit jelöljük ugyanazon indexelt betűkkel, azaz például $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. A $\leq$, max, min, $\to$ legyenek értelmezve koordinátánként. Például $\mathbf{n} \to \infty$ azt jelenti, hogy $n_i \to \infty$ minden $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén. Legyen $\sum_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d}$, $|\mathbf{n}| := n_1 \cdots n_d$ és $|\log \mathbf{n}| := \prod_{i=1}^d \log^+ n_i$, ahol $\log^+ x = \log x$, ha $x \geq e$ és $\log^+ x = 1$, ha $x < e$.

$\Delta a_{\mathbf{n}}$ jelölje az $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ sorozat *differenciasorozatát*, azaz $\sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} \Delta a_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{n}}$. Azt mondjuk, hogy $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *szorzat típusú sorozat*, ha léteznek olyan $a_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \ldots, d\}$ számok, melyekre $a_{\mathbf{n}} = \prod_{i=1}^d a_{n_i}^{(i)}$ teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$-re. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\{a_{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ nemcsökkenő, illetve nem korlátos, ha $a_n^{(i)}$, $n \in \mathbb{N}_0$ nemcsökkenő, illetve nem korlátos sorozatok minden $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén.

Az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata esetén legyen $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$. Amennyiben az összegzés vagy maximum képzés üres halmazon történik, akkor ezalatt nullát értünk. (Azaz $\sum_{\mathbf{n} \in \emptyset} X_{\mathbf{n}} = \max_{\mathbf{n} \in \emptyset} X_{\mathbf{n}} = 0$.)

3.2. Fő eredmény

Fő eredményünk, a 3.2.3. tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi tételre és lemmára. A következő tétel Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 1.1 általánosítása.

3.2.1. tétel. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Theorem 3.1 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Proposition 1.) *Legyen* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *és* $r > 0$ *rögzítettek. Legyen* $\{a_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *nemnegatív valós értékű többindexes sorozat, továbbá* $\{b_{\mathbf{m}}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő sorozat. Ha*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{l}\le\mathbf{m}} |S_{\mathbf{l}}|^r\right) \le \sum_{\mathbf{l}\le\mathbf{m}} a_{\mathbf{l}}$$

teljesül minden $\mathbf{m} \le \mathbf{n}$ *esetén, akkor*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} \left|\frac{S_{\mathbf{m}}}{b_{\mathbf{m}}}\right|^r\right) \le 4^d \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{m}}}{b_{\mathbf{m}}^r}.$$

Bizonyítás. Feltehető, hogy $b_{\mathbf{1}} = 1$. Legyen $c > 1$ tetszőleges. Definiáljuk a következő halmazokat:

$$A_{\mathbf{i}} := \left\{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{j} \le \mathbf{n} \text{ és } c^{i_k} \le b_{j_k}^{(k)} < c^{i_k+1},\ k = 1,\ldots,d\right\}, \quad \mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^d.$$

Legyen $D_{\mathbf{i}} := \sum_{\mathbf{j}\in A_{\mathbf{i}}} a_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{k} := \max\{\mathbf{i} : A_{\mathbf{i}} \ne \emptyset\}$. Legyen $\mathbf{m}_{\mathbf{i}} := \max\{\mathbf{j} : \mathbf{j} \in A_{\mathbf{i}}\}$, ha $A_{\mathbf{i}} \ne \emptyset$, különben $\mathbf{m}_{\mathbf{i}} := \mathbf{0}$. Mivel $\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{m} \le \mathbf{n}\} \subseteq \bigcup_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} A_{\mathbf{i}}$, ezért

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} \left|\frac{S_{\mathbf{m}}}{b_{\mathbf{m}}}\right|^r\right) \le \sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i}\in A_{\mathbf{j}}} \left|\frac{S_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{i}}}\right|^r\right).$$

Az $A_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{m}_{\mathbf{i}}$ és $D_{\mathbf{i}}$ definíciója miatt

$$\sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i}\in A_{\mathbf{j}}} \left|\frac{S_{\mathbf{i}}}{b_{\mathbf{i}}}\right|^r\right) \le \sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \left(\prod_{m=1}^{d} c^{-rj_m}\right) \mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i}\in A_{\mathbf{j}}} |S_{\mathbf{i}}|^r\right) \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \left(\prod_{m=1}^{d} c^{-rj_m}\right) \mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}_{\mathbf{j}}} |S_{\mathbf{i}}|^r\right) \le \sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \left(\prod_{m=1}^{d} c^{-rj_m}\right) \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}_{\mathbf{j}}} a_{\mathbf{i}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \left(\prod_{m=1}^{d} c^{-rj_m}\right) \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{j}} D_{\mathbf{i}} \le \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} D_{\mathbf{i}} \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{j}\le\mathbf{k}} \left(\prod_{m=1}^{d} c^{-rj_m}\right) \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} D_{\mathbf{i}} \prod_{m=1}^{d} \left(\sum_{j=i_m}^{k_m} c^{-rj}\right) \le \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}} D_{\mathbf{i}} \prod_{m=1}^{d} \frac{c^{-ri_m}}{1-c^{-r}} \le$$

$$\leq \left(\frac{c^r}{1-c^{-r}}\right)^d \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{k}} D_{\mathbf{i}} \prod_{m=1}^{d} c^{-r(i_m+1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{c^r}{1-c^{-r}}\right)^d \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{k}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in A_{\mathbf{i}}} a_{\mathbf{j}}\right) \prod_{m=1}^{d} c^{-r(i_m+1)} \leq$$

$$\leq \left(\frac{c^r}{1-c^{-r}}\right)^d \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{j}\in A_{\mathbf{i}}} \frac{a_{\mathbf{j}}}{b_{\mathbf{j}}^r}.$$

Viszont $\inf_{c>1}\left(\frac{c^r}{1-c^{-r}}\right) = \frac{(2^{1/r})^r}{1-(2^{1/r})^{-r}} = 4$, így készen vagyunk. □

A következő lemma Fazekas és Klesov (2000) [23] Lemma 2.2 többindexes változata.

3.2.2. lemma. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Lemma 3.1 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Lemma 2.) *Legyen $r>0$ rögzített, $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d\}$ nemnegatív valós értékű többindexes sorozat, továbbá $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d\}$ pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő és nem korlátos sorozat. Tegyük fel, hogy $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}}^r<\infty$. Ekkor létezik $\{\beta_{\mathbf{n}}, \mathbf{n}\in\mathbb{N}_0^d\}$ pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő és nem korlátos sorozat úgy, hogy*

$$\frac{\beta_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \to 0 \quad (\mathbf{n}\to\infty) \quad \textit{és} \quad \sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n}}}{\beta_{\mathbf{n}}^r} < \infty.$$

Bizonyítás. Elég csak az $r=1$ esetet vizsgálni. Ha $d=1$, akkor a bizonyítást lásd Fazekas és Klesov (2000) [23] Lemma 2.2. Most legyen $d\geq 2$. Legyen

$$T_{n_1}^{(1)} := \sum_{n_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{a_{\mathbf{n}}}{\prod_{m=2}^{d} b_{n_m}^{(m)}}.$$

Ekkor

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{b_{n_1}^{(1)}} T_{n_1}^{(1)} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} < \infty.$$

Alkalmazva az előbb említett lemmát, létezik egy pozitív valós értékű nemcsökkenő és nem korlátos $\{\beta_n^{(1)}, n\in\mathbb{N}_0\}$ sorozat úgy, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n^{(1)}}{b_n^{(1)}} = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_{n_1}^{(1)}} T_{n_1}^{(1)} < \infty.$$

Legyen $k < d$ és tegyük fel, hogy fenti eljárással a $\beta_n^{(m)}$ sorozatok már meghatározottak minden $m = 1, \dots, k$ esetén. A $\beta_n^{(k+1)}$ meghatározása úgy történik, hogy a fenti eljárásba az 1 és (1) indexek helyére $k+1$-et illetve $(k+1)$-et írunk, továbbá $b_{\mathbf{n}}$ helyére $\prod_{m=1}^{k} \beta_{n_m}^{(m)} \prod_{m=k+1}^{d} b_{n_m}^{(m)}$ kerül. Ekkor $\beta_{\mathbf{n}} := \prod_{m=1}^{d} \beta_{n_m}^{(m)}$ választással kapjuk a lemmát. □

A következő tétel Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 2.1 általánosítása.

3.2.3. tétel. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Theorem 3.2 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Theorem 3.) *Legyen $r > 0$ rögzített, $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ nemnegatív valós értékű többindexes sorozat, továbbá $\{b_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ pozitív valós értékű szorzat típusú nemcsökkenő és nem korlátos sorozat. Tegyük fel, hogy $\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}}^r < \infty$ és*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} |S_{\mathbf{m}}|^r\right) \le \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} a_{\mathbf{m}}$$

minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén. Ekkor

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Bizonyítás. Legyen $\beta_{\mathbf{n}}$ olyan, amely a 3.2.2. lemmában szerepel. Alkalmazva a 3.2.1. tételt,

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} \left|\frac{S_{\mathbf{m}}}{\beta_{\mathbf{m}}}\right|^r\right) \le 4^d \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{m}}}{\beta_{\mathbf{m}}^r}$$

minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén. Így

$$\mathrm{E}\left(\sup_{\mathbf{n}} \left|\frac{S_{\mathbf{n}}}{\beta_{\mathbf{n}}}\right|^r\right) \le 4^d \sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n}}}{\beta_{\mathbf{n}}^r} < \infty,$$

melyből következik, hogy $\sup_{\mathbf{n}} |S_{\mathbf{n}}/\beta_{\mathbf{n}}|^r < \infty$ majdnem biztosan. Mivel

$$\left|\frac{S_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}}\right| = \frac{\beta_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \left|\frac{S_{\mathbf{n}}}{\beta_{\mathbf{n}}}\right| \le \frac{\beta_{\mathbf{n}}}{b_{\mathbf{n}}} \sup_{\mathbf{k}} \left|\frac{S_{\mathbf{k}}}{\beta_{\mathbf{k}}}\right|,$$

ezért $\beta_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}} \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ miatt igaz az állítás. □

3.2.4. definíció. A $g:\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ függvényt *szuperadditívnak* nevezzük, ha

$$g\big(\mathbf{i},(j_1,\dots,j_{m-1},k,j_{m+1},\dots,j_d)\big)+$$
$$+\,g\big((i_1,\dots,i_{m-1},k+1,i_{m+1},\dots,i_d),\mathbf{j}\big) \le g(\mathbf{i},\mathbf{j})$$

bármely $\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \le \mathbf{j}$, $m = 1,\dots,d$ és $i_m \le k < j_m$ esetén.

Azt mondjuk, hogy az $\{X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata *szuperadditív r-edik momentum struktúrával rendelkezik*, ha minden $\mathbf{i} \le \mathbf{j}$ $(\mathbf{i},\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d)$ esetén

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} X_\mathbf{k}\right|^r \le g^\alpha(\mathbf{i},\mathbf{j}), \tag{3.2.1}$$

ahol $g:\mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \to \mathbb{R}$ szuperadditív függvény, $\alpha > 1$ és $r > 0$.

Az alábbi tétel bizonyítását lásd Móricz (1983) [53] Corollary 1 vagy (1977) [52] Theorem 7.

3.2.5. tétel. *Az $\{X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozatának legyen szuperadditív r-edik momentum struktúrája, ahol $r > 0$ és $\alpha > 1$. Ekkor létezik $A_{r,\alpha,d}$ konstans, hogy minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{n}} |S_\mathbf{k}|^r\right) \le A_{r,\alpha,d}\, g^\alpha(\mathbf{1},\mathbf{n}).$$

3.2.6. megjegyzés. Móricz az előző tételt $r \ge 1$ esetén látta be, és csak utal rá, hogy a $0 < r < 1$ eset könnyű. Valóban, ugyanis ebben az esetben $|.|^r$ norma, így

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} X_\mathbf{k}\right|^r \le \mathrm{E}\left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} |X_\mathbf{k}|^r\right) = \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} \mathrm{E}|X_\mathbf{k}|^r \le$$
$$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} g^\alpha(\mathbf{k},\mathbf{k}) \le \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}} g(\mathbf{k},\mathbf{k})\right)^\alpha \le g^\alpha(\mathbf{i},\mathbf{j}).$$

Ezt felhasználva pedig kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{j}} |S_\mathbf{k}|^r\right) \le \mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{k}\le\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{l}\le\mathbf{k}} |X_\mathbf{l}|^r\right) \le \mathrm{E}\left(\sum_{\mathbf{l}\le\mathbf{j}} |X_\mathbf{l}|^r\right) \le g^\alpha(\mathbf{1},\mathbf{j}).$$

3.3. Logaritmikus súlyozású összegek

A logaritmikus súlyozású összegekre vonatkozó nagy számok erős törvényét például a központi határeloszlás-tétel majdnem biztos alakjainak bizonyítására használják (lásd Móri (1993) [54], Chuprunov és Fazekas (1999) [11].) Az alábbi többindexes változatot (3.3.2. tétel) azonban nem sikerült ilyen célra használni. A többindexes majdnem biztos határeloszlás-tétel bizonyításához Fazekas és Rychlik (2001) [28] cikkben egy másik nagy számok erős törvényét használ.

A következő lemma Fazekas és Klesov (2000) [23] Lemma 9.1 kiterjesztése többindexes esetre. (A következőkben $[x]$ az x szám egész részét jelenti.)

3.3.1. lemma. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Lemma 4.2 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Lemma 6.)
(a) *Legyen* $n \in \mathbb{N}$ *és* $0 < \beta < 1$. *Ekkor létezik* $C_{d,\beta}$ *konstans, hogy*

$$\sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{\left[\frac{n}{m_1}\right]} \cdots \sum_{m_d=1}^{\left[\frac{n}{m_1 m_2 \cdots m_{d-1}}\right]} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1-\beta}} \le C_{d,\beta}\, n^{\beta} (\log^+ n)^{d-1}.$$

(b) *Legyen* $0 < \beta < 1$, $1 < \gamma < 2$, $\mathbf{i}, \mathbf{m}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \le \mathbf{m} \le \mathbf{j}$. *Ekkor létezik* $C_{d,\beta}$ *konstans, hogy*

$$\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{m} \le \mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j} \\ |\mathbf{k}| \le |\mathbf{m}|}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1+\beta} (\log^+ |\mathbf{m}|)^{d-1} |\mathbf{k}|^{1-\beta}} \le C_{d,\beta} \left(\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{m} \le \mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|} \right)^{\gamma}.$$

Bizonyítás. (a) A bizonyítást d-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Mivel $\sum_{m=1}^{n} m^{\beta-1} \le \int_0^n x^{\beta-1} \mathrm{d}x = n^{\beta}/\beta$, ezért az állítás $d = 1$-re teljesül. Most tegyük fel, hogy $d = f$-re igaz az állítás. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $0 < \beta < 1$. Ekkor

$$\sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{\left[\frac{n}{m_1}\right]} \cdots \sum_{m_{f+1}=1}^{\left[\frac{n}{m_1 m_2 \cdots m_f}\right]} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1-\beta}} =$$

$$= \sum_{m_1=1}^{n} \frac{1}{m_1^{1-\beta}} \sum_{m_2=1}^{\left[\frac{n}{m_1}\right]} \cdots \sum_{m_{f+1}=1}^{\left[\frac{n}{m_1 m_2 \cdots m_f}\right]} \frac{1}{(m_2 \cdots m_f)^{1-\beta}} \le$$

$$\le C_{f,\beta} \sum_{m_1=1}^{n} \frac{1}{m_1^{1-\beta}} \left[\frac{n}{m_1}\right]^\beta \left(\log^+ \left[\frac{n}{m_1}\right]\right)^{f-1} \le$$

$$\le C_{f,\beta}\, n^\beta (\log^+ n)^{f-1} \sum_{m_1=1}^{n} \frac{1}{m_1} \le C_{f,\beta}\, n^\beta (\log^+ n)^{f-1} C \log^+ n.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\left[\frac{1}{c}\left[\frac{a}{b}\right]\right] = \left[\frac{a}{bc}\right]$, ha $a, b, c \in \mathbb{N}$.
(b) Ha $\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|} \le 1$, akkor

$$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}\\ |\mathbf{k}|\le|\mathbf{m}|}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1+\beta}(\log^+|\mathbf{m}|)^{d-1}|\mathbf{k}|^{1-\beta}} \le \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}\\ |\mathbf{k}|\le|\mathbf{m}|}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1+\beta}|\mathbf{k}|^{1-\beta}} \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}\\ |\mathbf{k}|\le|\mathbf{m}|}} \frac{1}{|\mathbf{m}||\mathbf{k}|} \le \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|}\right)^2 \le \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|}\right)^\gamma.$$

$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|} > 1$ esetben felhasználva az (a) részt és azt, hogy

$$\sum_{m_1=1}^{n} \sum_{m_2=1}^{\left[\frac{n}{m_1}\right]} \cdots \sum_{m_d=1}^{\left[\frac{n}{m_1 m_2 \cdots m_{d-1}}\right]} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1-\beta}} = \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\mathbb{N}^d\\ |\mathbf{m}|\le n}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1-\beta}},$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1+\beta}(\log^+|\mathbf{m}|)^{d-1}} \sum_{\substack{\mathbf{i}\le\mathbf{k}\le\mathbf{j}\\ |\mathbf{k}|\le|\mathbf{m}|}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^{1-\beta}} \le$$

$$\le C_{d,\beta} \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|^{1+\beta}(\log^+|\mathbf{m}|)^{d-1}} |\mathbf{m}|^\beta (\log^+|\mathbf{m}|)^{d-1} =$$

$$= C_{d,\beta} \sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|} \le C_{d,\beta} \left(\sum_{\mathbf{i}\le\mathbf{m}\le\mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{m}|}\right)^\gamma. \qquad \square$$

Az alábbi tétel Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 9.1 kiterjesztése többindexes esetre.

3.3.2. tétel. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Theorem 4.2 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Theorem 7.) *Tegyük fel, hogy* *az* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *valószínűségi változók többindexes sorozatára valamely* $C > 0$ *és* $\beta > 0$ *esetén*

$$|\mathrm{E}(X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}})| \le C \left(\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{l}|}\right)^{\beta} \frac{1}{(\log^+ |\mathbf{l}|)^{d-1}}$$

minden $\mathbf{k} \le \mathbf{l}$ $(\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d)$ *esetén. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Bizonyítás. A bizonyítást elég elvégezni $0 < \beta < 1$ esetben. Legyen $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{i} \le \mathbf{j}$. A feltételt használva kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}\right|^2 \le 2 \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{l} \le \mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j} \\ |\mathbf{k}| \le |\mathbf{l}|}} \frac{1}{|\mathbf{k}||\mathbf{l}|} |\mathrm{E}(X_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{l}})| \le$$

$$\le 2C \sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{l} \le \mathbf{j}} \sum_{\substack{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j} \\ |\mathbf{k}| \le |\mathbf{l}|}} \frac{1}{|\mathbf{k}|^{1-\beta} |\mathbf{l}|^{1+\beta} (\log^+ |\mathbf{l}|)^{d-1}}.$$

Legyen $1 < \gamma < 2$. A 3.3.1. (b) lemmából következik, hogy

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{k} \le \mathbf{j}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}\right|^2 \le D_{d,\beta} \left(\sum_{\mathbf{i} \le \mathbf{l} \le \mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{l}|}\right)^{\gamma},$$

ahol $D_{d,\beta} > 0$. Így a 3.2.5. tétel alapján

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i} \le \mathbf{j}} \left|\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{i}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}\right|^2\right) \le C_{d,\beta,\gamma} \left(\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{k}|}\right)^{\gamma}$$

minden $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ esetén, ahol $C_{d,\beta,\gamma} > 0$. A Hölder-egyenlőtlenség segítségével kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{i} \le \mathbf{j}} \left|\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{i}} \frac{X_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|}\right|^{2/\gamma}\right) \le (C_{d,\beta,\gamma})^{1/\gamma} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{j}} \frac{1}{|\mathbf{k}|}$$

minden $\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d$ esetén. Mivel

$$\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \frac{1}{|\mathbf{n}||\log \mathbf{n}|^{2/\gamma}} < \infty,$$

így alkalmazhatjuk a 3.2.3. tételt, melyből kapjuk az állítást. □

Megjegyezzük, hogy Fazekas és Rychlik (2001) [28] cikkben a fenti 3.3.2. tételhez hasonló állítás található. Ott a feltétel részben erősebb, hisz egyenletesen korlátos $X_{\mathbf{k}}$-kra vonatkozik, részben gyengébb, hisz az $\frac{1}{(\log^+ |\mathbf{l}|)^{d-1}}$ tényező nem szerepel. Az a tétel már alkalmas a majdnem biztos központi határeloszlás-tétel bizonyításának céljára. Az ottani bizonyítás közvetlen.

3.4. Szuperadditív momentum struktúrával rendelkező sorozatok

Szükségünk lesz a következő technikai jellegű lemmára.

3.4.1. lemma. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Lemma 4.1 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Lemma 10.) *Legyen* $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d\}$ *nemnegatív sorozat,* $\Lambda_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}} a_{\mathbf{m}}$ *és* $\alpha > 0$*. Legyen* $b_{\mathbf{n}} := 1/|\mathbf{n}|^{\alpha}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$ *ha* $|\mathbf{n}| \neq 0$*, különben pedig legyen* $b_{\mathbf{n}} := 0$*. Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} (-1)^d \Lambda_{\mathbf{n}} \Delta b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} < \infty,$$

esetén

$$\sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} b_{\mathbf{n}} < \infty.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}_{\mathbf{nm}} := \sum_{k=1}^d (n_k - m_k)$, ahol $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$. Legyen

$$\mathcal{E}_{\mathbf{n}} := \left\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d : 0 \le n_k - m_k \le 1,\ k = 1, \dots, d \text{ és } \mathcal{K}_{\mathbf{nm}} \text{ páros}\right\},$$
$$\mathcal{O}_{\mathbf{n}} := \left\{\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d : 0 \le n_k - m_k \le 1,\ k = 1, \dots, d \text{ és } \mathcal{K}_{\mathbf{nm}} \text{ páratlan}\right\},$$

ahol $\mathbf{n} \in \mathbb{N}_0^d$. Ekkor

$$\Delta b_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{m}\in\mathcal{E}_{\mathbf{n}}} b_{\mathbf{m}} + (-1)^d \sum_{\mathbf{m}\in\mathcal{O}_{\mathbf{n}}} b_{\mathbf{m}}.$$

Ebből következik, hogy $(-1)^d \Delta b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} = \prod_{k=1}^d \left(\frac{1}{n_k^\alpha} - \frac{1}{(n_k+1)^\alpha}\right)$. Mivel $\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq \text{konst.}/n^{\alpha+1}$, így

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{\Lambda_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{\alpha+1}} < \infty.$$

Elemi számolással kapjuk, hogy

$$\sum_{\mathbf{k}\leq 2\mathbf{n}} \frac{\Lambda_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^{\alpha+1}} \geq \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{l}\leq 2\mathbf{k}} \frac{1}{|\mathbf{l}|^{\alpha+1}} \geq \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} a_{\mathbf{k}} \frac{|\mathbf{k}|}{|2\mathbf{k}|^{\alpha+1}} = \frac{1}{2^{d(\alpha+1)}} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^{\alpha}}.$$

Ebből már következik az állítás.

A következő tétel Fazekas és Klesov (2000) [23] Theorem 8.1 általánosítása, mely egy Marcinkiewicz—Zygmund típusú nagy számok erős törvénye szuperadditív momentum struktúrájú, többindexes valószínűségi változókra.

3.4.2. tétel. (Fazekas, Klesov, Noszály és Tómács (1999) [24] Theorem 4.1 illetve Noszály és Tómács (2000) [55] Proposition 11.) *Legyen $r > 0$, $\alpha > 1$ és tegyük fel, hogy $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata szuperadditív r-edik momentum struktúrával rendelkezik. Ha $\Delta g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n}) \geq 0$ minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re, és valamely $q > 0$ esetén*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^{1+r/q}} < \infty \tag{3.4.1}$$

teljesül, akkor

$$\frac{S_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|^{1/q}} \to 0 \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem biztosan.}$$

Bizonyítás. A 3.2.5. tétel alapján, minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\leq\mathbf{n}} |S_{\mathbf{m}}|^r\right) \leq A_{r,\alpha,d}\, g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n}).$$

Legyen $b_{\mathbf{n}} := 1/|\mathbf{n}|^{r/q}$. Mivel $(-1)^d \Delta b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} = \prod_{m=1}^d \left(\frac{1}{n_m^{r/q}} - \frac{1}{(n_m+1)^{r/q}}\right) \leq \text{konst.}/|\mathbf{n}|^{1+r/q}$, így (3.4.1) miatt

$$\sum_{\mathbf{n}} (-1)^d g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n}) \Delta b_{\mathbf{n}+\mathbf{1}} < \infty.$$

Végül alkalmazva a 3.4.1. lemmát és a 3.2.3. tételt kapjuk az állítást. A $\Delta g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n})$, ahol a differencia képzés g második argomentuma szerint történik, a $g^\alpha(\mathbf{1}, \mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{i}\leq\mathbf{n}} a_{\mathbf{i}}$, $a_{\mathbf{i}} \geq 0$ előállítást garantálja. □

3.5. Brunk—Prohorov típusú tételek

3.5.1. definíció. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező, $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata és $\mathcal{F}_{\mathbf{n}} \subseteq \mathcal{F}$ minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén σ-algebra. Tegyük fel, hogy $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$ esetén $\mathcal{F}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathbf{n}}$. Ha $X_{\mathbf{n}}$ $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$-mérhető minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$-re, $\mathrm{E}X_{\mathbf{1}} = 0$, továbbá minden $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$ esetén $\mathrm{E}(X_{\mathbf{n}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ *martingáldifferencia.*

A következő feltételt — mely széles körben használt a többindexes martingálok elméletében, lásd például Fazekas (1983) [18] — többször meg fogjuk követelni.

$$\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{m}}) \Big| \mathcal{F}_{\mathbf{n}}\Big) = \mathrm{E}\left(X_{\mathbf{l}} \mid \mathcal{F}_{\min(\mathbf{m},\mathbf{n})}\right) \tag{3.5.1}$$

minden $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén.

Használni fogjuk a Doob- és Burkholder-egyenlőtlenségek d-indexes változatait.

3.5.2. lemma. (Noszály és Tómács (2000) [55] Lemma 12.)

(a) (Doob-féle L_p-egyenlőtlenség) *Legyen $p > 1$ és tegyük fel, hogy $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ martingál* (3.5.1) *tulajdonságú. Ekkor minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén*

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} |X_{\mathbf{m}}|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{pd} \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^p.$$

(b) (Hincsin-egyenlőtlenség) Legyen $p \geq 2$. Ekkor létezik olyan $C_{p,d}$ konstans, hogy tetszőleges $\{a_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ többindexes valós számsorozatra

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{m_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{m_d=1}^{n_d} r_{m_1}(t_1) \cdots r_{m_d}(t_d) a_{(m_1,\ldots,m_d)} \right|^p dt_1 \cdots dt_d \leq$$
$$\leq C_{p,d} \left(\sum_{m_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{m_d=1}^{n_d} a^2_{(m_1,\ldots,m_d)} \right)^{p/2}$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ esetén, ahol r_n a Rademacher-rendszer $[0,1]$-en.

(c) (Burkholder-egyenlőtlenség) *Legyen $p > 1$. Ekkor létezik $D_{p,d} > 0$ konstans úgy, hogy bármely* (3.5.1) *tulajdonságú $(X_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ martingáldifferencia esetén*

$$\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^{2p} \leq D_{p,d} \mathrm{E}\left(\sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} X^2_{\mathbf{m}}\right)^p$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$*-re.*

Bizonyítás. (a) d-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $d = 1$ esetben az állítás az eredeti Doob-egyenlőtlenségből következik. Most tegyük fel, hogy $d = f$ esetén igaz az állítás. Legyen $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{f+1}) \in \mathbb{N}^{f+1}$ rögzített. Bevezetjük a következő jelöléseket.

$$\mathbf{n}^* := (n_2, \ldots, n_{f+1}) \in \mathbb{N}^f, \quad Y_n := \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} |X_{(n,\mathbf{m})}| \quad \text{és} \quad \mathcal{B}_n = \mathcal{F}_{(n,\mathbf{n}^*)},$$

ahol $n = 1, 2, \ldots, n_1$. Ekkor Y_n $\mathcal{B}_n$-mérhető. Megmutatjuk, hogy $(Y_n, \mathcal{B}_n)$ $(n \leq n_1)$ szubmartingál. Legyen $m \leq n \leq n_1$. A feltételes várható érték tulajdonságai és (3.5.1) miatt

$$\mathrm{E}\big(\max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} |X_{(n,\mathbf{m})}| \mid \mathcal{F}_{(m,\mathbf{m})}\big) \geq \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} \mathrm{E}\big(|X_{(n,\mathbf{m})}| \mid \mathcal{F}_{(m,\mathbf{m})}\big) \geq$$

$$\geq \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} \big|\mathrm{E}\big(X_{(n,\mathbf{m})} \mid \mathcal{F}_{(m,\mathbf{n}^*)}\big)\big| = \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} \Big|\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\big(X_{(n,\mathbf{m})} \mid \mathcal{F}_{(n,\mathbf{m})}\big) \Bigm| \mathcal{F}_{(m,\mathbf{n}^*)}\Big)\Big| =$$

$$= \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} \big|\mathrm{E}\big(X_{(n,\mathbf{m})} \mid \mathcal{F}_{(m,\mathbf{m})}\big)\big| = \max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} |X_{(m,\mathbf{m})}|.$$

Legyen $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^f$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*$ esetén $Z_{\mathbf{m}} := X_{(n_1,\mathbf{m})}$ és $\mathcal{C}_{\mathbf{m}} := \mathcal{F}_{(n_1,\mathbf{m})}$. Ekkor $(Z_{\mathbf{m}}, \mathcal{C}_{\mathbf{m}})$, $\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*$, (3.5.1) tulajdonságú martingál. Az Y_n nemnegatív szubmartingálra alkalmazva az indukciós feltevést és a Doob-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\Big(\max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} |X_{\mathbf{m}}|^p\Big) = \mathrm{E}\Big(\max_{m \leq n_1} Y_m^p\Big) \leq \frac{p}{p-1} \mathrm{E} Y_{n_1}^p = \frac{p}{p-1} \mathrm{E}\Big(\max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}^*} |Z_{\mathbf{m}}|^p\Big) \leq$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{pf} \mathrm{E}|Z_{\mathbf{n}^*}|^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p(f+1)} \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^p.$$

(b) Megjegyezzük, hogy a következőkben többször is fogjuk használni Fubini tételét anélkül, hogy ezt külön megemlítenénk. Tegyük fel, hogy $d = f$ esetén igaz az állítás. Ekkor Hincsin eredeti egyenlőtlenségéből (lásd például Chow és Teicher [10]) kapjuk, hogy van olyan $C_p > 0$ konstans, melyre

$$\int_0^1 \left| \sum_{m_1=1}^{n_1} r_{m_1}(t_1) \Bigg(\sum_{m_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{m_{f+1}=1}^{n_{f+1}} r_{m_2}(t_2) \cdots r_{m_{f+1}}(t_{f+1}) a_{(m_1,\ldots,m_{f+1})} \Bigg) \right|^p dt_1 \leq$$

$$\leq C_p \left(\sum_{m_1=1}^{n_1} \left(\sum_{m_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{m_{f+1}=1}^{n_{f+1}} r_{m_2}(t_2) \cdots r_{m_{f+1}}(t_{f+1}) a_{(m_1,\ldots,m_{f+1})} \right)^2 \right)^{p/2} =$$

$$= C_p \left(\sum_{m_1=1}^{n_1} \Big(I(t_2, \ldots, t_{f+1}) \Big)^2 \right)^{p/2},$$

ahol

$$I(t_2,\ldots,t_{f+1})=\sum_{m_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{m_{f+1}=1}^{n_{f+1}} r_{m_2}(t_2)\ldots r_{m_{f+1}}(t_{f+1})a_{(m_1,\ldots,m_{f+1})}.$$

Az $L_{\frac{p}{2}}$-térbeli háromszög-egyenlőtlenségből

$$C_p\int_0^1\cdots\int_0^1\bigg(\sum_{m_1=1}^{n_1}\Big(I(t_2,\ldots,t_{f+1})\Big)^2\bigg)^{\frac{p}{2}}dt_2\cdots dt_{f+1}\le$$
$$\le C_p\bigg(\sum_{m_1=1}^{n_1}\Big(\int_0^1\cdots\int_0^1|I(t_2,\ldots,t_{f+1})|^p dt_2\cdots dt_{f+1}\Big)^{2/p}\bigg)^{p/2}.$$

A fenti kifejezést tudjuk majorálni indukció segítségével az alábbival.

$$C_pC_{p,f}\bigg(\sum_{m_1=1}^{n_1}\sum_{m_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{m_2=1}^{n_2}a^2_{(m_1,\ldots,m_{f+1})}\bigg)^{\frac{p}{2}}.$$

(c) A következőkben Mètraux (1978) [50] Theorem 1 bizonyításának módszerét alkalmazzuk. Legyen $u^{(i)}:\mathbb{N}\to\{-1,1\}$ $(i=1,\ldots,d)$. Legyen $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$ rögzített, $T_\mathbf{n}:=\sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}u^{(1)}_{m_1}\cdots u^{(d)}_{m_d}X_\mathbf{m}$, továbbá

$$Y_m:=\sum_{m_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{m_d=1}^{n_d}u^{(2)}_{m_2}\cdots u^{(d)}_{m_d}X_{(m,m_2,\ldots,m_d)}\quad (m=1,\ldots,n_1).$$

Ekkor $T_\mathbf{n}=\sum_{m_1=1}^{n_1}u^{(1)}_{m_1}Y_{m_1}$. A következőkben belátjuk, hogy valamely $M_{p,d}>0$ konstans esetén $\mathrm{E}|T_\mathbf{n}|^p\le M_{p,d}\mathrm{E}|S_\mathbf{n}|^p$. Megint d-re vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Az állítás $d=1$ esetén megtalálható Burkholder (1966) [9] Theorem 9 bizonyításában. Az $X_\mathbf{n}$ (3.5.1) tulajdonságából könnyű ellenőrizni, hogy Y_m martingáldifferencia. Így

$$\mathrm{E}|T_\mathbf{n}|^p\le M_{p,1}\mathrm{E}\bigg(\Big|\sum_{m_1=1}^{n_1}Y_{m_1}\Big|^p\bigg)=$$
$$=M_{p,1}\mathrm{E}\bigg(\Big|\sum_{m_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{m_d=1}^{n_d}u^{(2)}_{m_2}\ldots u^{(d)}_{m_d}\Big(\sum_{m_1=1}^{n_1}X_{(m_1,\ldots,m_d)}\Big)\Big|^p\bigg).$$

Ismét használva a (3.5.1) tulajdonságot kapjuk, hogy

$$Z_{(m_2,\ldots,m_d)}:=\sum_{m_1=1}^{n_1}X_{(m_1,\ldots,m_d)}$$

martingáldifferencia. Így az indukciós feltevést használva

$$\mathrm{E}|T_{\mathbf{n}}|^p \le M_{p,1}M_{p,d-1}\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^p = M_{p,d}\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^p.$$

Ebből, Fubini tételéből és a 3.5.2. lemma (b) pontjából kapjuk, hogy $\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^{2p}$ majorálható a következő kifejezéssel.

$$M_{2p,d}\int_0^1\cdots\int_0^1 \mathrm{E}\Big(\Big|\sum_{m_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{m_d=1}^{n_d} r_{m_1}(t_1)\cdots r_{m_d}(t_d)X_{(m_1,\dots,m_d)}\Big|^{2p}\Big)dt_1\cdots dt_d =$$

$$=M_{2p,d}\mathrm{E}\Big(\int_0^1\cdots\int_0^1\Big|\sum_{m_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{m_d=1}^{n_d} r_{m_1}(t_1)\cdots r_{m_d}(t_d)X_{(m_1,\dots,m_d)}\Big|^{2p} dt_1\cdots dt_d\Big)\le$$

$$\le M_{2p,d}C_{2p,d}\mathrm{E}\Big(\Big(\sum_{m_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{m_d=1}^{n_d} X^2_{(m_1,\dots,m_d)}\Big)^p\Big).$$

Ezzel befejeztük a bizonyítást. □

3.5.3. tétel. (Noszály és Tómács (2000) [55] Proposition 13.) *Legyen* $(X_{\mathbf{n}},\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ (3.5.1) *tulajdonságú martingáldifferencia,* $p\ge 1$, $C>0$ *és* $r<p+1$. *Tegyük fel, hogy* $\sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}\mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p}\le C|\mathbf{n}|^r$. *Ekkor* $S_{\mathbf{n}}/|\mathbf{n}|\to 0$ $(\mathbf{n}\to\infty)$ *majdnem biztosan.*

Bizonyítás. A Burkholder-egyenlőtlenség (3.5.2. lemma (c)) és a Hölder-egyenlőtlenség alapján

$$\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^{2p}\le D_{p,d}\mathrm{E}\left(\sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}X_{\mathbf{m}}^2\right)^p\le D_{p,d}|\mathbf{n}|^{p-1}\sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}\mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p}\le D_{p,d}|\mathbf{n}|^{p+r-1}.$$

Így a Doob-féle L_p-egyenlőtlenség (3.5.2. lemma (a)) miatt,

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}|S_{\mathbf{m}}|^{2p}\right)\le F_{p,d}\sum_{\mathbf{m}\le\mathbf{n}}\Delta|\mathbf{m}|^{p+r-1}$$

valamely $F_{p,d}>0$ konstans esetén. Mivel $\Delta|\mathbf{m}|^{p+r-1}\le C|\mathbf{m}|^{p+r-2}$, így a 3.2.3. tétel miatt igaz az állítás. □

3.5.4. tétel. (Noszály és Tómács (2000) [55] Proposition 14.) *Legyen* $(X_{\mathbf{n}},\mathcal{F}_{\mathbf{n}})$ (3.5.1) *tulajdonságú martingáldifferencia és* $p\ge 1$. *Amikor* $p>1$, *tegyük fel, hogy* $\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}$ *szorzat típusú sorozat. Legyen* $b_{\mathbf{n}}$ *pozitív valós értékű, nemcsökkenő és nem korlátos szorzat típusú sorozat, továbbá tegyük még fel azt is, hogy* $p > 1$ *esetén van olyan* $\delta > (p-1)/2p$*, hogy* $|\mathbf{n}|^{\delta}/b_{\mathbf{n}}$ *nemnövekvő. Ekkor*

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{\mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}}{b_{\mathbf{n}}^{2p}} |\mathbf{n}|^{p-1} < \infty$$

esetén $S_{\mathbf{n}}/b_{\mathbf{n}} \to 0$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ *majdnem biztosan.*

Bizonyítás. Alkalmazva a Burkholder-, Hölder- és Doob-egyenlőtlenségeket:

$$\mathrm{E}\left(\max_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{m}}|^{2p}\right) \leq C_{p,d} |\mathbf{n}|^{p-1} \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p}$$

valamely $C_{p,d} > 0$ esetén. $p = 1$ esetén ez az egyenlőtlenség és a 3.2.3. tétel implikálja az állítást.

Most legyen $p > 1$. Vezessük be a következő jelöléseket.

$$c_{\mathbf{n}} := |\mathbf{n}|^{p-1} \sum_{\mathbf{m} \leq \mathbf{n}} \mathrm{E}|X_{\mathbf{m}}|^{2p} \quad \text{és} \quad \prod_{i=1}^{d} a_{n_i}^{(i)} = \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2p}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\Delta c_{\mathbf{n}} &= \prod_{l=1}^{d} \left(n_l^{p-1} \sum_{k=1}^{n_l} a_k^{(l)} - (n_l - 1)^{p-1} \sum_{k=1}^{n_l - 1} a_k^{(l)} \right) = \\
&= \prod_{l=1}^{d} \left(n_l^{p-1} a_{n_l}^{(l)} + \left(n_l^{p-1} - (n_l - 1)^{p-1}\right) \sum_{k=1}^{n_l - 1} a_k^{(l)} \right) \leq \\
&\leq \prod_{l=1}^{d} \left(n_l^{p-1} a_{n_l}^{(l)} + C n_l^{p-2} \sum_{k=1}^{n_l - 1} a_k^{(l)} \right)
\end{aligned}$$

valamely $C > 0$ esetén. Másrészt legyen $r > 1$ olyan, hogy $\delta = (p+r-2)/2p$ a tételben. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} \frac{m^{p-2}}{b_m^{(l)2p}} \sum_{k=1}^{m-1} a_k^{(l)} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(l)} \sum_{m=k+1}^{n} \frac{m^{p-2}}{b_m^{(l)2p}} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{(l)} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m^{p-2}}{b_m^{(l)2p}} = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(l)} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m^r} \frac{m^{p+r-2}}{b_m^{(l)2p}} \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{(l)} \frac{k^{p+r-2}}{b_k^{(l)2p}} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{m^r} \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^{(l)} \frac{k^{p+r-2}}{b_k^{(l)2p}} C_r k^{1-r} = C_r \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(l)} k^{p-1}}{b_k^{(l)2p}}
\end{aligned}$$

valamely $C_r > 0$ és minden $1 \leq l \leq d$ esetén. Eszerint $\sum_{\mathbf{n}} \Delta c_{\mathbf{n}} / b_{\mathbf{n}}^{2p} < \infty$, így a 3.2.3. tételből következik az állítás. □

4. Konvergenciasebesség a nagy számok törvényeiben, Banach-térbeli értékű valószínűségi változókból álló szériasorozatok esetén

Ebben a fejezetben a Baum—Katz-féle tétel bizonyos kiterjesztéseivel foglalkozunk. Az itteni vizsgálatok közvetlen előzménye Fazekas (1992) [21] cikke. Eredményeinket Tómács (2003) [72] cikkben publikáltuk. A fejezet legfontosabb tétele a 4.3.1. tétel. Ebből következményként számos ismert állítást (illetve ismert állítások variációit) levezetünk.

4.1. Jelölések, definíciók

Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza, $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $a \vee b := \max\{a, b\}$ és $a \wedge b := \min\{a, b\}$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Jelölje R_f az f függvény értékkészletét és $f \circ g$ az f és g összetett függvényét. Φ_0 legyen a nemcsökkenő $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ függvények halmaza. Egy $f \in \Phi_0$ függvényt *Orlicz-függvénynek* nevezzük, ha f folytonos, konvex, nem korlátos, $f(0) = 0$ és $f(t) > 0$ minden $t > 0$ esetén.

Az $f \in \Phi_0$ függvényről azt mondjuk, hogy teljesíti a Δ_2-feltételt ($f \sim \Delta_2$), ha létezik egy $c > 0$ konstans, hogy

$$f(2t) \le cf(t) \tag{4.1.1}$$

minden $t > 0$ esetén. Nyilván $f \sim \Delta_2$ pontosan akkor, ha minden rögzített $k > 1$ esetén létezik $c > 1$, melyre

$$f(kt) \le cf(t) \quad \text{minden} \quad t > 0 \quad \text{esetén.} \tag{4.1.2}$$

Az $f \in \Phi_0$ függvényről azt mondjuk, hogy teljesíti a Δ_2^0-feltételt ($f \sim \Delta_2^0$), ha létezik $c > 0$ és $t_0 > 0$, hogy (4.1.1) teljesül minden $0 < t \le t_0$ esetén.

Ebben a fejezetben legyen $\{k_n, n \in \mathbb{N}\}$ pozitív egész számok egy szigorúan monoton növekvő sorozata. A következő jelölések tekintetében Gut (1985) [32] cikket követjük.

$$\psi(t) := \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : k_n \le t\}, \quad t \ge 0,$$

$$M_r(t) := \sum_{i=1}^{[t]} k_i^{r-1}, \quad \text{ha} \quad t \ge 1 \quad \text{és} \quad M_r(t) := k_1^{r-1}, \quad \text{ha} \quad 0 \le t < 1,$$

ahol $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{card}A$ az A halmaz számossága ($\mathrm{card}\emptyset := 0$) és $[.]$ az egészrész-függvényt jelenti. Legyen $M := M_2$.

Legyen B egy valós, szeparábilis Banach-tér $\|.\|$ normával és $\mathbf{0}$ zérus elemmel. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy rögzített valószínűségi mező. $X : \Omega \to B$ függvényt B-értékű valószínűségi változónak nevezzük, ha $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$ minden $A \in \mathcal{B}(B)$ esetén, ahol $\mathcal{B}(B)$ a B Borel-féle σ-algebrája. Ha X B-értékű valószínűségi változó és $\mathrm{E}\|X\| < \infty$, akkor $\mathrm{E}X$ jelentse az X Bochner-féle integrálját.

A B-értékű X valószínűségi változó *szimmetrikus*, ha X és $-X$ azonos eloszlású. Tetszőleges B-értékű X valószínűségi változó esetén az X *szimmetrizáltja* $X^* = X - X'$, ahol X' és X függetlenek és azonos eloszlásúak. (Nyilván X^* szimmetrikus.) Tetszőleges X-re

$$\mathrm{P}(\|X'\| < t)\mathrm{P}(\|X\| > 2t) \le \mathrm{P}(\|X^*\| > t) \le 2\mathrm{P}(\|X - b\| > t/2) \qquad (4.1.3)$$

minden $t \ge 0$ és $b \in B$ esetén.

Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ B-értékű valószínűségi változók szériasorozata. Ezt soronként függetlennek nevezzük, ha $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$ függetlenek minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén. Legyen $S_{k_n} := \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$. Abban a speciális esetben, amikor $k_n \equiv n$, azaz az n-edik sorban éppen n darab valószínűségi változó van, a sorösszeget $S_n = X_{n1} + \cdots X_{nn}$ jelöli.

4.1.1. definíció. (Gut (1992) [33].) Azt mondjuk, hogy $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ *átlagban gyengén dominált* az X valószínűségi változóval, ha létezik $\gamma > 0$, hogy

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(\|X_{nk}\| > t) \le \gamma \mathrm{P}(|X| > t) \text{ minden } t \ge 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ esetén.} \qquad (4.1.4)$$

4.1.2. megjegyzés. Legyen ξ egy valós értékű valószínűségi változó és $t > 0$ rögzített. Mivel $\bigcap_{m=1}^{\infty} \{\xi > t - 1/m\} = \{\xi \ge t\}$, így a valószínűség folytonossága miatt, ha $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ átlagban gyengén dominált az X valószínűségi változóval, akkor

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(\|X_{nk}\| \ge t) \le \gamma \mathrm{P}(|X| \ge t) \text{ minden } t > 0,\ n \in \mathbb{N} \text{ esetén.} \qquad (4.1.5)$$

4.2. Lemmák

A következő lemma Jain (1975) [40] Lemma 2.2 egy verziója.

4.2.1. lemma. (Tómács (2003) [72] Lemma 4.1.) *Legyen* X *egy valós értékű valószínűségi változó,* $\varphi, \alpha \in \Phi_0$, $\beta(n) := \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Ha* $\mathrm{E}\,\varphi(|X|) < \infty$, *akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta(n-1)\mathrm{P}\big(|X| \geq \alpha(n)\big) < \infty.$$

Bizonyítás. $\Theta_n := \varphi(\alpha(n))$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\varphi(|X|) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_i \mathrm{P}\Big(\Theta_i \leq \varphi(|X|) < \Theta_{i+1}\Big) \geq \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{i} \beta(n-1)\mathrm{P}\Big(\Theta_i \leq \varphi(|X|) < \Theta_{i+1}\Big) \geq \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n-1) \sum_{i=n}^{\infty} \mathrm{P}\Big(\Theta_i \leq \varphi(|X|) < \Theta_{i+1}\Big) \geq \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n-1)\mathrm{P}\big(|X| \geq \alpha(n)\big).
\end{aligned}$$

□

Az alábbi lemma bizonyítását lásd például Hoffmann-Jørgensen (1974) [35], illetve Jain (1975) [40].

4.2.2. lemma. *Legyenek* $X_1, \ldots, X_n$ B*-értékű, független, szimmetrikus valószínűségi változók és* $j \in \mathbb{N}$. *Ekkor léteznek* $A_j, B_j \geq 0$ *konstansok úgy, hogy*

$$\mathrm{P}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\| > 3^j t\right) \leq A_j \mathrm{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} \|X_k\| > t\right) + B_j \mathrm{P}^{2^j}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\| > t\right)$$

minden $t \geq 0$ *esetén, ahol* A_j *és* B_j *csak* j*-től függ.* ($A_1 = 1$, $B_1 = 4$.)

A következő lemma Jain (1975) [40] Theorem 3.1, illetve Fazekas (1992) [21] Lemma 2.6 általánosítása.

4.2.3. lemma. (Tómács (2003) [72] Lemma 4.3.) *Legyen* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ *soronként független,* B*-értékű szimmetrikus valószínűségi változók szériasorozata, és* $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ *pozitív valós számok egy sorozata. Ha* $\{\|S_{k_n}\| / \gamma_{k_n}, n \in \mathbb{N}\}$ *valószínűségben korlátos,* $\vartheta \in \Phi_0$ *és* $\vartheta \sim \Delta_2$*, akkor léteznek* $a, b > 0$ *konstansok úgy, hogy*

$$\mathrm{E}\,\vartheta(\|S_{k_n}\|) \leq a\mathrm{E}\,\vartheta\Big(\max_{1\leq k\leq k_n} \|X_{nk}\|\Big) + b\vartheta(\gamma_{k_n}) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{esetén.}$$

Bizonyítás. Legyen $N_{k_n} := \max_{1\leq k\leq k_n} \|X_{nk}\|$. $\vartheta \in \Phi_0$ és a 4.2.2. lemma miatt minden $x \geq 0$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\vartheta(\|S_{k_n}\| /3) > \vartheta(x)) &\leq \mathrm{P}\left(\|S_{k_n}\| /3 > x\right) \\ &\leq \mathrm{P}\left(N_{k_n} > x\right) + 4\mathrm{P}^2(\|S_{k_n}\| > x) \\ &\leq \mathrm{P}(\vartheta(N_{k_n}) \geq \vartheta(x)) + 4\mathrm{P}^2(\vartheta(\|S_{k_n}\|) \geq \vartheta(x)). \end{aligned}$$

Így

$$\mathrm{P}(\vartheta(\|S_{k_n}\| /3) > t) \leq \mathrm{P}(\vartheta(N_{k_n}) \geq t) + 4\mathrm{P}^2(\vartheta(\|S_{k_n}\|) \geq t) \tag{4.2.1}$$

minden $t \in R_\vartheta$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén. Tegyük fel, hogy $t \in (\vartheta(0), \sup R_\vartheta) \cap \overline{R_\vartheta}$. Ekkor létezik $a \geq 0$, hogy $\lim_{x\to a-0} \vartheta(x) < t < \lim_{x\to a+0} \vartheta(x)$. (Legyen $\lim_{x\to 0-0} \vartheta(x) = \vartheta(0)$.) Ha $\vartheta(a) < t$, akkor $\bigcup_{m=1}^{\infty} \{y : \vartheta(y) > \vartheta(a+1/m)\} = \{y : \vartheta(y) > t\}$ és $\bigcup_{m=1}^{\infty} \{y : \vartheta(y) \geq \vartheta(a + 1/m)\} = \{y : \vartheta(y) \geq t\}$. Másrészt, ha $\vartheta(a) > t$, akkor $\bigcap_{m=1}^{\infty} \{y : \vartheta(y) > \vartheta(a - 1/m)\} = \{y : \vartheta(y) > t\}$ és $\bigcap_{m=1}^{\infty} \{y : \vartheta(y) \geq \vartheta(a - 1/m)\} = \{y : \vartheta(y) \geq t\}$. Így felhasználva a valószínűség folytonosságát és a (4.2.1) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy (4.2.1) igaz ebben az esetben is. Ha $0 \leq t \leq \vartheta(0)$ vagy $t \geq \sup R_\vartheta$, akkor (4.2.1) nyilvánvaló. Most alkalmazva $\vartheta \sim \Delta_2$, létezik $c > 1$, hogy

$$\mathrm{P}\left(\vartheta(\|S_{k_n}\|) > ct\right) \leq \mathrm{P}\left(\vartheta(N_{k_n}) \geq t\right) + 4\mathrm{P}^2(\vartheta(\|S_{k_n}\|) \geq t) \tag{4.2.2}$$

minden $t \geq 0$ esetén. Integrálva mindkét oldalt t szerint

$$\frac{1}{c}\mathrm{E}\,\vartheta(\|S_{k_n}\|) \leq \mathrm{E}\,\vartheta(N_{k_n}) + 4\int_0^\infty \mathrm{P}^2(\vartheta(\|S_{k_n}\|) > t)\,dt. \tag{4.2.3}$$

Mivel $\{\|S_{k_n}\| / \gamma_{k_n}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos és $\vartheta \sim \Delta_2$, léteznek $A_1, A > 0$ konstansok úgy, hogy

$$\mathrm{P}\left(\|S_{k_n}\| \geq A_1\gamma_{k_n}\right) < \frac{1}{8c} \quad \text{és} \quad \vartheta(A_1\gamma_{k_n}) \leq A\vartheta(\gamma_{k_n})$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből következően

$$\mathrm{P}\big(\vartheta(\|S_{k_n}\|) > A\vartheta(\gamma_{k_n})\big) < \frac{1}{8c}.$$

Emiatt

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{P}^2(\vartheta(\|S_{k_n}\|) > t)\,dt \le \int\limits_0^{A\vartheta(\gamma_{k_n})} 1dt + \int\limits_{A\vartheta(\gamma_{k_n})}^\infty \frac{1}{8c}\mathrm{P}\big(\vartheta(\|S_{k_n}\|) > t\big)dt \le$$

$$\le A\vartheta(\gamma_{k_n}) + \frac{1}{8c}\mathrm{E}\,\vartheta(\|S_{k_n}\|). \tag{4.2.4}$$

Ezért (4.2.3) és (4.2.4) miatt igaz az állítás. □

A következő lemma Gut (1992) [33] Lemma 2.1, illetve Fazekas (1992) [21] Lemma 2.7 (b) általánosítása.

4.2.4. lemma. (Tómács (2003) [72] Lemma 4.4.) *Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1,\dots,k_n\}$ B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált az X valószínűségi változóval. Ha $\vartheta \in \Phi_0$, akkor*

$$\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{E}\,\vartheta(\|X_{nk}\|) \le (1 \vee \gamma)\mathrm{E}\,\vartheta(|X|).$$

Bizonyítás. $\vartheta \in \Phi_0$ és (4.1.4) miatt minden $x \ge 0$ esetén

$$\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}\big(\vartheta(\|X_{nk}\|) > \vartheta(x)\big) \le \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(\|X_{nk}\| > x) \le$$
$$\le \gamma\mathrm{P}(|X| > x) \le \gamma\mathrm{P}\big(\vartheta(|X|) \ge \vartheta(x)\big),$$

így

$$\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}\big(\vartheta(\|X_{nk}\|) > t\big) \le (1 \vee \gamma)\mathrm{P}\big(\vartheta(|X|) \ge t\big) \tag{4.2.5}$$

minden $t \in R_\vartheta$-re. Tegyük fel, hogy $t \in (\vartheta(0), \sup R_\vartheta) \cap \overline{R_\vartheta}$. Ekkor létezik $a \ge 0$, hogy $\lim_{x\to a-0}\vartheta(x) < t < \lim_{x\to a+0}\vartheta(x)$. (Legyen $\lim_{x\to 0-0}\vartheta(x) = \vartheta(0)$.) Ha $\vartheta(a) > t$, akkor $\{\vartheta(\|X_{nk}\|) > t\} = \{\|X_{nk}\| \ge a\}$. Ezért (4.1.5) miatt

$$\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}\big(\vartheta(\|X_{nk}\|) > t\big) = \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(\|X_{nk}\| \ge a) \le$$
$$\le \gamma\mathrm{P}(|X| \ge a) \le \gamma\mathrm{P}\big(\vartheta(|X|) \ge \vartheta(a)\big) \le \gamma\mathrm{P}\big(\vartheta(|X|) \ge t\big).$$

Emiatt (4.2.5) igaz ebben az esetben is. Ha $\vartheta(a) < t$, akkor $\{\vartheta(\|X_{nk}\|) > t\} = \{\|X_{nk}\| > a\}$. Így (4.1.4) miatt

$$\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}\big(\vartheta(\|X_{nk}\|) > t\big) = \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n} \mathrm{P}(\|X_{nk}\| > a) \leq$$
$$\leq \gamma \mathrm{P}(|X| > a) \leq \gamma \mathrm{P}\big(\vartheta(|X|) \geq t\big).$$

Így (4.2.5) igaz ebben az esetben is. Végül, (4.2.5) nyilvánvalóan teljesül, ha $0 \leq t \leq \vartheta(0)$ vagy $t \geq \sup R_\vartheta$. Összefoglalva, (4.2.5) teljesül minden $t \geq 0$ esetén, melyből következik az állítás. □

4.3. Egy általános konvergenciasebesség-tétel

A következő tétel Fazekas (1992) [21] Theorem 3.5 kiterjesztése. A tétel speciálisan $k_n \equiv n$ esetre vonatkozik, azonban tetszőleges k_n sorozat esetére is nyerhetünk belőle következményeket.

4.3.1. tétel. (Tómács (2003) [72] Theorem 3.1.) *Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók széria-sorozata, mely átlagban gyengén dominált az X valószínűségi változóval. Tegyük fel, hogy létezik egy pozitív valós számokból álló $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ sorozat, hogy $\{\|S_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos. Legyen $\alpha, \vartheta, \varphi \in \Phi_0$, α nem korlátos, $\vartheta, \varphi \sim \Delta_2$, $\vartheta \not\equiv 0$ és*

$$\beta(n) := \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{E}\,\varphi(|X|) < \infty, \quad \mathrm{E}\,\vartheta(|X|) < \infty \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(n)}{\gamma_n} = \infty.$$

Legyen

$$\mu(n) := \beta(n-1) \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{esetén},$$

vagy

$$\mu(n) := \beta(n) \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{esetén}.$$

$\mu(n) = \beta(n)$ esetben tegyük fel, hogy létezik $c > 0$, hogy elég nagy $n \in \mathbb{N}$-ek esetén

$$c\beta(n) \leq \beta(n-1). \tag{4.3.1}$$

Legyen $n_0 \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\vartheta(\alpha(n)) > 0$ minden $n \geq n_0$ esetén. Ha létezik $j \in \mathbb{N}$ és $r > 0$ úgy, hogy

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))} \right)^{2^j} < \infty, \tag{4.3.2}$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{P}(\|S_n\| > \varepsilon\alpha(n)) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}. \tag{4.3.3}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az X_{nk} valószínűségi változók szimmetrikusak. Legyen $\varepsilon > 0$. A 4.2.2. lemma és (4.1.4) alapján

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\|S_n\| > \varepsilon 3^j \alpha(n)\right) \leq \\ &\leq A_j \gamma n \mathrm{P}(|X| > \varepsilon\alpha(n)) + B_j \mathrm{P}^{2^j}\left(\|S_n\| > \varepsilon\alpha(n)\right). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

A (4.3.4) második tagjának becsléséhez vegyük figyelembe, hogy $\vartheta \in \Phi_0$, $\vartheta \sim \Delta_2$, továbbá alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget, a 4.2.3. és a 4.2.4. lemmákat. Ekkor léteznek $\varepsilon', \gamma', a, b > 0$ konstansok úgy, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\frac{1}{\varepsilon}\|S_n\| > \alpha(n)\right) \leq \mathrm{P}\Big(\varepsilon'\vartheta(\|S_n\|) \geq \vartheta(\alpha(n))\Big) \leq \\ &\leq \varepsilon' \frac{\mathrm{E}\,\vartheta(\|S_n\|)}{\vartheta(\alpha(n))} \leq \frac{\varepsilon'}{\vartheta(\alpha(n))}\Big(a\gamma' n \mathrm{E}\,\vartheta(|X|) + b\vartheta(\gamma_n)\Big). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

A (4.3.5) egyenlőtlenségben b választható úgy, hogy

$$b > \frac{a}{r}\gamma' \mathrm{E}\,\vartheta(|X|). \tag{4.3.6}$$

Ekkor (4.3.4), (4.3.5) és (4.3.6) miatt

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{P}\Big(\|S_n\| > \varepsilon 3^j \alpha(n)\Big) \leq A_j \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \mathrm{P}\left(|X| > \varepsilon\alpha(n)\right) + \text{konst.} + \\ &+ \text{konst.} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))} \right)^{2^j}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Mivel $\varphi \sim \Delta_2$, így létezik $k > 0$, hogy $\mathrm{E}\varphi(|X|/\varepsilon) \le k\mathrm{E}\varphi(|X|) < \infty$. Ezért a 4.2.1. lemma és (4.3.1) miatt létezik $n_1 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \beta(n-1)\mathrm{P}\left(\frac{|X|}{\varepsilon} > \alpha(n)\right) \ge$$

$$\ge \text{konst.} \sum_{n=n_1}^{\infty} \mu(n)\mathrm{P}\big(|X| > \varepsilon\alpha(n)\big). \tag{4.3.8}$$

Ekkor (4.3.7), (4.3.8) és (4.3.2) alapján (4.3.3) teljesül.

Általános esetben szimmetrizálással dolgozunk. Legyen X'_{nk} független kópiája X_{nk}-nak minden $n \in \mathbb{N}$ és $k = 1, \dots, n$ esetén. Legyen $X^*_{nk} := X_{nk} - X'_{nk}$, $S'_n := \sum_{k=1}^n X'_{nk}$ és $S^*_n := \sum_{k=1}^n X^*_{nk} = S_n - S'_n$. Be fogjuk bizonyítani, hogy X^*_{nk}-ra teljesülnek a 4.3.1. tétel feltételei.

A (4.1.3) és (4.1.4) egyenlőtlenségek alapján kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\|X^*_{nk}\| > t\right) \le \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\|X_{nk}\| > \frac{t}{2}\right) \le 2\gamma \mathrm{P}(|2X| > t)$$

minden $t \ge 0$ esetén, így $\{X^*_{nk} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ átlagban gyengén dominált $2X$-szel. Másrészt $\varphi, \vartheta \sim \Delta_2$ miatt $\mathrm{E}\varphi(|2X|) < \infty$ és $\mathrm{E}\vartheta(|2X|) < \infty$. Mivel $\{\|S_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos, felhasználva a (4.1.3) egyenlőtlenséget, minden $h > 0$ esetén létezik $q > 0$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$2h > 2\mathrm{P}(\|S_n\| > q\gamma_n) \ge \mathrm{P}(\|S^*_n\| > 2q\gamma_n).$$

Így $\{\|S^*_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ is korlátos valószínűségben. Emiatt a szimmetrikus eset szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\mathrm{P}\big(\|S^*_n\| > \varepsilon\alpha(n)\big) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén}. \tag{4.3.9}$$

$\{\|S'_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos, ezért létezik $q' > 0$, hogy

$$\mathrm{P}(\|S'_n\| < q'\gamma_n) > \frac{1}{2}. \tag{4.3.10}$$

Végül, (4.1.3), $\alpha(n)/\gamma_n \to \infty$ és (4.3.10) alapján kapjuk, hogy elég nagy $n \in \mathbb{N}$-ek esetén

$$\mathrm{P}\big(\|S^*_n\| > \varepsilon\alpha(n)\big) \ge \mathrm{P}\big(\|S'_n\| < \varepsilon\alpha(n)\big)\mathrm{P}\big(\|S_n\| > 2\varepsilon\alpha(n)\big) \ge$$

$$\ge \mathrm{P}\big(\|S'_n\| < q'\gamma_n\big)\mathrm{P}\big(\|S_n\| > 2\varepsilon\alpha(n)\big) \ge \frac{1}{2}\mathrm{P}\big(\|S_n\| > 2\varepsilon\alpha(n)\big).$$

Emiatt és (4.3.9) miatt igaz az állítás. □

Az alábbi következmény Fazekas (1992) [21] Theorem 6.2 általánosítása.

4.3.2. következmény. (Tómács (2003) [72] Corollary 3.2.) *Legyen $M \circ \psi \sim \Delta_2$, $r, s, t > 0$, $rs > t$. Ha $r > 2$, akkor tegyük fel, hogy $\{M(n)/M(n-1), n \in \mathbb{N}\}$ korlátos. Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált az X valószínűségi változóval. Tegyük fel, hogy $\{\|S_{k_n}\| / k_n^{1/s}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos. Ha*

$$\mathrm{E}M^{r/2}\left(\psi\left(|X|^{t/r}\right)\right) < \infty \quad \textit{és} \quad \mathrm{E}|X|^s < \infty,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(M(n)\right)^{r/2-1} \mathrm{P}\left(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{r/t}\right) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén.}$$

Megjegyezzük, hogy $\{M(n)/M(n-1), n \in \mathbb{N}\}$ korlátossága és (4.4.5) ekvivalensek.

Bizonyítás. A 4.3.1. tételben legyen $\alpha(x) := x^{r/t}$, $\vartheta(x) := x^s$, $\gamma_n := n^{1/s}$ és $\varphi(x) := M^{r/2}(\psi(x^{t/r}))$. Ekkor

$$\beta(k_n - 1) = \varphi(\alpha(k_n)) - \varphi(\alpha(k_n - 1)) = M^{r/2}(n) - M^{r/2}(n-1) \quad (4.3.11)$$

és $\beta(m-1) = 0$, ha $k_n < m < k_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Felhasználva, hogy $M^v(n) - M^v(n-1) = \int_{M(n-1)}^{M(n)} vt^{v-1}dt$, könnyű bizonyítani, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$vk_n M^{v-1}(n-1) \le M^v(n) - M^v(n-1) \le vk_n^{2v-1}, \quad \text{ha} \quad v \ge 1, \quad (4.3.12)$$

és

$$vk_n M^{v-1}(n) \le M^v(n) - M^v(n-1) \le vk_n, \quad \text{ha} \quad 0 < v \le 1. \quad (4.3.13)$$

Legyen $j \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $2^j > t((r-1) \vee 1)/(rs-t)$. Ekkor (4.3.11), (4.3.12) és (4.3.13) szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(k_n - 1)}{k_n} \left(\frac{rk_n + \vartheta(\gamma_{k_n})}{\vartheta(\alpha(k_n))}\right)^{2^j} \le$$

$$\le \begin{cases} \text{konst.} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{r-2-(sr/t-1)2^j} < \infty, & \text{ha } r > 2, \\ \text{konst.} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-(sr/t-1)2^j} < \infty, & \text{ha } 0 < r \le 2. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4.3.1. tétel többi feltétele is teljesül. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(k_n-1)}{k_n} \mathrm{P}\big(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{r/t}\big) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén}.$$

Tudjuk még, hogy (4.3.11), (4.3.12) és (4.3.13) miatt

$$\frac{\beta(k_n-1)}{k_n} \geq \text{konst.}(M(n))^{r/2-1},$$

melyből következik az állítás. □

Az alábbi következmény Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [38] Corollary 4.1 egy verziója.

4.3.3. következmény. (Tómács (2003) [72] Corollary 3.3.) *Legyen* $r \in \mathbb{R}$, $0 < t < s$ *és* $M_r \circ \psi \sim \Delta_2$. *Legyen* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, k_n\}$ *soronként független,* B*-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált az* X *valószínűségi változóval. Tegyük fel, hogy* $\{\|S_{k_n}\|/k_n^{1/s}, n \in \mathbb{N}\}$ *valószínűségben korlátos. Ha*

$$\mathrm{E}M_r\Big(\psi(|X|^t)\Big) < \infty \quad \textit{és} \quad \mathrm{E}|X|^s < \infty,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{r-2} \mathrm{P}\Big(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{1/t}\Big) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}.$$

Bizonyítás. A 4.3.1. tételben legyen $\alpha(x) := x^{1/t}$, $\varphi(x) := M_r(\psi(x^t))$, $\vartheta(x) := x^s$ és $\gamma_n := n^{1/s}$. Ekkor

$$\beta(k_n-1) = \varphi(\alpha(k_n)) - \varphi(\alpha(k_n-1)) = M_r(n) - M_r(n-1) = k_n^{r-1} \qquad (4.3.14)$$

és $\beta(m-1) = 0$, ha $k_n < m < k_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $j \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $2^j > t(r-1)/(s-t)$. Ekkor (4.3.14) miatt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(k_n-1)}{k_n} \left(\frac{rk_n + \vartheta(\gamma_{k_n})}{\vartheta(\alpha(k_n))}\right)^{2^j} \leq \text{konst.} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2-(s/t-1)2^j} < \infty.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 4.3.1. tétel többi feltétele is teljesül. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(k_n-1)}{k_n} \mathrm{P}\big(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{1/t}\big) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén}.$$

Végül (4.3.14) miatt $\beta(k_n-1)/k_n = k_n^{r-2}$, melyből következik az állítás. □

4.4. A fő tétel speciális esetei

Amennyiben B megfelelő geometriai tulajdonsággal rendelkezik, akkor egy momentum feltétellel helyettesíthető $\{\|S_{k_n}\| / \gamma_{k_n}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségbeli korlátossága.

Legyen φ egy Orlicz-függvény. Az $l_\varphi(B)$-vel jelölt úgynevezett *Orlicz-tér* azon B-értékű $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ sorozatokból áll, melyekre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\|u_n\|}{a}\right) < \infty \quad \text{valamely} \quad a > 0 \quad \text{esetén.}$$

4.4.1. definíció. (Lásd Fazekas (1987) [20].) Legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ olyan független valószínűségi változók, melyekre $\mathrm{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathrm{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Azt mondjuk, hogy B *φ-típusú*, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ valószínűségben konvergens minden $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \in l_\varphi(B)$ esetén.

Speciálisan, ha $\varphi(x) = x^p$, akkor a jól ismert p-típus esetét kapjuk.

4.4.2. definíció. Azt mondjuk, hogy B *p-típusú* $(0 < p \leq 2)$, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ majdnem biztosan konvergens minden olyan $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq B$ sorozatra, melyre $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^p < \infty$ teljesül.

4.4.3. megjegyzés. Legyen $\varphi \sim \Delta_2^0$ egy Orlicz-függvény. B pontosan akkor φ-típusú, ha létezik $c > 0$, hogy

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{k=1}^{n} X_k\right\| \leq c\mathrm{E} \inf_{y>0}\left\{\frac{1}{y}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(y\,\|X_k\|)\right)\right\} \tag{4.4.1}$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re, továbbá minden B-értékű független $X_1, \ldots, X_n$ $\mathbf{0}$ várható értékű valószínűségi változókra. (A bizonyítást lásd Fazekas (1987) [20].)

Felsoroljuk a p-típusú terek néhány ismert tulajdonságát.

4.4.4. megjegyzés. Nem létezik $p > 2$ típusú Banach-tér. Minden Banach-tér p-típusú, ha $0 < p \leq 1$. Ha B p-típusú, akkor p'-típusú is, ahol $0 < p' \leq p$. Ismert, hogy B pontosan akkor p-típusú, ha létezik $c > 0$, hogy

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|^p \leq c \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,\|X_i\|^p \tag{4.4.2}$$

minden olyan B-értékű független $X_1, \dots, X_n$ valószínűségi változókra, melyekre $\mathrm{E}\|X_i\|^p < \infty$ (és $\mathrm{E}X_i = \mathbf{0}$, ha $p \geq 1$), $i = 1, \dots, n$ teljesül.

A következő megjegyzések azt mutatják, hogy a 4.3.1. tételben, ha B φ- vagy p-típusú, akkor $\{\|S_{k_n}\|/\gamma_{k_n}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségbeli korlátossága helyettesíthető momentum feltételekkel.

4.4.5. megjegyzés. (Fazekas (1992) [21], illetve Tómács (2003) [72] Remark 5.5.) Legyen φ szubmultiplikatív Orlicz-függvény és B φ-típusú Banach-tér. Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, k_n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Tegyük fel, hogy $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$, $k = 1, \dots, k_n$ és $\mathrm{E}\varphi(|X|) < \infty$. Ha pozitív valós számok valamely $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ sorozata esetén $\{k_n\varphi(1/\gamma_{k_n}), n \in \mathbb{N}\}$ korlátos, akkor $\{\|S_{k_n}\|/\gamma_{k_n}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos.

Bizonyítás. Az állítás (4.4.1) és a 4.2.4. lemma következménye:

$$\mathrm{E}\frac{\|S_{k_n}\|}{\gamma_{k_n}} \leq \frac{c}{\gamma_{k_n}}\mathrm{E}\inf_{y>0}\left\{\frac{1}{y}\left(1 + \sum_{k=1}^{k_n}\varphi(y\,\|X_{nk}\|)\right)\right\} \leq$$
$$\leq c\mathrm{E}\left(1 + \sum_{k=1}^{k_n}\varphi\left(\frac{\|X_{nk}\|}{\gamma_{k_n}}\right)\right) \leq c\left(1 + \varphi\left(\frac{1}{\gamma_{k_n}}\right)(1 \vee \gamma)k_n\mathrm{E}\varphi(|X|)\right). \;\square$$

4.4.6. megjegyzés. (Tómács (2003) [72] Remark 5.6.) Legyen B p-típusú Banach-tér, ahol $0 < p \leq 2$, továbbá $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, k_n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Tegyük fel, hogy $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ ($k = 1, \dots, k_n$), ha $p \geq 1$. Ekkor $\mathrm{E}|X|^p < \infty$ esetén $\{\|S_{k_n}\|/k_n^{1/p}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos.

Bizonyítás. (4.4.2) és a 4.2.4. lemma alapján kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\|S_{k_n}\|^p \leq c\sum_{k=1}^{k_n}\mathrm{E}\|X_{nk}\|^p \leq c(1 \vee \gamma)k_n\mathrm{E}|X|^p.$$

Így $\{\|S_{k_n}\|^p/k_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos. $\square$

Az alábbi következmény Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin (1999) [38] Corollary 4.2 egy változata.

4.4.7. következmény. (Tómács (2003) [72] Corollary 5.7.) *Legyen $r \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq 2$, $0 < t < p$, $M_r \circ \psi \sim \Delta_2$ és B p-típusú. Legyen $\{X_{nk}, n \in$*

$\mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Ha $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $k = 1, \ldots, k_n$ esetén, továbbá

$$\mathrm{E}M_r\left(\psi(|X|^t)\right) < \infty \quad \text{és} \quad \mathrm{E}\,|X|^p < \infty,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n^{r-2}\mathrm{P}\left(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{1/t}\right) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén.}$$

Bizonyítás. A 4.4.6. megjegyzés szerint $\{\|S_{k_n}\| / k_n^{1/p}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos, így a 4.3.3. következmény feltételei teljesülnek. □

A következő három tétel Fazekastól származik (1992 [21]). Be fogjuk bizonyítani, hogy ezek a 4.3.1. tétel speciális esetei.

4.4.8. tétel. (Fazekas (1992) [21] Theorem 3.1.) *Legyen $0 < p \le 2$, $s \ge p$, $rp > s$ és B p-típusú. Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Tegyük fel, hogy $p \ge 1$ esetén $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ha $\mathrm{E}\,|X|^s < \infty$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2}\mathrm{P}\left(\|S_n\| > \varepsilon n^{r/s}\right) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén.}$$

Bizonyítás. A 4.3.1. tételben legyen $\alpha(x) := x^{r/s}$, $\varphi(x) = \vartheta(x) := x^s$ és $\gamma_n := n^{1/p}$. Ekkor

$$\beta(n) = \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n)) = (n+1)^r - n^r.$$

Legyen $j \in \mathbb{N}$ olyan nagy, hogy $2^j > rp/(rp - s)$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(n)}{n}\left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))}\right)^{2^j} \le \text{konst.} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1-(r-s/p)2^j} < \infty,$$

így (4.3.2) teljesül. Mivel $\beta(n-1)/\beta(n) \to 1$, így (4.3.1) is teljesül. $\mathrm{E}\,|X|^s < \infty$ miatt $\mathrm{E}\,|X|^p < \infty$. Így a 4.4.6. megjegyzés szerint $\{\|S_n\| / n^{1/p}, n \in$

$\mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a 4.3.1. tétel további feltételei is fennállnak. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^r - n^r}{n} \mathrm{P}\big(\|S_n\| > \varepsilon n^{r/s}\big) < \infty \quad \text{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{esetén}.$$

Ebből következik az állítás, mert $((n+1)^r - n^r)/n \geq \text{konst.} n^{r-2}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. □

4.4.9. tétel. (Fazekas (1992) [21] Theorem 3.5 és Jain (1975) [40] Theorem 3.3.) *Legyen $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n\}$ soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Legyen $\alpha, \varphi \in \Phi_0$, melyek szigorúan monoton növekvőek, $R_\alpha = R_\varphi = [0, \infty)$ és $\varphi \sim \Delta_2$. Legyen $\beta(n) = \varphi(\alpha(n+1)) - \varphi(\alpha(n))$ olyan, hogy valamely $c_1, c_2 > 0$ esetén*

$$c_1 \leq c_2 \beta(n+1) \leq \beta(n) \quad \textit{minden} \quad n \in \mathbb{N}\text{-re}.$$

Legyen $\mathrm{E}\,\varphi(|X|) < \infty$. *Tegyük fel, hogy létezik pozitív valós számok $\{\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ sorozata, hogy $\{\|S_n\|/\gamma_n, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos, továbbá létezik $\delta > 0$, hogy*

$$\frac{n \vee \varphi(\gamma_n)}{\varphi(\alpha(n))} = O\big((\log n)^{-\delta} \wedge (\beta(n))^{-\delta}\big). \tag{4.4.3}$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(n)}{n} \mathrm{P}\big(\|S_n\| > \varepsilon \alpha(n)\big) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}. \tag{4.4.4}$$

Bizonyítás. A 4.3.1. tételben legyen $\vartheta := \varphi$ és $j \in \mathbb{N}$ legyen olyan nagy, hogy $2^j > 2/\delta$. Ekkor (4.4.3) és $1/\beta(n) \leq 1/c_1$ miatt kapjuk, hogy valamely $m_0 \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta(n)}{n} \left(\frac{rn + \vartheta(\gamma_n)}{\vartheta(\alpha(n))} \right)^{2^j} \leq \\
&\leq \text{konst.} + \text{konst.} \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{\beta(n)}{n} \left(\frac{r+1}{(\beta(n) \log n)^{\delta/2}} \right)^{2^j} \leq \\
&\leq \text{konst.} + \text{konst.} \sum_{n=m_0}^{\infty} n^{-1} (\log n)^{-\delta 2^{j-1}} < \infty.
\end{aligned}$$

(4.4.3) miatt konst.$(\log n)^{\delta} \leq \varphi(\alpha(n))/\varphi(\gamma_n)$ elég nagy $n \in \mathbb{N}$-ekre, így $\varphi(\alpha(n))/\varphi(\gamma_n) \to \infty$. Emiatt és $\varphi \sim \Delta_2$ miatt $\alpha(n)/\gamma_n \to \infty$. Ezért a 4.3.1. tételből következik (4.4.4). □

4.4.10. tétel. (Fazekas (1992) [21] Theorem 6.2.) *Legyen* $\{X_{nk}, n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, k_n\}$ *soronként független, B-értékű valószínűségi változók szériasorozata, mely átlagban gyengén dominált X-szel. Legyen* $0 < p \leq 2$, $r \geq 1$, $t > 0$ *és* $s \geq p$. *Tegyük fel, hogy* $r > t/p$, *ha* $s > 1$, *míg* $r > t/s$, *ha* $s \leq 1$. $r > 2$ *esetben feltesszük még, hogy*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{k_n}{M(n-1)} < \infty. \tag{4.4.5}$$

Legyen $M \circ \psi \sim \Delta_2$ *és B p-típusú. Feltesszük, hogy* $p \geq 1$ *esetben* $\mathrm{E}X_{nk} = \mathbf{0}$ $(k = 1, \ldots, k_n)$. *Ha*

$$\mathrm{E}M^{r/2}\left(\psi(|X|^{t/r})\right) < \infty \quad \textit{és} \quad \mathrm{E}|X|^s < \infty,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(M(n)\right)^{r/2-1} \mathrm{P}\left(\|S_{k_n}\| > \varepsilon k_n^{r/t}\right) < \infty \quad \textit{minden} \quad \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén}.$$

Bizonyítás. Legyen $q = p$ ha $s > 1$, míg $q = s$ ha $s \leq 1$. Ekkor $rq > t$, B q-típusú és $\mathrm{E}|X|^q < \infty$. Így felhasználva a 4.4.6. megjegyzést kapjuk, hogy $\{\|S_{k_n}\|/k_n^{1/q}, n \in \mathbb{N}\}$ valószínűségben korlátos. Másrészt $\limsup_{n\to\infty} k_n/M(n-1) < \infty$ miatt $\{M(n)/M(n-1), n \in \mathbb{N}\}$ korlátos. Így a 4.3.2. következmény minden feltétele teljesül. □

5. Majdnem biztos központi határeloszlás-tételek m-függő, többindexes valószínűségi változókra

5.1. Jelölések, definíciók

Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza és $d \in \mathbb{N}$ rögzített. Jelölje $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, továbbá $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ Borel-halmazainak σ-algebráját. A $\mathbf{k}, \mathbf{n}, \ldots \in \mathbb{N}^d$ rácspontok koordinátáit jelöljük ugyanazon indexelt betűkkel, azaz például $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$. A $\leq$, $\not\leq$, min, $\rightarrow$ stb. legyenek értelmezve koordinátánként. Például $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ azt jelenti, hogy $n_i \rightarrow \infty$ minden $i \in \{1, \ldots, d\}$ esetén. Legyen $|\mathbf{n}| = n_1 \cdots n_d$ és $|\log \mathbf{n}| = \prod_{i=1}^d \log^+ n_i$, ahol $\log^+ x = \log x$, ha $x \geq e$ és $\log^+ x = 1$, ha $x < e$.

Jelölje δ_x az $x \in \mathbb{R}$ *pontra koncentrált egységnyi tömeget*, azaz $\delta_x : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, $\delta_x(B) = 1$, ha $x \in B$ és $\delta_x(B) = 0$, ha $x \notin B$. Jelöljük $\Rightarrow$ módon a gyenge konvergenciát, azaz $\mu_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$) és μ eloszlások esetén $\mu_{\mathbf{n}} \Rightarrow \mu$ ($\mathbf{n} \rightarrow \infty$) teljesül, ha

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \int f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{n}} = \int f \mathrm{d}\mu$$

minden korlátos és folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre.

Legyen $\{\zeta_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ valószínűségi mezőben. A majdnem biztos központi határeloszlás-tételek többindexes esetben a következőt állítják:

$$\frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu \quad (\mathbf{n} \rightarrow \infty), \quad \text{majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Megjegyezzük, hogy ezen típusú állítások nem közvetlen következményei az egydimenziós eseteknek.

A legegyszerűbb többdimenziós majdnem biztos központi határeloszlás-tételben $\zeta_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{k} \leq \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}} / \sqrt{|\mathbf{n}|}$, ahol $X_{\mathbf{k}}$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$) független, azonos eloszlású, 0 várható értékű és 1 szórású valószínűségi változók, továbbá $d_{\mathbf{k}} = 1/|\mathbf{k}|$, $D_{\mathbf{n}} = |\log \mathbf{n}|$, végül μ a $\mathcal{N}(0,1)$ standard normális eloszlás. (Lásd Fazekas és Rychlik (2001) [28] többindexes esetben, míg például Berkes (1998) [6] és Fazekas és Rychlik (2002) [27] egydimenziós esetben.)

Egy hasonló állítást fogunk bizonyítani, de úgynevezett m-függő esetben. Legyen $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ 0 várható értékű és véges szórású valószínűségi változók többindexes sorozata. Legyen $||\mathbf{n}|| := \max\{n_1, \ldots, n_d\}$ és $d(V_1, V_2) := \inf\{||\mathbf{n} - \mathbf{m}|| : \mathbf{n} \in V_1, \mathbf{m} \in V_2\}$, ahol $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$. Legyen $\sigma(V)$ (ahol $V \subset \mathbb{N}^d$) a legszűkebb olyan σ-algebra, melyre nézve $X_{\mathbf{n}}$ mérhető minden $\mathbf{n} \in V$ esetén.

5.1.1. definíció. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ valószínűségi változók sorozatát *m-függőnek* nevezzük, ha a $\sigma(V_1)$ és $\sigma(V_2)$ σ-algebrák minden olyan $V_1, V_2 \subset \mathbb{N}^d$ esetén függetlenek, melyekre $d(V_1, V_2) > m$.

Használni fogjuk még a következő jelöléseket: $S_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} X_{\mathbf{k}}$, $B_{\mathbf{n}} := \mathrm{D}^2 S_{\mathbf{n}}$, $\zeta_{\mathbf{n}} := S_{\mathbf{n}} / \sqrt{B_{\mathbf{n}}}$ és $\mu_{\zeta_{\mathbf{n}}}$ jelölje a $\zeta_{\mathbf{n}}$ valószínűségi változó eloszlását.

5.2. Előzetes tételek és lemmák

A következő tétel Fazekas és Rychlik (2001) [28] Theorem 2.1 és Remark 2.2 speciális esete ($B = \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = |x-y|$, $c_n^{(i)} = n$ és $\beta = 1$ választással).

5.2.1. tétel. *Tegyük fel, hogy bármely $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{h} \le \mathbf{l}$ esetén létezik $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ valószínűségi változó a következő tulajdonságokkal:*

a) $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}} = 0$ *ha* $\mathbf{h} = \mathbf{l}$;

b) $\zeta_{\mathbf{k}}$ *és* $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$, $\zeta_{\mathbf{l}}$ *és* $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$ *illetve* $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$ *és* $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ *valószínűségi változók függetlenek, ahol* $\mathbf{h} = \min\{\mathbf{k}, \mathbf{l}\}$;

c) *létezik* $c > 0$ *és* $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}^d$ *úgy, hogy* $\mathrm{E}(\zeta_{\mathbf{l}} - \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}})^2 \le c|\mathbf{h}|/|\mathbf{l}|$ *minden* $\mathbf{n}_0 \le \mathbf{h} \le \mathbf{l}$ *esetén.*

Legyen $0 \le d_k^{(i)} \le c \log \frac{k+1}{k}$, *tegyük fel, hogy* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} = \infty$ *minden* $i \in \{1, \ldots, d\}$*-re. Legyen* $d_{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^{d} d_{k_i}^{(i)}$ *és* $D_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$. *Ekkor bármely* μ *eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens egymással:*

1) $\displaystyle \frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu$ $(\mathbf{n} \to \infty)$ *majdnem minden* $\omega \in \Omega$ *esetén;*

2) $\displaystyle \frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \mu_{\zeta_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mu$ $(\mathbf{n} \to \infty)$.

A következő lemmát lásd Prakasa Rao (1981) [58] Lemma 5.

5.2.2. lemma. *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *m-függő 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy*

$$\text{létezik } M, \delta \ge 0, \text{ hogy } \mathrm{E}|X_{\mathbf{n}}|^{2+\delta} \le M < \infty \text{ minden } \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \text{ esetén.} \quad (5.2.1)$$

Ekkor létezik $C_\delta > 0$ *konstans úgy, hogy*

$$\mathrm{E}|S_{\mathbf{n}}|^{2+\delta} \le C_\delta |\mathbf{n}|^{\frac{2+\delta}{2}}$$

teljesül minden $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *esetén.*

5.2.3. lemma. (Tómács (2002) [71] Lemma 1.4.) *Legyen* $\mu, \mu_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$ *olyan eloszlások, melyekre* $\mu_{\mathbf{n}} \Rightarrow \mu$ $(\mathbf{n}\to\infty)$ *teljesül. Legyen* $\{d_{\mathbf{k}} \geq 0, \mathbf{k} \in \mathbb{N}^d\}$ *olyan nem azonosan 0 sorozat, melyre teljesül, hogy minden rögzített* $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{N}^d$ *esetén,*

$$\frac{1}{\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}\in A_{\mathbf{n}_0}} d_{\mathbf{k}} \to 0 \quad (\mathbf{n}\to\infty),$$

ahol $A_{\mathbf{n}_0} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{k} \leq \mathbf{n} \text{ és } \mathbf{k} \not\geq \mathbf{n}_0\}$. *Ekkor*

$$\frac{1}{\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}\mu_{\mathbf{k}} \Rightarrow \mu \quad (\mathbf{n}\to\infty).$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos folytonos függvény. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\mathbf{m}_0 \in \mathbb{N}^d$ úgy, hogy minden $\mathbf{n} \geq \mathbf{m}_0$ esetén

$$\left|\int f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{n}} - \int f \mathrm{d}\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}\in A_{\mathbf{m}_0}} d_{\mathbf{k}} < \frac{\varepsilon}{2K},$$

ahol $\left|\int f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{n}} - \int f \mathrm{d}\mu\right| \leq K < \infty$. Legyen $\gamma_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}\mu_{\mathbf{k}} \Big/ \sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\left|\int f \mathrm{d}\gamma_{\mathbf{n}} - \int f \mathrm{d}\mu\right| &\leq \frac{1}{\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}\in A_{\mathbf{m}_0}} d_{\mathbf{k}} \left|\int f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{k}} - \int f \mathrm{d}\mu\right| + \\ &+ \frac{1}{\sum_{\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{m}_0\leq\mathbf{k}\leq\mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \left|\int f \mathrm{d}\mu_{\mathbf{k}} - \int f \mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

melyből következik az állítás. □

Könnyen ellenőrizhető, hogy $d_{\mathbf{k}} = 1/|\mathbf{k}|$ választással teljesülnek az 5.2.3. lemma feltételei.

A következő állítás egy m-függő valószínűségi változókra vonatkozó központi határeloszlás-tétel, mely Prakasa Rao (1981) [58] Theorem 1 következménye.

5.2.4. tétel. *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ m*-függő 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy az* (5.2.1) *feltétel teljesül, továbbá*

$$\text{létezik } \sigma > 0 \text{ és } \mathbf{n}_\sigma \in \mathbb{N}^d \text{ úgy, hogy } \frac{B_{\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}|} \geq \sigma \text{ minden } \mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\sigma \text{ esetén.} \tag{5.2.2}$$

Ekkor

$$\mu_{\zeta_{\mathbf{n}}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad (\mathbf{n}\to\infty).$$

5.3. Eredmények

5.3.1. tétel. (Tómács (2002) [71] Theorem 2.1.) *Legyen* $\{X_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ *m-függő 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy az (5.2.1) és az (5.2.2) feltételek teljesülnek. Legyen* $0 \le d_k^{(i)} \le c \log \frac{k+1}{k}$ *olyan, hogy* $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(i)} = \infty$ *minden* $i \in \{1, \dots, d\}$*-re. Legyen* $d_{\mathbf{k}} := \prod_{i=1}^{d} d_{k_i}^{(i)}$ *és* $D_{\mathbf{n}} := \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}}$. *Ekkor minden μ eloszlás esetén a következő két állítás ekvivalens:*

1) $\displaystyle \frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \delta_{\zeta_{\mathbf{k}}(\omega)} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty)$ *majdnem minden* $\omega \in \Omega$ *esetén,*

2) $\displaystyle \frac{1}{D_{\mathbf{n}}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_{\mathbf{k}} \mu_{\zeta_{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mu \ (\mathbf{n} \to \infty).$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{h} \le \mathbf{l}$, $\mathbf{m} := (m, \dots, m) \in \mathbb{N}^d$, $V_{\mathbf{l}} := \{\mathbf{t} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{t} \le \mathbf{l}\}$, $V_{\mathbf{h},\mathbf{l}} := \{\mathbf{t} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{t} \le \mathbf{l} \text{ és } \mathbf{t} \not\le \mathbf{h}+\mathbf{m}\}$, $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}} := \frac{1}{\sqrt{B_{\mathbf{l}}}} \sum_{\mathbf{t} \in V_{\mathbf{h},\mathbf{l}}} X_{\mathbf{t}}$. Be fogjuk bizonyítani, hogy ebben az esetben teljesülnek az 5.2.1. tétel feltételei.

(I) $\zeta_{\mathbf{l},\mathbf{l}} = 0$, mert $V_{\mathbf{l},\mathbf{l}} = \emptyset$.

(II) Legyen $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$ és $\mathbf{h} := \min\{\mathbf{k}, \mathbf{l}\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{k}} &\quad \sigma(V_{\mathbf{k}})\text{-mérhető}, \\ \zeta_{\mathbf{l}} &\quad \sigma(V_{\mathbf{l}})\text{-mérhető}, \\ \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}} &\quad \sigma(V_{\mathbf{h},\mathbf{l}})\text{-mérhető, ha } V_{\mathbf{h},\mathbf{l}} \ne \emptyset, \text{ különben } \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}} = 0, \\ \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}} &\quad \sigma(V_{\mathbf{h},\mathbf{k}})\text{-mérhető, ha } V_{\mathbf{h},\mathbf{k}} \ne \emptyset, \text{ különben } \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}} = 0, \\ &d(V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{h},\mathbf{l}}) > m, \text{ ha } V_{\mathbf{h},\mathbf{l}} \ne \emptyset, \\ &d(V_{\mathbf{l}}, V_{\mathbf{h},\mathbf{k}}) > m, \text{ ha } V_{\mathbf{h},\mathbf{k}} \ne \emptyset, \\ &d(V_{\mathbf{h},\mathbf{k}}, V_{\mathbf{h},\mathbf{l}}) > m, \text{ ha } V_{\mathbf{h},\mathbf{k}} \ne \emptyset \text{ és } V_{\mathbf{h},\mathbf{l}} \ne \emptyset. \end{aligned}$$

Így a következő párok függetlenek: $\zeta_{\mathbf{k}}$ és $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$; $\zeta_{\mathbf{l}}$ és $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$; $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{k}}$ és $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$.

(III) A Ljapunov-egyenlőtlenség szerint (lásd például Shiryayev (1984) [67] 191. oldal) $(\mathrm{E}|\xi|^s)^{1/s} \le (\mathrm{E}|\xi|^t)^{1/t}$, ha $0 < s \le t$. Így

$$\mathrm{E}S_{\mathbf{h}+\mathbf{m}}^2 \le (\mathrm{E}|S_{\mathbf{h}+\mathbf{m}}|^{2+\delta})^{\frac{2}{2+\delta}}.$$

Az 5.2.2. lemma miatt

$$\mathrm{E}S_{\mathbf{h}+\mathbf{m}}^2 \le \left(c_1 |\mathbf{h}+\mathbf{m}|^{\frac{2+\delta}{2}}\right)^{\frac{2}{2+\delta}} = c_2 |\mathbf{h}+\mathbf{m}|. \tag{5.3.1}$$

Legyen $\mathbf{h}, \mathbf{l} \in \mathbb{N}^d$ olyan, hogy $\max\{\mathbf{m}, \mathbf{n}_\sigma\} \le \mathbf{h} \le \mathbf{l}$. Ekkor $\mathbf{m} \le \mathbf{h}$ és (5.3.1) miatt

$$\mathrm{E}(\zeta_\mathbf{l} - \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}})^2 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{B_\mathbf{l}}} S_{\mathbf{h}+\mathbf{m}}\right)^2 = \frac{1}{B_\mathbf{l}} \mathrm{E} S^2_{\mathbf{h}+\mathbf{m}} \le \frac{c_2}{B_\mathbf{l}} |\mathbf{h}+\mathbf{m}|. \tag{5.3.2}$$

Mivel $\mathbf{l} \ge \mathbf{n}_\sigma$, így az (5.2.2) feltétel miatt $1/B_\mathbf{l} \le 1/\sigma|\mathbf{l}|$ teljesül. Ezért (5.3.2) alapján

$$\mathrm{E}(\zeta_\mathbf{l} - \zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}})^2 \le \frac{c_2}{\sigma} \frac{|\mathbf{h}+\mathbf{m}|}{|\mathbf{l}|} = c_3 \frac{\prod_{i=1}^d (h_i + m)}{|\mathbf{l}|} \le 2^d c_3 \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{l}|} = c_4 \frac{|\mathbf{h}|}{|\mathbf{l}|}.$$

Emiatt a $\zeta_\mathbf{l}$ és $\zeta_{\mathbf{h},\mathbf{l}}$ valószínűségi változók teljesítik az 5.2.1. tétel feltételeit, melyből következik az állítás. □

5.3.2. tétel. (Tómács (2002) [71] Theorem 2.2.) *Legyen $\{X_\mathbf{n}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ m-függő, 0 várható értékű valószínűségi változók sorozata. Tegyük fel, hogy az* (5.2.1) *és az* (5.2.2) *feltételek teljesülnek valamely $\delta > 0$ esetén. Ekkor*

$$\frac{1}{|\log \mathbf{n}|} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_\mathbf{k}(\omega)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad (\mathbf{n} \to \infty) \quad \textit{majdnem minden } \omega \in \Omega \textit{ esetén.}$$

Bizonyítás. Legyen $d_k^{(i)} := 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Az 5.3.1. tétel feltételei ekkor teljesülnek, mert $2 \le \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, így $\frac{1}{k} \le \frac{1}{\log 2} \log \frac{k+1}{k}$, továbbá $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$. Ekkor $d_\mathbf{k} = 1/|\mathbf{k}|$ és

$$D_\mathbf{n} = \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \prod_{i=1}^d \frac{1}{k_i} = \prod_{i=1}^d \sum_{k_i=1}^{n_i} \frac{1}{k_i} \sim \prod_{i=1}^d \log n_i \sim |\log \mathbf{n}| \tag{5.3.3}$$

(ahol $a_\mathbf{n} \sim b_\mathbf{n}$, ha $\lim_{\mathbf{n}\to\infty} a_\mathbf{n}/b_\mathbf{n} = 1$). Az 5.2.4. tétel miatt $\mu_{\zeta_\mathbf{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$ $(\mathbf{n}\to\infty)$. Ezért az 5.2.3. lemmából következik, hogy

$$\frac{1}{D_\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} d_\mathbf{k} \mu_{\zeta_\mathbf{k}} = \frac{1}{\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \mu_{\zeta_\mathbf{k}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Most felhasználva az 5.3.1. tételt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|}} \sum_{\mathbf{k} \le \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{k}|} \delta_{\zeta_\mathbf{k}(\omega)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1) \ (\mathbf{n}\to\infty) \text{ majdnem minden } \omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Emiatt és (5.3.3) miatt kapjuk az állítást. □

6. A Rosenthal-egyenlőtlenség keverő mezőkre

Az aszimptotikus tételek bizonyításának hasznos eszköze a Rosenthal-egyenlőtlenség. Független, centralizált $X_1, \dots, X_n$ valószínűségi változókra az alakja:

$$\frac{1}{2}\max\left\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_i|^p\Big)^{1/p}, \Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_i|^2\Big)^{1/2}\right\} \le \left(\mathrm{E}\Big|\sum_{i=1}^{n}X_i\Big|^p\right)^{1/p} \le$$
$$\le K_p \max\left\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_i|^p\Big)^{1/p}, \Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_i|^2\Big)^{1/2}\right\}.$$

(Itt feltesszük, hogy $p > 2$ és $\mathrm{E}|X_i|^p < \infty$. A $K_p > 0$ konstans csak p-től függ.)

Utev (1984) [73] keverő sorozatokra, míg Doukhan (1994) [14] keverő mezőkre közöl Rosenthal-típusú egyenlőtlenségeket. A bizonyítás fő lépései: az egyenlőtlenség igazolása páros pozitív kitevőkre, azután az interpolációs lemma segítségével a többi kitevőre. Azonban Doukhan (1994) [14] 27. oldalon megjegyzi, hogy Utev (1984) [73] interpolációs lemmájának bizonyítása nem világos. (Számunkra nem volt például világos Utev (1984) [73], Lemma 4.1 bizonyításában a (4.5) képlet előtti sor.) Doukhan (1994) [14] Theorem 1 ezért a Rosenthal-egyenlőtlenségben csak az $\varepsilon > 0$ esetet tárgyalja. Mi is ugyanezt tesszük a 6.3.1. tételben. (Megjegyezzük, hogy a Shklyar (2000) [68] cikkről szóló ismertetés szerint az interpolációs lemma $\varepsilon = 0$-ra is igaz, de ez a cikk számunkra nem volt elérhető.)

A fejezet fő eredménye az α-keverő mezőkre vonatkozó Rosenthal-egyenlőtlenség (6.3.1. tétel) részletes bizonyítása. A bizonyítás fő lépései: a páros egész kitevőkre vonatkozó Rosenthal-egyenlőtlenség (ez lényegében a 6.3.4. lemmában van), valamint az interpolációs lemma (6.2.3. lemma).

A 6.3.1. tétel mind alakjában, mind bizonyításában Doukhan (1994) [14] 26. oldal, Theorem 1-nek egy változata.

Célunk ezzel az volt, hogy Doukhan fenti tételének vázlatos bizonyításában a számunkra nem világos lépéseket áthidaljuk, és részletes bizonyítást adjunk a tételre és a hozzá vezető lemmákra. Valójában Doukhan bizonyításában a h számú pont lehetséges elhelyezkedéseinek kezelése nem érthető.

6.1. Jelölések, definíciók

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ egy valószínűségi mező. Ebben a fejezetben definiált valószínűségi változók legyenek ebben a valószínűségi mezőben értelmezettek. Legyenek $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebrák. Az *α-keverési együtthatót* a következő módon definiáljuk:

$$\alpha(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) := \sup\{|\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)| : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

A kovariancia-egyenlőtlenség α-keverő esetben a következő (lásd például, Doukhan (1994) [14] 9. oldal.):

$$|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq 8\alpha^{1/r}\big(\sigma(X), \sigma(Y)\big)\|X\|_p\|Y\|_q,$$

ahol $r, p, q \geq 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Legyen $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza, $d \in \mathbb{N}$ rögzített pozitív egész szám, továbbá $I \subseteq \mathbb{Z}^d$ nem üres halmaz. Tekintsük $\mathbb{Z}^d$-ben a $\|.\|$ maximum normát és az általa generált ϱ távolságot, azaz $\|\mathbf{n}\| := \max\{|n_1|, \ldots, |n_d|\}$, ahol $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, továbbá $\varrho(\mathbf{n}, \mathbf{m}) := \|\mathbf{n} - \mathbf{m}\|$. Legyen $A, B \subset \mathbb{Z}^d$ esetén $\varrho(A, B) := \inf\{\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$. Legyen $Y := \{Y_\mathbf{t} : \mathbf{t} \in I\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata. Az Y *α-keverési együtthatója* alatt a következőt értjük:

$$\alpha_Y(r, u, v) := \sup\{\alpha(\mathcal{F}_{I_1}, \mathcal{F}_{I_2}) : \varrho(I_1, I_2) \geq r,\ \mathrm{card}(I_1) \leq u,\ \mathrm{card}(I_2) \leq v\},$$

ahol I_1 és I_2 nem üres véges részhalmazai I-nek, $\mathcal{F}_{I_i} = \sigma\{Y_\mathbf{t} : \mathbf{t} \in I_i\}$, $i = 1, 2$.

Legyen T véges részhalmaza I-nek. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$L(\mu, \varepsilon, T) := \sum_{\mathbf{t}\in T} \left(\mathrm{E}|Y_\mathbf{t}|^{\mu+\varepsilon}\right)^{\mu/(\mu+\varepsilon)} = \sum_{\mathbf{t}\in T} \|Y_\mathbf{t}\|^{\mu}_{\mu+\varepsilon}.$$

$$D(h, \varepsilon, T) := \begin{cases} L(h, 0, T), & \text{ha } 0 < h \leq 1, \\ L(h, \varepsilon, T), & \text{ha } 1 < h \leq 2, \\ \max\{L(h, \varepsilon, T), L^{h/2}(2, \varepsilon, T)\}, & \text{ha } 2 < h. \end{cases}$$

Legyen $s_r := \mathrm{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : \|\mathbf{t}\| = r\} \cap I)$ és $b_r := \mathrm{card}(\{\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d : \|\mathbf{t}\| \leq r\} \cap I)$, továbbá

$$c^{(\alpha)}_{u,h-u} := 8u!(h-u-1)!(h-1)! \sum_{r=1}^{\infty} \big(\alpha_Y(r, u, h-u)\big)^{\varepsilon/(h+\varepsilon)} s_r b_r^{h-2}.$$

6.2. Segéd eredmények és egy interpolációs lemma

6.2.1. lemma. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Lemma 1.) *Legyen (M,ρ) metrikus tér, $L \subseteq M$ véges halmaz és $r := \max\{\rho(J,\overline{J}) : J \subset L, J \neq \emptyset, J \neq L\}$. Ekkor létezik $A \subset L$ ($A \neq \emptyset$, $A \neq L$) úgy, hogy $\rho(A,\overline{A}) = r$, továbbá van egy olyan összefüggő gráf, melynek élei nem hosszabbak r-nél és csúcspontjai pontosan az A pontjai, másrészt ugyanez igaz $\overline{A}$-re is.*

Bizonyítás. Legyen $s,t \in U \subseteq L$. Azt mondjuk, hogy s *r-összefüggő* t-vel U-ban, ha létezik egy olyan összefüggő gráf U-ban, melynek s és t is csúcspontja, továbbá élei nem hosszabbak r-nél. Legyen $S_1 \subset L$ ($S_1 \neq \emptyset$, $S_1 \neq L$) olyan, hogy, $\rho(S_1,\overline{S_1}) = r$. Legyen $S_2 := \overline{S_1}$, továbbá $t_1 \in S_1$, $t_2 \in S_2$ olyanok, hogy $\rho(t_1,t_2) = r$. $S_i^{(1)}$ legyen a t_i-vel S_i-ben r-összefüggő pontok halmaza ($i = 1,2$). Ekkor $\rho(\{S_1^{(1)} \cup S_2^{(1)}\}, \{(S_1 \setminus S_1^{(1)}) \cup (S_2 \setminus S_2^{(1)})\}) \geq r$. Az r definíciója miatt így vagy a második részhalmaz üres halmaz, vagy az előbbi távolság r-rel egyenlő. Az első esetben kész a bizonyítás.

A második esetben legyen $\tilde{S}_1^{(1)}$ azon $S_1 \setminus S_1^{(1)}$-beli pontok halmaza, melyek $S_2^{(1)}$-gyel r-összefüggőek $(S_1 \setminus S_1^{(1)}) \cup S_2^{(1)}$-ben. Az $\tilde{S}_2^{(1)}$ definíciója hasonló. Nyilván $\tilde{S}_1^{(1)} \cup \tilde{S}_2^{(1)} \neq \emptyset$. Vizsgáljuk az $(S_1 \setminus \tilde{S}_1^{(1)}) \cup \tilde{S}_2^{(1)}$ és $(S_2 \setminus \tilde{S}_2^{(1)}) \cup \tilde{S}_1^{(1)}$ halmazokat. Ezek távolsága r. Másrészt ezekben a halmazokban a t_1-gyel r-összefüggő pontok száma $(S_1 \setminus \tilde{S}_1^{(1)}) \cup \tilde{S}_2^{(1)}$-ben, vagy a t_2-vel r-összefüggő pontok száma $(S_2 \setminus \tilde{S}_2^{(1)}) \cup \tilde{S}_1^{(1)}$-ben nagyobb, mint a kiinduló esetben volt. Véges számú lépés után a fenti eljárás megszakad, így kapjuk a lemmát. □

A következő lemma Doukhan (1994) [14] Lemma 2 egy verziója. Ott $(a+b) \geq 2$ páros egész szám.

6.2.2. lemma. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Lemma 2.) *Ha $\delta \geq 0$, $a \geq 2$ és $b \geq 2$ valós számok, akkor*

$$D(a,\delta,T)D(b,\delta,T) \leq D(a+b,\delta,T).$$

A bizonyítás alapja a Hölder-egyenlőtlenség:

Legyen X és Y valós értékű valószínűségi változók. Ha $p > 1$ és $q = p/(p-1)$, akkor

$$\mathrm{E}|XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q. \tag{6.2.1}$$

Ha $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$, $p > 1$ és $q = p/(p-1)$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}. \tag{6.2.2}$$

A 6.2.2. lemma bizonyítása. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
L_\nu &= L(\nu, \delta, T), \\
D_\nu &= D(\nu, \delta, T), \\
X_{\mathbf{t}} &= Y_{\mathbf{t}} L_2^{-1/2}, \quad \mathbf{t} \in T, \\
L_\nu^* &= \sum_{\mathbf{t} \in T} \|X_{\mathbf{t}}\|_{\nu+\delta}^{\nu}, \\
D_\nu^* &= L_\nu^* \vee (L_2^*)^{\nu/2}, \quad \text{ha} \quad \nu \ge 2, \\
c &= a + b.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$L_\nu^* = \sum_{\mathbf{t} \in T} \left(\mathrm{E}\left|Y_{\mathbf{t}} L_2^{-1/2}\right|^{\nu+\delta}\right)^{\nu/(\nu+\delta)} = L_2^{-\nu/2} L_\nu,$$

így azt kapjuk, hogy

$$D_\nu^* = L_2^{-\nu/2} L_\nu \vee L_2^{-\nu/2} L_2^{\nu/2} = L_2^{-\nu/2} D_\nu, \quad \text{ha} \quad \nu \ge 2, \tag{6.2.3}$$

és

$$L_2^* = 1. \tag{6.2.4}$$

(6.2.4) miatt

$$D_\nu^* = L_\nu^* \vee (L_2^*)^{\nu/2} = L_\nu^* \vee 1, \quad \text{ha} \quad \nu \ge 2. \tag{6.2.5}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy bármely $a \ge 2$ és $b \ge 2$ esetén

$$D_a^* D_b^* = L_a^* L_b^* \vee L_a^* \vee L_b^* \vee 1. \tag{6.2.6}$$

(a) Először tegyük fel, hogy $a > 2$. Legyen

$$u := \frac{(c+\delta)(a-2)}{c-2} \quad \text{és} \quad v := \frac{(2+\delta)(c-a)}{c-2}.$$

Ekkor $u+v=a+\delta$, így (6.2.1) miatt $p=(c+\delta)/u$ és $q=(2+\delta)/v$ választással

$$\mathrm{E}|X_{\mathbf{t}}|^{a+\delta}=\mathrm{E}|X_{\mathbf{t}}|^{u+v}\leq \big\||X_{\mathbf{t}}|^u\big\|_{(c+\delta)/u}\big\||X_{\mathbf{t}}|^v\big\|_{(2+\delta)/v}.$$

Ebből következik, hogy

$$L_a^*\leq\sum_{\mathbf{t}\in T}\|X_{\mathbf{t}}\|_{c+\delta}^{rc}\|X_{\mathbf{t}}\|_{2+\delta}^{2s},\tag{6.2.7}$$

ahol $r=ua/c(a+\delta)$ és $s=av/2(a+\delta)$. Mivel $0<r<a/c<1$, (6.2.2) alkalmazható $p=1/r$ és $q=1/(1-r)$ választással (6.2.7) jobb oldalára, amiből adódik, hogy $L_a^*\leq(L_c^*)^rA^{1-r}$, ahol $A=\sum_{\mathbf{t}\in T}\|X_{\mathbf{t}}\|_{2+\delta}^{2s/(1-r)}$. Mivel $s/(1-r)\geq1$, ezért (6.2.4) miatt $A\leq1$, így $L_a^*\leq(L_c^*)^r$. Emiatt, ha $L_a^*\geq1$, akkor $L_c^*\geq1$. Ebből következően $0<r<a/c<1$ miatt

$$L_a^*\leq(L_c^*)^r\leq(L_c^*)^{a/c}\leq L_c^*,\quad\text{ha}\quad L_a^*\geq1.\tag{6.2.8}$$

(a') Most tegyük fel, hogy $a>2$ és $b>2$. Ekkor (6.2.8) érvényes marad b-re is:

$$L_b^*\leq(L_c^*)^{b/c}\leq L_c^*,\quad\text{ha}\quad L_b^*\geq1.\tag{6.2.9}$$

Ezen két egyenlőtlenség alapján $L_a^*L_b^*\leq L_c^*\vee1$. Ezért felhasználva a (6.2.6), (6.2.8), (6.2.9) és (6.2.5) egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$D_a^*D_b^*\leq(L_c^*\vee1)\vee L_a^*\vee L_b^*=L_c^*\vee1=D_c^*.$$

Így (6.2.3) miatt kapjuk az állítást.

(b) Most tegyük fel, hogy $a=b=2$. Felhasználva a (6.2.6), (6.2.4) és (6.2.5) összefüggéseket az adódik, hogy

$$D_2^*D_2^*=1\leq1\vee L_4^*=D_4^*.$$

Így (6.2.3) miatt kapjuk az állítást.

(c) Ha $a>2$ és $b=2$ akkor (6.2.4), (6.2.5) és (6.2.8) miatt

$$D_a^*D_2^*=D_a^*\leq D_c^*.$$

Így (6.2.3) miatt kapjuk az állítást.

(d) Végül $b>2$ és $a=2$ esetén a bizonyítás ugyanaz, mint a (c) esetben. Ezzel teljes a 6.2.2. lemma bizonyítása. □

A következő interpolációs lemma Doukhan (1994) [14] Lemma 1 és Utev (1984) [73] Lemma 4.4 egy verziója.

Legyen B egy szeparábilis Banach-tér $\|.\|$ normával, $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$ ($i = 1, \ldots, n$) σ-algebrák és $F := \{\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n\}$. Legyen $\eta := \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ B-értékű $\mathbf{0}$ várható értékű valószínűségi változók egy halmaza. Ekkor azt mondjuk, hogy η *centralizált*. (Itt $\mathbf{0}$ a B zérus elemét, míg a várható érték a Bochner-integrált jelenti.) Azt mondjuk, hogy η (F, B)*-adaptált*, ha η_i $\mathcal{F}_i$-mérhető minden $i = 1, \ldots, n$ esetén. Használni fogjuk a következő jelöléseket:

$$M(\nu, \delta, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{E}\|\eta_i\|^{\nu+\delta}\right)^{\nu/(\nu+\delta)} = \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i\|_{\nu+\delta}^{\nu},$$

$$Q(\nu, \delta, \eta) = \begin{cases} M(\nu, \delta, \eta), & \text{ha } 1 \le \nu \le 2, \\ M(\nu, \delta, \eta) \vee M^{\nu/2}(2, \delta, \eta), & \text{ha } \nu > 2. \end{cases}$$

6.2.3. lemma. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Lemma 3.) *Legyen $\nu \ge 1$, $\delta > 0$ és $c \ge 1$. Tegyük fel, hogy tetszőleges centralizált és (F, B)-adaptált $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ esetén*

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \eta_i\right\|^{\nu} \le cQ(\nu, \delta, \eta). \tag{6.2.10}$$

Legyen $t_0 = 1 \vee (\nu/2) \vee (\nu - \delta)$. Ekkor bármely centralizált és (F, B)-adaptált $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ és bármely olyan t esetén, melyre $t_0 \le t \le \nu$, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right\|^{t} \le c2^{4\nu-1} Q(t, \delta, \varphi).$$

(Megjegyezzük, hogy $c \ge 1$ következik a többi feltételből.) A bizonyításhoz szükségünk lesz a következő jól ismert egyenlőtlenségekre:

1. (C_p-egyenlőtlenség) Ha $x, y \in B$ és $p \ge 1$, akkor

$$\|x + y\|^p \le 2^{p-1}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right), \tag{6.2.11}$$

ha $0 < p \le 1$, akkor

$$\|x + y\|^p \le \|x\|^p + \|y\|^p. \tag{6.2.12}$$

2. Legyen X B-értékű valószínűségi változó. Ha $p \geq 1$, akkor

$$(\mathrm{E}\|X\|)^p \leq \mathrm{E}\|X\|^p \tag{6.2.13}$$

és

$$\mathrm{E}\|X - \mathrm{E}X\|^p \leq 2^p \mathrm{E}\|X\|^p. \tag{6.2.14}$$

Ha $0 < p \leq 1$, akkor

$$(\mathrm{E}\|X\|)^p \geq \mathrm{E}\|X\|^p \tag{6.2.15}$$

és

$$\mathrm{E}\|X - \mathrm{E}X\|^p \leq 2\,(\mathrm{E}\|X\|)^p\,. \tag{6.2.16}$$

3. Ha X B-értékű valószínűségi változó és $0 < q \leq p$, akkor

$$\|X\|_q \leq \|X\|_p. \tag{6.2.17}$$

4. Ha $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $p \geq 1$, akkor

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i| \right)^p. \tag{6.2.18}$$

A 6.2.3. lemma bizonyítása. Legyen $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ (F, B)-adaptált és $t_0 \leq t \leq \nu$ rögzített. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
Q &= Q(t, \delta, \varphi),\\
y &= Q^{1/t},\\
T_i &= \varphi_i \mathrm{I}\{\|\varphi_i\| \leq y\},\ i = 1, \ldots, n,\\
Y_i &= \varphi_i \mathrm{I}\{\|\varphi_i\| > y\},\ i = 1, \ldots, n,\\
\eta_i &= Y_i - \mathrm{E}Y_i,\ i = 1, \ldots, n,\\
\eta &= \{\eta_1, \ldots, \eta_n\},\\
\psi_i &= T_i - \mathrm{E}T_i,\ i = 1, \ldots, n,\\
\psi &= \{\psi_1, \ldots, \psi_n\},\\
\xi_i &= z\left(\|\eta_i\|^{t/\nu} - \mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right),\ \text{ahol } z \in B, \|z\| = 1,\ i = 1, \ldots, n,\\
\xi &= \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}.
\end{aligned}$$

Ekkor $\eta_i + \psi_i = \varphi_i$ és $t \geq 1$, így (6.2.11) miatt

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^n \varphi_i\right\|^t \leq 2^{t-1}\left(\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^n \eta_i\right\|^t + \mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^n \psi_i\right\|^t\right). \tag{6.2.19}$$

$t/\nu \le 1$ és $\nu \ge 1$, így (6.2.12) és (6.2.11) alapján

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\|^{t} &= \mathrm{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\|^{t/\nu}\right)^{\nu} \le \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu} = \\
&= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\|\eta_i\|^{t/\nu}-\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu} \le \\
&\le 2^{\nu-1}\left(\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\|^{\nu}+\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu}\right).
\end{aligned}$$

ξ centralizált és (F,B)-adaptált, így az előbbi egyenlőtlenség és (6.2.10) miatt

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right\|^{t} \le 2^{\nu-1}(V+W), \tag{6.2.20}$$

ahol $V = cQ(\nu,\delta,\xi)$ és $W = \left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right)^{\nu}$. Mivel ψ is centralizált, (F,B)-adaptált, továbbá $\nu/t \ge 1$, így használva a (6.2.13) és (6.2.10) egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\psi_i\right\|^{t} \le \left(\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\psi_i\right\|^{\nu}\right)^{t/\nu} \le U, \tag{6.2.21}$$

ahol $U = (cQ(\nu,\delta,\psi))^{t/\nu}$. Ekkor (6.2.19), (6.2.20) és (6.2.21) alapján

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\right\|^{t} \le 2^{t-1}U + 2^{t+\nu-2}V + 2^{t+\nu-2}W. \tag{6.2.22}$$

A következőkben U, V és W becslésével foglalkozunk.

(U) Legyen $u := \nu(t+\delta)/(t\nu+t\delta)$. Ekkor $u \ge 1$, továbbá $\nu+\delta \ge 1$, ezért (6.2.14) és (6.2.13) miatt

$$\mathrm{E}\|\psi_i\|^{\nu+\delta} \le 2^{\nu+\delta}\mathrm{E}\|T_i\|^{\nu+\delta} \le 2^{\nu+\delta}\left(\mathrm{E}\|T_i\|^{u(\nu+\delta)}\right)^{1/u}.$$

Ebből

$$\begin{aligned}
M(\nu,\delta,\psi) &\le \sum_{i=1}^{n}\left(2^{\nu+\delta}\left(\mathrm{E}\|T_i\|^{u(\nu+\delta)}\right)^{1/u}\right)^{\nu/(\nu+\delta)} = \\
&= 2^{\nu}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{E}\|T_i\|^{u(\nu+\delta)}\right)^{\nu/u(\nu+\delta)}.
\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

$\mathrm{I}\{\|\varphi_i\| \le y\}\|\varphi_i\|^{u(\nu+\delta)-(t+\delta)} \le y^{u(\nu+\delta)-(t+\delta)}$, mert $u(\nu+\delta)-(t+\delta) \ge 0$. Ezért — felhasználva y definícióját —

$$\mathrm{E}\|T_i\|^{u(\nu+\delta)} = \mathrm{E}\left(\|\varphi_i\|^{t+\delta}\mathrm{I}\{\|\varphi_i\| \le y\}\|\varphi_i\|^{u(\nu+\delta)-(t+\delta)}\right) \le$$
$$\le Q^{\frac{t+\delta}{t}\left(\frac{\nu}{t}-1\right)}\mathrm{E}\|\varphi_i\|^{t+\delta}.$$

(Itt kihasználtuk, hogy $0 \le \frac{\nu}{t}-1 \le 1$.) Ez alapján és (6.2.23) miatt

$$M(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t-1}M(t,\delta,\varphi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}. \tag{6.2.24}$$

(a) Tegyük fel, hogy $\nu \le 2$. Ekkor (6.2.24) szerint

$$Q(\nu,\delta,\psi) = M(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}.$$

(b) Ha $t \le 2 \le \nu$, akkor (6.2.24) szerint

$$M^{\nu/2}(2,\delta,\psi) \le \left(2^2 Q^{2/t}\right)^{\nu/2} = 2^\nu Q^{\nu/t},$$

és $M(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}$. Tehát $Q(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}$.

(c) Tegyük fel, hogy $2 \le t$. Ekkor (6.2.14) és $\|T_i\| \le \|\varphi_i\|$ miatt

$$M(2,\delta,\psi) = \sum_{i=1}^n \left(\mathrm{E}\|T_i - \mathrm{E}T_i\|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)} \le$$
$$\le 4\sum_{i=1}^n \left(\mathrm{E}\|T_i\|^{2+\delta}\right)^{2/(2+\delta)} \le 4M(2,\delta,\varphi) \le 4Q^{2/t}.$$

Ez az egyenlőtlenség és (6.2.24) implikálja, hogy $Q(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}$.

Az (a), (b) és (c) esetekből tehát $Q(\nu,\delta,\psi) \le 2^\nu Q^{\nu/t}$ minden $t_0 \le t \le \nu$ esetén, így

$$U \le \left(c2^\nu Q^{\nu/t}\right)^{t/\nu} = c^{t/\nu}2^t Q. \tag{6.2.25}$$

(V) (6.2.14) szerint

$$\mathrm{E}\|\xi_i\|^{\nu+\delta} = \mathrm{E}\left|\|\eta_i\|^{t/\nu} - \mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu}\right|^{\nu+\delta} \le 2^{\nu+\delta}\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t(\nu+\delta)/\nu}. \tag{6.2.26}$$

(6.2.26), (6.2.17), (6.2.14) és $\|Y_i\| \le \|\varphi_i\|$ implikálja a következő egyenlőtlenséget:

$$M(\nu,\delta,\xi) \le 2^\nu \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^t_{t(\nu+\delta)/\nu} \le 2^\nu \sum_{i=1}^n \|\eta_i\|^t_{t+\delta} \le$$
$$\le 2^{\nu+t}\sum_{i=1}^n \left(\mathrm{E}\|Y_i\|^{t+\delta}\right)^{t/(t+\delta)} \le 2^{\nu+t}M(t,\delta,\varphi) \le 2^{\nu+t}Q. \tag{6.2.27}$$

(a) Tegyük fel, hogy $\nu \le 2$. Ekkor (6.2.27) miatt

$$Q(\nu,\delta,\xi) = M(\nu,\delta,\xi) \le 2^{\nu+t}Q.$$

(b) Ha $t \le 2 \le \nu$, akkor (6.2.26) és (6.2.14) felhasználásával

$$\begin{aligned} M(2,\delta,\xi) &\le 4\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{E}\|\eta_i\|^{t(2+\delta)/\nu}\right)^{2/(2+\delta)} \le \\ &\le 4^{1+t/\nu}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{E}\|Y_i\|^{t(2+\delta)/\nu}\right)^{2/(2+\delta)}. \end{aligned} \tag{6.2.28}$$

(Felhasználtuk még, hogy $t \ge \nu/2$.) Mivel $t(2+\delta)/\nu - (t+\delta) \le 0$, ezért

$$\mathrm{I}\{\|\varphi_i\| > y\}\|\varphi_i\|^{t(2+\delta)/\nu-(t+\delta)} \le y^{t(2+\delta)/\nu-(t+\delta)}.$$

Így (6.2.28) alapján

$$M(2,\delta,\xi) \le$$
$$\le 4^{1+t/\nu}Q^{2((2+\delta)/\nu-(t+\delta)/t)/(2+\delta)}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\mathrm{E}\|\varphi_i\|^{t+\delta}\right)^{t/(t+\delta)}\right)^{2(t+\delta)/t(2+\delta)}.$$

Így (6.2.18) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M(2,\delta,\xi) \le 4^{1+t/\nu}Q^{2((2+\delta)/\nu-(t+\delta)/t)/(2+\delta)}(M(t,\delta,\varphi))^{2(t+\delta)/t(2+\delta)} \le \\ \le 4^{1+t/\nu}Q^{2/\nu}. \end{aligned}$$

Ezen egyenlőtlenség és (6.2.27) miatt $Q(\nu,\delta,\xi) \le 2^{\nu+t}Q$.

(c) Legyen $2 \le t$. Mivel (6.2.28) ekkor is érvényes, ezért

$$M(2,\delta,\xi) \le 4^{1+t/\nu}Q^{2/\nu-2/t}M(2,\delta,\varphi) \le 4^{1+t/\nu}Q^{2/\nu-2/t}Q^{2/t} = 4^{1+t/\nu}Q^{2/\nu}.$$

Itt felhasználtuk egyrészt Q definícióját, másrészt hogy

$$\mathrm{I}\{\|\varphi_i\|>y\}\|\varphi_i\|^{t(2+\delta)/\nu-(2+\delta)} \le y^{t(2+\delta)/\nu-(2+\delta)}.$$

Ebből és (6.2.27)-ből $Q(\nu,\delta,\xi) \le 2^{\nu+t}Q$.

Az (a), (b) és (c) pontok miatt tehát $Q(\nu,\delta,\xi) \le 2^{\nu+t}Q$ minden $t_0 \le t \le \nu$ esetén, így

$$V \le c2^{\nu+t}Q. \tag{6.2.29}$$

(W) (6.2.15) és (6.2.16) miatt

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu} \leq \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{E}\|Y_i - \mathrm{E}Y_i\|)^{t/\nu} \leq 2\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{E}\|Y_i\|)^{t/\nu}.$$

Másrészt $\mathrm{I}\{\|\varphi_i\| > y\}\|\varphi_i\|^{1-\nu} \leq y^{1-\nu}$, így

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu} \leq 2Q^{1/\nu-1} \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\|_{\nu}^{t}.$$

Mivel $t + \delta \geq \nu$, ezért (6.2.17) alkalmazásával

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\|\eta_i\|^{t/\nu} \leq 2Q^{1/\nu-1} M(t,\delta,\varphi) \leq 2Q^{1/\nu}.$$

Ebből

$$W \leq 2^{\nu} Q. \tag{6.2.30}$$

Végül (6.2.22), (6.2.25), (6.2.29) és (6.2.30) alapján következik, hogy

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right\|^{t} \leq 2^{t-1}(c^{t/\nu}2^{t}Q + 2^{\nu-1}c2^{\nu+t}Q + 2^{\nu-1}2^{\nu}Q) \leq c2^{4\nu-1}Q.$$

Ezzel befejeztük a 6.2.3. lemma bizonyítását. □

6.2.4. következmény. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Corollary 1.) *Legyen $\nu \geq 1$, $\delta > 0$ és $c \geq 1$. Tegyük fel, hogy* (6.2.10) *teljesül minden $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ centralizált, (F, B)-adaptált családra. Ekkor minden centralizált és (F, B)-adaptált $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, továbbá $1 \leq t \leq \nu$ esetén*

$$\mathrm{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right\|^{t} \leq CQ(t,\delta,\varphi),$$

ahol $C = c2^{(\nu-t+\delta)(2\nu+2t-1)/\delta}$, ha $t \geq 2\delta$.

Bizonyítás. A 6.2.3. lemma alapján a ν kitevőt csökkenthetjük egészen $t_0 = 1 \vee (\nu/2) \vee (\nu - \delta)$-ig. Ha most $t \geq 1$, $t \geq 2\delta$, akkor ez a t „elérhető” $t + \delta$-ról, ... Azaz ilyenkor minden lépésben δ csökkentéssel számolhatunk. Legfeljebb $k = \left[\frac{\nu-t}{\delta} + 1\right]$ lépéssel eljutunk ν-től t-ig. Azaz $C \leq c2^{4\nu-1} \cdot 2^{4(\nu-\delta)-1} \cdots 2^{4(\nu-k\delta)-1}$. Ebből adódik C értéke. □

6.3. A Rosenthal-típusú egyenlőtlenség

A következő tétel Doukhan (1994) [14] Theorem 1 egy verziója. Megjegyezzük, hogy itt a feltételek kissé erősebbek mint Doukhannál.

Legyen $D(l,\varepsilon,T)$ és $c^{(\alpha)}_{u,h-u}$ a 6.1. részben definiált.

6.3.1. tétel. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Theorem.) *Legyen T az I-nek véges részhalmaza. Legyen $l>1$, $\varepsilon>0$, $\{Y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t}\in T\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata, $\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}}=0$ és $\mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}}|^{l+\varepsilon}<\infty$ minden $\mathbf{t}\in T$ esetén. Legyen h a legkisebb páros egész szám, melyre $h\ge l$ teljesül. Tegyük fel, hogy $c^{(\alpha)}_{u,h-u}<\infty$, $u=1,\dots,h-1$. Ekkor létezik egy $K_{(\alpha)}$ konstans, hogy*

$$\mathrm{E}\left|\sum_{\mathbf{t}\in T}Y_{\mathbf{t}}\right|^{l}\le K_{(\alpha)}D(l,\varepsilon,T). \tag{6.3.1}$$

6.3.2. megjegyzés. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Remark 1.) $K_{(\alpha)}$ nem függ T-től, csak a keverési együtthatótól és l-től. Ha $0<\varepsilon<l/2$, akkor az explicit alakja: $K_{(\alpha)}=H^{(\alpha)}_h C_l$, ahol

$$H^{(\alpha)}_h=1+\sum_{u=1}^{h-1}c^{(\alpha)}_{u,h-u}+\sum_{u=2}^{h-2}\binom{h}{u}H^{(\alpha)}_u H^{(\alpha)}_{h-u},$$
$$C_l=2^{(h-l+\varepsilon)(2h+2l-1)/\varepsilon}.$$

Amennyiben l páros egész szám, akkor C_l javítható $C_l=1$-re.

6.3.3. megjegyzés. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Remark 2.) A (6.3.1) egyenlőtlenség $0<l\le 1$ esetén teljesül a $c^{(\alpha)}_{u,h-u}<\infty$ feltétel nélkül is. Ekkor $K_{(\alpha)}=1$.

A fenti tétel bizonyítása páros l esetén az alábbi lemmából fog következni, míg a többi l-re az interpolációs lemmát használjuk.

6.3.4. lemma. (Fazekas, Kukush és Tómács (2000) [26] Lemma 4.) *Legyen $T\subseteq I$ véges nem üres halmaz, $h\in\mathbb{N}$ és $\varepsilon>0$ rögzítettek. Legyen $Y=\{Y_{\mathbf{t}}, \mathbf{t}\in T\}$ valószínűségi változók többindexes sorozata, $\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}}=0$ és $\mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}}|^{h+\varepsilon}<\infty$, $\mathbf{t}\in T$. Legyen*

$$A_h(T):=\sum_{\tau\in T^h}|\mathrm{E}(Y_{\mathbf{t}_1}\cdots Y_{\mathbf{t}_h})|,$$

ahol $\tau = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_h) \in T^h$. *Ekkor*

$$A_h(T) \le H_h^{(\alpha)} D(h, \varepsilon, T). \tag{6.3.2}$$

Bizonyítás. A bizonyítás során nem tesszük ki az (α) felső indexeket. Be fogjuk látni, hogy bármely $h \in \mathbb{N}$ esetén

$$A_h(T) \le \left(1 + \sum_{u=1}^{h-1} c_{u,h-u}\right) L(h, \varepsilon, T) + \sum_{u=2}^{h-2} \binom{h}{u} A_u(T) A_{h-u}(T). \tag{6.3.3}$$

Itt $\sum_{u=1}^{h-1}(.) = 0$, ha $h = 1$, és $\sum_{u=2}^{h-2}(.) = 0$, ha $h = 1, 2, 3$. $\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}} = 0$, így $A_1(T) = 0$. Be fogjuk látni, hogy

$$A_2(T) \le (1 + c_{1,1}) L(2, \varepsilon, T). \tag{6.3.4}$$

Tudjuk, hogy

$$A_h(T) \le \sum_{\mathbf{t} \in T} |\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}}^h| + \sum_{u=1}^{h-1} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\xi} \sum_{\eta} |\mathrm{E}Y_\xi Y_\eta|, \tag{6.3.5}$$

ahol $\xi = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_u) \in T^u$, $\eta = (\mathbf{t}_{u+1}, \dots, \mathbf{t}_h) \in T^{h-u}$, $Y_\xi = Y_{\mathbf{t}_1} \cdots Y_{\mathbf{t}_u}$, $Y_\eta = Y_{\mathbf{t}_{u+1}} \cdots Y_{\mathbf{t}_h}$, továbbá $\sum_\xi \sum_\eta$ szummázás kiterjed minden olyan $\xi = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_u) \in T^u$-re és $\eta = (\mathbf{t}_{u+1}, \dots, \mathbf{t}_h) \in T^{h-u}$-ra, melyek távolsága r, ahol r a $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_h\}$ nem üres részhalmazainak komplementerpárjai közötti távolságok maximuma. Azaz minden szorzatot az indexhalmazok közötti maximális távolságok alapján bontunk két részre. Jegyezzük meg, hogy a $\mathbf{t}_i$ indexek sorrendje is számít. Használva a kovariancia-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$|\mathrm{E}Y_\xi Y_\eta| \le |\mathrm{E}Y_\xi||\mathrm{E}Y_\eta| + 8(\alpha_Y(r, u, h-u))^\gamma \|Y_\xi\|_\nu \|Y_\eta\|_\mu, \tag{6.3.6}$$

ahol $\gamma = \varepsilon/(h+\varepsilon)$, $\nu = (h+\varepsilon)/u$, $\mu = (h+\varepsilon)/(h-u)$. A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \|Y_\xi\|_\nu &= \left(\mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}_1} \cdots Y_{\mathbf{t}_u}|^{(h+\varepsilon)/u}\right)^{u/(h+\varepsilon)} \le \\ &\le \left(\left(\prod_{i=1}^{u} \mathrm{E}|Y_{\mathbf{t}_i}|^{h+\varepsilon}\right)^{1/u}\right)^{u/(h+\varepsilon)} = \prod_{i=1}^{u} \|Y_{\mathbf{t}_i}\|_{h+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Hányféleképpen tudjuk kiválasztani a ξ-hez és az η-hoz tartozó pontokat? Azaz adott u és r esetén hány olyan u és $h-u$ elemű halmazpár van, amelyek távolsága r, és a párok között nem tudunk úgy elemeket átcsoportosítani, hogy az r távolság növekedjen?

Legyen $\mathbf{s} \in T$ rögzített. Válasszunk $\mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_u \in T$ pontokat úgy, hogy létezzen olyan $\mathbf{s}, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_u$ csúcspontokból álló összefüggő gráf, melynek élei nem hosszabbak r-nél. Ezt maximum $(u-1)!b_r^{u-1}$-féleképpen tehetjük meg. Ezen csúcspontokból válasszunk ki egyet. (Jelöljük ezt $\mathbf{s}^*$-gal.) Ez u-féleképpen lehetséges. Válasszunk $\mathbf{s}_{u+1} \in T$ pontot úgy, hogy $\varrho(\mathbf{s}^*, \mathbf{s}_{u+1}) = r$ legyen. Ezt maximum s_r-féleképpen tehetjük meg.

Végül válasszunk $\mathbf{s}_{u+2}, \ldots, \mathbf{s}_h \in T$ pontokat úgy, hogy létezzen összefüggő gráf, melynek élei nem hosszabbak r-nél és csúcsai az $\mathbf{s}_{u+1}, \ldots, \mathbf{s}_h$ pontok. Ezt maximum $(h-u-1)!b_r^{h-u-1}$-féleképpen tehetjük meg.

A kiválasztások úgy történjenek, hogy az $\{\mathbf{s}, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_h\}$ nem üres részhalmazainak a komplementerpárjai közötti távolságok maximuma r legyen, továbbá $\varrho(\{\mathbf{s}, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_u\}, \{\mathbf{s}_{u+1}, \ldots, \mathbf{s}_h\}) = r$. Ha $\xi = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_u)$, $\eta = (\mathbf{t}_{u+1}, \ldots, \mathbf{t}_h)$ szerepel az előbb definiált $\sum_\xi \sum_\eta$ indexei között, akkor a 6.2.1. lemma miatt $\mathbf{s} = \mathbf{t}_1$ választással van ilyen kiválasztás. Ugyanis ekkor van olyan $(i_2, \ldots, i_h)$ permutációja a $(2, \ldots, h)$-nak, hogy az $(\mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_h) := (\mathbf{t}_{i_2}, \ldots, \mathbf{t}_{i_h})$ választás az előző feltételeknek eleget tesz. Mindezeket figyelembe véve, továbbá felhasználva a (6.3.7) egyenlőtlenséget, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned}
&\sum_\xi \sum_\eta \|Y_\xi\|_\nu \|Y_\eta\|_\mu \leq \\
&\leq \sum_\xi \sum_\eta \prod_{i=1}^{u} \left(\|Y_{\mathbf{t}_i}\|_{h+\varepsilon}^h\right)^{1/h} \prod_{i=u+1}^{h} \left(\|Y_{\mathbf{t}_i}\|_{h+\varepsilon}^h\right)^{1/h} \leq \\
&\leq \frac{1}{h} \sum_\xi \sum_\eta \left(\sum_{i=1}^{u} \|Y_{\mathbf{t}_i}\|_{h+\varepsilon}^h + \sum_{i=u+1}^{h} \|Y_{\mathbf{t}_i}\|_{h+\varepsilon}^h \right) \leq \\
&\leq \sum_{\mathbf{s} \in T} s_r b_r^{h-2} u!(h-u-1)!(h-1)! \|Y_{\mathbf{s}}\|_{h+\varepsilon}^h. \qquad (6.3.8)
\end{aligned}$$

Másrészt rögzített u esetén

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_\xi \sum_\eta |\mathrm{E}Y_\xi| |\mathrm{E}Y_\eta| \leq \binom{h}{u} A_u(T) A_{h-u}(T). \qquad (6.3.9)$$

(Itt $\binom{h}{u}$ az u darab és $h-u$ darab elem egymás közötti sorrendjei miatt szerepel.) Figyelembe véve a (6.3.5), (6.3.6), (6.3.9) és a (6.3.8) egyenlőtlenségeket

$$A_h(T) \leq \sum_{\mathbf{t}\in T} |\mathrm{E}Y_{\mathbf{t}}^h| + \sum_{u=1}^{h-1} \binom{h}{u} A_u(T) A_{h-u}(T) + \sum_{u=1}^{h-1} \sum_{\mathbf{s}\in T} c_{u,h-u} \|Y_{\mathbf{s}}\|_{h+\varepsilon}^h \leq$$

$$\leq \sum_{u=1}^{h-1} \binom{h}{u} A_u(T) A_{h-u}(T) + \left(1 + \sum_{u=1}^{h-1} c_{u,h-u}\right) L(h, \varepsilon, T),$$

melyből következik (6.3.3). (A fenti tagok közül $A_1(T) \equiv 0$.) A fenti gondolatmenet $h = 2$ esetén implikálja a (6.3.4) egyenlőtlenséget. Így felhasználva a 6.2.2. lemmát, (6.3.3) alapján következik (6.3.2). □

A 6.3.1. tétel bizonyítása. Ha h páros pozitív egész szám, akkor

$$\mathrm{E}\left(\sum_{\mathbf{t}\in T} Y_{\mathbf{t}}\right)^h \leq A_h(T).$$

Ez és a 6.3.4. lemma alapján következik (6.3.1) minden páros l esetén. Tetszőleges l esetén a 6.2.4. következményt használhatjuk. □

7. Összefoglalás

Az értekezés 2. fejezetében a Kolmogorov és Marcinkiewicz—Zygmund típusú nagy számok erős törvényeit vizsgáljuk többindexes sorozatokra. A Kolmogorov-féle nagy számok erős törvényét páronként független, átlagban gyengén dominált, többindexes valószínűségi változók sorozatára bizonyítottuk. Petrov 1987-ben megmutatta, hogy a Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvénye érvényben marad azonos eloszlású, tetszőleges függőségi struktúrával rendelkező valószínűségi változók sorozatára is, ha $0 < r < 1$. Ebben a fejezetben a Marcinkiewicz-féle nagy számok erős törvényét nem független, átlagban gyengén dominált többindexes valószínűségi változók sorozatára láttuk be ($0 < r < 1$). Ezeken kívül ugyanezen feltételekkel Spitzer tételére adtunk bizonyítást.

A nagy számok erős törvényeinek egyik bizonyítási eljárásában közvetlenül a normált összegekre vonatkozó maximális egyenlőtlenségeket használunk. Ezek az úgynevezett Hájek—Rényi típusú maximális egyenlőtlenségek. Ezeket nem könnyű belátni, de ennek birtokában a nagy számok erős törvényeinek bizonyítása már kézenfekvővé válik. Fazekas és Klesov 2000-ben bizonyították, hogy az együttes összegre vonatkozó bizonyos maximális egyenlőtlenségből már következik egy Hájek—Rényi típusú maximális egyenlőtlenség, amiből pedig a nagy számok erős törvénye. Fontos, hogy ezekben az eredményekben a függőségi szerkezetre vonatkozólag nincs megkötés. Fazekas és Klesov ezeket az állításokat egyindexes sorozatokra mondták ki. A 3. fejezet célja, hogy ezeket kiterjesszük többindexes esetre. A fejezet további részeiben megvizsgáltunk néhány alkalmazási lehetőséget is:

— Logaritmikus súlyozású összegekre vonatkozó nagy számok erős törvénye. (Megjegyezzük, hogy ezen típusú állítások a majdnem biztos központi határeloszlás-tételek bizonyításában játszanak szerepet.)
— Szuperadditív momentumú többindexes valószínűségi változók sorozatára vonatkozó Marcinkiewicz—Zygmund típusú nagy számok erős törvénye.
— Brunk—Prohorov típusú tételek.

A 4. fejezetben konvergenciasebességgel foglakoztunk a nagy számok törvényeiben, Banach-térbeli értékű valószínűségi változók általános szériasorozatára. Eredményeink közül néhány még valós esetben is új állítást jelent. A fő eredményünk általánosítása Jain egy tételének, melyet 1975-ben közölt. Ennek bizonyításában az új ötlet az volt, hogy amikor felhasználtuk az úgynevezett Hoffmann—Jørgensen-egyenlőtlenséget, akkor az ebben szereplő két tag felső becslésére két különböző függvényt alkalmaztunk. A kapott tétel feltételrendszere bonyolultnak tűnik, de alkalmas súlyfüggvények választásával néhány ismert tételt kaphatunk belőle. Az eredményt specializáltuk bizonyos geometriai tulajdonságú Banach-terekre is, mellyel új bizonyításait kaptuk néhány Fazekas által 1992-ben, illetve Hu, Rosalsky, Szynal és Volodin által 1999-ben közölt tételnek.

Az 5. fejezetben majdnem biztos központi határeloszlás-tételekkel foglalkoztunk többindexes valószínűségi változók esetén. Ebben a témakörben Fazekas és Rychlik bizonyítottak be egy általános tételt 2002-ben. Ebben a fejezetben ezt a tételt alkalmazva, egy ilyen jellegű állítást láttunk be, az úgynevezett m-függő esetben. Ennek bizonyításához még szükségünk volt egy m-függő többindexes valószínűségi változókra vonatkozó központi határeloszlás-tételre is, melyet Prakasa Rao publikált 1981-ben.

A 6. fejezetben az úgynevezett Rosenthal-egyenlőtlenséget bizonyítottuk be α-keverő mezőkre. A Rosenthal-egyenlőtlenség fontos eszköz abban, hogy kimutassuk gyengén függő sztochasztikus folyamatok és mezők bizonyos becsléseinek konzisztenciáját. Ilyen típusú egyenlőtlenséget először Rosenthal bizonyított 1970-ben, független valószínűségi változókra. Utev 1984-ben keverő sorozatokra, míg Doukhan 1994-ben keverő mezőkre mondott ki hasonló tételt. Doukhan észrevette, hogy Utevnél az úgynevezett interpolációs lemma bizonyításában hiba van. Így a Rosenthal-egyenlőtlenség kiterjesztése pozitív páros egész kitevőről tetszőleges pozitív kitevőre nyitott kérdés maradt. Másrészt Doukhan bizonyította az α- és φ-keverő eseteket. Azonban Doukhan bizonyítása is hiányos. Ebben a fejezetben összegeztük, hogy mi az, ami teljesen pontos az előbb említett bizonyításokban, az „ugrásokat” pedig saját meggondolásainkkal hidaltuk át. Részletes bizonyítást adtunk az α-keverő esetre. Az eredmények és bizonyítások csekély mértékben térnek csak el Utevétől és Doukhanétól, bár itt a feltételek kissé erősebbek, mint náluk.

8. Summary

In Chapter 2 of the dissertation we study Kolmogorov and Marcinkiewicz—Zygmund type strong laws of large numbers (SLLN's). Here Kolmogorov's SLLN is proved for pairwise independent weakly mean dominated random variables with multidimensional indices. Petrov showed in 1987 that the Marcinkiewicz SLLN holds for identically distributed random variables with arbitrary dependence structure, if $0 < r < 1$. We prove it for non-independent, weakly mean dominated random fields ($0 < r < 1$). Moreover we give a proof of Spitzer's theorem with similar assumptions.

There is an approach to prove the SLLN which uses directly a maximal inequality for normed sums. Inequalities of this kind are said to be of Hájek—Rényi type. They are not easy to obtain, but after the proof of the SLLN becomes an obvious problem. Fazekas and Klesov showed in 2000 that a Hájek—Rényi type inequality is a consequence of an appropriate maximal inequality for cumulative sums and the latter automatically implies the SLLN for sequences of random variables. In these results it is important that there are no restrictions on the dependence structure of random variables. In Chapter 3 we generalize these theorems for random fields. Several examples of applications are given in this chapter as well:

— An SLLN for logarithmically weighted sums. (We remark that such kind of SLLN's can be useful to prove almost sure central limit theorems.)
— A Marcinkiewicz—Zygmund type SLLN for random fields with super-additive moment structure.
— Brunk—Prohorov type theorems.

In Chapter 4 we study convergence rates in the laws of large numbers for general arrays of Banach space valued random elements. Some of our results are new for real variables, too. The main result is a generalization of a theorem of Jain, wich was published in 1975. The idea of the proof of the main theorem is the following. When we apply Hoffmann—Jørgensen's inequality, we use two different functions to obtain upper bounds for the two terms in the inequality. This theorem seems to be difficult, but when we choose appropriate weight functions we can obtain several known theorems for general arrays. We specialize our result for Banach spaces with some geometric property. Then we obtain new proofs for some results of Fazekas (1992) and Hu, Rosalsky, Szynal and Volodin (1999).

In Chapter 5 we study almost sure central limit theorems for random fields. In this topic Fazekas and Rychlik proved a general theorem in 2002. In

this chapter applying this result we prove an almost sure central limit theorem in so-called m-dependent case. For this reason we need a central limit theorem for m-dependent random fields, which was published by Prakasa Rao in 1981.

In Chapter 6 we give a version of Rosenthal's inequality for α-mixing fields. Rosenthal's inequalities are important tools to prove consistency of some estimators for weakly dependent random processes and fields. The first version of such inequalities was proved by Rosenthal in 1970 for independent random variables. Rosenthal's inequalities for mixing sequences were presented by Utev in 1984 and for mixing fields by Doukhan in 1994. However, Doukhan remarked that the proof of the interpolation lemma of Utev is "not clear". So the extension of Rosenthal's inequality from positive even integer exponents to arbitrary positive real exponents is an open problem. On the other hand, Doukhan presented Rosenthal's inequalities for α-mixing and for φ-mixing fields. Unfortunately, there is a gap in the proof of Doukhan. We want to summarize what is clear in the above mentioned proofs. Detailed proofs are given in the α-mixing case. The results and proofs of this chapter are slight modifications of the ones in Doukhan and Utev, however assumptions here are stronger than those in Doukhan's theorem.

Irodalomjegyzék

[1] A. de Acosta, Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers, Ann. Probability, 9 (1981) 157–161.

[2] S. E. Ahmed, R. G. Antonini, A. Volodin, On the rate of complete convergence for weighted sums of arrays of Banach space valued random elements with application to moving average processes, Statist. Probab. Letters, 58 (2002) 185–194.

[3] D. W. K. Andrews, Laws of large numbers for dependent non-identically distributed random variables, Econometric Theory, 4 (1988) 458–467.

[4] Т. А. Азларов, Н. А. Володин, Законы болъших чисел для одинаково распределённых банаховозначных случайных величин, Теория вероятн. и её примен. 26 (1981) 584–590.

[5] L. E. Baum, M. Katz, Convergence rates in the law of large numbers, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965) 108–123.

[6] I. Berkes, Results and problems related to the pointwise central limit theorem, In: Szyszkowicz, B. (Ed.) Asymptotic results in probability and statistics, Elsevier, Amsterdam, (1998) 59–96.

[7] I. Berkes, E. Csáki, A universal result in almost sure central limit theory, Stoch. Proc. Appl. 94(1) (2001) 105–134.

[8] G. A. Brosamler, An almost everywhere central limit theorem, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 104 (1988) 561–574.

[9] D. L. Burkholder, Martingale transforms, Ann. Math. Stat., 37 (1966) 1994–1504.

[10] Y. S. Chow, H. Teicher, Probability Theory, Springer-Verlag, New York, (1978).

[11] A. N. Chuprunov, I. Fazekas, Almost sure versions of some analogues of the invariance principle, Publ. Math. Debrecen, 54/3-4 (1999) 457–471.

[12] A. N. Chuprunov, I. Fazekas, Almost sure versions of some functional limit theorems, Proc. 21st Seminar on Stability Problems for Stochastic models. J. Math. Sci. (New York) 111/3 (2002) 3528–3536.

[13] S. Csörgő, K. Tandori, V. Totik, On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables, Acta Math. Hung., 42 (3–4) (1983) 319–330.

[14] P. Doukhan, Mixing. Properties and examples, New York: Springer, (1994).

[15] P. Erdős, On a theorem of Hsu and Robbins, Ann. Math. Statist. 20 (1949) 286–291.

[16] P. Erdős, Remark on my paper "On a theorem of Hsu and Robbins", Ann. Math. Statist. 21 (1950) 138.

[17] N. Etemadi, An elementary proof of the strong law of large numbers, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete., 55 (1981) 119–122.

[18] I. Fazekas, Convergence of vector valued martingles with multidimensional indices, Publ. Math. Debrecen, 30/1-2 (1983) 157–164.

[19] I. Fazekas, Convergence rates in the Marcinkiewicz strong law of large numbers for Banach space valued random variables with multidimensional indices, Publ. Math. Debrecen, 32 (1985) 203–209.

[20] I. Fazekas, A strong law of large numbers in Banach spaces of type Φ, In Mathematical Statistics and Probability Theory, Vol. A, 89–97, Reidel, Dordrecht, 1987.

[21] I. Fazekas, Convergence rates in the law of large numbers for arrays, Publ. Math. Debrecen, 41/1-2 (1992) 53–71.

[22] Fazekas I., Valószínűségszámítás, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója, Debrecen, 2000.

[23] I. Fazekas, O. I. Klesov, A general approach to the strong law of large numbers, Theory of Probability Applications, 45/3, (2000) 568–583.

[24] I. Fazekas, O. I. Klesov, Cs. Noszály, T. Tómács, Strong laws of large numbers for sequences and fields, (Proceedings of the Third Ukrainian-Scandinavian Conference in Probability Theory and Mathematical Statistics 8–12 June 1999. Kyiv, Ukraine) Theory of Stochastic Processes, Vol.5 (21) No.3-4, (1999) 91–104.

[25] I. Fazekas, A. G. Kukush, Asymptotic properties of an estimator in nonlinear functional errors-in-variables models with dependent error terms, Computers Math. Applic., 34, No.10, (1997) 23–39.

[26] I. Fazekas, A. G. Kukush, T. Tómács, On the Rosenthal inequality for mixing fields, Ukrainian Math. Journal, 52 No3 (2000) 266–276.

[27] I. Fazekas, Z. Rychlik, Almost sure functional limit theorems, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, LVI, no.1, (2002) 1–18.

[28] I. Fazekas, Z. Rychlik, Almost sure central limit theorems for random fields, Technical Report No. 2001/12, University of Debrecen, Hungary (submitted to Math. Nachr.).

[29] I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Publ. Math. Debrecen, 53/1-2 (1998) 149–161.

[30] Nguyen Van Giang, Marcinkiewicz—Zygmund laws for Banach space valued random variables with multidimensional parameters, Theory Probab. Appl., 40 (1995) 213–219.

[31] A. Gut, Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices, Ann. Probability, 6 (1978) 469–482.

[32] A. Gut, On complete convergence in the law of large numbers for subsequences, Ann. Probab. 13 (1985) 1286–1291.

[33] A. Gut, Complete convergence for arrays, Periodica Math. Hungar. 25 (1), (1992) 51–75.

[34] B. E. Hansen, Strong laws for dependent heterogeneous processes, Econometric Theory, 7 (1991) 213–221; Erratum, Econometric Theory, 8 (1992) 421–422.

[35] J. Hoffmann-Jørgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, Studia Math. LII (1974) 159–186.

[36] P. L. Hsu, H. Robbins, Complete convergence and the law of large numbers, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947) 25–31.

[37] T. C. Hu, F. Móricz, R. L. Taylor, Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 54 (1989) 153–162.

[38] T. C. Hu, A. Rosalsky, D. Szynal, A. I. Volodin, On complete convergence for arrays of rowwise independent random elements in Banach spaces, Stoch. Anal. Appl., 17 (1999) no 6., 963–992.

[39] I. A. Ibragimov, M. A. Lifshits, On the almost sure limit theorems (in Russian), Theory of Probability and Its Applications 44(2) (1999) 329–359.

[40] N. C. Jain, Tail probabilities for sums of independent Banach space valued random variables, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33 (1975) 155–166.

[41] O. I. Klesov, The Hajek-Rényi inequality for random fields and strong law of large numbers, Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist., 22 (1980) 58–66. (Russian)

[42] O. I. Klesov, Strong law of large numbers for random fields with orthogonal values, Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, Ser. A, 7 (1982) 9–12.

[43] O. I. KLESOV, The law of large numbers for multiple sums of independent identically distributed random variables, Theor. Probab. Math. Statist., 50 (1995) 77–87.

[44] V. M. KRUGLOV, Strong law of large numbers, Stability Problems for Stochastic Models, V.M. Zolotarev, V.M. Kruglov, V.Yu. Korolev (Eds.) TVP/VSP, Moscow/Utrecht, (1994) 139–150.

[45] M. T. LACEY, W. PHILIPP, A note on the almost sure central limit theorem, Statistics & Probability Letters 9(2), (1990) 201–205.

[46] M. MAEJIMA, A nonuniform estimate in the central limit theorem for m-dependent random variables, Keio Engineering Reports, 31 (1978) 15–20.

[47] P. MAJOR, Almost sure functional limit theorems, Part II. The case of independent random variables, Studia Sci. Math. Hungarica 36 (2000) 231–273.

[48] J. MARCINKIEWICZ, A. ZYGMUND, Sur les fonctions indépendantes, Fund. Math. 29 (1937) 60–90.

[49] D. L. MCLEISH, A maximal inequality and dependent strong laws, Annals of Probability, 3 (1975) 829–839.

[50] C. MÈTRAUX, Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel, Lecture Notes in Mathematics, vol. 649, Springer-Verlag, Berlin, (1978) 170–179.

[51] F. MÓRICZ, Moment inequalities and the strong of large numbers, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 35 (1976) 299-314.

[52] F. MÓRICZ, Moment inequalities for the maximum of partial sums of random fields, Acta Sci. Math., 39 (1977) 353–366.

[53] F. MÓRICZ, A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sum of multiple series, Acta Math. Hung., 41 (1983) 337–346.

[54] T. F. MÓRI, On the strong law of large numbers for logarithmically weighted sums, Annales Univ. Sci. Budapest, 36 (1993) 35–46.

[55] Cs. NOSZÁLY, T. TÓMÁCS, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Annales Univ. Sci. Budapest, 43 (2000) 61–78.

[56] M. PELIGRAD, A. GUT, Almost-sure results for a class of dependent random variables, Journal of Theoretical Probability, 12/I (1999) 87–104.

[57] V. V. PETROV, Limit theorems for sums of independent random variables, Nauka, Moscow, (in Russian) (1987).

[58] B. L. S. Prakasa Rao, A non-uniform estimate of the rate of convergence in the central limit theorem for m-dependent random fields, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 58 (1981) 247–256.

[59] Rényi A., Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954 és 1966.

[60] P. Révész, The laws of large numbers, Akadémiai Kiadó, Budapest, (1967).

[61] E. Rio, A maximal inequality and dependent Marcinkiewicz—Zygmund strong laws, Ann. Probab., 23 (1995) 918–937.

[62] B. Rodzik, Z. Rychlik, An almost sure central limit theorem for independent random variables, Ann. Inst. Henri Poincaré 30(1) (1994) 1–11.

[63] B. Rosén, A note on asymptotic normality of sums of higher dimensionally indexed random variables, Ark. Mat. 8 (1969) 33–43.

[64] H. P. Rosenthal, On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables, Isr. J. Math. 8 (1970) 273–303.

[65] P. Schatte, On strong versions of the central limit theorem, Math. Nachr. 137 (1988) 249–256.

[66] V. Shergin, Estimation of the remainder in the central limit theorem for m-dependent random variables (in Russian), Litovsk. Mat. Sb., 16 (1976) 245–250.

[67] A. N. Shiryayev, Probability, Springer-Verlag New York Inc., (1984).

[68] S. V. Shklyar, An interpolation inequality for moments of sums of random vectors, Theory Probab. Math. Stat. 63 (2001), 171–177; translation from Teor. Jmovrin. Mat. Stat. 63, (2000), 156–162.

[69] R. T. Smythe, Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables, Ann. Probability, 1 (1973), 164–170.

[70] F. L. Spitzer, A combinatorial lemma and its application, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956) 323–339.

[71] T. Tómács, Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields, Acta Acad. Paed. Agr., Sectio Mathematicae, 29 (2002) 91–96.

[72] T. Tómács, Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements, Preprints No. 305, Technical Report No. 2003/9, University of Debrecen, Hungary. (Közlésre benyújtva.)

[73] S. A. Utev, Inequalities for sums of weakly dependent random variables and rate of convergence in invariance principle (in Russian), In

Limit theorems for sums of random variables, (1984) 50–70, Nauka, Novosibirsk.

[74] W. A. Woyczyński, On Marcinkiewicz—Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence, Probab. Math. Statist. 1 (1980) 117–131.

[75] L. A. Zototukhina, V. N. Chugueva, Central limit theorem for a class of random fields, Mat. Zametki (in Russian), 14 (1973) 549–588.

Tómács Tibor publikációs listája

1. Tómács T., A rekurzív sorozatok egy alkalmazásáról, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 21 (1993) 5–13.
2. Tómács T., Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 22 (1994) 31–37.
3. Fazekas I., Tómács T., A valószínűségszámítás szemléletes oktatásáról, A matematika tanítása, IV. évfolyam 1996/4. 8–11.
4. K. Liptai, T. Tómács, Pure powers in recurrence sequences, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 24 (1997) 35–40.
5. I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 53/1-2 (1998) 149–161.
6. I. Fazekas, O. I. Klesov, Cs. Noszály, T. Tómács, Strong laws of large numbers for sequences and fields, (Proceedings of the Third Ukrainian-Scandinavian Conference in Probability Theory and Mathematical Statistics 8–12 June 1999. Kyiv, Ukraine) Theory of Stochastic Processes, Vol.5 (21) No.3-4, (1999) 91–104.
7. T. Tómács, A moment inequality for the maximum partial sums with a generalized superadditive structure, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 26 (1999) 75–79.
8. I. Fazekas, A. G. Kukush, T. Tómács, On the Rosenthal inequality for mixing fields, Ukrainian Math. Journal, 52 No3 (2000) 266–276.
9. T. Tómács, Convergence of homogeneous matrix-valued Λ-martingales, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 27 (2000) 53–56.
10. Cs. Noszály, T. Tómács, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Annales Univ. Sci. Budapest, 43 (2000) 61–78.
11. T. Tómács, Almost sure central limit theorems for m-dependent random fields, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, 29 (2002) 91–96.

Technical report

1. I. Fazekas, T. Tómács, Strong law of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, Technical Report No. 1996/15, University of Debrecen, Hungary.

2. Cs. Noszály, T. Tómács, A general approach to strong laws of large numbers for fields of random variables, Technical Report No. 1999/10, University of Debrecen, Hungary.

3. T. Tómács, Convergence rates in the law of large numbers for arrays of Banach space valued random elements, Preprints No. 305, Technical Report No. 2003/9, University of Debrecen, Hungary. (Közlésre benyújtva.)

Konferenciák

1. I. Fazekas, T. Tómács, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, XVIII Seminar on Stability Problems of Stochastic Models, 26th of January – 1st of February 1997. Debrecen-Hajdúszoboszló, Hungary.

2. Tómács T., Mátrix értékű homogén Λ-martingálok konvergenciája, Magyar Tudomány Napja 2001., Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2001. november 8.

3. Tómács T., Majdnem biztos centrális határeloszlási tételek m-függő mezőre, „Kiss Péter, az egri és debreceni számelmélész" tudományos emlékülés, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2002. november 22-23.

Jegyzetek

1. Tómács T., A valószínűségszámítás alapjai, Eger, EKTF Líceum Kiadó, (1997).

2. Liptai K., Mátyás F., Rados M., Sashalminé Kelemen É., Szepessy B., Tómács T., Zay B., Matematika nem matematika szakos hallgatóknak, Eger, EKF Líceum Kiadó (2000).

**ASZIMPTOTIKUS EREDMÉNYEK
A VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLETBEN**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Tómács Tibor
okleveles matematika-fizika szakos középiskolai tanár

Készült a Debreceni Egyetem TTK
Matematika és Számítástudományok doktori iskolája
(Valószínűségelmélet és matematikai statisztika programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Pap Gyula	....
tagok:	Dr. Viharos László	....
	Dr. Ispány Márton	....

A doktori szigorlat időpontja: 2002. március 20.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: ....