

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

# FÜGGVÉNYEGYENLETEK HIPERC SOPORTOKON

Orosz-Kaiser Ágota  
témavezető: Dr. Székelyhidi László



DEBRECENI EGYETEM  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2011



## BEVEZETÉS

A hipercsoportok általános elméletének kidolgozására az 1970-es években került sor (lásd [Dun73], [Jew75], [Spe75]). A hipercsoportok tulajdonképpen olyan lokálisan kompakt terek, amelyeken a korlátos Radon-mértékek Banach-algebrát alkotnak a mértékek közti konvolúcióval, azonban a hipercsoportok elemei között semmilyen hagyományos értelemben vett művelet nincsen értelmezve. Számos olyan eredmény létezik, amely általános algebrai struktúrákon értelmezett függvényegyenletekkel kapcsolatos, 1991-ben jelent meg például Székelyhidi László monográfiája a topologikus Abel-csoportokon értelmezett konvolúció típusú függvényegyenletekről ([Sze91]). Mivel a hipercsoportok ezen struktúrák általánosításai, így ebben a könyvben sok olyan problémakör tárgyalására sor kerül, amelyekhez hasonlóakkal a disszertáció is foglalkozik. Az értekezés célja különböző függvényegyenletek megoldása fontos speciális hipercsoportokon, a dolgozat az elmúlt évek során részben Székelyhidi Lászlóval közösen, részben pedig egyedül folytatott kutatás eredményeit tartalmazza. A valószínűségelméletben játszott szerepük miatt nagy hangsúlyt kapnak a momentum függvényeket leíró egyenletek.

A disszertáció három részből áll, az első fejezetben rögzítjük a jelöléseket, leírjuk a hipercsoportok definícióját és a velük kapcsolatos alapvető fogalmakat, majd röviden ismertetünk néhány egyszerű konkrét példát hipercsoportokra.

A második fejezet a diszkrét polinomiális hipercsoportokkal foglalkozik. Megadjuk, hogy ezeken a hipercsoportokon pontosan melyek az általánosított momentum függvények. A spektrálszintézis eszközeit használva leírjuk a szinusz és a koszinusz egyenlet megoldásait, majd a jóval általánosabb Levi–Civita-egyenletet vizsgáljuk. Rámutatunk, hogy polinomiális hipercsoportok esetén két különböző módon is lehet konstans együtthatós lineáris differenciaegyenleteket értelmezni, és hogy ezek valójában nemkonstans együtthatós egyenleteknek felelnek meg. Mindkét lehetséges értelmezés esetén megadjuk a homogén differenciaegyenletek általános megoldását. Ezután a többváltozós polinomiális hipercsoportok ismertetésére kerül sor, majd karakterizáljuk az általánosított momentum függvényeket a többváltozós esetben.

A harmadik fejezetben a Sturm–Liouville-hipercsoportok definíciója mellett néhány ismert tételt és példát írunk le, ezután pedig megadjuk az általánosított momentum függvények egyenletének megoldásait.

## 1 HIPERC SOPORTOK

### 1.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

Legyen  $X$  egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér, az  $X$ -en értelmezett folytonos komplex értékű függvények halmazát jelölje  $\mathcal{C}(X)$ . A kompakt tartójú folytonos függvények halmazát  $\mathcal{C}_c(X)$  jelöli, és  $\mathcal{C}_c(X)$  előáll a

$$\mathcal{C}_c(X, K) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) \mid \text{supp } f \subset K\}$$

terek uniójaként, ahol a  $K \subset X$  halmazok kompaktak. Ha ezeket a tereket ellátjuk az egyenletes konvergencia topológiájával, akkor  $\mathcal{C}_c(X)$ -en természetes módon kapunk egy lokálisan konvex topológiát, ami a  $\mathcal{C}_c(X, K)$  topologikus terek induktív limesze. Azt mondjuk, hogy  $\mu$  egy *komplex Radon-mérték*  $X$ -en, ha  $\mu$  folytonos lineáris funkcionál  $\mathcal{C}_c(X)$ -en. Egy  $f \in \mathcal{C}_c(X)$  függvény  $\mu$  általi képére az alábbi jelöléseket használjuk:

$$\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu.$$

$X$  összes komplex Radon-mértékeinek halmazát  $\mathcal{M}(X)$ -szel jelöljük.  $X$  összes korlátos, illetve valószínűségi mértékeinek halmazát  $\mathcal{M}^b(X)$ , illetve  $\mathcal{M}^1(X)$  jelöli. Azt a  $\delta_x \in \mathcal{M}^1(X)$  mértéket, amire

$$\delta_x(f) = f(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(X)),$$

az  $x \in X$  pontbeli *Dirac-mértéknek* vagy *pontmértéknek* nevezzük.

### 1.2 HIPERC SOPORTOK MÉRTÉKALGEBRÁJA

Egy  $K$  lokálisan kompakt Hausdorff-tér esetén azt mondjuk, hogy  $(K, *, \vee)$  *hipercsoport*, ha teljesülnek az alábbi axiómák:

- H1 Az  $\mathcal{M}^b(K)$  vektortéren adott egy  $*$  bináris művelet (*konvolúció*), amellyel  $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$  algebra.
- H2 Ha  $x, y \in K$ , akkor  $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$  és  $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  kompakt.
- H3 Az  $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$  leképezés folytonos, ahol  $\mathcal{M}^1(K)$  topológiája a  $\mathcal{C}_c(K)$  szerinti gyenge topológia.
- H4 Az  $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  leképezés folytonos, ahol  $\mathcal{K}(K)$  topológiája a Michael-topológia (lásd [Mic55]).

H5 Egyértelműen létezik egy olyan  $e \in K$  elem, amelyre  $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$  teljesül minden  $x \in K$  esetén.

H6 Létezik egy  $\vee : K \rightarrow K$  homeomorfizmus (*involúció*), amelyre minden  $x \in K$  esetén fennáll, hogy  $(x^\vee)^\vee = x$ , és valamely  $x, y \in K$  elemekre  $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  pontosan akkor teljesül, ha  $x = y^\vee$ .

H7 Bármely  $x, y \in K$  elemekre  $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$  teljesül, ahol egy tetszőleges  $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$  mérték esetén  $\mu^\vee$  az alábbi módon definiált:

$$\int_K f(x) d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

Például, ha  $K$  egy lokálisan kompakt topologikus csoport,  $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$  és  $x^\vee = x^{-1}$ , akkor  $(K, *, \vee)$  hipercsoport. Valóban, a csoportművelet asszociativitása miatt H1 teljesül, a csoport egységeleme a hipercsoportnak is egységeleme és  $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) = \{xy\}$  akkor és csak akkor teljesül, ha  $x = y^{-1}$ , továbbá

$$(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{(xy)^{-1}} = \delta_{y^{-1}x^{-1}} = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}.$$

A hipercsoportok tehát tekinthetők a lokálisan kompakt csoportok általánosításának, ahol a korlátos mértékek konvolúciója hasonlóan működik mint a mértékek Banach-algebrája csoportok esetén. A konvolúció operátor segítségével hipercsoportokra is általánosíthatjuk a csoportok esetén természetes módon létező transláció fogalmát. Tekintsünk egy  $f \in \mathcal{C}(K)$  függvényt, és legyen  $x, y \in K$ . Ekkor az  $f$  függvény  $x$ -szel való bal- illetve jobb-eltoltja az  $y$  pontban

$$\mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z), \quad \mathcal{T}_x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_y * \delta_x)(z).$$

A csoportoknál használható  $f(xy)$  kifejezés analógiájaként bevezetjük a  $\mathcal{T}$  eltolás operátorral, vagy transláció operátorral kapcsolatban az

$$f(x * y) = \mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z)$$

jelölést, habár  $x * y$  önmagában nem értelmezhető.

### 1.3 PÉLDÁK HIPERC SOPORTOKRA

*Kételemű hipercsoportok.* Legyen  $\theta \in (0, 1]$  és  $K = \{0, 1\}$ , ahol a 0 a hipercsoport egységeleme lesz. Ekkor természetesen  $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$ ,  $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1$ , és az egyetlen nemtriviális konvolúció pedig

$$\delta_1 * \delta_1 = \theta \delta_0 + (1 - \theta) \delta_1.$$

Könnyen látható, hogy ha az involúció az identikus leképezés, akkor  $(K, *)$  hipercsoport, és ha  $\theta = 1$ , akkor a  $\mathbb{Z}_2$  kételemű csoportot kapjuk.

*Folytonos polinomiális hipercsoportok.* Legyen  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  egy Jacobi-típusú polinom rendszer, vagyis az  $I = [-1, 1]$  intervallumon az  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  súlyfüggvényre nézve ortogonális rendszer, és tegyük fel, hogy  $\alpha \geq \beta > -1$ , és  $\beta \geq -1/2$  vagy  $\alpha + \beta \geq 0$ . Ekkor  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -nek létezik az úgynevezett szorzat formulája, azaz bármely  $x, y \in I$  esetén létezik olyan  $\delta_{x,y} \in \mathcal{M}^1(I)$  mérték, amelyre

$$P_n(x)P_n(y) = \int_I P_n(z) d\delta_{x,y}(z) \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, továbbá  $e = 1$  esetén  $\delta_{e,x} = \delta_x$ . Belátható, hogy ekkor  $(I, *)$  hipercsoport a  $\delta_x * \delta_y = \delta_{x,y}$  konvolúcióval, tehát ekkor

$$f(x * y) = \int_I f(z) d\delta_{x,y}(z).$$

A hipercsoport karakterei éppen a  $P_n$  polinomok  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Az ilyen hipercsoportok bizonyos értelemben véve duálisai a megfelelő diszkrét polinomiális hipercsoportoknak, amelyekről a következő fejezetben lesz szó.

## 2 FÜGGVÉNYEGYENLETEK POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOKON

### 2.1 EGYVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOK

Legyenek  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  és  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  olyan valós sorozatok, amelyekre fennállnak az alábbi tulajdonságok:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha_{n+1} > 0 \quad \text{és} \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

minden  $n$  természetes szám esetén. Definiáljuk a  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom sorozatot úgy, hogy  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  és

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n+1}(x)$$

minden  $n \geq 1$  egész és  $x$  valós szám esetén. Ekkor létezik olyan kompakt tartójú  $\pi$  mérték, melyre nézve  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ortogonális polinom rendszer és léteznek olyan  $c(n, m, k)$  konstansok (*linearizációs együtthatók*) minden  $n, m, k$  természetes szám esetén, hogy

$$P_n P_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) P_k.$$

Ha a linearizációs együtthatók nemnegatívak,  $\delta_n^\vee = \delta_n$  és

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) \delta_k \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

akkor  $K = (\mathbb{N}, *, \vee)$  hipercsoport. Ismert, hogy egy  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom sorozat által generált  $K = (\mathbb{N}, *)$  polinomiális hipercsoporton az

$$\int_K a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x * y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in K)$$

függvényegyenletet teljesítő *additív* függvények  $a(n) = cP'_n(1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alakúak valamely  $c$  komplex szám esetén, illetve az

$$\int_K m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x * y) = m(x)m(y) \quad (x, y \in \mathbb{N}),$$

egyenletet kielégítő *exponenciális* függvények pontosan az  $m(n) = P_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  függvények valamely  $\lambda$  komplex szám esetén.

## 2.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE

Az általánosított  $N$ -ed rendű momentum függvények egyenletének általános megoldására vonatkozó tételünk a következő:

**TÉTEL.** Legyen  $K = (\mathbb{N}, *)$  a  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom rendszer által generált polinomiális hipercsoport és  $\lambda$  tetszőleges komplex szám. A  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$  függvények akkor és csak akkor alkotnak a  $\varphi_0(n) = P_n(\lambda)$  exponenciális függvény által generált általánosított  $N$ -ed rendű momentum sorozatot  $(\mathbb{N}, *)$ -on, azaz akkor és csak akkor elégítik ki a

$$\varphi_k(\delta_x * \delta_y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) \quad (x, y \in K)$$

egyenletet  $k = 0, 1, \dots, N$  estén, ha

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$$

fennáll mind  $n \in \mathbb{N}$  és  $k = 0, 1, \dots, N$  esetén, ahol

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j \quad (x \in \mathbb{C}),$$

$c_0 = \lambda$  és  $c_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  tetszőleges komplex számok.

### 2.3 SZINUSZ ÉS KOSZINUSZ EGYENLET

Tekintsük valamely  $(\mathbb{N}, *)$  polinomiális hiper csoporton az

$$f(n * m) = f(n)g(m) + f(m)g(n) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

*szinusz egyenletet*, illetve az

$$f(n * m) = f(n)f(m) - g(n)g(m) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

*koszinusz egyenletet*.

Polinomiális hiper csoportokra teljesül a spektrálszintézis és a spektrálanalízis (lásd [Sze02]), ennek felhasználásával bizonyítjuk az alábbi, szinusz egyenlet megoldásait megadó tételt, és hasonló eredményünk van a koszinusz egyenletre vonatkozóan.

**TÉTEL.** *Legyen  $(\mathbb{N}, *)$  a  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom rendszer által generált hiper csoport és legyenek  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  függvények, ahol  $f$  nem azonosan nulla. Az  $f$  és  $g$  függvények pontosan akkor elégítik ki a szinusz egyenletet, ha felírhatóak az alábbi alakok valamelyikébe:*

$$I. \quad f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda)/2,$$

$$II. \quad f(n) = a(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)), \quad g(n) = (P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda_2))/2,$$

$$III. \quad f(n) = bP'_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda),$$

ahol  $a, b, \lambda, \lambda_1$  és  $\lambda_2$  tetszőleges komplex számok.

### 2.4 LEVI–CIVITA-EGYENLET

Legyen  $K = (\mathbb{N}, *)$  a  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom sorozat által generált polinomiális hiper csoport, és tekintsük az

$$f(x * y) = \sum_{i=1}^n g_i(x)h_i(y) \quad (x \in K)$$

Levi–Civita-egyenletet. Ekkor  $K$ -ra teljesül a spektrálszintézis és a spektrálanalízis, továbbá ha  $V$  egy  $n$ -dimenziós eltolásinvariáns altere a  $\mathcal{C}(K)$  lineáris térnek, akkor léteznek olyan  $m_1, \dots, m_k$  természetes számok és  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  különböző komplex számok, hogy  $m_1 + \dots + m_k = n$ , és  $V$ -nek egy bázisát adják az  $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$  függvények. Mivel a spektrálanalízis nemcsak polinomiális hiper csoportokra teljesül, hanem például Sturm–Liouville-hiper csoportokra is ([SzV10]), így a tételt általánosabban is megfogalmazhatjuk, ha annyit teszünk fel a hiper csoportról, hogy

$\mathcal{C}(K)$  véges dimenziós eltolásinvariáns altereit olyan lineárisan független exponenciális monomok generálják, amelyek előállnak egy  $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$  egy-paraméteres exponenciális függvénysereg tagjainak deriváltjaiként. Mivel az  $f$  eltoltjai által generált  $\tau(f)$   $n$ -dimenziós eltolásinvariáns alter tartalmazza a  $g_i$  és a  $h_i$  függvényeket  $i = 1, \dots, n$  esetén, így léteznek  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  komplex számok úgy, hogy a  $\tau(f)$  alteret generálják az  $x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l)$  függvények  $l = 1, 2, \dots, k$  és  $j = 0, 1, \dots, n_l - 1$  esetén, ahol  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Az ismeretlen függvényeket így komplex együtthatók segítségével a következő formába írhatjuk:

$$f(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{l_j} \Phi^{(j)}(x, \lambda_l),$$

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} G_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad h_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} H_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Jelölje  $G$  és  $H$  azokat az  $n \times n$  típusú mátrixokat, amelyek a  $g_i$  és  $h_i$  függvényekhez tartozó együtthatók alkotnak: ha  $t \in \{1, \dots, n\}$  és  $t = n_1 + \dots + n_{l-1} + (j + 1)$ , akkor

$$G_{it} = G_{l_j}^i, \quad H_{it} = H_{l_j}^i.$$

Eredményünk a következő:

**TÉTEL.** Az  $f, g_i, h_i : K \rightarrow \mathbb{C}$  függvények akkor és csak akkor elégítik ki a Levi-Civita-egyenletet, ha

$$H^\top \cdot G = F,$$

ahol

$$F = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B^k \end{pmatrix},$$

a  $B^l$  blokkmátrixok  $l = 1, \dots, k$  esetén az alábbi  $n_l \times n_l$  típusú mátrixok:

$$B_{ts}^l = \begin{cases} \binom{(t-1)+(s-1)}{s-1} F_{l_{(t-1)}}, & \text{ha } (t-1) + (s-1) < n_l \\ 0, & \text{ha } (t-1) + (s-1) \geq n_l \end{cases}$$

és  $F$  minden más eleme zérus.

## 2.5 DIFFERENCIAEGYENLETEK

A differenciaegyenletek elméletében egy függvény  $n$ -nel való eltoltja és az  $n$ -szer való eltolása 1-gyel ugyanazt az eredményt adja minden  $n$  természetes

szám esetén. Hiper csoportoknál azonban két lehetőség adódik differenciaegyenletek definiálására ezen két különböző értelmezés alapján. Legyen  $(\mathbb{N}, *)$  a  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polinom rendszer által generált hiper csoport és vezessük be a  $\mathcal{T}f(n) = \mathcal{T}_1 f(n) = f(n * 1)$  jelölést minden  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  és  $n \in \mathbb{N}$  esetén, továbbá legyen  $\mathcal{T}^0 f = f$  és  $\mathcal{T}^N f = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{N-1} f)$  minden  $N > 1$  egész számra. Tekintsük a  $Q$  komplex együtthatós polinomhoz tartozó  $N$ -ed rendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletet:

$$Q(\mathcal{T})f = a_N \mathcal{T}^N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}^{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

ahol  $N$  egy pozitív egész,  $a_0, \dots, a_N$  komplex számok és  $a_N \neq 0$ . Az egyenlet megoldásteret a  $Q(\mathcal{T})$  lineáris operátor nulltere, egy altér  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -ben, és eltolásinvariáns abban az értelemben, hogy ha  $f$  egy megoldás, akkor  $\mathcal{T}f$  szintén az. A következő tétel megadja az egyenlet összes megoldását:

**TÉTEL.** *Legyen  $Q$  egy  $N \geq 1$  fokú komplex polinom, melynek gyökei a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  különböző komplex számok,  $\lambda_j$  multiplicitása  $l_j$   $j = 1, 2, \dots, k$  esetén és  $l_1 + \dots + l_k = N$ . Ekkor az  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény pontosan akkor megoldása a  $Q(\mathcal{T})f = 0$  egyenletnek, ha előáll az*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (i = 0, 1, \dots, l_j - 1)$$

*függvények lineáris kombinációjaként.*

A másik értelmezési lehetőség szerint tekinthetjük az alábbi differenciaegyenletet:

$$a_N \mathcal{T}_N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}_{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

ahol  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  ismeretlen függvény,  $N$  egy pozitív egész és  $a_N, \dots, a_0$  komplex számok. Az alábbi tételünk megmutatja, hogy a megoldásteret hasonló függvények generálják, mint az előző egyenlet esetén, de itt a hiper csoportot generáló polinomoktól is függeni fog a karakterisztikus polinom:

**TÉTEL.** *Az  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény akkor és csak akkor megoldása az egyenletnek, ha előáll az*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (i = 0, 1, \dots, l_j - 1)$$

*függvények lineáris kombinációjaként, ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  különböző komplex gyökei a*

$$\lambda \mapsto a_N P_N(\lambda) + a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) + \dots + a_1 P_1(\lambda) + a_0$$

*egyenletnek, és  $\lambda_j$  multiplicitása  $l_j$  minden  $j = 1, 2, \dots, k$  esetén.*

## 2.6 TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOK

Legyen  $K$  egy megszámlálható halmaz a diszkrét topológiával ellátva,  $d$  egy pozitív egész és tekintsük a  $d$ -változós komplex polinomok  $(Q_x)_{x \in K}$  halmazát. Vezessük be az alábbi jelölést minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén:

$$K_n = \{x \in K \mid \deg Q_x \leq n\},$$

tehát  $K_n$  azon  $K$ -beli  $x$  elemek halmaza, amelyekre  $Q_x$  legfeljebb  $n$ -edfokú. Tegyük fel, hogy  $\{Q_x \mid x \in K_n\}$  egy bázisa a legfeljebb  $n$ -edfokú  $d$ -változós komplex polinomok terének. Ekkor minden  $x, y \in K$  esetén a  $Q_x Q_y$  szorzat egyértelműen felírható a

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

alakban, ahol  $c(x, y, w)$  komplex számok. Egy  $(K, *)$  hipercsoportot akkor nevezünk  $d$ -változós polinomiális hipercsoportnak, ha létezik  $d$ -változós polinomoknak olyan  $(Q_x)_{x \in K}$  halmaza, amelyre teljesül az előbbi tulajdonság, és a konvolúció  $K$ -n az alábbi módon definiált:

$$\delta_x * \delta_y(\{w\}) = c(x, y, w) \quad (x, y, w \in K).$$

Megjegyezzük, hogy egy  $d$ -változós polinomiális hipercsoporton az exponenciális függvények  $m(x) = Q_x(\lambda)$  és az additív függvények pedig  $a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0)$  alakúak, ahol  $\lambda, c_1, \dots, c_d$  tetszőleges komplex számok és  $\lambda_0$  a hipercsoport normalizáló pontja:  $Q_x(\lambda_0) = 1, x \in K$ .

## 2.7 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOKON

Az egyváltozós eset momentum függvényekre vonatkozó eredményét általánosítjuk az alábbi tételben többváltozós polinomiális hipercsoportokra:

**TÉTEL.** *Legyen  $(K, *)$  a  $(Q_x)_{x \in K}$  polinomok által generált  $d$ -változós polinomiális hipercsoport. A  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$  függvények akkor és csak akkor alkotnak egy általánosított  $N$ -ed rendű momentum függvény sorozatot  $K$ -n, ha*

$$\varphi_k(x) = (Q_x \circ f)^{(k)}(0)$$

*fennáll minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $k = 0, 1, \dots, N$  esetén, ahol  $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$  és  $f_i$  legfeljebb  $N$ -ed fokú polinom  $i = 1, \dots, d$  esetén.*

### 3 FÜGGVÉNYEGYENLETEK STURM–LIOUVILLE-HIPERC SOPORTOKON

#### 3.1 STURM–LIOUVILLE-HIPERC SOPORTOK

A Sturm–Liouville-hipercsoportok nevüket a definiálásukhoz használt Sturm–Liouville-operátorról kapták, illetve onnan, hogy az ilyen hipercsoportok exponenciális függvényei egy Sturm–Liouville-féle peremérték probléma megoldásai. Egy  $A : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt *Sturm–Liouville-függvénynek* nevezünk, ha a pozitív valós számok  $\mathbb{R}_+$  halmazán pozitív és folytonosan differenciálható. Az  $A$  függvényhez tartozó  $L_A$  *Sturm–Liouville-operátor*

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

ahol  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ezek után bevezetjük az  $l$  differenciáloperátort a  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  téren az alábbi módon:

$$\begin{aligned} l[u](x, y) &= (L_A)_x u(x, y) - (L_A)_y u(x, y) = \\ &= -\partial_1^2 u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y). \end{aligned}$$

A  $K = (\mathbb{R}_0, *)$  hipercsoportot *Sturm–Liouville-hipercsoportnak* nevezzük, ha létezik egy  $A$  Sturm–Liouville-függvény, amelyre teljesül, hogy minden olyan  $f$  függvény esetén, amely egy páros nemnegatív  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ -beli függvény megszorítása  $\mathbb{R}_0$ -ra, az  $u_f : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_0} f d(\delta_x * \delta_y) = f(x * y)$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható és kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$l[u_f] = 0, \quad \partial_2 u_f(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Ez egyenértékű azzal, hogy  $u_f$  egyértelmű megoldása az

$$\partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) = \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y),$$

$$\partial_1 u(0, y) = 0, \quad \partial_2 u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = f(y)$$

peremérték feladatnak, ahol  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . Egy Sturm–Liouville-hipercsoporton az  $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  függvény pontosan akkor exponenciális függvény, ha

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0,$$

és az  $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  függvény pontosan akkor additív függvény, ha

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \quad a'(0) = 0$$

teljesül valamely  $\lambda$  komplex szám és minden  $x \in \mathbb{R}_+$  esetén. Mivel minden exponenciális függvény egy sajátfüggvénye a hipercsoportozhoz tartozó Sturm–Liouville-operátornak, és minden komplex szám sajátérték, így a komplex számok és az exponenciális függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, és létezik egy  $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  exponenciális sereg  $K$ -n.

### 3.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE

Ebben az alfejezetben kimondjuk és bizonyítjuk a Sturm–Liouville-hipercsoportok általánosított momentum függvényeit megadó tételt.

**TÉTEL.** *Legyen  $K = (\mathbb{R}_0, *A)$  egy Sturm–Liouville-hipercsoport és jelölje  $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a hozzá tartozó exponenciális sereget. A  $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  függvények pontosan akkor alkotnak egy  $N$ -ed rendű általánosított momentum függvény sorozatot  $K$ -n, ha léteznek olyan  $c_0, c_1, \dots, c_N$  komplex számok, amelyekre*

$$\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t)) \Big|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

és

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \frac{t^j}{j!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

## INTRODUCTION

The general theory of hypergroups had been worked out at the 1970s (see [Dun73], [Jew75], [Spe75]). Hypergroups are locally compact spaces on which the bounded Radon measures form a Banach algebra with the convolution of measures, but no operation is defined in the regular sense between the elements. There are numerous results related to functional equations on general algebraic structures, for example the monography of László Székelyhidi was published in 1991 on convolution type functional equations on topological abelian groups ([Sze91]). As hypergroups are generalizations of these structures so that book includes a lot of discussions of problems similar to in our dissertation. The dissertation contains the results of my research I have obtained partly on my own and partly cooperated with László Székelyhidi. The aim of this dissertation is to solve different functional equations on various special hypergroups. We placed emphasis on equations which describe moment functions because of their special role in probability theory.

The dissertation consists of three chapters. In the first chapter we fix the notation, present the definition of hypergroups, some related basic facts, and then some simple particular examples for hypergroups are shortly outlined.

The second chapter deals with discrete polynomial hypergroups. We describe the generalized moment functions of these hypergroups. Using the tools of spectral synthesis we present the solutions of the sine and the cosine equations, and then the more general Levi–Civita equation is investigated. We point out that on polynomial hypergroups there are two different ways to define linear difference equations with constant coefficients and in fact these are equivalent to ordinary difference equations with nonconstant coefficients. The general solution of the homogeneous equation in both cases are given. After that we deal with polynomial hypergroups in several variables and we characterize the generalized moment functions in this case.

The third chapter devoted to Sturm–Liouville hypergroups. Besides the the definition and some known theorems and examples we give the solutions of the equation of generalized moment functions.

# 1 HYPERGROUPS

## 1.1 NOTATION, TERMINOLOGY

Let  $X$  be a locally compact Hausdorff space and denote  $\mathcal{C}(X)$  the continuous complex functions on  $X$ . The set of continuous functions with compact support is denoted by  $\mathcal{C}_c(X)$ . The space  $\mathcal{C}_c(X)$  is the union of the spaces

$$\mathcal{C}_c(X, K) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) \mid \text{supp } f \subset K\},$$

where the subsets  $K \subset X$  are compact. If these spaces are equipped with the topology of the uniform convergence than we get a locally convex topology on  $\mathcal{C}_c(X)$  as the inductive limit of spaces  $\mathcal{C}_c(X, K)$ . We said that  $\mu$  is a *complex Radon measure* on  $X$  if  $\mu$  is a continuous linear functional on  $\mathcal{C}_c(X)$ . For the image of a function  $f \in \mathcal{C}_c(X)$  by the measure  $\mu$  we use the notation

$$\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu.$$

The set of all complex Radon measures of  $X$  denoted by  $\mathcal{M}(X)$ . The set of bounded, resp. probability measures on  $X$  will be denoted by  $\mathcal{M}^b(X)$ , resp.  $\mathcal{M}^1(X)$ . The measure  $\delta_x \in \mathcal{M}^1(X)$  is called the *Dirac measure* or the *point measure* at  $x \in X$  if

$$\delta_x(f) = f(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(X)).$$

## 1.2 THE MEASURE ALGEBRA OF HYPERGROUPS

For a locally compact Hausdorff space  $K$  we say that  $(K, *, \vee)$  is a *hypergroup* if the following axioms are satisfied:

- H1 There is a binary operation  $*$  (*convolution*) on the vector space  $\mathcal{M}^b(K)$ , such that  $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$  is an algebra.
- H2 For all  $x, y \in K$ ,  $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$  and  $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  is compact.
- H3 The mapping  $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$  is continuous, where  $\mathcal{M}^1(K)$  has the weak topology with respect to  $\mathcal{C}_c(K)$ .
- H4 The mapping  $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  is continuous, where  $\mathcal{K}(K)$  is equipped with the Michael topology (see [Mic55]).
- H5 There exists a unique element  $e \in K$  such that  $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$  for all  $x \in K$ .

H6 There exists a  $\vee : K \rightarrow K$  homeomorphism (*involution*), such that  $(x^\vee)^\vee = x$  for all  $x \in K$  and for any  $x, y \in K$ ,  $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$  if and only if  $x = y^\vee$ .

H7 For  $x, y \in K$ ,  $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$  holds, where  $\mu^\vee$  is defined by

$$\int_K f(x) d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

For example, if  $K$  is a locally compact topological group,  $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$  and  $x^\vee = x^{-1}$  than  $(K, *, \vee)$  is a hypergroup. Indeed, H1 holds by the associativity of the group operation, the identity element of the group is also the identity element of the hypergroup,  $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) = \{xy\}$  if and only if  $x = y^{-1}$  and

$$(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{(xy)^{-1}} = \delta_{y^{-1}x^{-1}} = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}.$$

Thus hypergroups can be considered as generalizations of the locally compact groups where the measures convolve in a similar way to that in the Banach algebra of measures on a group. The notion of translation, which exists in a natural way in the case of groups, can be generalized for hypergroups by the help of the convolution operation. Let us consider a function  $f \in \mathcal{C}(K)$  and let  $x, y \in K$ . The *left*, respectively the *right translate of f by x at y* are

$$\mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z), \quad \mathcal{T}_x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_y * \delta_x)(z).$$

As an analogue of the term  $f(xy)$  we introduce the following notation

$$f(x * y) = \mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z),$$

however  $x * y$  has no meaning on its own.

### 1.3 EXAMPLES FOR HYPERGROUPS

*Two-element hypergroups.* Let  $\theta \in (0, 1]$  and  $K = \{0, 1\}$ , where 0 will be the identity element of the hypergroup. Obviously  $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$ ,  $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1$ , and the only nontrivial convolution is

$$\delta_1 * \delta_1 = \theta \delta_0 + (1 - \theta) \delta_1.$$

It is easy to see that if the involution is the identical function, than  $(K, *)$  will be a hypergroup and if  $\theta = 1$ , than we will get the two-element group  $\mathbb{Z}_2$ .

*Continuous polynomial hypergroups.* Let  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a Jacobi-type polynomial system, that is an orthogonal system on the interval  $I = [-1, 1]$  with respect to the weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , moreover let us suppose that  $\alpha \geq \beta > -1$ , and  $\beta \geq -1/2$  or  $\alpha + \beta \geq 0$ . Under these conditions  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  has a product formula, namely for all  $x, y \in I$  there exists a measure  $\delta_{x,y} \in \mathcal{M}^1(I)$  such that

$$P_n(x)P_n(y) = \int_I P_n(z) d\delta_{x,y}(z) \quad (n \in \mathbb{N})$$

holds and if  $e = 1$  than  $\delta_{e,x} = \delta_x$ . It can be proved that then  $(I, *)$  is a hypergroup with the convolution  $\delta_x * \delta_y = \delta_{x,y}$ , so then

$$f(x * y) = \int_I f(z) d\delta_{x,y}(z).$$

The characters of this hypergroup are exactly the polynomials  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . In some sense these kind of hypergroups are the duals of the corresponding discrete polynomial hypergroups which are the topic of the next chapter.

## 2 FUNCTIONAL EQUATIONS ON POLYNOMIAL HYPERGROUPS

### 2.1 POLYNOMIAL HYPERGROUPS IN ONE VARIABLE

Let  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be real sequences such that

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha_{n+1} > 0 \quad \text{and} \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

hold for all  $n \in \mathbb{N}$ . We define the polynomial sequence  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  by  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  and

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n+1}(x) \quad (n > 1), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

In this case there exists a compactly supported measure  $\pi$  for which  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forms an orthogonal polynomial system and there exist constants  $c(n, m, k)$  for all  $n, m, k$  natural numbers such that

$$P_n P_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) P_k.$$

If these *linearization coefficients* are nonnegative,  $\delta_n^\vee = \delta_n$  and

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) \delta_k \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

then  $K = (\mathbb{N}, *, \vee)$  is a hypergroup. It is known that on a polynomial hypergroup generated by the  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  polynomials the solutions of the functional equation

$$\int_K a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x * y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in K),$$

that is the *additive* functions have the form  $a(n) = cP'_n(1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  with some complex number  $c$ , and the *exponential functions* satisfying

$$\int_K m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x * y) = m(x)m(y) \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

are exactly the functions of the form  $m(n) = P_n(\lambda)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  with some complex number  $\lambda$ .

## 2.2 EQUATION OF MOMENT FUNCTIONS

Our result on the solutions of the equation of the *generalized moment functions of order  $N$*  is the following:

**THEOREM.** *Let  $K = (\mathbb{N}, *)$  be the polynomial hypergroup associated with the sequence of polynomials  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $\lambda$  an arbitrary complex number. The functions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$  form a generalized moment sequence of order  $N$  on  $K$ , that is the equation*

$$\varphi_k(\delta_x * \delta_y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) \quad (x, y \in K)$$

holds for  $k = 0, 1, \dots, N$  if and only if

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$$

for all  $n \in \mathbb{N}$  and  $k = 0, 1, \dots, N$ , where

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j \quad (x \in \mathbb{C}),$$

$c_0 = \lambda$  and  $c_j, j = 1, 2, \dots$  are arbitrary complex numbers.

## 2.3 THE SINE AND COSINE EQUATIONS

Let us consider on a polynomial hypergroup  $(\mathbb{N}, *)$  the *sine equation*

$$f(n * m) = f(n)g(m) + f(m)g(n) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

sine equation and the cosine equation

$$f(n * m) = f(n)f(m) - g(n)g(m) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Based on the fact that spectral synthesis and spectral analysis hold for polynomial hypergroups (see [Sze02]) we have the following theorem on the solutions of the sine equation and a similar result for the cosine equation.

**THEOREM.** *Let  $(\mathbb{N}, *)$  be the hypergroup associated with the polynomial system  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and let  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  are unknown functions such that  $f$  is not identically zero. The functions  $f$  and  $g$  satisfy the sine equation if and only if they can be written in one of the following forms:*

- I.  $f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda)/2,$
- II.  $f(n) = a(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)), \quad g(n) = (P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda_2))/2,$
- III.  $f(n) = bP'_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda),$

where  $a, b, \lambda, \lambda_1$  and  $\lambda_2$  are arbitrary complex numbers.

## 2.4 THE LEVI–CIVITA EQUATION

Let  $K = (\mathbb{N}, *)$  be the polynomial hypergroup associated with the sequence of polynomials  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . In this case spectral synthesis and spectral analysis hold for  $K$ , and additionally if  $V$  is an  $n$  dimensional translation invariant subspace of  $\mathcal{C}(K)$  then there exist natural numbers  $m_1, \dots, m_k$  and different complex numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  such that  $m_1 + \dots + m_k = n$  and the functions  $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i), i = 1, \dots, k, j = 0, 1, \dots, m_i - 1$  form a basis of  $V$ . Since spectral analysis holds not only on polynomial hypergroups but also for example on Sturm–Liouville hypergroups ([SzV10]), our theorem can be formulated more generally if only the fact is supposed that the finite dimensional translation invariant subspaces of  $\mathcal{C}(K)$  are generated by linearly independent exponential monomials which can be given as the derivatives of the members of a one-parameter exponential family  $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ . Since the  $n$  dimensional translation invariant subspace  $\tau(f)$  generated by all the translates of  $f$  contains the functions  $g_i$  and  $h_i, i = 1, \dots, n$ , so there exist complex numbers  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  such that the subspace  $\tau(f)$  is generated by the functions  $x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), l = 1, 2, \dots, k$  and  $j = 0, 1, \dots, n_l - 1$ , where  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Thus the unknown functions can be written with some complex coefficients in the following forms:

$$f(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{l,j} \Phi^{(j)}(x, \lambda_l),$$

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} G_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad h_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} H_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Let us denote by  $G$  and  $H$  the  $n \times n$  type matrices which contain the coefficients of the functions  $g_i$  and  $h_i$ : if  $t \in \{1, \dots, n\}$  and  $t = n_1 + \dots + n_{l-1} + (j+1)$  then

$$G_{it} = G_{l_j}^i, \quad H_{it} = H_{l_j}^i.$$

Our result is the following:

**THEOREM.** *The functions  $f, g_i, h_i : K \rightarrow \mathbb{C}$  satisfy the Levi-Civita equation if and only if*

$$H^\top \cdot G = F,$$

where

$$F = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B^k \end{pmatrix},$$

the block matrices  $B^l$ ,  $l = 1, \dots, k$  are type of  $n_l \times n_l$  with

$$B_{ts}^l = \begin{cases} \binom{(t-1)+(s-1)}{s-1} F_{l_{(t-1)}}, & \text{ha } (t-1) + (s-1) < n_l \\ 0, & \text{ha } (t-1) + (s-1) \geq n_l \end{cases}$$

and all the other elements of  $F$  are zero.

## 2.5 DIFFERENCE EQUATIONS

In the classical theory of difference equations on the integers the translate of a function by  $n$  and the translation of the function  $n$ -times by 1 give the same result for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ . But in the case of hypergroups there are two different ways for defining difference equations on the basis of these two interpretations. Let  $K = (\mathbb{N}, *)$  be the polynomial hypergroup associated with the polynomials  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and let us introduce the notation  $\mathcal{T}f(n) = \mathcal{T}_1 f(n) = f(n * 1)$  for all  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  and  $n \in \mathbb{N}$ , moreover  $\mathcal{T}^0 f = f$  and  $\mathcal{T}^N f = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{N-1} f)$  for each integer  $N > 1$ . Let us consider the *homogeneous linear difference equation of order  $N$  on the hypergroup  $K$  with constant coefficients* associated to the complex polynomial  $Q$  :

$$Q(\mathcal{T})f = a_N \mathcal{T}^N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}^{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

where  $N$  is a positive integer,  $a_0, \dots, a_N$  are complex numbers and  $a_N \neq 0$ . The *solution space* of the equation is the kernel of the linear operator  $Q(\mathcal{T})$ ,

hence it is a linear subspace of the function space  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . This solution space is translation invariant in the sense that if  $f$  is a solution, then  $\mathcal{T}f$  is a solution, too. The following theorem gives us all the solutions of the equation:

**THEOREM.** *Let  $Q$  be a complex polynomial of degree  $N \geq 1$  with all different complex zeros  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , where the multiplicity of  $\lambda_j$  is  $l_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . Then the function  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  is a solution of the equation  $Q(\mathcal{T})f = 0$  if and only if it is a linear combination of functions of the form*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (i = 0, 1, \dots, l_j - 1).$$

On the other hand we can consider the difference equation

$$a_N \mathcal{T}_N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}_{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

where  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  is the unknown function,  $N$  is a positive integer and  $a_N, \dots, a_0$  are complex numbers. The next theorem shows that the solution space is generated by functions similar to the previous case, but the characteristic polynomial is different: it depends on the basic generating polynomials of the hypergroup.

**THEOREM.** *The function  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  is a solution of the equation if and only if it is the linear combination of functions of the form*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots, k); \quad (i = 0, 1, \dots, l_j - 1),$$

where  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  are different complex zeros of the polynomial

$$\lambda \mapsto a_N P_N(\lambda) + a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) + \dots + a_1 P_1(\lambda) + a_0$$

and the multiplicity of  $\lambda_j$  is  $l_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ .

## 2.6 POLYNOMIAL HYPERGROUPS IN SEVERAL VARIABLES

Let  $K$  be a countable set equipped with the discrete topology and let  $d$  be a positive integer and let us consider a set  $(Q_x)_{x \in K}$  of polynomials in  $d$  complex variables. We introduce the following notation for any  $n \in \mathbb{N}$ :

$$K_n = \{x \in K \mid \deg Q_x \leq n\},$$

that is the symbol  $K_n$  denotes the set of all elements  $x$  in  $K$  for which the degree of  $Q_x$  is not greater than  $n$ . Now we suppose that the polynomials  $Q_x$

with  $x$  in  $K_n$  form a basis for all polynomials of degree not greater than  $n$ . In this case for each  $x, y$  in  $K$  the product  $Q_x Q_y$  admits a unique representation

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

with some complex numbers  $c(x, y, w)$ . A hypergroup  $(K, *)$  is called a *polynomial hypergroup in  $d$  variables* or  *$d$ -dimensional polynomial hypergroup* if there exists a family of polynomials  $(Q_x)_{x \in K}$  in  $d$  complex variables satisfying the above condition and such that the convolution in  $K$  is defined by

$$\delta_x * \delta_y(\{w\}) = c(x, y, w), \quad (x, y, w \in K).$$

We remark, that on a polynomial hypergroup in  $d$  variables the exponential functions have the form  $m(x) = Q_x(\lambda)$  and the additive functions have the form  $a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0)$ , where  $\lambda, c_1, \dots, c_d$  are arbitrary complex numbers and  $\lambda_0$  is the normalizing point of the hypergroup:  $Q_x(\lambda_0) = 1, x \in K$ .

## 2.7 MOMENT FUNCTIONS ON POLYNOMIAL HYPERGROUPS IN SEVERAL VARIABLES

The following theorem generalizes our result concerning the one dimensional case to the case of several variables:

**THEOREM.** *Let  $K$  be a  $d$  dimensional polynomial hypergroup generated by the family of polynomials  $(Q_x)_{x \in K}$ . The functions  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$  form a generalized moment sequence of order  $N$  on  $K$  if and only if*

$$\varphi_k(x) = (Q_x \circ f)^{(k)}(0)$$

*holds for all  $n$  in  $\mathbb{N}$  and for  $k = 0, 1, \dots, N$ , where  $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$  such that  $f_i$  is a polynomial of degree at most  $N$  for  $i = 1, \dots, d$ .*

## 3 FUNCTIONAL EQUATIONS ON STURM–LIOUVILLE HYPERGROUPS

### 3.1 STURM–LIOUVILLE HYPERGROUPS

The name of Sturm–Liouville hypergroups was given by the Sturm–Liouville operator, which is used in their definition, moreover, the exponentials of these hypergroups are the solutions of a Sturm–Liouville boundary value problem. The continuous function  $A : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  is called a *Sturm–Liouville function*,

if it is positive and continuously differentiable on the positive reals. For a given Sturm–Liouville function  $A$  we define the *Sturm–Liouville operator*  $L_A$  by

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

where  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a twice continuously differentiable function. Using  $L_A$  we introduce the differential operator  $l$  on the space  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$  by

$$\begin{aligned} l[u](x, y) &= (L_A)_x u(x, y) - (L_A)_y u(x, y) = \\ &= -\partial_1^2 u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y). \end{aligned}$$

A hypergroup  $K = (\mathbb{R}_0, *)$  is called a *Sturm–Liouville hypergroup* if there exists a Sturm–Liouville function  $A$  such that given any function  $f$  which is the restriction for  $\mathbb{R}_0$  of an even nonnegative function from  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ , the function  $u_f : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_0} f d(\delta_x * \delta_y) = f(x * y)$$

is twice continuously differentiable and satisfies the partial differential equation

$$l[u_f] = 0, \quad \partial_2 u_f(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

This is equivalent to that  $u_f$  is the unique solution of the boundary value problem

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) &= \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y), \\ \partial_1 u(0, y) = 0, \quad \partial_2 u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = f(y), \end{aligned}$$

where  $x, y \in \mathbb{R}_+$ . On a Sturm–Liouville hypergroup the function  $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  is an exponential if and only if

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0$$

and the function  $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$  is additive if and only if

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \quad a'(0) = 0$$

holds for some complex number  $\lambda$  and for all  $x \in \mathbb{R}_+$ . Since all the exponential functions are eigenfunctions of the related Sturm–Liouville operator and all the complex numbers are eigenvalues so there is a one-to-one correspondence between the complex numbers and the exponential functions, and there exists an exponential family  $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  on  $K$ .

### 3.2 THE EQUATION OF MOMENT FUNCTIONS

In this subsection, we formulate and prove a theorem which gives the generalized moment functions on a Sturm–Liouville hypergroup.

**THEOREM.** *Let  $K = (\mathbb{R}_0, *A)$  be the Sturm–Liouville hypergroup corresponding to the Sturm–Liouville function  $A$  with the exponential family  $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . The functions  $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$  form a sequence of generalized moment functions of order  $N$  on the hypergroup  $K$  if and only if there are complex numbers  $c_0, c_1, \dots, c_N$  such that*

$$\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t)) \Big|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

and

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \frac{t^j}{j!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

## IRODALOMJEGYZÉK

- [BIH95] W. R. Bloom and H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin, New York, (1995).
- [Dun73] C. F. Dunkl, *The measure algebra of a locally compact hypergroup*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 331–348.
- [Gal98] L. Gallardo, *Some Methods to Find Moment Functions on Hypergroups*, Harmonic Analysis and Hypergroups, Anderson, J. M., Litvinov, G. L., Ross, K. A., Singh, A. I., Sunder, V. S. and Wildberger, N. J., Gruyter Studies in Mathematics, de Gruyter Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1998), 13–31
- [Jew75] R. I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures*, Adv. in Math., **18** (1975), no. 1, 1–101.
- [Mic55] E. A. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1955), 152–182.
- [Spe75] R. Spector, *Aperçu de la théorie des hypergroupes*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Sémin. Nancy-Strasbourg, 1973-75, Lecture Notes in Math., **497** (1975), 643–673.
- [Sze91] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological abelian groups*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, (1991).
- [Sze02] L. Székelyhidi, *Spectral Analysis and Spectral Synthesis on Polynomial Hypergroups*, Monatshefte Math., **141** (2004), no. 1, 33–43.
- [SzV10] L. Székelyhidi, L. Vajday *Spectral analysis on commutative hypergroups*, Aequationes Math., **80** (2010), 223–226.
- [Zeu92] H. Zeuner, *Moment functions and laws of large numbers on hypergroups*, Math. Z., **211** (1992), no. 3, 369–407.

## ELŐADÁSOK

- [1] *Sine and cosine equation on discrete polynomial hypergroups*, The 3rd Debrecen-Katowice Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2003.
- [2] *Difference equations on hypergroups*, The 5th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2005.
- [3] *Difference equations on discrete polynomial hypergroups*, The 11th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo (Poland), 2006.
- [4] *Levi-Civita Equation on Hypergroups*, Numbers, Functions, Equations '08, Noszvaj (Hungary), 2008

## PUBLIKÁCIÓK

- [1] S. Bácsó, Á. Orosz, and B. Szilágyi, *On the rectifiability condition of a second order ordinary differential equation*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **17** (2001), 127–129.
- [2] N. Benedek, Á. Orosz, *Simple digital objects on  $\mathbb{Z}^2*$* , Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics, Eger, (2007), vol. 1, 137–144
- [3] Á. Orosz, *Sine and cosine equation on discrete polynomial hypergroups*, Aequationes Math., **72** (2006), 225–233.
- [4] Á. Orosz, *Difference equations on discrete polynomial hypergroups*, Adv. in Difference Equations, (2006), Article ID 51427, 10 pages.
- [5] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment Functions on Polynomial Hypergroups in Several Variables*, Publ. Math. Debrecen **65** no. 3-4, (2004), 429–438.
- [6] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment functions on polynomial hypergroups*, Archiv der Math., **85** (2005), 141–150.
- [7] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment functions on Sturm-Liouville hypergroups*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **29** (2008), 141–156.