

Függvényegyenletek és egyenletrendszerek
tárgyalásának lehetőségei szakkörön
Ph.D. értekezés

Dályay Pál Péter

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2003

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1 Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer	5
1.1 A feladat és megoldói kérdések	5
1.2 Háromváltozós függvény helyett egyváltozós	6
1.3 Transzformációcsoportok	9
1.4 Orbit és transzverzális	11
1.5 A (4) függvényegyenlet-rendszer megoldása	13
1.6 Egy megoldáscsalád	16
2 A Cauchy-egyenlet segítségével megoldható feladatok	18
2.1 Egy nehéz feladat	18
2.2 Egy $f(g(x)+y+f(y)) = ag(f(x))+by$ alakú függvényegyenlet-család	23
2.3 Affin transzformációk	27
2.3.1 Affin koordináták	27
2.3.2 Koordinátatranszformációk	28
2.3.3 Az affin transzformációk néhány tulajdonsága	30
2.3.4 Az affin transzformációk jellemzése	31
3 $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában	34
3.1 Egy versenyfeladat	34
3.2 Az (1) egyenlet megoldásaira vonatkozó általános észrevételek $b \neq 0$ esetén	35
3.2.1 A megoldások tulajdonságai	35
3.2.2 Lineáris megoldások	40
3.2.3 Az (1) egyenlet megoldhatósága	41
3.2.4 A megoldások létezési feltétele	44
3.2.5 A megoldások iteráltjainak alakja	45

3.2.6	A φ, ψ, θ függvényekről	45
3.2.7	Fixpontokról	48
3.3	Az (1) egyenlet megoldása $b \neq 0$ esetén	52
3.3.1	I. A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ eset	52
3.3.2	II. A $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = 1$ eset	54
3.3.3	III. A $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ eset	55
III./1.	Az (32) függvényegyenlet, $0 \neq u \neq 1$ és $c = 0$ esetén	57
III./2.	A (32) függvényegyenlet, $0 \neq u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén	60
3.3.4	IV. A $\lambda_1 \neq \lambda_2, \{\lambda_1, \lambda_2\} \cap \{0, 1\} = \emptyset, \lambda_3 = 1$ eset	84
4	Összefoglalás	132
4.1	Bevezetés, célkitűzések	132
4.2	Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer	133
4.3	A Cauchy-egyenlethez kapcsolódó feladatok	133
4.4	$f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában	134
5	Summary	135
5.1	Introduction and objectives	135
5.2	A system of functional equations	136
5.3	Problems leading to Cauchy's equation	136
5.4	Functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ with continuous unknown functions	137
	Irodalomjegyzék	138

Bevezetés

A dolgozat, amint azt címe is mutatja, néhány olyan függvényegyenletekre és egyenletrendszerekre vonatkozó témával foglalkozik, amelyek középiskolai szakköri tevékenység keretében is tárgyalhatók. Itt elsősorban a speciális matematika tantervű 11.-12. osztályban lévő tehetséges tanulók megcélzására gondolok, vagy azokra a tanulókra, akik különböző versenyekre készülnek. Többek között azokra is, akik hazánk színeit különböző nemzetközi matematikaversenyeken képviselik, olyanokon mint pl. a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia, Gillis-Turán Matematikaverseny, vagy a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny. Az említett versenyeken gyakran találkozunk függvényegyenletekkel (pl. 2001 tavaszán lebonyolított 12. Gillis-Turán Matematikaverseny első napi versenyének 3. feladata az $f(f(x)) = x + f(x)$ függvényegyenlet folytonos megoldásainak meghatározása,) ezek közül néhányat az utóbbi években adottak közül be is mutatok. Ezért is tartom szükségesnek a függvényegyenletek témakörével való szakköri foglalkozást. Igyekeztem a témák összeválogatásában azt szem előtt tartani, hogy azok érdekesek és a megszokott, közismert témáktól eltérőek legyenek és megoldásukhoz olyan ötletekre legyen szükség, amelyek gyarapítják a versenyeken résztvevő tanulók eszköztárát. Másrésztől azt is követtem, hogy azoknál a feladatoknál, ahol lehetőség nyílt rámutassak azokra a matematikai fogalmakra, amelyek a feladattal kapcsolatba hozhatók. A harmadik fejezet egy olyan függvényegyenlet családdal foglalkozik, amelyből vett egyenletekkel a diákok már több versenyen is találkozhattak, illetve találkozhatnak, ezért ennek tárgyalása is indokolt. Ebben fejezetben sok új, de a középiskolások által megérthető bizonyítást mutatok be, ilyen például a megoldások létezési tétele. Kidolgoztam egy az eddigiektől eltérő megoldási módszert, amit azonban inkább egyetemi hallgatóknak ajánlanék. Ezt a módszert terjedelmi okokból csak **III.** eset végén szemléltetem, holott eredménnyel alkalmazható mindegyik olyan esetben is, ahol a megoldá-

sok száma végtelen.

Az első fejezet a KöMaL egyik feladatához kapcsolódik, amely arról szól, hogy egy adott tulajdonságokkal rendelkező háromváltozós f függvény egy bizonyos értékét kell meghatározni. A feladat megoldását közlő számban, a megoldás utáni szerkesztői értékelés rámutatott arra, hogy több tanuló kereste az adott tulajdonságokkal rendelkező függvényeket is. Néhányan találtak egyet, egyikük többet is, de nem az összeset. Az első fejezet erre a kérdésre adja meg a választ. Egy függvényegyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldása a szokásosnál sokkal több érdekességet tartogat számunkra. Párhuzamosan érintek olyan fogalmakat, amelyek segítségével bővíthetjük a tanulók függvényegyenletekre vonatkozó ismereteit.

A dolgozat második fejezete több olyan a Cauchy-féle egyenlethez kapcsolódó problémával foglalkozik, amelyek megoldásával a tanulók sok új ötlettel és technikával ismerkedhetnek meg. Az első alfejezet egy N -jelzésű 1999-ben feladott KöMaL feladat megoldását tartalmazza, amelynek megoldását eddig nem közölték és négy év után ez már kevésbé valószínű. Szakköri megoldása szerintem rendkívül sok, versenyeken jól hasznosítható elemet hordoz magában. A második alfejezet egy az American Mathematical Monthly közölt függvényegyenlet általam felírt általánosításával foglalkozik. Ez az általánosítás azért érdekes, mert kimenetelét illetően jóval több eset lehetséges, mint az eredeti egyenletnél. Másrésztől azért tartom hasznosnak szakkörön való tárgyalását, mert ennek kapcsán jól szemléltethetők a Cauchy-egyenlethez kapcsolódó számítási fogások. A harmadik alfejezetben egy Radó Ferenc tanár úr által Kolozsváron, a 80-as években tartott előadáson hallottakat írtam le. Az affin transzformációk jellemzéséről van szó. Azért tartom érdekesnek szakkörön való tárgyalását, mert nagyon meghökkenítő, hogy hogyan jönnek be a függvényegyenletek egy geometriai problémába. Úgy érzem, hogy ilyen típusú témákkal sokakban felkelthetjük a matematika iránti érdeklődést.

A dolgozat harmadik fejezete az $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú

függvényegyenletek folytonos megoldásainak meghatározásával foglalkozik. Több okom is volt ennek választására. Az egyik lehet az, hogy az utóbbi évek néhány jelentős nemzetközi diák és főiskolai matematika versenyén ilyen alakú függvényegyenletek is voltak a kitűzött feladatok között. A másik viszont az volt, hogy ennek a függvényegyenletnek a megoldására saját módszert dolgoztam ki Yves Carrier [1] dolgozata elolvasása után. Ebben a cikk szerzője az $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} = 0$ valós együtthetős függvényegyenletet kielégítő $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények létezésének kérdését tisztázza, majd megadja a függvényegyenlet folytonos megoldásainak halmazát néhány sajátos esetben. A többi esetben csak arra utal, hogy bizonyos "kedvező" tulajdonságú függvények meghosszabíthatók az \mathbb{R} -re egy folytonos megoldásig. Ezen megjegyzésen elindulva sikerült az összes esetet tisztáznom, sőt a cikk szerzője által tárgyalt eseteket is részben más úton tudtam tárgyalni. Természetesen tevődött fel a kérdés, hogy mi tekinthető ebből új eredménynek akár a megoldás módszerét illetően is. Páles Zsolt és Bogdan Choczewski professzor úrak ajánlatára olvastam el Seiji Nabeya [13] cikkét, amelyből kiderült, hogy az eredmények ismertek az általánosabb $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ egyenlet esetében is, másrésről viszont az általam kidolgozott megoldási módszer, (amely kidolgozható erre az általánosabb egyenletre is) lényegesen különböző az ebben megadottól. A különbség abból adódik, hogy az általam kidolgozott módszer két alkalmas, intervallumnak intervallumra történő növekvő ráképezéséből kiindulva szerkeszt meg egy megoldást, az iteráltakban szereplő együtthetős függvények tulajdonságait kiaknázva, eltérően a [13] cikkben megadott módszertől. Ezt a különbséget szemléltetendő adom meg mindkét módszert jelen dolgozatom III./2./③ és III./2./④ alszakaszaiban, amelyek összevetésének eredményeképpen fogalmaztam meg a 3.41. tételt. A többi esetben csak egy módszert szemléltetek, amely a [13] cikkben használt módszer néhány részletében történő átdolgozása. Mindig szemelőt tartottam azt, hogy a középiskolás anyagot jól ismerő számára is megérthetővé

váljanak. Ez alól kivétel az a paragrafus (76. oldal), amelyben a saját módszeremet ismertetem, de mint említettem ezeket az eseteket letárgyaltam az előző módon is. A függvényegyenlet folytonos megoldásainak létezésére vonatkozó tételek bizonyításai a már említett dolgozatomban szereplő bizonyítások átdolgozásai az ebben a dolgozatban tárgyalt általánosabb esetre. Ezek a 3.2.3 és 3.2.4 alszakaszban található és középiskolások számára érthetőek.

A [9]-ben ugyan függvényegyenletünk egyes eseteinek tárgyalása általánosabb körülmények között történik, mint a jelen dolgozatban, másrészt viszont függvényegyenletünk nem minden megoldási esete sorolható a [9]-ben tárgyalt esetek valamelyikébe, amint ezt Seiji Nabeya is megjegyzi idézett cikkében. Másrészt a jelen dolgozat megadja a megoldások pontos felírásának módját is és több esetben ábra szemlélteti a megoldásfüggvények grafikus képét, ezeket a dolgozat végén lévő függelékben láthatjuk.

A megoldások differenciálhatóságának vizsgálatát a dolgozat terjedelmi okokból nem tekintette céljának.

A harmadik fejezet célkitűzései közül az említetteken kívül még az irányú törekvésemet említem meg, hogy letárgyaljam a függvényegyenlet megoldásának minden lehetséges esetét a nem triviális $b \neq 0$ esetben.

Köszönetnyilvánítás: Végül szeretnék köszönetet mondani témavezetőimnek Dr. Németh József, Dr. Páles Zsolt és Dr. Pintér Lajos tanár úrakkal egyrészt, hogy segítettek a szükséges irodalom megtalálásában és annak beszerzésében, de legfőképpen dolgozataim elolvasásáért és azokhoz fűzött észrevételeikért. Külön szeretnék köszönetet mondani Dr. Lajkó Károly, Dr. Gát György és Dr. Maksa Gyula tanár úrakkal a szigorlati bizottság tagjainak, akik elismerő szavai erőt adtak a középfokú angol nyelvvizsgára való felkészülésemhez és annak sikeres letételéhez. Köszönet Dr. Nagy Károlynénak a Dékáni Hivatal előadó asszonyának türelmes eligazításaiért.

1 Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer

1.1 A feladat és megoldói kérdések

A KöMaL 2001/7 számában közlik a **B.3438.** feladat megoldását. A pontos hivatkozás kedvéért megismételjük a feladat szövegét:

B.3438. Az $f(x, y, z)$ függvényre teljesül, hogy bármely t valós számra

$$\begin{cases} f(x+t, y+t, z+t) = t + f(x, y, z) \\ f(tx, ty, tz) = t \cdot f(x, y, z) \\ f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(x, z, y) \end{cases} \quad (1)$$

Mennyi $f(2000, 2001, 2002)$?

A közölt megoldáshoz fűzött megjegyzésekben utalás történt arra, hogy több tanuló is foglalkozott a feladat feltételeit kielégítő függvények létezésének kérdésével. A tanulók egy része megtalálta az $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$ függvényt. Egy tanuló pedig egy egész függvénycsaládot talált, amely a következő függvényekből áll:

$$f_a(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x+y+z}{3}, & \text{ha } x \neq y \neq z \neq x \\ x + a \cdot (y - x), & \text{ha } y = z \\ y + a \cdot (x - y), & \text{ha } x = z \\ z + a \cdot (x - z), & \text{ha } x = y \end{cases},$$

ahol a tetszőleges valós szám.

Természetes az a kérdés, hogy mi az (1) függvényegyenletrendszer megoldása?

Tűzzük tehát ki célul mindazon $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények meghatározását, amelyekre fennállnak az (1) összefüggések!

1.2 Háromváltozós függvény helyett egyváltozós

Tételezzük fel, hogy az f függvény a rendszer egy megoldása. Az (1) első két egyenletéből kapjuk, hogy

$$f(0, 0, 0) = 0 \cdot f(0, 0, 0) = 0 \text{ és } f(x, x, x) = x + f(0, 0, 0) = x,$$

valamint $x \neq y$ esetén

$$f(x, y, z) = x + f(0, y - x, z - x) = x + (y - x) \cdot f\left(0, 1, \frac{z - x}{y - x}\right).$$

Vezessük be a $g(t) = f(0, 1, t)$ függvényt, így az előző összefüggést a következő alakban is írhatjuk:

$$f(x, y, z) = x + (y - x) \cdot g\left(\frac{z - x}{y - x}\right). \quad (2)$$

Figyelembe véve azt, hogy a (1) harmadik egyenlete szerint az $f(x, y, z)$ értéke független a változók sorrendjétől, ebből levezethetjük a következő egyenlőséget is:

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) = y + (x - y) \cdot g\left(\frac{z - y}{x - y}\right).$$

Igy tehát $x \neq y$ esetén az előző két összefüggésből az

$$x + (y - x) \cdot g\left(\frac{z - x}{y - x}\right) = y + (x - y) \cdot g\left(\frac{z - y}{x - y}\right)$$

egyenlőséget kapjuk. Ha ebben a $t = \frac{z - x}{y - x}$ jelölést vezetjük be, akkor

$1 - t = \frac{z - y}{x - y}$ és az alábbi egyenlőséghez jutunk:

$$g(t) + g(1 - t) = 1, \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

Mivel $f(x, y, z) = f(x, z, y)$, a (2) szerint $x \neq z$ esetén

$$f(x, y, z) = x + (z - x) \cdot g\left(\frac{y - x}{z - x}\right). \quad (3)$$

Ha $y \neq x \neq z$, akkor a (2) és (3) alapján az előzőekhez hasonlóan, egy g függvény által kielégített újabb függvényegyenletet kapunk:

$$g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right), \quad (\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Most megmutatjuk, hogy az (1) egyenletrendszert kielégítő háromváltozós függvények meghatározása visszavezethető a

$$\begin{cases} g(t) + g(1 - t) = 1, & (\forall t \in \mathbb{R}) \\ g(t) = t \cdot g\left(\frac{1}{t}\right), & (\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \end{cases} \quad (4)$$

függvényegyenlet-rendszert kielégítő egyváltozós függvények meghatározására, és fordítva. Pontosabban a két rendszer megoldásai kölcsönösen meghatározzák egymást.

Azt már beláttuk, hogy az (1) egy $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásából kiindulva, a $(g(t) = f(0, 1, t), (\forall t \in \mathbb{R}))$ képlettel, megadhatjuk a (4) rendszer egy $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldását.

Ha \mathcal{H}_1 -gyel jelöljük az (1) rendszer megoldáshalmazát és \mathcal{H}_2 -vel a (4) függvényegyenlet-rendszer megoldáshalmazát, akkor bevezethetünk egy Φ függvényt a két megoldáshalmaz között, amelyet a következőképpen definiálunk $\Phi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, $\Phi(f) = g$, ahol $g(t) = f(0, 1, t)$.

A továbbiakban azt fogjuk belátni, hogy egy $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény segítségével, amely kielégíti a (4) egyenletrendszert, megadhatjuk az

(1) függvényegyenlet-rendszer egy megoldását. Legyen

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x + (y - x) \cdot g\left(\frac{z - x}{y - x}\right) & , \text{ ha } x \neq y, \\ x + (z - x) \cdot g\left(\frac{y - x}{z - x}\right) & , \text{ ha } x \neq z, \\ x & , \text{ ha } x = y = z \end{cases} \quad (5)$$

Természetesen ez a definíció, csak akkor nem ellentmondásos, ha $y \neq x \neq z$ esetén az első és második sor formulái ugyanazt az értéket adják. Ez viszont teljesül a (4) második egyenlete miatt. Könnyen ellenőrizhető, hogy az (5)-ben definiált f függvény kielégíti az (1) első két egyenletét. Másrésztől

$$f(y, x, z) = \begin{cases} y + (x - y) \cdot g\left(\frac{z - y}{x - y}\right) & , \text{ ha } x \neq y, \\ y + (z - y) \cdot g\left(\frac{x - y}{z - y}\right) & , \text{ ha } y \neq z, \\ x & , \text{ ha } x = y = z. \end{cases} \quad (6)$$

Ha $x = y$, akkor az $f(x, y, z) = f(y, x, z)$ egyenlőség nyilvánvaló. Ha $x \neq y$, akkor $f(x, y, z) = f(y, x, z)$ a (4) első egyenlete alapján. Az $f(x, y, z) = f(x, z, y)$ egyenlőség nyilvánvaló az f függvény (5)-ben megadott definíciója szerint. Tehát $f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(x, z, y)$, vagyis bármelyik két változót felcserélhetjük. Következik, hogy az (5)-ben definiált f függvény megoldása (1)-nek.

Tehát itt is definiálhatunk egy $\Psi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ függvényt a $\Psi(g) = f$ megfeleltetéssel, ahol f a (5) képletekkel megadott függvény. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $f \in \mathcal{H}_1$ esetén $\Psi(\Phi(f)) = f$, és tetszőleges $g \in \mathcal{H}_2$ esetén $\Phi(\Psi(g)) = g$, ami azt jelenti, hogy a Φ és Ψ függvények egymás inverzei. Ezzel beláttuk azt, hogy a \mathcal{H}_1 bármelyik függvénye előállítható egy \mathcal{H}_2 beli függvényből és fordítva.

Mielőtt rátérnénk a (4) rendszer megoldására célszerű egy algebrai

kitérőt tenni. Megemlítünk néhány olyan algebrai fogalmat, amelyek alkalmasak a rendszer megoldásának áttekinthetőbbé tételére.

1.3 Transzformációcsoportok

Az algebrai struktúrák között alapvető helyet foglal el a csoport. Egy kétváltozós $*$ művelettel megadott $(G, *)$ algebrát *csoportnak* nevezünk, ha eleget tesz a következő feltételek:

1° A művelet asszociatív, azaz

$$(a * b) * c = a * (b * c), \quad (\forall a, b, c \in G).$$

2° A G -ben van egy e egység elem a $*$ műveletre nézve, vagyis

$$e * a = a * e = a, \quad (\forall a \in G).$$

3° A G -ben minden elemnek van inverze a $*$ műveletre nézve, azaz

$$(\forall a \in G)(\exists a' \in G) : a * a' = a' * a = e.$$

Matematikai tanulmányaink legelején is találkozunk csoportokkal, például a $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}^+, \cdot) mind csoportok. A matematikában fontos szerepet játszanak azok a csoportok, amelyek elemei egy halmaz önmagába való bizonyos tulajdonságú leképezései, a köztük értelmezett művelet pedig a leképezések egymás után alkalmazása, azaz kompozíciója. Egy X halmaz önmagába való leképezéseit az X halmaz *transzformációinak*, az X önmagára való bijektív leképezéseit pedig az X *permutációinak* nevezzük. Az X halmaz permutációinak halmazát $S(X)$ -szel jelöljük. Két permutáció kompozíciója szintén permutáció. A bevezetett algebrai fogalmak bővebb tanulmányozása végett lásd pl. [8] és [15] jegyzeteket.

1. Példa A permutációk halmaza a kompozícióra nézve csoport, azaz $(S(X), \circ)$ csoport, ahol \circ a függvényösszetevés (kompozíció) műveletét jelöli. Valóban, a függvényösszetevés asszociatív művelet. Ha ε az X halmaz identikus leképezése, könnyen ellenőrizhető, hogy $\varepsilon \in S(X)$ és tetszőleges $f \in S(X)$ esetén $\varepsilon \circ f = f \circ \varepsilon = f$, vagyis ε egységeleme $S(X)$ -nek a kompozícióra nézve. Végül, ha $f \in S(X)$, akkor f -nek mint bijektív függvénynek van inverz függvénye, amelyre $f^{-1} \in S(X)$ és $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \varepsilon$, azaz az $S(X)$ minden elemének van szimmetrikusa a kompozíció műveletére nézve. Ezzel állításunkat igazoltuk.

2. Példa. Tekintsük a $X = R \setminus \{0, 1\}$ halmazt, valamint a következő $X \rightarrow X$ bijektív leképezéseket: $\varepsilon : x \mapsto x$, $\sigma : x \mapsto 1 - x$, $\theta : x \mapsto \frac{1}{x}$, $\alpha : x \mapsto \frac{x-1}{x}$, $\beta : x \mapsto \frac{x}{x-1}$, $\gamma : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Ekkor $\sigma \circ \sigma : x \mapsto 1 - \sigma(x) = x$, $\theta \circ \theta : x \mapsto \frac{1}{\theta(x)} = x$, $\sigma \circ \theta : x \mapsto 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, vagyis $\sigma \circ \sigma = \varepsilon$, $\theta \circ \theta = \varepsilon$ és $\sigma \circ \theta = \alpha$. Hasonló számolások után kapjuk, hogy $\theta \circ \alpha = \beta$, $\sigma \circ \beta = \gamma$ és $\theta \circ \gamma = \sigma$. Az előző összefüggések alapján $\alpha = \sigma \circ \theta$, $\beta = \theta \circ (\sigma \circ \theta)$, $\gamma = \sigma \circ (\theta \circ (\sigma \circ \theta))$ és $\sigma = \theta \circ (\sigma \circ (\theta \circ (\sigma \circ \theta)))$. Állításaink jobban nyomonkövethetők a fenti számítások alapján könnyen elkészíthető "kompozíciótábla" segítségével:

\circ	ε	σ	θ	α	β	γ
ε	ε	σ	θ	α	β	γ
σ	σ	ε	α	θ	γ	β
θ	θ	γ	ε	β	α	σ
α	α	β	σ	γ	θ	ε
β	β	α	γ	σ	ε	θ
γ	γ	β	θ	ε	σ	α

Ezek a számítások azt mutatják, hogy az $(S(X), \circ)$ csoportban a $\{\sigma, \theta\}$ halmaz által származtatott részcsoport éppen az általunk felsorolt permutációkból áll, ugyanis a kapott eredmények alapján látható, hogy a $G = \{\varepsilon, \sigma, \theta, \alpha, \beta, \gamma\}$ halmaz zárt része $S(X)$ -nek a kompozíció műveletére nézve, tartalmazza a csoport egység elemét és minden elem szimmetrikusa is G -ben van. Megállapíthatjuk tehát, hogy (G, \circ) egy olyan csoport, amely X bizonyos transzformációiból áll.

1.4 Orbit és tranzverzális

Tegyük föl, hogy X egy halmaz és H az X bizonyos transzformációiból alkotott csoport a kompozíció műveletére nézve; tegyük fel azt is, hogy H egységeleme az ε identikus leképezés. Ezen feltételek mindkét példánk esetén teljesülnek. Ha x az X halmaz egy tetszőleges eleme, akkor x H -ra vonatkozó orbitjának nevezzük az X azon elemeinek halmazát, amelyet megkaphatunk x -nek valamelyik H -beli leképezésénél vett képeként, vagyis x -nek a H transzformáció csoportra vonatkozó orbitja nem más, mint a $\hat{x} = \{\eta(x) | \eta \in H\}$ halmaz. Mivel $\varepsilon \in H$ következik, hogy $x \in \hat{x}$.

Vizsgáljuk meg két orbit viszonyát! Ha x és y elemek orbitjainak van egy egy közös z elemük, akkor van olyan η_1 és η_2 transzformáció H -ban, amelyekre $\eta_1(x) = z$ és $\eta_2(y) = z$. Mivel H csoport, η_2 inverze a kompozícióra nézve, az η_2^{-1} is H -ban van, így az $\eta_2^{-1} \circ \eta_1$ is H -ban lévő transzformáció, de $(\eta_2^{-1} \circ \eta_1)(x) = \eta_2^{-1}(z) = y$, tehát $y \in \hat{x}$. Ezek alapján

$$\hat{y} = \{\xi(y) | \xi \in H\} = \{\xi(\eta_2^{-1}(\eta_1(x))) | \xi \in H\} \subseteq \{\zeta(x) | \zeta \in H\} = \hat{x}.$$

Ha x és y szerepét felcseréljük hasonlóan igazolható, hogy $\hat{x} \subseteq \hat{y}$, tehát $\hat{x} = \hat{y}$. Ezzel beláttuk, hogy két orbit vagy egyenlő egymással, vagy diszjunktak.

Az orbitához szorosan kapcsolódó fogalom a tranzverzális. Az X egy részhalmazát *tranzverzálisnak* nevezzük, ha minden orbitból pontosan egy elemet tartalmaz.

Nézzük meg, mik az orbitok és transzverzálisok a két korábbi példánkban! Az 1. példában egyetlen orbit van, maga az X halmaz, hiszen minden $x, y \in X$ -re van (általában nem is egy) olyan bijektív leképezés, ami x -et y -ba képezi. Így az X bármelyik eleméből alkotott halmaz egy transzverzális.

Sokkal érdekesebb a 2. példa esete. Ha r egy valós szám és mind a hat függvény értelmezve van r -ben, akkor r orbitja, $\hat{r} = \{\xi(r) \mid \xi \in G\}$ legfeljebb 6 számból áll. Mivel minden valós számnak az $X = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ halmazból van orbitja, az orbitok száma végtelen.

Megmutatjuk, hogy a $[2, +\infty)$ intervallum egy transzverzális. A G -beli függvények folytonossága és szigorú monotonitása a $(2, +\infty)$ intervallumon felhasználható az egyes függvények értékhalmozának meghatározására ezen az intervallumon, így rendre

$$\begin{aligned} \sigma((2, +\infty)) &= (-\infty, -1); \gamma((2, +\infty)) = (-1, 0); \theta((2, +\infty)) = \left(0, \frac{1}{2}\right); \\ \alpha((2, +\infty)) &= \left(\frac{1}{2}, 1\right); \beta((2, +\infty)) = (1, 2); \varepsilon((2, +\infty)) = (2, +\infty). \end{aligned}$$

Ezekből leolvasható, hogy a $(2, +\infty)$ intervallum minden elemének orbitja hatelemű halmaz, mivel a fentebb megadott értékhalmozok diszjunktak és minden orbit a fenti halmazokból pontosan egy elemet tartalmaz. Továbbá az is nyilvánvaló, hogy a kapott értékhalmozok bármely eleme, valamely $(2, +\infty)$ intervallumbeli szám orbitjához tartozik. A kimaradt $-1, \frac{1}{2}, 2$ számok egy három elemű orbitot alkotnak, ugyanis $\hat{2} = \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$. Ezzel azt is beláttuk, hogy a $[2, +\infty)$ egy transzverzális, hiszen minden orbit pontosan egy elemet tartalmaz ebből az intervallumból.

1.5 A (4) függvényegyenlet-rendszer megoldása

A (4) egyenletrendszer első egyenletét a G csoportot alkotó függvények segítségével a következő alakban írhatjuk:

$$g(\sigma(t)) = \sigma(g(t)) = 1 - g(t), \quad (7)$$

a másodikat pedig

$$g(\theta(t)) = \frac{g(t)}{t} \quad (8)$$

alakban.

A G -beli művelet segítségével a (7) és (8) felhasználásával kapjuk, hogy:

$$g(\alpha(t)) = g(\sigma(\theta(t))) = \sigma(g(\theta(t))) = 1 - \frac{g(t)}{t}, \quad (9)$$

$$g(\beta(t)) = g(\theta(\alpha(t))) = \frac{g(\alpha(t))}{\alpha(t)} = \frac{1 - \frac{g(t)}{t}}{\frac{t-1}{t}} = \frac{t-g(t)}{t-1}, \quad (10)$$

$$g(\gamma(t)) = g(\theta(\sigma(t))) = \frac{g(\sigma(t))}{\sigma(t)} = \frac{1-g(t)}{1-t}. \quad (11)$$

A (7)-(11) összefüggések azt mutatják, hogy ha egy $t \in X$, ($X = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$) pontban megadjuk g értékét, akkor megkaphatjuk g értékét t orbitjának minden pontjában. Tehát ha definiáljuk a g függvényt egy transzverzálison, akkor az említett képletekkel a definíció kiterjeszhető egész X -re. Nyilván felvetődik a kiterjesztés ellentmondás mentességének kérdése.

Ha a t orbitja hat elemű, akkor akkor a (7)-(11) formulákkal megkapjuk

g értékét \widehat{t} minden elemére. Az a kérdés merül fel, hogyha t helyett, az orbitjának valamelyik elemére alkalmazzuk ezeket a definíciókat nem-e kapunk ellentmondó eredményeket. Ehhez eléréséges az ellenőrzést t -nek $\theta(t)$ -vel való és t -nek $\sigma(t)$ -vel való cseréje esetén elvégezni, mert amint azt a 2. példában láttuk, a többi permutáció a σ és θ permutációkból előállítható. Ha t -t $\theta(t)$ -vel cseréljük, akkor a (7)-ből a (9)-t, (8)-ból a (8)-t, (9)-ből a (7)-t, (10)-ből a (11)-t és fordítva kapjuk meg, vagyis nem lesz ellentmondás. Hasonlóan győződhetünk meg az ellentmondás metességről a másik csere esetén is.

Ha az orbit három elemű, akkor az orbit minden pontjában kétféle definíció is van a függvényértékre. Ez történik $t = 2$ esetén. Mi is helyzet valójában? Mivel $\beta(2) = 2$, így a (10) összefüggés alapján $g(2) = 1$ -nek kell teljesülnie. Ha viszont ez teljesül, akkor a $\sigma(2) = \gamma(2) = -1$ pontban a (7) és (11) képletek ugyanahhoz a $g(-1) = 0$ értékhez vezetnek, míg a $\alpha(2) = \theta(2) = \frac{1}{2}$ pontban a (8) és (9) definíciók is a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ értéket adják. Tehát

$$g(-1) = 0, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad g(2) = 1. \quad (12)$$

Ezek az észrevételek azt jelentik, hogy ha a $[2, +\infty)$ transzverzálison megadunk egy tetszőleges valós függvényt, amely eleget tesz a $h(2) = 1$ felételnek, akkor a (7)-(11) összefüggések segítségével h -t meghosszabbíthatjuk egy X -en értelmezett \widetilde{h} függvényig, amely rendelkezik ugyanazokkal a tulajdonságokkal, amelyeket a g függvényre nézve a (7)-(11) egyenletek adnak meg. Ebből többek között az is következik, hogy \widetilde{h} kielégíti a (7) és (8) egyenleteket is minden $t \in X$

esetén. Ez a függvény a következő

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t) &= \begin{cases} 1 - h(\sigma^{-1}(t)) & , \text{ ha } t \in (-\infty, -1], \\ \frac{1 - h(\gamma^{-1}(t))}{1 - \gamma^{-1}(t)} & , \text{ ha } t \in [-1, 0), \\ \frac{h(\theta^{-1}(t))}{\theta^{-1}(t)} & , \text{ ha } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - \frac{h(\alpha^{-1}(t))}{\alpha^{-1}(t)} & , \text{ ha } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ \frac{\beta^{-1}(t) - h(\beta^{-1}(t))}{\beta^{-1}(t) - 1} & , \text{ ha } t \in (1, 2], \\ h(t) & , \text{ ha } t \in [2, +\infty) \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1 - h(1-t) & , \text{ ha } t \in (-\infty, -1], \\ t \cdot \left[1 - h\left(\frac{t-1}{t}\right)\right] & , \text{ ha } t \in [-1, 0), \\ t \cdot h\left(\frac{1}{t}\right) & , \text{ ha } t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 + (t-1) \cdot h\left(\frac{1}{1-t}\right) & , \text{ ha } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \\ t + (1-t) \cdot h\left(\frac{t}{t-1}\right) & , \text{ ha } t \in (1, 2], \\ h(t) & , \text{ ha } t \in [2, +\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Ha e függvényt az egész \mathbb{R} -re szeretnénk meghosszabbítani úgy, hogy az kielégítse a (7) és (8) egyenleteket, ahhoz meg kell adnunk a függvény értékét a $t = 0$ és a $t = 1$ pontokban. Mivel a (7) szerint $g(0) + g(1) = 1$, következik, hogy a \tilde{h} függvénynek az \mathbb{R} -re való kiterjesztése a $t = 0$ és $t = 1$ pontokban csak 1 összegű értékekkel történhet. Ezek után egy $h : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(2) = 1$ feltételt teljesítő függvénytől

és egy valós v paramétertől függő g függvényhez jutunk:

$$g(t) = \begin{cases} \tilde{h}(t) & , \text{ ha } t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \\ 1 - v & , \text{ ha } t = 0, \\ v & , \text{ ha } t = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Mivel \widehat{h} kielégíti a (7) és (8) egyenleteket következik, hogy a g függvény kielégíti a (4) egyenletrendszert és a (4) minden megoldása ilyen alakú. Ezekből az (5) szerint kapjuk meg az eredeti (1) rendszer megoldásait.

1.6 Egy megoldáscsalád

Végül bemutatjuk a $h : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = wt + 1 - 2w$ alakú lineáris függvény által származtatott megoldáscsaládot, ahol w egy tetszőlegesen választott valós szám. Először a (13) alapján meghatározzuk a h -hoz tartozó g függvényeket:

$$g(t) = \begin{cases} w \cdot t + w & , \text{ ha } t \in (-\infty, 0), \\ 1 - v & , \text{ ha } t = 0, \\ (1 - 2w) \cdot t + w & , \text{ ha } t \in (0, 1), \\ v & , \text{ ha } t = 1, \\ w \cdot t + 1 - 2w & , \text{ ha } t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (14)$$

majd az (5) szerint az (1) függvényegyenlet-rendszer g -nek megfelelő megoldásait:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x + w \cdot (y + z - 2x) & , \text{ ha } \frac{z - x}{y - x} < 0, \\ y + v \cdot (x - y) & , \text{ ha } z = x, \\ z + w \cdot (x + y - 2z) & , \text{ ha } 0 < \frac{z - x}{y - x} < 1, \\ x + v \cdot (y - x) & , \text{ ha } y = z, \\ y + w \cdot (x + z - 2y) & , \text{ ha } \frac{z - x}{y - x} > 1, \\ z + v \cdot (x - z) & , \text{ ha } x = y, \end{cases} \quad (15)$$

Ha $v = 1 - w$, akkor a megoldások egyszerűbb alakot öltenek:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x + w \cdot (y + z - 2x) & , \text{ ha } (z - x)(y - x) \leq 0, \\ z + w \cdot (x + y - 2z) & , \text{ ha } 0 < \frac{z - x}{y - x} < 1, \\ y + w \cdot (x + z - 2y) & , \text{ ha } \frac{z - x}{y - x} \geq 1, \end{cases} \quad (16)$$

Ha pedig $w = \frac{1}{3}$, akkor a (16)-ból az $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{3}$ függvényt kapjuk, míg a (15)-ből az első részben említett függvénycsaládot.

2 A Cauchy-féle egyenlet segítségével megoldható feladatok

Ebben a fejezetben olyan feladatokat mutatok be, amelyek a Cauchy-féle egyenlet segítségével megoldhatók, de eltérnek a szokványos Cauchy-egyenletre visszavezethető feladatoktól. A Cauchy-féle egyenletre vonatkozó alapismereteket ismertnek tekintjük, elsősorban az egyenlet megoldását a folytonos, illetve a monoton függvények halmazában, ugyanis ez középiskolai tankönyvekben is megtalálható (lásd pl. dr. Pintér Lajos speciális matematika osztályok számára írt Analízis I. tankönyvének 214. oldalán).

2.1 Egy nehéz feladat

Itt egy a KöMaL nehezebb feladatok rovatában kitűzött olyan feladattal foglalkozunk, amelynek megoldása a KöMaL-ban sohasem jelent meg és valószínű, hogy már nem is fog, mert a most megjelenő megoldások sorszáma már ezét rég túllépte. Ez a következő feladat:

N206. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket, amelyekre tetszőleges x, y valós számok esetén $f(xy) = f(x)f(y) + f(-x)f(-y)$ és $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ teljesül, továbbá $f(1999) = 1000$.
KöMaL, 1999/3

Ennek megoldásához több olyan ötletre és ismeretre van szükség, amit egy nemzetközi versenyekre készülő tanulónak jó elsajátítania. Nézzük a feladat megoldását!

Tetszőleges x, y esetén az

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(-x)f(-y) \tag{1}$$

összefüggésből következik:

$$f(xy) + f(-xy) = f(x)f(y) + f(x)f(-y) + f(-x)f(y) + f(-x)f(-y).$$

Ha a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a $g(x) = f(x) + f(-x)$ képlettel definiáljuk, akkor a g függvény folytonos és az előző egyenlőséget még így is írhatjuk:

$$g(xy) = g(x)g(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ha létezik $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ úgy, hogy $g(x_0) = 0$, akkor $g(x) = g\left(\frac{x}{x_0}\right)g(x_0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ha létezik $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ úgy, hogy $g(x_0) \neq 0$, akkor $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ és a (2)-ből következik, hogy $g(1) = 1$. Ebben az esetben, ha $x > 0$, akkor $g(x) = g(\sqrt{x})^2 > 0$, ezért a $h(x) = \ln((g(e^x)))$ képlettel egy $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt definiálhatunk, amely a (2) alapján eleget tesz a következő összefüggésnek:

$$h(x + y) = h(x) + h(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

A h függvény, mint folytonos függvények összetettje természetesen folytonos. A (3) Cauchy-féle függvényegyenlet, folytonos megoldásai homogén lineáris függvények. Tehát $h(x) = \lambda x$ alakú, innen következik, hogy $g(e^x) = e^{\lambda x}$, vagyis $g(x) = x^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ esetén. Mivel g folytonos a 0-ban és $g(0) \in \{0, 1\}$ belátható, hogy csak $\lambda \geq 0$ értékei jöhetnek számításba. A g függvény definíciója értelmében $g(-x) = g(x)$, ami azt jelenti, hogy ha $\lambda > 0$, akkor $g(x) = |x|^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ha pedig $\lambda = 0$, akkor $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tehát a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páros és folytonos függvényre a következő lehetőségeket kaptuk:

1° $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

2° $g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

3° $g(x) = |x|^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

A kapott g függvényekre meghatározzuk a megfelelő (1)-t kielégítő f függvényeket:

1° Ha $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, akkor $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, így a (1) a következőképpen alakul: $f(xy) = 2f(x)f(y) \Leftrightarrow 2f(xy) = 2f(x)2f(y)$,

amely alapján a g függvény meghatározásához hasonlóan a következő páratlan folytonos f függvényeket kapjuk:

a) $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

b) Az $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ eset, az f függvény folytonossága alapján ellentmondásba ütközik az f páratlanságából származó $f(0) = 0$ egyenlőséggel, így ebben az esetben nincs a követelményeket kielégítő f függvény.

c) Minden $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} -(-x)^\lambda & , \text{ ha } x < 0 \\ 0 & , \text{ ha } x = 0 \\ x^\lambda & , \text{ ha } x > 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sgn} x \cdot |x|^\lambda.$$

Ezek közül az $f(1999) = 1000$ feltételt csak az utolsó család, valamely függvénye teljesítheti, ami $\lambda = \frac{\ln 2000}{\ln 1999}$ esetén teljesül is. Mivel ez esetben

$\lambda > 1, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ esetén következik, hogy $\left(\frac{x}{x+y}\right)^\lambda < \frac{x}{x+y}$ és $\left(\frac{y}{x+y}\right)^\lambda < \frac{y}{x+y}$ ahonnan $\left(\frac{x}{x+y}\right)^\lambda + \left(\frac{y}{x+y}\right)^\lambda < 1$, vagyis $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ -ra teljesül az $f(x+y) > f(x) + f(y)$ egyenlőtlenség, ami miatt ez a függvény sem teljesíti a feladat minden követelményét.

2° Ha $g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, akkor $f(-x) = 1 - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Ennek alapján az (1) még így is írható: $2f(xy) - 1 = (2f(x) - 1)(2f(y) - 1)$, ebből a g függvény meghatározásához hasonlóan a következő folytonos függvényeket kapjuk:

a) Ha $2f(x) - 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, akkor az $f(-x) = 1 - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ összefüggés alapján az $f(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ folytonos függvényhez jutunk.

b) Ha $2f(x) - 1 = 1, \forall x \in \mathbb{R}^+$, akkor f folytonossága alapján ellentmondásba ütköztünk az $f(-x) = 1 - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ összefüggésből származó $f(0) = \frac{1}{2}$ egyenlőséggel, vagyis ez esetben nincs folytonos megoldás.

c) Ha pedig $2f(x) - 1 = x^\lambda, \forall x \in \mathbb{R}^+$, ahol $\lambda > 0$, akkor az

$f(-x) = 1 - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alapján az $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot |x|^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$ folytonos függvényt kapjuk.

Ezek közül az $f(1999) = 1000$ feltételt csak az utolsó család, valamely függvénye teljesítheti. Ez $\lambda = 1$ esetén teljesül is. Ekkor $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, amely tetszőleges valós x, y esetén teljesíti az egyenlőtlenséget is, vagyis a feladat egyik megoldását kaptuk meg.

3° Ha $g(x) = |x|^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ahol $\lambda > 0$, akkor $f(-x) = |x|^\lambda - f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ezért az (1) így alakul:

$$2f(xy) - |xy|^\lambda = \left(2f(x) - |x|^\lambda\right) \left(2f(y) - |y|^\lambda\right),$$

amelyből a fentiekhez hasonló módon a következő folytonos függvényeket kapjuk (a második eset itt sem vezet megoldáshoz, ezért nem is tüntetem fel):

a) $f(x) = \frac{1}{2} |x|^\lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{1}{2} |x|^\lambda + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x \cdot |x|^\mu$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ahol $\mu > 0$.

Az **a)** alpont függvényei közül az $f(1999) = 1000$ feltételt az teljesíti, amelyre $\lambda = \frac{\ln 2000}{\ln 1999}$. Ez viszont az **1°/c)**-nél látottak miatt nem teljesíti az $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ egyenlőtlenséget.

A **b)** alpont f függvényeit tanulmányozva, az $f(1999) = 1000$ egyenlőségből az

$$1999^\lambda + 1999^\mu = 1999 + 1 \tag{4}$$

egyenlőséget kapjuk, amiből indirekt úton az következik, hogy a λ és μ pozitív számok csak 1-nél kisebbek lehetnek, továbbá az $f(-2) \leq f(-1) + f(-1)$ egyenlőtlenségből az következik, hogy $0 < \lambda \leq \mu < 1$.

Ha $\lambda = \mu$, akkor a (4) egyenlőségből, a $\lambda = \frac{\ln 1000}{\ln 1999} < 1$ értéket

kapjuk, amelyre $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in (-\infty, 0] \\ x^\lambda & , \text{ ha } x \in (0, +\infty) \end{cases}$ és ez eleget tesz

az $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ egyenlőtlenségnek is minden valós x, y esetén. Valóban, mivel f növekvő és nemnegatív, ha pl. $x \leq 0$, akkor

$x + y \leq y$, ahonnan $f(x + y) \leq f(y) = f(x) + f(y)$, tehát az egyenlőtlenség fennáll, ha x vagy y közül legalább az egyik nem pozitív. Ha pedig x és y is pozitív, akkor könnyen belátható, hogy f szigorúan konkáv a $[0, +\infty)$ intervallumon, így minden $a \in [0, +\infty)$ esetén az $x \mapsto h_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ függvény szigorúan csökkenő a $[0, +\infty) \setminus \{a\}$ halmazon, így $0 < x \leq y \Rightarrow h_y(x + y) < h_y(0) = h_0(y) \leq h_0(x)$, vagyis $\frac{f(x+y)-f(y)}{x} < \frac{f(x)-f(0)}{x}$, ahonnan $f(x + y) < f(x) + f(y)$, ami állításunkat igazolja.

Ha pedig $0 < \lambda < \mu < 1$, akkor az $f(x) = \frac{1}{2}|x|^\lambda + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x \cdot |x|^\mu$, $\forall x \in \mathbb{R}$ alakú függvények nem tesznek eleget az $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ egyenlőtlenségnek minden valós x, y esetén. Valóban, ha $x = y = -2^{2^n-1}$ értékeket választjuk, akkor $f(x + y) - f(x) - f(y) = f(-2^{2^n}) - 2f(-2^{2^n-1}) = 2^{2^n\lambda-1} - 2^{2^n\mu-1} - 2^{\lambda(2^n-1)} + 2^{\mu(2^n-1)}$. Tekintsük a $(0, 1)$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \varphi(x) = 2^{2^x-1} - 2^{x(2^x-1)}$ megfeleltetéssel megadott valós függvényt. Látható, hogy ha $x = y = -2^{2^n-1}$, akkor $f(x + y) - f(x) - f(y) = \varphi_n(\lambda) - \varphi_n(\mu)$. Azt fogjuk igazolni, hogy minden $\mu \in (0, 1)$ esetén esetén, választható olyan n pozitív egész, amelyre a φ_n függvény szigorúan csökkenő legyen a $(0, \mu]$ intervallumon. Valóban φ_n deriváltja $\varphi'_n(x) = 2^{(2^n-1)x+n} (2^{x-1} + \frac{1}{2^n} - 1)$, amely x -nek növekvő függvénye, így ha $\varphi'_n(\mu) < 0$, akkor $\varphi'_n(x) < 0$, $\forall x \in (0, \mu]$. Mivel $1 - 2^{\mu-1} > 0$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ következik, hogy létezik $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ úgy, hogy $\frac{1}{2^{n_0}} < 1 - 2^{\mu-1}$, ezért $\varphi'_{n_0}(\mu) < 0$, aminek következtében az előző megjegyzések figyelembe vételével következik hogy, ha $0 < \lambda < \mu < 1$, akkor az itt megválasztott n_0 esetén $\varphi_{n_0}(\lambda) > \varphi_{n_0}(\mu)$, ahonnan $x = y = -2^{2^{n_0}-1}$ esetén $f(x + y) > f(x) + f(y)$, vagyis függvényünk nem megoldása a feladatnak. Tehát a feladatnak két megoldása van, ezek:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in (-\infty, 0] \\ x^\lambda & , \text{ ha } x \in (0, +\infty) \end{cases}$, ahol $\lambda = \frac{\ln 1000}{\ln 1999}$.

2.2 Egy $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$ alakú függvényegyenlet-család

Wu Wei Chao, California State University, Northridge, CA a MONTHLY 108 / 2001 dec. számában a következő feladatot közölte:

Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre minden valós x és y esetén

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2 \quad (5)$$

teljesül.

A feladatot a következőképpen általánosíthatjuk:

Legyen a és b két 0-tól különböző valós szám és legyen $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy olyan páros ráképezés (szürjekció), amelyre $g(0) = 0$ és amely a $[0, \infty)$ intervallumon injektív. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvényeket, amelyek minden valós x és y esetén kielégítik az

$$f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by \quad (6)$$

egyenletet.

A továbbiakban ezt az általánosabb függvényegyenletet fogjuk megoldani. A g függvény tulajdonságai alapján minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén érvényes a következő ekvivalencia:

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow |x| = |y|. \quad (7)$$

Tételezzük fel, hogy f a (6) függvényegyenlet egy megoldása. Az $y = 0$, majd az $x = 0$ helyettesítésekkel a következő egyenleteket kapjuk:

$$f(g(x) + f(0)) = ag(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$f(y + f(y)) = ag(f(0)) + by \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

A (9) egyenlet alapján belátható, hogy f szürjekció. Tehát létezik olyan valós x_0 , amelyre $f(x_0) = 0$. Figyelembe véve, hogy g egy páros függvény a (8)-ból következik, hogy $g(f(-x_0)) = g(f(x_0))$, majd a (7) alapján az, hogy $f(-x_0) = 0$. A (9) szerint $ag(f(0)) + bx_0 = f(x_0 + f(x_0)) = 0$ és $ag(f(0)) - bx_0 = f(-x_0 + f(-x_0)) = 0$, amelyekből következik, hogy $x_0 = 0$ és $g(f(0)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Tehát fennáll a következő ekvivalencia:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (10)$$

A (10) az that the equations (8) és (9) egyenleteket az következő két egyenletté alakítja:

$$f(g(x)) = ag(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

illetve

$$f(y + f(y)) = by \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Ha x nemnegatív valós szám, akkor $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ szürjektivitása alapján létezik z úgy, hogy $g(z) = x$. A (6) és (11) alapján $f(x + y + f(y)) = ag(f(z)) + by = f(g(z)) + by = f(x) + by$, így

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + by \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ and } x \geq 0. \quad (13)$$

Ha x olyan valós szám, amelyre $bx \geq 0$, a (13)-ból az

$$f(bx + x + f(x)) = f(bx) + bx,$$

majd a (12)-ből az

$$f(bx + x + f(x)) = f(x + f(x) + f(x + f(x))) = bx + bf(x)$$

egyenleteket kapjuk. Ezek következménye az

$$f(bx) = bf(x), \quad \text{ha } bx \geq 0. \quad (14)$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy

$$f(nbx) = nbf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{ ha } bx \geq 0. \quad (15)$$

A (14) szerint a (15)-beli egyenlőség igaz $n = 1$ -re. Feltételezve, hogy a (15)-beli egyenlőség fennáll $n = k$ esetén, ha $bx \geq 0$, akkor a (13) és a (12) összefüggésekből

$$\begin{aligned} f((kb + b + 1)x + f(x)) &= f((k + 1)bx) + bx, \\ f((kb + b + 1)x + f(x)) &= f(kbx + x + f(x) + f(x + f(x))) = \\ &= f(kbx) + b(x + f(x)) = (k + 1)bf(x) + bx, \end{aligned}$$

amelyek alapján a (15)-beli egyenlőség fennáll $n = k + 1$ -re is. Tehát a teljes indukció elve alapján a (15) igaz.

A (15) egy azonnali következménye az

$$f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in [0, +\infty) \quad (16)$$

összefüggés.

A továbbiakban azt fogjuk igazolni, hogy f egy páratlan függvény. A (11) alapján felírható $g(f(-x)) = g(f(x))$, majd (7)-ből következik, hogy $|f(-x)| = |f(x)|$. Tételizzük fel, hogy $f(-x) = f(x)$ és $x \neq 0$. Vagyis $f(-|x|) = f(|x|)$. A (12), (13) és (16) alapján

$$\begin{aligned} b|x| &= f(|x| + f(|x|)) = f(2|x| - |x| + f(-|x|)) = \\ &= f(2|x|) - b|x| = 2f(|x|) - b|x|, \end{aligned}$$

ahonnan $f(|x|) = f(-|x|) = b|x|$. Másrésztől a (13) szerint

$$f(b|x|) = f(f(-|x|)) = f(|x| - |x| + f(-|x|)) = f(|x|) - b|x| = 0$$

Ezekből a (10) alapján következik, hogy $x = 0$, ami ellentmond feltételezésünknek. Tehát ha $x \neq 0$, akkor $f(-x) \neq f(x)$, mivel $|f(-x)| = |f(x)|$ a (10) figyelembe vételével következik, hogy

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

A (16)- és (17)-ből kapjuk:

$$f(nx) = nf(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

A (17) és (14) szerint

$$f(bx) = bf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Legyen $c = f(1)$. A (10) következtében $c \neq 0$. A (18) alapján lépésről lépésre kapjuk: $f(n) = c \cdot n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{1}{n}$, $\forall n \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ és végül

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = c \cdot \frac{m}{n} \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \quad (20)$$

Most igazoljuk, hogy

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + by \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Ha $x \geq 0$ az összefüggés a (13) következménye. Ha $x < 0$, akkor a (17) szerint $f(x + y + f(y)) = -f(-x - y + f(-y)) = -f(-x) + by = f(x) + by$, ami befejezi a (21) bizonyítást.

Ha a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a $h(x) = x + f(x)$ képlettel definiáljuk, akkor a (21) és (17) szerint $f(x) = f(-f(x) + x + f(x)) = -f(f(x)) + bx$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, vagyis $h(f(x)) = bx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Továbbá a (21) és (19) szerint minden $x, y \in \mathbb{R}$ -ra fennáll $f(x + y) = f\left(x + h\left(f\left(\frac{y}{b}\right)\right)\right) = f(x) + b \cdot f\left(\frac{y}{b}\right) = f(x) + f(y)$. Tehát az f függvény kielégíti a Cauchy-egyenletet:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

A g függvény szürjektivitása és a (7) alapján minden $y > 0$ esetén létezik egy $x \neq 0$ úgy, hogy $g(x) = y$, ami a (11) alapján az $af(y) > 0$ egyenlőtlenséghez vezet, majd a (22)-ből következik, hogy f szigorúan monoton megoldása a Cauchy-egyenletnek. Ha $q_1 < x < q_2$, ahol

$q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, akkor mivel az $\frac{1}{c} \cdot f$ függvény szigorúan monoton növekvő, ($af(1) > 0$ miatt), a (20) alapján következik, hogy $q_1 < \frac{1}{c} \cdot f(x) < q_2$. Ezek figyelembevételével felírhatjuk az $x = \sup\{q \in \mathbb{Q} | q < x\} \leq \frac{1}{c} \cdot f(x) \leq \inf\{q \in \mathbb{Q} | x < q\} = x$ egyenlőtlenségeket tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha tehát f a (6) egy megoldása, akkor $f = c \cdot \text{id}_{\mathbb{R}}$ alakú. Egy ilyen alakú függvény viszont csak akkor megoldása egyenletünknek, ha teljesülnek a $b = c + c^2$, és $cg(x) = ag(cx)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ feltételek. Észrevételeink összegzéséeként kijelenthetjük a következő tételt:

2.1. Tétel. *Ha a és b 0-tól különböző valós számok és ha $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ egy páros szürjekció, amely injektív a $[0, \infty)$ intervallumon és teljesíti a $g(0) = 0$ feltételt, akkor a (6) függvényegyenletnek akkor és csak akkor van megoldása ha létezik olyan c valós szám, amelyre $b = c + c^2$ és fennáll $cg(x) = ag(cx) \forall x \in \mathbb{R}$. Ha létezik az előző feltételekt teljesítő c valós szám, akkor a (6) megoldása $f = c \cdot \text{id}_{\mathbb{R}}$.*

2.2. Megjegyzés. 1° Az eredeti függvényegyenletet a (6)-ból $a = 1$, $b = 2$ és $g(x) = x^2 \forall x \in \mathbb{R}$ esetén kapjuk. Ebben az esetben $c = 1$ az egyetlen valós szám, amely teljesíti a létezési feltételt.

2° Ha $a = 1$, $b = 2$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tetszőleges páros ráképezés, amelyre $g(0) = 0$ és amely injektív a $[0, \infty)$, akkor a (6), egyetlen megoldása van és ez $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

3° A tételből látható, hogy a (6) egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Ha viszont $b < -\frac{1}{4}$ akkor biztos nincs megoldása.

2.3 Affin transzformációk

2.3.1 Affin koordináták

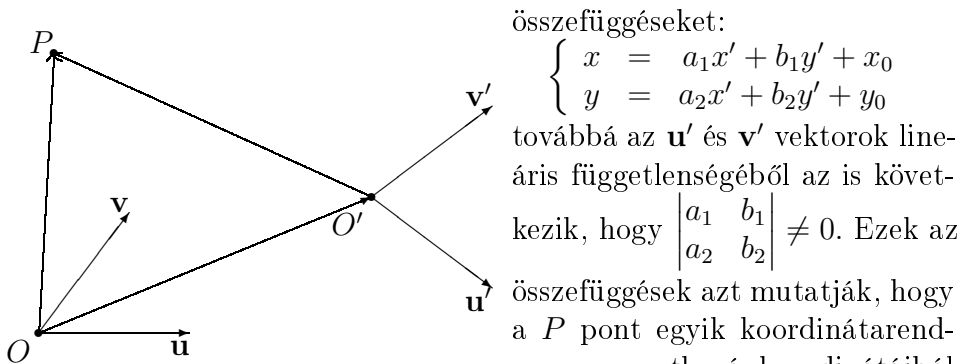
11. osztályban szakköri tevékenység keretében foglalkozhatunk a derékszögű koordinátarendszereken kívül a ferdeszögű koordinátarendszerekkel is, amelyeket szokás még affin koordinátarendszereknek vagy paralell-koordinátarendszereknek nevezni. A megfelelő koordinátákat

értelemszerűen ferdeszögű, affin vagy paralell koordinátáknak nevezük. A egyszerűség kedvéért a sík esetét tárgyaljuk, habár állításaink megfelelőit könnyű szerrel megfogalmazhatjuk a térben, illetve az n dimenziós térben is. A Σ sík egy affin koordinátarendszerét a sík egy rögzített pontja és a sík két lineárisan független vektora határozza meg. Az O pont és \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok által meghatározott koordinátarendszert röviden $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ -vel jelöljük. Ha P a Σ sík egy tetszőleges pontja, akkor mivel az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok lineárisan függetlenek az \overrightarrow{OP} helyvektort (pontosabban az általa meghatározott szabadvektort, amit itt ugyanúgy jelölünk) egyértelműen írhatjuk $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ alakban. Az előző egyenlőségben szereplő x és y együtthatókat nevezzük a P pont $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ koordinátarendszerre vonatkozó affin koordinátáinak és ezt a tényt a $P(x, y)$ -nal jelöljük. Könnyen belátható, hogy egy affin koordinátarendszerben is egy egyenes egyenlete $ax + by + c = 0$ alakú, ahol a , b és c olyan valós számok, amelyekre $|a| + |b| > 0$.

2.3.2 Koordinátatranszformációk

Ha egy síkban két különböző affin koordinátarendszert tekintünk, akkor azokhoz viszonyítva egy pontnak kétféle koordinátái lesznek ezek között összefüggéseket írhatunk fel.

Ha a Σ sík egy P pontjának az $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái (x, y) , míg az $(O', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ rendszerre vonatkozóak (x', y') , továbbá $\mathbf{u}' = a_1\mathbf{u} + a_2\mathbf{v}$, $\mathbf{v}' = b_1\mathbf{u} + b_2\mathbf{v}$ és az O' pont $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ -re vonatkozó koordinátái (x_0, y_0) , akkor $\overrightarrow{OO'} = x_0\mathbf{u} + y_0\mathbf{v}$, $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$ és $\overrightarrow{O'P} = x'\mathbf{u}' + y'\mathbf{v}'$. Figyelembe véve, hogy $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ és az \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorok lineárisan függetlenek, felírhatjuk a következő



ábra 1: Koordinátatranszformáció

2.3. Definíció. Ha Σ és Σ' síkok, akkor egy $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma'$,

$$\tau : \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + x_0 \\ y' = a_2x + b_2y + y_0 \end{cases} \text{ alakú leképezést lineáris transzformációnak nevezünk, ha teljesül a } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ feltétel.}$$

Könnyen belátható, hogy egy lineáris transzformáció bijektív és egyenesbe transzformál. Ezek a tulajdonságok definiálják az affin transzformációt:

2.4. Definíció. Legyenek Σ és Σ' síkok, egy $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ leképezést affin transzformációnak nevezünk, ha rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1° bijektív,

2° tetszőleges három egy egyenesbe eső pontot Σ -ből a Σ' három egy egyenesbe eső pontjába képezi le.

Tehát a lineáris transzformációk affin transzformációk. Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy a lineáris transzformációkon kívül van-e még más affin transzformáció? A választ erre a kérdésre az affin

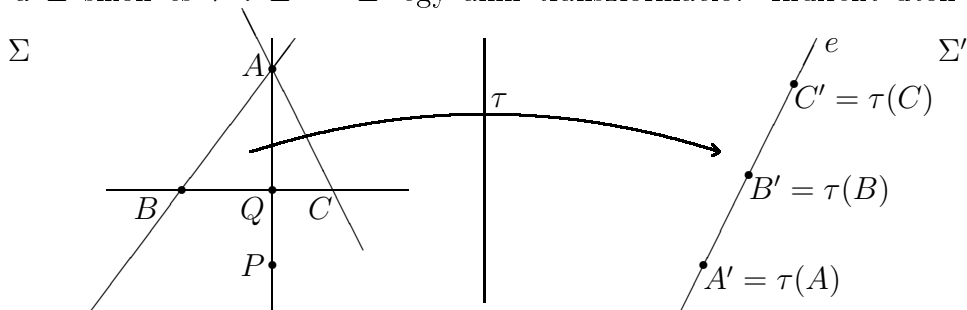
transzformációk tulajdonságainak rövid tanulmányozása után fogjuk megadni.

2.3.3 Az affin transzformációk néhány tulajdonsága

Az affin transzformációk jellemzéséhez szükséges tulajdonságokat tételekbe foglaljuk:

2.5. Tétel. *Egy affin transzformáció három nem egy egyenesre illeszkedő pontot három nem egy egyenesre illeszkedő pontba transzformál.*

Bizonyítás. Legyen A, B és C három nem egy egyenesbe eső pont a Σ síkon és $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ egy affin transzformáció! Indirekt úton



ábra 2:

bizonyítjuk a tulajdonságot. Tételezzük fel, hogy a $\tau(A)$, $\tau(B)$ és $\tau(C)$ pontok egy e egyenesre illeszkednek. Az affin transzformáció definíciója alapján következik, hogy az AB , AC és BC egyeneseknek a τ transzformáció által alkotott képhalmazai ez e egyenes pontjaiból alkotottak. Válasszunk egy olyan P pontot, amelyet a BC egyenes elválaszt az A ponttól és az AP és BC egyenesek metszéspontját jelölje Q ! Tudjuk, hogy $\tau(Q) \in e$ és $\tau(A) \in e$, így az affin transzformáció definíciója szerint következik, hogy $\tau(P) \in e$. Tehát a BC által határolt és az A ponttal ellentétes oldalon lévő félsíkot a τ transzformáció e -be képezi le. Hasonló gondolatmenettel következik, hogy a

P ponttal ellentétes oldalon lévő, azaz az A pontot tartalmazó félsík képhalmaza is az e egyenes része. Ezen állítások azt jelentik, hogy a τ affin transzformáció a Σ síkot a Σ' sík egy egyenesének részalmazába viszi, ami ellentmond τ bijektivitásának. Tehát feltételezésünk hamis, ami igazolja a bizonyítandó tulajdonságot. ♣

2.6. Következmény. Ha $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ affin transzformáció, akkor igazak a következő állítások:

1° τ^{-1} szintén affin transzformáció.

2° Ha e a Σ sík egy egyenese, akkor $\tau(e)$ a Σ' sík egy egyenese.

Ezen észrevételek alapján igazolhatjuk a következő tételbe foglalt tulajdonságot is:

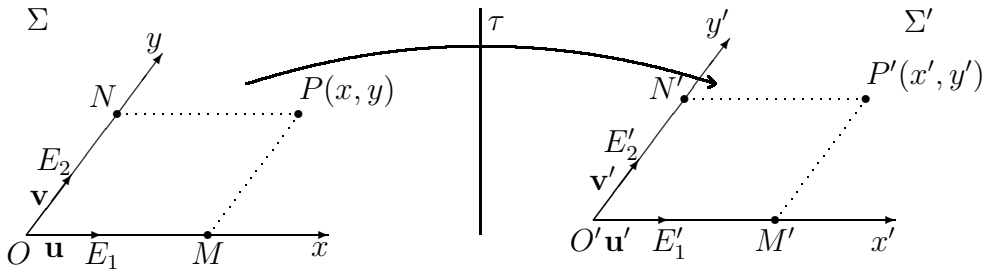
2.7. Tétel. *Ha $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ affin transzformáció és e_1 és e_2 a Σ sík párhuzamos egyenesei, akkor $\tau(e_1)$ és $\tau(e_2)$ a Σ' sík párhuzamos egyenesei.*

Bizonyítás. Az 2.6. következmény alapján $\tau(e_1)$ és $\tau(e_2)$ a Σ' sík egyenesei. Ha ezek metszenék egymást, akkor τ nem lenne injektív, ami ellentmondana tétel hipotézisének. Tehát a képegységek is párhuzamosak. ♣

2.3.4 Az affin transzformációk jellemzése

Elérkezett az a pillanat, amikor megadhatjuk a választ, arra a kérdésre, hogy létezik-e a lineáris transzformációkon kívül más affin transzformáció is, vagy sem.

Tekintsünk egy $\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ affin transzformációt. Legyen továbbá a Σ síkban egy $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ egy affin koordinátarendszer és legyenek $\overrightarrow{OE_1}$ és $\overrightarrow{OE_2}$ az \mathbf{u} és \mathbf{v} szabadvektorok O -ból kiinduló reprezentánsai! Az affin transzformáció 2.5. tételben megadott tulajdonsága alapján a $O' = \tau(O)$, $E'_1 = \tau(E_1)$ és $E'_2 = \tau(E_2)$ pontok nem kollineárisak, tehát az



ábra 3:

$\overrightarrow{O'E_1'}$ és $\overrightarrow{O'E_2'}$ között vektorok által meghatározott \mathbf{u}' és \mathbf{v}' szabadvektorok lineárisan függetlenek. Vezessük be a Σ' síkban az $(O', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ affín koordinátarendszert. Legyen $P(x, y)$ a Σ sík egy tetszőleges pontja és M illetve N a P -ből húzott Oy -nal illetve Ox -szel egyállású egyeneseknek a megfelelő másik tengellyel alkotott metszéspontjai (lásd a 3. ábrát), τ ezeket következők szerint képezi: $P \mapsto P'$, $M \mapsto M'$ és $N \mapsto N'$. Mivel τ az Ox tengelyt az $O'x'$ tengelyre képezi és az Oy tengelyt az $O'y'$ tengelyre értelemszerűen bevezethetjük a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{pr}_1(\tau(x, 0))$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \text{pr}_2(\tau(0, y))$ függvényeket. Az affín transzformációk párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe transzformálnak, így az M', N' és P' pont $(O', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ rendszerbeli koordinátái rendre $M'(f(x), 0)$, $N'(0, g(y))$ és $P'(f(x), g(y))$. Megjegyezzük, hogy általában (nem affín transzformáció esetén) a P' koordinátái kétváltozós függvények lennének. Mivel τ szerint $(0, 0) \mapsto (0, 0)$, $(1, 0) \mapsto (1, 0)$ és $(0, 1) \mapsto (0, 1)$, így könnyen belátható, hogy $f(0) = g(0) = 0$, $f(1) = g(1) = 1$.

Ha e egy olyan egyenes, amelyik nem egyállású az Oy tengellyel, akkor egyenlete $y = mx + n$ alakú, ahol $m, n \in \mathbb{R}$. Mivel τ a párhuzamosságot megőrzi, következik, hogy $\tau(e)$ a Σ' sík olyan egyenese, amely nem egyállású az $O'y'$ tengellyel, vagyis $g(y) = m'f(x) + g(n)$ alakú egyenlőség áll fenn. Figyelembe véve azt, hogy τ a párhuzamosságot megőrzi következik, hogy m' csakis m -től függ, vagyis $m' = h(m)$,

ahol $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tehát teszőleges valós x, m és n esetén az f, g és h függvények kielégítik a következő függvényegyenletet:

$$g(mx + n) = h(m)f(x) + g(n). \quad (23)$$

Ha $x = 1$ és $n = 0$, akkor (23) alapján $g(m) = h(m)$, $\forall m \in \mathbb{R}$. Ha $x = m = 1$ és $n = 0$, akkor (23)-ből $h(1) = 1$ összefüggést kapjuk. Ha $m = 1$ és $n = 0$, akkor (23)-ből az $f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ összefüggéshez jutunk. Ha $m = 1$, akkor $f(x + n) = f(x) + f(n)$, $\forall x, n \in \mathbb{R}$ egyenlőséget, ha pedig $n = 0$ a (23) egyenletből az $f(mx) = f(m)f(x)$, $\forall m, x \in \mathbb{R}$ összefüggést kapjuk. Tehát az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a következő feltételeket teljesíti:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \text{bijektív} \\ f(x + y) = f(x) + f(y), & \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), & \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (24)$$

Mivel $f(0)=0$ és f bijektív, a (24) utolsó feltételből látható, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor $f(\varepsilon) = f(\sqrt{\varepsilon})^2 > 0$. A (24) második összefüggése alapján következik, hogy $f(x + \varepsilon) > f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vagyis f szigorúan növekvő. A Cauchy egyenlet szigorúan növekvő megoldásai $f(x) = cx$ alakúak, ahol $c > 0$. Ezt a (24) utolsó egyenletébe helyettesítve kapjuk, hogy $c = 1$, majd $f(x) = x$. Tehát $\tau : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$. Ha a Σ' síkban más affín koordinátarendszert használunk, akkor a koordinátatranszformáció végrehajtása után az affín transzformációt a következő alakú egyenletekkel írhatjuk le: $\tau : \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$, ahol $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, vagyis minden affín transzformáció lineáris.

3 $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában

3.1 Egy versenyfeladat

A 2001 tavaszán lebonyolított 12. magyar-izraeli, most már a Gillis-Turán Matematikaverseny nevet viselő verseny első napi 3. feladata a következő:

Határozzuk meg azokat a folytonos függvényeket, amelyekre minden x valós számra

$$f(f(x)) = x + f(x).$$

KöMaL, 2001/5, 276. oldal

Ugyanez a feladat megjelent még **B.3469.** számmal, megoldása megtalálható a KöMaL 2001/9 számában 546. oldal, 26 megoldásból mindössze 5 megoldás ért el 5 pontot, 3 pedig 4 pontot a többi ez alatt, szembetűnő a 11 darab 0 pontos

Ez az eredmény is mutatja, hogy igény van e témának tárgyalására a versenyekre való felkészülés alkalmával.

Szakköri tevékenységre a rendelkezésre álló idő függvényében válogathatunk a 3.3. alfejezet esetei között, hiszen mindegyikük függetlenül tárgyalható.

A dolgozat ezen fejezetében viszont a $b = 0$ egyszerűbb esetet leszámítva, minden más esetben az

$$f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0 \tag{1}$$

függvényegyenlet folytonos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldásainak meghatározását tűzzük ki célul. Az (1) egyenletben a, b, c adott valós számok, pontosabban az egyenlet baloldalának utolsó tagja és a jobboldalán sze-

replő tag egy-egy konstans függvény. A továbbiakban az \mathbb{R} -en értelmezett valós függvények halmazát $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ -rel, a folytonos valós függvények halmazát pedig $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -rel fogjuk jelölni. Ha $E, F \subseteq \mathbb{R}$, akkor az E halmazt F -be képező függvények halmazát $\mathcal{F}(E, F)$ -fel, míg ennek a folytonos függvényekből álló részhalmazát $\mathcal{C}(E, F)$ -fel, bijektív (szigorúan növekvő, szigorúan csökkenő bijektív) függvényekből álló részhalmazát $\mathcal{B}(E, F)$ -fel ($\mathcal{B}_{\nearrow}(E, F)$ -, $\mathcal{B}_{\searrow}(E, F)$ -fel) fogjuk jelölni. A folytonos függvények rendelkeznek a közbülsőérték tulajdonságával, így minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ esetén az $I = f(\mathbb{R})$ halmaz egy intervallum (ami konstans függvény esetén lehet esetleg egy pontból álló is). Tet-szőleges $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ esetén használni fogjuk az $\inf f = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ és $\sup f = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, jelöléseket, amelyek természetesen az $\overline{\mathbb{R}}$, (a kiterjesztett valós számok halmaza), halmaz elemei, vagyis felvehetik a ∞ , vagy a $-\infty$ értéket is.

3.2 Az (1) egyenlet megoldásaira vonatkozó általános észrevételek $b \neq 0$ esetén

Ebben az alfejezetben az (1) egyenlet folytonos megoldásait fogjuk tanulmányozni, $b \neq 0$ esetén. Ha a szövegben másképp nem hangsúlyozzuk, akkor "a függvényegyenlet" kifejezés az (1) egyenletet, míg a "megoldás" kifejezés, ha a szövegekörnyezet nem másra utaló, az (1) függvényegyenlet egy folytonos megoldását fogja jelenteni.

3.2.1 A megoldások tulajdonságai

Az egyenlet megoldásainak néhány olyan egyszerű, de fontos tulajdonságát fogalmazzuk meg a következő tételben, amelyekre gyakran fogunk hivatkozni a továbbiakban.

3.1. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ megoldása az (1) függvényegyenletnek, $b \neq 0$ esetén, akkor fennállnak a következő tulajdonságok:*

- ① *Az f injektív függvény.*
- ② *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, akkor az f függvény szigorúan monoton.*
- ③ *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, akkor az $f \circ f$ függvény szigorúan növekvő.*
- ④ *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, akkor $a^2 > 2b$.*
- ⑤ *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, akkor az f függvény bijektív.*
- ⑥ *Ha f szigorúan monoton, akkor $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Bizonyítás. Rendre igazoljuk a tulajdonságokat:

① Az (1) még így is írható: $(f + a \cdot id_{\mathbb{R}}) \circ f = -b \cdot id_{\mathbb{R}} - c$. A $b \neq 0$ feltétel miatt a $-b \cdot id_{\mathbb{R}} - c$ függvény injektív, ahonnan indirekt úton belátható, hogy f is injektív.

② Abból, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ következik, hogy f rendelkezik a közbülső érték tulajdonságával (lásd [14] 4.23. tételét). Tételezzük fel, hogy f injektív, de nem szigorúan monoton! Ez azt jelenti, hogy létezik $x_1 < x_2 < x_3$ úgy, hogy $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, vagy $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Az első esetben a közbülső érték tulajdonsága alapján arra következtetünk, hogy függvényünk, minden olyan λ értéket, amely $\max\{f(x_1), f(x_3)\}$ és $f(x_2)$ között van, az (x_1, x_2) és (x_2, x_3) intervallumban is felvesz, ami ellentmond f injektivitásának. Hasonlóan jutunk ellentmondáshoz a második esetben is. Ezzel indirekt úton beláttuk állításunkat.

③ Ez a tulajdonság azonnali következménye az előzőnek, hiszen két azonos értelemben szigorúan monoton függvény összetettje szigorúan növekvő.

④ A ③ alpont szerint $f \circ f$ szigorúan növekvő, másrésztől viszont, ha f kielégíti az (1) egyenletet, akkor $g = f \circ f$ függvényre fennáll a

$$g \circ g + (2b - a^2) \cdot g + b^2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c(1 - a + b) = 0 \quad (2)$$

egyenlőség. A $g \circ g$, g és a $b^2 \cdot id_{\mathbb{R}}$ függvények szigorúan növekvőek, így az (2) egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, hogy ha $2b - a^2 < 0$.

⑤ Az (2) egyenletből kifejezzük a g függvényt a

$$g = (a^2 - 2b)^{-1} \cdot [g \circ g + b^2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c(1 - a + b)]$$

összefüggést kapjuk. Az előző állításokat figyelembe véve következik, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, ugyanakkor a g függvény értékei az f függvénynek is értékei, s mivel f , folytonosságából kifolyólag, rendelkezik a közbülső érték tulajdonságával is következik, hogy $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, tehát függvényünk szürjektív is, azaz bijektív.

⑥ Ha f szigorúan monoton, akkor minden $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban rendelkezik jobb és baloldali határértékkel és $f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+)$, vagy $f(x_0-) \geq f(x_0) \geq f(x_0+)$, attól függően, hogy függvényünk szigorúan növekvő, vagy szigorúan csökkenő. Ha létezne egy olyan $x_0 \in \mathbb{R}$ pont, amelyben $f(x_0-) \neq f(x_0+)$, akkor az f függvény e két határérték között legfeljebb csak egy értéket vehet föl, ami ellentmond f szürjektivitásának. Tehát f -nek nincsenek szakadáspontjai, vagyis folytonos. ♣

Megjegyzés: A 3.1. tétel ⑥ alpontjának bizonyításához hasonlóan, igazolható, hogy ha I és J intervallumok, valamint $f : I \rightarrow J$ monoton ráképezés, akkor az f függvény folytonos.

Iterált függvények. A 3.1. tétel szerint, ha $b \neq 0$, akkor az (1) egyenlet minden folytonos megoldása szigorúan monoton és bijektív, tehát rendelkezik inverz függvénnyel. Folytonos függvény intervallumot intervallumra képez (lásd [14] 4.22. tételét), így ha szigorúan monoton, akkor tetszőleges ε pozitív szám esetén $f([f^{-1}(y_0) - \varepsilon, f^{-1}(y_0) + \varepsilon])$ egy olyan intervallum, amelynek végpontjai az $f(f^{-1}(y_0) - \varepsilon)$ és $f(f^{-1}(y_0) + \varepsilon)$ különböző valós számok, és amelynek y_0 belső pontja,

vagyis az y_0 egy környezete, tehát az f^{-1} függvény is folytonos. Ezen észrevételeink után létjogosultsága van a következő definíciónak.

3.2. Definíció. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ egy bijektív függvény, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén definiálhatjuk az f függvény, $f^{[n]}$ -nel jelölt, n -ed rendű iterált függvényét:

$$\begin{aligned} f^{[1]} &= f \\ f^{[n+1]} &= f \circ f^{[n]} \quad , \text{ minden } n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{esetén} \\ f^{[n]} &= f^{[-1]} \circ f^{[n+1]} \quad , \text{ minden } n \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+) \quad \text{esetén.} \end{aligned} \quad (3)$$

3.3. Megjegyzés. A fenti jelölések alapján $f^{[0]} = id_{\mathbb{R}}$. Teljes indukcióval az is igazolható, hogy minden $m, n \in \mathbb{Z}$ esetén fennáll az

$$f^{[m+n]} = f^{[m]} \circ f^{[n]} \quad (4)$$

összefüggés.

Könnyen belátható, hogy ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek, $b \neq 0$ esetén, akkor az f függvény iteráltjaira, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, fennáll az

$$f^{[n+2]} + a \cdot f^{[n+1]} + b \cdot f^{[n]} + c = 0 \quad (5)$$

rekurzív egyenlőség.

3.4. Tétel. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek, $b \neq 0$ esetén, akkor tetszőleges n egész számra, az f függvény n -ed rendű iteráltja felírható, mint az 1 konstans függvény, az $id_{\mathbb{R}} = f^{[0]}$ azonos függvény és az $f = f^{[1]}$ függvény lineáris kombinációja, vagyis létezik $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$f^{[n]} = a_n \cdot f^{[1]} + b_n \cdot f^{[0]} + c_n \cdot 1 \quad (6)$$

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval igazolhatjuk. Az állítás teljesül $n = 0$ és $n = 1$ esetén. Ha $k \in \mathbb{Z}$ és az állítás igaz $n = k - 1$ -re és $n = k$ -ra, akkor az (5) alapján teljesül $n = k + 1$ is. Hasonlóképpen, ha az állítás igaz $n = k + 1$ -re és $n = k$ -ra, mivel $b \neq 0$, az (5) alapján következik, hogy teljesül $n = k - 1$ esetén is. Tehát a teljes indukció elve alapján állításunk igaz minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. ♣

3.5. Megjegyzés. A (6) összefüggésben szereplő a_n, b_n, c_n együtthatók, csak akkor egyértelműen meghatározottak, ha az f függvény lineárisan független az $id_{\mathbb{R}}$ és az 1 függvényektől (a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben mint \mathbb{R} feletti vektortérben), vagyis ha f nem lineáris.

Az (5) összefüggésből azonnal kapható egy homogén rekurzív összefüggés is ($n \in \mathbb{Z}$):

$$f^{[n+3]} + (a - 1) \cdot f^{[n+2]} - (a - b) \cdot f^{[n+1]} - b \cdot f^{[n]} = 0, \quad (7)$$

ennek karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^3 + (a - 1) \cdot \lambda^2 - (a - b) \cdot \lambda - b = 0, \quad (8)$$

amit írhatunk

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

alakban is. A karakterisztikus egyenlet egyik gyöke 1 , a másik kettő pedig a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (9)$$

egyenlet gyökei.

Az eddig felsorolt tételekben az egyik feltételezés az volt, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek, de arról még nem volt szó, hogy létezik-e egyáltalán ilyen megoldás. Erre ad részben választ a következő paragrafus.

3.2.2 Lineáris megoldások

Megvizsgáljuk, hogy az (1) egyenletnek van-e lineáris megoldása. Tehát olyan $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásokat keresünk, amelyek $f(x) = ux + v$ alakú képlettel értelmezhetők, ahol $u, v \in \mathbb{R}$. Ha egy ilyen alakú függvény megoldása egyenletünknek, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fenn kell állnia a következő egyenlőségnek:

$$(u^2 + au + b)x + uv + v + av + c = 0.$$

Ez ekvivalens a következő egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} u^2 + au + b & = 0 \\ v(u + a + 1) + c & = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Ennek a rendszernek, csak akkor lehet valós megoldása, ha a (8) karakterisztikus egyenlet minden gyöke valós, vagyis ha $a^2 - 4b \geq 0$. Ez esetben jelöljük λ_1 - és λ_2 -vel a (9) egyenlet gyökeit. A Viete féle összefüggések szerint $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$ és $\lambda_1\lambda_2 = b$. Ha e két gyök között van 1-től különböző, akkor a (10) egyenletrendszernek is van valós megoldása. Ha $\lambda_2 \neq 1$, akkor $(u, v) = (\lambda_1, \frac{c}{\lambda_2 - 1})$ egy megoldása egyenletrendszerünknek, illetve

$$f_1(x) = \lambda_1 x + \frac{c}{\lambda_2 - 1} \quad (11)$$

egy lineáris megoldása az (1) függvényegyenletnek. Hasonlóan adódik, $\lambda_1 \neq 1$ esetén, az

$$f_2(x) = \lambda_2 x + \frac{c}{\lambda_1 - 1} \quad (12)$$

lineáris megoldás is.

Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$ és $c \neq 0$, akkor nincs lineáris megoldása

az (1) egyenletnek.

Ha viszont $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ és $c = 0$, akkor minden $f(x) = x + v$ alakú lineáris függvény megoldása egyenletünknek.

3.2.3 Az (1) egyenlet megoldhatósága $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben

Felmerül a kérdés, hogy ha egy (1) típusú függvényegyenletnek nincsenek lineáris megoldásai, akkor lehetnek-e más megoldásai $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben? Ezt vizsgáljuk meg a következő két paragrafusban.

Az (1) egyenletről, $a = -2$, $b = 1$ és $c \neq 0$ esetén. Azt már látuk, hogy lineáris megoldása ebben az esetben nincs egyenletünknek. A következő tétel azt igazolja, hogy más folytonos megoldása sincs.

3.6. Tétel. *Az (1) egyenletnek, $a = -2$, $b = 1$ és $c \neq 0$ esetén, nincs megoldása a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ban.*

Bizonyítás. Tételezzük fel, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek, az adott együtthatók esetén, vagyis

$$f^{[2]} - 2 \cdot f^{[1]} + f^{[0]} + c = 0. \quad (13)$$

A 3.1. tétel ③ alpontja alapján az $f = \frac{1}{2} \cdot (f^{[2]} + f^{[0]} + c)$ függvény szigorúan monoton növekvő. Ennek következménye, hogy rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sigma[f, x] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma[f, x](n) = \operatorname{sgn}(f^{[n+1]}(x) - f^{[n]}(x))$ függvény állandó.

A (13) egyenlőségből kiindulva teljes indukcióval, tetszőleges n egész számra igazolható az

$$f^{[n+1]} - f^{[n]} - f^{[1]} + f^{[0]} + nc = 0 \quad (14)$$

összefüggés. Mivel $c \neq 0$, az (14)-ből következik, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f^{[n+1]}(x) - f^{[n]}(x)] \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} [f^{[n+1]}(x) - f^{[n]}(x)]$$

határértékek különböző előlelűek, ami ellentmondás azzal, hogy a $\sigma[f, x]$ függvény állandó. Tehát $a = -2$, $b = 1$ és $c \neq 0$ esetén, nincs megoldása az (1) függvényegyenletnek a folytonos függvények halmazában. ♣

Eddig beláttuk azt, hogyha a karakterisztikus egyenlet gyökei valósak, akkor az (1) függvényegyenletnek, az
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c \neq 0 \end{cases}$$
 esetet leszámítva, mindig van megoldása a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben.

A következő paragrafus azzal az esettel foglalkozik, amelyben a karakterisztikus egyenlet gyökei között nem csak valós számok szerepelnek.

Az (1) egyenletről, ha $a^2 - 4b < 0$. Hasonló itt is a helyzet, mint az előző esetben, azaz a lineáris megoldások hiánya egybeesik a folytonos megoldások hiányával. Ezt fogjuk bizonyítani ebben a paragrafusban. A fő állítás bizonyítása előtt néhány jelölést vezetünk be és egy lemmát bizonyítunk.

A 3.1. tétel ④ alpontjának bizonyításánál láttuk, hogyha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek, akkor $f^{[2]}$ kielégíti az

$$f^{[2]} \circ f^{[2]} + (2b - a^2) \cdot f^{[2]} + b^2 \cdot f^{[0]} + c(1 - a + b) = 0$$

egyenletet. Legyenek ennek együtthatói $a_1 = 2b - a^2$, $b_1 = b^2$ és $c_1 = c(1 - a + b)$. Ha az $f^{[2^n]}$ függvényre fennáll az

$$f^{[2^n]} \circ f^{[2^n]} + a_n \cdot f^{[2^n]} + b_n \cdot f^{[0]} + c_n = 0 \quad (15)$$

egyenlőség, akkor az $f^{[2^{n+1}]}$ függvény az

$$f^{[2^{n+1}]} \circ f^{[2^{n+1}]} + (2b_n - a_n^2) \cdot f^{[2^{n+1}]} + b_n^2 \cdot f^{[0]} + c_n(1 - a_n + b_n) = 0$$

egyenletet elégíti ki. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n - a_n^2 \\ b_{n+1} = b_n^2 \\ c_{n+1} = c_n(1 - a_n + b_n) \end{cases} \quad (16)$$

A 3.1. tétel ④ alpontja szerint, ha $b \neq 0$, akkor az $\{a_n\}_{n \geq 1}$ sorozat negatív számokból, a $\{b_n\}_{n \geq 1}$ pedig pozitív számokból áll. A következő lemma megkönnyíti a főtétel bizonyítását.

3.7. Lemma. Ha a $\{d_n\}_{n \geq 0}$ sorozatot a $d_0 = \sqrt{2}$ és $d_{n+1} = \sqrt{2 + d_n}$ rekurzióval értelmezzük, valamint a negatív tagú $\{a_n\}_{n \geq 1}$ és a pozitív tagokból álló $\{b_n\}_{n \geq 1}$ sorozatok eleget tesznek a (16) összefüggéseknek, akkor igazak a következő állítások:

- ① A $\{d_n\}_{n \geq 0}$ sorozat konvergens és $\lim d_n = 2$
- ② Minden $0 \leq k < n$ esetén fenáll az $|a_{n-k}| > d_k \sqrt{b_{n-k}}$ egyenlőtlenség.

Bizonyítás. ① Könnyen igazolható, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. A határértéket a rekurzív összefüggésben történő határramenetel után kapott egyenletből számíthatjuk ki.

② Az állítást k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor $a_{n+1} < 0$ és $b_n > 0$, továbbá az (16) alapján következik, hogy $|a_n| > \sqrt{2b_n}$, vagyis állításunk fennáll $k = 0$ esetén. Most tételezzük fel, hogy az állítás igaz a k természetes számra és $0 < k + 1 < n$, továbbá $a_{n-k} < 0$, $a_{n-k} = 2b_{n-k-1} - a_{n-k-1}^2$ és $b_{n-k} = b_{n-k-1}^2$, akkor $|a_{n-k}| > d_k \sqrt{b_{n-k}} \Leftrightarrow a_{n-k-1}^2 - 2b_{n-k-1} > d_k b_{n-k-1} \Leftrightarrow |a_{n-k-1}| > d_{k+1} \sqrt{b_{n-k-1}}$. A teljes indukció elve alapján állításunk igaz minden $0 \leq k < n$ esetén. ♣

3.8. Következmény. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek és $b \neq 0$, akkor az egyenlet együtthatói, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, kielégítik az

$$a^2 > d_n^2 b \tag{17}$$

egyenlőtlenséget.

Bizonyítás. Az egyenlőtlenség teljes indukcióval látható be. $n = 0$ esetén egyenlőtlenségünk megegyezik a 3.1. tétel ④ állításával. Ha $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor az 3.7. lemma szerint $|a_1| > d_{n-1} \sqrt{b_1}$, vagyis $a^2 - 2b >$

$d_{n-1} |b|$. Mivel $d_{n-1} > 0$ következik, $a^2 - 2b > d_{n-1}b$, ami ekvivalens a bizonyítandó egyenlőtlenséggel. ♣

Most már bizonyítható a paragrafus fő eredménye:

3.9. Tétel. *Ha az (1) függvényegyenletnek van folytonos megoldása, akkor az egyenlet együtthatói kielégítik az $a^2 - 4b \geq 0$ egyenlőtlenséget.*

Bizonyítás. A (17) egyenlőtlenség fennáll tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, így

$$a^2 \geq b \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2,$$

ami a 3.7. lemma első pontja figyelembe vételével, a bizonyítandó állításhoz vezet. ♣

3.10. Következmény. Ha az (1) függvényegyenlet együtthatóira fennáll az $a^2 - 4b < 0$ egyenlőtlenség, akkor a függvényegyenletnek nincs megoldása a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ban.

3.2.4 A megoldások létezési feltétele

Az előző két paragrafusban tisztáztuk, hogy melyek azok az esetek, amelyekben megoldható egyenletünk a folytonos valós függvények halmazában. Ezeket az eredményeket foglalja össze a következő tétel.

3.11. Tétel. *Az (1) egyenlet megoldhatósága az $a, b, c \in \mathbb{R}$ együtthatók függvénye.*

- ① *Ha $a = -2$ és $b = 1$, az egyenlet akkor és csak akkor rendelkezik megoldásokkal a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ halmazban, hogy ha $c = 0$.*
- ② *Ha $a \neq -2$, vagy $b \neq 1$, az (1) függvényegyenletnek akkor és csak akkor van megoldása $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben, ha $a^2 - 4b \geq 0$.*

3.2.5 A megoldások iteráltjainak alakja

Az $\{f^{[n]}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ rekurzív sorozat tagjait kifejezhetjük, a karakterisztikus egyenlet gyökeinek segítségével. Pontosabb képet alkothatunk erről a következő tétel alapján.

3.12. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az (1) egyenletnek $b \neq 0$ esetén, valamint λ_1, λ_2 és λ_3 a (8) karakterisztikus egyenlet gyökei ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$), akkor igazak a következő állítások:*

- ① *Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ különbözőek, akkor létezik $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ úgy, hogy*

$$f^{[n]} = \lambda_1^n \cdot \varphi + \lambda_2^n \cdot \psi + \lambda_3^n \cdot \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

- ② *Ha $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, akkor létezik $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ úgy, hogy*

$$f^{[n]} = \lambda_1^n \cdot \varphi + n\lambda_1^n \cdot \psi + \lambda_3^n \cdot \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (19)$$

- ③ *Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, akkor létezik $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ úgy, hogy*

$$f^{[n]} = \lambda_1^n \cdot \varphi + n\lambda_1^n \cdot \psi + n^2\lambda_1^n \cdot \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik mindegyik esetben. Terjedelmi okok miatt lemondunk a részletekről. ♣

3.13. Megjegyzés. Ha a (8) karakterisztikus egyenlet gyökei valós számok, akkor a φ, ψ, θ folytonos valós függvények.

3.2.6 A φ, ψ, θ függvényekről

A 3.12. tételben szereplő függvényeknek néhány érdekes tulajdonságát figyelhetjük meg.

3.14. Tétel. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ az (1) egyenlet megoldása, $b \neq 0$ esetén, valamint λ_1, λ_2 és λ_3 a (8) karakterisztikus egyenlet gyökei (lehetnek komplex számok is), φ, ψ, θ az 3.12. tételben leírt függvények, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, fennállnak a következő összefüggések:

① Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ különbözőek, akkor

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) = \lambda_1 \cdot \varphi(x) \\ \psi(f(x)) = \lambda_2 \cdot \psi(x) \\ \theta(f(x)) = \lambda_3 \cdot \theta(x) \end{cases} \quad (21)$$

② Ha $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, akkor $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ és

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) = \lambda_1 \cdot (\varphi(x) + \psi(x)) \\ \psi(f(x)) = \lambda_1 \cdot \psi(x) \\ \theta(f(x)) = \lambda_3 \cdot \theta(x) \end{cases} \quad (22)$$

③ Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, akkor $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ és

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) = \varphi(x) + \psi(x) + \theta(x) \\ \psi(f(x)) = \psi(x) + 2 \cdot \theta(x) \\ \theta(f(x)) = \theta(x) \end{cases} \quad (23)$$

Bizonyítás. A bizonyítást arra alapozzuk, hogy egy Cramer-rendszernek csak egy megoldása van. Válasszunk egy x valós számot, és tekintsük az eseteket!

① A (18) szerint felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) + \theta(x) = f^{[0]}(x) \\ \lambda_1 \cdot \varphi(x) + \lambda_2 \cdot \psi(x) + \lambda_3 \cdot \theta(x) = f^{[1]}(x) \\ \lambda_1^2 \cdot \varphi(x) + \lambda_2^2 \cdot \psi(x) + \lambda_3^2 \cdot \theta(x) = f^{[2]}(x) \\ \lambda_1^3 \cdot \varphi(x) + \lambda_2^3 \cdot \psi(x) + \lambda_3^3 \cdot \theta(x) = f^{[3]}(x) \end{cases},$$

amely első három egyenletében x helyett $f(x)$ -et írva, kapjuk:

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) + \psi(f(x)) + \theta(f(x)) = f^{[1]}(x) \\ \lambda_1 \cdot \varphi(f(x)) + \lambda_2 \cdot \psi(f(x)) + \lambda_3 \cdot \theta(f(x)) = f^{[2]}(x) \\ \lambda_1^2 \cdot \varphi(f(x)) + \lambda_2^2 \cdot \psi(f(x)) + \lambda_3^2 \cdot \theta(f(x)) = f^{[3]}(x) \end{cases}$$

Ezek az egyenletek azt mutatják, hogy

$$(\lambda_1\varphi(x), \lambda_2\psi(x), \lambda_3\theta(x)) \text{ és } (\varphi(f(x)), \psi(f(x)), \theta(f(x)))$$

számhármassok is kielégítik az

$$\begin{cases} u + v + w = f^{[1]}(x) \\ \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = f^{[2]}(x) \\ \lambda_1^2 u + \lambda_2^2 v + \lambda_3^2 w = f^{[3]}(x) \end{cases}$$

Cramer-rendszert, tehát egyenlőek.

② Hasonlóképpen a (19) összefüggések alapján belátható, hogy a

$$(\lambda_1(\varphi(x) + \psi(x)), \lambda_1\psi(x), \lambda_3\theta(x)) \text{ és } (\varphi(f(x)), \psi(f(x)), \theta(f(x)))$$

számhármassok is megoldásai az

$$\begin{cases} u + w = f^{[1]}(x) \\ \lambda_1 u + \lambda_1 v + \lambda_3 w = f^{[2]}(x) \\ \lambda_1^2 u + 2\lambda_1^2 v + \lambda_3^2 w = f^{[3]}(x) \end{cases}$$

Cramer-rendszernek, tehát egyenlőek.

③ A (19) összefüggések alapján belátható, hogy

$$\begin{aligned} &(\varphi(x) + \psi(x) + \theta(x), \psi(x) + 2 \cdot \theta(x), \theta(x)) \\ &\text{és } (\varphi(f(x)), \psi(f(x)), \theta(f(x))) \end{aligned}$$

is megoldásai az

$$\begin{cases} u = f^{[1]}(x) \\ u + v + w = f^{[2]}(x) \\ u + 2v + 2^2 w = f^{[3]}(x) \end{cases}$$

Cramer-rendszernek, tehát egyenlőek.



Az (1) egyenlet folytonos megoldásainak iteráltjai azért fontosak, mert ha ismert az f függvény viselkedése egy x_0 valós szám és $f(x_0)$ között, akkor $f^{[2]}$ iterált ismerete ugyanezen az intervallumon, megadja az f függvény viselkedését az $f(x_0)$ és $f^{[2]}(x_0)$ között és ez az eljárás folytatható, mindkét irányba. A kérdés tehát az, hogy ily módon eljuthatunk-e az f függvény egész \mathbb{R} halmazon való értelmezéséhez, vagy nem? Ezért tisztáznunk kell néhány problémát. Milyen $f(x_0)$ és x_0 egymáshoz viszonyított helyzete, továbbá, hogy van-e határértéke az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ és $\{f^{[-n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatoknak? Monoton függvények-e az iteráltakat megadó formulákban szereplő φ, ψ, θ függvények? Ezekre a kérdésekre válaszolunk a következő paragrafusokban.

3.2.7 Fixpontokról.

Először tisztázzuk a fixpont fogalmát.

3.15. Definíció. Az x_0 valós szám fixpontja az $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ függvénynek, ha $f(x_0) = x_0$.

Az (1) egyenlet folytonos megoldásairól láttuk, hogy szigorúan monoton függvények. Egy olyan I intervallumon, amelyen egy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásfüggvénynek nincs fixpontja fennáll az $f(x) > x \ \forall x \in I$, vagy $f(x) < x \ \forall x \in I$ egyenlőtlenségek egyike. Ennek következtében, mint látni fogjuk az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ és $\{f^{[-2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatok szigorúan monotonok lesznek. Arra a kérdésre, hogy az (1) egyenlet egy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásának melyek a fixpontjai, a következő tételben részben válaszolunk.

3.16. Tétel. *Ha $1 + a + b \neq 0$ és $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ az (1) egyenlet egy fixponttal rendelkező megoldása, akkor f -nek egyetlen fixpontja van, ez a fixpont:*

$$x_0 = -\frac{c}{1 + a + b}.$$

Bizonyítás. Ha $f(x_0) = x_0$, és f megoldása az (1) egyenletnek, akkor $x_0 + ax_0 + bx_0 + c = 0$, ahonnan következik a bizonyítandó állítás. ♣

Könnyen belátható, hogy egy bijektív $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ függvény fixpontja iteráltjainak is fixpontja. A következő tétel szigorúan monoton függvények esetén ennél többet mond.

3.17. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, akkor igazak a következő állítások:*

- ① *Ha az f függvény szigorúan növekvő, akkor rögzítet $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sigma[f, x] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma[f, x](n) = \operatorname{sgn}(f^{[n+1]}(x) - f^{[n]}(x))$ függvény állandó.*
- ② *Ha az f függvény szigorúan csökkenő, akkor rögzítet $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sigma[f, x] : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma[f, x](n) = (-1)^n \operatorname{sgn}(f^{[n+1]}(x) - f^{[n]}(x))$ függvény állandó.*

Bizonyítás. Az állításokat n szerinti teljes indukcióval igazolhatjuk. ♣

3.18. Következmény. Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám, akkor fennállnak a következő kijelentések:

- ① *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan növekvő az megoldása az (1) egyenletnek, akkor az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ és $\{f^{[-n]}(x)\}_{n \geq 1}$ monoton sorozatok.*
- ② *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan csökkenő megoldása az (1) egyenletnek, akkor az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$, $\{f^{[2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$, $\{f^{[-2n]}(x)\}_{n \geq 1}$, és $\{f^{[-2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatok közül, páronként az egyik növekvő, a másik pedig csökkenő.*

Az itt felírt monoton valós szám sorozatoknak van határértékük, kérdés, hogy konvergencia esetén mi lesz ez a határérték.

3.19. Tétel. *Ha az $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény megoldása az (1) egyenletnek, akkor igazak a következő állítások:*

- ① Ha az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens, akkor határértéke fixpontja az f függvénynek.
- ② Ha az $\{f^{[-n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens, akkor határértéke fixpontja az f függvénynek.
- ③ Ha az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens, akkor az $\{f^{[2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ is konvergens, határértékeik az $f^{[2]}$ függvény fixpontjai.
- ④ Ha az $\{f^{[-2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens, akkor az $\{f^{[-2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ is konvergens, határértékeik az $f^{[2]}$ függvény fixpontjai.

Bizonyítás. Állításainkat rendre igazoljuk:

① Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x) = x_0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n+1]}(x) = x_0$, ugyanakkor f folytonosságából következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{[n]}(x)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x)) \Leftrightarrow x_0 = f(x_0)$.

② Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-n]}(x) = x_0$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-n+1]}(x) = x_0$, ahonnan f folytonosságából következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{[-n]}(x)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-n]}(x)) \Leftrightarrow x_0 = f(x_0)$.

③ Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[2n]}(x) = x_0$, akkor f folytonosságából következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[2n+1]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{[2n]}(x)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[2n]}(x)) = f(x_0).$$

Az a tény, hogy x_0 és $f(x_0)$ az $f^{[2]}$ függvény fixpontjai az ① alpont állításából következik.

④ Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-2n]}(x) = x_0$, akkor f folytonosságából következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-2n+1]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(f^{[-2n]}(x)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[-2n]}(x)) = f(x_0)$.

Az a tény, hogy x_0 és $f(x_0)$ az $f^{[2]}$ függvény fixpontjai az ② alpont állításából következik. ♣

3.20. Következmény. Ha az (1) függvényegyenlet együtthatói teljesítik az $|1 + a| \neq |b|$ feltételt, és az $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény megoldása az (1) egyenletnek és $x \in \mathbb{R}$, akkor igazak a következő állítások:

① A következő állítások ekvivalensek:

- ❶ Az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.
- ❷ Az $\{f^{[2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.
- ❸ Az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.

② A következő állítások ekvivalensek:

- ❶ Az $\{f^{[-2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.
- ❷ Az $\{f^{[-2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.
- ❸ Az $\{f^{[-n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat konvergens.

Konvergencia esetén, mindkét alpontonál, a sorozatok közös határértéke az f függvény fixpontja.

Bizonyítás. ① A 3.19. tétel ③ alpontja szerint, ❶ \Rightarrow ❷, valamint a sorozatok x_0 , illetve $f(x_0)$ határértékei az $f^{[2]}$ fixpontjai. Az együtthatókra megadott feltételből következik, hogy $1 + 2b - a^2 + b^2 \neq 0$, vagyis a (2) egyenletet kielégítő $f^{[2]}$ függvénynek a 3.16. tétel szerint egyetlen fixpontja van, így $f(x_0) = x_0$. Ez azt jelenti, hogy az x_0 bármely környezetén kívül úgy az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatból, mint az $\{f^{[2n+1]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatból csak véges számú tag található. Következik, hogy ugyanezt elmondhatjuk az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatról is, vagyis emez is konvergens az x_0 -hoz. Tehát ❶ \Rightarrow ❷ \Rightarrow ❸ \Rightarrow ❶.

② Az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, a 3.19. tétel ④ alpontjának és a 3.16. tétel figyelembe vételével. ♣

Ezen előkészületek után hozzáláthatunk az (1) függvényegyenlet megoldásához.

3.3 Az (1) egyenlet megoldása a folytonos függvények halmazában, $b \neq 0$ esetén

Azt láttuk a 3.12 tételben, hogy az iteráltak formuláiban fontos szerepük van a karakterisztikus egyenlet gyökeinek. Ezek közül tudjuk, hogy az egyik mindig 1, jelöljük ezt λ_3 -mal. A másik kettő pedig a (9) egyenlet gyöke, legyenek ők λ_1, λ_2 . Figyelembe véve azt, hogy ebben a szakaszban $b \neq 0$ következik, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei mind 0-tól különbözőek. A gyökök abszolútértékének egymáshoz viszonyított helyzete alapján több esetet különböztetünk meg. Ennek az alszakasznak minden részegysége, az (1) egyenlet egy esetének megoldását mutatja be.

3.3.1 I. A $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ eset

Ebben az esetben az (1) függvényegyenlet együtthatói közül $a = -2$ és $b = 1$, így a 3.8. tétel szerint, ha $c \neq 0$, akkor a függvényegyenletnek nincs megoldása a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben.

Ha $c = 0$, akkor egyenletünk a következő:

$$f \circ f - 2 \cdot f + id_{\mathbb{R}} = 0. \quad (24)$$

A megoldások iteráltjait ebben az esetben a következő tétel írja le.

3.21. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (24) függvényegyenletnek, akkor*

$$f^{[n]} = \varphi + n \cdot \psi, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (25)$$

ahol

$$\begin{cases} \varphi = id_{\mathbb{R}} \\ \psi = f - id_{\mathbb{R}} \end{cases} \quad (26)$$

Bizonyítás. A 3.12. tétel ③ alpontja szerint a megoldások iteráltjait

$$f^{[n]} = \varphi + n \cdot \psi + n^2 \cdot \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

alakban írhatjuk, ahol φ, ψ, θ az

$$\begin{cases} \varphi & = f^{[0]} \\ \lambda_1 \cdot \varphi + \lambda_1 \cdot \psi + \lambda_1 \cdot \theta & = f^{[1]} \\ \lambda_1^2 \cdot \varphi + 2\lambda_1^2 \cdot \psi + 2^2\lambda_1^2 \cdot \theta & = f^{[2]} \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásával kaphatók meg. Az egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ esetén, megkapjuk a

$$\begin{cases} \varphi & = id_{\mathbb{R}}, \\ \psi & = f - id_{\mathbb{R}} + \frac{c}{2} = f - id_{\mathbb{R}}, \\ \theta & = -\frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

függvényeket. Ez igazolja a tétel állítását. ♣

E tétel segítségével igazolhatjuk, hogy a (24) függvényegyenletnek a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben, csak lineáris megoldásai vannak.

3.22. Tétel. *A (24) függvényegyenlet megoldáshalmaza a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben:*

$$\mathcal{H} = \{id_{\mathbb{R}} + k_v \mid v \in \mathbb{R}, \text{ és } k_v(x) = v, \forall x \in \mathbb{R}\}. \quad (27)$$

Bizonyítás. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (24) függvényegyenletnek, akkor a 3.21. tétel szerint $f^{[2n]} = \varphi + 2n \cdot \psi, \forall n \in \mathbb{Z}$. Figyelembe véve, hogy $\varphi = id_{\mathbb{R}}$, és azt, hogy a 3.1. tétel ③ alpontja alapján az $f^{[2n]}$ függvény szigorúan növekvő, tetszőleges $x_1 < x_2$ esetén felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} & f^{[2n]}(x_1) < f^{[2n]}(x_2), \forall n \in \mathbb{Z} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -\frac{x_2 - x_1}{2n} < \psi(x_2) - \psi(x_1) < \frac{x_2 - x_1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Ebből határramenettel, ha $n \rightarrow \infty$, a $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, vagyis a ψ függvény állandó. Létezik tehát egy $v \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\psi = k_v$, ahol k_v az a konstans függvény, amelyre $k_v(x) = v, \forall x \in \mathbb{R}$. A (26) alapján $\psi = f - id_{\mathbb{R}}$ következik, hogy $f = id_{\mathbb{R}} + k_v$. Az a tény, hogy minden $f = id_{\mathbb{R}} + k_v$ függvény megoldása egyenletünknek nyilvánvaló. ♣

3.3.2 II. A $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 = 1$ eset

Ha bevezetjük az $u = \lambda_1 = \lambda_2$ jelölést, akkor $a = -2u$ és $b = u^2$, tehát ebben az esetben az (1) egyenlet a következő alakot ölti:

$$f \circ f - 2u \cdot f + u^2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0, \quad (28)$$

ahol $0 \neq u \neq 1$. Az iteráltakat a következő tétel írja le pontosan.

3.23. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (28) függvényegyenletnek, $u \neq 0$ és $u \neq 1$ esetén, akkor*

$$f^{[n]} = u^n \cdot (\varphi + n \cdot \psi) + \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (29)$$

amelyben

$$\begin{cases} \varphi = id_{\mathbb{R}} + \frac{c}{(u-1)^2}, \\ \psi = \frac{1}{u} \cdot (f - f_1), \\ \theta = -\frac{c}{(u-1)^2}, \end{cases} \quad (30)$$

ahol $f_1(x) = ux + \frac{c}{u-1}$ a (28) egyenlet egyetlen lineáris megoldása.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.12. tétel ② pontját, és megoldjuk az $n = 0, 1, 2$ esetén kapott egyenletrendszert $\lambda_1 = \lambda_2 = u$ és $\lambda_3 = 1$ esetén. ♣

Az előző paragrafushoz hasonlóan kimutatható, hogy ebben az esetben is csak lineáris megoldásai vannak a függvényegyenletnek, itt azonban csak egy ilyen megoldás létezik.

3.24. Tétel. *A (28) függvényegyenletnek, $0 \neq u \neq 1$ esetén, a $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben egyetlen megoldása van, ez az*

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = ux + \frac{c}{u-1} \quad (31)$$

lineáris függvény.

Bizonyítás. A (28) függvényegyenlet folytonos megoldásainak iteráltjait a 3.23. tételben megadott (29) formulával fejezhetjük ki, amely φ, ψ, θ függvényeit a (30) képletek írják le. A 3.1. tétel ③ alponjtja alapján az $f^{[2n]}$ függvény szigorúan növekvő, tehát tetszőleges $x_1 < x_2$ esetén felírhatjuk a következő egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} & f^{[2n]}(x_1) < f^{[2n]}(x_2), \forall n \in \mathbb{Z} && \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{2n} < \psi(x_2) - \psi(x_1) < \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Innen $n \rightarrow \infty$ szerinti határramenetellel, a $\psi(x_1) = \psi(x_2)$ összefüggést kapjuk. Tehát a ψ függvény állandó. A 3.14. tétel (22) összefüggéseinek figyelembe vételével $\psi(f(x)) = u \cdot \psi(x)$, de ψ állandó, így $\psi(f(x)) = \psi(x)$, mivel $u \neq 1$ következik, hogy $\psi = 0$, vagyis az (30) alapján $f = f_1$, ami igazolja a tétel állítását. ♣

3.3.3 III. A $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ eset

Bevezetjük az $u = \lambda_1$ jelölést. Ebben az esetben $a = -u - 1$ és $b = u$, tehát az (1) egyenlet a következő alakú lesz:

$$f \circ f - (u + 1) \cdot f + u \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0, \quad (32)$$

ahol $0 \neq u \neq 1$. A megoldások iteráltjait a következő tétel jellemzi:

3.25. Tétel. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) függvényegyenletnek, $u \neq 0$ és $u \neq 1$ esetén, akkor az f függvény iteráltjai az:

$$f^{[n]} = u^n \cdot \varphi + \psi + n \cdot \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (33)$$

formulával állíthatók elő, amelyben:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{u-1} \cdot (f - f_1), \\ \psi = -\frac{1}{u-1} \cdot (f - f_1) + id_{\mathbb{R}}, \\ \theta = \frac{c}{u-1}, \end{cases} \quad (34)$$

ahol $f_1(x) = x + \frac{c}{u-1}$ az (1) egyenlet egyetlen lineáris megoldása.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.12. tétel ② pontját, és megoldjuk az iteráltak (33) alakjából származó

$$\begin{cases} \varphi + \psi = f^{[0]} \\ u \cdot \varphi + \psi + \theta = f^{[1]} \\ u^2 \cdot \varphi + \psi + 2 \cdot \theta = f^{[2]} \end{cases} \quad (35)$$

egyenletrendszert. ♣

Az iteráltakat előállító formulában szereplő φ és ψ függvények, $|u| \neq 1$ esetén, monoton függvények. Ez az észrevétel a továbbiakban az egyenlet megoldásánál hasznosnak bizonyul.

3.26. Lemma. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) függvényegyenletnek, $u \neq 0$ és $|u| \neq 1$ esetén, akkor az f függvény iteráltjait előállító (33) formulában szereplő φ és ψ , növekvő függvények.

Bizonyítás. Mivel $|u| \neq 1$, az $\{u^n\}_{n \geq 1}$ és $\{u^{-n}\}_{n \geq 1}$ sorozatok közül az egyik konvergál 0-hoz. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása egyenletünknek,

akkor $f^{[2n]}$ szigorúan növekvő, vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $f^{[2n]}(x_1) < f^{[2n]}(x_2)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ami ekvivalens az $u^{2n} \cdot (\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) + \psi(x_1) - \psi(x_2) < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, illetve a $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) + u^{-2n} \cdot (\psi(x_1) - \psi(x_2)) < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ egyenlőtlenségekkel. Ezekből $n \rightarrow \infty$, vagy $n \rightarrow -\infty$ szerinti határramenetellel a $\psi(x_1) \leq \psi(x_2)$ és $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ egyenlőtlenségek adódnak, tehát a φ, ψ növekvő függvények. ♣

A függvényegyenlet megoldását lényegesen befolyásolja az a tény, hogy $c = 0$, vagy sem. Ezeket az eseteket különválasztva tanulmányozzuk. Először a $c = 0$ esetet vizsgáljuk.

III./1. A (32) függvényegyenlet, $0 \neq u \neq 1$ és $c = 0$ esetén

Két alesetünk van:

❶ **Az $u \neq -1$ aleset** A 3.26. lemma szerint a (33) formula φ, ψ függvényei növekvőek. A $c = 0$ és $|u| \neq 1$, így a (33) alapján látható, hogy az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ és $\{f^{[-n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatok közül az egyik konvergens és határértéke $\psi(x)$. A 3.19. tétel szerint a $\psi(x)$ fixpontja lesz az f függvénynek, vagyis

$$f(\psi(x)) = \psi(x) \Leftrightarrow u \cdot \varphi(\psi(x)) + \psi(\psi(x)) = \psi(x),$$

de mivel $\varphi + \psi = id_{\mathbb{R}}$, belátható, hogy $\psi(\psi(x)) = \psi(x)$ és $\varphi(\psi(x)) = 0$. Legyen $\alpha = \inf(\psi(\mathbb{R}))$ és $\beta = \sup(\psi(\mathbb{R}))$, amelyek nem föltétlenül végesek. A ψ függvény folytonos, tehát $\psi(\mathbb{R})$ intervallum, így a következő lehetőségek állnak fenn:

- ① Ha $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, akkor $f = id_{\mathbb{R}}$, ami nyilvánvalóan megoldás. Legyen $\mathcal{H}_1 = \{id_{\mathbb{R}}\}$ az itt kapott megoldáshalmaz.
- ② Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\beta = \infty$, akkor mivel a ψ függvény növekvő, bármely $x \leq \alpha$ esetén, $\psi(x) = \alpha$ és $\varphi(x) = x - \alpha$. Az f függvénynek szükség-

szerűen

$$f(x) = \begin{cases} u \cdot (x - \alpha) + \alpha & , \text{ ha } x \leq \alpha \\ x & , \text{ ha } x > \alpha \end{cases} \quad (36)$$

alakúnak kell lennie. Az ilyen alakú függvények, csak $u > 0$ esetén bizonyulnak megoldásnak. Jelöljük \mathcal{H}_2 -vel a (36) alakú függvények halmazát.

③ Ha $\alpha = -\infty$ és $\beta \in \mathbb{R}$, akkor, mivel a ψ függvény növekvő, bármely $x \geq \beta$ esetén, $\psi(x) = \beta$ és $\varphi(x) = x - \beta$. Az f függvénynek szükség-szerűen

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ ha } x < \beta \\ u \cdot (x - \beta) + \beta & , \text{ ha } x \geq \beta \end{cases} \quad (37)$$

alakúnak kell lennie. Az ilyen alakú függvények is, csak $u > 0$ esetén bizonyulnak megoldásnak. Jelöljük \mathcal{H}_3 -mal a (37) alakú függvények halmazát.

④ Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, akkor mivel a ψ függvény növekvő, minden $x \leq \alpha$ esetén, $\psi(x) = \alpha$ és $\varphi(x) = x - \alpha$, és minden $x \geq \beta$ esetén, $\psi(x) = \beta$ és $\varphi(x) = x - \beta$. Ekkor az f függvény csak

$$f(x) = \begin{cases} u \cdot (x - \alpha) + \alpha & , \text{ ha } x \leq \alpha \\ x & , \text{ ha } \alpha < x < \beta \\ u \cdot (x - \beta) + \beta & , \text{ ha } x \geq \beta \end{cases} \quad (38)$$

alakú lehet. Ezek a függvények szintén, csak $u > 0$ esetén lesznek megoldások. Jelöljük \mathcal{H}_4 -gyel a (38) alakú függvények halmazát.

⑤ Ha $\alpha = \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\psi(x) = \alpha$ és $\varphi(x) = x - \alpha, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén, így az f függvény

$$f(x) = u \cdot (x - \alpha) + \alpha, \forall x \in \mathbb{R} \quad (39)$$

alakú. Ezek a lineáris függvények tetszőleges $u \neq -1, 0, 1$ esetén megoldások. Végül legyen \mathcal{H}_5 a (39) alakú függvények halmaza.

Előző megállapításainkat összefoglalva, kijelenthetjük a következő tételt:

3.27. Tétel. A (32) függvényegyenlet folytonos megoldásainak halmaza, $c = 0$ és $0 \neq |u| \neq 1$ esetén:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_5 & , \text{ ha } u < 0 \\ \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3 \cup \mathcal{H}_4 \cup \mathcal{H}_5 & , \text{ ha } u > 0 \end{cases}$$

Ebből a tételből azt láthatjuk, hogy a megadott feltételek mellett a (32) függvényegyenlet szigorúan csökkenő megoldásai, csak $u < 0$ esetén léteznek és ezek a \mathcal{H}_5 halmaz lineáris függvényei. Ezzel az első alesetet lezártuk.

② Az $u = -1$ aleset A (32) egyenlet $u = -1$ esetén az

$$f \circ f = id_{\mathbb{R}} \quad (40)$$

alakot ölti. Az egyenlet folytonos megoldásai szigorúan monoton függvények.

① Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan monoton növekvő megoldása egyenletünknek, akkor $f(x) \leq x \Leftrightarrow f(f(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq f(x)$, ami azt jelenti, hogy $f = id_{\mathbb{R}}$. Tehát egyenletünk szigorúan monoton növekvő megoldásainak halmaza: $\mathcal{H}_{szn} = \{id_{\mathbb{R}}\}$.

② Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan monoton csökkenő megoldása a (40) függvényegyenletnek, akkor $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = -\infty$ miatt, az f függvénynek pontosan egy fixpontja van. Ha ez a fixpont α , akkor az $f((-\infty, \alpha]) = [\alpha, \infty)$, vagyis f leszűkítése a $(-\infty, \alpha]$ intervallumra egy szigorúan csökkenő folytonos függvény, amelynek értékhalmaza az $[\alpha, \infty)$ intervallum, tehát a $g : (-\infty, \alpha] \rightarrow [\alpha, \infty)$, $g(x) = f(x)$ leszűkítéssel, amely egyúttal bijekció is, az f függvényt a következőképpen fejezhetjük ki:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ ha } x \leq \alpha \\ g^{-1}(x) & , \text{ ha } x \geq \alpha \end{cases} \quad (41)$$

Az $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény (41) alakja nem csak szükséges feltétele annak, hogy megoldása legyen a (40) függvényegyenletnek, hanem elégséges is. Pontosabban, tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és tetszőleges $g : (-\infty, \alpha] \rightarrow [\alpha, \infty)$ folytonos bijekció esetén (ennek a feltételnek könnyen belátható következménye a $g(\alpha) = g^{-1}(\alpha) = \alpha$ egyenlőség is), a (41) formulával értelmezett f függvény megoldása egyenletünknek. Tehát egyenletünk szigorúan csökkenő megoldásainak halmaza:

$$\mathcal{H}_{szcs} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid f \text{ (41) alakú, } \alpha \in \mathbb{R}, g \in \mathcal{B}_{\searrow}((-\infty, \alpha], [\alpha, \infty))\}$$

A következő tétel összefoglalja a második esetben tett megállapításainkat:

3.28. Tétel. *Az (32) függvényegyenletnek, $c = 0$ és $u = -1$ esetén, a következő folytonos megoldásai vannak:*

- ① *Egyetlen szigorúan növekvő megoldása az $id_{\mathbb{R}}$.*
- ② *Szigorúan csökkenő megoldásai, tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ és $g : (-\infty, \alpha] \rightarrow [\alpha, \infty)$ folytonos bijekció esetén, (41) alakban írt f függvények.*

A (32) függvényegyenlet megoldásai olyan bijekciók, amelyek egyenlők inverz függvényeikkel, ezek grafikus képe szimmetrikus az első szögfelezőre nézve.

A következő paragrafusban rátérünk egyenletünk, $c \neq 0$ esetben történő vizsgálatára.

III./2. A (32) függvényegyenlet, $0 \neq u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén.

Ebben az esetben mindenekelőtt megállapíthatjuk, hogy ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) függvényegyenletnek, akkor f egy fixpont nélküli szigorúan monoton folytonos ráképezése \mathbb{R} -nek önmagára. Ez maga után vonja, hogy f csak szigorúan növekvő lehet. Ha $u \neq -1$, azaz $|u| \neq 1$, akkor alkalmazható a 3.26. lemma, így a (33) formula φ és ψ függvényei növekvők.

Három esetet fogunk vizsgálni:

❶ **Az $u < 0$, $u \neq -1$ és $c \neq 0$ eset** A már említett $|u| \neq 1$, feltétel következményeit használhatjuk. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) egyenletnek, akkor f szigorúan növekvő, φ pedig növekvő függvény. A 3.14.tétel ② alpontja szerint $\varphi(f(x)) = u \cdot \varphi(x)$. A $c \neq 0$ feltételből következik, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ -nek nincs fixpontja. Belátható, hogy az $f - id_{\mathbb{R}}$ függvény előjeltartó az egész \mathbb{R} -en, aminek az a következménye, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén, az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan monoton és nem korlátos (nem lehet konvergens, mert a 3.19. tétel szerint, a véges határérték fixpontja lenne f -nek). Abból, hogy a φ függvény növekvő arra következtethetünk, hogy a $\{\varphi(f^{[n]}(x))\}_{n \geq 1} = \{u^n \varphi(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat monoton. Negatív u esetén ez, csak akkor lehetséges, hogyha $\varphi(x) = 0$. Mindez tetszőleges x -re érvényes, így $\varphi = 0$. A 3.25. tétel (34) összefüggése alapján következik, hogy $f = f_1$, ahol $f_1(x) = x + \frac{c}{u-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tehát fennáll a következő tétel:

3.29. Tétel. *A (32) függvényegyenletnek $u < 0$, $u \neq -1$ és $c \neq 0$ esetén, egyetlen folytonos megoldása az $f_1(x) = x + \frac{c}{u-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. lineáris függvény. Az egyenlet megoldáshalmaza $\mathcal{H} = \{f_1\}$.*

❷ **Az $u = -1$ és $c \neq 0$ eset** Egyenletünk ebben az esetben

$$f \circ f - id_{\mathbb{R}} + c = 0, \quad (42)$$

alakú. Már láttuk, hogy ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása az függvényegyenletünknek, akkor az f szigorúan növekvő és az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozat szigorúan monoton. Ez utóbbi állítás következménye, hogy tetszőleges x valós szám esetén az $f(x) - x$ és az $f(f(x)) - x$ különbségek azonos előjelűek, vagyis ha $c < 0$, akkor $f > id_{\mathbb{R}}$, ha pedig $c > 0$, akkor $f < id_{\mathbb{R}}$.

Másrésről az is észrevehető, hogy a $h = f - id_{\mathbb{R}}$ függvény periodikus,

periódusa $T = |c|$. Valóban, ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} h(x - c) &= h(f(f(x))) = f(f(f(x))) - f(f(x)) = \\ &= f(x) - c - (x - c) = h(x), \\ h(x) &= h(x + c - c) = h(x + c), \end{aligned}$$

azaz $T = |c|$ periódusa a h függvénynek. Ezen észrevétel alapján elegendő a függvény megoldását csak egy $|c|$ hosszúságú intervallumon megszerkeszteni. Válasszuk először a $c < 0$ esetet! Ekkor $f(x) > x, \forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ha rögzítünk egy x_0 valós számot, akkor

$$x_0 < x_1 = f(x_0) < f(f(x_0)) = x_2 = x_0 - c.$$

Az f függvény $[x_1, x_2]$ intervallumon felvett értékeit leírhatjuk az $[x_0, x_1]$ intervallumon felvett értékei segítségével, ha $x \in [x_1, x_2]$, akkor mivel az f folytonos és injektív, létezik az $[x_0, x_1]$ intervallumban pontosan egy t valós szám, amelyre $f(t) = x$, ez természetesen az $f^{-1}(x)$, így

$$f(x) = f(f(f^{-1}(x))) = f^{-1}(x) - c.$$

Ezen észrevételeink után, megoldhatjuk, a (42) függvényegyenletet a folytonos függvények halmazában.

3.30. Tétel. *Ha a (42) egyenletben $c < 0$, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $x_0 < x_1 < x_2 = x_0 - c$ és $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ egy szigorúan növekvő bijekció, akkor a $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x + nc) - nc & , \text{ ha } x \in [x_0 - nc, x_1 - nc), n \in \mathbb{Z} \\ g^{-1}(x + nc) - (n + 1)c, & \text{ ha } x \in [x_1 - nc, x_2 - nc), n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (43)$$

függvény folytonos megoldása a (42) egyenletnek.

② *Fordítva, a (42) egyenlet minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása (43) alakú.*

Pontosabban, ha egy $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = x_0 - c$, továbbá a $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ függvényt a $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [x_0, x_1]$ összefüggéssel értelmezzük, akkor $f = \tilde{g}$.

③ A (42) függvényegyenlet megoldáshalmaza $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ -ben, adott $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, a következő:

$$\mathcal{H} = \{\tilde{g} \mid x_1 \in (x_0, x_0 - c), g \in \mathcal{B}_{\nearrow}([x_0, x_1], [x_1, x_0 - c])\}.$$

Bizonyítás. Rendre igazoljuk állításainkat:

① A 3.1. tétel után tett megjegyzés alapján a g és g^{-1} függvények folytonosak, mint intervallumnak intervallumra történő szigorúan monoton ráképezései. Ebből belátható, hogy a \tilde{g} függvény folytonos az

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [(x_0 - nc, x_1 - nc) \cup (x_1 - nc, x_2 - nc)]$$

halmazon. Vizsgáljuk \tilde{g} folytonosságát a hiányzó pontokban!

$$\begin{aligned} \tilde{g}((x_0 - nc)+) &= g(x_0+) - nc = g(x_0) - nc = \tilde{g}(x_0 - nc), \\ \tilde{g}((x_0 - nc)-) &= g^{-1}(x_2-) - nc = g(x_0) - nc = \tilde{g}(x_0 - nc), \end{aligned}$$

azaz \tilde{g} folytonos az $x_0 - nc$ alakú pontokban, tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén.

$$\begin{aligned} \tilde{g}((x_1 - nc)+) &= g^{-1}(x_1+) - (n+1)c = g^{-1}(x_1) - (n+1)c = \\ &= \tilde{g}(x_1 - nc), \\ \tilde{g}((x_1 - nc)-) &= g(x_1-) - nc = g(x_1) - nc = g^{-1}(x_1) - (n+1)c = \\ &= \tilde{g}(x_1 - nc), \end{aligned}$$

tehát \tilde{g} folytonos minden $x_1 - nc$ alakú pontban, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Ezzel beláttuk, hogy \tilde{g} folytonos az egész \mathbb{R} -en. Továbbá:

$$\begin{aligned} (\tilde{g} \circ \tilde{g})(x) &= \\ &= \begin{cases} g^{-1}(g(x+nc)) - (n+1)c, & \text{ha } x \in [x_0 - nc, x_1 - nc], n \in \mathbb{Z} \\ g(g^{-1}(x+nc)) - (n+1)c, & \text{ha } x \in [x_1 - nc, x_2 - nc], n \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &= x - c, \end{aligned}$$

vagyis \tilde{g} megoldása a (42) függvényegyenletnek.

② Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (42) függvényegyenletnek, és g a tétel második alpontjában leírt leszűkítése az f függvénynek, akkor az ebből származó \tilde{g} megoldására egyenletünknek és a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$ függvényre fennállnak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \begin{cases} f(x + nc) - nc & , \text{ ha } x \in [x_0 - nc, x_1 - nc), n \in \mathbb{Z} \\ f^{-1}(x + nc) - (n + 1)c, & \text{ ha } x \in [x_1 - nc, x_2 - nc), n \in \mathbb{Z} \end{cases} = \\ &= f(x + nc) - nc = f(x + nc) - (x + nc) + x = h(x + nc) + x = \\ &= h(x) + x = f(x), \end{aligned}$$

ami igazolja a tétel állítását.

③ Az előző két alpont alapján adódik a megoldáshalmaz is. ♣

A (42) függvényegyenlet megoldását $c > 0$ esetén teljesen hasonlóan tárgyalhatjuk, de egyszerűbb az $c < 0$ esetre történő visszavezetése, ugyanis könnyen belátható, hogy ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása egyenletünknek, akkor a 3.1. tétel ⑤ alpontja alapján az f függvény invertálható, így fennáll a következő ekvivalencia:

$$f \circ f - id_{\mathbb{R}} + c = 0 \Leftrightarrow f^{-1} \circ f^{-1} - id_{\mathbb{R}} - c = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f^{-1} egy olyan (42)-as alakú egyenlet megoldása, amelyben a szabadtag negatív, vagyis egy olyan egyenleté, amelynek megoldását a 3.29 tétel írja le. Ha $\mathcal{H}(c)$ -vel jelöljük a (42) függvényegyenlet megoldáshalmazát c szabadtag esetén, akkor

$$\mathcal{H}(-c) = \{f^{-1} | f \in \mathcal{H}(c)\}.$$

Itt is megjegyezhető, hogy a megoldáshalmaz számossága megegyezik a kontinuum számosságával.

Az 4. ábra a (42) függvényegyenlet egy olyan \tilde{g} megoldásának grafikus képét mutatja be, amelyet $c < 0$ esetén, egy $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ szigorúan növekvő bijekció, (43) képletekkel megadott, meghosszabbításával nyerünk.

⊛ **A** $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ **aleset** A (32) függvényegyenlet folytonos megoldásai ebben az esetben is szigorúan növekvő, fixpont nélküli bijekciók, továbbá az $|u| \neq 1$ feltétel miatt, a 3.26. lemma szerint az iteráltakat megadó (33) formulában szereplő φ és ψ függvények növekvő függvények, amelyek kielégítik a (34) összefüggéseket. A következő lemma az f , φ és ψ függvények egyéb tulajdonságait is megadja.

3.31. Lemma. *A $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén, a (32) függvényegyenlet egy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásához tartozó φ és ψ függvények monoton növekvők és eleget tesznek a következő összefüggéseknek:*

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) = u \cdot \varphi(x) & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \psi(f(x)) = \psi(x) + \theta(x) & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (44)$$

$$\theta \cdot (f(x) - x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (45)$$

$$\theta \cdot (f - f_1) \geq 0, \quad (46)$$

ahol $f_1(x) = x + \frac{c}{u-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és $\theta = \frac{c}{u-1}$.

$$\min(u, 1) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \max(u, 1), \quad \forall x \neq y, x, y \in \mathbb{R}. \quad (47)$$

Bizonyítás. A (44) összefüggések a 3.14. tétel ② alpontjának következményei. Ezek közül a második összefüggésből, teljes indukcióval, következik, hogy

$$\psi(f^{[n]}(x)) = \psi(x) + n\theta, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Az f fixpont nélküli szigorúan növekvő megoldása a (32) függvényegyenletnek, így a 3.17. tétel és következménye alapján belátható, hogy

az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton, ezért léteznek a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x)$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(x)$ határértékek. Ezek egyike sem véges, mert ellenkező esetben a 3.19. tétel szerint létezne fixpontja f -nek, ami mint láttuk nem lehetséges, vagyis az egyik határérték ∞ , a másik $-\infty$. A ψ függvény növekvő, ezért a $\{\psi(f^{[n]}(x))\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat, az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozattal azonos értelemben monoton. A (48) alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(f^{[n]}(x)) = \theta \cdot \infty$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} \psi(f^{[n]}(x)) = -\theta \cdot \infty$. Ezek az egyenlőségek, csak akkor állhatnak fenn, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x) = \theta \cdot \infty$, illetve $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(x) = -\theta \cdot \infty$, ami nyilván azt jelenti, hogy $\theta \cdot (f(x) - x) > 0$, ez viszont ekvivalens a (45) egyenlőtlenséggel.

Az (44) első összefüggéséből levezethető az

$$\varphi(f^{[n]}(x)) = u^n \cdot \varphi(x) \quad (49)$$

összefüggés. Ebből $u > 1$ esetén következik, hogy $\lim_{n \rightarrow -\infty} \varphi(f^{[n]}(x)) = 0$, mivel φ növekvő függvény ez azt jelenti, hogy $\varphi \geq 0$, ha $\theta > 0$, illetve $\varphi \leq 0$, ha $\theta < 0$. Hasonlóan gondolkozhatunk a (48)-ból kiindulva, $0 < u < 1$ esetén is, amely esetben $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f^{[n]}(x)) = 0$, így a következtetések felcserélődnek, azaz $\varphi \leq 0$, ha $\theta > 0$, illetve $\varphi \geq 0$, ha $\theta < 0$. Tehát $\theta(u - 1) \cdot \varphi \geq 0$, ami ekvivalens a (46) egyenlőtlenséggel. A (33) szerint $f = u \cdot \varphi + \psi + \theta$ és $\varphi + \psi = id_{\mathbb{R}}$, ezek alapján, ha $x \neq y$, akkor

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = u \cdot \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} + \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y},$$

mivel a φ és ψ függvények növekvőek

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} \geq 0, \quad \text{és} \quad \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y} \geq 0,$$

így

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(y)}{x - y} &\geq \min(u, 1) \cdot \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} + \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y} \right) \\ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &\leq \max(u, 1) \cdot \left(\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} + \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y} \right)\end{aligned}$$

Másrésről, viszont

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} + \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y} = 1,$$

amelyet az előző két egyenlőtlenségbe helyettesítve, a (47) összefüggést kapjuk. ♣

A 3.31. lemma (46) összefüggése azt jelenti, hogy az f_1 függvény \mathcal{G}_{f_1} grafikusképe, elválasztja az f függvény \mathcal{G}_f grafikus képét az első szögfelezőtől. Továbbá az is észrevehető, hogy a (45) összefüggés következik a (46) összefüggésből, hiszen (46) $\iff \theta \cdot (f(x) - x) \geq \theta^2$. Az aleset főtételének megfogalmazása előtt vezessünk be egy, a továbbiakban is gyakran használt jelölést!

3.32. Jelölés. *Ha x és y különböző valós számok, akkor jelölje $I[x, y]$ az általuk meghatározott zárt intervallumot. Hasonló jelölést vezetünk be a többi x és y végpontú intervallumra is, az alábbiak szerint:*

$$\begin{aligned}I[x, y] &= \begin{cases} [x, y] & , \text{ ha } x < y \\ [y, x] & , \text{ ha } x > y \end{cases} \\ I[x, y) &= \begin{cases} [x, y) & , \text{ ha } x < y \\ (y, x] & , \text{ ha } x > y \end{cases} \\ I(x, y) &= \begin{cases} (x, y) & , \text{ ha } x < y \\ (y, x) & , \text{ ha } x > y \end{cases}\end{aligned}\tag{50}$$

Ha megvizsgáljuk a (32) függvényegyenlet egy f folytonos megoldásának szerkezetét, $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén, akkor belátható, hogy egy rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, az f összes értékeit leírhatjuk az f függvénynek az $I[x_0, f(x_0)]$ intervallumon felvett értékei segítségével. Ennek részletesebb kifejtéséhez, legyen $x_n = f^{[n]}(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. A 3.31. lemma bizonyításánál láttuk, hogy az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek egyike $-\infty$, a másik pedig ∞ . Következésképpen az \mathbb{R} felírható diszjunkt intervallumok uniójaként és definiálhatjuk az $f_{[n]}$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}, \quad (51)$$

$$f_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}], \quad f_{[n]}(x) = f^{[n]}(x), \quad \forall x \in I[x_0, x_1]. \quad (52)$$

Az $f_{[n]}$ függvény szigorúan növekvő, folytonos bijekció, amelynek értékeit megadhatjuk az f függvény $I[x_0, x_1]$ intervallumon felvett értékei segítségével, a (33) és (34) összefüggések alapján. Az f függvény értékét egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ pontban kifejezhetjük az $f_{[n]}$, $n \in \mathbb{Z}$ függvényekkel. Először belátható, hogy pontosan egy $n \in \mathbb{Z}$ egész szám létezik azzal a tulajdonsággal, hogy $x \in I[x_n, x_{n+1}]$. Másodszor

$$f(x) = (f^{[n+1]} \circ f^{[-n]})(x) = (f_{[n+1]} \circ f_{[n]}^{-1})(x). \quad (53)$$

Ahhoz tehát, hogy az egyenlet egy megoldását felírhassuk, azt kell kitalálnunk, hogy milyen legyen az $f_{[1]}$ függvény. Erre láttunk néhány szükséges feltételt a 3.31. lemmában, amelyek egy része elégségesnek is bizonyul.

3.33. Tétel. *A (32) függvényegyenletre $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén érvényesek a következő állítások:*

① *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a függvényegyenletnek, akkor f eleget tesz*

a (46) és (47) összefüggéseknek.

② Fordítva, ha tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, az x_1, x_2 valós számokat úgy választjuk meg, hogy eleget tegyenek a

$$\begin{aligned} \frac{c}{u-1} (x_1 - f_1(x_0)) &\geq 0, \\ x_2 &= (u+1)x_1 - ux_0 - c \end{aligned} \quad (54)$$

összefüggéseknek, ahol $f_1(x) = x + \frac{c}{u-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és ha továbbá feltételezzük, hogy $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ egy szigorúan növekvő bijekció, akkor definiálhatjuk az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatot, és a $g_{[n]}$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{u^n - 1}{u - 1} (x_1 - f_1(x_0)) + x_0 + \frac{nc}{u - 1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ g_{[n]} &: I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}], \\ g_{[n]}(x) &= \frac{u^n - 1}{u - 1} (g(x) - f_1(x)) + x + \frac{nc}{u - 1}. \end{aligned} \quad (55)$$

Az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}$.

Ha g eleget tesz a

$$\min(u, 1) \leq \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \leq \max(u, 1), \quad \forall x \neq y, x, y \in I[x_0, x_1]. \quad (56)$$

egyenlőtlenségeknek, akkor a $g_{[n]}$ függvények bijekciók, és a

$$\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{g}(x) = \left(g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1} \right) (x), \quad \forall x \in I[x_n, x_{n+1}], n \in \mathbb{Z} \quad (57)$$

függvény folytonos megoldása a (32) függvényegyenletnek. A \tilde{g} egyedüli olyan folytonos megoldása egyenletünknek, amely a g meghosszabbítása.

③ A (32) függvényegyenlet minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása előállítható a ② alponban leírt módon, egy alkalmasan választott bijekcióból kiindulva.

④ A függvényegyenlet megoldáshalmaza, rögzített $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén, a következő alakban írható:

$\mathcal{H} = \{\tilde{g} \mid g \in \mathcal{B}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[x_1, x_2])\}$, és teljesülnek az (54) és (56) felt.

3.34. Jelölés. Ha $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subseteq \mathbb{R}$, egy tetszőleges valós függvény, jelöljük $H(g)$ -vel a következő függvényt:

$$H(g) : (D \times D) \setminus \{(x, x) \mid x \in D\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$H(g)(x, y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y}, \quad \forall x \neq y, x, y \in D.$$

A 3.33. tétel bizonyítása: Rendre igazoljuk a tétel állításait:

① Ez az állítás a 3.31. lemma egy része.

② Először kimutatjuk, hogy az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat az (54) feltételek mellett szigorúan monoton. Használni fogjuk a $\theta = \frac{c}{u-1}$ jelölést. Az (55) formulából kiindulva azonnal következik az

$$x_{n+1} - x_n - \theta = u^n \cdot (x_1 - x_0 - \theta)$$

összefüggés, amelyből az (54) első összefüggése szerint $\theta \cdot (x_{n+1} - x_n - \theta) \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, és ennek következménye $\theta \cdot (x_{n+1} - x_n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, azaz sorozatunk szigorúan monoton. Látható az (55) formula alapján, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \theta \cdot \infty$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = -\theta \cdot \infty$, tehát

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}.$$

A $g_{[n]}$ függvény bijektivitása az (56) egyenlőtlenségek alapján igazolható. Az (56) ekvivalens a következő két egyenlőtlenséggel:

$$\frac{H(g)(x, y) - 1}{u - 1} \geq 0, \quad \frac{u - H(g)(x, y)}{u - 1} \geq 0, \quad \forall x \neq y, x, y \in I[x_0, x_1].$$

(58)

Az (55) összefüggésből származik a következő két összefüggés:

$$\begin{aligned}\frac{H(g_{[n]})(x, y) - 1}{u^n - 1} &= \frac{H(g)(x, y) - 1}{u - 1} \geq 0, \\ \frac{u^n - H(g_{[n]})(x, y)}{u^n - 1} &= \frac{u - H(g)(x, y)}{u - 1} \geq 0,\end{aligned}\tag{59}$$

tetszőleges $x \neq y$, $x, y \in I[x_0, x_1]$ esetén.

Az (59) egyenlőtlenségek egyik következménye az, hogy

$$H(g_{[n]})(x, y) \geq \min(u^n, 1) > 0,$$

vagyis a $g_{[n]}$ függvény szigorúan növekvő, tehát injektív. Másrésztől az (54) és (55) összefüggések alapján $g_{[n]}(x_0) = x_n$, $g_{[n]}(x_1) = x_{n+1}$ és $g_{[n]}$ folytonos függvény, amelyekből az injektivitás figyelembe vételével következik, hogy $g_{[n]}$ bijekció.

Végül azt igazoljuk, hogy \tilde{g} megoldása a (32) függvényegyenletnek. Ha $x \in I[x_n, x_{n+1})$, akkor

$$\begin{aligned}(\tilde{g} \circ \tilde{g})(x) &= (g_{[n+2]} \circ g_{[n+1]}^{-1} \circ g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1})(x) = (g_{[n+2]} \circ g_{[n]}^{-1})(x) = \\ &= \frac{u^{n+2} - 1}{u - 1} \left[g \left(g_{[n]}^{-1}(x) \right) - g_{[n]}^{-1}(x) - \theta \right] + g_{[n]}^{-1}(x) + (n + 2)\theta \\ \tilde{g}(x) &= (g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1})(x) = \\ &= \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} \left[g \left(g_{[n]}^{-1}(x) \right) - g_{[n]}^{-1}(x) - \theta \right] + g_{[n]}^{-1}(x) + (n + 1)\theta \\ x &= (g_{[n]} \circ g_{[n]}^{-1})(x) = \\ &= \frac{u^n - 1}{u - 1} \left[g \left(g_{[n]}^{-1}(x) \right) - g_{[n]}^{-1}(x) - \theta \right] + g_{[n]}^{-1}(x) + n\theta\end{aligned}$$

Ezen összefüggések alapján

$$\begin{aligned}&(\tilde{g} \circ \tilde{g}) - (u + 1)\tilde{g}(x) + ux + c = \\ &= \left[\frac{u^{n+2} - 1}{u - 1} - (u + 1)\frac{u^{n+1} - 1}{u - 1} + u\frac{u^n - 1}{u - 1} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[g \left(g_{[n]}^{-1}(x) \right) - g_{[n]}^{-1}(x) - \theta \right] = 0,\end{aligned}$$

vagyis \tilde{g} megoldása egyenletünknek. A $g_{[n]}$ függvények és inverzeik folytonosak, így \tilde{g} is folytonos minden $I(x_n, x_{n+1})$ alakú intervallumon. A $g_{[n]}$ függvények és inverzeik folytonosságát figyelembe véve:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x_n+) &= (g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1})(x_n+) = (g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1})(x_n) = x_{n+1}, \\ \tilde{g}(x_n-) &= (g_{[n]} \circ g_{[n-1]}^{-1})(x_n-) = (g_{[n]} \circ g_{[n-1]}^{-1})(x_n) = x_{n+1}, \\ \tilde{g}(x_n) &= x_{n+1},\end{aligned}$$

ami igazolja \tilde{g} folytonosságát a hiányzó x_n pontokban is. Azt a tényt, hogy nincs több olyan folytonos megoldása a (32) függvényegyenletnek, amely a g függvény meghosszabbítása, a ③ alpont bizonyításánál igazoljuk.

③ Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) függvényegyenletnek, akkor a 3.31. lemma szerint az $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^{[2]}(x_0)$ valós számok eleget tesznek az (54) feltételeknek és a

$$g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2], \quad g(x) = f(x), \quad \forall x \in I[x_0, x_1]$$

függvény szigorúan monoton növekvő bijekció és a 3.31. lemma szerint teljesíti az (56) feltételeket is, vagyis az előző alpont szerint \tilde{g} folytonos megoldása egyenletünknek. Erre a g függvényre könnyen belátható, hogy $g_{[n]} = f^{[n]}$, ezért a \tilde{g} függvény definíciója szerint, ha $x \in I[x_n, x_{n+1})$, akkor

$$\tilde{g}(x) = (g_{[n+1]} \circ g_{[n]}^{-1})(x) = (f^{[n+1]} \circ f^{[-n]})(x) = f(x),$$

tehát $\tilde{g} = f$. Ezzel azt is igazoltuk, hogy egy az (54) feltételeket teljesítő (x_0, x_1, x_2) számhármasság és egy ezekhez tartozó $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ szigorúan növekvő bijekció esetén, egyetlen olyan folytonos megoldása van a (32) függvényegyenletnek, amely meghosszabbítása a g függvénynek.

④ A megoldások halmazát megadó képlet az előző alpontok következménye. ♣

A 5. ábra egy (32) típusú egyenlet egy megoldását mutatja be.

A 3.33. tétel leírja a harmadik esetben is az egyenlet folytonos megoldásait. Itt is megjegyezhetjük, hogy a megoldások halmazának számossága megegyezik a kontinuum számosságával. Ennek bizonyítása hasonló az előző számosságra vonatkozó állítás bizonyításához. Pontosabban az is belátható, hogyha az (x_0, x_1) számpárra az (54) egyenlőtlensége szigorú, vagyis a $\theta \cdot (x_1 - x_0 - \theta) > 0$ teljesül, akkor $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén a (32) függvényegyenlet azon megoldásainak halmaza, amelyekre fennáll az $f(x_0) = x_1$ feltétel, kontinuum számosságú. A másik lehetőséget a következő tétel jellemzi:

3.35. Tétel. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (32) függvényegyenletnek, $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén, és az (x_0, x_1) számpárra $x_1 - x_0 - \theta = 0$ és $f(x_0) = x_1$, akkor $f = f_1$, azaz $f(x) = x + \theta$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. A (33), (34), (44) összefüggések alapján belátható, hogy

$$f(x) - x - \theta = (u - 1) \cdot \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

majd

$$f^{[n+1]} - f^{[n]} - \theta = u^n \cdot (f - id_{\mathbb{R}} - \theta).$$

Ha $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f^{[n]}(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, akkor a 3.18. és 3.19. tételek alapján belátható, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \theta \cdot \infty$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = -\theta \cdot \infty$. Másrésztől, az említett összefüggések szerint a feltételből következik, hogy $\varphi(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ami φ monotonitása alapján, a $\varphi = 0$ összefüggéshez vezet. Tehát

$$f(x) - x - \theta = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Tehetünk még néhány észrevételt a megoldásokkal kapcsolatosan. Minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldás esetén léteznek a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, illetve a $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ határértékek. Valóban, ha rögzítünk egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot, és bevezetjük az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f^{[n]}(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatot, akkor tetszőleges $x \in I[x_n, x_{n+1})$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén felírható a következő összefüggés:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sum_{i=0}^n (f^{[i+1]}(f^{[-n]}(x)) - f^{[i]}(f^{[-n]}(x))) + f^{[-n]}(x)}{\sum_{i=0}^{n-1} (f^{[i+1]}(f^{[-n]}(x)) - f^{[i]}(f^{[-n]}(x))) + f^{[-n]}(x)} = \\ &= \frac{(f^{[-n+1]}(x) - f^{[-n]}(x) - \theta) \sum_{i=0}^n u^i + (n+1)\theta + f^{[-n]}(x)}{(f^{[-n+1]}(x) - f^{[-n]}(x) - \theta) \sum_{i=0}^{n-1} u^i + n\theta + f^{[-n]}(x)} \end{aligned} \quad (60)$$

Ha létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) - x - \theta = 0$, akkor a 3.35. tétel szerint $f - id_{\mathbb{R}} - \theta = 0$, így:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Ha $f(x) - x - \theta \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, akkor a (60) alapján,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \theta \infty} \frac{f(x)}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \theta \infty} \frac{(f^{[-n+1]}(x) - f^{[-n]}(x) - \theta) \sum_{i=0}^n u^i + (n+1)\theta + f^{[-n]}(x)}{(f^{[-n+1]}(x) - f^{[-n]}(x) - \theta) \sum_{i=0}^{n-1} u^i + n\theta + f^{[-n]}(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \theta \infty} \frac{\varphi(f^{[-n]}(x)) (u^{n+1} - 1) + (n+1)\theta + f^{[-n]}(x)}{\varphi(f^{[-n]}(x)) (u^n - 1) + n\theta + f^{[-n]}(x)} = \\ &= \begin{cases} u, & \text{ha } u > 1 \\ 1, & \text{ha } 0 < u < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ahol figyelembe vettük, hogy $f^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_1]$, ami maga után vonja, hogy ha $x \rightarrow \theta \cdot \infty$, akkor $n \rightarrow \infty$, és azt, hogy a φ folytonos függvény korlátos az $I[x_0, x_1]$ kompakt intervallumon.

Ha $x \in I[x_{-n}, x_{-n+1})$ és $n \in \mathbb{Z}^+$, akkor az

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\varphi(f^{[n]}(x))(u^{-n+1} - 1) - (n-1)\theta + f^{[n]}(x)}{\varphi(f^{[n]}(x))(u^{-n} - 1) - n\theta + f^{[n]}(x)}, \quad (61)$$

összefüggés alapján, az előzőekhez hasonló gondolatmenettel kapjuk a

$$\lim_{x \rightarrow -\theta\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } u > 1 \\ u, & \text{ha } 0 < u < 1 \end{cases}$$

határértéket is. Ezen véges határértékek létezése felveti a megoldásfüggvények aszimptotáinak vizsgálatát. A számítások elvégzéséhez, a (33) és (34) alapján felírhatók az

$$\begin{aligned} f(x) - ux &= -(u-1) \cdot \psi(f^{[-n]}) - nc + \theta \\ f(x) - x &= u^n(u-1) \cdot \varphi(f^{[-n]}) + \theta \end{aligned}$$

összefüggések, amelyekből

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \theta\infty} (f(x) - ux) &= -c \cdot \infty, & \text{ha } u > 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\theta\infty} (f(x) - x) &= \theta, & \text{ha } u > 1 \\ \lim_{x \rightarrow \theta\infty} (f(x) - x) &= \theta, & \text{ha } 0 < u < 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\theta\infty} (f(x) - ux) &= c \cdot \infty, & \text{ha } 0 < u < 1 \end{aligned}$$

Megállapítható tehát, hogy mindig $-c \cdot \infty$ -ben van aszimptota és ez az $y = x + \theta$ egyenletű egyenes, azaz $y = f_1(x)$, a másik oldalon pedig nincs.

4 Egy másik módszer A továbbiakban megmutatjuk, hogy bizonyos értelemben tetszőleges növekvő ráképezésekből kiindulva is eljuthatunk a (32) függvényegyenlet megoldásaihoz. Bevezetjük a következő jelöléseket.

3.36. Jelölés. Ha $E \cup F \subseteq \mathbb{R}$, akkor a $h : E \rightarrow F$ növekvő (illetve csökkenő) ráképezések (szűrjekciók) halmazát az $\mathcal{SM}_{\nearrow}(E, F)$ (illetve $\mathcal{SM}_{\searrow}(E, F)$) szimbólummal fogjuk jelölni.

A 3.1. tétel utáni megjegyzés alapján, ha E és F intervallumok, akkor $\mathcal{SM}_{\nearrow}(E, F) \cup \mathcal{SM}_{\searrow}(E, F) \subset \mathcal{C}(E, F)$. A következő tétel pontosan megadja, hogy bizonyos növekvő ráképezésekből hogyan juthatunk az (32) függvényegyenlet egy megoldásához.

3.37. Tétel. Ha a (32) függvényegyenlet együtthatói teljesítik a $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ feltételeket, ha az $s, t \in \mathbb{R}$ és $c \cdot s \geq 0$, valamint $x_0 = s + t$ és $x_1 = us + t + \theta$, $\theta = \frac{c}{u-1}$, továbbá ha $\varphi^* \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[s, us])$ és $\psi^* \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[t, t + \theta])$ tetszőleges olyan növekvő ráképezések, amelyekre $\chi : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_0, x_1]$, $\chi = \varphi^* + \psi^*$ függvény szigorúan növekvő, akkor

i) A χ függvény bijekció és a $\varphi = \varphi^* \circ \chi^{-1}$ és $\psi = \psi^* \circ \chi^{-1}$ függvények, olyan folytonos növekvő függvények, amelyekre $(\varphi + \psi)(x) = x$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$.

ii) Ha minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, $x_n = u^n s + t + n\theta$, akkor az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \theta \cdot \infty$, $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = -\theta \cdot \infty$,

valamint $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}$

iii) Minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, az

$$f_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}], \quad f_{[n]}(x) = u^n \cdot \varphi(x) + \psi(x) + n\theta$$

függvény szigorúan növekvő bijekció.

iv) Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyet $x \in I[x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$, esetén az $f(x) = (f_{[n+1]} \circ f_{[n]}^{-1})(x)$ képlettel értelmezzük, folytonos megoldása a (32) függvényegyenletnek.

Bizonyítás. Először vegyük észre, hogy ha $s = 0$, akkor $\varphi^* = 0$, ha pedig $s \neq 0$, akkor $(us - s) \cdot (x_1 - x_0) > 0$, így mivel φ^* növekvő ráképzés következik, hogy $\varphi^*(x_0) = s$ és $\varphi^*(x_1) = us$. Hasonlóképpen $\theta \cdot (x_1 - x_0) > 0$, s így $\psi^*(x_0) = t$ és $\psi^*(x_1) = t + \theta$. A $\varphi^* : I[x_0, x_1] \rightarrow I[s, us]$ és $\psi^* : I[x_0, x_1] \rightarrow I[t, t + \theta]$ monoton függvények intervallumnak intervallumra vett ráképzései, így a 3.1. tétel utáni megjegyzés szerint folytonosak.

- i) A χ függvény szigorúan növekvő tehát injektív, mivel folytonos és $\chi(x_0) = s + t = x_0$, valamint $\chi(x_1) = us + t + \theta = x_1$ következik, hogy intervallumot intervallumra képez, így a monotonitást is figyelembe véve következik, hogy $\chi(I[x_0, x_1]) = I[x_0, x_1]$, azaz függvényünk szürjektív is így bijekció. Másrészről:
 $(\varphi + \psi)(x) = ((\varphi^* + \psi^*) \circ \chi^{-1})(x) = (\chi \circ \chi^{-1})(x) = x, \forall x \in I[x_0, x_1]$ A φ és ψ függvények is monoton növekvő ráképzések, és mivel összegük bijekció megjegyezhető, hogy minden olyan intervallumon, ahol a két függvény egyike állandó, ott a másik függvény szigorúan növekvő.
- ii) A sorozat szigorúan monoton, mert $\theta \cdot (x_{n+1} - x_n) = u^n \cdot c \cdot s + \theta^2 > 0$, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ha $s = 0$, akkor a további állítások nyilvánvalóak. Ha $s \neq 0$, akkor külön vizsgálva az $u > 1$ és $0 < u < 1$ eseteket igazolhatjuk állításainkat.
- iii) Az $f_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}]$, $f_{[n]}(x) = u^n \cdot \varphi(x) + \psi(x) + n\theta$ függvény szigorúan növekvő, hiszen a φ és ψ függvények növekvő függvények, és ha egy intervallumon az egyik állandó, ott a másik szigorúan növekszik. Az $f_{[n]}$ függvény folytonos is, mint folytonos függvények lineáris kombinációja.

Végül látható, hogy:

$$f_{[n]}(x_0) = x_n,$$

$$f_{[n]}(x_1) = u^n \cdot \varphi(x_1) + \psi(x_1) + n\theta = u^{n+1}s + x_0 + (n+1)\theta = x_{n+1},$$

tehát az $f_{[n]}$ függvény az $I[x_0, x_1]$ intervallumot az $I[x_n, x_{n+1}]$ intervallumra képezi. Következésképpen az $f_{[n]}$ függvény szigorúan növekvő bijekció.

iv) Ha $x \in I[x_n, x_{n+1})$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\begin{aligned} & [f \circ f - (u+1) \cdot f + u \cdot id_{\mathbb{R}}](x) = \\ & = [(f_{[n+2]} - (u+1) \cdot f_{[n+1]} + u \cdot f_{[n]}) \circ f_{[n]}^{-1}](x) = \\ & = (1-u) \cdot \theta = -c, \end{aligned}$$

vagyis $f \circ f - (u+1) \cdot f + u \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$. A φ és ψ függvények folytonossága alapján következik az $f_{[n]}$ függvények és inverzeik folytonossága, ahonnan f folytonossága minden (x_n, x_{n+1}) alakú intervallumon. Másrészről

$$\begin{aligned} f(x_n+) &= (f_{[n+1]} \circ f_{[n]}^{-1})(x_n+) = f_{[n+1]}(x_0+) = x_{n+1}, \\ f(x_n-) &= (f_{[n]} \circ f_{[n-1]}^{-1})(x_n-) = f_{[n]}(x_1-) = f_{[n]}(x_1) = x_{n+1}, \\ f(x_n) &= x_{n+1}, \end{aligned}$$

mely egyenlőségek igazolják f folytonosságát a hiányzó x_n pontokban is.



3.38. Jelölés. Ha az (32) függvényegyenlet együtthatói teljesítik a $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ feltételeket, ha $J = I[0, c \cdot \infty) \times \mathbb{R}$ és minden $(s, t) \in J$ esetén $RP(s, t)$ -vel jelöljük azon ráképzéspárok halmazát az $\mathcal{SM}_{\nearrow}(I[s+t, us+t+\theta], I[s, us]) \times \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[s+t, us+t+\theta], I[t, t+\theta])$ halmazból, amelyek összege szigorúan növekvő.

Továbbá jelölje $\Phi : \bigcup_{(s,t) \in J} RP(s,t) \rightarrow \mathcal{H}$ azt függvényt, amely egy (φ^*, ψ^*) párnak az $\bigcup_{(s,t) \in J} RP(s,t)$ halmazból, a 3.37. tételben leírt f megoldásfüggvényt felelteti meg, tehát $\Phi(\varphi^*, \psi^*) = f$.

Ezzel a jelöléssel röviden jellemezhető a (32) függvényegyenlet folytonos megoldásainak \mathcal{H} -val jelölt halmaza.

3.39. Tétel. *Ha a (32) függvényegyenlet együtthatói teljesítik a $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ feltételeket, akkor a függvényegyenlet minden folytonos megoldása előállítható a 3.37. tételben leírt módon. A függvényegyenlet megoldáshalmaza:*

$$\mathcal{H} = \{\Phi(\varphi^*, \psi^*) \mid \exists (s,t) \in J : (\varphi^*, \psi^*) \in RP(s,t)\}.$$

Bizonyítás. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása egyenletünknek $0 < u \neq 1$ és $c \neq 0$ esetén, akkor a 3.25. tétel szerint az f függvény iteráltjait a (33) formulával állíthatjuk elő, amelyben a φ , ψ és θ függvényeket a (34) képletekkel kaphatjuk meg. A 3.26. lemma szerint a φ és ψ függvények növekvőek, míg a 3.31. lemmába foglalt (46) egyenlőtlenség szerint $c \cdot \varphi \geq 0$. Ha rögzítünk egy x_0 valós számot és $x_1 = f(x_0)$, akkor $s = \varphi(x_0)$ és $t = \psi(x_0)$ valós számokra fennállnak a

$$\begin{aligned} c \cdot s &\geq 0, \\ x_0 &= \varphi(x_0) + \psi(x_0) = s + t, \\ x_1 &= u \cdot \varphi(x_0) + \psi(x_0) + \theta = us + t + \theta \end{aligned}$$

összefüggések, valamint a $\varphi^* : I[x_0, x_1] \rightarrow I[s, us]$, $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ és $\psi^* : I[x_0, x_1] \rightarrow I[t, t+\theta]$, $\psi^*(x) = \psi(x)$ függvények növekvő ráképzések, amelyek összege $\chi : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_0, x_1]$, $\chi(x) = x$ szigorúan növekvő. Könnyen belátható, hogy az itt felsorolt függvényekhez rendelt $f_{[n]}$

függvényekre fennáll az $f_{[n]}(x) = f^{[n]}(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$ egyenlőség, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. Ha tehát $x \in I[x_n, x_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$f(x) = \left(f^{[n+1]} \circ f^{[n]-1} \right) (x) = \left(f_{[n+1]} \circ f_{[n]}^{-1} \right) (x) = \Phi(\varphi^*, \psi^*)(x),$$

azaz $f = \Phi(\varphi^*, \psi^*)$.

A \mathcal{H} -t megadó összefüggés az előzőek természetes következménye. ♣

Megállapítható, hogy ha $(s, t) \in J$ és $(\varphi^*, \psi^*) \in RP(s, t)$, valamint $\tau \in \mathcal{B}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[x_0, x_1])$, ahol $x_0 = s + t$ és $x_1 = us + t + \theta$, akkor $\Phi(\varphi^*, \psi^*) = \Phi(\varphi^* \circ \tau, \psi^* \circ \tau)$. A (φ^*, ψ^*) párhoz rendelt χ függvény is szigorúan növekvő bijekció, azaz $\chi \in \mathcal{B}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[x_0, x_1])$, így ha $\varphi = \varphi^* \circ \chi^{-1}$ és $\psi = \psi^* \circ \chi^{-1}$, akkor $\Phi(\varphi^*, \psi^*) = \Phi(\varphi, \psi)$. Az

$\bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t)$ halmazban bevezethetjük a \sim relációt a következőképpen:

3.40. Definíció. A $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in \bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t)$ párok esetén a

$(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$ reláció ekvivalens azzal, hogy létezik olyan $(s, t) \in J$, amelyre $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in RP(s, t)$ és az $x_0 = s + t$ és $x_1 = us + t + \theta$ valós számokra létezik egy $\tau : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_0, x_1]$ szigorúan növekvő bijekció, amelyre $(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2 \circ \tau, \psi_2 \circ \tau)$.

Könnyen igazolható, hogy a bevezetett reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, vagyis ekvivalencia reláció. Előző észrevételeink alapján, ha $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$, akkor $\Phi(\varphi_1, \psi_1) = \Phi(\varphi_2, \psi_2)$.

Ha x_0 rögzített valós szám és x_1 teljesíti a $\theta \cdot (x_1 - x_0 - \theta) \geq 0$ feltételt,

akkor az $s = \frac{x_1 - x_0 - \theta}{u - 1}$ valós számra fennáll a $c \cdot s \geq 0$ egyenlőtlenség,

és $t = -\frac{x_1 - ux_0 - \theta}{u - 1}$ esetén minden $(\varphi^*, \psi^*) \in \bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t)$ párra

az $f = \Phi(\varphi^*, \psi^*)$ olyan megoldása függvényegyenletünknek, amelyre

$f(x_0) = x_1$, sőt a 3.39. tétel bizonyítása alapján látható volt, hogy minden olyan $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldás, amelyre $f(x_0) = x_1$, előállítható $f = \Phi(\varphi^*, \psi^*)$ alakban, ahol $(\varphi^*, \psi^*) \in \bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t)$ és (s, t) az itt

bevezetett valós számpár. Az $s = \frac{x_1 - x_0 - \theta}{u - 1}$ egyenlőség köcsönösen

egyértelmű megfeleltetést valósít meg az $s \in I[0, c \cdot \infty)$ és azon x_1 valós számok között, amelyekre fennáll a $\theta \cdot (x_1 - x_0 - \theta) \geq 0$ egyenlőtlenség.

Ez azt jelenti, hogy ha s bejárja az $I[0, c \cdot \infty)$ intervallumot, akkor x_1 bejárja mindazon értékeket, amelyeket a függvényegyenlet megoldásai felvehetnek az x_0 -ban.

Észrevételeinknek az a következménye, hogy a Φ függvény $\bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s)$ halmazon felvett értékeinek hal-

maza megegyezik az (32) függvényegyenlet \mathcal{H} folytonos megoldásainak halmazával.

Legyen $\kappa : \bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s) \rightarrow \left(\bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s) \right) / \sim$

a faktorizáció kanonikus ráképzése, mivel a Φ függvény kompatibilis az \sim relációval, a faktorhalmazon $\tilde{\Phi}(\kappa(\varphi^*, \psi^*)) = \Phi(\varphi^*, \psi^*)$ képlet-

tel függvényt értelmezhetünk, vagyis ha $\iota : \bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s) \rightarrow$

$\bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t)$ az azonos süllyesztés, akkor a következő diagram kom-

mutatív:

$$\begin{array}{ccc} \bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s) & \xrightarrow{\kappa} & \left(\bigcup_{s \in I[0, c \cdot \infty)} RP(s, x_0 - s) \right) / \sim \\ \downarrow \iota & & \downarrow \tilde{\Phi} \\ \bigcup_{(s,t) \in J} RP(s, t) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{H} \end{array}$$

Kimutatható, hogy a $\tilde{\Phi}: \left(\bigcup_{s \in I[0, c\infty)} RP(s, x_0 - s) \right) / \sim \rightarrow \mathcal{H}$ függvény bijekció. Azt már láttuk, hogy ráképzés. Tétélezzük fel, hogy

$$\tilde{\Phi}(\kappa(\varphi_1, \psi_1)) = \tilde{\Phi}(\kappa(\varphi_2, \psi_2)) = f.$$

Így tehát $(\varphi_1, \psi_1) \in RP(s_1, x_0 - s_1)$, $c \cdot s_1 \geq 0$, és $x_1 = us_1 + x_0 - s_1 + \theta$, esetén $\varphi_1 \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[s_1, us_1])$, $\psi_1 \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[x_0 - s_1, x_0 - s_1 + \theta])$ úgy, hogy $\chi_1 = \varphi_1 + \psi_1 : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_0, x_1]$ szigorúan növekvő bijekció, amelyekre $f(x) = u\varphi_1(\chi_1^{-1}(x)) + \psi_1(\chi_1^{-1}(x)) + \theta$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$, így $f(x_0) = x_1$ és $(\varphi_2, \psi_2) \in RP(s_2, x_0 - s_2)$, $c \cdot s_2 \geq 0$, és $z_1 = us_2 + x_0 - s_2 + \theta$, esetén $\varphi_2 \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, z_1], I[s_2, us_2])$, $\psi_2 \in \mathcal{SM}_{\nearrow}(I[x_0, z_1], I[x_0 - s_2, x_0 - s_2 + \theta])$ úgy, hogy $\chi_2 = \varphi_2 + \psi_2 : I[x_0, z_1] \rightarrow I[x_0, z_1]$ szigorúan növekvő bijekció, amelyekre $f(x) = u\varphi_2(\chi_2^{-1}(x)) + \psi_2(\chi_2^{-1}(x)) + \theta$, $\forall x \in I[x_0, z_1]$, így $f(x_0) = z_1$. Belátható, hogy $x_1 = z_1$, és mivel $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ u & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, a

$$\begin{cases} \varrho + \sigma = x \\ u\varrho + \sigma = f(x) - \theta \end{cases}$$

egyenletrendszeret kielégítő

$(\varphi_1(\chi_1^{-1}(x)), \psi_1(\chi_1^{-1}(x)))$ és $(\varphi_2(\chi_2^{-1}(x)), \psi_2(\chi_2^{-1}(x)))$ számpárok egyenlőek, minden $x \in I[x_0, x_1]$ esetén, következik, hogy

$$(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2 \circ \chi_2^{-1} \circ \chi_1, \psi_2 \circ \chi_2^{-1} \circ \chi_1),$$

vagyis $(\varphi_1, \psi_1) \sim (\varphi_2, \psi_2)$, tehát $\kappa(\varphi_1, \psi_1) = \kappa(\varphi_2, \psi_2)$, ami igazolja, hogy $\tilde{\Phi}$ injektív is. Igazoltuk tehát, hogy $\tilde{\Phi}$ bijekció.

A bizonyításból kiderült, hogy egy ekvivalencia osztályon belül pontosan egy olyan pár van amely függvényeinek összege az identitás, azaz ha $(\varphi^*, \psi^*) \in BP(s, t)$, akkor a (φ^*, ψ^*) ekvivalencia osztályán belül

a $(\varphi, \psi) = (\varphi^* \circ (\varphi^* + \psi^*)^{-1}, \psi^* \circ (\varphi^* + \psi^*)^{-1})$ páros egyértelműen meghatározott, $\varphi + \psi = id_{I[x_0, x_1]}$, $(\varphi, \psi) \in BP(s, t)$ és $(\varphi, \psi) \sim (\varphi^*, \psi^*)$.

Ezen észrevételek után a 3.33. tétel és a 3.37. tétel állításait összehasonlítva, egy függvényekre vonatkozó érdekes tételt fogalmazhatunk meg.

3.41. Tétel. *Ha $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $u_1 < u_2$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ahol $D \subseteq \mathbb{R}$, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

① *Az f függvényre érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$u_1 \leq H(f) \leq u_2,$$

(lásd a 3.34. jelölést)

② *Tetszőleges $\theta \in \mathbb{R}$ esetén, létezik φ , és ψ két egyértelműen meghatározható, növekvő valós függvény, úgy hogy összegük az identitás, és $f = u_1 \cdot \varphi + u_2 \cdot \psi + \theta$.*

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy ① \Rightarrow ②. Tetszőleges $\theta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{cases} \varphi + \psi = id_D \\ u_1\varphi + u_2\psi = f - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{1}{u_2 - u_1} (f - u_2 \cdot id_D - \theta) \\ \psi = \frac{1}{u_2 - u_1} (f - u_1 \cdot id_D - \theta) \end{cases}$$

Tehát léteznek és egyértelműen meghatározottak a φ és ψ függvények, amelyekre fennáll a rendszerbe foglalt két összefüggés és az ① figyelembevételével

$$H(\varphi) = \frac{u_2 - H(f)}{u_2 - u_1} \geq 0,$$

$$H(\psi) = \frac{H(f) - u_1}{u_2 - u_1} \geq 0,$$

azaz φ és ψ növekvő függvények, tehát igaz a ②.

A fordított implikáció bizonyításához tételezzük fel, hogy fennáll a ②!

Akkor

$$\begin{cases} H(\varphi) + H(\psi) = 1, \\ H(f) = u_1 \cdot H(\varphi) + u_2 \cdot H(\psi), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{H(f) - u_1}{u_2 - u_1} = H(\psi), \\ \frac{u_2 - H(f)}{u_2 - u_1} = H(\varphi), \end{cases}$$

a ② szerint $H(\varphi) \geq 0$ és $H(\psi) \geq 0$, és következik az ①. ♣

A III. eset minden lehetséges alesetét letárgyaltuk, így rátérhetünk az egyenlet megoldására a fennmaradt utolsó esetben.

3.3.4 IV. A $\lambda_1 \neq \lambda_2, \{\lambda_1, \lambda_2\} \cap \{0, 1\} \neq \emptyset, \lambda_3 = 1$ eset

Megemlítjük, hogy λ_1 és λ_2 a (9) egyenlet gyökei, ezért $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$ és $\lambda_1 \lambda_2 = b$. Azt láttuk, hogy ha $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$, akkor az egyenletnek nincs folytonos megoldása. A továbbiakban feltételezzük, hogy a gyökök valósak. Jelöljük ezt a két valós gyököt u_1 - és u_2 -vel. Az alfejezet címfeltétele $b \neq 0$, ezért nyilván u_1 és u_2 különböznek 0-tól. Esetünk feltételei tehát: $u_1 \neq u_2$ és $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, függvényegyenletünk pedig:

$$f \circ f - (u_1 + u_2) \cdot f + u_1 u_2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0 \quad (62)$$

A lineáris megoldásoknál láttuk, hogy ebben az esetben függvényegyenletünknek két lineáris megoldása is van (esetleg más megoldások mellett), ezek:

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = u_1 x + \frac{c}{u_2 - 1} \quad \text{és} \quad f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = u_2 x + \frac{c}{u_1 - 1}$$

A 3.12. tétel (18), valamint a 3.14. tétel (21) összefüggése alapján kijelenthetjük a következő tételt:

3.42. Lemma. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek, $u_1 \neq u_2$; $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ esetén, akkor az iteráltakat az*

$$f^{[n]} = u_1^n \cdot \varphi + u_2^n \cdot \psi + \theta, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (63)$$

képlettel állíthatjuk elő, amelyben

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{u_1 - u_2}(f - f_2), \\ \psi = -\frac{1}{u_1 - u_2}(f - f_1), \\ \theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}, \end{cases} \quad (64)$$

továbbá

$$\begin{cases} \varphi(f(x)) = u_1 \varphi(x) & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \psi(f(x)) = u_2 \psi(x) & , \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (65)$$

Bizonyítás. Az állítások nagy része az említett tételek azonnali következménye. A (64) összefüggéseket az az iteráltak egyenletéből $n = 0, 1, 2$ esetén felírt egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldva kapjuk. ♣

A következő monotonia tulajdonságok hasznosnak bizonyulnak a (62) függvényegyenlet megoldásánál.

3.43. Lemma. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek $|u_1| \neq |u_2|$ és $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \}$ esetén, akkor a (63) formulában szereplő φ és ψ függvények monoton növekvők.*

Bizonyítás. A (63) alapján, $n \in \mathbb{Z}$ esetén,

$$H(f^{[2n]}) = u_1^{2n} \cdot H(\varphi) + u_2^{2n} \cdot H(\psi).$$

A 3.1. tétel ③ alpontja alapján $f^{[2n]}$ szigorúan növekvő, ezért

$$u_1^{2n} \cdot H(\varphi) + u_2^{2n} \cdot H(\psi) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ebből először $u_1^{2^n}$ -nel osztva és n szerint vagy ∞ -, vagy $-\infty$ -be történő határramenettel kapjuk, hogy $H(\varphi) \geq 0$, másodsor $u_2^{2^n}$ -nel osztva és a megfelelő határramenetel után adódik a $H(\psi) \geq 0$ egyenlőtlenség, ami igazolja állításunkat. \clubsuit

3.44. Lemma. *Igazak a következő állítások:*

- ① Ha a (62) függvényegyenlet egy megoldásának van fixpontja, $u_1 \neq u_2$ és $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \}$ esetén, akkor csak egyetlen egy van és ez $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$.
- ② Ha $u_1 \neq u_2$ és $u_1, u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, \}$ esetén az u_1 és u_2 közül legalább az egyik negatív, akkor a (62) függvényegyenlet minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásának van fixpontja és ez $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$.
- ③ Ha $0 < |u_1| < |u_2| < 1$ vagy $1 < |u_1| < |u_2|$, akkor a (62) függvényegyenlet minden folytonos megoldásának van fixpontja és ez $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$.

Bizonyítás. Rendre igazoljuk az állításokat:

- ① Mivel a feltételek szerint $(u_1 - 1)(u_2 - 1) \neq 0$, a 3.16. tétel alapján belátható, hogy egy megoldás egyetlen lehetséges fixpontja a $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$.
- ② A második rész igazolásához tételezzük fel, hogy $u_1 < 0$ és $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ egy megoldása függvényegyenletünknek. Az f függvény iteráltjait a (63) képletekkel fejezhetjük ki, amelyben a φ és ψ , a 3.42. lemma szerint folytonos függvények. Ha rögzítünk egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontot, akkor a (65) formula szerint $\varphi(f(x_0)) = u_1 \cdot \varphi(x_0)$, mivel φ folytonos, létezik egy $y_0 \in I[x_0, f(x_0)]$ úgy, hogy $\varphi(y_0) = 0$. Tehát $f^{[n]}(y_0) = u_2^n \cdot \psi(y_0) + \theta$. Feltételezhetjük, hogy $|u_2| \neq 1$, hiszen, ha $u_2 = -1$, akkor u_1 és u_2 szerepet cserélhetnek, mivel mindkettő negatív. Ezen feltételezés mellett az $\{f^{[n]}(y_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatnak, vagy az $n \rightarrow \infty$, vagy az $n \rightarrow -\infty$ szerinti határértéke θ , így a bizonyítandó állítás a 3.19. té-

tel és az előző alpont következménye.

③ Ha fennáll az alpont feltételei közül az egyik, akkor az $\{|u_1|^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és $\{|u_2|^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatok azonos típusú monoton sorozatok, amelyek határértéke is egyenlő ha $n \rightarrow \infty$, illetve ha $n \rightarrow -\infty$. Ezek közül azt az esetet választjuk, amikor a határérték 0, majd alkalmazzuk a 3.19 tételt. ♣

Az u_1 és u_2 valós számok abszolútértékének a 0- és 1-hez, illetve egymáshoz viszonyított helyzetétől függően, több alesetet különböztetünk meg. Vannak esetek, amelyekben csak fixponttal rendelkező megoldások vannak, de lesz olyan is, amelyben ezek mellett fixpont nélküli megoldások is léteznek. A legegyszerűbbek azok, amelyekben az egyenletnek csak lineáris megoldásai vannak, ezeket tárgyaljuk le először.

❶ **Az $u_1 < 0 < u_2 \neq 1, |u_1| \neq |u_2|$ és $u_1 < -1 < u_2 < 0$ esetek**

3.45. Tétel. *Ha teljesül az $u_1 < 0 < u_2 \neq 1$ és $|u_1| \neq |u_2|$, vagy $u_1 < -1 < u_2 < 0$ feltételek egyike, akkor a (62) függvényegyenlet folytonos megoldásainak halmaza a két lineáris megoldásból áll, azaz:*

$$\mathcal{H} = \{f_1, f_2\}$$

Bizonyítás. Először belátható, hogy mivel mindkét esetben van negatív gyöke a karakterisztikus egyenletnek a 3.44. lemma alapján következik, hogy a függvényegyenlet minden folytonos megoldásának θ fixpontja. Mindkét esetben $|u_1| \neq |u_2|$, ahonnan a 3.43. lemma szerint a φ és ψ függvények növekvőek. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek, és $f(\theta) = \theta$, akkor figyelembe véve a (63) formulákat $n = 0, 1$ esetén a

$$\varphi(\theta) = \psi(\theta) = 0 \tag{66}$$

értékeket kapjuk.

① Ha f szigorúan növekvő megoldása egyenletünknek, akkor minden iteráltja szintén szigorúan növvő, így tetszőleges $x \neq \theta$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén,

$$\frac{f^{[2n+1]}(x) - f^{[2n+1]}(\theta)}{x - \theta} > 0 \Leftrightarrow \frac{-|u_1|^{2n+1} \cdot \varphi(x) + |u_2|^{2n+1} \cdot \psi(x)}{x - \theta} > 0 \quad (67)$$

ahonnan $|u_1|^{2n+1}$ -vel való osztás után és a megfelelő $n \rightarrow \infty$ vagy $n \rightarrow -\infty$ szerinti határértéket számítva a $\frac{\varphi(x)}{x - \theta} \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Másrészről láttuk, hogy φ növekvő függvény, így

$$\frac{\varphi(x)}{x - \theta} = \frac{\varphi(x) - \varphi(\theta)}{x - \theta} \geq 0.$$

A két egyenlőtlenség alapján $\varphi = 0$, amelyből a (64) összefüggések szerint $f = f_2$. Ha f szigorúan csökkenő megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor a (67) egyenlőtlenség fordított irányú, amelyből $|u_2|^{2n+1}$ -vel való osztás után az előzőhöz hasonlóan kapjuk a $\frac{\psi(x)}{x - \theta} \leq 0$ egyenlőtlenséget, majd ezt összevetve, azzal, hogy ψ növekvő, adódik, a $\psi = 0$, vagyis a (64) alapján a $f = f_1$.

② Ha u_1 és u_2 is negatív számok, akkor a (62) egyenlet alapján belátható, hogy minden folytonos megoldás szigorúan csökkenő. Az $f \circ f$ függvény viszont szigorúan növekvő és kielégíti a (2) függvényegyenletet, mivel $(1 - u_1^2)(1 - u_2^2) \neq 0$ a 3.16. tétel szerint egyetlen fixpontja van. A θ az $f^{[2]}$ függvénynek is fixpontja, így nyilván ez az egyedüli fixpont. Az $f^{[2]} - id_{\mathbb{R}}$ függvény folytonos és egyetlen zérushelye a θ , így a $(-\infty, \theta)$ és (θ, ∞) intervallumokon előjeltartó.

Ha $x \in (\theta, \infty)$, akkor $f^{[2n]}(x) > \theta$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ így mivel a 3.18. tétel szerint az $\{f^{[2n]}\}_{n \geq 1}$ és $\{f^{[-2n]}\}_{n \geq 1}$ sorozatok közül az egyik csökkenő, következik, hogy az a sorozat konvergens is.

i) Ha az első sorozat konvergens, akkor

$$\varphi(x) = u_1^{-2n} \cdot f^{[2n]}(x) - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{2n} \cdot \psi(x) + u_1^{-2n} \cdot \theta,$$

és $n \rightarrow \infty$ szerinti határérték kiszámításával következik, hogy $\varphi(x) = 0$, amelyből a (64) összefüggések alapján adódik az

$$f(x) = f_2(x), \quad \forall x \in (\theta, \infty).$$

ii) Ha a második sorozat konvergens, akkor

$$\psi(x) = u_2^{-2n} \cdot f^{[2n]}(x) - \left(\frac{u_1}{u_2}\right)^{2n} \cdot \varphi(x) + u_2^{-2n} \cdot \theta,$$

így $n \rightarrow -\infty$ szerinti határ kiszámításával a $\psi(x) = 0$ egyenlőséget kapjuk, ahonnan a (64) alapján

$$f(x) = f_1(x), \quad \forall x \in (\theta, \infty).$$

Ha $x \in (-\infty, \theta)$, akkor $f^{[2n]}(x) < \theta$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ és hasonló gondolatmenettel az

$$f(x) = f_1(x), \quad \forall x \in (-\infty, \theta),$$

vagy

$$f(x) = f_2(x), \quad \forall x \in (-\infty, \theta)$$

következtetésre jutunk. Tehát a (62) függvényegyenlet minden $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{ha } x \in (-\infty, \theta), \\ f_j(x), & \text{ha } x \in [\theta, \infty), \end{cases} \quad (68)$$

alakú, ahol $i, j \in \{1, 2\}$. Az f függvény szigorúan csökkenő, így az

$$f \circ f - (u_1 + u_2) \cdot f + u_1 u_2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$$

egyenlőség csak akkor fog teljesülni, ha $i = j$. Tehát ebben az esetben is csak lineáris megoldásai vannak egyenletünknek. ♣

A következő esetben a két lineáris megoldáson kívül, még szakaszonként lineáris megoldásaink is lesznek.

② **Az** $\{u_1, u_2\} = \{u, -1\}$, $-1 \neq u < 0$ **aleset** Egyenletünk ebben az esetben

$$f \circ f - (u - 1) \cdot f - u \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0 \quad (69)$$

alakú. Folytonos megoldásai szigorúan csökkenőek. A 3.43 és 3.44. lemmák szerint a függvényegyenlet minden folytonos megoldásának van fixpontja, ez $\theta = \frac{c}{2(u-1)}$, továbbá a φ és ψ monoton növekvő függvények. Az iteráltakat $n \in \mathbb{Z}$ esetén, az

$$f^{[n]} = u^n \cdot \varphi + (-1)^n \cdot \psi + \theta$$

képletekkel állíthatjuk elő. Az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és mivel $|u| \neq 1$ az $\{f^{[2n]}(x)\}_{n \geq 1}$, vagy az $\{f^{[-2n]}(x)\}_{n \geq 1}$ sorozatok egyike konvergens és határértéke $\psi(x) + \theta$, ami a 3.19. tétel szerint fixpontja az $f^{[2]}$ függvénynek, vagyis tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f^{[2]}(\psi(x) + \theta) = \psi(x) + \theta \quad (70)$$

A φ függvény (65) multiplikációs tulajdonságát és a (70) összefüggést használva

$$\varphi(f^{[2]}(\psi(x) + \theta)) = \varphi(\psi(x) + \theta) \Leftrightarrow u^2 \cdot \varphi(\psi(x) + \theta) = \varphi(\psi(x) + \theta),$$

azaz

$$\varphi(\psi(x) + \theta) = 0, \quad (71)$$

vagyis a φ függvény a $\psi + \theta$ függvény értékalmazán egyenlő a zérus függvénnyel. Ha a $\varphi + \psi + \theta = id_{\mathbb{R}}$ relációt is figyelembe vesszük, akkor belátható, hogy a $\psi + \theta$ függvény leszűkítése saját értékalmazára az azonos függvény. A ψ függvény folytonos, tehát az \mathbb{R} -en felvett értékeinek halmaza egy I intervallum. A ψ függvény (65) multiplikatív tulajdonsága alapján $\psi(f(x)) = -\psi(x)$, ami azt jelenti, hogy az I intervallum szimmetrikus, vagyis ha $\alpha = \sup I$, akkor $\beta = \inf I = -\alpha$, ahol $0 \leq \alpha \leq \infty$. A $\psi + \theta$ függvény folytonos, növekvő és a $(\theta - \alpha, \theta + \alpha)$ intervallumon identikus, így

$$\psi(x) = \begin{cases} -\alpha, & \text{ha } x \leq \theta - \alpha, \\ x - \theta, & \text{ha } \theta - \alpha < x < \theta + \alpha, \\ \alpha, & \text{ha } x \geq \theta + \alpha, \end{cases} \quad (72)$$

és a $\varphi + \psi + \theta = id_{\mathbb{R}}$ összefüggés alapján

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - \theta + \alpha, & \text{ha } x \leq \theta - \alpha, \\ 0, & \text{ha } \theta - \alpha < x < \theta + \alpha, \\ x - \theta - \alpha, & \text{ha } x \geq \theta + \alpha, \end{cases} \quad (73)$$

Az iteráltak formulájából $f = u \cdot \varphi - \psi + \theta$, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} u \cdot (x - \theta + \alpha) + \theta + \alpha, & \text{ha } x \leq \theta - \alpha, \\ 2 \cdot \theta - x, & \text{ha } \theta - \alpha < x < \theta + \alpha, \\ u \cdot (x - \theta - \alpha) + \theta - \alpha, & \text{ha } x \geq \theta + \alpha, \end{cases} \quad (74)$$

Ellenőrzés után ezek a függvények mind folytonos megoldásnak bizonyulnak. Vagyis igazoltuk a következő tételt:

3.46. Tétel. *Ha $-1 \neq u < 0$, akkor a (69) függvényegyenlet folytonos megoldásai mind (74) alakúak, ahol $0 \leq \alpha \leq \infty$ és $\theta = \frac{c}{2(u-1)}$.*

Fordítva, minden (74) alakú függvény folytonos megoldása függvényegyenletünknek.

Könnyen belátható a következő:

3.47. Megjegyzés. Az $f_1(x) = ux - \frac{c}{2}$ és az $f_2(x) = -x + \frac{c}{u-1}$ képletekkel értelmezett lineáris megoldások is előállíthatók a (74) formulák segítségével $\alpha = 0$, illetve $\alpha = \infty$ esetén.

Az $u < 0$ feltétel szükséges a (69) egyenlet (74) alakú megoldásainak létezéséhez $\alpha > 0$ esetén, ugyanis ellenkező esetben f nem lenne szigorúan monoton.

Az f_1 és f_2 függvények segítségével a (74) képlettel értelmezett megoldásokat a következő alakban is írhatjuk:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) + \alpha \cdot (u + 1), & \text{ha } x \leq \theta - \alpha, \\ f_2(x), & \text{ha } \theta - \alpha < x < \theta + \alpha, \\ f_1(x) - \alpha \cdot (u + 1), & \text{ha } x \geq \theta + \alpha, \end{cases} \quad (75)$$

A 6. ábrán láthatjuk a két lineáris megoldás és egy $\alpha > 0$ valós számnak megfelelő, (74) képlettel megadott megoldás grafikus képét.

③ Az $u_1 + u_2 = 0$, $0 \neq |u_1| \neq 1$ aleset Vezessük be a $u = |u_1| = |u_2|$ jelölést! Feltételünk $0 < u \neq 1$ alakban is írható. Egyenletünk pedig

$$f \circ f - u^2 \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0. \quad (76)$$

A 26. lemma szerint egyenletünk minden folytonos megoldásának pontosan egy fixpontja van, a $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$. Az egyenlet két lineáris megoldása: $f_1(x) = u \cdot (x - \theta) + \theta$ és $f_2(x) = -u \cdot (x - \theta) + \theta$. Továbbá megállapítható, hogy ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (76) egyenletnek, akkor $f(f(x)) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$.

A (76) függvényegyenlet szigorúan növekvő megoldásai.

Tételezzük fel, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan növekvő megoldása a (76) függvényegyenletnek, továbbá rögzítsünk egy x_0 pontot a (θ, ∞) intervallumból és használjuk az $x_n = f^{[n]}(x_0)$ jelölést! A 3.17. tétel ① alpontja szerint az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton. Az f szigorúan növekvő és θ fixpontja, így θ alsó korlátja sorozatunknak, ezért az $\{x_n\}_{n \geq 1}$ és az $\{x_{-n}\}_{n \geq 1}$ sorozatok egyike szigorúan csökkenő és konvergens, így a 3.19. tétel alapján határértéke éppen f egyetlen fixpontja, a θ , a másik sorozat pedig tart a $+\infty$ felé. Tehát

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}) = (\theta, \infty) \quad (77)$$

A $\operatorname{sgn}(x_2 - x_0) = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0)$ alapján belátható, hogy $u > 1$ esetén az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan növekvő, míg $0 < u < 1$ esetén szigorúan csökkenő.

Ha $u > 1$, akkor $\theta < x_0 < x_1 < x_2$ és belátható, hogy az f függvény $[x_0, x_1)$ intervallumon felvett értékei meghatározzák a függvény értékeit az egész (θ, ∞) intervallumon. Pontosabban, ha $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$, $g(x) = f(x)$ az f függvény $[x_0, x_1]$ intervallumra vett bijektív leszűkítése, akkor a g és inverz függvényének segítségével kifejezhetjük az f függvény bármely (θ, ∞) intervallumon felvett értékét. Valóban, ha $x \in (\theta, \infty)$, akkor, mivel az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan növekvő és fennáll a (77) egyenlőség, pontosan egy olyan $n \in \mathbb{Z}$ létezik, amelyre fennáll az $x \in [x_{2n}, x_{2n+2})$ összefüggés. Ha $x_{2n} \leq x < x_{2n+1}$, akkor $f^{[2n]}(x_0) \leq x < f^{[2n]}(x_1) \Leftrightarrow x_0 \leq f^{[-2n]}(x) < x_1$. Ha $x_{2n+1} \leq x < x_{2n+2}$, akkor $f^{[2n]}(x_1) \leq x < f^{[2n]}(x_2) \Leftrightarrow x_1 \leq f^{[-2n]}(x) < x_2$. Ezek figyelembevételével az $f(x)$ -et a következőképpen fejezhetjük ki:

$$f(x) = \begin{cases} f^{[2n]}(g(f^{[-2n]}(x))) & , \text{ ha } x_0 \leq f^{[-2n]}(x) < x_1 \\ f^{[2n+2]}(g^{-1}(f^{[-2n]}(x))) & , \text{ ha } x_1 \leq f^{[-2n]}(x) < x_2 \end{cases} \quad (78)$$

Az $f^{[2n]}$ és $f^{[-2n]}$ iteráltak értékei megadhatók az egyenlet együttha-

tóinak segítségével:

$$f^{[2n]}(x) = u^{2n} \cdot (x - \theta) + \theta \qquad f^{[-2n]}(x) = u^{-2n} \cdot (x - \theta) + \theta$$

Hasonló formulák érvényesek $0 < u < 1$ esetén is. Ezek a képletek alkalmasak a (76) függvényegyenlet szigorúan növekvő megoldásainak leírására.

A következő lemma jellemzi azokat az $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ folytonos növekvő függvényeket, amelyek kielégítik az

$$f \circ f - u^2 \cdot id_{(\theta, \infty)} + c = 0 \qquad (79)$$

függvényegyenletet, ahol $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$. Megjegyezzük, hogy a 3.1. tétel bizonyításához hasonlóan igazolható, hogy a (79) függvényegyenlet egy $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ folytonos megoldása szigorúan monoton bijekció.

3.48. Lemma. *Ha $u \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén, $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$ és $h : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ a $h(x) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$ képlettel értelmezett függvény, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ szigorúan növekvő megoldása a (79) függvényegyenletnek, valamint ha $x_0 \in (\theta, \infty)$, $x_1 = f(x_0)$ és $x_2 = h(x_0)$, akkor $x_1 \in I(x_0, x_2)$, és a $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, $g(x) = f(x)$ képlettel megadott függvényre, fennáll az*

$$f(x) = \begin{cases} h^{[n]}(g(h^{[-n]}(x))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_1], \quad n \in \mathbb{Z} \\ h^{[n+1]}(g^{-1}(h^{[-n]}(x))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_2], \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad (80)$$

formula.

② *Fordítva, hogy ha $x_0 > \theta$, $x_2 = h(x_0)$ és $x_1 \in I(x_0, x_2)$, valamint $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ egy szigorúan növekvő bijekció, akkor a (80) formulával megadott $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ függvény szigorúan növekvő folytonos megoldása a (79) függvényegyenletnek.*

Bizonyítás. ① Tétélezzük fel, hogy $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ szigorúan növekvő folytonos megoldása az (79) függvényegyenletnek, így $f \circ f = h$. Ha $x_0 > \theta$, akkor $\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} > 0 \Rightarrow \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} > 0$, vagyis:

$\operatorname{sgn}(x_1 - x_0) = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1) = \operatorname{sgn}(x_2 - x_0) = \operatorname{sgn}(u^2 - 1)$,
tehát $x_1 \in I(x_0, x_2)$. Ha $u > 1$ a (80) megegyezik az (78) formulával, míg $0 < u < 1$ esetén hasonló módon igazolható.

② Fordítva, $h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_1]$, $n \in \mathbb{Z}$ esetén, $g(h^{[-n]}(x)) \in I[x_1, x_2]$.
 $h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_2]$, $n \in \mathbb{Z}$ esetén pedig $g^{-1}(h^{[-n]}(x)) \in I[x_0, x_1]$.
Következik:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \begin{cases} h^{[n+1]}(g^{-1}(g(h^{[-n]}(x)))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_1], n \in \mathbb{Z} \\ h^{[n+1]}(g(g^{-1}(h^{[-n]}(x)))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_2], n \in \mathbb{Z} \end{cases} = \\ &= h(x), \quad \forall x \in (\theta, \infty), \end{aligned}$$

vagyis f megoldása a (79) egyenletnek. Figyelembe véve, hogy h bijekció következik, hogy f is az. Ha $n \in \mathbb{Z}$ esetén bevezetjük az

$$x_n = \begin{cases} h^{[k]}(x_0) & , \text{ ha } n = 2k \\ h^{[k]}(x_1) & , \text{ ha } n = 2k + 1 \end{cases}$$

valós számokat, akkor az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan növekvő, ha $u > 1$ ($\Leftrightarrow x_0 < x_2$), és szigorúan csökkenő, ha $0 < u < 1$ ($\Leftrightarrow x_0 > x_2$). A (80) szerint belátható, hogy $f(x_n) = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, továbbá, hogy $f|_{I[x_n, x_{n+1}]}$ szigorúan növekvő és ráképezi az $I[x_n, x_{n+1}]$ intervallumot az $I[x_{n+1}, x_{n+2}]$ intervallumra, így az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorú monotonitása miatt következik, hogy f is szigorúan növekvő. Az $f : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ szigorúan monoton és intervallumnak intervallumra képezése, így a 3.1. tétel után tett megjegyzés alapján folytonos. Ezzel beláttuk a fordított állítást is. ♣

A 7. ábra a (79) függvényegyenlet egy megoldását szemlélteti, amelyet $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ szigorúan növekvő bijekció a (80) formula

szerinti meghosszabbításával kaptunk. Ha a 3.48. lemma ① alpontjának jelöléseit használjuk, akkor $f(x_1) - f_1(x_1) = h(x_0) - f_1(x_1) = -u \cdot (f(x_0) - f_1(x_0))$, ami azt jelenti, hogy az $y = f_1(x)$ egyenes vagy elválasztja (x_0, x_1) és (x_1, x_2) pontokat, vagy mindkettő illeszkedik rá. Ha f folytonos megoldása az (79) függvényegyenletnek és $(x_0, x_1) \notin \mathcal{G}_{f_1}$, akkor létezik $x'_0 \in (x_0, x_1)$ úgy, hogy $x'_1 = f(x'_0) = f_1(x'_0)$, valamint $x'_2 = f(x'_1) = h(x'_0) = f_1(f_1(x'_0)) = f_1(x'_1)$, ami azt jelenti, hogy minden folytonos megoldás esetén választható úgy az x_0 , hogy $(x_0, x_1), (x_1, x_2) \in \mathcal{G}_{f_1}$. Egy ilyen megválasztás esetén szerkesztettük ábránkat. Másrésztől azt is megjegyezhetjük, hogy

$$\frac{f(f(x)) - \theta}{x - \theta} = u^2 \quad \text{és} \quad \frac{f(f(f(x))) - \theta}{f(f(x)) - \theta} = \frac{f(x) - \theta}{x - \theta},$$

ami azt jelenti, hogy \mathcal{G}_f invariáns a (θ, θ) középpontú és u^2 hányadosú hasonlósági transzformációra nézve. Ha megrajzoljuk az (x_0, x_1) és (x_2, x_3) pontok közötti görbéivet, akkor ezt meghosszabbíthatjuk mindkét irányba az u^2 és u^{-2} hányadosú és (θ, θ) középpontú hasonló transzformáltjaival stb. A g bijekció grafikus képe adja az (x_0, x_1) és (x_1, x_2) pontok közötti ívet, mivel $x \in I[x_1, x_2]$ esetén $f(x) = f(f(f^{-1}(x))) = u^2 \cdot g^{-1}(x) - c$, az (x_1, x_2) és (x_2, x_3) pontok közötti ív \mathcal{G}_g -ből első szögfelezőre vonatkozó tükrözéssel, u^2 hányadosú Ox tengelyű merőleges affinitással és végül $-c$ egységnyi Ox tengelyre merőleges eltolással kapható meg.

3.49. Következmény. Legyen $u \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}$, továbbá $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$ és $h : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ a $h(x) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$ képlettel értelmezett függvény! Ha $x_0 \in (\theta, \infty)$ egy rögzített valós szám és $x_2 = h(x_0)$, jelöljük $B[x_0, x_2]$ -vel azon $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, szigorúan növekvő bijekciók halmazát, amelyeknél $x_1 \in I(x_0, x_2)$, pontosabban $B[x_0, x_2] = \bigcup_{x_1 \in I(x_0, x_2)} \mathcal{B}_{\nearrow}(I[x_0, x_1], I[x_1, x_2])$. Jelölje $\mathcal{H}_{\nearrow(\theta, \infty)}$

a (79) függvényegyenlet szigorúan növekvő megoldásainak halmazát! A 3.48. lemma alapján definiálható a $\Phi_{u,c} : B[x_0, x_2] \rightarrow \mathcal{H}_{\nearrow(\theta, \infty)}$ függvény, amely egy $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ szigorúan növekvő bijekcióhoz a $B[x_0, x_2]$ halmazból, az (80) formulával megadott f függvényt rendel hozzá, azaz $\Phi_{u,c}(g) = f$. A 3.48. lemma ① alpontja szerint a $\Phi_{u,c}$ függvény szürjektív.

A következő lemma, ($\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$ esetén), kapcsolatot teremt az

$$f \circ f - u^2 \cdot id_{(-\infty, \theta)} + c = 0 \quad (81)$$

függvényegyenlet szigorúan növekvő - és a (79) függvényegyenlet szigorúan növekvő megoldásai között.

3.50. Lemma. *Ha $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}$ és $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$, akkor igazak a következő állítások:*

- ① *Ha $\tau : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ szigorúan növekvő megoldása a (79) függvényegyenletnek, akkor a $\tau^* : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$, $\tau^*(x) = 2\theta - \tau(2\theta - x)$ függvény szigorúan növekvő megoldása a (81) egyenletnek.*
- ② *Ha $v : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$ szigorúan növekvő megoldása a (81) egyenletnek, akkor az $v^* : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$, $v^*(x) = 2\theta - v(2\theta - x)$ függvény szigorúan növekvő megoldása a (79) függvényegyenletnek.*
- ③ *Fennállnak a következő összefüggések: $(\tau^*)^* = \tau$ és $(v^*)^* = v$.*

Bizonyítás. A monotonitásra vonatkozó állítások nyilvánvalóak.

① Ha $x \in (-\infty, \theta)$, akkor $\tau^*(\tau^*(x)) = 2\theta - \tau(2\theta - (2\theta - x)) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$, vagyis τ^* megoldása a (81) függvényegyenletnek. Hasonlóan igazolható a ② állítás is. A ③ összefüggései azonnal következnek a τ^* és az v^* függvények definíciójából. ♣

Ha az f függvény szigorúan növekvő megoldása a (76) függvényegyenletnek, akkor az f megfelelő leszűkítései megoldásai a (79) és a (81) függvényegyenletnek. Az állítás fordítottja is igaz, vagyis a

(79) és a (81) függvényegyenletek szigorúan növekvő megoldásaiból összerakható a (76) függvényegyenlet egy megoldása. A következő tétel megadja a (76) függvényegyenlet szigorúan növekvő megoldásainak halmazát. A tételben használjuk a 3.49. következményben és a 3.50. lemmában bevezetett jelöléseket.

3.51. Tétel. *Ha $u \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}$, és $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$, továbbá, ha rögzítünk egy $x_0 \in (\theta, \infty)$ valós számot, és $x_2 = u^2 \cdot x_0 - c$, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan növekvő megoldása a (76) függvényegyenletnek, akkor létezik két szigorúan növekvő bijekció: $g_1, g_2 \in B[x_0, x_2]$ úgy, hogy a $\tau = \Phi_{u,c}(g_1)$ és az $v = \Phi_{u,c}(g_2)$ függvényekre fennáll a következő formula:*

$$f(x) = \begin{cases} \tau(x) & , \text{ ha } x \in (\theta, \infty) \\ \theta & , \text{ ha } x = \theta \\ v^*(x) & , \text{ ha } x \in (-\infty, \theta) \end{cases} \quad (82)$$

② *Fordítva, ha $g_1, g_2 \in B[x_0, x_2]$ és $\tau = \Phi_{u,c}(g_1)$, illetve $v = \Phi_{u,c}(g_2)$, akkor a (82) formulával megadott f függvény szigorúan növekvő folytonos megoldása a (76) függvényegyenletnek.*

③ *Az (76) egyenlet szigorúan növekvő megoldásainak \mathcal{H}_{\nearrow} halmaza megegyezik a (82) formulával megadott függvények halmazával, ahol $\tau, v \in \Phi_{u,c}(B[x_0, x_2])$.*

Bizonyítás. ① Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ szigorúan növekvő megoldása a (76) függvényegyenletnek, akkor mivel θ fixpontja f -nek követkeik, hogy $f|_{(\theta, \infty)}$ szigorúan növekvő megoldása a (79) függvényegyenletnek, illetve $f|_{(-\infty, \theta)}$ szigorúan növekvő megoldása a (81) egyenletnek. A 3.49. következményben láttuk, hogy a $\Phi_{u,c} : B[x_0, x_2] \rightarrow \mathcal{H}_{\nearrow(\theta, \infty)}$ függvény szürjektív. Mivel $f|_{(\theta, \infty)} \in \mathcal{H}_{\nearrow(\theta, \infty)}$ és a 3.50. lemma alapján $(f|_{(-\infty, \theta)})^* \in \mathcal{H}_{\nearrow(\theta, \infty)}$, következik, hogy létezik $g_1, g_2 \in B[x_0, x_2]$ úgy, hogy $\Phi_{u,c}(g_1) = f|_{(\theta, \infty)}$, illetve $\Phi_{u,c}(g_2) = (f|_{(-\infty, \theta)})^*$. Az utóbbiból a 3.50. lemma ③

alpontja alapján az $f|_{(-\infty, \theta)} = (\Phi_{u,c}(g_2))^*$ egyenlőséget kapjuk, ezzel igazoltuk a (82) formulát.

② A megadott feltételek mellett a 3.48. lemma és a 3.50. lemma figyelembevételével τ megoldása a (79) és v^* megoldása a (81) függvényegyenletnek. Ezek szerint

$$\begin{aligned}\tau(\tau(x)) &= u^2x - c, \quad \forall x \in (\theta, \infty), \\ v^*(v^*(x)) &= u^2x - c, \quad \forall x \in (-\infty, \theta),\end{aligned}$$

vagyis a (82) formulával megadott f függvényre igaz az

$$f(f(x)) = u^2x - c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

egyenlőség, ami igazolja, hogy f megoldása a (76) függvényegyenletnek. Az a tény, hogy f szigorúan növekvő következik a τ és v^* függvények szigorú növekvő voltából és abból, hogy ha $x < \theta$, akkor $v^*(x) < \theta$, illetve ha $x > \theta$, akkor $\tau(x) > \theta$. Az f megoldása a (76) függvényegyenletnek, ahonnan következik, hogy $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, így abból, hogy szigorúan monoton is, következik folytonossága, a 3.1. tétel után tett megjegyzés alapján.

③ Ez a tény az előző két alpont következménye. ♣

A (76) függvényegyenlet szigorúan csökkenő megoldásai.

Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ egy szigorúan csökkenő folytonos megoldása a (76) függvényegyenletnek, akkor mint láttuk az a eset bevetőjében, fixpontja $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$, és $f(f(x)) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$. Jelöljük ebben a szakaszban h -val az $f^{[2]}$ függvényt, vagyis $h(x) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$. A h függvény szigorúan növekvő és egyetlen fixpontja θ . Rögzítsünk itt is egy $x_0 \in (\theta, \infty)$ pontot, és legyen $x_n = f^{[n]}(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$! A 3.18. következmény ② alpontja szerint az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatok ellentétes értelemben szigorúan monotonok. Továbbá $x_{2n} = h^{[n]}(x_0)$, így az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatnak θ alsó korlátja. Hasonlóképpen $x_{2n+1} = h^{[n]}(x_1)$ és $x_1 < \theta$,

így az $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat θ által felülről korlátos. Másrésztől $h^{[n]}(x) = u^{2n} \cdot (x - \theta) + \theta$, ami azt mutatja, hogy $u > 1$ esetén:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n} &= \theta, & \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n+1} &= \theta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} &= -\infty, \end{aligned}$$

illetve $0 < u < 1$ esetén:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= \theta, & \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} &= \theta, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n} &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n+1} &= -\infty. \end{aligned}$$

Ezen megállapítások alapján felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n}, x_{2n+2}] &= (\theta, +\infty), \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n-1}, x_{2n+1}] &= (-\infty, \theta). \end{aligned} \tag{83}$$

Szintén igazolható, hogy

$$f(I[x_{2n}, x_{2n+2}]) = I[x_{2n+1}, x_{2n+3}], \quad f(I[x_{2n-1}, x_{2n+1}]) = I[x_{2n}, x_{2n+2}].$$

Észrevételeink összegzéseként kijelenthető, hogy az f függvény minden $\mathbb{R} \setminus \{\theta\}$ halmazon felvett értékét kifejezhetjük a $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$, $g(x) = f(x)$ függvény segítségével, amely tulajdonképpen az f függvény $I[x_0, x_2]$ intervallumra történő bijektív leszűkítése. Pontosabban, a (83) összefüggések alapján, megállapítható, hogy minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\theta\}$ esetén, pontosan egy $n \in \mathbb{Z}$ létezik úgy, hogy $x \in I[x_{2n}, x_{2n+2}] \cup I[x_{2n+1}, x_{2n+3}]$.

Ha $x \in I[x_{2n}, x_{2n+2}]$, akkor $h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_2]$, így

$$f(x) = f^{[2n]}(f(f^{[-2n]}(x))) = h^{[n]}(g(h^{[-n]}(x))),$$

ha pedig $x \in I[x_{2n+1}, x_{2n+3}]$, akkor $h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_3]$, így

$$f(x) = f^{[2n+2]}(f^{-1}(f^{[-2n]}(x))) = h^{[n+1]}(g^{-1}(h^{[-n]}(x))).$$

Következtetéseinket tételbe foglalhatjuk:

3.52. Tétel. Ha $u \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén, $\theta = \frac{c}{u^2 - 1}$ és $h : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ a $h(x) = u^2 \cdot (x - \theta) + \theta$ képlettel értelmezett függvény, akkor igazak a következő állítások:

① Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan csökkenő megoldása a (76) függvényegyenletnek, valamint ha $x_0 \in (\theta, \infty)$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = h(x_0)$, és $x_3 = h(x_1)$, akkor a $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$, $g(x) = f(x)$ képlettel megadott függvényre, fennáll az

$$f(x) = \begin{cases} h^{[n]}(g(h^{[-n]}(x))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_2], \quad n \in \mathbb{Z} \\ \theta & , x = \theta \\ h^{[n+1]}(g^{-1}(h^{[-n]}(x))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_3], \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (84)$$

formula.

② Fordítva, ha $x_0 > \theta$, $x_2 = h(x_0)$, $x_1 < \theta$ és $x_3 = h(x_1)$, továbbá ha $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$ egy szigorúan csökkenő bijekció, akkor a (84) formulával megadott $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan csökkenő folytonos megoldása a (76) függvényegyenletnek.

Bizonyítás. ① Ez az alpont igazolást nyert a tétel előkészítésében.

② A megadott feltételek mellett, ha $h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_2]$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor $g(h^{[-n]}(x)) \in I[x_1, x_3]$. A másik esetben, ha $h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_3]$, $n \in \mathbb{Z}$, akkor $g^{-1}(h^{[-n]}(x)) \in I[x_0, x_2]$. Következik:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \begin{cases} h^{[n+1]}(g^{-1}(g(h^{[-n]}(x)))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_0, x_2], \quad n \in \mathbb{Z} \\ \theta & , x = \theta \\ h^{[n+1]}(g(g^{-1}(h^{[-n]}(x)))) & , h^{[-n]}(x) \in I[x_1, x_3], \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases} = \\ &= h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

vagyis f megoldása a (76) egyenletnek.

Figyelembe véve, hogy h bijekció, az $f \circ f = h$ összefüggésből következik, hogy f szintén bijekció.

Ha $n \in \mathbb{Z}$ esetén bevezetjük az

$$x_n = \begin{cases} h^{[k]}(x_0) & , \text{ ha } n = 2k \\ h^{[k]}(x_1) & , \text{ ha } n = 2k + 1 \end{cases}$$

valós számokat, akkor az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ellentétes értelemben szigorúan monoton sorozatok. Mivel minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, $f(x_n) = x_{n+1}$ és $f|_{I[x_n, x_{n+2}]}$ szigorúan csökkenően képezi rá az $I[x_n, x_{n+2}]$ intervallumot az $I[x_{n+1}, x_{n+3}]$ intervallumra, az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatok ellentétes értelemben vett szigorú monotonitása miatt következik, hogy f is szigorúan csökkenő a $(-\infty, \theta)$ és a (θ, ∞) intervallumokon és egyiket a másikra képezi, sőt abból, hogy θ az f függvény fixpontja megállapítható, hogy f szigorúan csökkenő.

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan csökkenő és intervallumnak intervallumra képzése, így a 3.1. tétel után tett megjegyzés alapján folytonos. Ezzel beláttuk a fordított állítást is. ♣

Az 8. ábra a (76) függvényegyenlet egy szigorúan csökkenő megoldásának konstruálását szemlélteti. Az $f(f(x)) - f_2(f(x)) = u \cdot (f(x) - f_2(x))$ összefüggés alapján megjegyezhető, hogy tetszőleges, de rögzített, $x \in \mathbb{R}$ esetén az $(f^{[n]}(x), f^{[n+1]}(x))$ pontok, minden n egész számra, vagy a \mathcal{G}_{f_2} egyenes ugyanazon oldalán helyezkednek el, vagy mind illeszkednek a \mathcal{G}_{f_2} -re. Ezen függvények grafikus képe is invariáns a (θ, θ) középpontú és u^2 hányadosú hasonlósági transzformációra nézve, vagyis a tulajdonság fennáll a (76) függvényegyenlet minden megoldására. Végül megemlítjük, hogy a ③ esetben függvényegyenletünknek a kontinuum számosságával megegyező számosságú megoldáshalmaza van. Eddig mind olyan eseteket tanulmányoztunk, amelyekben az u_1 és u_2 gyökök közül az egyik negatív. Az lenne természetes, hogy merítsük ki a negatív gyökök eseteit, de mivel az $u_1 < u_2 < -1$ és a $-1 < u_1 < u_2 < 0$ esetek tárgyalásában felhasználható a következő eset, ezért eltérünk a természetesebbnek tűnő úttól.

④ Az $1 < u_1 < u_2$ és $0 < u_1 < u_2 < 1$ esetek Tételezzük fel, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek a címfeltételek valamelyikében. Abból, hogy $u_1 + u_2 > 0$ és $u_1 u_2 > 0$ a (62) egyenlőség alapján azonnal belátható, hogy az f függvény szigorúan növekvő. A

3.44. lemma harmadik alpontja szerint az f függvénynek pontosan egy fixpontja van és ez $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$. Eddigi észrevételeink alapján felírhatjuk az $f((-\infty, \theta)) = (-\infty, \theta)$ és $f((\theta, \infty)) = (\theta, \infty)$ egyenlőségeket. A 3.43. lemma szerint a (63) formulában szereplő φ és ψ függvények monoton növekvők. Továbbá a (63) összefüggésből $n = 0, 1$ és $x = \theta$ esetén következik, hogy $\varphi(\theta) = \psi(\theta) = 0$. Most beláthatjuk a következő lemmát:

3.53. Lemma. *Ha $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$, és $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $f_1(x) = u_1x + \frac{c}{u_2 - 1}$ és $f_2(x) = u_2x + \frac{c}{u_1 - 1}$ a (62) lineáris megoldásai, akkor*

$$(f(x) - f_1(x)) \cdot (f(x) - f_2(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (85)$$

② *Teljesülnek a következő egyenlőtlenségek (lásd a 3.34. jelölést):*

$$u_1 \leq H(f) \leq u_2. \quad (86)$$

Bizonyítás. ① Láttuk φ és ψ növekvő függvények, így minden $x \neq \theta$ esetén:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(\theta)}{x - \theta} \cdot \frac{\psi(x) - \psi(\theta)}{x - \theta} \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x)\psi(x) \geq 0,$$

ahonnan a (64) összefüggések alapján következik a (85).

② A (63) alapján fennállnak:

$$\begin{cases} \varphi + \psi + \theta & = & id_{\mathbb{R}} \\ u_1 \cdot \varphi + u_2 \cdot \psi + \theta & = & f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H(\varphi) + H(\psi) & = & 1 \\ u_1 \cdot H(\varphi) + u_2 \cdot H(\psi) & = & H(f) \end{cases},$$

ahonnan $H(\varphi)$ és $H(\psi)$ kifejezhető, így

$$\frac{H(f) - u_1}{u_2 - u_1} \geq 0, \quad \frac{u_2 - H(f)}{u_2 - u_1} \geq 0 \Rightarrow (H(f) - u_1)(H(f) - u_2) \leq 0,$$

ami igazolja a (86) egyenlőtlenséget. ♣

Az előző lemma ② alpontjából is következtethetünk arra, hogy ebben az esetben a (62) függvényegyenletnek csak szigorúan növekvő megoldásai lehetnek. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor az $f((\theta, \infty)) = (\theta, \infty)$ egyenlőség alapján, az f függvény bijektív leszükítése a (θ, ∞) intervallumra, megoldása a következő függvényegyenletnek:

$$\tau \circ \tau - (u_1 + u_2) \cdot \tau + u_1 u_2 \cdot id_{(\theta, \infty)} + c = 0 \quad (87)$$

Megjegyezzük, hogy az (87) függvényegyenlet $\tau : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ folytonos megoldásai is rendelkeznek a 3.53. lemmában szereplő (85) és (86) tulajdonságokkal. Ennek bizonyítása majdnem azonos az említett lemma bizonyításával.

Ha rögzítünk egy x_0 pontot az (θ, ∞) intervallumból, és bevezetjük az $x_n = f^{[n]}(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ jelölést, akkor az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és alulról korlátos a θ által, másrésztől a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek egyike θ , a másik pedig $+\infty$, így

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}) = (\theta, \infty) \quad (88)$$

Megmutatjuk, hogy az f függvény minden (θ, ∞) intervallumon felvett értéke kifejezhető a $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, $g(x) = f(x)$ szigorúan növekvő bijekció értékeinek segítségével. Ha $x \in (\theta, \infty)$, annak alapján, hogy az $I[x_n, x_{n+1})$ intervallumok diszjunktak, a (88) összefüggés miatt, pontosan egy $n \in \mathbb{Z}$ létezik azzal a tulajdonsággal, hogy $x \in I[x_n, x_{n+1})$, így

$$f(x) = f^{[n+1]}(f^{[-n]}(x)) \quad (89)$$

Az $f^{[n]}$ függvény $I[x_0, x_1]$ intervallumot az $I[x_n, x_{n+1}]$ intervallumra képezi, ezért bijektív leszűkítése az $I[x_0, x_1]$ intervallumra a

$$g_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}], \quad g_{[n]}(x) = f^{[n]}(x)$$

függvény. Ez természetesen minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén lehetséges. A (63) és (64) összefüggések alapján

$$g_{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - g(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (g(x) - f_1(x)) + \theta,$$

A (89) és az előző összefüggés szerint az f függvényt a következőképpen fejezhetjük ki:

$$f(x) = g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)), \quad \forall x \in I[x_n, x_{n+1}], \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (90)$$

vagyis az f függvény (θ, ∞) intervallumon felvett értékei megadhatók a g bijekció segítségével.

A következő lemma bizonyos értelemben az előző észrevételek fordítottja.

3.54. Lemma. *Ha $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$, és $c \in \mathbb{R}$, továbbá ha $x_0 \in (\theta, \infty)$ és az x_1, x_2 valós számok teljesítik az*

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &\leq x_1 \leq f_2(x_0), \\ x_2 &= (u_1 + u_2)x_1 - u_1u_2x_0 - c \end{aligned} \quad (91)$$

feltételeket, és $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$, az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ egyenlőtlenséget kielégítő, tetszőleges bijekció, akkor a (87) függvényegyenletnek pontosan egy olyan folytonos megoldása létezik, amely a g függvény meghosszabbítása.

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy a (91) feltételeket teljesítő x_0, x_1 és x_2 valós számok esetén létezik olyan $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ bijekció,

amely teljesíti az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt. Ehhez elégséges belátni az $u_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \leq u_2$ egyenlőtlenséget, mert akkor a lineáris bijekció is teljesíti a kért egyenlőtlenséget. Valóban a (91) feltételek alapján:

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} - u_1 &= \frac{(u_2 - 1) \cdot (x_1 - f_1(x_0))}{x_1 - x_0} \geq 0, \\ \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} - u_2 &= \frac{(u_1 - 1) \cdot (x_1 - f_2(x_0))}{x_1 - x_0} \leq 0, \end{aligned}$$

vagyis fennáll az említett egyenlőtlenség.

Most rátérünk a lemma bizonyítására. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén bevezetjük az

$$x_n = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x_0) - x_1) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (x_1 - f_1(x_0)) + \theta, \quad (92)$$

jelölést. Az (91) feltétel szerint az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat tagjai a (θ, ∞) intervallum elemei. Könnyen belátható, hogy az $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$ feltételek mellett az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ szigorúan monoton (az első feltétel esetén szigorúan növekvő, a másodiknál szigorúan csökkenő), valamint a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek egyike θ , a másik pedig $+\infty$, aminek következtében fennáll a (θ, ∞) intervallum (88) -ban megadott diszjunkt felbontása.

Másrészt a $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltétel miatt a g bijekció szigorúan növekvő és, mivel intervallumnak intervallumra képzése, folytonos is. Ennek következményeként, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, az $I[x_0, x_1]$ intervallumon a

$$g_{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - g(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (g(x) - f_1(x)) + \theta,$$

képlettel, folytonos valós függvényt adhatunk meg. A

$$H(g_{[n]}) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (u_2 - H(g)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (H(g) - u_1) > 0$$

alapján belátható, hogy $g_{[n]}$ szigorúan növekvő, így értékhalmaza az $I[x_n, x_{n+1}]$ intervallum, vagyis a $g_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}]$ függvény bijekció. A $\tau : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ függvényt a (90) képlethez hasonló formulával értelmezzük:

$$\tau(x) = g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)), \quad \forall x \in I[x_n, x_{n+1}], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (93)$$

Mivel $g_{[n+1]}$ és $g_{[n]}$ szigorúan növekvő folytonos bijekciók, következik, hogy $\tau(I[x_n, x_{n+1}]) = I[x_{n+1}, x_{n+2}]$, illetve

$$\begin{aligned} \tau((\theta, \infty)) &= \tau\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau(I[x_n, x_{n+1}]) = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{n+1}, x_{n+2}] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = (\theta, \infty) \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy a τ függvény szigorúan növekvő, ezért mivel intervallumnak intervallumra képzése is, következik, hogy folytonos. Most megmutatjuk, hogy a τ függvény megoldása a (87) függvényegyenletnek. Valóban, ha $x \in I[x_n, x_{n+1}]$, akkor:

$$\begin{aligned} &\tau(\tau(x)) - (u_1 + u_2) \cdot \tau(x) + u_1 u_2 x = \\ &= g_{[n+2]}(g_{[n]}^{-1}(x)) - (u_1 + u_2) \cdot g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)) + u_1 u_2 \cdot g_{[n]}(g_{[n]}^{-1}(x)) = \\ &= u_1^n \cdot \frac{u_1^2 - (u_1 + u_2)u_1 + u_1 u_2}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(g_{[n]}^{-1}(x)) - g(g_{[n]}^{-1}(x))) + \\ &\quad + u_2^n \cdot \frac{u_2^2 - (u_1 + u_2)u_2 + u_1 u_2}{u_2 - u_1} \cdot (g(g_{[n]}^{-1}(x)) - f_1(g_{[n]}^{-1}(x))) + \\ &\quad + \theta \cdot (1 - u_1 - u_2 + u_1 u_2) = -c, \end{aligned}$$

ami igazolja állításunkat. Könnyen belátható, hogy ha $x \in I[x_0, x_1]$, akkor $\tau(x) = g(x)$, vagyis τ folytonos meghosszabbítása a g függvénynek.

Végül megmutatjuk, hogy a (87) függvényegyenlet egyetlen megoldása rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy folytonos meghosszabbítása g -nek. Tételezzük fel, hogy v folytonos megoldása a (87) függvényegyenletnek és $v(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$. Az v értelmezési

tartománya (θ, ∞) , és mivel $v \circ v$ is értelmezett, fenn kell állnia az $v((\theta, \infty)) \subseteq (\theta, \infty)$ relációnak. Másrésztől v iteráltjait a

$$v^{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - v(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (v(x) - f_1(x)) + \theta,$$

formulával állíthatjuk elő, ahonnan következik, hogy

$$v^{[n]}(x) = g_{[n]}(x), \quad \forall x \in I[x_0, x_1] \quad \text{és} \quad v^{[n]}(x_0) = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

így, ha $x \in I[x_n, x_{n+1})$, akkor

$$v(x) = v^{[n+1]}(v^{[-n]}(x)) = g_{[n+1]}(g_{[-n]}(x)) = \tau(x).$$



3.55. Jelölés. Ha u_1, u_2, x_0, x_1, x_2 valós számok teljesítik a 3.54 lemmában megadott feltételeket, valamint a $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ bijekcióra fennáll az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ egyenlőtlenség, akkor azt a folytonos megoldását a (87) függvényegyenletnek, amelyet g meghosszabbításával nyerünk, ebben az alfejezetben \tilde{g} -vel fogjuk jelölni.

3.56. Tétel. Ha $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$, $c \in \mathbb{R}$, $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$ és $x_0 \in (\theta, \infty)$, akkor fennáll a következő állítás: A $\tau : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ függvény, akkor és csak akkor folytonos megoldása a (87) függvényegyenletnek, ha létezik $x_1 \in [f_1(x_0), f_2(x_0)]$ és egy az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljesítő $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, (ahol $x_2 = (u_1 + u_2)x_1 - u_1u_2x_0 - c$) bijekció, amelyre $\tau = \tilde{g}$.

Bizonyítás. Tételizzük fel, hogy τ folytonos megoldása a (87) függvényegyenletnek. Az $x_1 = \tau(x_0)$ és $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, $g(x) = \tau(x)$ esetén a 3.53. lemma bizonyításához hasonlóan igazolható a feltételek szükségessége. A feltételek elégséges voltát láttuk a 3.54. lemmában.



Kapcsolat teremthető a (87) és a

$$\tau \circ \tau - (u_1 + u_2) \cdot \tau + u_1 u_2 \cdot id_{(-\infty, \theta)} + c = 0 \quad (94)$$

függvényegyenlet megoldásai között.

3.57. Lemma. *Ha $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$, és $c \in \mathbb{R}$, továbbá ha $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $\tau : (\theta, \infty) \rightarrow (\theta, \infty)$ megoldása a (87) függvényegyenletnek, akkor az $\tau^* : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$, $\tau^*(x) = 2\theta - \tau(2\theta - x)$ függvény megoldása a (94) egyenletnek.*

② *Ha $v : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$ megoldása a (94) egyenletnek, akkor az $v^* : (-\infty, \theta) \rightarrow (-\infty, \theta)$, $v^*(x) = 2\theta - v(2\theta - x)$ megoldása az (87) függvényegyenletnek.*

③ *Fennállnak a következő összefüggések: $(\tau^*)^* = \tau$ és $(v^*)^* = v$.*

Bizonyítás. ① Ha $x \in (\theta, \infty)$, akkor

$$\tau^*(\tau^*(x)) = 2\theta - \tau(\tau(2\theta - x)) = (u_1 + u_2) \cdot \tau^* - u_1 u_2 x - c.$$

Hasonlóképpen igazolható a ② alpont is, míg a ③ azonnal következik a τ^* és v^* függvények definíciójából. ♣

Az előző eredmények segítségével megadhatjuk a (62) függvényegyenlet folytonos megoldásait.

3.58. Tétel. *Ha $1 < u_1 < u_2$, vagy $0 < u_1 < u_2 < 1$, és $c \in \mathbb{R}$, továbbá ha $x_0 \in (\theta, \infty)$, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek, továbbá ha $\tau = f|_{(\theta, \infty)}$ és $v = f|_{(-\infty, \theta)}$, akkor τ és v^* folytonos megoldásai a (87) függvényegyenletnek.*

② *Fordítva, ha τ és v folytonos megoldásai a (87) függvényegyenletnek,*

akkor

$$f(x) = \begin{cases} \tau(x) & , \text{ ha } x \in (\theta, \infty) \\ \theta & , \text{ ha } x = \theta \\ v^*(x) & , \text{ ha } x \in (-\infty, \theta) \end{cases} \quad (95)$$

folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek.

Bizonyítás. ① Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor mivel f szigorúan növekvő és θ fixpontja kövekezik, hogy $f((\theta, \infty)) \subseteq (\theta, \infty)$ és $f((-\infty, \theta)) \subseteq (-\infty, \theta)$, így τ megoldása a (87) függvényegyenletnek, míg v megoldása a (94) egyenletnek, ahonnan a 3.57. lemma szerint kövekezik a tétel állítása.

② A (87) függvényegyenlet minden folytonos megoldása szigorúan növekvő továbbá az $\{\tau^{[n]}(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és $\{v^{[n]}(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatok szigorúan monoton sorozatok, és mivel $\tau(x_0), v(x_0) \in [f_1(x_0), f_2(x_0)]$, következik hogy a két sorozat azonos értelemben szigorúan monoton, így $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{[n]}(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} v^{[n]}(x_0)$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} \tau^{[n]}(x_0) = \lim_{n \rightarrow -\infty} v^{[n]}(x_0)$. A határértékek egyike θ , a másik pedig $+\infty$. Ezekből következik, hogy $\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x > \theta}} \tau(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x > \theta}} v(x) = \theta$, ahonnan $\lim_{\substack{x \rightarrow \theta \\ x < \theta}} v^*(x) = \theta$, azaz a (95) képlettel értelmezett f függvény folytonos. Az a tény, hogy megoldása a (62) függvényegyenletnek, azonnali következménye annak, hogy τ megoldása a (87) függvényegyenletnek, míg v^* a (94) egyenletnek. ♣

⑤ A $0 < u_1 < 1 < u_2$ aleset Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása a (62) függvényegyenletnek ebben az alesetben, akkor az egyenlet alapján azonnal látható, hogy f szigorúan növekvő. Érvényesek a 3.42. tétel és a 3.43. lemma állításai. A 3.44. lemma alpontja szerint, ha f -nek van fixpontja, ez $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$, de természetesen előfordulhat, hogy nincs fixpontja a megoldásnak. A két lineáris megoldás, az

$f_1(x) = u_1 \cdot (x - \theta) + \theta$ és az $f_2(x) = u_2 \cdot (x - \theta) + \theta$, nyilván fixponttal rendelkező megoldások. A következő szakaszban a fixponttal rendelkező megoldásokat fogjuk meghatározni.

A (62) függvényegyenlet fixponttal rendelkező megoldásai a címfeltétel esetén. Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ fixponttal rendelkező megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor $x > \theta$ esetén az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és θ által alulról korlátos, mivel a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x)$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(x)$ határértékek egyike véges, ez a 3.19. tétel szerint f -nek fixpontja, vagyis θ . Másrésztől $\lim_{n \rightarrow \infty} u_1^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} u_2^n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_2^n = \infty$, továbbá a (63) szerint

$$f^{[n]}(x) = u_1^n \cdot \varphi(x) + u_2^n \cdot \psi(x) + \theta,$$

vagyis az előző állítás csak úgy lehetséges, hogy $\varphi(x) = 0$, vagy $\psi(x) = 0$. Ugyanakkor, mivel θ fixpontja f -nek következik, hogy $\varphi(\theta) = \psi(\theta) = 0$. A 3.43. lemma szerint a φ és ψ függvények növekvőek, így vagy

$$\varphi(t) = 0, \quad \forall t \in [\theta, x], \quad \text{vagy} \quad \psi(t) = 0, \quad \forall t \in [\theta, x],$$

amelyek a $\varphi(x) + \psi(x) = x - \theta$ feltétel miatt egyszerre nem teljesülhetnek. Ennek az a következménye, hogy

$$\varphi(x) = 0, \quad \forall x \in [\theta, \infty), \quad \text{vagy} \quad \psi(x) = 0, \quad \forall x \in [\theta, \infty),$$

ahonnan a (64) összefüggések alapján

$$f(x) = f_1(x), \quad \forall x \in [\theta, \infty), \quad \text{vagy} \quad f(x) = f_2(x), \quad \forall x \in [\theta, \infty).$$

Azonos gondolatmenettel kapjuk, $x < \theta$ esetén, a következőket:

$$f(x) = f_1(x), \quad \forall x \in (-\infty, \theta], \quad \text{vagy} \quad f(x) = f_2(x), \quad \forall x \in (-\infty, \theta].$$

Tehát a fixponttal rendelkező $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldásnak a következő alakúnak kell lennie:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & , \text{ ha } x \in (-\infty, \theta), \\ f_j(x) & , \text{ ha } x \in [\theta, \infty), \end{cases} \quad (96)$$

ahol $i, j \in \{1, 2\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy az i és j indexek tetszőleges megválasztása esetén a (96) alakú függvények folytonos megoldásai a (62) függvényegyenletnek. Tehát függvényegyenletünknek a $0 < u_1 < 1 < u_2$ feltétel mellett ez a négy fixponttal rendelkező megoldása van.

A (62) függvényegyenlet fixpont nélküli megoldásai a címfeltétel esetén. Ha az $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ fixpont nélküli folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor az $f(x) - x$ különbség előjeltartó az egész \mathbb{R} -en, aminek az a következménye, hogy az $\{f^{[n]}(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat minden $x \in \mathbb{R}$ esetén ugyanolyan típusú szigorúan monoton sorozat. A fixpont hiánya azt jelenti, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x)$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(x)$ határértékek egyike sem véges, tehát az egyik $-\infty$, a másik pedig $+\infty$, vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{[n]}(y) = \alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(x) &= \lim_{n \rightarrow -\infty} f^{[n]}(y) = -\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (97)$$

ahol α a $+\infty$, vagy $-\infty$ kiterjesztett valós számok egyike. Ezen megállapítások alapján igazolhatjuk a következő lemmát, amely fixpont nélküli megoldások néhány tulajdonságát tünteti fel.

3.59. Lemma. *Ha $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ egy fixpont nélküli megoldása az (62) függvényegyenletnek, $0 < u_1 < 1 < u_2$ esetén, akkor igazak a következő állítások:*

① Teljesül a következő egyenlőtlenségek közül az egyik:

$$\begin{aligned} f(x) < \min\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{vagy} \\ f(x) < \min\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{98}$$

② A $H(f)$ függvény korlátos:

$$u_1 \leq H(f) \leq u_2 \tag{99}$$

③ Ha rögzítjük az x_0 valós számot és minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $x_n = f^{[n]}(x_0)$, akkor az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan monoton és

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}) = \mathbb{R}. \tag{100}$$

Bizonyítás. ① A $\lim_{n \rightarrow \infty} u_1^n = \lim_{n \rightarrow -\infty} u_2^n = 0$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_2^n = \infty$ határértékek és a (63) figyelembevételével beláthatjuk, hogy a (97) csak úgy lehetséges, ha $\varphi(x) \cdot \psi(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vagyis a (64) szerint fennáll az

$$(f(x) - f_1(x)) \cdot (f(x) - f_2(x)) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

egyenlőtlenség, ahonnan az f , a $\min\{f_1, f_2\}$ és $\max\{f_1, f_2\}$ függvények folytonossága alapján következik a lemma állítása.

② Ennek bizonyítása azonos a 3.53. lemma ② alpontjának bizonyításával.

③ Láttuk f -nek nincs fixpontja és f szigorúan növekvő, így sorozatunk szigorúan monoton. A (97) alapján a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek egyike $-\infty$, a másik pedig $+\infty$, ahonnan következik a (100) összefüggés. 

Itt is az előző alesethez hasonlóan belátható, hogy a $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, $g(x) = f(x)$ függvény szigorúan növekvő bijekció, és ennek segítségével kifejezhető az f függvény minden értéke. Ezen észrevételek alapján megfogalmazhatjuk a következő tételt:

3.60. Tétel. *Ha $0 < u_1 < 1 < u_2$, $c, x_0 \in \mathbb{R}$ és az x_1, x_2 valós számok teljesítik a következő feltételeket:*

$$\begin{aligned} x_1 > \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\} \quad \text{vagy} \quad x_1 < \min\{f_1(x_0), f_2(x_0)\} \\ x_2 = (u_1 + u_2)x_1 - u_1u_2x_0 - c \end{aligned} \quad (101)$$

akkor tetszőleges $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljesítő bijekció esetén, létezik pontosan egy $\tau \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ fixpont nélküli megoldása a (62) függvényegyenletnek, amelyre $\tau(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$.

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy ha x_0, x_1 és x_2 eleget tesznek a (101) feltételeknek, akkor létezik olyan $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$ bijekció, amelyre teljesül az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltétel. Ehhez elégséges belátnunk, hogy fennáll az $u_1 \leq \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} \leq u_2$ egyenlőtlenség, mert ez esetben a lineáris bijekció is teljesíti a feltételt. Valóban, a (101) első része alapján:

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} - u_1 &= \frac{(u_2 - 1) \cdot (x_1 - f_1(x_0))}{x_1 - x_0} > 0, \\ \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0} - u_2 &= \frac{(u_1 - 1) \cdot (x_1 - f_2(x_0))}{x_1 - x_0} < 0, \end{aligned}$$

amelyekkel beláttuk egyenlőtlenségünket és így az ohajtott tulajdonságú g bijekciók létezését is. A tétel bizonyításhoz vezessük be a (92) formulával értelmezett $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozatot. Az

$$x_{n+1} - x_n = \frac{u_1^n(u_1 - 1)}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x_0) - x_1) + \frac{u_2^n(u_2 - 1)}{u_2 - u_1} \cdot (x_1 - f_1(x_0))$$

összefüggés alapján következik, hogy az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ szigorúan növekvő, ha $x_1 > \max\{f_1(x_0), f_2(x_0)\}$ és sz. csökkenő, ha $x_1 < \min\{f_1(x_0), f_2(x_0)\}$. Függetlenül, hogy melyik esetben vagyunk a (92) formula alapján belátható, hogy a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek közül az egyik $-\infty$, a másik pedig $+\infty$, ezért

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}. \quad (102)$$

Az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljsítő g bijekció szigorúan növekvő és, mivel intervallumnak intervallumra képzése, folytonos is. Ezért minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén, a

$$g_{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - g(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (g(x) - f_1(x)) + \theta$$

képlettel az $I[x_0, x_1]$ intervallumon folytonos valós függvényt adhatunk meg, amely a

$$H(g_{[n]}) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (u_2 - H(g)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (H(g) - u_1) > 0$$

egyenlőtlenség miatt szigorúan növekvő is, így értékhalmaza az $I[g_{[n]}(x_0), g_{[n]}(x_1)]$ intervallum. A (92) alapján látható, hogy $g_{[n]}(x_0) = x_n$. Mivel $f_2(x_1) - g(x_1) = u_1 \cdot (f_2(x_0) - x_1)$ és $g(x_1) - f_1(x_1) = u_2 \cdot (x_1 - f_1(x_0))$, a $g_{[n]}$ képlete alapján belátható, hogy $g_{[n]}(x_1) = x_{n+1}$. Tehát a $g_{[n]}$ függvény értékeinek halmaza az $I[x_n, x_{n+1}]$ intervallum, következik, hogy a $g_{[n]} : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_n, x_{n+1}]$ függvény szigorúan növekvő bijekció.

Az $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorú monotonitásából és a (102) egyenlőségből következik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén pontosan egy $n \in \mathbb{Z}$ létezik úgy, hogy fennálljon az $x_n \in I[x_n, x_{n+1})$ összefüggés. Ennek alapján definiálhatunk egy $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő formulával:

$$\tau(x) = g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)), \quad \forall x \in I[x_n, x_{n+1}), n \in \mathbb{Z}. \quad (103)$$

Mivel $g_{[n+1]}$ és $g_{[n]}$ szigorúan növekvő folytonos bijekciók, következik, hogy $\tau(I[x_n, x_{n+1}]) = I[x_{n+1}, x_{n+2}]$, illetve $g_{[n]}$ képlete alapján:

$$\begin{aligned}\tau(\mathbb{R}) &= \tau\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tau(I[x_n, x_{n+1}]) = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{n+1}, x_{n+2}] = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_n, x_{n+1}] = \mathbb{R}\end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy a τ függvény szigorúan növekvő, ezért mivel intervallumnak intervallumra képzése is, következik, hogy folytonos. Igazoljuk, hogy a τ függvény megoldása a (62) függvényegyenletnek. Valóban, ha $x \in I[x_n, x_{n+1}]$, akkor $g_{[n]}$ képlete szerint

$$\begin{aligned}\tau(\tau(x)) - (u_1 + u_2) \cdot \tau(x) + u_1 u_2 x &= \\ = g_{[n+2]}(g_{[n]}^{-1}(x)) - (u_1 + u_2) \cdot g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)) + u_1 u_2 \cdot g_{[n]}(g_{[n]}^{-1}(x)) &= \\ = u_1^n \cdot \frac{u_1^2 - (u_1 + u_2)u_1 + u_1 u_2}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(g_{[n]}^{-1}(x)) - g(g_{[n]}^{-1}(x))) + \\ + u_2^n \cdot \frac{u_2^2 - (u_1 + u_2)u_2 + u_1 u_2}{u_2 - u_1} \cdot (g(g_{[n]}^{-1}(x)) - f_1(g_{[n]}^{-1}(x))) + \\ + \theta \cdot (1 - u_1 - u_2 + u_1 u_2) &= -c,\end{aligned}$$

ami igazolja állításunkat. Ellenőrizhető, hogy ha $x \in I[x_0, x_1]$, akkor $\tau(x) = g(x)$, vagyis τ folytonos meghosszabbítása a g függvénynek. Végül megmutatjuk, hogy egyetlen megoldása a (62) függvényegyenletnek folytonos meghosszabbítása g -nek. Tételezzük fel, hogy v folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek és $v(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_1]$. Az v iteráltjait a

$$v^{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - v(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (v(x) - f_1(x)) + \theta,$$

formulával állíthatjuk elő, ahonnan következik, hogy

$$v^{[n]}(x) = g_{[n]}(x), \quad \forall x \in I[x_0, x_1] \quad \text{és} \quad v^{[n]}(x_0) = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

így, ha $x \in I[x_n, x_{n+1})$, akkor

$$v(x) = v^{[n+1]}(v^{[-n]}(x)) = g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)) = \tau(x).$$

Vagyis a tételben megadott feltételek mellett, egyetlen folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek meghosszabbítása a g függvénynek és ez a τ függvény. ♣

3.61. Jelölés. Ha $0 < u_1 < 1 < u_2$, valamint a c, x_0, x_1, x_2 valós számok eleget tesznek a (101) feltételeknek, akkor egy $g : I[x_0, x_1] \rightarrow I[x_1, x_2]$, az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljesítő bijekció folytonos meghosszabbítása útján nyert megoldását a (62) függvényegyenletnek \tilde{g} -vel jelöljük.

A 3.60. tétel jelöléseivel $\tilde{g} = \tau$. A 10. ábra a \tilde{g} függvény szerkesztési módját mutatja be.

3.62. Megjegyzés. Ebben az esetben is megállapítható, hogy ha τ folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor $\tau^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a $\tau^*(x) = 2\theta - \tau(2\theta - x)$ képlettel megadott függvény szintén folytonos megoldása az egyenletnek, függetlenül attól, hogy van fixpontja, vagy sem az adott megoldásnak, továbbá fennáll a $(\tau^*)^* = \tau$ összefüggés. Ezeknek bizonyítása azonos a hasonló tartalommal megfogalmazott lemmák bizonyításával.

Végül összefoglaljuk az eset eredményeit: Ha $0 < u_1 < 1 < u_2$, akkor a (62) függvényegyenlet folytonos megoldásainak halmaza, a \mathcal{H} halmaz, tartalmaz négy fixponttal rendelkező megoldást is. Ezek alkotják a \mathcal{H}_{fp} halmazt. A fixpont nélküli megoldások halmazát \mathcal{H}_{fpn} -nel jelöljük. Ennek egy része olyan τ megoldásokból áll, amelyekre fennáll a $\tau > \max\{f_1, f_2\}$ egyenlőtlenség, ezt \mathcal{H}_1 -gyel jelöljük, a másik része olyan v megoldásokból áll, amelyekre $v < \min\{f_1, f_2\}$, ezt \mathcal{H}_2 -vel jelöljük. Belátható, hogy fennáll a következő ekvivalencia:

$$\tau > \max\{f_1, f_2\} \Leftrightarrow \tau^* < \min\{f_1, f_2\},$$

ami azt jelenti, hogy $\mathcal{H}_2 = \{v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid v^* \in \mathcal{H}_1\}$. Tehát

$$\mathcal{H}_{f_{pn}} = \{\tau \mid \tau \in \mathcal{H}_1 \vee \tau^* \in \mathcal{H}_1\} \quad \text{és} \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{f_p} \cup \mathcal{H}_{f_{pn}}.$$

6 Az $u_1 < u_2 < -1$ és $-1 < u_1 < u_2 < 0$ esetek A címfeltételek mellett a (62) függvényegyenlet folytonos megoldásai szigorúan csökkenők. A 3.44. lemma harmadik alpontja szerint minden folytonos megoldásnak egyetlen fixpontja van, amit θ -val jelöltünk. Létezik két lineáris megoldás, az $f_1(x) = u_1 \cdot (x - \theta) + \theta$ és $f_2(x) = u_2 \cdot (x - \theta) + \theta$. Ebben az esetben is érvényesek a 3.42. tétel és 3.43. lemma állításai. Ebben az esetben is megállapítható az f folytonos megoldások és a lineáris megoldások egymáshoz viszonyított helyzete, itt is belátható a $H(f)$ függvény korlátossága. Ezekről szól következő lemmánk.

3.63. Lemma. *Ha $u_1 < u_2 < -1$, vagy $-1 < u_1 < u_2 < 0$, és $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, megoldása a (62) függvényegyenletnek, akkor igazak a következő állítások:*

① *Ha f_1 és f_2 a (62) lineáris megoldásai, akkor*

$$(f(x) - f_1(x)) \cdot (f(x) - f_2(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (104)$$

② *Teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:*

$$u_1 \leq H(f) \leq u_2. \quad (105)$$

Bizonyítás. Azonos a 3.53. lemma bizonyításával. ♣

Egy megoldás által teljesített szükséges feltételek elemzése az előző esetekhez hasonlóan végezhető el. Itt is a (104) és (105) feltételeket teljesítő megfelelően kis intervallumon definiált szigorúan csökkenő bijekció folytonosan meghosszabbítható a (62) függvényegyenlet egy megoldásáig, ezt fogalmazzuk meg pontosan a következő lemmában.

3.64. Lemma. *Ha $u_1 < u_2 < -1$, vagy $-1 < u_1 < u_2 < 0$, $c \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in (\theta, \infty)$, valamint az x_1, x_2 és x_3 valós számokat úgy választjuk meg, hogy elegendően nagyok a következő feltételeknek:*

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &\leq x_1 \leq f_2(x_0) \\ x_2 &= (u_1 + u_2)x_1 - u_1u_2x_0 - c \\ x_3 &= (u_1 + u_2)x_2 - u_1u_2x_1 - c \end{aligned} \quad (106)$$

akkor tetszőleges $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$, az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljesítő bijekció esetén létezik egyértelműen meghatározott f folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek úgy, hogy $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_2]$. Ezt az f függvényt \tilde{g} -vel fogjuk jelölni.

Bizonyítás. Vezessük be tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$x_n = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x_0) - x_1) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (x_1 - f_1(x_0)) + \theta \quad (107)$$

jelölést. Könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 0, 1, 2, 3$ esetén a sorozat tagjai rendre megegyeznek az lemma szövegében megadott x_0, x_1, x_2, x_3 valós számokkal. Megmutatjuk, hogy az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ és az $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ellentétes értelemben szigorúan monoton sorozatok. Valóban:

$$x_{n+2} - x_n = \frac{u_1^n(u_1^2 - 1)}{u_2 - u_1} (f_2(x_0) - x_1) + \frac{u_2^n(u_2^2 - 1)}{u_2 - u_1} (x_1 - f_1(x_0)), \quad (108)$$

vagyis a (104) alapján, az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat szigorúan növekvő, ha $u_1 < u_2 < -1$, és szigorúan csökkenő, ha $-1 < u_1 < u_2$, az $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sorozat pedig fordítva ... Az (107) formula szerint a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ és $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n$ határértékek egyike létezik és egyenlő θ -val, ezért az említett sorozatok ellentétes szigorú monotonitása alapján $x_{2n+1} < \theta < x_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Összegezve előző észrevételeinket, ha $u_1 < u_2 < -1$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n} &= \theta, & \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n+1} &= \theta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= +\infty, & \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} &= -\infty, \end{aligned}$$

illetve, ha $-1 < u_1 < u_2 < 0$, akkor:

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \theta, & \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = \theta, \\ \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n} = +\infty, & \lim_{n \rightarrow -\infty} x_{2n+1} = -\infty. \end{array}$$

Ezen megállapítások alapján felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\begin{array}{l} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n}, x_{2n+2}) = (\theta, +\infty), \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n-1}, x_{2n+1}) = (-\infty, \theta). \end{array} \quad (109)$$

Most igazoljuk, hogy létezik olyan $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$, bijekció, amelyre teljesül az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltétel. Az (108) szerint $\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{Au_1 + Bu_2}{A + B}$ alakú, ahol A és B nem lehetnek ellentétes előjelűek és legalább egyikük 0-tól különböző, következik, hogy $u_1 \leq \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_0} \leq u_2$. Ez viszont azt mutatja, hogy a lineáris bijekció eleget tesz a kívánt feltételnek.

A bizonyítás következő része a megoldásfüggvény megszerkesztése lesz. Az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltétel alapján a $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$ függvény szigorúan csökkenő bijekció, és mivel intervallumnak intervallumra képzése, következik, hogy folytonos is, valamint $g(x_0) = x_1$ és $g(x_2) = x_3$. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén a

$$g_{[n]}(x) = \frac{u_1^n}{u_2 - u_1} \cdot (f_2(x) - g(x)) + \frac{u_2^n}{u_2 - u_1} \cdot (g(x) - f_1(x)) + \theta, \quad (110)$$

formula egy folytonos valós függvényt definiál. Másrésről

$$\begin{array}{l} H(g_{[2n]}) = \frac{u_1^{2n}}{u_2 - u_1} \cdot (u_2 - H(g)) + \frac{u_2^{2n}}{u_2 - u_1} \cdot (H(g) - u_1) > 0, \\ H(g_{[2n+1]}) = \frac{u_1^{2n+1}}{u_2 - u_1} \cdot (u_2 - H(g)) + \frac{u_2^{2n+1}}{u_2 - u_1} \cdot (H(g) - u_1) < 0, \end{array}$$

ami azt mutatja, hogy a $g_{[2n]}$ szigorúan növekvő, míg $g_{[2n+1]}$ szigorúan csökkenő. Továbbá nyilvánvaló, hogy $g_{[n]}(x_0) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, és mivel

$$\begin{aligned} f_2(x_2) - g(x_2) &= u_1^2 \cdot (f_2(x_0) - g(x_0)), \\ g(x_2) - f_1(x_2) &= u_2^2 \cdot (g(x_0) - f_1(x_0)), \end{aligned}$$

következik, hogy $g_{[n]}(x_2) = x_{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ezek alapján belátható, hogy a $g_{[n]} : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_n, x_{n+2}]$ függvény szigorúan monoton bijekció (növekvő, ha n páros és csökkenő, ha n páratlan). Most definiálhatjuk az f függvényt. Ha $x \neq \theta$, akkor a (109) alapján pontosan egy $n \in \mathbb{Z}$ létezik úgy, hogy $x \in I[x_n, x_{n+2}]$, így az alábbi definíciónak van értelme:

$$f(x) = \begin{cases} g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)), & \text{ha } x \in I[x_n, x_{n+2}], \quad n \in \mathbb{Z} \\ \theta, & \text{ha } x = \theta \end{cases} \quad (111)$$

A $g_{[n]}$ függvények tulajdonságaiból azonnal következik, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$f(I[x_{2n}, x_{2n+2}]) = I[x_{2n+1}, x_{2n+3}], \quad f(I[x_{2n-1}, x_{2n+1}]) = I[x_{2n}, x_{2n+2}].$$

Továbbá a (109) összefüggések alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{aligned} f((\theta, \infty)) &= f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n}, x_{2n+2}]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f(I[x_{2n}, x_{2n+2}]) = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n+1}, x_{2n+3}] = (-\infty, \theta), \\ f((-\infty, \theta)) &= f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n-1}, x_{2n+1}]\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f(I[x_{2n-1}, x_{2n+1}]) = \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I[x_{2n}, x_{2n+2}] = (\theta, \infty), \end{aligned}$$

tehát $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Másrészt viszont a f függvény definíciójából következik, hogy f szigorúan csökkenő minden $I[x_n, x_{n+2}]$ alakú intervallumon, figyelembe véve az előző egyenlőségeket és azt, hogy az $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

és $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ellentétes értelemben szigorúan monoton sorozatok, következik, hogy az f függvény szigorúan csökkenő. Az említett tulajdonságokból belátható, hogy f folytonos is.

Igazoljuk, hogy f megoldása a (62) függvényegyenletnek. Valóban, tetszőleges $x \in I[x_n, x_{n+2}]$ és $n \in \mathbb{Z}$ esetén:

$$\begin{aligned} & f(f(x)) - (u_1 + u_2) \cdot f(x) + u_1 u_2 \cdot x = \\ & = g_{[n+2]}(g_{[n]}^{-1}(x)) - (u_1 + u_2) \cdot g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)) + u_1 u_2 \cdot g_{[n]}(g_{[n]}^{-1}(x)) = -c. \end{aligned}$$

Tehát f folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek. Az is azonnal belátható, hogy $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_2]$.

Végül tételezzük fel, hogy $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ is folytonos megoldása a (62) függvényegyenletnek és $h(x) = g(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_2]$. Azonnal látható az iteráltak formulája alapján, hogy $h^{[n]}(x) = g_{[n]}(x)$, $\forall x \in I[x_0, x_2]$, ahonnan, ha $x \in I[x_n, x_{n+2}]$, akkor

$$h(x) = h^{[n+1]}(h^{[-n]}(x)) = g_{[n+1]}(g_{[n]}^{-1}(x)) = f(x),$$

vagyis egyetlen folytonos megoldása egyenletünknek meghosszabbítása a g függvénynek, és ez az általunk szerkesztett f függvény. ♣

A 11. ábra egy g szakaszosan lineáris bijekció folytonos meghosszabbítását szemlélteti.

A következő tétel jellemzi a (62) függvényegyenlet folytonos megoldásait $u_1 < u_2 < -1$, vagy $-1 < u_1 < u_2 < 0$ esetén.

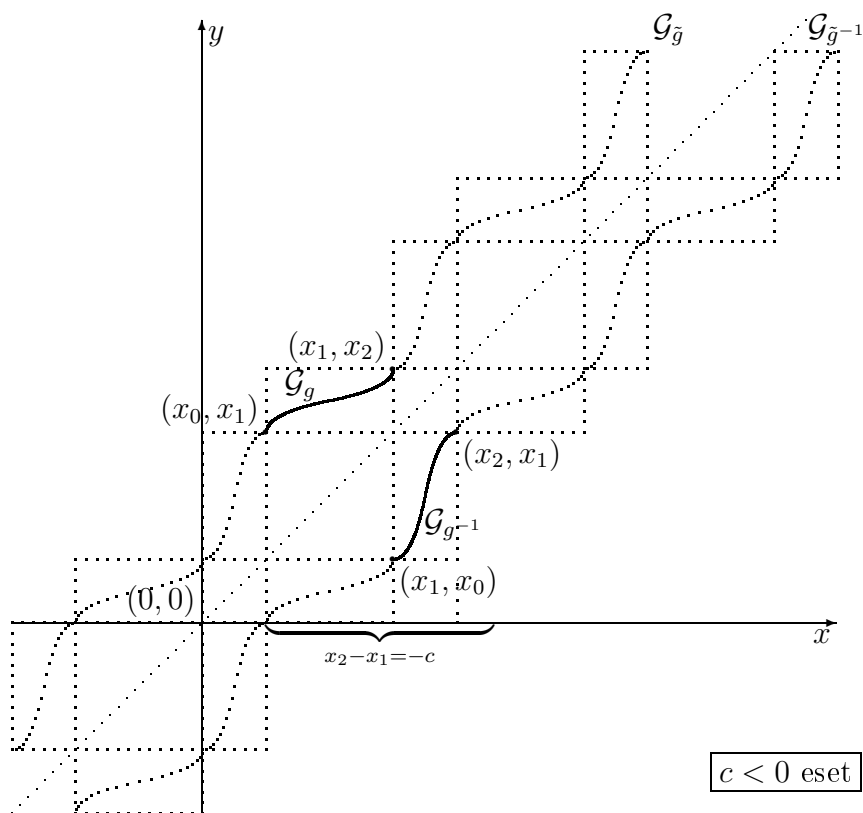
3.65. Tétel. *Ha $u_1 < u_2 < -1$, vagy $-1 < u_1 < u_2 < 0$, $c \in \mathbb{R}$, $\theta = -\frac{c}{(u_1 - 1)(u_2 - 1)}$ és $x_0 \in (\theta, \infty)$, akkor fennáll a következő állítás: Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, akkor és csak akkor folytonos megoldása az (62) függvényegyenletnek, ha létezik $x_1 \in [f_1(x_0), f_2(x_0)]$ és egy az $u_1 \leq H(g) \leq u_2$ feltételt teljesítő $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$ bijekció, ahol $x_2 = (u_1 + u_2)x_1 - u_1 u_2 x_0 - c$ és $x_3 = (u_1 + u_2)x_2 - u_1 u_2 x_1 - c$ úgy, hogy $f = \tilde{g}$.*

Bizonyítás. A feltételek elégséges voltát láttuk a 3.64. lemmában. Igazoljuk a feltételek szükségességét. Tétélezzük fel, hogy $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ megoldása egyenletünknek és legyen $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$ és $x_3 = f(x_2)$! Legyen továbbá $g : I[x_0, x_2] \rightarrow I[x_1, x_3]$, az f függvény bijektív leszűkítése az $I[x_0, x_2]$ intervallumra! A 3.63. lemma alapján láthatjuk, hogy mindezek teljesítik a 3.64. lemma feltételeit, így $f = \tilde{g}$. ♣

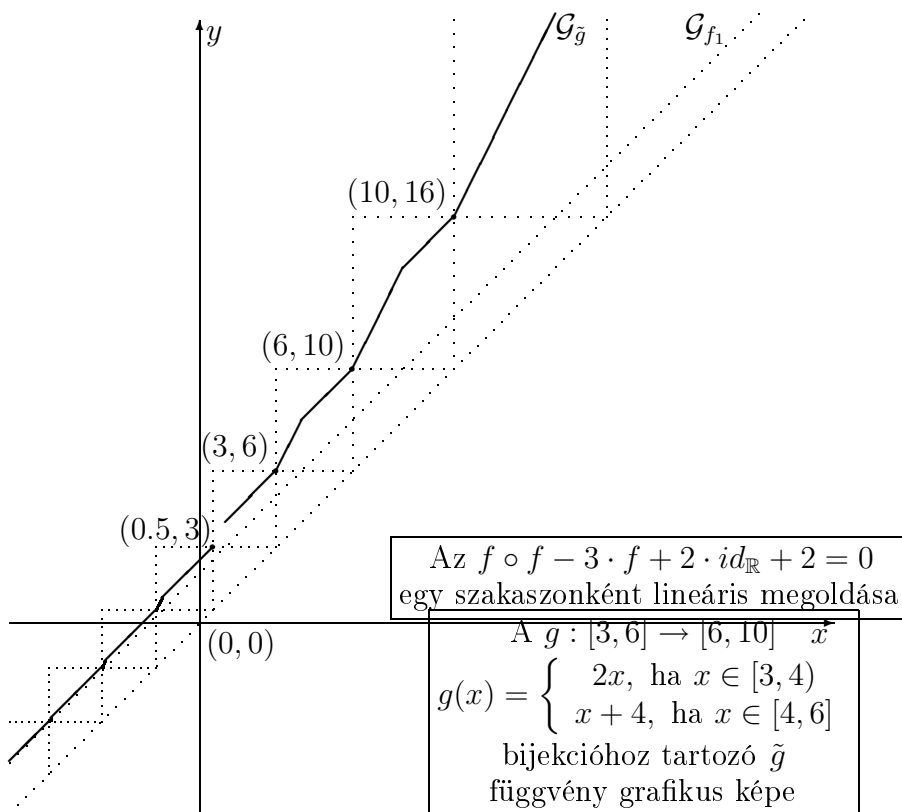
Ezzel a (1) függvényegyenlet megoldásának minden esetét kimerítettük.

Az (1) függvényegyenlet természetesen jelenik meg, ha például azokat az egy változós függvényeket szeretnénk meghatározni, amelyek grafikus képe invariáns a koordináta sík affin transzformációira nézve. A dolgozat eredeti változatában ez probléma és megoldása külön fejezetként szerepelt, de terjedelmi okok kimaradt. Végül azzal zárnám, hogy a harmadik fejezetet a teljesség kedvéért írtam ebben az alakban, de mint már említettem az egyes alpontok függetlenek egymástól és azokból válogatva a használt technikákat jól lehet szemléltetni.

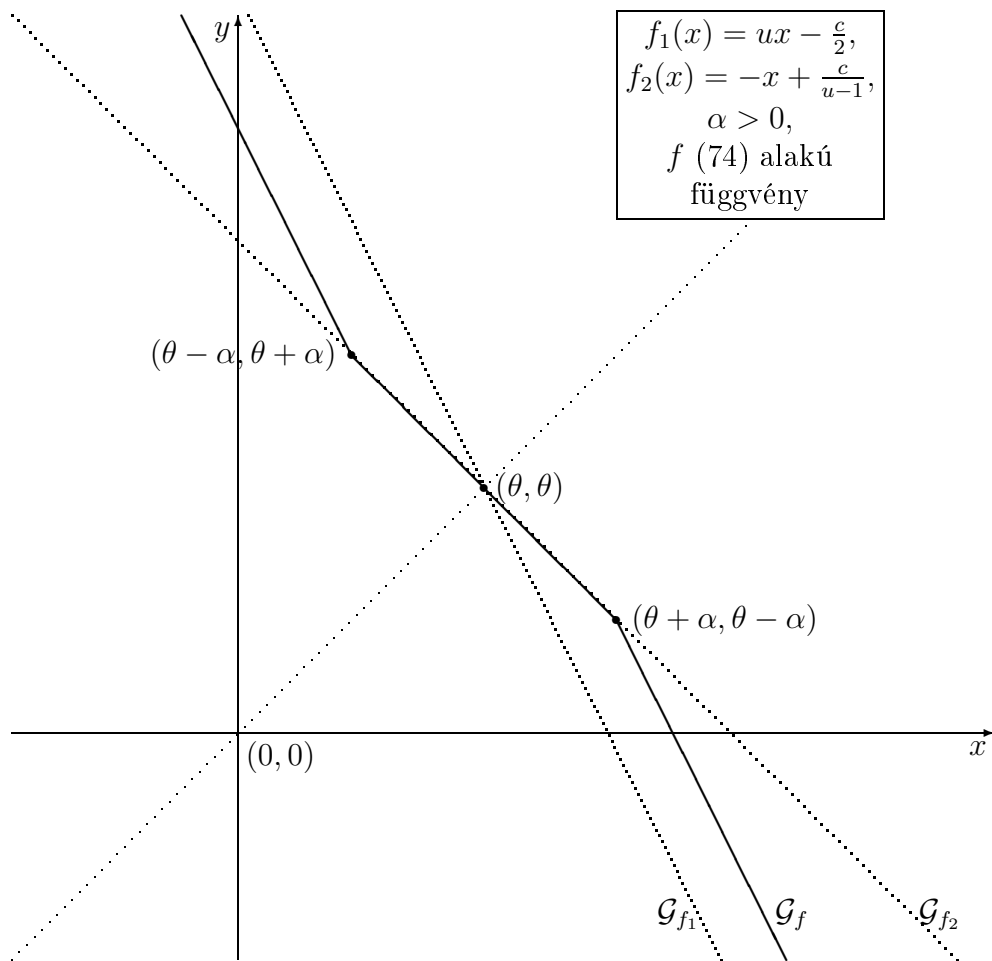
A mellékelt ábrák következnek.



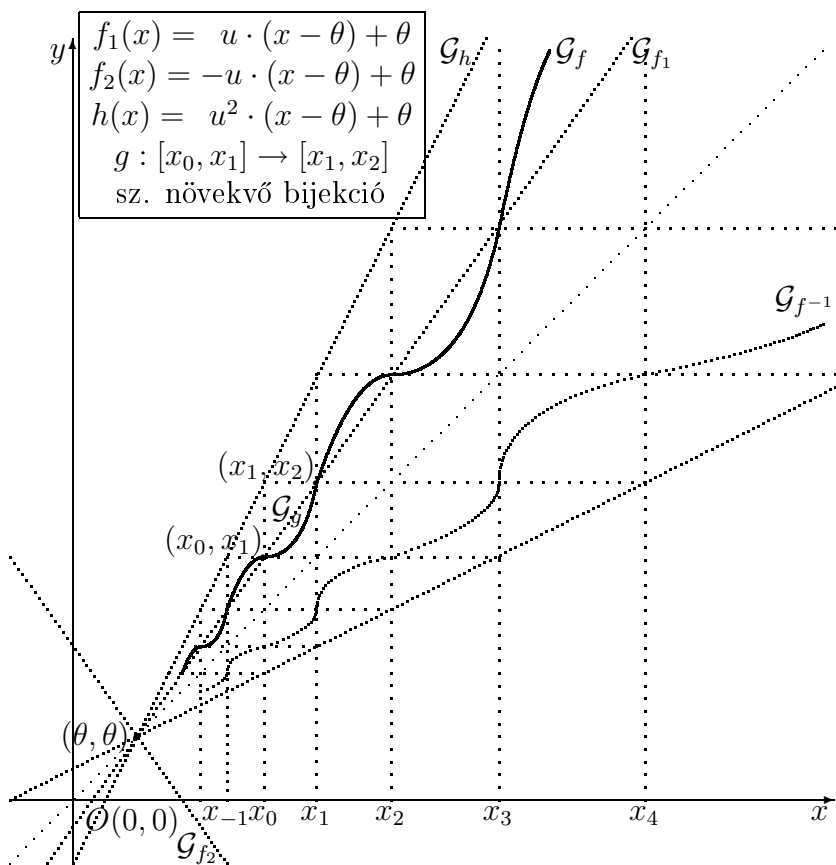
ábra 4: A (42) egyenlet egy $g : [x_0, x_1] \rightarrow [x_1, x_2]$ bijekcióhoz rendelt megoldásának (és inverzének) grafikus képe



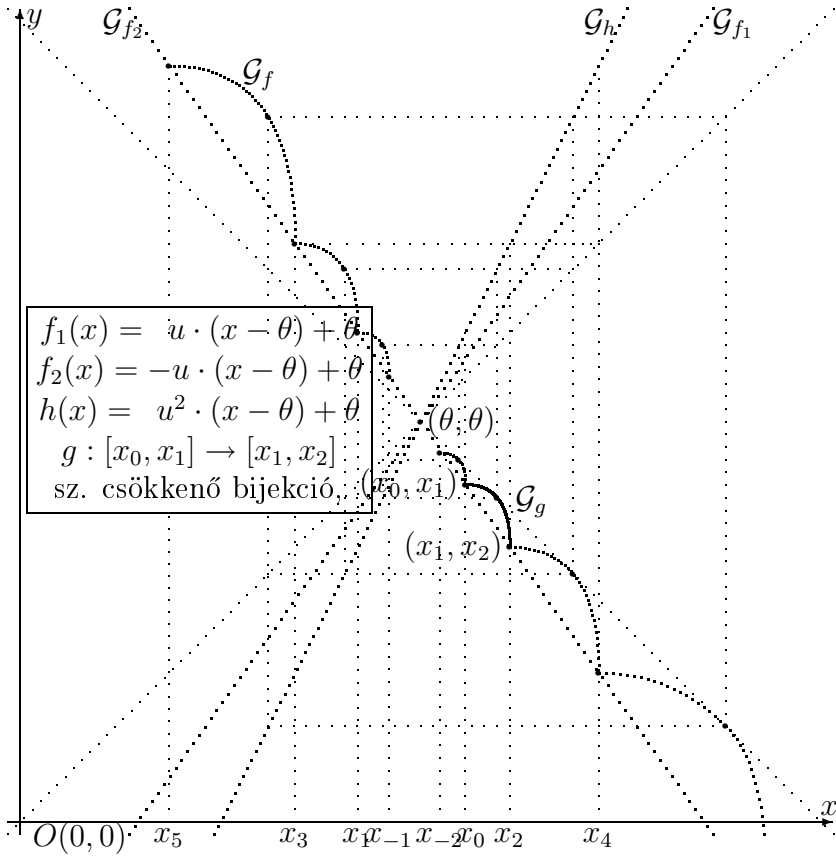
ábra 5: Egy (32) típusú egyenlet egy megoldása



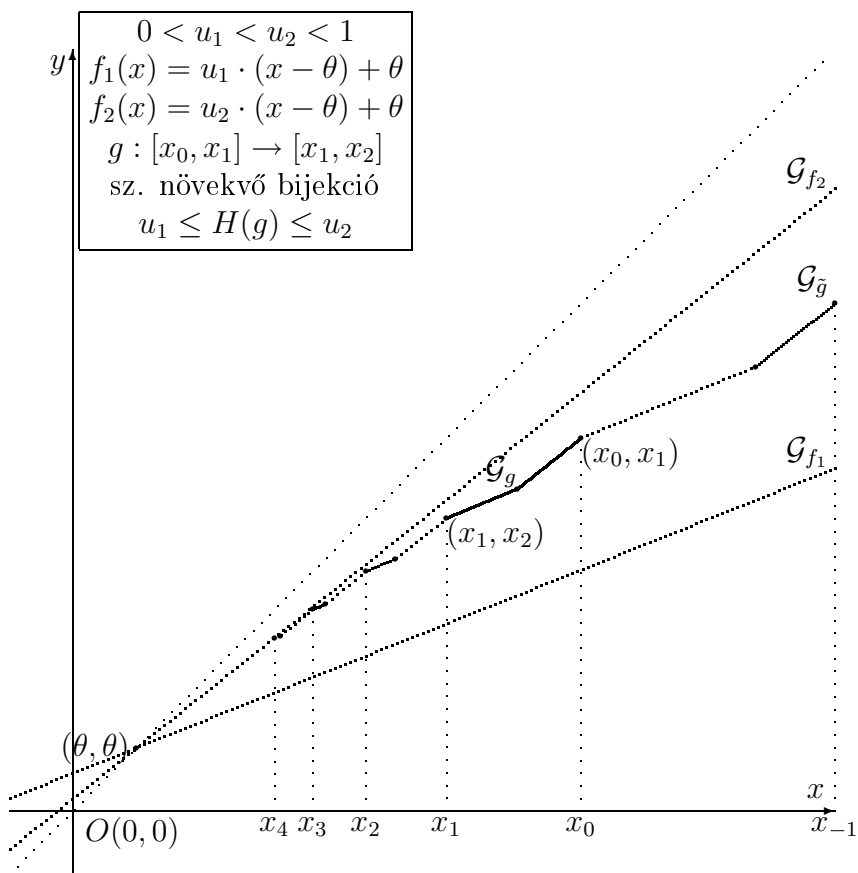
ábra 6: Egy (69) alakú egyenlet néhány megoldása $-1 \neq u < 0$ esetén



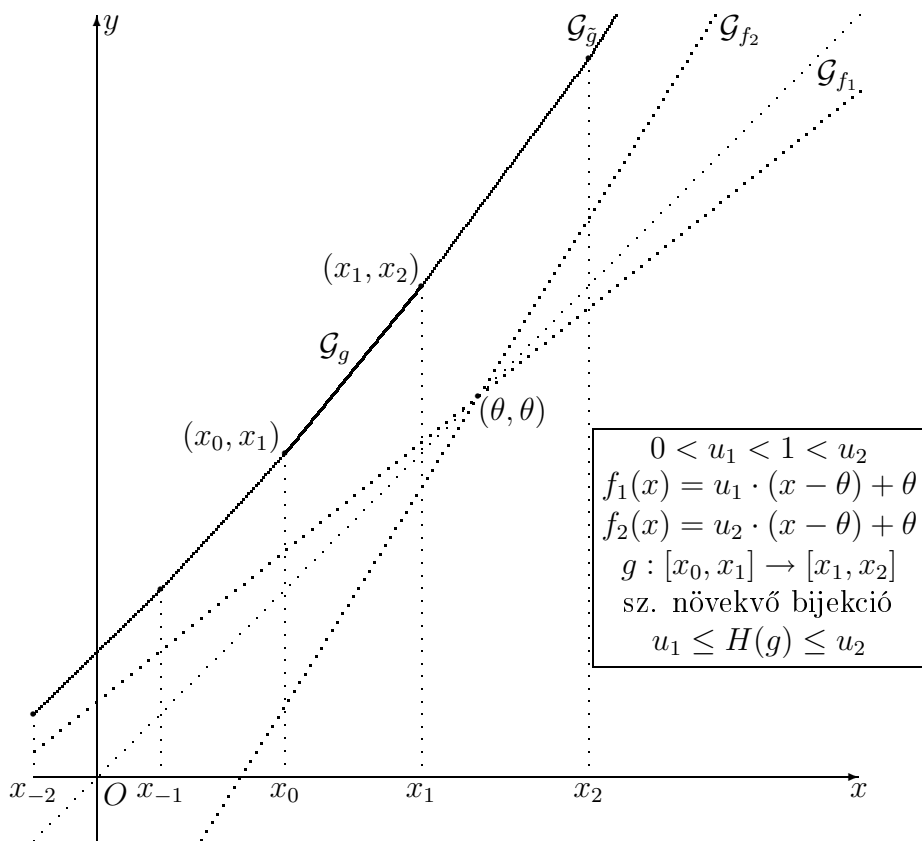
\u00e1bra 7: A (79) egyenlet egy megold\u00e1s\u00e1nak grafikonja



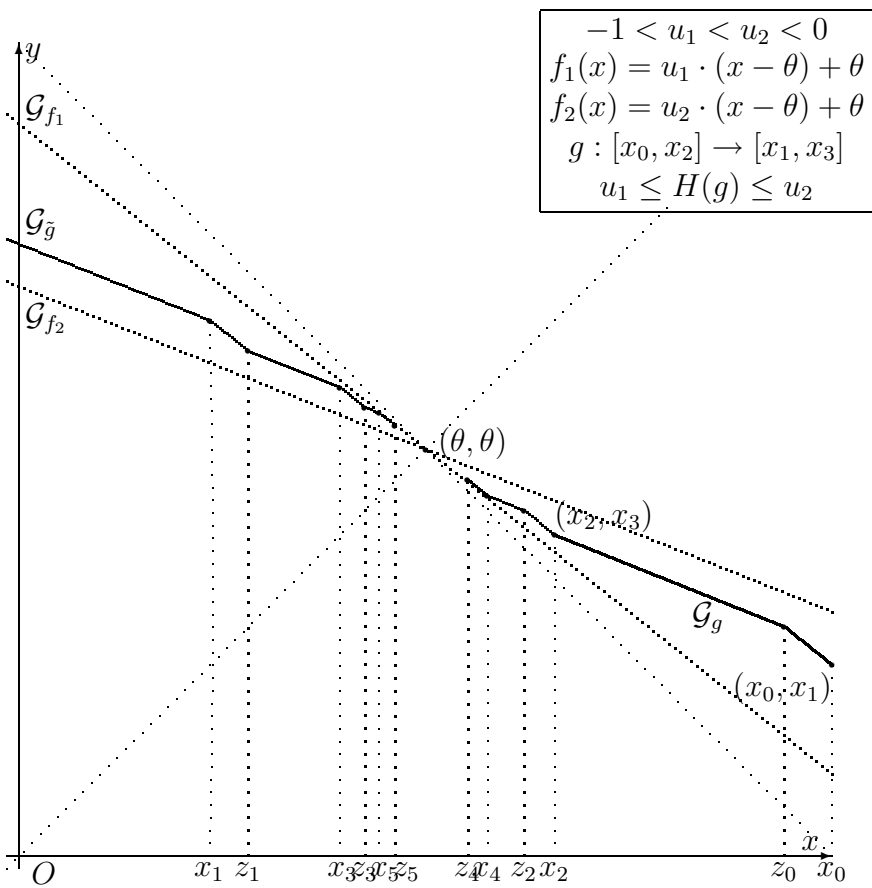
ábra 8: A (76) egyenlet szigorúan csökkenő megoldásának szerkesztése



ábra 9: A (87) egyenlet egy megoldásának szerkesztése



ábra 10: A (62) egyenlet fixpont nélküli megoldásának szerkesztése



ábra 11: A (62) egyenlet egy megoldása, $-1 < u_1 < u_2 < 0$ esetén

4 Összefoglalás

4.1 Bevezetés, célkitűzések

A hazai és főleg a nemzetközi diák matematikaversenyeken feladott nehéz függvényegyenletek és függvényegyenlet-rendszerek szükségessé teszik a versenyző tanulók felkészítését ebből a témakörből is. A középiskolásokhoz szóló eddigi anyagokban szereplő függvényegyenletekhez szeretnék e dolgozattal hozzátenni olyanokat, amelyek szerintem nehéznek bizonyultak az eddigi versenyeken, vagy amelyek megoldása eddig sehol sem jelent meg, de a tanulók igényt fogalmaztak meg ezekre. Ilyen típusú kérdésekkel foglalkozom az első fejezetben és a második fejezet első két alfejezetében. A második fejezet második alfejezete egy az American Mathematical Monthly 2001/Dec számában közölt $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$ alakú függvényegyenlet egy, a jelen dolgozat szerzője által adott és érdekesnek tartott általánosításának bemutatásával foglalkozik. A második fejezet utolsó alfejezete, ugyan nem eredeti, de nem közismert, ugyanakkor a függvényegyenletek egy látványos alkalmazását mutatja be a geometriában, ezért mindenképpen tanácsosnak tartom a középiskolai felkészítő programokba való beemelését. A harmadik fejezet az $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletekkel foglalkozik, amelyek az utóbbi években gyakran jelentek meg rangos nemzetközi diákversenyeken, mint pl. a 2001. évi Gillis-Turán Matematikaversenyen, vagy az ugyanazon évi William Lowell Putnam Matematikaversenyen. Az itt bemutatott anyagban nagyrészt a szerző megoldásai és bizonyításai jelennek meg. A fejezet tárgyalja a függvényegyenlet megoldási eseteit $b \neq 0$ esetén. Ez a fejezet tartalmaz egy a szerző által kidolgozott megoldási módszert is, amely a dolgozat 76. oldalán jelenik meg, amelyben két megfelelő tulajdonságokkal rendelkező monoton függvényből kiindulva jut el a megoldásig. A dolgozat ezen része csakis egyetemi hallgatók szintjén olvasható, viszont ezzel párhuzamosan bemutatott másik módszer

megérthető olyan középiskolások által, akik középiskolában matematikai analízist is tanulnak.

4.2 Egy feladathoz kapcsolódó függvényegyenletrendszer

Az első fejezet a KöMaL egyik feladatához kapcsolódik. Az anyag egy a feladattal kapcsolatos tanulók által megfogalmazott kérdésre ad választ. A válasz egy függvényegyenletrendszerhez vezet, amelynek megoldása során bevezethetünk érdekes matematikai fogalmakat is, olyanokat mint a transzformációcsoport, egy elem adott transzformáció csoportra vonatkozó orbitja stb. A függvényegyenletrendszer megoldásával folytatódik a fejezet, felírjuk a függvényegyenletrendszer általános megoldását, amelyben két paraméter van, az egyik egy függvény a másik egy valós szám. Majd az első fejezet utolsó része egy megoldáscsaládot szemléltet.

4.3 A Cauchy-egyenlethez kapcsolódó feladatok

Ez a fejezet három részre tagolt. A első alfejezet a KöMaL-ban közölt **N206.** feladat megoldását tartalmazza. A választás azért esett erre, mert a megoldás eddig nem jelent meg az említett folyóiratban és valószínű nem is fog (1999-ben közölt feladatról van szó), viszont a szerző szerint a feladat megoldása rendkívül tanulságos, sok olyan eszköz jelenik meg benne, ami egy versenyre készülő tanulónak hasznára lehet. A második alfejezet az $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$ alakú függvényegyenletek egy családjával foglalkozik. Az American Mathematical Monthly egy függvényegyenletének a jelen dolgozat szerzője által adott általánosításáról van szó. Míg az eredeti feladatnak egyetlen megoldása van, az általánosított egyenletnek a g függvény és az a és b valós paraméterek alkalmas megválasztása esetén lehet több vagy kevesebb megoldása is. Az itt bemutatott függvényegyenletek

megoldása jó alkalom a Cauchy-egyenlethez vezető technikák szemléltetésére. A második fejezet harmadik alfejezete egy ismert, a szerző által Radó Ferenc tanár úr egy kolozsvári előadásán hallott anyag, ami a sík affin transzformációinak jellemzésével foglalkozik. A szerző szerint annyira látványos az a folyamat, amely során tiszta geometriai megfontolásból eljutunk egy függvényegyenletig, hogy a követése által kapott élmény hozzájárul a tanulók érdeklődésének felkeltésére a téma iránt.

4.4 $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ alakú függvényegyenletek a folytonos függvények halmazában

A dolgozat leghosszabb fejezete a címben szereplő függvényegyenlettel foglalkozik. Az első alfejezet egy a Gillis-Turán matematikai versenyen adott feladathoz fűz kiértékelő megjegyzéseket, amelyek a szerző szerint a függvényegyenlet tárgyalásának szükségességét húzzák alá. A második alfejezet az egyenletre vonatkozó általános tudnivalókkal foglalkozik. Többek között megemlítem a megoldások egzisztencia tételét, a megoldások iteráltjainak általános alakját és a fixpontokra vonatkozó általános tulajdonságokat. A második alfejezet eredményei szükségesek a harmadik alfejezet olvasásához. A harmadik alfejezet szakaszokra tagolódik. A szakaszok egymástól függetlenül olvashatók és szakkörön is külön feldolgozhatók. Egy szakasz az egyenlet paramétereitől meghatározott megoldási esettel foglalkozik. Vannak nagyon egyszerűen kezelhető esetek is, ezért szakkörön ezeket az egyszerűbb, látványosabb eseteket tartom ajánlatosnak, míg a többit szelektív módon olvasmányként bocsájthatjuk a tanulók rendelkezésére. A bevezetésben említett módszert középiskolásoknak nem ajánlom. A téma folytatható az affin transzformációkra invariáns grafikonú függvények meghatározásával, de erre terjedelmi okok miatt a dolgozat nem tér ki

5 Summary

5.1 Introduction and objectives

The difficult functional equations and systems of functional equations that were given to secondary school students and university students in international mathematical competitions in the past years need the preparation of competitors for these themes. This paper presents some functional equations and systems of functional equations to complete the existent material for secondary school students helping the preparation for these competitions. The functional equations presented there are selected on the criteria that they were very difficult and their solutions have not been published, but the students have formulated their curiosity for these problems. The first section and the first subsection of second section deal with such problems. The second subsection of second section studies a family of functional equations that are generalizations of functional equation $f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$ published in the American Mathematical Monthly, 2001/Dec. The third subsection of second section is not original, but is not a common knowledge and present a spectacular application of functional equations. I consider that same themes give an impulse in the study of mathematics and I think that it is a good idea to introduce it in the secondary mathematical preparatory programs. The third section deals with functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$. Equations of this form were given in the Gillis-Turan Mathematical Competition in 2001 and in the William Lowell Putnam Competition in the same year. The presented proofs and solutions have been given by the author of this thesis in majority of this section and are accessible for secondary students. All the situations of solving equation are treated if the condition $b \neq 0$ is fulfilled. At the same time an original method of solving this equation is presented on page 76, where I construct a solution of the equation starting from two monotone func-

tions with certain properties. This part is accessible only for university students; the parallel presentation is accessible for secondary school students as well who study mathematical analysis.

5.2 A system of functional equations

The first section is connected to a KöMaL problem. The material gives answer to a solvers' question. The answer leads to a system of functional equations. Solving this system we may introduce interesting mathematical notions as transformation groups, the orbit of an element relative to a transformation group etc. The section follows with solving the system of functional equation and finally we give examples of solutions corresponding to a linear function and a value of a real parameter.

5.3 Problems leading to Cauchy's equation

This section is divided into three subsections. The first subsection contains the solution of problem **N206**. published in KöMaL (journal for secondary schools) in 1999. I have selected this problem because its solution has not appeared up till now and it is not likely to appear either. On the other hand, solving this problem contains many elements which are useful for students who are going to prepare for competitions. The second subsection deals with a class of functional equations of form $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$. This is a generalization of functional equation appeared in American Mathematical Monthly mentioned in introduction. The original problem has one solution, whereas the generalized equation may have more or fewer solutions. The third subsection deal with a known material which I heard from professor Radó Ferenc at a symposium in Kolozsvár. This theme is the characterization of affine transformations of the plane. According to the author the process during which we can achieve a

functional equation from a geometrical fact is so spectacular that the experience results in an increasing interest in this theme.

5.4 Functional equations of form $f \circ f + a \cdot f + b \cdot id_{\mathbb{R}} + c = 0$ with continuous unknown functions

This is the longest section and deals with the functional equation of title. The first subsection give remarks to a problem of mathematical competition Gillis-Turán concluding that the studying of equations of this form is necessary in the preparatory circles. The second subsection of section deals with the general properties referred to our equation. Among them I remark the theorem of existence of solutions, the general form of iterates and generalities about the fixed points. The results of the second subsection are necessary for reading of the third subsection. The third subsection is divided into paragraphs that are independent and may be read separately and may be independent themes for preparatory circles. One paragraph is engaged in a case of solving equation. There are very simple and interesting cases which are recommended for study in preparatory circles, and the others may be recommended for reading in a selective fashion. I do not recommend the method mentioned in the introduction for secondary school students. The theme may be continued with the determination of functions with invariant graphs to an affine transformation, but the size reasons do not permit it.

Hivatkozások

- [1] Carrière, Yves; *Étude de l'équation fonctionnelle $f(f(x)) + sf(x) + tx = 0$* , Revue de Mathématiques Spéciales, n°2., Octobre 1982
- [2] Dályay, Pál Péter; *A függvényegyenletek, szakköri tevékenység a tanárjelölt és szakvezető szemszögéből*, Szakvezetői vizsgadolgozat, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, Szeged, 1998
- [3] Dályay, Pál Péter; *A class of functional equations of form $f(g(x) + y + f(y)) = ag(f(x)) + by$* , Octogon Mathematical Magazine, közlésre elfogadva
- [4] Dályay, Pál Péter; *A KöMaL problem in a new view*, Teaching Mathematics and Computer Science, közlésre benyújtva
- [5] Dályay, Pál Péter; *Még egyszer a B.3438. feladatról*, KöMaL, 52. évfolyam 3. szám, Budapest, 2002. március
- [6] Dályay, Pál Péter; *Simple proof of an existence theorem*, Octogon Mathematical Magazine, Vol 11 nr 2 / 2003
- [7] Dályay, Pál Péter; *Két függvényekkel kapcsolatos nehéz feladat*, Rác László Vándorgyűlés-továbbképzési dolgozat, 2000. június
- [8] Jacobson, Nathan; *Lectures in Abstract Algebra*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1975
- [9] Kuczma, Marek; *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, Uniwersitet Slaski, 1985
- [10] Kuczma, Marek; *Functional Equations in a Single Variable*, Warszawa, 1968

- [11] Kuczma, Marek; Choczewski, Bogdan; Ger, Roman; *Iterative Functional Equations*, Cambridge University Press
- [12] Pintér, Lajos; *Matematikai analízis I., tankönyv a speciális matematika osztályok számára*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1998
- [13] Nabeya, Seiji; *On the Functional Equation $f(p + qx + rf(x)) = a + bx + cf(x)$* , Aeq. Math. Vol. 11, 1974
- [14] Rudin, Walter; *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978
- [15] Szendrei, Ágnes; *Diszkrét matematika*, Polygon jegyzetsorozat, Szeged, 1996
- [16] Szőkefalvi-Nagy, Béla; *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981
- [17] Chao, Wu Wei; *Problem nr.10908*, Am. Math. Monthly **108**, 2001