



AZ ALGEBRAI GONDOLKODÁSMÓD FEJLESZTÉSÉNEK KÉRDÉSEI

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Lócska Orsolya Dóra

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2026

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2026. június 10.

.....

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Lócska Orsolya Dóra doktorjelölt 2020 és 2026. között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2026. június 10

.....

a témavezető aláírása

AZ ALGEBRAI GONDOLKODÁSMÓD FEJLESZTÉSÉNEK KÉRDÉSEI

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Lócska Orsolya Dóra okleveles általános iskolai matematikatanár és okleveles rajz- és
vizuáliskultúra-tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20...

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt köszönettel tartozom Dr. Kovács Zoltánnak, akinél kedvesebb, segítőkészebb témavezetőt elképzelni sem lehet. Az ő támogatása és biztatása nélkül valószínűleg a doktori képzés megkezdésére sem vállalkoztam volna. Végtelenül hálás vagyok a sok tanácsért és bátorításért, melyet tőle kaptam a megbeszéléseink alatt.

Köszönöm munkahelyemnek, a Kölcsey Ferenc Református Gyakorló Általános Iskolának, hogy lehetőséget biztosított a kutatások lebonyolítására, valamint támogatta egyetemi tanulmányaimat.

Szeretném megköszönni a kutatásaimba bekapcsolódó tanár kollégák odaadó és precíz munkáját. Nagy öröm volt számomra, hogy a saját iskolámból, illetve egy Kiskőrösi és egy Budapesti intézményből is volt önkéntesen jelentkező kolléga. Külön köszönöm a kutatásban résztvevő diákoknak is, akik hol lelkesedésükkel, hol váratlan reakciókkal tették teljessé a kutatást.

Hálás vagyok férjemnek és családomnak, akik tanulmányaim során mindvégig támogattak, és szeretetükkel, türelmükkel biztos háttérrel nyújtottak számomra. Köszönöm a kislányomnak is, aki különösen emlékezetessé és izgalmassá tette a dolgozat elkészítésének időszakát.

Mindannyiótoknak hálásabb vagyok annál, mint amit szavakkal ki tudnék fejezni.

Tartalomjegyzék

Bevezetés.....	8
1. Elméleti áttekintés.....	10
1.1. Az algebra tanításáról	10
1.2. Algebrai gondolkodás.....	12
1.3. Értelemalkotás a matematikában.....	16
1.4. Értelemalkotás az algebra tanításában-tanulásában.....	19
2. Kutatási kérdések.....	21
3. A kutatás módszertana.....	23
3.1. Dizájn kutatás mint módszertani keret.....	23
3.2. A kísérleti órák.....	25
3.3. Minta	27
3.4. A kutatás korpusza	29
4. Az algebrai gondolkodás kezdetei	30
4.1. Bevezetés	30
4.2. A naptárprobléma.....	31
4.2.1. A kísérleti óra felépítése	31
4.2.2. Az első ciklus tapasztalatai	34
4.2.3. Az első és második ciklus együttes tapasztalatai.....	38
4.3. Összegzés, pedagógiai implikációk	43
5. Az algebrai gondolkodásmód sajátosságai.....	46
5.1. Bevezetés	46
5.2. Relációk megfogalmazása betűs kifejezéssel	47
5.2.1. A kísérleti óra felépítése	47
5.2.2. Tapasztalatok.....	49
5.3. A betű mint változó	51
5.3.1. A kísérleti óra felépítése	52
5.3.2. Tapasztalatok.....	54

5.4.	Algebrai tevékenységek.....	57
5.4.1.	A kísérleti óra felépítése	57
5.4.2.	Tapasztalatok: algebrai tevékenységek értelmezése	59
5.4.3.	Tapasztalatok: Betű a megoldásban.....	63
5.5.	Összegzés, pedagógiai implikációk	64
6.	Segítség a szimbólumhasználathoz szöveges feladatoknál	68
6.1.	Bevezetés	68
6.1.1.	Szimbólumhasználat	68
6.1.2.	Grafikus reprezentációk szerepe.....	69
6.2.	Első kísérleti óra: az adatok relációjának ábrázolása	70
6.2.1.	A kísérleti óra felépítése	70
6.2.2.	Tapasztalatok.....	73
6.3.	Utolsó kísérleti óra: Együttes munkavégzéses probléma	81
6.3.1.	A kísérleti óra felépítése	82
6.3.2.	Tapasztalatok.....	84
6.4.	Összegzés, pedagógiai implikációk	90
7.	Tanulói problémaalkotás	94
7.1.	Bevezetés	94
7.1.1.	A kísérleti óra felépítése	97
7.1.2.	Tapasztalatok.....	98
7.2.	Összegzés, pedagógiai implikációk	106
8.	Következtetések és további kutatási lehetőségek	108
9.	Összefoglaló.....	111
10.	Summary	114
11.	Irodalomjegyzék.....	117
12.	A disszertáció témájában készített publikációk	124
13.	Egyéb publikációk és előadások	125
	Mellékletek	126

Bevezetés

Általános iskolai matematikatanárként gyakran tapasztaltam, hogy a tanulók megrettennek, amikor betűk is megjelennek a tanórákon, hiszen annyira különbözik a korábban megszokott aritmetikai feladatok kinézetétől. A Nemzeti Alaptanterv (Magyar Közlöny, 2020) a matematika tanulásának legfontosabb céljai között megfogalmazza, hogy a tantárgy fejlessze a tanulók „szövegértését, szövegalkotó és absztrakciós képességét a matematika nyelvének és szimbólumainak szóbeli és írásbeli alkalmazása során” (p. 328). Ennek fontos része az algebra témaköre, amelyhez többek között absztrakciós képességre van szükség, valamint a matematika nyelvének, szimbólumainak helyes használatára. Az algebra bevezetése hetedik évfolyamon történik, ekkor ismerkednek meg a tanulók a változókkal, algebrai tevékenységekkel, egyenletekkel és már a szöveges feladatok egyenlettel való megoldásába is bepillantást nyernek. Nyolcadik évfolyamon leginkább már a szöveges feladatok kapnak kiemelt szerepet az algebratanulás során.

A dolgozatban az aritmetikai-algebrai átmenet megkönnyítése áll a középpontban. Hetedik és nyolcadik évfolyamon végeztünk ennek érdekében dizájn kutatást (A. L. Brown, 1992; Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Fowler és mtsai., 2023), melynek sajátossága, hogy a pedagógiai gyakorlat és a kutatás közötti folyamatos kölcsönhatásokra épít, így ideális olyan kutatásokra, amelyek nemcsak a tanítási-tanulási folyamatok megértésére, hanem azok fejlesztésére is törekсенek. A kísérleti órákat az *értelemalkotó matematikatanulás* elvei alapján építettük fel. Az értelemalkotó algebra (az angol irodalomban *sense-making algebra*) a konceptuális megértésre helyezi a hangsúlyt, szemben az eljárások algoritmikus elvégzésével. Ez a megközelítés magába foglalja például a kontextusba helyezést, a többféle reprezentációt, az általánosítást, az érvelést és a szociális tanulást.

Hetedik évfolyamon az egyenletek bevezetése előtti tanórákra összpontosítottunk, amelyeken a tanulók megismerkednek a változókkal, helyettesítési értékkel, algebrai tevékenységekkel. Problémaalapú kísérleti órákat terveztünk, melyek közös jellemzője a problémák átélhető kontextusba helyezése és az általánosítás. A problémaalapú tanórákon a tanulók aktívak voltak, az érvelés és a szociális tanulás természetes módon jelent meg. A hetedik évfolyamon végzett dizájn kutatás célja az volt, hogy a tanulók értelmet, jelentést kapcsoljanak a változókhöz, ne csupán a hagyományos betű-aritmetikai problémahelyzetekben találkozzanak velük. A kutatás során megfigyeltük az értelemalkotó algebra jellemzőit és kihívásait a hetedikes tanulók körében. Felmértük a hetedikes tanulók szimbólum használatának jellemzőit és a tanulói szimbólumhasználat tanári támogatásainak lehetőségeit.

Nyolcadik évfolyamon az egyenlettel megoldható szöveges feladatok témaköréhez terveztünk kísérleti órákat. Az értelemalkotó algebra összetevői közül ezen tanórákon leginkább a többféle reprezentáció jelent meg. Az érvelés és a szociális tanulás ennél az évfolyamnál is természetes módon bontakozott ki a pármunka és az osztálymegbeszélések alatt. A beavatkozás során az egyenletek felírásának támogatása volt a cél, amelyhez többféle reprezentációs lehetőséget tártunk a tanulók elé. Egyes esetekben a reprezentáció ki is tudta váltani az egyenlet felírását, de általában annak segítésére szolgált. A beavatkozás során megvizsgáltuk, hogy a kutatásban részt vevő nyolcadikos tanulók milyen grafikus reprezentációs készségekkel rendelkeznek egy konkrét ábrázolási módra vonatkozóan, és hogyan viszonyulnak a grafikus reprezentációkhoz. Az „együttes munkavégzéses” típusú problémák esetében megvizsgáltuk, hogy mely tényezők befolyásolják a tanulók önálló problémamegoldó stratégia választását.

A nyolcadikos tanulóknál az önálló problémaalkotás és problémamegoldás közötti kapcsolatot is vizsgáltuk, kiegészítve egy korábban hatodik évfolyamon végzett kutatást (Kovács és mtsai., 2023). A kutatások során a problémaalkotás és megoldás sikeressége, illetve a tanulók matematika érdemjeggyel jellemzett teljesítménye közötti kapcsolatot is vizsgáltuk. A problémaalkotás és -megoldás során előforduló jellegzetes hibák elemzésén keresztül a tanulók szerkezeti és szemantikai megértésébe is betekintést nyerhettünk.

A dolgozat első fejezetében elméleti áttekintést adunk az algebratanítás magyar vonatkozásáról a Nemzeti alaptanterven és a hozzá tartozó kerettanterveken keresztül. Szakirodalmi áttekintést nyújtunk az algebrai gondolkodásról, illetve az értelemalkotásról a matematikában, és az algebra tanításában-tanulásában. A 2. fejezetben a dolgozat kutatási kérdéseit fejtjük ki, míg a 3. fejezet a kutatás módszertanáról szól. A 4-7. fejezetekben a kutatás eredményei szerepelnek, az egyes fejezetekhez szorosan kapcsolódó irodalmi leírások a fejezetek elejére kerültek. A 4. és 5. fejezetben a hetedik évfolyamon végzett kutatás eredményeiről számolunk be, az algebrai gondolkodásmód kezdeteinek jellemzőin és az algebrai gondolkodásmód sajátosságain keresztül. Az eredményeket részben a (Lócska & Kovács, 2022) közleményben publikáltuk. A 6. fejezetben a nyolcadikos kutatás eredményei szerepelnek, a grafikus reprezentációk szerepére és a tanulók szimbólum használatára koncentrálva. A fejezet a (Lócska és mtsai., 2023) munka alapján készült. A 7. fejezetben a tanulói problémaalkotással foglalkozunk, nyolcadikos tanulók esetében. Az itt bemutatott eredményeket a (Lócska, 2025) közleményben ismertettük. A dolgozatot a kutatás következtetéseinek összegzésével és a további kutatási lehetőségek felvázolásával zárjuk.

1. Elméleti áttekintés

1.1. Az algebra tanításáról

A dolgozatban bemutatott kísérleti órák a 2020-2021-es tanévtől a 2022-2023-as tanévig tartottak, melyek a 2012-ben kiadott Nemzeti alaptantervhez és az ehhez igazodó kerettantervhez készültek¹. A felmenő rendszer miatt minden, kísérletben résztvevő osztály tanterve a kísérlet ideje alatt ezen okiratokhoz igazodott. A tanterv változás ellenére az algebratanításnak azt a megközelítését, amit a disszertációban bemutatunk, változatlanul érvényesnek gondoljuk. Sőt, bizonyos vonatkozásokban a 2020-as változások megerősítik elképzelésünket arról, hogy a túlzottan formális jegyeket mutató algebra tanításról el kell mozdulni a megértésen alapuló tanítás felé.

Az algebratanítás a 2012-es Nemzeti alaptantervben az alábbiak szerint jelenik meg. A tanterv a matematikatanítás alapvető céljai és feladatai között említi, hogy a tanulók megismerjenek különböző modelleket, gondolkodásmódokat, módszereket és leírásokat. Ezek közül az adott problémának megfelelően, különféle ismereteikre támaszkodva tudjanak önállóan választani a megoldási lehetőségek közül, például az aritmetikai, algebrai vagy geometriai módszerek alkalmazásával.

Alsó tagozaton, vagyis 1-4. évfolyamon már megjelennek az algebrai ismeretek, a Számelmélet, algebra témakörén belül. Ebben a korosztályban a matematikai szöveg leírására szimbólumokat használnak, illetve az ismeretlen szimbólummal jelölik, majd kiszámolják azt. Ezek a szimbólumok lehetnek különböző ábrák, de előfordul, hogy betűvel történik az ismeretlen jelölése. A kerettanterv az 1-2. évfolyamtól kezdve említi a szimbólumhasználatot:

- Szimbólumok használata matematikai szöveg leírására, az ismeretlen szimbólum kiszámítása. (1-2. évfolyam).
- Szimbólumok használata matematikai szöveg leírására, az ismeretlen szimbólum kiszámítása, ellenőrzés. (3-4. évfolyam).

A következő példa (1. ábra) egy harmadikosok számára készült, kerettantervi megfelelésséggel rendelkező feladatgyűjteményből való (Fülöp, 2020). A bemutatott feladatban a szöveges probléma megoldása nyitott mondat formájában is megjelenik, a keresett mennyiséget egy fekete háromszög jelöli. Ez a megoldásmód értelmezhető a korai algebrai gondolkodás előkészítéseként, ugyanakkor az adott példában a szimbólum didaktikai funkciója nem válik teljesen explicitté. Mivel a feladat aritmetikailag közvetlenül is megoldható, a jelölés a tanulók egy része számára

¹ A 2012-es NAT-hoz igazodó kerettantervek a https://www.oktatas.hu/koznevelas/kerettantervek/2012_nat oldalon érhetők el.

további értelmezési lépést és megnövekedett kognitív terhet jelenthet. A példa arra is utal, hogy a korai szimbólumhasználat és annak tanulást segítő szerepe erősen függ a jelölés céljának és használatának világos beágyazásától.

1. ábra

Korai szimbólumhasználat egy harmadikosoknak szánt könyvben

A továbbiakban a számfeladat helyett nyitott mondatot írj! Azt a számot, amit nem tudsz, valamilyen ábrával vagy betűvel jelöld!

Nándi perselyében 350 Ft volt. Mennyi pénze lett, ha 200 Ft-ot kapott a papjától?

Adatok:  } összesen: ?

Nyitott mondat: $350 \text{ Ft} + 200 \text{ Ft} = \blacktriangle$

Számítás: $350 \text{ Ft} + 200 \text{ Ft} = 550 \text{ Ft}$ $\blacktriangle = 550 \text{ Ft}$

Ellenőrzés: Több lett-e a pénze? Mennyivel lett több? $350 \text{ Ft} < 550 \text{ Ft}$
200 Ft

Válasz: Nándinak 550 Ft-ja lett.

Általános iskola felső tagozatán, 5-8. évfolyamon megjelenik az egyszerű algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámítása, illetve az összevonás is. Megismerkednek a tanulók az elsőfokú egyenletekkel és egyenlőtlenségekkel. Az egyenleteket lebontogatással és mérlegelvvel is megtanulják megoldani, és ellenőrzik is a munkájukat.

Középfokú oktatási intézményben, 9-12. évfolyamon részletesen megismerkednek az algebrai kifejezésekkel végzett műveletekkel, képesek lesznek elsőfokú, többismeretlenes egyenletrendszer is megoldani. Foglalkoznak szóveges feladatokkal, egyszerű négyzetgyökös, exponenciális egyenletekkel.

A 2020-ban kiadott új Nemzeti alaptantervhez (Magyar Közlöny, 2020) illeszkedő alsó tagozatos kerettanterv az algebratanítás előkészítését tapasztalati, képi és modellalkotási folyamatként írja le. Alsó tagozaton a kerettanterv nem utal a szimbólumok használatára (kivétel a mennyiségi viszonyokat kifejező szimbólumok), viszont hangsúlyosan jelenik meg a grafikus reprezentáció, mint például a szakaszábra (2. ábra). A szóveges feladatok megoldásánál nem a keresett mennyiség önálló algebrai szimbólummal való jelölése és nyitott mondatba foglalása kerül előtérbe, hanem az összefüggések megfogalmazása saját szavakkal, nyíljelöléssel vagy nyitott mondattal (Balassa és mtsai., 2022).

Az 5–8. évfolyamon önállóan is megjelennek a betűs kifejezések, ezt követően pedig az egyenletek és a szóveges feladatok változatos formákban kerülnek elő. A mindennapi életből vett példáktól kezdve a gazdasági, pénzügyi témájú szóveges feladatokig. Az egyenlet megoldására itt sem csupán a mérlegelv jelenik meg, hanem

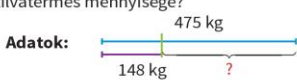
például a következtetés is. 9-12. évfolyamon külön fejezetet kaptak az egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek. Ehhez természetesen szükség van az algebrai kifejezésekkel végzett tevékenységekre is, úgymint a szorzattá alakításra, kiemelésre, vagy épp a nevezetes azonosságok használatára.

2. ábra

Példa szóveges feladat megoldására a (Balassa és mtsai., 2022) tankönyvből, 4. osztály

4. A gyümölcsösben 475 kg almát és 148 kg szilvát szüreteltek. Mennyivel több az alma mennyisége, mint a szilvatermés mennyisége?



Adatok: 

Megoldási terv: $475 \text{ kg} - 148 \text{ kg} = ?$

Becsüld meg a különbséget százakra kerekített értékkel!
 $475 \approx 500$ $148 \approx 100$
 $500 - 100 = 400$ B: 400

Írásbeli kivonással számold ki pontosan az eredményt! **Ellenőrizz írásbeli összeadással!**

$\begin{array}{r} 475 \\ -148 \\ \hline 327 \end{array}$	• 8 egyeshez, hogy 15 egyes legyen, kell 7 egyes. Leírom a 7-et az egyesek alá, az 1 tízest hozzáadom a kivonandóban a tízesekhez.	$\begin{array}{r} 327 \\ +148 \\ \hline 475 \end{array}$
$\begin{array}{r} 327 \\ +148 \\ \hline 475 \end{array}$	• 4 tízes + 1 tízes = 5 tízes, 5 tízeshez, hogy 7 tízes legyen, kell 2 tízes.	
	• 1 százashoz hogy 4 százás legyen, kell 3 százás.	

Válasz: 327 kg-mal több az almatermés mennyisége.

1.2. Algebrai gondolkodás

Mi az algebra? Freudenthal (1977) kísérletet tett az iskolai algebra fogalmának tisztázására. Úgy fogalmazott, hogy az összefüggések leírásának és az eljárások általános megoldásának képessége az algebra lényege. Ebben az újszerű perspektívában az algebrát emberi kognitív tevékenységnek tekintik. Kieran (2004) szerint az algebra többdimenziós tevékenység, amely számos gondolkodásmódot foglal magába: a mennyiségek közötti kapcsolatok elemzését, a strukturális kapcsolatok észrevételét, a változások leírását, előrejelzést és az általánosítást. Kieran az algebrai tevékenységet a problémamegoldás, modellezés és indoklás-bizonyítási tevékenység általánosabb keretében jeleníti meg. Szerinte a szimbólumhasználat "letter-symbolic algebra" (p. 142) az általánosítás és a függvényyszerű gondolkodás segédeszköze. Ezzel a felfogással pedig áthidalhatóvá válik az a szakadék, amely sok esetben az algebra korai évfolyamokon való bevezetése és a későbbi évfolyamokon elvárt algebrai gondolkodás között keletkezik.

Az algebrához köthető kettősséget Kaput (2018) már a munkájának címében is megjeleníti: *Mi az algebra? Mi az algebrai gondolkodás?* Ha az első kérdést nézzük, ott az algebra önálló tudásanyagként, kulturális örökségként jelenik meg, amelyet az iskolarendszer közvetít. Ezt az örökséget elsősorban a 9. század környéki arab matematikából, Al-Khowarizmi munkásságából vezetik le, főleg az

egyenletmegoldás tudományaként. A második kérdésnél, az algebrai gondolkodás kifejezés már emberi tevékenységet feltételez, amelynek létezése az emberektől függ. Az algebra nem csupán egy statikus tudásanyag, hanem aktívan végzett tevékenység, amely lehetővé teszi a matematikai ismeretszerzést. Kaput szerint mindkét megközelítés hasznos.

Munkájában az algebrai gondolkodásnak két fő lépcsőfokát emeli ki. Az első lépcsőfok (Core Aspect A (p. 10)) központi fogalma az általánosítás, amelybe beletartozik az általánosítás képessége, és az általánosítások egyre szisztematikusabb, konvencionális szimbólumrendszerekben való kifejezése is. Vagyis a tanulók kezdetben a saját erőforrásaikat, jellemzően a természetes nyelvet használják, később azonban áttérnek a konvencionális ábrázolási formákra. Az algebrai gondolkodás kulcstényezője a mintázatokban felismert szabályszerűségek általános kifejezése és egyre formálisabb megjelenítése. Az aritmetikai műveletek magasabb szintű megértése, tulajdonságaik tudatos alkalmazása vezet el arra a szintre, amikor a számokon túlmenően is használják a tanulók az alapműveleteket. A különböző reprezentációk használata (természetes nyelv, grafikus reprezentáció és szimbolikus reprezentáció), és ezek közötti váltás, szintén fontos tényezője a Kaput-féle első fő aspektusnak.

Az algebrai gondolkodás második lépcsőfoka a szimbólumokkal végzett, műveleti szabályokon alapuló, szintaktikailag irányított cselekvés (Core Aspect B (p. 10)). Ide tartozik például az egyenletmegoldás, algebrai kifejezések azonos átalakítása, ekvivalens átalakítások végrehajtása. A második lépcsőfok az elsőre épül, miközben a tanuló egyre magabiztosabb lesz az alapműveletekkel és a hozzá kapcsolódó jelölésrendszerrel, egyre jobban képes lesz a szimbólumokkal végrehajtani azokat.

A Kaput-féle megközelítés egyesíti az algebra korábban megnevezett két identitását, vagyis az algebra kulturális örökség, amely hagyományos szimbólumrendszerekben és a megismerésre irányuló emberi tevékenységekben fejeződik ki. Ez a két fő aspektus Kaput szerint nem egyszerre alakul ki a tanulóknak, tanulmányaik során. Mivel a szimbólumokkal való helyes algebrai tevékenységek ismerete elengedhetetlen a szimbólumok tudatos használatához, ezért a második lépcsőfok szintje később alakul ki a tanulóknak, mint az első, vagyis az általánosítás.

Schoenfeld (2008) szerint az algebrai gondolkodás több részből tevődik össze. (1) A tanulóknak ismerni kell a különböző reprezentációs lehetőségeket, köztük a szimbolikus reprezentációt. (2) Fontos a flexibilitás, vagyis, hogy rugalmasan tudjanak váltani ezen reprezentációk között, az adott problémahelyzetnek megfelelően. (3) Elengedhetetlen az értelmes szimbólumhasználat és a szimbólumokkal helyes végzett algebrai tevékenységek, ha a feladat ezt szükségessé teszi. A korai algebra céljaként a tapasztalatszerzést nevezi meg. Az ekkor szerzett

értelemszerző tapasztalatok segítik a tanulókat abban, hogy kialakuljon az algebrai gondolkodásuk.

Más szempontok alapján Carraher és Schliemann (2014) szintén három részre bontják az algebrai gondolkodást. Ezek a következők: (1) Az ismeretlenekkel való operálás, vagyis a mennyiségek közötti kapcsolatot újszerű módon fejezik ki a tanulók, például szimbólumhasználattal. (2) A változóban és azok kapcsolataiban való gondolkodás. A szerzők úgy fogalmazzák, hogy a tanulók akkor is az algebrai gondolkodással foglalkoznak, ha nem használnak változókat, de a változók, és a változók közötti kapcsolatokban gondolkoznak. Ehhez használhatnak különféle reprezentációkat is, például egy egyszerűsített pénztárcát rajzolnak, amelyben a pénzösszeg változó lehet. Kiemelik, hogy fontos különbséget tenni a változók általános ábrázolása, és azon ábrázolások között, amelyek egy konkrét ismeretlent jelölnek. (3) Az algebrai gondolkodás harmadik összetevője az algebrai struktúra elismerése. Például általános iskolai szinten ez úgy nyilvánulhat meg, hogy amikor az egyenletekkel ismerkednek meg a tanulók, akkor a betűket általánosított számokként kezelik, ezáltal a műveleteket úgy kezelik, mint amelyek a számok egy adott halmazára érvényesek. Munkájuk végén kifejtik, hogy a korai algebra megismerésének sikeressége attól függ, hogy a tanárok mennyire rugalmasan képesek mozogni az algebrai ábrázolások és a természetes nyelven, értéktáblázaton, diagramokon keresztül kifejezett megjelenítések között.

Míg Carraher és Schliemann (2014) a változók különböző reprezentációit hangsúlyozzák a tanulási folyamatban, addig Schoenfeld és Arcavi (1988) a változó fogalmának sokféle használatát elemzik. A betűket különböző matematikai kontextusokban különbözőképpen használjuk. Egy betű, pl. " t " lehet függvény változója, ismeretlen egy egyenletben, paraméter egy kifejezésben, továbbá t hagyományos elnevezése az időnek egy fizikai kontextusban. Azaz, szimbólum, paraméter, név, azonosító, üres hely - néhány lehetőség Schoenfeld & Arcavi szerint, ha csupán egyetlen szóval, vagy kifejezéssel szeretnénk megmagyarázni, hogy mik a változók. Leírásuk alapján a változó olyasmit jelent, ami valóban változik, vagy ami többféle értékkel bír. Éppen ezért a felsoroltak közül egyetlen szó sem fedti le teljesen a változó jelentését. A változó sokszínű megnevezése és jelentése miatt a tanulóknak is nehéz azonosítani, hogy mikor melyik kifejezést használják. Schoenfeld és Arcavi álláspontja szerint a tanulóknak nemcsak a formális szabályokat kell elsajátítaniuk, hanem azt is meg kell tanulniuk, miként értelmezzék a kijelentéseket azok kontextusában. Tanárként érzékenyen kell reagálnunk erre a többféle használatra, hiszen a kifejezés különböző kontextusokban való eltérő használata megnehezítheti a diákok számára a megértést.

Arcavi (1994) egy tágabb perspektívából vizsgálja az algebrai szimbólumok használatát. Nemcsak azt hangsúlyozza, hogy a változók többféleképpen

értelmezhetők, hanem azt is, hogy a tanulóknak rugalmasságot kell mutatniuk a szimbólumhasználat és egyéb reprezentációk között. Arcavi bevezeti a szimbólumérzék fogalmát, amely az algebrai kifejezések értelmezésének és használatának mélyebb megértésére utal. A szerző szerint a szimbólumérzék magában foglalja annak felismerését, mikor érdemes algebrai szimbólumokat használni egy probléma megoldásához, és mikor előnyösebb más reprezentációkat alkalmazni. Ennek egy példája, amikor a tanulók egy problémát kezdetben szimbolikusan próbálnak megoldani, de az algebrai tevékenységek bonyolulttá válnak, és ekkor egy alternatív, vizuális vagy aritmetikai megoldási stratégiát kell alkalmazniuk. A tanulóknak nem csupán a procedurális szabályokat kell megtanulniuk, hanem értelmezni is kell a szimbólumokat a kontextusukban. A szimbólumérzék és az értelmes szimbólumhasználat szorosan összefüggnek. A szimbólumérzék annak a képessége, hogy a tanulók nemcsak formálisan manipulálják a szimbólumokat, hanem értelmezni is tudják azokat a matematikai helyzetekben. Az értelmes szimbólumhasználat pedig ennek a gyakorlati megvalósulása: amikor a tanulók tudatosan és kontextusnak megfelelően alkalmazzák az algebrai szimbólumokat.

A matematikai gondolkodás fejlődése szempontjából fontos, hogy a tanulók felismerjék az algebrai kifejezések struktúráját, és hogy az algebrai tevékenységek mögött rejlő jelentést is megértsék. Például egy algebrai egyenlet megoldása során nem elegendő a műveletek mechanikus végrehajtása, a tanulóknak észre kell venniük a kapott eredmény jelentését is. Összefoglalva, akik elsajátítják az algebrai módszereket, gyakran nem érzékelik az algebrát a megértés, a kifejezés, az általánosítások közvetítése és a matematikai érvek felépítésének eszközeként.

Friedlander és Hershkowitz (2020) beszámolnak, hogy a tanulóknak sokszor nehézséget okoz az algebra és az érvelés közötti kapcsolat megteremtése. Három problémahelyzetet írtak le, melyek során a tanulók is felfedezhették, hogy az algebra kapcsolódik más matematikai témához, például a geometriához és az aritmetikához. Ezen problémákkal foglalkozva a tanulók felismerhették, hogy az algebra hatékony eszköz az általános minták és összefüggések ábrázolására, illetve, hogy az algebrai tevékenységek különösen alkalmasak egy felfedezett általános minta elemzésére. A kitűzött problémák tárgyalásánál még az algebra előtti szakaszban lévő tanulók közül is sokan eljutottak az általánosítás és az igazolás szakaszába. Friedlander és Hershkowitz szerint segítséget nyújthat, ha az algebrát összekapcsoljuk a geometriai és aritmetikai problémákkal, ezzel téve kevésbé absztrakttá a szimbólumokat.

Az algebrai szöveges feladatok megoldása során felmerülő nehézségeket, a matematizálás szemszögéből Jupri és Drijvers (2016) vizsgálta. Indonéz tanulók teljesítményét figyelték meg egy digitális matematikai környezetet használó kutatás során, a szöveges feladatoknál a probléma kontextusa a valós életre és nem csupán a

számokra vonatkozott. Az eredmények azt mutatták, hogy a tanulók fő nehézségeit a szöveges feladatok megértése okozta, valamint az egyenletek, sémák, diagramok megfogalmazása. Az eredmények a problémák megértése és a matematikai modellek megfogalmazása terén mutatkozó képességek hiányára utaltak. Ezt Jupri & Drijvers az indonéz tanítási hagyományokkal magyarázták, mely során a tanulók leginkább rutinszerű algebrai feladatokkal találkoznak, szövegesen megfogalmazott algebrai problémákkal szemben.

Palatnik és Koichu (2017) az értelemszerző folyamat és a tanulási környezet összefüggésére mutattak rá. Egy projektmunkát figyeltek meg egy középiskolai tanulópár esetében. Feltűnő volt a tanulók elkötelezettsége a probléma irányában, melyet a szerzők a megfelelő tanulási környezet hatására írtak. Egyrészt a támogató tanári kérdések biztosították ezt, másrészt a projektmunka adta lehetőségek. A tanulók hozzászórtak, hogy hosszú távon foglalkozzanak egy problémával, és önálló felfedezéseket tegyenek. A tanulók értelemszerző folyamata algebrai tevékenységek sorozatából állt, mely során a megfigyelt tanulók négy fontos állomást érintettek: (1) állításokat fogalmaztak meg és igazoltak, (2) általánosításokat tettek, (3) megtalálták az algebrai kifejezések mögött álló miérteket, és (4) összefüggéseket tártak fel a megfigyeléseik között.

Jelen dolgozatban az algebrai gondolkodáson az általánosítási tevékenységet, az értelmes szimbólumhasználatot és a szimbólumokkal végzett algebrai tevékenységek készségének egységét értjük. Az általánosítás különböző reprezentációkkal is történhet, azaz történhet szövegesen a tanulók természetes nyelvén, grafikusan, vagy szimbólumok segítségével. Az általánosítás során a tanulók először szabályokat ismernek fel különböző mintákban, és ezeket szövegesen megfogalmazzák, majd szimbólumokkal is felírják. Az algebrai gondolkodás része a tudatos szimbólumhasználat, amely során az általános szabályokat változók segítségével fejezik ki. Ugyancsak ide tartozik a szimbólumokkal végzett műveletek alkalmazása. Ennek során a tanulók feltárják a mennyiségek közötti kapcsolatokat, majd az algebrai kifejezéseken különböző átalakításokat és műveleteket végeznek. A fejlett algebrai gondolkodás kialakítása időben hosszú folyamat, amely időtartam tanulófüggő is. Az algebrai gondolkodás korai szakaszában a különböző reprezentációk használatával történő általánosítás a jellemző, amely idővel átmegy az értelmes szimbólumhasználatba, és a szimbólumokkal végzett algebrai tevékenységekbe.

1.3. Értelemalkotás a matematikában

A matematikai értelemalkotás folyamatát hosszú ideje vizsgálják a kutatók (Kieran, 2007; Martin, 2009), de a kapcsolódó matematikatanítási szakirodalom nem tér ki részletesen arra, hogy az értelemalkotás folyamata pontosan milyen komponensekből

áll, illetve hogyan valósul meg konkrétan a gyakorlatban (Palatnik & Koichu, 2017). Schoenfeld (2013) a kutatások addigi eredményeit összegezve megállapítja, hogy az értelemalkotás folyamatának empirikusan megalapozott kutatása eddig nem szolgált kellően átfogó eredményekkel. Ebben a fejezetben konceptualizáljuk a matematikai értelemalkotást abban az értelemben, melyben a disszertációban használjuk. Ezt a matematikatanítási megközelítést vizsgáljuk dizájn kutatásunkban. Empirikus módszereken alapuló eredményeink pedig hozzájárulhatnak a matematikai értelemalkotásról alkotott ismereteink bővüléséhez.

A fogalom értelmezéséhez a (Martin, 2009) munkát vesszük alapul, amely a matematikai értelemalkotást úgy említi, mint „egy szituáció, kontextus vagy fogalom megértésének fejlesztését azáltal, hogy összekapcsolja azt a meglévő tudással” (p. 4). Ebben a megközelítésben a matematikai értelemalkotás azt a folyamatot jelenti, amelynek során a tanulók a matematikai fogalmak koherens megértését alakítják ki azáltal, hogy az új ismereteket összekapcsolják a meglévő kognitív kereteikkel. Vagyis számukra az új ismeret értelmessé válik, és ennek alapján megalapozottan tudnak érvelni. Ez magában foglalja a matematikai gondolatok értelmezését, rendszerezését és integrálását, ami a felszínes memorizálás helyett a mélyebb megértést segíti elő. Az értelemalkotó tanítási megközelítés azon az elképzelésen alapul, hogy a megértés a matematikai feladatokkal való személyes foglalkozásból ered. Ellentétben áll a mechanikus ismeretsajátítással, és azt hangsúlyozza, hogy a tanulóknak képesnek kell lenniük érvelésük megmagyarázására. Az értelemalkotás és az érvelés összefonódása döntő fontosságú; ahogy a tanulók matematikai érvelésben vesznek részt - feltételezéseket tesznek, mintákat tárnak fel és következtetéseiket igazolják -, egyúttal fejlesztik az értelemalkotási képességeiket, ami lehetővé teszi számukra, hogy meglássák a fogalmak közötti kapcsolatokat. Az értelemalkotás egy kontinuumon zajlik, amely az informális magyarázatoktól a formális matematikai következtetésekig terjed. Lehetővé teszi a tanulók számára, hogy felfogják a matematikai eljárások mögött rejlő jelentést, és elősegíti a tanulási tapasztalataik relevanciájának érzését. Az értelemalkotást elősegítő hatékony tanítási stratégiák közé tartozik a felfedezést igénylő problémák bemutatása, a tanulók közötti párbeszéd ösztönzése, valamint olyan tantermi környezet kialakítása, amely értékeli a kérdezést és az informális érvelést. Emellett a valós összefüggések beépítése segíthet a tanulóknak abban, hogy a matematikai fogalmakat az iskolán kívüli élethez kapcsolják, ezáltal megerősítve a matematika jelentőségét mindennapi tapasztalataikban. Végző soron az értelemalkotás célja a tanulók matematikai kompetenciájának és magabiztosságának fejlesztése, és a különböző területeken felmerülő összetett problémák megoldásához szükséges készségekkel való felvértezésük.

A fentebbi meghatározásból kitűnik, hogy a matematikai értelemalkotás egy ernaőfogalom, amely több ismert és megalapozott tanulási-tanítási megközelítést is magában foglal, így az értelemalkotó matematikatanulás konstrukciójára több elmélet szintéziseként tekinthetünk. Megjelenik az aktív tanulás elve (Polya, 1981), a sémák szerinti tanulás (Skemp, 1971) és a problémaalapú tanulás (Savery & Duffy, 1995), utóbbiba beleértve az érvelést (Toulmin, 2003) és a szociális tanulást (Vygotsky, 1978).

Az aktív tanulás olyan tanulásszervezési megközelítés, amelyben a tanulók tevékenyen, magasabb rendű gondolkodási feladatok (elemzés, szintézis, értékelés) révén vesznek részt saját tanulási folyamatukban, miközben a hangsúly a tapasztalati úton történő tudásépítésre és reflektív gondolkodásra helyeződik (Bonwell & Eison, 1991). Elméleti alapját a konstruktivista pedagógia adja, amely szerint a tanulók meglévő tudásukra építve, saját cselekvéseik és társas interakcióik révén alkotják meg új ismereteiket (Bánfi & Korom, 2022; Piaget, 1970; Vygotsky, 1978). Az aktív tanulás gondolata a 20. század pedagógiájában Dewey (1938) gyakorlati tapasztalatokon alapuló „learning by doing” elvétől egészen napjaink konstruktivista megközelítéséig végigvonul, és Magyarországon is jelentős hagyományokkal rendelkezik. Ennek kiemelkedő példája Varga Tamás Komplex Matematikatanítási kísérlete, amely játékra, felfedezésre és önálló problémamegoldásra alapozva hangsúlyozta a matematika aktív, élményszerű tanítását (Gosztonyi, 2016, 2019, 2020).

A problémaalapú tanulás (problem based learning) nem önmagában a problémamegoldásról szól, hanem a megfelelő problémákat használja a tudás és a megértés növelése érdekében. Hmelo-Silver (2004) olyan pedagógiai módszerként írta le a problémaalapú tanulást, amelyben a tanulók problémamegoldáson keresztül tanulnak. Ez lehetőséget biztosít a tanulóknak arra, hogy felfedezzék az elsajátított tények és az adott probléma közötti kapcsolatot. A jelen disszertációban a matematikatanítás kontextusában a Kónya és Kovács (2022) által megfogalmazott definíciót tekintjük kiindulópontnak, amely (Csíkos, 2010) megközelítésére épül. Eszerint a matematika tanulása során a tanuló problémahellyel szembesül, a problémával való foglalkozás során érvel és kritikusan viszonyul saját és társai gondolatmenetéhez. Ez a megközelítés a hangsúlyt a kognitív és szociális aktivitásra helyezi. A problémaalapú tanulás hatékonyságát vizsgáló és összehasonlító tanulmányok általában egybehangzóan azt mutatják, hogy ez a módszer hatékony lehet a tudásanyag hosszabb távú megőrzése és alkalmazása szempontjából (Yew & Goh, 2016). A problémahelyzetek matematika órákon való használatának jótékony hatásairól Friedlander és Hershkowitz (2020) megjegyezték, hogy egy hiteles, de nem feltétlenül hétköznapi problémával való foglalkozás növeli a tanulók motivációját a tanórán. Az ilyen problémahelyzeteken keresztül az algebrai készségek fejlesztése

szinte természetesnek tűnik. A problémákkal pármunkában vagy csoportmunkában is foglalkozhatnak, amely szintén pozitívan hat a tanulók motivációjára és teljesítményére. Így a tanulóknak lehetőségük van arra, hogy találkozzanak a többi tanuló által különböző szinten végzett általánosításokkal és indoklásokkal. A minták általánosításán és bizonyításán alapuló problémahelyzetek tehát segítenek hangsúlyozni az algebra matematikai érveléseknél betöltött szerepét.

Skemp (1971) szerint a sémák integrálják a meglévő tudást, és eszközként szolgálnak új ismeretek elsajátításához, a megértést pedig úgy definiálja, mint az új tudás megfelelő sémákba való asszimilációját; ez különösen releváns a matematikai megértés kapcsán vizsgált konceptuális (fogalmi) és procedurális (eljárási) tudás kapcsolatában (E. M. Gray & Tall, 2020; Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Kónya és Kovács (2023) Star (2005) eredményeit megerősítve hangsúlyozzák, hogy a sikeres problémamegoldáshoz a mély konceptuális és procedurális tudás együttes megléte szükséges, és ezek sorrendisége nem egyértelműen eldönthető. Gray és Tall (1991) bevezették a „procept” fogalmát, amely egyszerre jelöl folyamatot, fogalmat és ezek közös szimbólumát, kiemelve, hogy akik képesek szimbólumokat rugalmasan manipulálni, hosszú távon sikeresebbek, míg a procedurális szemléletű tanulók bár rövid távon eredményesek lehetnek, hamar akadályokba ütköznek az algebra elvont fogalmaival szembesülve.

1.4. Értelermalkotás az algebra tanításában-tanulásában

Dolgozatunkban a matematikai értelemalkotást az aritmetikai-algebrai átmenet és az algebra korai tanításának kontextusában alkalmazzuk és vizsgáljuk. Az értelemalkotó algebra az algebra tanulásának és tanításának olyan megközelítése, amely a fogalmi megértést helyezi előtérbe, a pusztán mechanikus memorizálással vagy az eljárások rutinszerű alkalmazásával szemben. Ez a megközelítés több kulcsfontosságú elemet foglal magában, melyek tükrözik a matematikai értelemalkotás főbb elemeit. Palatnik és Koichu (2017) megállapítják, hogy az értelemalkotás folyamata algebrai kontextusban generatív és transzformatív algebrai tevékenységek sorozatából áll. Ebben az értelemalkotási folyamatban a tanulók: (1) állításokat fogalmaznak meg és igazolnak, (2) általánosítanak, (3) megtalálják az algebrai objektumok mögött álló mechanizmusokat, azaz mélyebb megértést nyernek arról, hogy milyen alapvető matematikai elvek és logikai összefüggések állnak a képletek mögött, és (4) képesek összekapcsolni és egységes keretbe foglalni az általuk vizsgált matematikai reprezentációkat, például képleteket, diagramokat, vagy számsorozatokat. Palatnik & Koichu dolgozatából kiindulva, az értelemalkotó algebra tanítási beavatkozásunk jellemzőit az alábbiak szerint foglaljuk össze.

1. A kontextusba helyezés. A tanulók az algebra alapelemeivel megélhető problémákon keresztül foglalkoznak, ami segíti őket abban, hogy az algebra

jelentőségét tudatosítsák. Ez a tanulás kontextusban elve. A tudás nem csupán absztrakt információként létezik; hanem a konkrét helyzetek és tapasztalatok által formálódik (J. S. Brown és mtsai., 1989). A megélhető szituációk teremtésének fontos eszközének tartjuk a problémaalkotást (Stoyanova & Ellerton, 1996)

2. Többféle reprezentáció: A megközelítés ösztönzi a különböző reprezentálási formák használatát, például természetes nyelven történő megfogalmazás, grafikus, numerikus és szimbolikus reprezentáció. Ez a rugalmasság lehetővé teszi a tanulók számára, hogy a problémákat különböző nézőpontokból közelítsék meg, és intuitívan értelmezhessek azokat (Janvier, 1987).
3. Az általánosítás: Az értelmes algebra elősegíti, hogy a tanulók konkrét példákból általánosításokat és mintákat fogalmazzanak meg, ami az algebrai gondolkodás egyik kulcsfontosságú szempontja. Ez az általánosítás formális algebrai jelölés nélkül is előfordulhat (Schoenfeld, 2016).
4. Érvelés: Noha az érvelést korábban gyakran a formális bizonyítással azonosították, és a matematikaoktatásban is hajlamosak voltak túlzottan a formális, deduktív lépésekre támaszkodni (Hanna, 1989), valójában olyan gondolkodási módokat és készségeket jelent, amelyek minden matematikai tevékenység alapvető részét kell, hogy képezzék. Az érvelés fejlődése több lépcsőfokon keresztül történik. Az első szint az empirikus érvelés, amely intuitív magyarázatok (preformális érvelés) útján vezet el a formális, logikai elvekre épülő bizonyításig. Mindezek a szintek egyaránt jelentősek, ezért a tanulóknak megfelelő időre van szükségük ahhoz, hogy az egyes szinteken kialakítsák és megerősítsék tudásukat, mielőtt magasabb szintre lépnének. Ezenkívül a tanulók képesek lehetnek az érvelési szintek között váltani, akár ugyanabban a kontextusokban is (Keazer & Menon, 2015). A kutatók ma már ezt a folyamatot sokkal inkább egy folytonos fejlődési kontinuumként értelmezik az érvelés és a formális bizonyítás között (Hanna & de Villiers, 2008).

Összességében az értelemalkotó algebra tanítás-tanulás célja, hogy a tanulók az algebra tanulását aktív, hasznos és hatékony emberi tevékenységként éljék meg.

2. Kutatási kérdések

RQ1: Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során?

A kérdés vizsgálatában kitérünk arra, hogy az algebra bevezetésénél a kontextusba helyezés és az általánosítás hogyan támogatja a tanulók algebrai gondolkodását, ezt hogyan tudja segíteni a tanár. Elemezzük a diákok általánosítási tevékenységének megnyilvánulásait az értelemalkotó algebrai beavatkozás során, és a tanulók által ekkor használt erőforrásokat. Megfigyeljük a tanári magatartás szerepét az általánosításnál és a változó bevezetésénél. Feltárjuk a tanári és tanuló tapasztalatokat és visszajelzéseket az értelemalkotó algebra stratégiájával kapcsolatban.

RQ2: Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?

A kérdés elemzése során feltárjuk, milyen lehetőségek vannak az összefüggések algebrai kifejezésekkel történő felírásának tanári támogatására, valamint vizsgáljuk, hogyan viszonyulnak a tanulók a változók jelölésére használt betűkhöz. Emellett elemezzük, hogy az algebrai tevékenységekkel kapcsolatos ismereteik elegendőek-e ahhoz, hogy azokat problémamegoldás során készségszinten alkalmazzák. Azt is megvizsgáljuk, képesek-e értelmezni a megoldást akkor, ha az a megszokott numerikus eredmény helyett algebrai kifejezés formájában jelenik meg.

RQ3: Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?

A kérdés tárgyalása során feltárjuk, a tanulók hozzáállását egy addig ismeretlen grafikus reprezentációhoz, a letöltési sávokhoz. Vizsgáljuk, hogy miként jelenik meg ez a reprezentáció az önálló problémaalkotásukban és a hozzátartozó megoldásukban. Emellett elemezzük, hogy a nyolcadikos tanulók grafikus ábrázolási készségei megfelelő alapot biztosítanak-e a grafikus megoldási módszer alkalmazásához az „együttes munkavégzéses” típusú feladatok esetében, Azt is megvizsgáljuk, hogy a készségek szintje miként befolyásolja a problémákhoz kapcsolódó autonóm stratégiaválasztást.

RQ4 Milyen kapcsolat figyelhető meg a tanulók által alkotott problémák szerkezeti és szemantikai helyessége, a saját problémák megoldásának eredményessége, valamint a tanulók matematikai teljesítménye között?

A kérdés megválaszolása érdekében a tanulók matematikában nyújtott teljesítménye és az általuk alkotott problémák minősége közötti összefüggéseket vizsgáljuk. A matematikában nyújtott teljesítményt a kísérletet megelőző félévi vagy év végi matematika érdemjeggyel jellemezzük. Feltárjuk a problémaalkotás színvonala és a hozzátartozó problémamegoldás eredményessége közötti kapcsolatot. Emellett elemezzük, hogy a tanulók miként értették meg a tananyagot szerkezeti és szemantikai szempontból, azonosítjuk a legjellemzőbb hibákat, és megvizsgáljuk, hogy a problémaalkotás módszere alkalmas-e e kétféle megértés feltérképezésére.

3. A kutatás módszertana

3.1. Dizájn kutatás mint módszertani keret

Burkhardt & Schoenfeld (2003) retrospektív elemzésükben azt állítják, hogy a pedagógiai kutatások hatása kicsiny, gyakran nem hasznosíthatók az eredmények, ráadásul ezek a kutatások nem túlságosan jól finanszírozottak. Anélkül, hogy állításukat kritika nélkül a jelenleg fennálló magyarországi helyzetre alkalmaznánk, érdemes megvizsgálni, hogy a szerzők milyen okokat tárnak fel és milyen perspektívát kínálnak cikkükben. Érvelésük lényegét három pontban lehet összefoglalni.

1. A pedagógiai kutatások gyakran nem vezetnek közvetlenül gyakorlati előrelépéshez, bár hasznos információkat, betekintést és fejlesztési ötleteket nyújtanak. A kutatás hasznosabb lehetne, ha jobban kapcsolódna az oktatási rendszer gyakorlati igényeihez.

2. Az oktatásból nagyrészt hiányzik a gyakorló szakemberek által használt eszközök és folyamatok kutatáson alapuló fejlesztése, amely más alkalmazott területeken gyakori. A tényeken alapuló ajánlások szorosabb kapcsolatot jelenthetnek a kutatás és a gyakorlat között.

3. Sokkal szorosabban össze kell hangolni az erőfeszítéseket a kutatás, a tervezés, a fejlesztés, az oktatáspolitikai és a gyakorlat között.

Összefoglalva, az oktatáspolitikai kérdéseket ezen a helyen nem érintve, a tanulási-tanítási folyamatba történő hatékony beavatkozásoknál alapvető a kutatás és a pedagógiai gyakorlat kölcsönhatása. Gyakorló tanárként és egyidejűleg kutatóként is, a kutatás és gyakorlat szinergiájának megvalósításához a személyi feltétel adottnak vehető.

A pedagógiai kutatás és gyakorlat közötti szakadék áthidalására Burkhardt és Schoenfeld több lehetséges modellt is bemutatnak. Az általuk vizsgált megközelítések közül a dizájn kutatás (design research) egyszerre célozza a pedagógiai elméletek fejlesztését és az oktatási gyakorlat innovációját. A kutatás és a gyakorlat kölcsönhatásának kiemelésével dizájn kutatások elősegíthetik a folyamatos fejlesztés kultúráját, és végső soron nagyobb bizalmat építhet a pedagógusok körében a kutatási eredmények iránt. A dizájn kutatás sajátossága, hogy a pedagógiai gyakorlat és a kutatás közötti dinamikus interakcióra épít, így különösen alkalmas azokra a kutatásokra, amelyek célja nem csupán a tanítási-tanulási folyamatok megértése, hanem azok aktív fejlesztése is.

A szakirodalomban a *design research* és a *design experiment* szóhasználat egyaránt feltűnik, néha szinonimaként vagy nagyon közeli értelemben (Kelly, 2003).

Dolgozatunkban nem teszünk különbséget a két konstrukció között és a „dizájn kutatás” kifejezést használjuk, mivel mindkét megközelítés az oktatás fejlesztését célozza, iteratív beavatkozásokon keresztül. A dizájn kutatás azon felismerésből indul ki, hogy az osztályteremben végzett pedagógiai kutatásoknál gyakorlatilag lehetetlen egyetlen tényező (beavatkozás) kiemelése és hatásának mérése, értékelése (A. L. Brown, 1992). A dizájn kutatás olyan kutatási paradigma, amely magában foglalja egy produktum vagy folyamat tervezését, fejlesztését és finomítását a megvalósítás, megfigyelés, elemzés és újratervezés ciklusain keresztül. Az oktatásban innovatív tanítási módszerek, anyagok, szakmai fejlesztési programok és értékelési feladatok létrehozására használják, azzal a céllal, hogy innovatív tanítási és tanulási lehetőségeket teremtsenek (Swan, 2014). Csíkos (2012) megfogalmazásában:

Dizájn kísérlet alatt egy innovatív tanulás környezet (mérnöki módszerekre emlékeztető) kialakítását és ellenőrzését értjük, melynek során az innováció kísérleti tanulmányozása megvalósul. A dizájn kísérlet a napi élet egy szeletének elrendezését (orchestration) jelenti, és ennek során számos, egymással összefüggő tényező kap szerepet (p. 47).

A dizájn kutatás főbb fázisai McKenney és Reeves (2012) szerint:

Elemzés és feltárás: Ez a fázis magában foglalja az oktatási kontextus és az aktuális problémák megértését, az érdekelt felek azonosítását, valamint a tervezési folyamatot megalapozó meglévő szakirodalom és elméletek feltárását.

Tervezés és kivitelezés: Ennek a fázisnak a célja az oktatási beavatkozás - produktum, folyamat, program vagy oktatáspolitikai intézkedés - tervezése, a prototípus megalkotása és első megvalósítása az elemzési fázis alapján.

Értékelés és reflexió: A tervezés megvalósítása után ez a szakasz megvizsgálja annak hatékonyságát, tanulságokat von le az eredményekből, reflektálja, hogy mi működött jól, illetve mi az, ami javítandó.

Végrehajtás és terjesztés: Ez a rész magában foglalja a megállapítások és a kidolgozott oktatási beavatkozások szélesebb körű terjesztését, biztosítva, hogy a sikeres tervek szélesebb körben elterjedjenek.

A dizájn kutatás három fő fázisa (Elemzés és feltárás, Tervezés és kivitelezés, Értékelés és reflexió) ciklikus jelleggel ismétlődik, a fejlesztés nem lineáris módon történik, hanem iteratív jellege van. Például, egy ciklus értékelése és reflexiója hatással van a következő tervezési fázisra. Egy oktatási beavatkozásban jellemző lehet, hogy az első ciklusban a tervezés még csak vázlatos, a megvalósítás optimális körülmények között zajlik, nagyobb kutatói kontrollal, míg a későbbi ciklusokban

kutatói beavatkozás nélkül tanulmányozzák a beavatkozás hatását olyan tanárok között, akik nem vettek részt a tervezési fázisban.

A kutatás során nyert adatok közé tartozhatnak a tanórai megfigyelések, hangfelvételek, videók. A felhasználókkal készített kérdőívek és interjúk. A korai iterációkban a megfigyelés domináns szerepet játszik. Később azonban, a minta méretének növekedésével közvetettebb eszközökre is szükség van. A megbízhatóság javítható a több adatforrásból származó triangulációval (Swan, 2014). A trianguláció, azaz az adatok több forrásból való gyűjtése, vagy több elemző általi értékelése, nemcsak a kutatás megbízhatóságát növeli, hanem segít az eltérő nézőpontok integrálásában is.

A dolgozat egészének módszertani kerete a dizájn kutatás. A korábbi, hatodik évfolyamon végzett vizsgálatra akciókutatásként utalunk, mivel abban a tanári gyakorlat közvetlen reflexiója és módosítása volt hangsúlyos. A jelen disszertációban tárgyalt hetedik és nyolcadikos beavatkozásokat azonban egységesen a dizájn kutatás ciklikus logikája szerint értelmezzük.

3.2. A kísérleti órák

Kutatásunk magában foglal egy hatodikosok körében végzett akciókutatást a problémaalkotás matematikaórákba történő felhasználásáról (Kovács és mtsai., 2023), ennek eredményeire részletesen azonban nem térünk ki, de az óraszervezés módszeréről nyert tapasztalatokat beépítettük a 8. évfolyamon végzett kísérletbe. A további kísérleti órákról az 1. táblázat ad áttekintést. A kutatások két ciklusban történtek. A dizájn kutatás elveinek megfelelően az első ciklus megvalósítására nagyobb kutatói kontroll mellett a saját iskolámban került sor, míg a második ciklusban a kísérleti órákat külső iskolákban, és a saját iskolámban más tanár bevonásával is megvalósítottuk.

1. táblázat

Áttekintés a kísérleti órákról

Vizsgált évfolyam	Kísérleti órák száma osztályonként	Vizsgált tanévek	Értelemalkotó algebra megnyilvánulása	Az érintett kutatási kérdés
7.	4	2020/21 2021/22	Kontextusba helyezés, általánosítás, érvelés	RQ1, RQ2
8.	5	2021/22, 2022/23	Többféle reprezentáció, érvelés, problémaalkotás	RQ3, RQ4

A kísérleti órák tervezése jelen dolgozat szerzőjének és témavezetőjének együttműködésével jöttek létre. A kutatás ciklusai után mindig elemeztük a

tapasztalatokat, és ha szükségesnek láttuk, változtattunk az óratervben. Az első ciklusban minden esetben a dolgozat szerzője tanított, több osztályban.

Hetedik évfolyamon a kísérleti órák az algebra témakörének elejére koncentráltak. Amikor a tanulók megismerkednek az algebrai kifejezésekkel, tevékenységekkel, de még nem írnak fel egyenletet. A kutatás első ciklusának helyet adó iskolában használt tankönyv alapján, a dolgozat szerzőjének tanterve 28 órát szánt az algebra oktatására. A beavatkozásra az első tanítási egységben (Algebrai kifejezések és műveletek algebrai kifejezésekkel) került sor, amelyre a tanterv 11 órát különített el. Ebben a tanítási egységben négy kísérleti órát tartottunk. Az első kísérleti óra a 2. tantervi órán valósult meg, amikor a tanulók még csak épphogy megismerkedtek az algebrai változó és együttható fogalmával. A második kísérleti órára a 6. órán került sor, amikor a tanulók már ismerték a helyettesítési érték kiszámításának módját, és képesek voltak egynemű algebrai kifejezéseket összevonni. A harmadik kísérleti óra a 8. tantervi órán került sorra, miután megismerkedtek az algebrai kifejezések szorzásával és osztásával. Az utolsó kísérleti órára a 11. órán került sor, amikor már a kiemeléssel történő szorzattá alakítást is ismerték a tanulók.

Minden kísérleti óra egy problémafelvetéssel kezdődik, amely probléma magyarázatához algebrai kifejezésekre van szükség. A kísérleti órák tervezésekor fontos szempont volt, hogy minden órán megélhető problémákon keresztül kontextusba helyezve jussanak el a tanulók az algebrai kifejezésekhez, szimbólumokhoz. Az órák célja volt továbbá, hogy a tanulók szabályokat ismerjenek fel a különböző mintákban, melyeket utána általános formában is meg tudnak fogalmazni, vagyis az általánosítási tevékenység támogatása. Az osztálytermi megbeszélések során pedig érvelésre is volt lehetőség, minden kísérleti órán. A kontextusba helyezés, az általánosítás és érvelés az értelemalkotó algebra megközelítés alkotóelemei. Tananyag szempontjából a számok valódi értékének és helyiértékének elmélyítése is cél volt. Emellett törekedtünk arra, hogy a választott problémák mögött gazdag szakirodalmi tapasztalat álljon. A hetedik kísérleti órák óraterveit a melléklet tartalmazza.

1. óra. Naptár-probléma (Huang és mtsai., 2014).
2. óra. Egyiptomi törtek-problémája (Tóthné, 2020).
3. óra. Számjegyek felcserélésével kapcsolatos probléma (Friedlander & Arcavi, 2017).
4. óra. Ötre végződő kétjegyű számok négyzetének-problémája (Kovács Csongorné és mtsai., 1988, o. 30).

Nyolcadik évfolyamon a beavatkozásra, a szöveges feladatok egyenlettel történő megoldásának témakörénél került sor. Erre az akkori nyolcadikos tanmenet 14 tanórát

szánt. A kutatás alaphipotézise azt volt, hogy a szöveges feladatok megoldása egyenlettel a tanulók egy részének problémát okozhat. Ezt a problémát szerette volna a beavatkozás orvosolni a különböző reprezentációk használatával. Vagyis a tanulók a kísérleti órákon megismerkedtek olyan módszerekkel, amely segítségével akár egyenlet nélkül is meg tudták oldani a szöveges feladatot, vagy a megfelelő reprezentáció segítséget nyújthatott az egyenlet felírásához. A problémák különböző reprezentációjának alkalmazása tehát híd-ként is szolgálhatott a kísérletben. A híd egyik oldalán az aritmetikai tapasztalatszerzés, a másik oldalon a szimbolikus gondolkodás állt. Összesen öt-öt kísérleti óra valósult meg a nyolcadikos osztályokban, amelyek a tanmenet témáihoz alkalmazkodtak. A kísérleti órákat mindig egy-egy gyakorló óra követte. Az órai feladatok ezúttal a saját gyakorlatunkból származtak, miközben arra törekedtünk, hogy a tanmenethez illeszkedő feladatok egyben valódi problémaszituációt is jelentsenek a tanulók számára.

1. óra Bevezető óra, egyszerű szöveges feladatok (*)
2. óra Geometriai feladatok
3. óra Fizikai, mozgásos feladatok
4. óra Kémiai, keverékes feladatok
5. óra Együttes munkavégzéses feladatok (*)

A dizájn kutatás egyik ismert sajátossága, hogy az eredmények publikálása gyakran terjedelmi korlátokba ütközik, ezért jellemzően egy-egy reprezentatív példa bemutatása tekinthető reálisnak. Ennek megfelelően a disszertációban is ezt a megközelítést alkalmaztuk: nem a teljes kutatási anyagot ismertetjük, hanem annak egy-egy jellemző részletét emeljük ki. A dolgozatban a nyolcadikos órák közül a (*)-gal jelölt kísérleti órák kerülnek bemutatásra, amelyek óraterveit a melléklet tartalmazza.

3.3. Minta

A kutatásban résztvevő tanulók azonosítója egy négy számjegyű kód, amelyben az első számjegy a tanuló évfolyamát jelöli. Például az S8114-es tanuló a nyolcadik évfolyam 114-es sorszámu tanulója.

Hetedik évfolyamon összesen 157 diák (S7001-S7157) vett részt a kutatásban, öt matematikatanár irányításával (2. táblázat). A dolgozat szerzője egyben az első ciklusban résztvevő osztályok (7A, 7B, 7C) matematika tanára is volt, egy debreceni általános iskolában. A kutatás második ciklusába bekapcsolódott további két osztály az első ciklusnak is otthont adó debreceni iskolából (7D, 7E), illetve két Kiskőrösi osztály (7F, 7G).

Az osztályok kiválasztása kényelmi mintavétellel történt: az első ciklus a szerző saját osztályaiban, a második ciklus önként csatlakozó kollégák osztályaiban zajlott. Az osztályátlag a tanulók kísérletet megelőző matematika érdemjegyeinek átlagát jelenti, melyet az osztályok matematikai teljesítményének háttérjellemzőjeként használjuk.

2. táblázat

A kutatásban résztvevő hetedikes tanulók

Osztály megnevezése	Vizsgált tanév	Létszám	Város	Osztályátlag
7A	2020-21	25	Debrecen	4,64
7B	2020-21	26	Debrecen	3,96
7C	2020-21	22	Debrecen	3,95
7D	2021-22	27	Debrecen	4,30
7E	2021-22	26	Debrecen	4,15
7F	2021-22	11	Kiskőrös	3,27
7G	2021-22	20	Kiskőrös	3,45

Nyolcadik évfolyamon ugyanazon osztályok vettek részt a kutatásban, akik hetedik évfolyamon (első ciklusban: 8A,8B; második ciklusban 8D, 8E, 8F, 8G). Kivétel a 7C osztály, akik nyolcadik évfolyamon más matematikatanárt kaptak, így már nem tudtak részt venni. Azonban egy budapesti intézmény matematika tanára is bekapcsolódott, és az általa tanított egyik osztály is részt vett a kísérleti órákon. (8H) (3. táblázat). Összesen 146 nyolcadikos tanuló (S8001-S8146).

3. táblázat

A kutatásban résztvevő nyolcadikos tanulók

Osztály megnevezése	Vizsgált tanév	Létszám	Város	Osztályátlag
8A	2021-22	25	Debrecen	4,44

Osztály megnevezése	Vizsgált tanév	Létszám	Város	Osztályátlag
8B	2021-22	26	Debrecen	3,77
8D	2022-23	27	Debrecen	4,52
8E	2022-23	26	Debrecen	4,00
8F	2022-23	10	Kiskőrös	3,40
8G	2022-23	20	Kiskőrös	3,45
8H	2022-23	12	Budapest	4,67

3.4. A kutatás korpusza

A kutatás során összegyűjtött órafelvételek, tanulói munkák, tanári reflexiók, hospitálási naplók képezik a korpuszt. A kutatás első ciklusában órafelvételre nem volt lehetőség, így azon órák esetében a tanulói munkák, tanári reflexiók, illetve pedagógus által készített hospitálási feljegyzések biztosítják a triangulációt. Az órafelvételekről transzkriptek készültek, a tanulói munkákat (füzetek vagy feladatlapok) és a kézzel írt hospitálási feljegyzéseket digitalizáltuk.

4. Az algebrai gondolkodás kezdetei

4.1. Bevezetés

Az absztrakció, mint kognitív képesség kiemelt figyelmet kap a magyar Nemzeti alaptantervekben (2012, 2020) a 7-8. évfolyamon. Elvárás a tapasztalatok általánosítása és az összefüggések igazolásának igénye is. A tanterv azt is megköveteli, hogy a tanuló formalizálja a mindennapi problémák matematikai tartalmát, és betűket használjon ismeretlen mennyiségek jelölésére. A szimbólumokkal való tanítás megkezdéséhez a „betű-aritmetikán” alapuló procedurális megközelítés, azaz az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek gyakorlása definíciók és szabályok alapján, a magyar tankönyvekben is jelen lévő hagyományos tanítási stratégia (Csahóczi és mtsai., 2021, o. 59), ld. 3. ábra. Az alábbi, hetedikes tankönyvből származó példa nem fedti a hetedikes tankönyvben megjelenő algebrai feladatokat általánosan.

3. ábra

Hetedikes tankönyvben szereplő feladat. A feladat szövege: Végezd el az összevonásokat!

a) $8 \cdot x - (3 + 2 \cdot x + 12) - 4 \cdot x + 6 =$

b) $(5 \cdot x - 2) + (7 + 11 \cdot x) - (3 \cdot x + 2) =$

c) $(4 \cdot x - 12) + (6 \cdot x + 3 \cdot y) - (9 + 10 \cdot y) =$

d) $(2 \cdot x + 5 \cdot y) - (3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y) + (2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x) =$

Ebben a megközelítésben, az algebratanulás korai szakaszában azonban kevesebb hangsúlyt kap az általánosítás és a szimbólumok értelmes használata. A fejlesztési célok és a korai algebra tanításának gyakorlata közötti ellentmondások adták kutatásunk egyik motivációját. Ennek a helyzetnek a javításához szükséges annak tudatosítása, hogy az algebrai gondolkodás lényeges eleme a szimbólumok értelmes használata, amely a matematikai értelemalkotás meghatározó megnyilvánulása.

Számos szerző a matematikai fogalom értelmezési folyamatát az előzetes ismeretekhez való kapcsolással magyarázza (Scheiner, 2016). Palatnik és Koichu (2017) megállapították, hogy az értelemalkotási folyamat sikeres megvalósításának kritériuma, hogy a tanulók megfelelően elkötelezettek legyenek a feladatban, és hogy a tanulási környezet támogató legyen. E gondolatoktól inspirálva kutatásunk során a hagyományos „betű-aritmetika” matematikai problémahelyzetekkel egészült ki, hogy támogassa az általánosítási folyamatot és a változók értelmes használatát. A tanítási stratégiánk fontos része az affektív faktor, azaz, a tanulók az algebra tanulási folyamatában a lehető legkorábban megismerjék a szimbolizáció erejét. (A hetedikes blokkot a kísérlet első szakaszában „az algebra erejének” neveztük.) Továbbá a

problémaalapú tanítási megközelítéssel a kutatók célja egy támogató tanulási környezet megteremtése volt.

A hetedikeselek körében egy négy kísérleti órából álló kutatás első kísérleti órája és annak tapasztalatai kerülnek a fejezetben bemutatásra.

A fejezet az RQ1 kutatási kérdés megválaszolásához járul hozzá: Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során? A fejezet első tanítási ciklusra vonatkozó része a (Lócska & Kovács, 2022) munkában lett publikálva.

4.2. A naptárprobléma

A hetedikeselek körében végzett kutatás első kísérleti óráján az ún. naptárproblémát állítottuk az óra középpontjába. A problémát a szakirodalom több helyen is tárgyalja, mint az általánosítás ösztönzésére irányuló hatékony kezdeményezést (Cady & Wells, 2016; Fitriana és mtsai., 2022; Friedlander & Hershkowitz, 2020; Huang és mtsai., 2014). A szerzők a tapasztalataik között megfogalmazták, hogy a naptárban való mintakeresés közben a megfigyelések felállítása és igazolása természetes módon történt a tanulók részéről. Egy ilyen tevékenység lehetőséget ad a kreativitás és a kritikus gondolkodás fejlesztésére is. Az első kísérleti óra tervezését ezek a munkák inspirálták, amelyek a naptárakban található minták vizsgálatára, és az empirikus érvelés deduktív bizonyítás felé történő fejlesztésére összpontosítottak. Az óra fontos része egy bűvésztükk, melyhez (Chen, 2015) munkája nyomán használtuk a naptárt.

4.2.1. A kísérleti óra felépítése

A kísérleti órák tervezése a problémaalapú tanítási megközelítés elvét követte. Ez azt jelenti, hogy a tanulók: matematikai problémákat elemeztek; az osztálytermi beszélgetések során lehetőség volt arra, hogy kritikusan reflektáljanak saját és osztálytársaik gondolkodására; az osztálytermi légkör bátorította a tanulókat gondolkodásuk magyarázatára és indoklására.

A tanulók az óra előkészítő szakaszában mintákat kerestek a 2020. decemberi naptárban. A tanár először az 1-9-17-25 átlót választotta ki (4. ábra). Miután megállapították, hogy a számok a sorozatban 8-cal növekedtek, a tanulók párban dolgoztak, hogy hasonló mintákat fedezzenek fel. A mintakeresési feladat célja az volt, hogy a tanulók megismerjék a naptár matematikai szerkezetét, amely a mindennapi életből már ismerős.

4. ábra

Első hetedikes kísérleti óra, minták a naptárban

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31		46	

A tanóra fő része egy bűvésztükkön alapult. „Válassz egy számot, amelynek van egy jobb felső és egy bal alsó szomszédja. Ezután mondd meg a három szám összegét, és én kitalálom a kiválasztott számot!” A trükköt a tanár mondta, ő találta ki a választott számot. A bűvész trükkjének feldolgozása három szakaszból állt.

Először numerikus tapasztalatot szereztek a tanulók, konkrét példákon keresztül, vagyis a tanuló által mondott összeget és a kigondolt számot (melyet a tanár helyesen “kitalált”) feljegyezték a táblára. A példa a 4. táblázatban látható. Az utolsó oszlopot üresen hagyták, mert az algebrai magyarázat során oda került fel az általános alak. A numerikus tapasztalatszerzés fontos része, hogy a tanár egy idő után átadja a bűvész szerepét egy olyan tanulónak, aki úgy gondolja, már rájött a trükk működésére.

4. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, bűvésztükk magyarázata, numerikus tapasztalatszerzés és általánosítás

Összeg	27	36	75	24	$3 \cdot n$
Szám	9	12	25	8	n

Ezt követte a szabály megfogalmazása: hogyan számolt a bűvész? A tanulók saját szavaikkal megfogalmazzák, hogy a tanár mindig elosztotta 3-mal a tanulók által mondott összeget, így megkapta a gondolt számot. Például, ha a választott szám a 17, akkor az összeg

$$23 + 17 + 11 = 51 = 3 \cdot 17.$$

A harmadik lépés a szabály magyarázata, amely két szinten történt. Először aritmetikai magyarázattal, amelyhez a trükköt megelőző mintakeresés adott alapot. A mintakeresés során megfigyelték, hogy a trükkben használt átló esetében egy számsorozatot kapnak, amely mindig 6-tal növekszik. A kiválasztott számhoz képest tehát a jobb felső szomszédja egy 6-tal kisebb szám, míg a bal alsó szomszédja egy 6-tal nagyobb szám lesz. Az aritmetikai bizonyítás ez alapján a következő, ún. általánosítható példa

$$23 + 17 + 11 = (17 + 6) + 17 + (17 - 6) = 3 \cdot 17.$$

Ezt követte az algebrai magyarázat, amelyhez már bevezettek egy változót. A gondolt szám lett n , így a három szám összege: $(n + 6) + n + (n - 6) = 3 \cdot n$. Ekkor a korábban felírt táblázat is kiegészítésre került, az utolsó oszloppal.

A kísérleti óra záróköve a tanulók problémaalkotása volt. A tanulók pármunkában találtak ki a tanár által bemutatott bűvész trükkhöz hasonló trükköt, a naptár segítségével. Ha maradt idő, akkor ezeket a trükköket is eljátszották az osztálytársakkal.

Az utóteszt során két kötelező és egy választható feladatot kaptak a diákok (5. táblázat). Az első és a második feladat közel állt az órán szereplő naptárfeladathoz. Ezt a két feladatot úgy választottuk ki, hogy az általánosítást igényelje, és könnyen lehessen szimbólumok használata nélkül érvelni. A harmadik feladatról viszont az volt a feltételezés, hogy sokkal nehezebb szimbólumok nélkül elmagyarázni.

5. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, az utóteszt feladatai

1. feladat Nándi kiválasztott egy számot a naptárban, majd összeadta a jobb és bal szomszédját. Az összeget megfelelően pontosan a kiválasztott számot kapta. Szerinted ez mindig igaz, ha olyan számot választ, aminek van jobb és bal szomszédja is? Indokold!

MÁRCIUS 2021						
kedd	kedd	szombat	csütörtök	csütörtök	szombat	vásárnap
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

2. feladat Csenge egy olyan számot választott a naptárból, amelynek van alsó és felső szomszédja is. Összeadta a két szomszédot, majd megfelelte az összeget. Mit tapasztalt? Ez mindig igaz lesz, ha olyan számot választ, aminek van alsó és felső szomszédja is? Indokold!

MÁRCIUS 2021						
kedd	kedd	szombat	csütörtök	csütörtök	szombat	vásárnap
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3. feladat Lacinak volt egy olyan trükkje, hogy ha valaki elárulta három, V alakban megadott szám összegét a naptárban, akkor kitalálta a középső számot. (Például, ha valaki megmondta, hogy az összeg 22, akkor ő tudta, hogy a középső szám a 12.) De sajnos elfelejtette hogyan működött a trükk. Segíts neki!

MÁRCIUS 2021						
Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

4.2.2. Az első ciklus tapasztalatai

Az dizájn kutatás első ciklusa 2020. decemberétől 2021. márciusáig zajlott egy magyar gyakorló általános iskolában, a 7A, 7B, 7C osztályokban. Az osztályok összlétszáma 73.

A mintakeresési feladat során a tanulók, az osztálytermi beszélgetések alatt ügyesen megfogalmazták az észrevételeiket, a megfigyelt szabályokat a saját szavaikkal, vagyis a természetes nyelvükön mondták el. Sőt, az általánosítás folyamata is természetes módon alakult ki a 7B osztálynál:

Tanuló (S7046): Ez csak decemberre igaz, vagy van másik ilyen hónap is?

Tanár: A decemberrel miért működik?

Tanuló (S7032): Hét szám van egymás mellett, vagyis hetek szerint vannak elrendezve, tehát minden hónapra igaz.

A bűvésztrükk közben a tapasztalatokat felírták a táblára, és aki rájött a trükkre, az lehetett a következő bűvész. Előfordult, hogy a tanuló olyan összeget mondott, amely nem osztható 3-mal. Ebben az esetben a tanár (vagy a diák, ha a tanár már átadta a bűvész szerepét) felhívta a figyelmet a lehetséges hibára, és megkérte a tanulót, hogy számoljon újra. Minden esetben a bűvésznek lett igaza. Végül a tanulók saját szavaikkal fogalmazták meg a szabályt, mi szerint három szám összegét kellett hárommal elosztaniuk, hogy megkapják az általuk választott számot.

A trükk működésének megbeszélésénél egy hibás analógia merült fel. Több diák úgy gondolta, hogy azért kell hárommal osztani az összeget, mert három számot adtak össze. A tanár kihasználta ezt a helyzetet, és bevonta az osztályt a hiba megvitatásába. A következő párbeszéd a 7A osztályból származik, bár a 7C osztályban majdnem ugyanez történt.

Tanár: Nézd meg az átlós mintákat a naptárban! (Rámutat a megfelelő mintára, amelyet szándékosan a táblán hagyott az óra elején.)

Tanuló: A hatos a kulcs.

Tanuló: Az egyik szám hattal kevesebb, a másik hattal több (mint a kiválasztott szám).

Tanár: Írjuk le, amit mondott! Legyen például a gondolt szám 11. Így $(11 - 6) + 11 + (11 + 6) = 3 \cdot 11 = 33$. Mi történik, ha a gondolt szám nem 11?

Tanuló: Bármilyen lehet.

Tanuló (S7014): Legyen mondjuk x .

Először S7014 próbálta megmagyarázni a szabályt a természetes nyelven, ami a tanár általános példáján alapult. Az $(x - 6) + x + (x + 6) = 3 \cdot x$ deduktív bizonyítással fejezték be.

A 7B osztályban az általános példák után S7046 javasolta, hogy a számokat a, b, c, d változókkal jelöljék, azaz $a + b + c = d$. Bár a tanulóban felmerült a betűk használatának igénye, a szimbólumok közötti összefüggéseket nem fejezte ki. A tanuló tipikus hibája megfelelő alkalmat adott arra, hogy a tanár felhívja a figyelmet arra az elvre, hogy a szimbólumoknak ki kell fejezniük a szituációból kivont matematikai összefüggéseket.

Két osztályban (7A, 7C) a diákok saját bűvészmutatványokat akartak készíteni. Mindhárom osztályban természetesen merült fel az általánosítás igénye: más hónapokban is alkalmazhatóak-e a sorozatok, más irányban, más hónapokban is működik-e a bűvésztűrk? A betűk és szimbólumok használata a három osztályból kettőben spontán módon, minimális tanári irányítással történt. A harmadik (7C) osztályban azonban több tanári útmutatásra és kérdésekre volt szükség.

Az utóteszteket a 6. táblázat szerint elemeztük, kódoltuk.

6. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, az utóteszt kódolása

Kód	Leírás	Meghatározás
NA	Nincs válasz	A következő elemek egyike: A tanuló nem nyújtott be megoldást. Nincs magyarázat. A tanuló nem értette a szöveget. A tanuló megpróbálja megindokolni, de nem ad releváns magyarázatot.
AR	Aritmetikai szint	A tanuló csak néhány számmal végez releváns számításokat.

Kód	Leírás	Meghatározás
ALG	Algebrai szint, szimbólum nélkül	A tanuló általánosan és helyesen érvel, természetes nyelven, szimbólumok használata nélkül
ALG+	Algebrai szint, szimbólum használatával	Három feltételnek kell teljesülnie. (1) Egy szimbólum egy számot képvisel a konfigurációban. (2) A tanuló helyesen fejezi ki a számok közötti összefüggéseket, és (3) a tanuló algebrai műveleteket végez

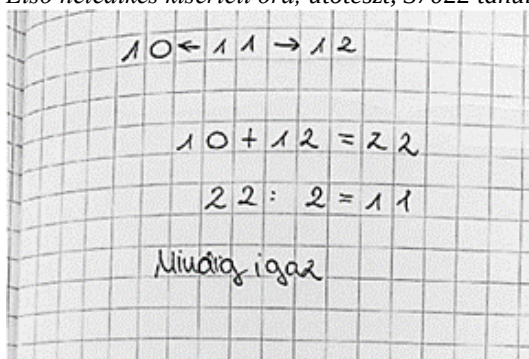
A következő példák illusztrálják az egyes kategóriákat.

NA (S7012, 1. feladat): „Igen, ez igaz. Mert ha egy számnak van egy bal és egy jobb szomszédja, akkor mindkettő páratlan vagy páros lesz, és ha két páratlan vagy páros számot összeadunk, és elosztjuk kettővel, akkor mindig egész számot kapunk.” Amit a tanuló ír, az önmagában igaz, de nem magyarázza meg a tapasztalatot

AR (S7022, 1. feladat): A tanuló csak egy konkrét esetre hivatkozik, és arra következtet, hogy a szabály mindig érvényes (5. ábra).

5. ábra

Első hetedikes kísérleti óra, utóteszt, S7022 tanuló megoldása, aritmetikai szint



ALG (S7001, 1. feladat): "A szabály azért érvényes, mert ha a választott számnál eggyel nagyobb és eggyel kisebb számot adsz össze, akkor mindig a választott szám kétszeresét kapod." A tanuló helyesen fejezi ki a számok közötti kapcsolatot természetes nyelven; érvelése általános, de nem használ szimbólumokat.

ALG+ (S7004, 3. feladat): A tanuló a V alak központi elemét a 'z' segítségével ábrázolta, helyesen határozta meg a másik két elemet (z-8, z-6), és helyesen végezte el az összevonást (3z-14). A szükséges számot ezután az összegből visszafelé

gondolkodva határozza meg. A szöveg: "Összeghez hozzá kell adni tizennégyet és el kell osztani hárommal." (6. ábra)

6. ábra

Első hetedikes kísérleti óra, utóteszt S7004 tanuló megoldása, algebrai szimbólumhasználat

$y = y$
 $z - 8 + z - 6 + z = 3z - 14$
 összeghez hozzá kell adni tizennégyet és el kell osztani hárommal

Az utóteszt eredménye, amelyet összesen 68 tanuló töltött ki (7. táblázat):

7. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, utóteszt eredménye

Kód	1. feladat	2. feladat	3. feladat
NA	23	28	61
AR	6	5	0
ALG	25	23	0
ALG+	14	12	7
Össz	68	68	68

Az első feladatban 39 tanuló adott algebrai szintű (ALG és ALG+) választ, azaz az összes tanuló 57%-a. A második feladatban is hasonló az eredmény, 52%, azaz a 68 diákból 35 tanuló. Az összes tanuló 21%-a használt szimbólumokat érvelésének kifejezésére (ALG+) az első feladatban, míg a második feladatban 18%-uk.

Az utóteszt egy váratlan általánosításra is példát mutatott: S7015 írta: "Következtetés: ha egy szám szomszédait összeadjuk (lehet második szomszéd, harmadik szomszéd, negyedik szomszéd), mindig a szám kétszeresét kapjuk. Ez azért van, mert mindkét szomszéd ugyanannyi különbséggel tér el a számtól".

4.2.3. Az első és második ciklus együttes tapasztalatai

A kutatás két ciklusban zajlott. Az első Debrecenben, a 2020-21-es tanévben (7A, 7B, 7C), utána Kiskőrösön és Debrecenben a 2021-2022-es tanévben (7D, 7E, 7F, 7G). Az első óra felépítése nem változott a két ciklus során, csupán kiegészítés történt az általánosítás megjelenésével kapcsolatban.

Az első tevékenység, vagyis a mintakeresés és szabályfelismerés, minden naptáras órán gördülékenyen ment. Több tanár is azt tapasztalta, hogy az összes tanulónak sikerült a tanár által bemutatott minta alapján (például 1-9-17-25 átló) önállóan más mintát felfedezni a naptárban (ellentétes átló, függőleges vagy vízszintes minta, kreatív megoldások). Ezek alapján a pedagógusok arra a következtetésre jutottak, hogy a mintakeresés és szabályfelismerés folyamata stabil alapot nyújt a további tanulási tevékenységekhez, mivel a tanulók önállóan is képesek voltak új mintázatok felfedezésére a naptárban.

Az első ciklus tapasztalata alapján a kutatás második ciklusában tudatosabban építettük be az általánosítás szempontját a tervezésbe. Az első ciklusban felmerült, hogy csupán arra az egy hónapra igazak-e a megállapítások (S7046). A továbbiakban a tanárok tudatosan figyeltek arra, hogy a tanulók spontán módon felvetik-e ezt a kérdést, és ha nem, akkor ők irányították rá a figyelmet. Ez a didaktikai beavatkozás lehetőséget ad a tanulók részére az érvelésre, amely az értelemalkotó algebra egyik fontos eleme. Magyarázatot adhat egyetlen tanuló is, vagy osztálymegbeszélés is kialakulhat, amely során több tanuló is részt vesz az indoklásban. Ha az érvelésre a tanulók részéről nincs igény, akkor a tanár indokol. A magyarázathoz vezető tanári magatartást is megfigyeltük, amely lehet neutrális, rávezető vagy erősen irányító. (8. táblázat)

A tanári magatartás típusok értelmezésénél (Rott, 2020) munkáját vettük alapul. Rott cikke alapján az erősen irányító, a neutrális és a stratégiákat hangsúlyozó tanári viselkedés az alábbi módon értelmezhető. Erősen irányító tanári viselkedés esetében a tanár szorosan irányítja a diákok problémamegoldási folyamatát, kevés teret hagyva a diákok saját gondolkodásának és stratégiáinak. Ez különböző módokon nyilvánulhat meg. Például a tanár előre meghatározza a probléma megoldásának egy helyes módját, és a diákokat ebbe az irányba tereli. Másik jellemző, hogy a tanár részletekre bontja a problémát, így a diákok gyakorlatilag nem is találkoznak az eredeti problémával, csak kisebb, rutinszerű lépésekkel. A neutrális tanári hozzáállás azt jelenti, hogy a tanár nem befolyásolja közvetlenül a diákok gondolkodását, és sem egy meghatározott megoldás, sem különböző stratégiák használata felé nem tereli őket. A stratégiákat hangsúlyozó, vagy röviden rávezető tanári viselkedés esetében a tanár nem egy adott megoldást sugall, hanem különböző stratégiák kipróbálására

ösztönzi a diákokat. A tanár különböző megoldási stratégiákat említ anélkül, hogy egy adott megoldási utat előírna.

8. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, általánosítás a hetedikes osztályoknál

	Spontán vagy tanári felvetés	Tanári magatartás	Ki indokol?
7A	-	-	-
7B	spontán	neutrális	tanuló
7C	-	-	-
7D	tanári felvetés	neutrális	osztálymegbeszélés
7E	tanári felvetés	neutrális	osztálymegbeszélés
7F	tanári felvetés	erősen irányított	tanár
7G	tanári felvetés	neutrális	tanuló

Osztálymegbeszélésre példa a 7E osztálynál elhangzott részlet.

Tanár: Mindegy, hogy melyik naptári hónapot vetítettük volna ki? A márciusi lehetett volna esetleg?

Tanuló: Nem, mert más napra esnek a dátumok, és elcsúsznak a sorozatok.

Tanár: Ki ért egyet Nórival? (Körülbelül az osztály fele jelentkezik) Kinek van más véleménye? Fruzsí?

Tanuló: Szerintem teljesen mindegy, mert egy héten ugyanúgy hét nap lesz, de a szabályok ugyanúgy érvényesek lesznek.

Tanár: Ki az, aki Fruzsival ért egyet? (körülbelül az osztály fele jelentkezik) Én is Fruzsival értek egyet. Kérlek mondd el a hitetlenkedőknek, hogy miért mindegy, hogy melyik hónap naptárát nézzük.

Tanuló: Mert egy héten mindig hét nap van, és ezáltal teljesen mindegy lesz, hogy milyen nappal kezdődik, a számtani sorozatok szabályai ugyanúgy érvényesek lesznek.

A többi osztálynál nem merült fel spontán az általánosítás az órának ezen pontján. Azonban tanári felvetésre a legtöbb osztályban szépen el tudták magyarázni a

tanulók. A dokumentációból kiderül, hogy voltak mellékvágányok az általánosítás során. Egy tipikus hiba volt, ami két helyen is felmerült, hogy a tanulók a megfigyeléseiket a naptári napok számához kötötték. Például, ha a 31 napos december helyett a 28 napos februárt nézzük, akkor a tanulók szerint már nem teljesülnek rá a megfigyelt minták. Egy másik jelenség, amely egy osztályban merült fel, hogy ha más nappal kezdődik a hónap, akkor már nem lesznek meg ezek a minták. Az osztálymegbeszélések során azonban, a helyesen érvelő gyerekek mindenhol meggyőzték kételkedő társaikat, hogy bármely hónapot tekintve meglennének a megfigyelt minták, például a 7E osztály esetében a fent idézett részletben. Többször nonverbálisan, mutogatással is magyarázták a naptár szerkezetét.

A mintakeresés után következett a bűvésztűkk, ahol három szám összegéből a tanár kitalálta a középső számot. A vizsgált csoportok mindegyikében felismerték a gyerekek a szabályt, és hamar át tudták venni a bűvész szerepét a tanártól.

“Levente ügyes matematikából, de nagyon gátlásos, mégis vállalta a bűvészkedést” - tanári reflexió, 7F.

A bűvésztűkk magyarázatánál szinte minden osztályban előjött az a hibás gondolatmenet, hogy azért kell osztani hárommal az összeget, mert három számot adtak össze. Erre a spontán tanári reakciók hasonlóak voltak, a tanári kérdések arra irányultak, hogy bármely három szám esetén teljesül-e. A lehetőségek felmérése során könnyen el tudták vezetni a gyerekeket a naptár szerkezetéhez.

Az egyik osztálynál (7D) egy másik érdekes gondolat is felmerült, amely során az abduktív gondolkodásra látunk példát. A tanár arról kérdezte a tanulókat, hogy miért kell elosztani hárommal az összeget ahhoz, hogy megkapják a kiválasztott számot.

Tanuló: Mert az összeg a három többszöröse.

Ha egy szám osztható hárommal, akkor osszuk el! Gyakran helyes megfigyelésekből erednek a jó sejtések az igazságról. A gyerekek pontosan ezt tették, megfigyelték, hogy az összeg mindig a három többszöröse és ebből következtettek. Bár a megfigyelt szabályt nem magyarázza az észrevételük, a hiba az indoklásban ez egy racionális, ésszerű hiba (Ben-Zeev, 1998).

A bűvésztűkk általános magyarázatához már szükségessé vált a szimbólum bevezetése. A dokumentációkban megfigyelhető, hogy milyen volt a tanár magatartása, melynek köszönhetően a gyerekek fejéből kipattant az-az ötlet, hogy “használjunk algebrát”, írjunk be egy betűt (9. táblázat).

9. táblázat

Első hetedikes kísérleti óra, változó bevezetése a hetedikes osztályoknál

	Tanári magatartás: változó bevezetése	Tanár mondja ki / tanuló mondja ki	Tanári magatartás: n-6, n+6 felírásánál
7A	neutrális	tanuló	neutrális
7B	rávezető	tanuló	rávezető
7C	erősen irányító	tanár	rávezető
7D	neutrális	tanuló	neutrális
7E	erősen irányító	tanár	erősen irányító
7F	erősen irányító	tanár	erősen irányító
7G	erősen irányító	tanuló	erősen irányító

A hét megfigyelt órából négy órán a tanuló mondta ki, hogy *“ezt úgy lehet felírni algebraként, hogy $a \cdot 3$ ”* (7D) vagy *„legyen mondjuk x ”* (7A). Ezek közül kettőnél neutrális maradhatott a tanár, de a legtöbb esetben erős irányításra volt szükség.

A szimbólum bevezetése után, a következő lépés a számok közötti szabály lejegyzése volt ($n - 6, n + 6$). Ennél a résznél érzékelhető volt, hogy az osztályok közötti különbségeket a tanár kompenzálta. Két órán rávezető, három osztálynál pedig erősen irányító magatartással.

A matematika tanárok számára általában kihívást jelent a diákok motiválása. Az egyik legfontosabb tapasztalat, amelyet a naptáras órák nyújtottak, hogy rendkívül motiváló volt a tevékenység. Ezt tükrözik a dokumentumok is. Olyan diákok is aktívak voltak ezen órákon, akiknek ritkán lendül a magasba kezük.

Hamar észrevették, hogy mi alapján tudok „bűvészkedni”. Ez a játékoság is hozzájárult ahhoz, hogy pozitív élményeket szereztek az órán. (Tanári reflexió, 7D.)

A második feladat nagyon tetszett a gyermekeknek, már a címe is „bűvésztükk”. (Tanári reflexió, 7G.)

Összegzésként szeretném megállapítani, hogy a tanulók sokkal aktívabbak voltak a szokottnál, jó ötletek nemcsak jó matekostól születtek, vidáman vettek részt az órán. (Tanári reflexió, 7E.)

8. ábra

Első hetedikes kísérleti óra végén tanulói kilépőkártyák

Érdekes volt, amikor
mindent becsatoltam a naptár
ban.

Érdekes volt amikor bevezetted.

Az órán az tettem a legjobban amikor saját szabályt kellett
csinálni

4.3. Összegzés, pedagógiai implikációk

RQ1 Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során?

Friedlander és Hershkowitz (2020) megállapításaival összhangban a kutatás megerősítette, hogy a tanulók szívesen és megfelelően általánosítanak és érvelnek a korai algebratanulási szakaszban. Egy lehetséges jó választás erre a folyamatra a szakirodalomból ismert naptárprobléma (Huang és mtsai., 2014). A matematikai struktúra egyszerű, összeadáson alapul, így a tanulók széles köre számára hozzáférhető problémák felvetésére használható. Továbbá az a tapasztalt, hogy a sejtések feltevése és igazolása természetes módon történik az ilyen típusú felfedező feladat segítségével. Ezen túlmenően ez a kutatás megállapította, hogy a problémaalapú tanítási megközelítés támogatta az általánosítási és érvelési tevékenységeket, jó teret biztosítva az osztálytermi megbeszélésnek (Kónya & Kovács, 2022). Az általánosítás sok esetben nem egyéni tevékenységként, hanem a csoportos diskurzus következményeként történt. Az általánosítás kiindulópontja a tanári kezdeményezés mellett, a tanulók kérdezése lehetett. A diákok az osztálytermi diskurzusban természetes nyelvi eszközeikkel fejezték ki gondolataikat szóban, ami megkönnyítette az általánosítást. A szöveges megfogalmazás túlsúlya a tanulási ciklus végéig megmaradt az írásbeli munkában. A kutatás első ciklusában azonban a tanulók mintegy 20%-a már magabiztosan használta a szimbólumokat a problémahelyzetekben is. A tanulási környezet ugyanazokat a folyamatokat segítette elő, amelyet (Palatnik & Koichu, 2017) írtak le: a tanulók állításokat dolgoztak ki és igazoltak, általánosításokat tettek, miért-kérdésekkel foglalkoztak, és koherenciát állítottak fel a feltárt észrevételek között.

A tanári magatartás minden megfigyelt óra esetében a tanulást támogatta. A tanárok alkalmazkodtak a tanulók képességeihez, ellensúlyozták az esetleges hiányosságokat, bizonytalanságokat. A legtöbb esetben neutrálisan viszonyultak az osztálytermi folyamatokhoz, majd, ha az nem hozta meg a várt eredményt, akkor rávezető, olykor erősen irányító kérdéseket tettek fel. Az általánosítás tárgyalásánál a neutrális tanári magatartás tanulói közléshez vagy osztálymegbeszéléshez vezetett. Az osztálymegbeszélések, tanulói párbeszédnek fontossága külön kiemelendő, ami az új és izgalmas problémának is az eredménye. Az értelemalkotó algebra természetesen vezeti el a tanulókat az általánosításhoz, de szükség van a hozzáértő tanári jelenlétre. A változó bevezetésénél már több osztálynál volt szükség erősen irányító tanári magatartásra. De így is volt három olyan osztály, ahol végül is a tanárnak kellett kimondania, hogy vezessenek be egy változót. Hasonlóképpen a számok közötti relációk lejegyzésénél is csupán két osztálynál lehetett a tanár neutrális. Ennek magyarázata lehet, hogy ez a kísérleti óra volt a második tanóra, ahol a tanulók változókat használtak. Az órán megjelenő készségek pedig folyamatos érlelés során fejlődnek.

Az értelemalkotó tanítási stratégia visszajelzései pozitívak voltak. Habár a fejezetben bemutatott naptaras óra volt az első ilyen tanóra a kísérlet során, már az első óra után érkeztek pozitív visszajelzések mind a tanárok, mind a tanulók részéről. A tanárok reflexiójukban kifejtették, hogy a tanulók aktívabbak voltak az átlagosnál, érdeklődést mutattak az óra témája iránt. Egy tanár megfogalmazta, hogy

Jó ötletek nemcsak jó matekostól születtek. (Tanári reflexió, 7E.)

Egy hagyományos tanórán ritkán fordul elő, hogy egy probléma köré épüljön fel az egész tanóra, így újdonság volt a tanulók számára. Az algebrai tanulmányaik legelején találtak a naptárproblémával, így az algebra témaköréhez, sőt, a matematika egész világához is csatolták a pozitív élményeket. A következő példák a tanulók névtelen kilépőkártyái közül származnak (9. ábra).

9. ábra

Első hetedikes kísérleti óra végén tanulói kilépőkártyák 2.

A mai órán azt tanultam, hogy az algebra nem nehéz.

A mai órán azt tanultam, hogy a matek lehet érdekes is

A tapasztalatok és a visszajelzések alapján az ilyen típusú, problémaalapú tanórák megfelelő körülmények között beépíthetők a tanítási gyakorlatba. Az átélhető kontextusba helyezett problémák gyakran hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók

megfogalmazzák sejtéseiket, és elinduljanak az általánosítás, valamint az érvelés irányába. A személyesen is átélhető problémahelyzet sok esetben támogathatja a motivációt, ezáltal a megértés folyamatát is. Ugyanakkor fontos szerepe van a tudatos és rugalmas tanári jelenlétnek, amely a helyzethez igazodva segíti a tanulási folyamat alakulását.

5. Az algebrai gondolkodásmód sajátosságai

5.1. Bevezetés

Az algebrai gondolkodás a matematikai gondolkodás egyik meghatározó területe, amely túlmutat a konkrét számolási eljárásokon, és a mintázatok, összefüggések, valamint általános szabályok felismerésére és kifejezésére irányul. Kialakulása fokozatos folyamat, amely az aritmetikai tapasztalatokra épül, ugyanakkor új szemléletmódot is igényel a tanulóktól.

Kilpatrick és mtsai. (2001) megfogalmazzák, hogy a matematikai gondolkodás elengedhetetlen a fiatal amerikaiak számára, hiszen magához a tanuláshoz matematikai gondolkodásra van szükség. Megfogalmazzák, hogy a tanulók sokszor nehéznek érzik az algebra tanulását, mert az számukra teljesen eltér a korábban megszokott aritmetikai feladatokról. Megnevezték az iskolai algebra két fő aspektusát. Egyrészt az algebra, mint az általánosság és az absztrakció szisztematikus kifejezési módja szerepel, másrészt mint szimbólumok szintaktikailag irányított transzformációja. Az algebra ezen szerepei vezetnek az iskolai algebra további tevékenységéhez, mint például a reprezentáció, különböző szabályalapú tevékenységek, illetve az általánosítás és érvelés. Az iskolai algebra középpontjában az algebrai kifejezések, valamint az egyenletek felírása és megoldása áll. Ezen tevékenységek azonban olyan gondolkodásmódot igényelnek, melyek az aritmetikai gondolkodástól jelentősen eltérnek.

Kieran (2004) a teljesség igénye nélkül, öt gondolkodási sajátosságot nevez meg, amelyek szükségesek az algebrai gondolkodáshoz.

- Az első ilyen sajátosság, hogy nem elég a számszerű válasz megadására összpontosítani a tanulónak, az összefüggésekre is oda kell figyelnie. Ez vonatkozhat a számok, adatok, műveletek egymással lévő relációjára, összefüggéseire is.
- A második, hogy a műveleteket és azok inverzeit is figyelembe kell venniük a tanulóknak, vagyis a visszafelé gondolkodást is el kell sajátítaniuk.
- Harmadik sajátossággként kiemeli Kieran, hogy nem elég a probléma megoldására koncentrálni, hanem egyaránt fontos a probléma szimbolikus reprezentálása is. Az algebrai gondolkodás kontextusában a probléma reprezentálása (ábrázolása) a probléma szimbolikus formába való lefordítását jelenti, amely általában egy egyenlethez vezet, és algebrai átalakításokkal manipulálható és megoldható. Ez az ábrázolás lehetővé teszi a tanulók számára, hogy elemezzék a probléma szerkezetét, azonosítsák az adatok és ismeretlenek között fennálló relációkat.

- A negyedik sajátosságot, mi szerint a betűkre és a számokra egyaránt koncentrálni kell probléma megoldása során, további három részre bontja. Egyrészt a betűk, melyekkel foglalkoznak, jelenthetnek változót, paramétert vagy ismeretlent is, ezeket el kell tudni különíteni. Másrészt a tanulónak fel kell ismernie, és el kell fogadnia, ha betű van a megoldásban. A megoldás ilyenkor még befejezetlennek tűnhet a tanulók számára, ezért fontos ennek a szemléletnek a kialakítása is. A harmadik gondolkodásmód, amely még ehhez a negyedik sajátossághoz sorolható, az algebrai tevékenységek értelmezése. Vagyis a numerikus kiértékelés helyett a tulajdonságok ismeretében tud kifejezéseket összehasonlítani, az egyenértékűség szempontjából.
- Az ötödik sajátossága az algebrai gondolkodásmódnak, melyet Kieran megnevezett, az egyenlőségjel jelentésének többféle értelmezése. Az aritmetikai tanulmányaik során a tanulók megszokják, hogy az egyenlőségjel bal oldalán van egy művelet, melynek megoldása az egyenlőségjel jobb oldalára kerül. Algebrai tanulmányaik során azonban megismerkednek az egyenletekkel is, ahol az egyenlőségjel már más szerepet tölt be. Itt az egyenlőségjel jobb oldalán, vagy akár mindkét oldalán is állhat művelet.

Ezen öt sajátosság közül a második, harmadik és ötödik már egyenletekhez, azok felírásához, értelmezéséhez, megoldásához kötődnek. Az első és a negyedik sajátosság azonban már rögtön az algebrai tanulmányok legelején előkerül, és elemzésünket ezek a sajátosságok fogják irányítani.

A fejezet hozzájárul az RQ2 kérdés megválaszolásához (Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?).

5.2. Relációk megfogalmazása betűs kifejezéssel

A hetedikesek körében négy kísérleti órából álló kutatás valósult meg. Ezek közül a második – az egyiptomi törtek köré épülő – óra tapasztalatai kerülnek bemutatásra, a relációk betűs kifejezéssel való megfogalmazásának szempontjából. A dizájn kutatás első ciklusának tapasztalatai alapján nem volt változtatás ebben az óratervben, a második ciklusban is ugyanígy szerepelt. Az óra középpontjában lévő feladat megfigyelésének fókuszában az alábbi szempontok álltak: megjelenik-e az általánosítás illetve az algebrai magyarázat igénye, ki tudják-e fejezni a tanulók algebrai kifejezésekkel a két egymást követő természetes szám közötti kapcsolatot.

5.2.1. A kísérleti óra felépítése

A megfigyelt feladat elején a tanulók önállóan dolgoztak, differenciált munkában. A tanár előzetesen két csoportba osztotta a tanulókat, matematikai teljesítményük

alapján. A csoportokat a tanár maga alakította ki, a tanulók tanulmányi eredményei, és korábbi órai munkájuk alapján. Az ülésrendben nem volt változtatás, a feladat szempontjából lényegtelen volt, hogy milyen csoportba tartozók ülnek egymás mellett. A gyengébb képességű csoportnak három kivonást kellett elvégeznie (10. táblázat):

10. táblázat

A gyengébb képességű csoport kivonási feladatai a 2. hetedikes kísérleti órán

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7}{42} - \frac{6}{42} = \frac{1}{42}$
$\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{11}{110} - \frac{10}{110} = \frac{11-10}{110} = \frac{1}{110}$

Az ügyesebb gyerekeknek gyakorlatilag ugyanezt kellett elvégeznie, csak konkrét számfeladat helyett az utasításokat kellett követniük: *Írj le két, egymást követő, egymél nagyobb természetes számot, majd írd fel a számok reciprokát! Végül, a nagyobb törtből vond ki a kisebbet, és számold ki az eredményt. Végezd el ezt a tevékenységet háromszor!*

A differenciálásnak ezt a módját párhuzamos tevékenységnek nevezzük (Small, 2012). A megközelítés lényege, hogy a különböző képességű csoportok ugyanazt a tevékenységet végzik, de különböző nehézségi szinten, ugyanakkor az osztálymegbeszélés során nem különülnek el a csoportok, a tanár olyan kérdésekkel készül az osztálymegbeszélésre, amelyet mindkét csoport képes megválaszolni. A fenti feladatot alkalmasnak tartjuk a párhuzamos tevékenységre, mert akár a művelet elvégzésének módjára, akár a megfigyelt szabályszerűség megállapítására irányuló kérdések csoportfüggetlenek lehetnek.

Az önálló munka után pármegbeszélés következett, ahol az egymás mellett ülők megbeszélték egymás között, hogy milyen észrevételeket tudnak tenni a feladat kapcsán. Ezt a lépést osztálymegbeszélés követte.

Az óra tervezésekor több lehetséges tanulói észrevétel is felmerült, így a tanár felkészült a szokatlan, kreatív megfigyelésekre is. A várt észrevétel azonban az volt, hogy a megoldásnál a számláló mindig 1, a nevező pedig a két eredeti szám szorzata. Ekkor a tanár feltehetette a kérdést, hogy vajon ez minden esetben teljesül-e.

Az általánosítás egy várható lépése, hogy a tanulók szélsőséges eseteket keresnek, ennél a feladatnál akár nagyon kicsi, akár nagyon nagy számokat választva. Ezért frontálisan megnézték még egy példát, nagyobb számokat választva. A frontális munkánál az ügyesebb csoportnak megadott lépéseket követték. A nagyobb számokkal végzett példa után ismét felmerülhetett a kérdés, hogy a megállapításaik

bármely szám esetén teljesülnek-e. Ekkor már az algebrai felírás, bizonyítás volt soron.

A feladat úgy fogalmaz, hogy *“Írj le két, egymást követő, egymél nagyobb természetes számot”*. Ezzel el is érkeztünk a kísérleti óra egyik kulcs momentumához, amikor a változók közötti relációt kell megfogalmazni, a matematika nyelvén. Ha az egyik számot n betűvel jelöljük, akkor a másik a rákövetkező, az eggyel nagyobb szám, vagyis $n + 1$.

5.2.2. Tapasztalatok

A megfigyelt hét osztály közül hatnál szinte ugyanúgy zajlott ezen reláció felírása, konkrétan megjelent a változók túlzott használata. A következő részlet a 7E osztály tanórájáról származik, amely jól reprezentálja a 7A, 7B, 7C, 7D és 7G osztályok tanórájának tapasztalatait is.

Tanár: Hogyan írjuk föl a következő számot, a mellette lévő, a szomszédját a bármilyen számnak?

Tanuló1: Eggyel nagyobb, mint egy a .

Tanuló2: b ?

Tanár: Nem b . Az a -nak a szomszédja. Hogyan írjuk fel?

Tanuló3: $a + 1$

Tanár: $a + 1$ [azaz] a szomszédja, nagyon jó! Szuper!

A tanár, már az első kérdésnél, több kapaszkodót is adott a diákoknak. Egyrészt elhangzott, hogy a *„következő szám”*. Ezzel a természetes számok halmazára emlékeztette a gyerekeket, és annak tulajdonságaira, vagyis, hogy mindig tudunk nagyobb természetes számot mondani. A második kapaszkodó, a *„mellette lévő”* kifejezés volt, ami a természetes számok számegyenesen való elhelyezkedését idézheti fel a tanulóknak. A harmadik segítség *„ a szomszédja”* kifejezés volt, ami a diákok alsó tagozatos ismereteihez nyúlt vissza. Alsó tagozaton tanulják az egyes, tízes, százaz... számszomszédokat, és azok képzését, amely ismeret a feladatban adott reláció felírásához is szükséges. Az osztálymegbeszélésbe több tanuló is bekapcsolódott. A Tanuló1 és Tanuló2 megszólalása szinte teljesen egyszerre történt, nagyon halkán. A Tanuló1 hozzászólása a reláció természetes nyelven való megfogalmazása volt. Tanuló2 a reláció helyett azonban egy újabb változó felírását javasolta. A változók túlhasználata, a fent leírt hat osztály mindegyikénél megjelent, azaz általánosan azt tapasztaltuk, hogy a kezdő algebra-tanulók gyakran minden új mennyiséghez automatikusan új változót rendelnek, anélkül, hogy figyelembe vennék a mennyiségek közötti kapcsolatot. Különféle kapaszkodókat adtak a tanárok az egyes órákon, hogy rávezessék a tanulókat a reláció kifejezésére. Egy érdekes

példa erre, a 7C órája, ahol szintén feljött a több változó használata, a és b formájában. Ezután a tanár kikötötte, hogy nem használhatnak másik betűt, valahogy az a -val kell kifejezni a másik természetes számot is. Ekkor az egyik tanulónál felmerült az $a1$ és $a2$ gondolata. Erre reagálva a tanár inkább a két természetes szám közötti kapcsolatra helyezte a hangsúlyt, így jutva el a kívánt $a + 1$ felírásig. Konkrétan visszavitte a képernyőt a frontálisan megvizsgált példához, ahol nagyobb számokkal végezték el az instrukciókat. A teszt példánál a 2020 volt a választott szám, és az öt követő 2021. Itt az alap kérdés, hogy hogyan, milyen művelettel lesz a 2020-ból 2021? A válasz természetes nyelven történő megfogalmazása után matematikai jelekkel is megfogalmazták a tanulók. Tanulói megnyilvánulások: „Eggyel nagyobb”, „Hozzáadtunk egyet”. A 10. ábrán a S7073 tanuló munkája látható, a 7C osztályból.

10. ábra

S7073 tanuló órai munkája, 2. hetedikes kísérleti óra

3. Teszteljük!

2020, 2021

$$\frac{1}{2020} > \frac{1}{2021}$$

$$\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = \frac{2021 - 2020}{4082420} = \frac{1}{4082420}$$

Megcsereleltek!

Egyedül a 7F osztály óráján nem merült fel a több változó használata. Náluk a természetes nyelven való megfogalmazás után a reláció matematikai felírása jelentette a problémát.

Tanár: Akkor próbáljuk meg általánosságban felírni ezt hogy ez mindig igaz-e, vagy hogy lehet ez az igazság mindig. Próbálkozzunk vele. Azt mondta a feladat, hogy két egymást követő természetes szám. Azt nem tudjuk, hogy mi ez a szám, akkor azzal... azt hogy jelöljük vagy mit mondjunk róla? Bármivel jelölhetem? Nem tudom pontosan, hogy mi ez a szám. Akkor mit használjak hozzá?

Tanuló: Betűt?

Tanár: Egy betűt használjak! Általában ezeknél a természetes számoknál, a feladatoknál n betűt szoktak használni. Azt mondjuk, hogy az egyik szám legyen az n . Na de mi legyen a másik szám? Azt mondta a feladat, hogy mindig egymást követő számok legyenek. Áron?

Tanuló: n

Tanár: Az az első. Hogy lesz biztosan a követő szám a második? Mondtátok, hogy 6, 7. Mondtuk, hogy 2, 3. Ha nem tudjuk, hogy az első mennyi, az n , akkor hogyan

tudjuk kiszámolni belőle, hogy mennyi lesz a második? Milyen viszony van abban, hogy 2, 3? Hogy 5, 6? Hogy 10, 11? Heni?

Tanuló: Például mondunk 7-et, és ha visszajövünk, az n 6 lesz?

Tanár: Behelyettesíthetjük az n 6-ra. Hogy lesz akkor belőle 7? Ha az n 6 volt?

Tanuló: Hozzáadunk egyet.

Tanár: Akkor adjunk most is hozzá egyet. A betűhöz, ha egyet hozzáadunk. Ha eddig n volt, adjuk hozzá az egyet. Akkor mi lesz belőle? $n...$ [felviszi a hangját]?

Tanuló: n a másodikon?

Tanár: $n...$? $n + ...$?

Tanuló: 1.

Tanár: Ugye, eggyel nagyobb lesz. $n + 1$ lesz a második szám.

Ennél az osztálynál is, a tanár konkrét példákkal vezette rá a tanulókat a számok közötti relációra. Az egyik tanuló visszafelé gondolkodott, úgy próbált meg rájönni a két szám közötti kapcsolatra. Ez egy jó irány volt, melyet a tanár is érzett, ezért tovább fűzte a tanuló gondolatát. „Hogy lesz belőle 7? Ha az ' n ' 6 volt?” Már nagyon direkt a tanár kérdése, de ezzel sikerült eljutni a két szám közötti reláció természetes nyelven való megfogalmazásához. Egy tanuló kimondta, hogy „Hozzáadunk egyet”. Innen már könnyű lehet az út, ha a gyerekek át tudják írni a természetes nyelvről matematikai jelekre a műveletet. Azonban ennél az osztálynál nem ez történt, sőt, elindult egy másik irány is. Felmerült, hogy a változót emeljék a második hatványra. Hogy miért pont ezt mondta a tanuló, nem derült ki, valószínűleg bizonytalan a korábbi ismereteiben. Mivel helytelen volt az első válasz, így a tanár még erősebb rávezetéssel élt, hogy a tanulóknak már csak egyetlen szóval kelljen kiegészíteni a megoldást.

5.3. A betű mint változó

A hetedikesek körében végzett kutatás harmadik óráján került megfigyelésre a betű szerepe. Algebrai feladatoknál a betű jelenthet változót, ismeretlent vagy paramétert is. Hetedik osztályban a betű, mint változó jelenik meg a leggyakrabban. Ismeretlenként nyolcadik osztályban, paraméterként inkább középiskolában találkozhatnak vele a diákok. A hetedikes kísérleti órák során tehát változóként jelent meg a betű.

A szimbólum mint változó használata szorosan összefügg a probléma szimbolikus reprezentációjával, ezt együtt vizsgáltuk. A szimbólum bevezetését a feladatlap támogatta, de a probléma szimbolikus reprezentációját már önállóan kellett megadni.

5.3.1. A kísérleti óra felépítése

Az óra elején, egy gyors szóbeli ismétlés után a táblára vetített instrukciókat kellett követniük a tanulóknak: *Írj fel egy kétjegyű természetes számot. (A két számjegynek különböznie kell egymástól!) Cseréld meg a számjegyeket, majd ezt a számot is írd le, az előző mellé. Vond ki a nagyobb számból a kisebbet! Végezd el ugyanezt még háromszor, mindig különböző számokat választva. Dolgozz a padtársaddal közösen! Hasonlítsátok össze a különbségeket, amiket kaptatok! Mit tapasztaltok? Írjátok le!* Például, ha a kétjegyű szám a 25, akkor a számjegyek felcserélésével 52-t kapunk. A nagyobb számból kivonjuk a kisebbet, vagyis $52 - 25 = 27$. További három példával már le lehet szűrni néhány megfigyelést, a kapott különbségekre vonatkozóan. A várt észrevétel, hogy minden különbség osztható 9-cel. Ezen felül az ügyesebb osztályokban tanulóktól felmerülhet az az észrevétel is, hogy a különbséget 9-cel osztva mindig az eredeti számjegyek különbségét kapjuk. A fent leírt példa alapján $27 : 9 = 3$, ami pontosan a számjegyek különbsége, $5 - 2 = 3$. Ha ez az észrevétel nem merül fel spontán a tanulók részéről, akkor a tanár irányító kérdésekkel rávezeti a tanulókat. Ekkor következik az általánosítás és a bizonyítás. Minden esetben működik ez a megfigyelés? Miért?

A frontális megbeszélés után a tanulók differenciáltan dolgoztak, feladatlapon. A gyengébb képességű csoportba tartozó gyerekek helyiérték táblázatába egy változót tettünk, az ügyesebb tanulóknak kettőt. A helyiérték táblázathoz tartozó utasítások ugyanazok voltak, minden tanulónál.

1. Melyik számot írtam a helyiérték-táblázatba? Írd fel helyiérték szerinti

t	e
8	a

összegalakban!

és

t	e
b	a

2. Írd be a helyiérték-táblázatba a számjegyek felcserélésével kapott számot!

3. Melyik szám ez? Írd fel helyiérték szerinti összegalakban!

4. Az első számból vond ki a másodikat! Írd fel a kivonást!

Így a feladat végén a gyengébb tanulóknak a $(8 \cdot 10 + a) - (10a + 8)$ kifejezést kellett kapniuk, az ügyesebb csoportnak pedig $(10b + a) - (10a + b)$ felírást.

A kutatás első ciklusában részt vevő 7A, 7B és 7C osztályoknál nehézséget okozott a helyiérték táblázathoz tartozó utasítások végrehajtása. Ezt az alábbi, tanári reflexiókból kiragadott mondatok is alátámasztják.

“A feladat már a legelején elakadt, mert a legtöbben nem ismerték fel a helyiérték táblázatot, és a kivonást sem tudták felírni.” - tanári reflexió, 7A

“Nem tudom mit kell kivonni, mert itt csak betűk vannak.” - tanulói megnyilvánulás, 7A

“A helyiérték szerinti összegalak is nehezen ment, nem biztos, hogy értették.” - tanári reflexió, 7B

“Hol vannak a számok?” - tanulói megnyilvánulás, 7C.

Ezen tapasztalatok alapján változtattunk az óraterven. A második ciklusban megtartott órák terve több helyen is változott. Ezúttal, a helyiérték-táblázat és a helyiérték szerinti összegalak ismételése került az óra elejére, ahol először csak számok szerepelnek a táblázatban, majd számok és változók vegyesen (11. ábra). A feladat a helyiérték szerinti összegalak felírása volt. Az összegalak felírása után, tanári irányítással behelyettesítést végeztek szóban vagy írásban.

11. ábra

3. kísérleti óra bevezető feladata a második kutatási ciklusban, hetedik évfolyam

sz	t	e	összegalak
	7	8	$10 \cdot 7 + 8$
1	2	2	$100 + 10 \cdot 2 + 2$
	x	7	$10 \cdot x + 7$
	a	b	$10 \cdot a + b$
u	5	5	$100 \cdot u + 10 \cdot 5 + 5$

A behelyettesítés után pármunkában dolgoztak a tanulók, akárcsak az eredeti óratervben, követték a kivetítőn lévő instrukciókat. Ezt követően azonban a differenciált munka helyett egyénileg dolgoztak a 3. feladaton (12. ábra), minden lépés után frontális ellenőrzéssel.

12. ábra

3. kísérleti óra 3. feladata a második kutatási ciklusban, hetedik évfolyam

szám					a számjegyeket felcseréljük					különbség																				
<table><tr><td>sz</td><td>t</td><td>e</td><td colspan="2">összegalak</td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td colspan="2"></td></tr></table>					sz	t	e	összegalak			a	b			<table><tr><td>sz</td><td>t</td><td>e</td><td colspan="2">összegalak</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2"></td></tr></table>					sz	t	e	összegalak							
sz	t	e	összegalak																											
	a	b																												
sz	t	e	összegalak																											
(a>b)																														

A feladat végén itt is meg kellett kapniuk a $(10a + b) - (10b + a)$ kifejezést. Innen algebrai tevékenységekkel $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$ kifejezést kapták, amely bizonyítja a korábbi megfigyeléseket.

5.3.2. Tapasztalatok

A második ciklus tapasztalatai a következők voltak. A helyiérték-táblázat átismétlése minden osztályban hasznos volt, mert szinte minden osztályban volt félreértés azzal kapcsolatban, hogy mi is az összegalak. Az első példa, vagyis a 78 összegalakjának frontális megbeszélése után a legtöbb tanuló hibátlanul fel tudta írni a táblázatban szereplő többi szám összegalakját is. Egyedül a 7F osztálynál került felszínre olyan probléma, amely a helyiértékes írásmód megértésének hiányára utal.

Tanár: Próbáljátok akkor a következő számot egyedül! A százask helyén áll az 1-es, tízesek helyén áll a 2-es, és az egyesek helyén áll ismét egy 2-es. Akkor mi lesz ennek a számnak az összegalakja? Ki az, aki úgy gondolja, hogy ő tudja? Mit írtál Attilám?

Tanuló: $100 \cdot 1 + 2 \cdot 10 + 2$

Tanár: '10 · 2' legyen, '+ 2'. Ki az, aki ezt írta?

Tanuló: Én azt, hogy '10 · 10'

Tanár: '10 · 10' Ez jó lesz? Mármint a 100 helyett?

Tanuló: Igen

Tanár: Az ugyanúgy 100-at ér, csak egyszerűbb úgy, hogy '100 · 1'. Akkor most próbálkozzatok a következő hárommal egyedül.

Ennél az osztálynál előtérbe került, hogy több hetedikes tanuló van, aki még bizonytalan a helyiérték szerinti felírásban. Ezen tanulóknak nyilván nehezebb a dolguk, ha algebrai kifejezésekkel találkoznak egy amúgy is ingoványos talajon.

Tanár: Ki az, akinek '10 · x + 7'-je van? Ügyes, jó!

Tanuló: Nekem '10 · 7'

Tanár: Az jó lesz-e, hogy "10 · 7"? Ki tudna segíteni Áronnak, hogy mi a gond ezzel?

Tanuló: Hogy az x-et azt nem tudjuk.

Tanár: Az egy dolog, hogy az x-et esetleg nem tudjuk, bár ő a tízesek helyén áll. De miért nem 10-szer hetet írhatok? Valaki segít? Elkezdtétek mondani Levente...

Tanuló: Az egyesek helyén van, nem a tízesek helyén.

Amikor bevezetjük az alaki érték, helyi érték, valódi érték fogalmakat ötödik évfolyamon, akkor a tanulók igazából nem látnak gyakorlati hasznát. Egy procedurális tudás rögzül az ötödikesekben, a helyiérték szerinti összegalakokkal kapcsolatban, amit általában könnyűnek ítélnék meg. Ugyanakkor a számjegyekkel kapcsolatos algebrai feladatoknál megkerülhetetlen a helyiérték értő használata, amelyhez már egy koncepcionális tudás szükséges, ezért már nehéz a tanulók számára.

Érdekes szempont lehet, hogy a helyiértékes felírás problémája kapcsolatban van-e az algebrai gondolkodással. A kutatás tapasztalatai alapján igen, a helyiérték helyes kezelése az algebrai gondolkodás egyik ismérve.

A behelyettesítés minden osztálynál jól ment, ahogy a ' $10a+b$ ' felírása is. A két szám különbségének felírása azonban sok tanulónál okozott problémát. A 7G osztálynál csupán négy párnak sikerült felírni a különbséget, pedig a páros munka során a tanár több gyerekeknek is segített. A 7D és 7F osztályoknál a tanár inkább a frontális irányítást választotta a különbség felírásához. A 7D osztálynál ez gördülékenyen ment, helyesen mondta el az első felszólított tanuló. Ezzel szemben a 7F osztálynál több megbeszélést igényelt a feladat.

Tanár: Jöjjön a különbség. Az első összegalakból kivonjuk a másodikat. Levente!

Tanuló: ' $ab - ba$ '

Tanár: Nézd csak, de az első az az volt, hogy ' $10 \cdot a + b$ ', ugye? Akkor ezt kéne ideírunk, hogy ' $10 \cdot a + b$ ' ő lesz az első szám. Ebből kell kivonnunk a második számot. Hogy fog szólni a második szám, mit írjak ide?

Tanuló: ' $10 \cdot b + a$ '

Ebben az esetben a tanuló elfeledkezett az algebrai kifejezések szorzásának jelöléséről. A változók, illetve az együtthatók és változók között, a szorzásjel elhagyható. Tehát az általa mondott ' ab ' kifejezés valójában az ' a ' és ' b ' változó szorzatát jelenti. A 7E osztálynál szintén felmerült ez a gondolkodás, mert az osztályban két feladatlapon is megjelent a következő felírás (13. ábra).

13. ábra

S7106 tanuló munkája, 3. kísérleti óra 3. feladata, hetedik évfolyam

szám				a számjegyeket felcseréljük				különbség
sz	t	e	összegalak	sz	t	e	összegalak	
	a	b	$10a + b$		b	a	$10b + a$	$ab - ba = 9 \cdot (a - b)$
(a > b)								

$$\begin{aligned}
 (10a + b) - (10b + a) &= 10a + b - 10b - a = \\
 10a - a + b - 10b &= \underline{\underline{9a - 9b}} \\
 &= \underline{\underline{9(a - b)}}
 \end{aligned}$$

A feladatlapon látható a kivonás helyes levezetése, a megoldás dupla vonallal aláhúzva. Azonban a "különbség" rublikába az ' $ab - ba = 9(a-b)$ ' látható, háromszor

aláhúzza. Olyan, mintha az került volna rá utolsóként a papírra, összegzésként. A tanuló ezzel jelölte, hogy van egy kétjegyű szám, az 'ab', aminek ha felcseréljük a számjegyeit akkor a 'ba' számot kapjuk. Ezek különbsége pedig a kiszámolt '9(a-b)'. Egyéni jelölés is lehet a részéről, azonban arra utal, hogy a tanuló nem látja a különbséget az 'ab - ba' és a ' $(10a + b) - (10b + a)$ ' között. Vagy lehet úgy gondolja, hogy ez csupán az összegalak, nem maga a szám. Mint például a 72 esetén az összegalak $10 \cdot 7 + 2$, de a kivonásnál mégis úgy számolunk, hogy $72 - 27$, nem pedig $(10 \cdot 7 + 2) - (10 \cdot 2 + 7)$. Így a tanuló automatikusan 'ab'-t írt fel, mert a helyiérték táblázatban 'a' szerepel a tízesek helyén és 'b' az egyesek helyén. Amit a tanuló akart, azt ab felülvonással ($\overline{ab}$) szokták jelölni, ezt a jelölést azonban még nem ismeri. Érdekes, hogy ez a jelölés csak az algebrai átmenet során merül fel először, hiszen a 72-t sosem húzzuk felül, de nem is értünk alatta szorzást, $7 \cdot 6$ -ot.

A betűk használatával tehát változnak a jelölési konvenciók. Vagyis az egymás után írt számjegyek és az egymás után írt betűk nem ugyanazt a jelentést hordozzák. Míg a számok esetében helyiérték szerinti felírásról van szó, addig a betűs kifejezéseknél, a két vagy több változó szorzását jelenti. Lényegében az alaki érték, helyiérték és valódi érték összekeveréséről van szó.

A 7F osztály esetében a negyedik kísérleti órán is felmerült ez a probléma. Az óra felépítését a következő fejezetben tárgyaljuk, itt csupán egy megfigyelt jelenséget mutatunk be. A feladat az volt, hogy írjanak fel általános alakban, helyiérték szerinti összegalakban, egy 5-re végződő, kétjegyű természetes számot. Ehhez helyiérték táblázatot készítettek.

Tanár: Akkor milyen alakba tudjuk ezt a számot írni?... Ha a második számjegye 5, ez biztos hogy 5 lesz a végén, és mit írjak elé?... Ti döntitek, hogy milyen betűt használjunk.

Tanuló: k betűt

Tanár: Azt mondta a Szebi, hogy k betűt, ő volt hangos. ' $k5$ ' lesz. Jó, akkor mennyit ér ez a szám, hogy ' $k5$ '?

Tanuló: k -szor 5

Tanár: k -szor 5-öt fog érni?

Tanuló: Igen

Tanár: Melyik helyiértéken van a k betű?

Tanuló: Hát szerintem a tízes...

Tanár: A tízeseknél. Az 5-ös van az..

Tanuló: egyesek

Tanár: egyeseknél, akkor...

Tanuló: 15

Tanár: Melyik van a tízesek helyén, Szebi?

Tanuló: k

Tanár: A k , akkor a k -nak mennyi a valódi értéke?... ' $10k$ '. Emlékeztek a táblázatra, amit múltkor egyszer használtunk? Na akkor nézzük meg, tényleg, használjuk újra ezt a táblázatot...

A tanuló problémáját itt az okozta, hogy a betűt tartalmazó felírást nem tudjuk úgy kiolvasni mint a számot tartalmazót. Szóban azt mondjuk, hogy ' $k5$ ', ami ebben a formában leírva valóban k -szor 5-öt jelentene, pedig jelen helyzetben $10k + 5$ az értéke. Nehéz ezt megérteni a tanulóknak, hiszen például a 35 kiolvasását sem úgy mondjuk, hogy „10-szer 3 meg 5”, hanem harmincöt.

5.4. Algebrai tevékenységek

A következőkben a negyedik és egyben utolsó hetedikes kísérleti órák tapasztalatait mutatjuk be, előbb az algebrai tevékenységek értelmezése, majd a megoldás vizsgálatának szempontjából. Az óra felépítése az alábbi vonalat követte, mindkét kutatási ciklus esetében.

5.4.1. A kísérleti óra felépítése

Az óra egy játékos versennyel kezdődött, ahol saját tanárunkkal versenyezhettek a diákok. A tanár kihívott egy önként jelentkező tanulót az okostáblához, amelyen már meg volt nyitva egy számológép. A feladat az volt, hogy a többi tanuló mondjon kétjegyű, 5-re végződő természetes számot, amit a táblánál álló diák a számológépen, a tanár fejben a második hatványra emelt. Az győzött, aki hamarabb megkapta az eredményt. A számolások között cserélődhettek a számológéppel számoló tanulók, hogy bárki összemérhesse gyorsaságát tanárával.

A játék után frontálisan megbeszélték, hogy vajon hogyan számolt a tanár. Ehhez szétválasztották helyiérték szerint a kétjegyű, 5-re végződő számokat, és a négyzetüket is, a tízes helyiértéknél. Így azt tapasztalták, hogy a mondott számok négyzete mindig 25-re végződik, a 25 előtt álló egy- vagy kétjegyű szám pedig az eredeti kétjegyű szám tízes helyiértékén álló számnak és az öt követő természetes számnak a szorzata. Például, ahol 7 áll a tízesek helyiértékén, vagyis $7 \cdot 8 = 56$ lesz a megoldásnál a 25 előtt álló szám. A szabály felfedezése után, vagy épp annak a megkönnyítésére a diákok kitöltöttek egy táblázatot (11. táblázat), egy “szabálygép” mintájára. A gépbe a kétjegyű számok tízes helyiértékén álló számjegye került be, és a négyzetszám 25 előtt álló száma jött ki. A táblázat célja a szabály fogalmának erősítése, illetve az általános alak felírásának megkönnyítése volt. A táblázat kitöltésével megkapták az ' $a(a+1)$ ' algebrai kifejezést.

11. táblázat

Szabálygép a 4. kísérleti órán, hetedik évfolyamon

be	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	a
ki	2	6	12	20	30	42	56	64	90	110	132	$a(a+1)$

Ezt követte a magyarázat, a megfogalmazott szabály bizonyítása. Először fel kellett írni az 5-re végződő természetes számokat helyiérték szerinti összegalakban, ' $10a+5$ '. Az összegalak felírásában helyiérték táblázat (12. táblázat) segítette a tanulókat, melyet frontálisan töltöttek ki.

12. táblázat

Helyiérték táblázat a 4. kísérleti órán, hetedik évfolyamon

sz	t	e
	a	5

Ezt a kifejezést kellett a négyzetre emelni, elvégezni a szorzást, majd összevonni és kiemelni. A kísérletben részt vevő hetedikos osztályok, a kísérleti órák közötti matematika órákon megismertkedtek a felsorolt algebrai tevékenységekkel. A negyedik, vagyis az utolsó kísérleti órára már minden, a feladat megoldásához szükséges algebrai tevékenységgel találkozottak. Így jutottak el a $100a(a+1) + 25$ algebrai kifejezéshez, ami a feladat megoldása volt. Az ehhez szükséges lépéseket a 13. táblázat foglalja össze.

13. táblázat

Algebrai tevékenységek a 4. kísérleti órán, hetedik évfolyamon

	Algebrai tevékenység megnevezése	Algebrai tevékenység
1. lépés	hatványozás értelmezése	$(10a + 5)^2 = (10a + 5) \cdot (10a + 5)$
2. lépés	többtagú algebrai kifejezések szorzása	$(10a + 5) \cdot (10a + 5) = 100a^2 + 50a + 50a + 25$
3. lépés	egynemű algebrai kifejezések összevonása	$100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25$
4. lépés	kiemelés	$100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$

A második lépést, vagyis a többtagú algebrai kifejezések szorzását területmodellel is megoldhatták a tanulók. A korábbi órákon már megismerkedtek vele, így volt tapasztalatuk a használatában. A modell lényege, hogy a többtagú kifejezések szorzótényezőként egy téglalap két szomszédos oldalaként jelennek meg. A téglalap területét a szomszédos oldalak szorzata adja. A 14. ábrán látható módon felosztjuk a téglalap oldalait. Az így keletkező kis téglalapok területének kiszámításához már csak egytagú algebrai kifejezéseket kell szorozni egytagú kifejezésekkel. Például ' $10a \cdot 5 = 50a$ '.

14. ábra

Területmodell többtagú algebrai kifejezések szorzására, 4. kísérleti óra, hetedik évfolyamon

10a	100a ²	50a
5	50a	25
	10a	5

5.4.2. Tapasztalatok: algebrai tevékenységek értelmezése

A vizsgált kísérleti órákon, mind a négy lépésnél jelentkezett probléma, az egyes osztályokban. Volt olyan osztály, ahol egy probléma mutatkozott meg, de volt, ahol több lépés is nehézkesen ment a tanulónak. A következőkben ezen lépések mentén mutatjuk be az előforduló problémákat (14. táblázat).

14. táblázat

Az előforduló nehézségek a 4. kísérleti órán

	Algebrai tevékenység megnevezése	Osztályok, ahol biztosan problémát okozott
1. lépés	hatványozás értelmezése	7D
2. lépés	többtagú algebrai kifejezések szorzása	7D
3. lépés	egynemű algebrai kifejezések összevonása	7A, 7F
4. lépés	kiemelés	7A, 7G

Az első lépés nem is annyira algebrai tevékenység, mint a hatványozás, és annak jelölésbeli értelmezése: $(10a + 5)^2 = (10a + 5) \cdot (10a + 5)$. A 7D osztály esetében nehézséget okozott ez az átírás, annak ellenére, hogy frontálisan megbeszélték a négyzetre emelés fogalmát. A tanuló a '10a+5' összeg tagjait szeretne volna külön-külön a második hatványra emelni. Ez a probléma csak ennél az osztálynál került felszínre, a többi osztály esetében vagy elsőre helyes választ mondott a felszólított tanuló, vagy tanári bemondás volt.

Tanár: Mit jelent az, hogy a négyzeten van valami?

Tanuló: Hát ő, kétszer megszorozzuk a számot önmagával.

Tanár: Tehát egy olyan szorzat, amelynek hány tényezője van?

Tanuló: Kettő

Tanár: Kettő, és mind a két tényezője...

Tanuló: Ugyanaz.

Tanár: Ugyanaz. Tehát akkor mit írok fel Ármin?

Tanuló: 100a...

Tanár: Várjál csak, még ne, először bontsuk ki, jó?

Tanuló: Akkor az '10a+5', és akkor mindegyik a másodikon.

Tanár: De az úgy már fel van... Ja, vagy úgy érted, hogy mindegyik a másodikon? Az nem jó.

Tanuló: '10a'-szor '10a', meg 5-ször...

Tanár: Egyelőre írjuk már le zárójelben. $(10a + 5) \cdot (10a + 5)$ Erre gondoltam, amikor mondtam, hogy írjátok föl. Ki írta ezt, hogy lássam? Nagyon jó, vannak néhányan, nagyon jó, örülök. Ez után mit kell csinálni?

A második lépés a többtagú algebrai kifejezések szorzása volt, melyet a legtöbb osztályban frontálisan végeztek el, területmodell segítségével: $(10a + 5) \cdot (10a + 5) = 100a^2 + 50a + 50a + 25$. Egyedül a 7E osztálynál nem került elő a területmodell, ott a "minden tagot minden taggal" szabály alapján dolgoztak. Az első lépésnél is idézett 7D osztály tanulói önálló munkában végezték el a szorzást, frontális ellenőrzéssel. A zárójeles szorzás felírása után közvetlenül elhangzott egy tanulótlól, hogy $20a^2 + 10$. A tanár ezután átismételte a diákokkal a "minden tagot minden taggal" szabályt, illetve emlékeztette őket, hogy területmodellt is használhatnak. Az osztály egybehangzó véleménye viszont az volt, hogy inkább nem használják azt a modellt. Általános tapasztalat volt, hogy ez a reprezentációváltás, habár segítene megérteni, de a gyerekeknek nem tetszik. Ennek oka lehet a modell hátránya, hogy hiába ad magyarázatot, de nem bizonyít. Például negatív számok

esetén nem is működik. A tanulók a területmodellel szemben előnyben részesítik a “minden tagot minden taggal” szabályt, amely egy procedurális tudást biztosít a számukra, a konceptuális helyett. A területmodell bevezetése nem egy kísérleti órán történt, így pontos feljegyzések nem születtek róla. Azonban az biztos, hogy több osztálynál is felmerült, hogy mindenképpen szükséges-e a területmodell alkalmazni. *“Ezt így kell csinálni majd a dolgozatban?” “Nem elég csak kiszámolni?”* Ezek a kérdések arra utalnak, hogy plusz kognitív terhelést jelent számukra a reprezentációváltás, illetve megelégszenek a procedurális tudással.

Az egyéni munka utáni frontális ellenőrzésnél, a 7D osztálynál ismét előkerült a hatványozás értelmezésének problémája, hiába volt már zárójeles szorzatként felírva a művelet.

Tanár: Akkor tessék mondani

Tanuló: ' $100a^2 + 25$ '

Tanulók kórusa: Nem!

Tanár: Gergő, mondtam, hogy jelöljétek vonalakkal, hogy ha máshogy nem megy. Aztán csak meg fogjuk nézni a területmodellel is, hátha valakinek az lesz érthetőbb. Tessék mondani!

Tanuló: ' $100a$ ' a másodikon...

Tanár: Ugye, ezt a két tagot szoroztuk most össze, tehát az lett... Igen?

Tanuló: Meg ' $50a$ '

Tanár: Nagyon jó!

Tanuló: meg ' $50a$ ', meg 25

Tanár: Nagyon jó! Kinek lett ez? Ügyesek vagytok!

A harmadik lépés, vagyis az egynemű algebrai kifejezések összevonása két osztály kivételével (7A, 7F) hibátlanul sikerült: ' $100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25$ '.

A 7F osztály esetében csupán egy figyelmetlenségről volt szó, mivel az egyébként helyes összevonást felolvasó lány az kifejezés végére nem 25-öt mondott, hanem előbb ' $50k$ '-t, majd ' $25k$ '-t. A hibáját azonnal javította, ahogy visszakérdezett a tanár. A 7A osztály esetében pedig összevonás helyett, elsőként a hatványozás ötlete merült fel. Ez a probléma is a hatványozás értelmezéséhez kötődik, mert a tanuló nem vette figyelembe az algebrai kifejezések között álló műveleti jelet.

Tanár: Akkor írjuk le, hogy amit felírtunk egyenlő ' $100a^2 + 50a + 50a + 25$ ' ?

Tanuló: nem lehet, hogy az ' $50a$ '-t zárójelbe írjuk és négyzetre emeljük?

Tanár: Jó helyen kapisgálsz, de nem szorzás van köztük.

Az utolsó algebrai kifejezésekkel végzett tevékenység, amit a tanulóknak el kellett végezniük, az a kiemelés volt: $100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25$. Volt olyan osztály - például a 7E osztály - ahol ez gördülékenyen ment, elég volt egy kis tanári rávezetés. De például a 7F osztálynál erős irányításra volt szükség. Nem várt válasz a 7A és a 7G osztályoknál jelentkezett. Ezen osztályoknál lépett fel az a probléma, hogy a tanuló által mondott kiemelés helyes volt, de nem felelt meg a feladat céljának. A 7G osztálynál például nem '100a'-t emelt ki a tanuló, hanem '10a'-t. A kiemelés helyes, de mégsem ideális a feladat szempontjából.

Tanár: Akkor mit kéne ezzel az összegalakkkal csinálni?

Tanuló: Kiemelni

Tanár: Szorzattá alakítani, és erre a kiemelést használjuk, így bizony. Tehát akkor lapozok és fölírom, hogy $100a^2 + 100a$. Ki vállalja a kiemelést?... Ki vállalja a kiemelést?... Jó, Imi? Mit tudunk kiemelni?

Tanuló: Hát hm, a '10a'-t

Tanár: Miért 10-et?

Tanuló: Hát hm... '100a'

Tanár: Mikor mind a kettő 100-zal van megszorozva. Hát '100a'-t, így bizony. Nyitom a zárójelet, $100a^2$ -ben a '100a'?

Tanuló: Hát '1a'

Tanár: Így van, simán 'a'-t írok. És Martin, '100a'-ban a '100a'?

Tanuló: Az 1.

Tanár: Na azért. Meg 1.

Ehhez a lépéshez tehát már nem elég a procedurális tudás, szükség van egy problémamegoldó stratégiára, a visszafelé gondolkodásra is. Az óra célja egy szabály bizonyítása volt, amelyhez a ' $100a(a+1) + 25$ ' alakot kellett megkapni. A ' $100a(a+1)$ ' szorzás elvégzésével, mivel 'a' egy egyjegyű szám, egy 100-zal osztható három-, vagy négyjegyű számot kapunk, amelyhez hozzá kell adni 25-öt. Mivel a szorzat 100-zal osztható volt, így biztosan 25-re fog végződni a végeredmény. A szorzatban szereplő ' $a(a+1)$ ' pedig az 'a' szám és a nagyobb egyes szomszédjának szorzata. Vagyis a kiemelés során kapott alak magyarázza az óra elején megfogalmazott szabályt. Ha viszont '10a'-t vagy akár bármely mást emel ki a tanuló, akár 25-öt, akkor nem fogja megkapni a várt kifejezést. Szükség van tehát a visszafelé gondolkodásra, amelyhez tudni kell, hogy milyen formát szeretne megkapni a végén. Ehhez viszont szükséges a megoldás értelmezése is, ami a következő alfejezet témája. Anélkül, hogy ez a tudás meglenne, nehéz a tanulóknak megtalálni a megfelelő

kiemelést. És még nehezebb megérteni, hogy az általuk mondott kiemelés habár helyes, jelen problémánál nem a legjobb választás.

5.4.3. Tapasztalatok: *Betű a megoldásban*

A ' $100a(a+1)+25$ ' megoldás értelmezését is vizsgáltuk. Mivel a ' $100a(a+1)+25$ ' korántsem hasonlít a korábban, aritmetikai feladatoknál megszokott megoldásokhoz, így az értelmezése is nehezebb volt a hetedikesek számára. Az értelmezés megkönnyítése végett, a kísérleti órák során a tanulók behelyettesítést is végeztek, tetszőleges számokkal, az algebrai magyarázat több lépésénél is. Már az összegalaknál behelyettesítettek 'a' helyére valamely számjegyet, hogy megnézzék a ' $10a+5$ ' értékét. Majd ahol menet közben a tanár szükségesnek látta, közben is végeztek behelyettesítést. A megoldás értelmezéséhez szintén kulcsfontosságú volt a behelyettesítés. Ezáltal értelmezték az algebrai kifejezéseket, valamint a "számeredmény" miatt, az eljárás közelebb állt a tanulók korábbi ismereteihez, hozzá tudták kapcsolni azt. Idézet a 7F osztály órájából:

Tanár: ...Na tegyünk egy próbát, tegyünk egy próbát! Mielőtt a Dani végképp elalszik, mond nekünk egy 5-re végződő, kétjegyű számot. Próbáljuk ki, hogy igaz lesz-e.

Tanuló: 25

Tanár: Tessék? Már megint? Jó, legyen a 25, még mindig a 25. Danikám, akkor neked most már nagyon kell tudni, mert ezt már körülbelül ötödször mondjuk. Mennyi az 'a'?

Tanuló: 10

Tanár: Hát, ha 25-öt...

Tanuló: 2

Tanár: Na azért. És azért, biztos ami biztos, visszalapozok, hogy mennyit kell kapnunk eredményül?

Tanuló: 625

Tanár: 625. Jó, na akkor Dani, írjuk föl...

A 7D osztály esetében a tanár a behelyettesítés után mindenképpen szeretne volna, ha a tanulók szóban is elmondják a megoldás magyarázatát. Mielőtt feltette a kérdést, emlékeztette a tanulókat az alap problémára, vagyis az 5-re végződő kétjegyű számok négyzeténél tett megfigyelésre. Az algebrai levezetés után megkapták a ' $100a(a+1)+25$ ' kifejezést, és ezt szeretnék most értelmezni.

Tanár: ...Miért magyarázat ez arra, hogy tényleg így kell csinálni? Figyeljétek meg.

Tanuló: Mert nem egy konkrét számot írtunk, hanem egy algebrai kifejezést, ami általánosít.

Tanár: Jó, igen, nagyon jó, de hogy itt ezt, ha megfigyeled ezt a kifejezést, akkor itt van benne a magyarázat. Mondja el valaki ez alapján.

Tanuló: Az egész kifejezést, vagy csak a számokat?

Tanár: Ezt itt. Lilla!

Tanuló: Hát hogy mivel a négyzeten van a $10a$, ezért azt tudjuk hogy 100 lesz.

Tanár: Hát most arra gondolok, hogy miért kapjuk, miért igaz az...

A tanár ezen a ponton ismét végig vezette, hogy mi volt az eredeti szabály, és hogyan jutottak el a végső algebrai kifejezéshez. Igyekezett a tanulókat a változó magyarázata felé irányítani.

Tanuló: Hát mert az 'a' az igazából a százaz helyiérték, vagyis a tízes...

Tanár: A tízes helyiérték ugye? Várjál csak egy kicsit, a kiindulásunkból. Tehát ugye van a szám,..

Tanuló: Tehát az 'a' az, ami például a 2.

Tanár: Az 'a' az a szám, ami az eredeti számunkban a tízesek helyiértéken állt.

Tanuló: És ahhoz kell hozzáadni 1-et, és akkor az 3 lesz.

Tanár: Így van, tulajdonképpen pontosan az, amiről beszélünk...

A 7D óra részletéből jól látszik, hogy a tanulók még az általános magyarázatnál is visszanyúlnak a behelyettesítéshez. A behelyettesítés tehát egy biztos talaj a tanulók számára. Ha behelyettesítést végez, akkor gyakorlatilag egy aritmetikai feladatot kell elvégeznie, amiben egy számot kap megoldásként. Az itt kapott ' $100a(a+1)+25$ ' megoldás értelmezése már absztrakt gondolkodást igényel, hiszen a változó bármilyen számot jelenthet. És a 100-as itt már nem a helyiértéket jelöli, hanem hogy két nullára fog végződni a szám. Ez pedig sok hetedikes gyerekek okoz nehézséget.

“A trükk magyarázatánál, a folyamatos próba-behelyettesítéseknek köszönhetően szinte mindenki, a legvégéig nyomon tudta követni a magyarázatot. Úgy vettem észre, hogy már az sikerélményt jelentett a tanulóknak, hogy nyomon tudták követni a magyarázatot.” - tanári reflexió, 7A

Bár nem önálló produktum, de az, hogy megérti a tanári magyarázatot, a tanár helyes magyarázatának köszönhetően, ez az első lépés az algebrai megértés felé.

5.5. Összegzés, pedagógiai implikációk

RQ2 Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?

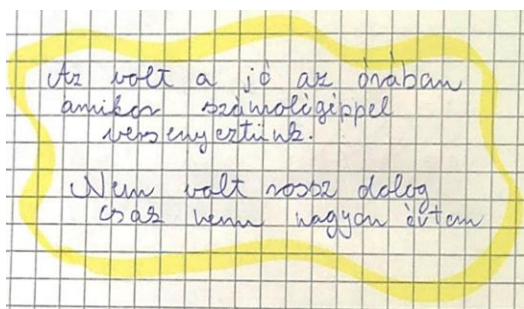
Az általánosítás eszközeként a tanulók a szélsőséges esetekben kezdtek el gondolkodni, majd tanári irányításra felmerült az algebrai kifejezések használatának ötlete is. A számok, változók közötti relációk felírása nem egyszerű feladat a tanulók számára. Jellemző a változók túlhasználata, vagyis hogy minden feladatban szereplő számhoz külön betűt rendelnek.

A kivonás elvégzéséhez is szükséges az új jelölések ismerete, amely a kutatásban részt vevő diákoknál még hiányos volt. *“Húha, itt azért látok tanácstalanságot.”* - hangzik el a 7G osztály tanárától, amikor körbemegy a tanulók között, az önálló munka során. A tanácstalanság másik problémáját talán az okozta, hogy a kivonás eddig mást jelentett a tanulóknak. Az aritmetikai feladatoknál egy kivonás úgy néz ki, hogy az egyik számot kivonom a másik számból, és a különbség egy harmadik szám. A kivonást pedig fejben vagy írásban végzik el a tanulók. De mivel a $(10a+b)$ és $(10b+a)$ már alaphoz nem a korábban megszokott formában írt számok, így ez esetben nem működik sem a fejszámolás, sem a kivonás írásban való elvégzése. Arról nem is beszélve, hogy a különbség végképp nem lesz a korábban megszokott formában felírva. Ez a nehézség már az algebrai gondolkodásmód újabb sajátosságához vezet, vagyis, hogy mennyire fogadja el a tanuló, ha a válaszban változó is szerepel.

A hetedikes tanulók nehezen értelmezik a megoldást, ha algebrai kifejezés is szerepel benne a már korábban megszokott szám-eredmény helyett. Mivel csupán néhány héttel korábban ismerkedtek meg egyáltalán az algebrai kifejezésekkel, ezzel összefüggésben pedig új jelölésekkel, algebrai tevékenységekkel, így érthető a nehézség. A kísérleti órán nagy hangsúlyt fektettek a tanárok a folyamatos behelyettesítésre, ami egy kicsit közelebb hozza a tanulók számára a korábbi ismereteikhez. A behelyettesítés után egy egyszerű számfeladatot kaptak, amit könnyen meg tudtak oldani és egy megszokott szám-eredményt kaptak a végén. Amikor viszont a végső megoldás, vagyis a $'100a(a+1)+25'$ értelmezését kérték a tanárok, problémába ütköztek a tanulók. A legközelebb azon tanulók jutottak a magyarázathoz, akik behelyettesítéssel próbálkoztak. De sokan voltak, akik épp csak követni tudták az osztálytárs vagy a tanár magyarázatát. Talán éppen ezért írták többen az óra végén lévő kilépő kártyákra, hogy nem értették teljesen az órai anyagot (15. ábra).

15. ábra

Tanulói kilépőkártya a 7B osztályból, a 4. kísérleti óra végén, hetedik évfolyamon



Az RQ2 kérdés elemzése során megvizsgáltuk, hogy elégségesek-e a tanulók algebrai tevékenységekkel kapcsolatos ismereteik ahhoz, hogy egy problémamegoldás során készségszinten tudják alkalmazni azt.

Algebrai tevékenységekkel rögtön az algebrai tanulmányaik elején megismerkednek a tanulók. A behelyettesítések után csoportosítják az algebrai kifejezéseket, például megtanulják felismerni az egyenmű kifejezéseket. Ezután következik az egyenmű algebrai kifejezések összevonása, majd az algebrai kifejezések szorzása, osztása, és végül a kiemelés.

A magyar tankönyvek és feladatgyűjtemények nagy hangsúlyt fektetnek ezen algebrai tevékenységek gyakorlására. Az ilyen feladatok általában egy-egy algebrai tevékenység monoton elvégzésre koncentrálnak. Ezen feladatoknál sokszor hiányzik a mögöttes tartalom, vagyis a szimbólumokkal tarkított kifejezések nem tartoznak semmihez, csupán az a feladat, hogy a tanulók elvégezzenek egy tevékenységet. A sok, monoton gyakorlás célja, hogy elmélyüljön az adott átalakítás.

A hetedikeselek körében tervezett kísérleti órák célja az volt, hogy úgymond értelemmel ruházza fel az algebrai tevékenységeket (értelemalkotó algebra). Minden óra ennek megfelelően, problémaalapú óra volt. A kísérleti órák közötti tanórákon ismerték meg és gyakorolták a tanulók az algebrai tevékenységeket, a hagyományos módon. Az utolsó kísérleti óra idején már az összes szükséges algebrai tevékenységgel megismerkedtek. A tapasztalat azt mutatja, hogy habár a tanulók el tudják végezni az egyes tevékenységeket, azok értő, készségszintű használatához még nem elég kiforrott a tudásuk. Valószínűleg több időre és több problémahelyzetre van szükség ahhoz, hogy elmélyüljön az új ismeret.

Megvizsgáltuk, hogy miként segítheti a tanár az összefüggések algebrai kifejezésekkel történő felírását, illetve az algebrai kifejezések értelmezését az algebrai tevékenységek során és a megoldásban.

Az összefüggések algebrai kifejezésekkel történő felírása folyamán a legfontosabb lépés szinte minden megfigyelt osztálynál az összefüggés természetes nyelven való megfogalmazása volt. Erre építve lehetett tovább vezetni a tanulókat a matematikai jelekkel való felíráshoz, hol kis kapaszkodókat adva nekik, hol erős rávezetéssel. A konkrét számokra való visszavezetés, azok kapcsolatának megfigyelése segítette a relációk algebrai felírását. A sikeres felíráshoz szükséges továbbá, hogy a tanulók magabiztosak legyenek a korábbi ismereteikben úgy, mint a műveleti tulajdonságok, vagy akár a hatványozás.

Az algebrai tevékenységek és az algebrai kifejezést tartalmazó megoldások értelmezésének támogatásában a behelyettesítés sokat tud segíteni a tanulóknak.

6. Segítség a szimbólumhasználathoz szöveges feladatoknál

6.1. Bevezetés

A szöveges feladatok egyenlettel való megoldása a nyolcadikosok számára mindig nagy kihívást jelent. Ekkor használniuk kell a hetedik év során megismert algebrai tevékenységeket, alkalmazniuk kell a mérlegelvet is. Az egyenlettel megoldható szöveges feladatoknál a nehézség nem kizárólag az egyenlet megoldásában jelentkezik. Gyakran már a szövegben szereplő mennyiségek és relációk azonosítása, valamint ezek matematikai modellé alakítása okoz problémát (Jupri & Drijvers, 2016). Ezért a beavatkozásban a reprezentációk elsődleges szerepe a szövegben szereplő kapcsolatok láthatóvá tétele volt. A következőkben bemutatott kísérleti órák célja pont ennek a nehézségnek az áthidalása, megkönnyítése volt. A kísérleti órák során alternatív megoldási módszereket használtak a tanulók, például a probléma grafikus reprezentációját. Az alternatív megközelítés nem váltotta ki minden esetben az egyenlet felírását, azonban meg tudta könnyíteni azt.

A nyolcadikosok körében végzett kutatásban, az egyenlettel megoldható szöveges feladatok témakörén belül, öt kísérleti óra valósult meg. A fejezetben az első és az ötödik kísérleti órát és azok tapasztalatait mutatjuk be. Az első óra egy bevezető alkalom volt, mely során a tanulók olyan szöveges feladatokkal találkoztak, melyeket egyenletmegoldással is meg lehetett oldani. Az ötödik, vagyis az utolsó kísérleti óra az együttes munkavégzés köré épült, ahol a problémában lévő szereplők együtt teljesítettek egy bizonyos feladatot, így gyorsabban elkészültek vele.

A fejezet célja, hogy hozzájáruljon az RQ3 kutatási kérdés megválaszolásához. (Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?)

6.1.1. Szimbólumhasználat

A szimbólumok absztrakt jellege miatt, sok tanulót megijeszthet az algebra bevezetése a korai szakaszban (Friedlander & Hershkowitz, 2020). Schoenfeld (2008) szerint az algebrai gondolkodás egyik alapvető pillére a szimbólumok célzott használatának képessége. Ebbe beletartozik a szimbólumok önmagában való szintaktikai használata, illetve egy adott kontextusban való értelmes használata, amikor szimbólumok segítségével írjuk fel a relációkat. Úgy gondolta, hogy a szimbólumhasználat több célt is szolgálhat, úgymint az általánosítást, osztályozást vagy absztrakciós célokat. Freudenthal (1977) a szimbólumhasználatról azt írta, hogy a történelem során együtt fejlődött a mindennapi nyelvvel és más kommunikációs csatornákkal. A szimbolikus rendszer hatékonysága attól függ, mennyire könnyen tud

benne eligazodni a felhasználó, illetve milyen mértékű algoritmikus autonómiát tesz lehetővé. Bastable és Schifter (2017) úgy fogalmaztak, hogy az algebra tanulása és tanítása kapcsán fennálló legnagyobb probléma, hogy sok tanuló csupán a szimbólumok manipulálásának szabályait követi, jelentés nélkül. Úgy vélik, hogy az algebra korai bevezetésének egyik célja pont az lenne, hogy a tanulók számára segítsen értelmet adni az algebrai szimbólumoknak. Rámutatnak arra, hogy a matematikatanulás folyamata nagyrészt az ötletekkel való aktív foglalkozásra épül. Bastable és Schifter osztálytermi gyakorlatokkal szemléltetik, hogy a tanulók a konkrét aritmetikai állításoktól az általánosabb állítások felfedezése felé mozdulnak el. Legyen szó akár az összeadás és a kivonás tulajdonságainak felfedezéséről. Ezen általánosításokat nem formális szimbólumokkal, hanem a természetes eszközeikkel, összefüggések megfogalmazásával fejezik ki a tanulók. Az ekkor szerzett tapasztalatokra lehet később építeni az algebra formális szimbólumainak használatát.

Arcavi (1994) hasonlóképpen rámutatott, hogy a szimbólumok megfelelő használatán túl a tanulóknak azt is fel kell ismerniük, hogy a szimbolikus jelölések lehetővé teszik olyan összefüggések bizonyítását, amelyekre az aritmetika önmagában nem alkalmas. Ezt a belátást Arcavi a szimbólumérzék egyik elemének tekinti. Másrészt úgy gondolja, hogy a szimbólumérzék magában foglalja azt a tudást, hogy mikor kell szimbólumokat használni, és mikor kell elhagyni őket. Munkájában nem állítja, hogy a szimbólumérzék szükségszerűen magában foglalja a hiba elkerülését. Ebben az esetben a szimbólumérzék abból állna, hogy a problémamegoldó reflektál a munkájára, esetleg újra olvassa, ellenőrzi az elvégzett lépéseket, például egyszerű behelyettesítést végez. Ezzel megbizonyosodhat a szimbolikus kifejezés helyességéről.

6.1.2. Grafikus reprezentációk szerepe

Ebben a fejezetben a *grafikus reprezentáció* kifejezést olyan külső vizuális reprezentációkra használjuk, amelyek a mennyiségek és relációk szerkezetét teszik hozzáférhetővé (Gagatsis és Elia, 2004). A kutatásunkban használt letöltési sávok segítségével a tanulóknak a szövegben szereplő relációkat kellett megjeleníteniük.

A grafikus reprezentáció nem ismeretlen a magyar tanulók számára, hiszen szöveges feladatok megoldására már régebb óta használják, különösen alsó tagozaton, illetve 5. és 6. évfolyamon. A Nemzeti alaptantervben a 7. és 8. évfolyamon is megjelenik a grafikus reprezentáció az algebrai módszerek támogatására, illetve alternatív megoldásként azon diákok számára, akik nem rendelkeznek a megfelelő szintű szimbolikus algebrai ismeretekkel.

A grafikus reprezentáció előnye lehet, hogy szimbolikus algebrai ismeretek nélkül is használhatják a tanulók, még az algebra előtti szakaszban is. Fong és mtsai. (2006)

tanulmányukban arra a kérdésre kíséreltek meg választ találni, hogy a modellmódszer vajon valóban segíti-e az algebrai átmenetet vagy éppen akadályozza azt. Kutatásukban megfogalmazták, hogy a modellmódszer és a szimbolikus módszer hasonló kognitív terhelést jelent a tanulóknak, bár a szimbolikus módszer minden esetben erősebb aktivációt eredményezett, mint a modellmódszer. Ugyanakkor eredményeik szerint az alkalmas modellek segítségével könnyebben tudtak algebrai egyenleteket létrehozni a tanulók. Ezért úgy gondolják, hogy a grafikus reprezentációt hídként használhatnák a tanárok a szimbolikus algebra tanítása során.

A grafikus és a szimbolikus megközelítések kognitív terhelésével Ngu és mtsai. (2014) is foglalkoztak. Kiegészítve az egységre való következtetés módszerével, a százalékszámítás témakörében vizsgálták a tanulók sikerességét. Eredményeik azt mutatták, hogy az egyenlettel való megközelítés lényegesen több helyes megoldást, kevesebb meg nem próbált feladatot és hibát eredményezett, függetlenül attól, hogy egyszerű vagy összetett feladatokról volt szó. A grafikus módszer mutatta a legrosszabb teljesítményt a három megközelítés közül. Ennek okát a nagyobb kognitív terhelésben látták a kutatók, mert a grafikus megközelítés több elem integritását követelte meg a tanulóktól, a megoldás lépésein belül és között.

6.2. Első kísérleti óra: az adatok relációjának ábrázolása

Az első kísérleti óra során, a szokásos szakaszára helyett ún. letöltési sávokat használunk, S. Prediger több munkája nyomán (Pöhler & Prediger, 2015; Prediger és mtsai., 2019). Azt vártuk, hogy az informatikai tapasztalatuk alapján a rész és egész viszonyának ilyenfajta kifejezése értelmet ad a matematikai összefüggésnek. A tanulók szinte minden nap találkozhatnak letöltési sávokkal, például amikor egy applikációt töltenek le a telefonjukra. Az első nyolcadikos kísérleti óra óratervén nem változtattunk az első ciklus után.

A fejezetben bemutatott eredmények egy részét a (Lócska és mtsai., 2023) munkában publikáltuk.

6.2.1. A kísérleti óra felépítése

Az első kísérleti órán egy feladatlapot kaptak a tanulók, ahol pármunkában dolgozhattak az első feladaton. A feladatlap rávezette őket a probléma szövegében szereplő adatok kapcsolatára, egymáshoz való viszonyára. A lapon szereplő lépéseket követve eljuthattak a megoldásig anélkül, hogy egyenletet kellett volna felírniuk.

1. feladat: *Az állatkertben minden állatról van egy információs tábla, amelyen szerepel az állat tömege. A feliratokat azonban kiradíroztam és egy fejtörőben rejtettem el. (16. ábra)*

A zebu 312 kg-al nagyobb tömegű, mint az antilop, és 220 kg-al nehezebb a törpe vízilónál. A három állat együttes tömege 932 kg. Mennyi az állatok tömege külön-külön?

16. ábra

Az 1. kísérleti óra, 1. feladatkitűzéséhez tartozó ábra, nyolcadik évfolyam

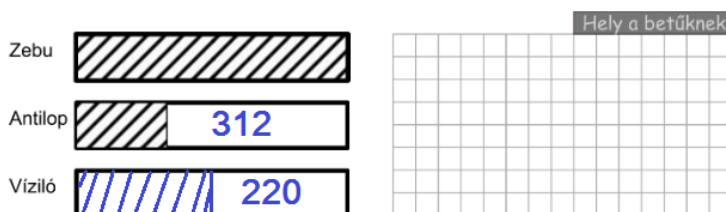
Törpevíziló Marmagasság 150 cm Tömeg	Antilop Marmagasság 120 cm Tömeg	Zebu Marmagasság 150 cm Tömeg
---	---	--

A foglalkoztató lap instrukciói ehhez a feladathoz a következők voltak. A helyes válaszok kék színnel jelennek meg, ld. 17. ábra.

A felső téglalap a zebu tömegét szemlélteti, és elkészítettük az antilop tömegét szemléltető letöltési sávot. Ez csak egy vázlat, mert a letöltési sávról nem tudjuk pontosan hol jár, hiszen nem ismerjük az antilop tömegét. A feladatod az lesz, hogy készítsd el a törpevíziló tömegét szemléltető letöltési sávot, majd írd be a téglalapok üresen maradt részébe a feladatban szereplő számok közül a megfelelőt!

17. ábra

Az 1. kísérleti óra, 1. feladatához tartozó letöltési sávok, nyolcadik évfolyam



Hogyan magyaráznád el a letöltési sávok segítségével, mit jelent a feladatban szereplő 932 kg?

$$\text{Zebu} + \text{Antilop} + \text{Víziló} = 932$$

A besatírozott részek együttes tömege.

Add meg, hogy a három teljes téglalap együtt mennyi tömeget ér!
 $932 + 312 + 220 = 1464 \text{ kg}$

A zebu tömegével milyen kapcsolatban van a három teljes téglalap együttléve?
Harmada a zebu tömege

A fentiek alapján már tudni fogod a választ a fejtörőre. Írd le a számításod!
 $1464 : 3 = 488$

zebu $\rightarrow 488$ kg

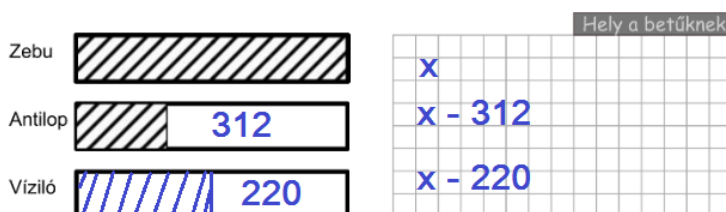
antilop $\rightarrow 488 - 312 = 176$ kg

víziló $\rightarrow 488 - 220 = 268$ kg

A feladatlap lépéseinek frontális ellenőrzése után, az egyenlet felírása is frontálisan történt, ugyanazon a feladatlapon (18. ábra).

18. ábra

Az 1. kísérleti óra, 1. feladatához tartozó szimbolikus felírás, nyolcadik évfolyam



$$x + (x - 312) + (x - 220) = 932$$

$$x + x - 312 + x - 220 = 932$$

$$3x - 532 = 932$$

$$3x = 1464$$

$$x = 488$$

A második feladat egy, az előzőhöz hasonló, de már nem irányított feladat volt. A tanórát a tanulók önálló problémaalkotása és annak megoldása zárta. Ehhez a következő utasítást kapták a tanulók a feladatlapon.

Készíts az előzőhöz hasonló fejtörőt a társadnak az állatok névjegykártyáinak segítségével! (19. ábra)

19. ábra

Az 1. kísérleti óra, tanulói problémaalkotásának kitűzéséhez tartozó ábra, nyolcadik évfolyam

Gorilla Marmagasság 190 cm Tömeg 180 kg	Varánusz Hossz 300 cm Tömeg 189 kg 5000 db él belőle	Jegesmedve Marmagasság 153 cm Tömeg 448 kg
Orrszarvú Hossz 385 cm Tömeg 2100 kg	Zsiráf Marmagasság 570 cm Tömeg 1928 kg 55 km/h sebességgel fut	Elefánt Marmagasság 490 cm Tömeg 5456 kg

A tanulók fele a gorilla, varánusz és a jegesmedve adatait kapták, míg a másik fele az orrszarvú, zsiráf és elefánt adatait.

6.2.2. Tapasztalatok

Az első órák tapasztalata alapján nehéz volt a letöltési sávok használata a tanulóknak. A 8F osztálynál még a szövegértés is problémát okozott. Egy tanuló nem vette figyelembe a teljes mondatot, csak egy részletét. A feladatban szereplő teljes mondat a következő: *A zebu 312 kg-al nagyobb tömegű, mint az antilop és 220 kg-al nehezebb a törpe vízilónál.* Ehhez képest az alábbi hangzott el a tanórán.

Tanár: Melyik állat a nehezebb az antilop vagy a víziló?

Tanuló: antilop

Tanuló: víziló

Tanár: Na, akkor most két rész van. Az antilop lesz a nehezebb? Miből gondoljuk?...
Heni, miért a víziló lesz a nehezebb?... Nem tudjuk, hogy mennyi, de a szövegből, ha kiszednénk. Hol látható az, hogy a víziló lesz a nehezebb? Keresd meg ezt a részt.

Tanuló: Az antilop 220 kg-mal nehezebb, mint a törpe víziló.

Tanár: Vigyázz, az a zebu lesz 220-al nehezebb. És mit tudunk az antilopról, a zebuhoz képest?...

Tanuló: A zebu 312 kg-mal nehezebb

Tanár: mint az?

Tanuló: antilop.

Tanár: mint az antilop.

A szöveges feladatok megoldásához elengedhetetlen a jó szövegértés. A letöltési sávok az adatok lejegyzésére is jó módszer, egyből láthatjuk az állatok tömegének

egymáshoz való viszonyát. Egy ábra készítése során - legyen az szakaszábra vagy letöltési sáv - meg kell figyelni a szöveges feladatban szereplő adatokat és relációkat. Egy jó ábra alkotásánál tehát a tanuló kénytelen alaposan megvizsgálni a szöveget, ezáltal jobban megértheti a benne szereplő összefüggéseket is.

A 8F osztálynál maga a letöltési sáv elnevezés is magyarázatra szorult. Habár a számítógép vagy a telefon esetében tudták értelmezni ezt a kifejezést, volt aki nehezen kötötte össze a matematikai problémával. A tanár szóban megbeszélte velük, hogy a feladatlapon látható letöltési sávok ugyanolyanok, mint amivel ők is találkoznak nap mint nap a számítógép esetén. Közvetlen ezután hangzott el a következő részlet:

Tanár: És azt mondja, hogy a zebu tömege az a teljes téglalap lesz. Úgy mondhatjuk, hogy teljesen letöltődött már, 100%-ban ott van. Ott van az antilopnak a téglalapja. Miért rövidebb az?

Tanuló: Mert nincs letöltve?

Tanár: Fordítsuk át a matekra! Olvassátok el a szöveget.... Levente.

Tanuló: Mert a zebu 312 kg-mal nagyobb tömegű, mint az antilop.

A letöltési sávok használata új volt az osztálynak, így érthető, hogy magyarázatra szorult. Elképzelhető, hogy nehézséget jelentett a tanulóknak a letöltéseknel általában megjelenő százalékos egységet összeegyeztetni a feladatban szereplő tömeg mértékegységgel. A felszólított tanuló itt a letöltési sáv teljes téglalapját tekintette az antilop teljes tömegének. Így, ha nincs teljesen besatírozva, akkor még nincs 100%-ban letöltve az állat tömege. De ha ezt a logikát követte volna a tanuló, akkor három teljesen besatírozott letöltési sávot kapott volna, amely nem tükrözi az adatok között lévő relációkat. A letöltési sáv elnevezés ezért zavaró lehetett néhány tanuló számára, plusz kognitív terhelést jelenthetett. Túl erős az önálló jelentése ennek a kifejezésnek.

Több osztálynál - például a 8F osztály esetében, - akkor is nehezen ment a letöltési sávok kiegészítése, ha frontálisan már minden szükséges összefüggést megbeszéltek. Elhangzott az órán, hogy a melyik állat a nagyobb tömegű és mennyivel, mégsem tudták hogy ezeket a számokat kell beírni a sávok hiányzó részeibe. Egy pár volt az osztályból, akiknek sikerült beírni, nekik a tanár a feladat folytatását javasolta. A többiekkel frontálisan nézték meg, hogy miként kellett a szöveg alapján kiegészíteni a letöltési sávokat. Először az antilop tömege mellett szereplő 312 kg-mot szeretne volna beírni a tanár, majd a víziló mellett szereplő 220 kg-mot. A víziló tömegét jelző sávot már korábban berajzolták közösen.

Tanár: Na nézzük! Mit mondtunk, hogy mennyi a különbség a zebu és az antilop között? Szöveget kéne elolvasni.

Tanuló: 312 kg (felolvassa a szövegből)

Tanár: Akkor mit írjunk ide be az antilop mellé?... Hát mennyi hiányzik az antilopnak, hogy olyan tömege legyen, mint a zebunak?... Aliz ismételd meg.

Tanuló: 312 kg

Tanár: 312 kg (beírják a digitális táblán). Mennyi hiányzik a vízilónak, hogy olyan tömege legyen, mint a zebunak?

Tanuló: 220

Tanár: Így van.

A letöltési sávba, az ábrába nehezen írták be a tanulók a számokat. Még ha meg is értették a feladat szöveg és a közös megbeszélés során az adatok közötti relációkat, akkor sem mertek beleírni az ábrába. Ez a tapasztalat több osztálynál is megjelent. Idegen volt a tanulók számára a letöltési sávok használata, így természetes módon vonakodtak a használatától.

Reflexió 8A: "... teljesen új volt nekik a feladat külalakja és a nem mertek semmit belerajzolni vagy beleírni a téglalapokba. Inkább a lap szélén és alján kezdtek el számolgatni a saját gondolatmenetük szerint. Az egész osztályban egy lány volt, aki értelmezni tudta az instrukciókat és berajzolta a víziló tömegét a letöltési sávon."

Több osztálynál előfordult, hogy rögtön egyenlettel akarták felírni a feladatot, habár hivatalosan ezen a tanórán találkoztak először ilyen típusú szöveges feladattal. Leginkább a 8H osztálynál volt jellemző, hogy azonnal egyenletet akartak felírni. A tanár több párhoz is odament és külön-külön próbálta elterelni őket az egyenlettől a letöltési sávok irányába.

Tanár: Figyelj, azt szeretném, hogy kövesd az utasítást, ami itt van. És megpróbálnál válaszolni azokra a kérdésekre, amik itt vannak, és eszerint a sávok szerint próbáld már meg.

Tanuló: Először meg kell csinálni az egyenletet.

Tanár: Nem, nem, nem. Itt semmiképp sem kell egyenlet

Tanuló: Miért?

Tanár: Először légszki válaszolj a kérdésekre és próbáld meg bejelölni. Jó, most ahelyett, hogy azon gondolkodsz, hogy ez jó vagy sem, próbáld meg a sávokat nézegetni és a kérdésekre válaszolni. Itt van a kérdés, hogy hogyan tudnád szemléltetni az antilopot? Mennyit tudsz ide beírni az üres helyre? Mennyi az a rész amennyivel kevesebb? Hogyan tudnád a vízilóvat lerajzolni ezekkel a kis sávocskákkal? Ezt próbáld meg megcsinálni.

Természetesen a kísérleti órákkal nem az volt a cél, hogy teljesen kizárjuk az egyenlettel történő megoldást. Pont az egyenlet felírásának megkönnyítése volt a cél.

Bizonyos esetekben egy jó grafikus reprezentáció és annak értelmezése akár feleslegessé is tehetné az egyenlet felírását. Mindenesetre a kísérleti órák célja az volt, hogy a tanulók megismerkedjenek egy módszerrel, amelyet rugalmasan tudnak használni az egyenlettel megoldható szöveges feladatoknál. A fent látható részletnél ezért is szerette volna az órát tartó tanár, ha az egyenlet felírása helyett a letöltési sávokra koncentrálnak először a tanulók. Az adatok között lévő kapcsolatok felfedezése nélkül problémákba ütköztek a tanulók. A következő kis részlet szintén a 8H osztály órájából származik:

Tanár: Ne használj több ismeretlent, mert nem fogod tudni vele. Figyelj csak, az a feladat, hogy olvasd el ezt és próbáld meg eszerint ezekre a kérdésekre válaszolni.

Az adatok között lévő kapcsolatok nélkül csak a több ismeretlen bevezetése marad. Azonban ilyen egyenleteket nyolcadik osztályban nem tudnak megoldani.

Érdekes észrevétel volt, hogy több osztályban próbálkoztak egyenletet felírni, hol több, hol kevesebb sikerrel. Volt olyan tanuló, aki szépen meg tudta oldani egyenlettel, de az így próbálkozók egy része elakadt az egyenlet felírásánál. Miért próbálkoztak vele mégis? A válasz valószínűleg a megszokott forma. Az egyenletmegoldás egy jól tanulható algoritmussal, a mérlegelvvel működik. Ha megvan az egyenlet, onnan már könnyen el tudnak jutni az ismeretlen megválaszolásához. Hetedik évfolyamon általában olyan jól megtanulják az egyenletek mérlegelvvel történő megoldását, hogy a megszerzett procedurális tudást szívesen használnák a szöveges feladatok esetében. Az egyenletmegoldást tehát biztos talajnak érzik. Ezt az észrevételt támasztja alá a 8E és a 8G tanárainak reflexiója is.

Nehezen gondolkodtak a letöltési sávokkal, automatikusan egyenlettel akarták megoldani. Végül is összehoztuk. Az egyenlettel történő megoldásnak nagyobb sikere volt, talán mert abban gyakorlottabbak már. (Tanári reflexió, 8E.)

Jóval kézenfekvőbbnek tűnik számukra az algebrai módszerek és leírások használata. (Tanári reflexió, 8G.)

A tanórát záró, utolsó feladat a tanulók önálló problémaalkotása volt. Az alkotott probléma szövegét és megoldását is le kellett írniuk. A probléma helyesnek minősült, ha a szövegezés érthető volt, a megoldáshoz minden szükséges adat szerepelt benne, és az adatok megfeleltek a névjegykártyán szereplő adatoknak. Mivel az óra elején lévő fejtörő mintájára készültek a problémák, így a tanulók többsége csak az állatok tömege közötti összefüggéseket írta le, nem írt kérdést a problémába. Ezen problémákat is helyesnek ítéltük.

A nyolcadik évfolyamon a 8A, 8B, 8D, 8E, 8F és 8G osztályok jutottak el odáig az órán, hogy saját problémát alkossanak. Összesen 86 tanulói probléma született. A 86

tanuló közül 71 tanulónak 5 vagy 4 a matematika érdemjegye, míg 15 tanulónak 3 vagy 2.

A tanulói problémák vizsgálatakor feltűnő volt, hogy sok olyan probléma született, amely szerkezetileg helytálló, azonban aritmetikai hiba miatt helytelen. Például:

Összesen 8484 kg. Orrszarvú 172 kg nagyobb tömegű mint a zsiráf. Elefánt 3525 kg kisebb mint a zsiráf.” (S8116)

A három állat tömege összesen 9484 kg, nem pedig 8484 kg. Illetve az elefánt tömege 3528 kg-mal több, mint a zsiráfé, nem pedig 3525 kg-mal. Összesen 18 ilyen szerkezetileg megfelelő, de számolási hibás probléma született.

A 86 problémából 41 minden szempontból helyes probléma és 18 szerkezetileg helyes, de számolási hibás. 27 olyan probléma jött létre, amely szerkezetileg helytelen. Ezen problémáknál vagy hiányosak a megadott adatok, így nem lehet kiszámolni az állatok tömegét, vagy rosszul fogalmazott, zavaros a szöveg. Példa szerkezetileg helytelen problémára:

A jegesmedve 259 kg-val nehezebb mint a varánusz, viszont a gorilla 9 kg-val könnyebb mint a varánusz. Hány kg-k fejenként és mennyi pénzt kérnek a belépőért? (S8020)

A saját probléma megoldási módszerének vizsgálatánál a helyes és a csak számolási hibát tartalmazó problémákat együtt kezeljük, szerkezetileg helyesnek nevezve. A 86 problémából tehát 59 szerkezetileg helyes probléma, az alkotott problémák nagy része tehát szerkezetileg helyes. A legtöbb tanuló az óra elején megadott feladat mintájára írt problémát. Az 59 tanulóból 9-en üresen hagyták a probléma megoldására fenntartott részt, nem írtak oda semmit, de ennek okait sajnos nem tudhatjuk. Előfordulhat, hogy nem maradt rá ideje a tanulónak, de az is lehet, hogy nem tudott hozzákezdeni. Az 50 tanuló közül, akik már írtak valamit a megoldáshoz, 9-en számoltak csak ábrát használva (15. táblázat). Szintén 9 tanuló volt, aki ábrát és valamely szimbolikus jelölést is használt, akár egyenletet is felírt. 30-an csak szimbolikusán gondolkodtak, nem készítettek ábrát, míg 2 olyan tanuló volt, aki következtetéssel oldotta meg a saját maga alkotta problémát.

15. táblázat

Szerkezetileg helyes tanulói problémaalkotások megoldásának módszere, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

Csak szimbolikus	Ábra és szimbolikus	Csak ábra	Következtetés	Össz.
30	9	9	2	50

A problémák megoldásának helyességét csak a minden szempontból helyes problémák esetében vizsgáltuk. (16. táblázat)

16. táblázat

Helyes tanulói problémaalkotások megoldásának módszere, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

Helyes probléma megoldása	Helytelen vagy befejezetlen megoldás	Helyes teljes megoldás	Össz.
Csak ábra (jó vagy rossz)	5	4	9
Csak szimbolikus	10	8	18
Ábra (jó vagy rossz) és szimbolikus	0	6	6
Egyik sem, csak számolás	0	2	2
Össz.	15	20	35

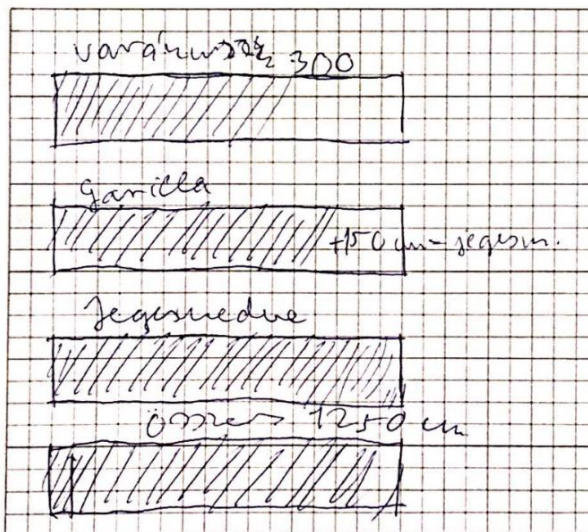
A megoldások vizsgálatakor feltűnő volt, hogy a legtöbben grafikus segítség nélkül, szimbolikusán próbálkoztak, de mindössze 8 olyan tanuló volt, aki hibátlan teljes megoldást adott. A minden szempontból helyes feladatot alkotók, és csak a szimbolikus megoldással próbálkozó tanulók összesen 18-an voltak. Közülük egy tanuló volt, aki nem írt fel egyenletet, hanem megállt az összefüggések szimbolikus felírásánál. A többi 17 tanuló egyenletet írt fel, amely közül 4-en helytelen egyenletet írtak vagy a megoldás során hibáztak. 5 olyan tanuló volt, akik habár helyesen írták fel az egyenletet és helyesen is oldották meg, mégsem tekinthető a teljes megoldásuk helyesnek. Mert az egyenlet megoldással véget is ér a feladatmegoldásuk, nem derül ki melyik állat tömegét jelölte az ismeretlen, se a többi állat tömege. Ezért mindössze 8 olyan tanuló volt, akik csak szimbolikusán próbálkoztak és eljutottak a saját problémájuk teljes, helyes megoldásáig.

Azon 9 tanuló közül, akik csak grafikusán kezdték el megoldani a problémát volt két tanuló, akik helytelen ábrát készítettek.

S8005 *“A varánusz 300 cm hosszú. A jegesmedve hosszúsága 150 cm-rel több, mint a gorilláé. A három állat hosszúsága összesen 1250 cm.”* (Matematika érdemjegye 4.) A megoldáshoz készített ábrák a 20. ábrán látható.

20. ábra

S8005 tanuló megoldása a saját problémaalkotásra, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

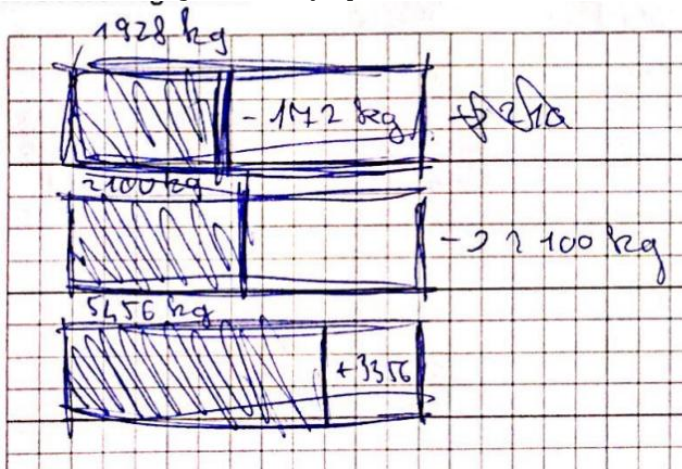


A probléma szövege minden szempontból helyes, habár a jegesmedve és a gorilla hossza nem szerepelt a megadott névkártyákon, azokat a tanuló írta hozzá. A grafikus megoldás első három során látszanak a problémában megadott összefüggések. A jegesmedve hossza tölti ki a teljes téglalapot, vagyis az ő hosszához viszonyítja a többi állat hosszát. A gorilla hosszát jelölő letöltési sávon helyesen ábrázolja a gorilla hosszát és oda is írja, hogy "+150 cm = jegesmedve". Hasonlóan helyesen ábrázolja a varánusz hosszát, azonban már nem írja oda, hogy mennyi szükséges a letöltési sáv üres részébe ahhoz, hogy megegyezzen a jegesmedve hosszával. Az ábrán szereplő 300 a varánusz hosszát jelöli, ami a probléma szövegében is szerepel. A három állat együttes hosszát pedig egy ugyanakkora letöltési sávval jelöli, mint a jegesmedve hosszát. Tehát a tanuló az állatok hossza közötti összefüggést helyesen tudja ábrázolni, legalábbis a jegesmedve és a gorilla között egészen biztosan, de az együttes hosszt nem tudja értelmezni. A bevezető feladatnál nem szerepelt olyan letöltési sáv, amelyen az állatok együttes tömege lett volna ábrázolva. A feladatmegoldás itt meg is áll, nem tud tovább haladni a tanuló.

S8029: Az orrszarvú 172 kg-mal nagyobb, mint a zsiráf, de 3356 kg-mal kevesebb, mint az elefánt. Összesen 9484 kg-ok." (Matematika jegye 5.) A megoldáshoz készített ábra a 21. ábrán látható.

21. ábra

S8029 tanuló megoldása a saját problémaalkotásra, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam



A tanuló nem írta oda, hogy melyik téglalap melyik állat tömegét jelöli. De a megadott adatok alapján az első letöltési sáv a zsiráf tömegét jelöli, amelyhez 1928 kg van írva. A másodikonál 2100 kg szerepel, vagyis az a sáv az orrszarvú tömegét jelöli. A harmadikonál pedig 5456 kg látható, ami az elefánt megadott tömege. Ezek az adatok azonban nem szerepelnek a tanuló által megadott problémában, csupán az előre megadott névjegykártyákon. A tanuló által leírt egyik összefüggés, hogy az orrszarvú 172 kg-mal nagyobb, mint a zsiráf. Így, ha az első téglalapot nézzük, akkor helyesen bejelölte, hogy a zsiráf tömegéhez még 172 kg szükséges, hogy teljes legyen a letöltési sáv. Azonban az alatta lévő téglalapban, ahol az orrszarvú tömege a teljes téglalapot ki kellene, hogy töltsen, hibás. A harmadik téglalapnál valószínűleg az általa leírt második relációt szeretne jelölni a tanuló, vagyis, hogy "Az orrszarvú... 3356 kg-mal kevesebb, mint az elefánt." 5456 kg az elefánt tömege, de a jelölés szerint még 3356 kg-ra szükség van ahhoz, hogy teljes legyen a letöltési sáv. Vagyis hibás az ábra, nem tudja jelölni a tanuló az általa megadott relációt.

A három állat tömege közül a zsiráfnak a legkisebb a tömege, őt követi az orrszarvú, végül az elefánt. A legnagyobb tömegű állatnak kellene kitöltenie a teljes letöltési sávot, és az ő tömegéhez kellene viszonyítani a másik két állat tömegét. A tanuló a középső állatot választotta, az orrszarvút, és ahhoz viszonyította a másik két állat tömegét. A zsiráf tömege kisebb, az elefánté nagyobb. A kisebb tömeget még tudta ábrázolni, de a nagyobbbal már nem boldogult. Ha viszont az ábrán csak a besatírozott részeket nézzük, akkor látszik, hogy a tanuló fel tudta állítani a rangsort az állatok tömege alapján. Az első besatírozott rész a legkisebb, vagyis a zsiráf, ezt követi az orrszarvú, amely besatírozott rész már egy kicsit nagyobb, majd az elefánt tömege, ahol a besatírozott rész látványosan nagyobb.

Ezen tanulók a matematika jegyük alapján a jobb eredményű tanulók közé tartoznak, hiszen S8005 érdemjegye 4, S8029 érdemjegye 5.

A csak grafikus megoldással dolgozó tanulók közül 7 tanulónak sikerült helyes ábrát készíteni (17. táblázat). Egy tanuló kivételével, akinek közepes jegye van matematikából, ők is a jobb tanulmányi eredményű tanulók közé tartoznak. Helyes megoldást azonban csupán 4 tanuló kapott közülük. Volt tehát három olyan tanuló, akik helyes grafikus reprezentációt készítettek, de nem jutottak el a megoldásig.

17. táblázat

A helyes ábrát készítő tanulók eredményessége, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

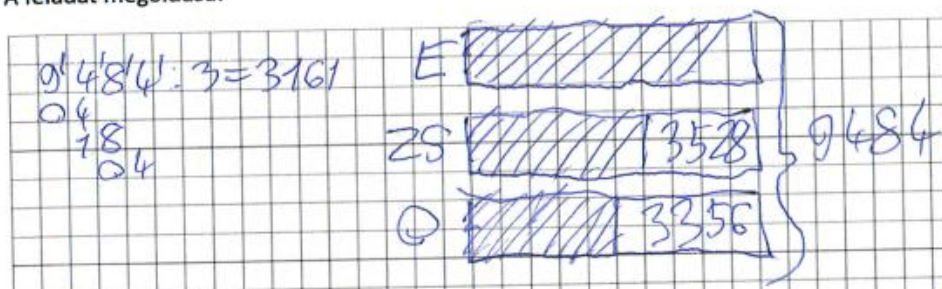
Tanuló	S8001	S8014	S8018	S8092	S8094	S8122	S8129
Érdemjegy	5	5	4	3	5	4	4
Megoldás	jó	jó	rossz	jó	jó	rossz	rossz

Az egyik ilyen tanuló már a grafikus ábrát sem fejezte be (S8018). Ameddig eljutott az helyes, jól ábrázolt egy relációt, de ennél több nem szerepelt a papírján. A másik tanuló (S8129) elkészítette az ábrát és beleírta a probléma szövegében megadott adatokat is, de számolást nem végzett. A harmadik tanuló (S8122) helyes ábrát készített, és eljutott odáig, hogy elosztotta az állatok össztömegét 3-mal (22. ábra). De itt megállt, nem derül ki a munkájából, hogy tudta-e értelmezni a kapott hányadost, illetve a másik két állat tömegét sem számolta ki. S8122: *Az elefánt 3528 kg-mal nehezebb, mint a zsiráf és 3356 kg-mal nehezebb, mint az orrszarvú. Az össz tömegük 9484.*

22. ábra

S8122 tanuló megoldása a saját problémaalkotásra, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

A feladat megoldása:



6.3. Utolsó kísérleti óra: Együttes munkavégzéses probléma

Az ötödik, egyben utolsó kísérleti órán az együttes munkavégzéses feladatokkal ismerkedtek meg a nyolcadikos tanulók. Ezek a problémák több élő vagy nem élő szereplőt foglalnak magukba, akik változatos kontextusban együttesen teljesítenek feladatokat. Az ilyen típusú feladatoknál mindig feltételezzük, hogy a munkában részt vevő felek külön-külön és együtt ugyanolyan sebességgel dolgoznak. Ha pedig együtt

dolgoznak, akkor mindig kevesebb idő alatt végeznek, mintha külön-külön dolgoznának. (https://nat2012.nkp.hu/tankonyv/matematika_8/lecke_04_005)

Az ilyen típusú feladatok grafikus reprezentációjához - az első órához hasonlóan - néhány téglalap jelenik meg. A téglalap az elvégzendő munkát reprezentálja. Az egyes téglalapokon külön-külön be tudja jelölni a tanuló, hogy az egyes szereplők mennyi munkát tudnak elvégezni egységnyi idő alatt egyedül, majd egy újabb téglalapon egyesíti a szereplők által, egységnyi idő alatt elvégzett munkát.

6.3.1. A kísérleti óra felépítése

Az első órához hasonlóan, itt is egy feladatlapot kaptak a tanulók. Az első, bevezető feladatnál (A feladat) instrukciókat kaptak a grafikus reprezentáció elkészítéséhez, majd frontálisan, tanári segítséggel felírták szimbolikusan, egyenlettel is a megoldást.

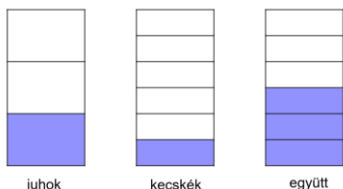
A feladat: *Bob kecskéket, Kevin juhokat tart a gazdaságban. Egy szekér széna a juhoknak 3 hétre, a kecskének 6 hétre elegendő. Bob és Kevin megegyeznek, hogy közösen használnak fel egy szekér szénát. Hány hétre lesz elegendő a takarmány?*

Az alábbi instrukciókat kapták a tanulók.

A1: *A téglalap egy szekér szénát jelképez. Satírozd a téglalapot annak megfelelően, hogy egy hét alatt mennyi fogy el belőle!* (23. ábra)

23. ábra

5. kísérleti óra, 1. feladatához tartozó minta megoldás, nyolcadik évfolyam



A2: *Egy hét alatt egy szekér széna hányad részét ették meg együtt az állatok?* $\frac{3}{6}$ **részét, vagyis a felét.**

A3: *Az eredményed alapján következtess arra, hogy hány hétre elegendő egy szekér széna, és válaszolj a feladat kérdésére! Mivel a felét 1 hét alatt ették meg, ezért 2 hétre lesz elég a széna.*

Eddig a tanulók párban dolgoztak, majd frontálisan ellenőrizték a megoldást, kiegészítették az alábbi táblázatot (18. táblázat), felírták és megoldották az egyenletet.

18. táblázat

5. kísérleti óra, 1. feladatához tartozó táblázat megoldása, nyolcadik évfolyam

	egyedül (1 hét)	1 hét alatt (rész)	x hét alatt (rész)
juhok	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{x}{3}$
kecskék	6	$\frac{1}{6}$	$\frac{x}{6}$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$$

$$\frac{2x}{6} + \frac{x}{6} = 1$$

$$2x + x = 6$$

$$3x = 6$$

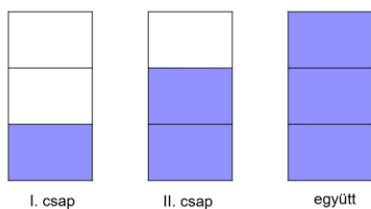
$x = 2$, vagyis **2 hétre elegendő a széna.**

Az A feladatot egy hasonló gyakorló feladat követte, ahol a diákok önállóan dolgoztak majd frontálisan ellenőrizték a megoldást. A frontális ellenőrzéskor minden tanár szem előtt tartotta, hogy a grafikus reprezentáció és a szimbolikus felírás is megjelenjen.

A tanórán lévő harmadik feladat (B feladat): Az úszómedence az egyik csapon keresztül 3 óra alatt töltődik fel, a másik csapon keresztül másfél óra alatt. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mindkét csapot megnyitottuk (24. ábra)?

24. ábra

5. kísérleti óra, 3. feladatához tartozó minta megoldás, nyolcadik évfolyam



A válasz már egy jó grafikus reprezentációról könnyen leolvasható: **1 óra alatt.** A feladatot egyenlettel is meg lehet oldani (19. táblázat).

19. táblázat

5. kísérleti óra, 3. feladatához tartozó táblázat megoldása, nyolcadik évfolyam

	egyedül (óra)	1 óra alatt (rész)	x óra alatt (rész)
I.csap	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{x}{3}$
II.csap	1,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{2x}{3}$

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} = 1$$

$$x + 2x = 3$$

$$3x = 3$$

$x = 1$, vagyis **1 óra alatt telik meg így a medence.**

6.3.2. Tapasztalatok

A grafikus reprezentáció értő használatához elengedhetetlen, hogy a tanulók grafikus reprezentációs készségei a megfelelő szinten legyenek. Mivel ezen készségek nem feltétlenül derülnek ki a matematika jegyükből, így az A feladat A1 és A2 részfeladataiból következtettünk rá, a konkrétan ilyen típusú letöltési sávos ábrákra vonatkozóan.

A tanulók által készített ábrák vizsgálatakor a Pisa 2012 keretrendszert vettük alapul, amelyben az egyes kompetenciaelemeket a tanulók munkájához rendeltük hozzá (20. táblázat). A PISA 2012 keretrendszer kompetenciaelemeit nem teljesítményszintekként, hanem az elemzési kategóriák kialakításának kiindulópontjaként használtuk. Mivel a jelen vizsgálatban a tanulók nem kész reprezentációt értelmeztek, hanem maguk hozták létre az ábrát, a keretrendszert a feladathelyzethez adaptáltuk.

20. táblázat

A Pisa 2012 keretrendszer a tanulói ábrák elemzéséhez

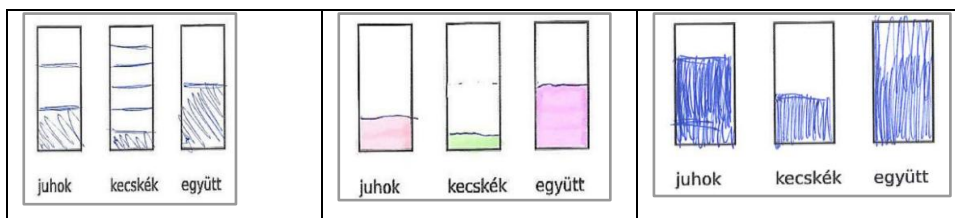
Elem	Elem leírása a keretrendszerben	Pisa 2012	Az elem megjelenése a munkájában
1	Valós információk ábrázolása	matematikai	A tanuló tudja értelmezni az ábrán szereplő számadatokat, legalább megközelítőleg.

Elem	Elem leírása a Pisa 2012 keretrendszerben	Az elem megjelenése a tanuló munkájában
2	Matematikai fogalmak, tények, eljárások és érvelések alkalmazása	A tanulók helyesen ábrázolták a törtészt az ábrán.
3	Matematikai eredmények értelmezése, alkalmazása és értékelése	A tanulók helyesen értelmezik az ábrát, tudnak következtetni az ábrából.

Ha a tanuló nem felelt meg az első elem kritériumainak, akkor az A1 értékelése *helytelen*. Ha a tanuló elérte az 1. elemnél megadott szintet, de nem teljesítette a 2. elemet, akkor az ábra *nem szándékos* értékelést kapott. Ha azonban megfelelt a második elemnél megadott követelményeknek, akkor *szándékos* ábrának minősült (25. ábra).

25. ábra

Bal oldalon szándékos ábra (S8029), középen nem szándékos (S8007), jobb oldalon helytelen ábra (S8035); 5. kísérleti óra, 1. feladatához tartozó megoldások, nyolcadik évfolyam



Az A2 kérdésnél adott válasz lehet helyes vagy helytelen. Az A1 és A2 eredményei alapján a tanulók grafikus ábrázolási készségeik szerint, három csoportba kerültek: haladó, közepes, mérsékelt. (21. táblázat)

21. táblázat

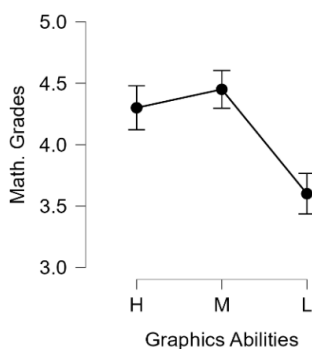
Grafikus ábrázolási készségek szerinti csoportok, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

	A1 szándékos	A1 nem szándékos	A1 helytelen
A2 helyes	haladó (H)	közepes (M)	mérsékelt (L)
A2 helytelen	közepes (M)	mérsékelt (L)	mérsékelt (L)

Az első feladaton 75 nyolcadikos tanuló dolgozott, akik közül 20 tanuló a haladó csoportba került a grafikus ábrázolási képességei szerint. Szintén 20 tanuló került a közepes, illetve 35 tanuló a mérsékelt csoportba. Egyirányú ANOVA vizsgálat történt a csoportok általános matematika érdemjegyeinek összehasonlítására a grafikus ábrázolási képességek alapján (26. ábra). Mivel a variancia homogenitásának feltétele teljesült (a Levene-tesztben $p > 0,05$), post hoc tesztként Tukey HSD-teszt került futtatásra. Az eredmények azt mutatták, hogy a mérsékelt csoport átlagpontszáma (átlag = 3,6, SD = 0,98) szignifikánsan alacsonyabb volt ($p < 0,05$), mint a közepes (átlag = 4,45, SD = 0,69) vagy a haladó (átlag = 4,30, SD = 0,80) csoport átlagpontszáma. Másrészt a közepes és a haladó csoportok átlagai hasonlóak voltak ($p > 0,05$).

26. ábra

Általános matematika érdemjegyek és a grafikus ábrázolási képességek összehasonlítására, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam



A csoportosítás során tehát 20-20 tanuló került a magas vagy közepes grafikai reprezentációs készségű csoportba. Vagyis a tanulóknak körülbelül a fele lehet potenciálisan alkalmas egy probléma grafikai megoldására. A matematika osztályzatukkal összevetve az a tapasztalat, hogy a grafikai reprezentációs készségek összefüggnek a tanulók osztályzatával. A 4-5 tanuló magas vagy közepes grafikai reprezentációs készségekkel rendelkezik, míg azon tanulóknak esetében, akiknél ez a készség alacsonyabb szinten van, az osztályzatuk is gyengébb. Egyszempontos ANOVA analízis szignifikáns különbséget mutatott a gyenge grafikus készségű csoport és a többiek matematika osztályzata között. A kutatás kezdetén az alap feltevések közé tartozott, hogy a grafikai megoldás a gyengébb tanulóknak tudna segíteni az esetleges hiányosságait ellensúlyozni. Az eredményekből azonban az állapítható meg, hogy pont ezen tanulók nem rendelkeznek a megfelelő grafikai reprezentációs készségekkel.

A B feladat önálló megoldásakor helyes vagy helytelen megoldást kapott a tanuló. Így a kimeneti változók binárisak (helyes vagy helytelen), logisztikus regresszió elemzéssel vizsgálhatóak. A modell két előrejelző változót használ: az általános matematika osztályzatokat (2-5) és a grafikus ábrázolási készségeket (haladó, közepes, mérsékelt). A modell jelentős magyarázó erővel bír, ($\chi^2(1, N = 75) = 13.117$; $p < 0.05$). A B feladat megoldásában elért sikeresség előrejelezhetőségének szempontjából két fontos eredmény született. Egyrészt a B feladatban elért sikerességet előre jelezte a matematika osztályzat ($W(1) = 6.142$; $p < 0.05$), másrészt a grafikus ábrázolási készségek nem jelezték előre a B feladatban elért sikert ($W(2) = 1.615$; $p > 0.05$). Tehát nincs statisztikailag szignifikáns összefüggés a grafikus ábrázolási készségek és a B feladatban elért sikeresség között, de a matematika jegyek megmagyarázzák az eredményt.

Ezen eredmények után felmerülhet a kérdés, hogy vajon minden tanuló a számára megfelelő megoldási stratégiát választotta-e, illetve, hogy mi minden befolyásolhatja az autonóm stratégiaválasztást.

A megoldások vizsgálatakor három csoportba kerültek a tanulók a stratégiaválasztásuk alapján. Az egyik csoportot a grafikus modellt alkalmazó diákok alkották. Az együttes munkavégzéses feladatok során a tanulók jellemzően téglalapokból összeállított ábrával szemléltették a feladatban leírt helyzetet. Az egész téglalap a szöveges feladatban szereplő elvégzendő teljes munkát jelképezte, amelyen a tanuló részekre osztva rajzolta be a szereplők által egy időegység alatt elvégzett munkát. A másik csoportot azon tanulók alkották, akik grafikus ábra nélkül, az egységre való következtetéssel találták meg a helyes megoldást (27. ábra). Ezen tanulók összeadták az időegység alatt elvégzett munkát, ezzel megtudták, hogy egy időegység alatt mennyi munkát végeznek el a szereplők együttesen. A harmadik csoportba azon tanulók kerültek, akik szimbolikusan, egyenlet megfogalmazásával és megoldásával jutottak eredményre (28. ábra).

27. ábra

S8033 tanuló megoldása, 5. kísérleti óra, 3. feladat (B feladat), nyolcadik évfolyam



$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$$

28. ábra

S8042 tanuló megoldása, 5. kísérleti óra, 3. feladat (B feladat), nyolcadik évfolyam

1: 3h
2: 1,5h

	egyedül	1h alatt	x h alatt
I.	3h	$\frac{1}{3}$	$\frac{x}{3}$
II.	1,5h	$\frac{2}{3}$	$\frac{2x}{3}$

$\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} = 1$
 $x + 2x = 3$
 $3x = 3$
 $x = 1$

1 óra alatt

22. táblázat

5. kísérleti óra, 3. feladat (B feladat) megoldásai, nyolcadik évfolyam

	Szimbolikus	Grafikus	Következtetés	Nincs stratégia	Össz.
B feladat megoldása helytelen	16	8	6	11	41
B feladat megoldása helyes	23	8	3	0	34
Össz.	39	16	9	11	75

A 22. táblázat a B feladat stratégia választását, és annak eredményességét foglalja össze. A három megoldási stratégia mellé került egy negyedik oszlop is. Ide kerültek azon tanulók, akik nem tudtak önállóan hozzákezdeni a feladat megoldásához, vagy nincs felismerhető stratégiájuk. Ezen tanulók egyike sem kapta meg a helyes eredményt.

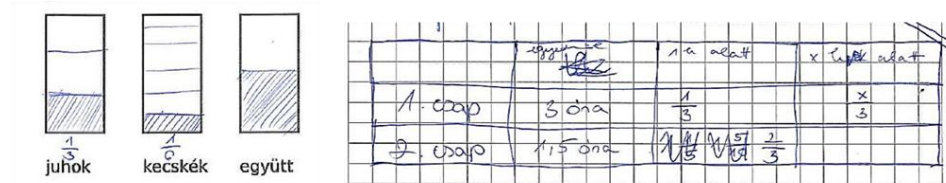
Legtöbben, 39-en egyenlettel szerették volna megoldani a feladatot, de közülük csak 23 tanulónak sikerült. Gyakori hiba volt, hogy rosszul írták fel az egyenletet, vagy a megoldás során algebrai számolási hibát vétettek. A grafikus megoldást jóval kevesebben választották, 16-an, akik közül 8 tanuló helyes eredményt kapott. Arányos következtetéssel csak 9 tanuló próbálkozott, akik közül hárman kaptak

helyes eredményt. A grafikus megoldást tehát kevesen választották, holott az egyenletben sokan voltak sikertelenek.

Több olyan tanuló volt, aki nem tudta megoldani a B feladatot, pedig az A feladatnál helyesen válaszolt. Valószínűleg ők nem a számukra megfelelő stratégiát választották. Ilyen munkát készített például az S8002 tanuló (29. ábra), aki az A feladatot hibátlanul megoldotta, magas reprezentációs készségekkel rendelkezik, és az általános matematika jegye 5. A B feladatnál helyesen határozta meg az egységnyi idő alatt elvégzett munkát, de nem tudta kikövetkeztetni a választ ezekből az adatokból, vagy nem tudott egyenletet felírni. Valószínűleg gondot okozott neki az x változó $\frac{2}{3}$ -dal való szorzása, mert az előző feladatoknál csak olyannal kellett szorozni, ahol 1 volt a számláló. Vagyis algebrai hiányosságai vannak a tanulónak. Összesen 8 tanulónál figyeltük meg ezt a jelenséget. Számukra feltételezhetően segítség lenne a grafikai reprezentáció, de mégsem azt választották.

29. ábra

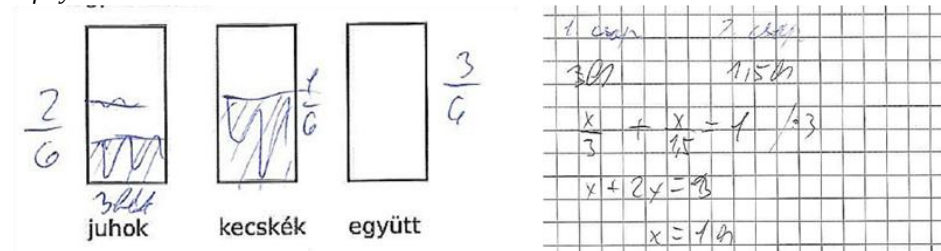
S8002 tanuló ábrája az 5. kísérleti óra A feladatához és megoldása a B feladathoz, nyolcadik évfolyam



Természetesen olyan tanuló is volt, aki megtalálta a számára megfelelő stratégiát. Például az S8008 tanuló, aki mérsékelt reprezentációs készségekkel rendelkezik, és megfelelő stratégiát választott. (30. ábra)

30. ábra

S8008 tanuló ábrája az 5. kísérleti óra A feladatához és megoldása a B feladathoz, nyolcadik évfolyam



A matematika jegye 4. Az A feladatban helyes arányos gondolkodásra és a törtek kezelésére utaló nyomok vannak, bár a kérdésekre adott válaszok helyesek, a tanuló helytelen ábrát készített. A B feladatban a stratégiája egyenlettel való megoldás, a megoldásnál az egyenlet felírás és a szimbolikus algebrai tevékenység is helyes. A

mérsékelt grafikus reprezentációs készséggel rendelkezők csoportjában nyolc hasonlóan viselkedő tanuló volt. Matematika jegyeik 3,3,3,4,4,5,5,5. Egy kivételével mindegyikük hamis választ adott az A feladatban, de a B feladatot mindannyian helyesen oldották meg egyenlettel.

Az eredmények vizsgálatakor feltűnő hasonlóságot mutatott a 8G és a 8H osztályok teljesítménye a tanulók grafikus készségeinek tekintetében, ugyanakkor a stratégia választásuk jelentősen eltért. Egyetlen tanuló sem tartozott a haladó csoportba, és több mint fele a mérsékelt csoportba került. A 8H osztály tíz tanulója közül hét készített ábrát a B feladathoz, ami jóval több, mint a többi osztályban. Ezenfelül a B feladatban a sikerességi arány is magasabb volt, mint a többi osztályban (60% a 8H osztályban). A 8H osztály tanára reflexiójában megjegyezte, hogy a tanulók "ellenállása" a grafikus megközelítéssel szemben arra készítette, hogy ezt a megoldási módszert hangsúlyozza a köztes feladat megbeszélése során. A tanulók munkalapjai a tanárral való együttműködés erejét mutatják, mivel alaposan kidolgozták a köztes feladatot ábrával és részletes magyarázatokkal. Ezzel szemben a 8G osztályban senki sem választotta a grafikus megoldást, aminek az lehet az oka, hogy a köztes feladatot nem dolgozták ki grafikusán a frontális megbeszélés során, bár a 14 tanulóból öten rajzoltak ábrát a köztes feladathoz. A grafikus megoldás megerősítésének hiánya az órán feltehetően ahhoz vezetett, hogy a tanulók elhanyagolták a grafikus megoldást a B feladatban. Ebben az osztályban a B feladat megoldása az átlaghoz közeli (42,9%) volt.

6.4. Összegzés, pedagógiai implikációk

RQ3 Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?

A nyolcadikosok körében végzett kutatás első kísérleti óráján, a bevezető feladatnál a tanulók először találkoztak a letöltési sávokkal, mint grafikus reprezentációval. A kísérleti órák tervezésekor azért esett a választás a letöltési sávokra, mert a tanulók ismerik, találkoztak vele a mindennapjaik során. Azonban nem várt következményként lépett fel a gyakorlatban, hogy túl erős a letöltési sávokról kialakult képe a tanulóknak. A letöltés akkor fejeződik be, ha a sáv teljesen be lesz satírozva. Néhány tanulót megzavart, hogy az állat teljes tömegét egy nem teljesen besatírozott sáv jelölte. Ennél a problémánál az állatok tömege között fennálló relációk kerültek ábrázolásra, ezért a letöltési sávok téglalapjai egyforma hosszúságúak voltak, azonban a satírozás különböző. A letöltési sáv ismeretlen reprezentáció volt a tanulók számára, ezért a legtöbben megpróbálták kikerülni a problémamegoldás során, még akkor is, ha az instrukciók azok használatára utasították őket. Félénken viselkedtek a tanulók, maguktól nem mertek belerajzolni vagy beleírni

az ábrába. Többen az utasítások helyett saját úton indultak el a feladat megoldásával, az észrevételeiket inkább az ábra köré írták, vagy a papír aljára. Gyakori volt, hogy az ismeretlen reprezentáció helyett az ismerős egyenlettel szerették volna megoldani a feladatot. Azonban ez nagyon kevés párnak sikerült, a többiek nem boldogultak az egyenlet felírásával. Habár a feladaton pármunkában dolgoztak a tanulók, sokan így sem tudták értelmezni az utasításokat.

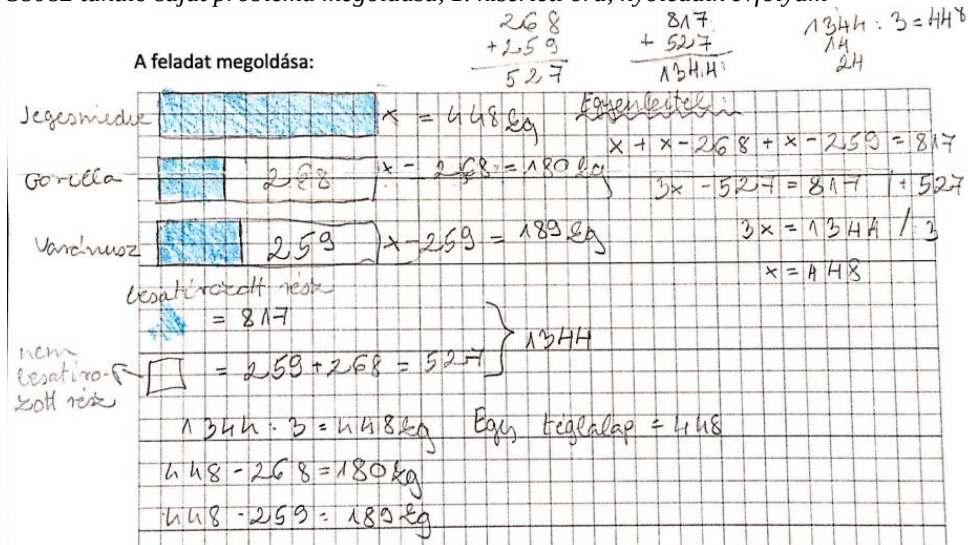
A tanulói probléma alkotásoknál az első feladat mintáját követték a tanulók. A legtöbben minden szempontból helyes problémát alkottak, de volt néhány számolási hibás, illetve szerkezetileg hibás probléma is. A problémaalkotás ebben az esetben kötött volt, hiszen a szükséges adatokat is megkapták a tanulók, a mintaként szolgáló fejtörő mellé. A saját problémájuk megoldásánál elsősorban a korábbi tapasztalataikra hagytak, vagyis egyenlettel oldották meg. Ugyanannyian voltak, akik csak grafikus ábrával kezdték el megoldani a saját problémájukat, mint akik a grafikus megoldás mellett egyenletet is alkalmaztak. A grafikus megoldások sikertelenségét egyrészt a hibásan vagy hiányosan elkészített ábra okozta, másrészt a megoldás befejezetlensége. Azon tanulók, akik mindkét módszert feltüntették a megoldásnál, mintaszerűen levezették azt, ahogy az első feladat esetében. Például az S8082 tanuló esetében is jól látható, hogy követte a bevezető feladat felépítését, és megoldotta grafikusán, majd egyenlettel is (31. ábra).

S8082: A jegesmedve 268 kg-al nagyobb tömegű, mint a gorilla és 259 kg-al nehezebb, mint a varánusz. Együtt a tömegük 817 kg. Mennyi az állatok tömege külön-külön?

Nem tudhatjuk, hogy az ő esetében a grafikus reprezentáció pontosan miért jelent meg a megoldásában. Lehet, hogy segített az egyenlet felírásában, de az is lehet, hogy tanári elvárásnak tekintette a tanuló. Minden olyan tanuló, aki minden szempontból helyes problémát alkotott, és a megoldás során grafikus és szimbolikus módszert is használt, megkapta a helyes eredményt. Azonban fontos észrevétel, hogy minden ilyen tanuló 5 matematika érdemjeggyel, vagyis erős matematikai alapokkal rendelkezik.

31. ábra

S8082 tanuló saját probléma megoldása, 1. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam



A vizsgált csoportban a tanulók 27%-a rendelkezett fejlett grafikus ábrázolási készséggel, ami lehetővé tette számukra a feladatok grafikus megoldását. Ezzel szemben 46%-uk mérsékelt grafikus ábrázolási készséget tudhatott magukénak. A közepes grafikus reprezentációs készséggel rendelkező tanulók mintegy 60%-a tudott ábra segítségével megoldani egy feladatot, ha a feladatot irányítottan oldották meg.

Amikor szabadon választhattak stratégiát, a tanulók 21%-a a grafikus megoldást választotta. A kvantitatív eredmények azt mutatják, hogy a grafikus készségek nem magyarázták a stratégiaválasztást, amikor a tanuló önállóan választhatott. Az önálló stratégia választásban tehát más lehetséges tényezők is szerepet játszanak, például az önszabályozás és a tanári kontroll hatása. Sőt, a kvalitatív elemzés azt mutatja, hogy a tanári kontroll szerepe a stratégiaválasztást jelentősen befolyásolhatja. Ugyanakkor a tanulók fejlett metakognitív készségének szintén szerepe van, azaz a tanulónak tisztában kell lennie a saját készségeivel, erősségeivel a számára kedvező stratégia megválasztásához. Az önszabályozás fontosságára utal az is, ha egy olyan tanuló, aki jól tudja alkalmazni a grafikus megoldást, mégsem a grafikus, hanem az algebrai megoldást választja, amiben nem biztos, hogy sikeres lesz. Ezzel szemben a grafikus ábrázolásban gyengébb képességekkel rendelkező tanulók gyakran választották az egyenletmegoldást, sőt a tanulók fele sikeres volt.

A tanítási gyakorlat során érdemes lehet a tanárnak egy kis időt szánni az órán arra, hogy elmagyarázza a letöltési sávokon látható összefüggéseket, ha új reprezentációként jelenik meg a tanórán. Szintén érdemes lehet a letöltési sávok kiegészítését közösen végezni a tanárral, mintát adva ezen reprezentáció használatára.

Vagy egy rövid bevezető feladatot készíteni ezen fejtörő elé, amelyen letöltési sávok láthatók, és le kell olvasni az adatok közötti relációkat. A tapasztalatok arra utalnak, hogy a grafikus megoldásokra fordított tanári figyelem segíthet a tanulóknak abban, hogy önhatékonyt fejlesszenek a stratégiaválasztás helyes döntéseinek meghozatalában és javítsák a stratégiák hatékonyságát.

7. Tanulói problémaalkotás

7.1. Bevezetés

A dolgozat előző fejezetében már volt szó a tanulói problémaalkotásokról, az első nyolcadikos kísérleti óra tapasztalatai alapján. Azonban a tanulói problémaalkotások mélyebb vizsgálatára az utolsó nyolcadikos kísérleti órán került sor, melyet ebben a fejezetben szeretnénk bemutatni. Ezen tapasztalatokat a (Lócska, 2025) cikkben publikáltuk.

A matematikai problémaalkotás, mint pedagógiai gyakorlat, lehetőséget biztosít az aktív, önálló felfedezésre és a tananyag mélyebb megértésére, így természetes módon kapcsolódik az értelemalkotó algebra kísérletünkhöz. A tanulók szeretnek egymásnak találs kérdést vagy fejtörőt is kitalálni, így talán nem meglepő, hogy a matematikai problémaalkotás is közel áll hozzájuk. Tanári szemmel nézve pedig több hasznos hozadéka is van a tanulók önálló problémaalkotásának és megoldásának. A problémaalkotás során a tanulók önállóan készíthetnek matematikai problémát, amely által jobban belemerülhetnek az adott tananyagba és mélyebben megérthetik a tanult fogalmakat. A maguk által készített szöveges feladatoknál az adott fogalmakat összekapcsolhatják a mindennapi életükkel, tehát valós élethelyzetben használhatják azt. A matematika és a mindennapi élet közötti kapcsolat ilyen tapasztalása növelheti a matematika iránt érzett pozitív attitűdöt, növekedhet a motiváció (Báró, 2022). Emellett a tanulói problémaalkotás során a tanár információt kaphat arról is, hogy hogyan értette meg a tananyagot a tanuló (Silver, 1994a, 2013).

A problémaalkotás ablak a tanulók matematikai megértésébe (Bevan & Capraro, 2021; Silver, 1994b), amely a matematika iránt érzett attitűdbe is betekintést enged. Silver úgy fogalmaz, hogy a problémaalkotás nem csupán ablak, hanem tükör is, amely megmutatja a tanulók matematikai tapasztalatainak tartalmát és jellegét.

Ellerton (1986) általános iskolás tanulókkal végzett kutatásában azt a következtetést írta le, hogy összefüggés van a tanulók általános matematika teljesítménye és az általuk alkotott problémák nehézségi szintje között. A jobb matematikai teljesítménnyel rendelkező tanulók nehezebb számításokat igénylő vagy több művelettel megoldható problémákat készítettek, mint a kevésbé jó képességű társaik. A jobb képességű tanulók jobban teljesítettek az általuk alkotott problémák megoldásában is. Ellerton úgy gondolta, hogy a problémaalkotás módszere hasznos eszköz a tehetséges tanulók tanulmányozásához. Több kutatás megfogalmazta a problémaalkotás motiváló szerepét a tanórák során (Báró 2022; Bevan & Capraro 2021). Bevan & Capraro szerint a problémák kontextusának szabad megválasztása növelte a tanulók érdeklődését és önállóságát a problémák felvetése és megoldása iránt. Az ilyen problémaalkotó tevékenységek növelhetik a tanulók matematika iránti

érdeklődését, és a saját matematikai képességeikbe vetett bizalmat. Bonotto & Santo (2015) úgy fogalmaznak, hogy a problémaalkotás elősegítheti a kreatív gondolkodást, mert a tanulók eredeti és akár nyílt problémákat is létrehozhatnak.

A tanulói problémaalkotást Polya (1945) a problémamegoldás részének tekintette. Az általa leírt megoldási lépések második részében (tervkészítés) több kérdést is megfogalmaz, amely segédfeladat készítésére biztatja a tanulót: *“Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Vagy általánosabb feladatot? Vagy speciálisabb feladatot?”* Azaz Polya a problémamegoldási folyamat részének tekinti a probléma variálását.

Cifarelli és Sevim (2015) három pontban foglalták össze, hogy miért hasznos a problémaalkotás folyamata a problémamegoldás során. (1) A tanulókat segíti az eredeti probléma perspektívájának kiszélesítésében, a probléma hatókörének kiszélesítésében. (2) A problémaalkotási tevékenység, amely jobb konceptuális megértéshez vezethet, kiemeli a tanulók számára ennek a tevékenységnek a fontosságát. (3) A tanulók aktívan figyelemmel kísérik és értékelik ötleteik hasznosságát a problémamegoldás megkezdésekor, és aktívan új kérdéseket és problémákat vetnek fel, amikor szükségesnek érzik.

A tanulók által készített problémák csoportos megbeszélése lehetővé tette a tanulók számára, hogy különböző típusú problémákra reflektáljanak, és új lehetőségeket fedezzenek fel, például a nyílt feladatokat (Bonotto & Santo, 2015). Ezen problémák osztálytermi megbeszélése segítette a tanulók kritikus gondolkodását, mert a saját maguk által alkotott problémák vizsgálatakor, megoldásakor szabadabbnak érezték magukat a tanulók (Bonotto, 2013).

A tanítás művészetének egyik összetevője, hogy a tanítási célokhoz illeszkedő problémákat tudjon adni a tanár (Singer & Voica, 2013). A tanári problémaalkotás lehetővé teszi, hogy az adott osztálynál, tanulónál tapasztalt nehézségekre reflektálva a nehézséghez illeszkedő problémát tárjon a tanulók elé.

A problémaalkotás módszerét két kutatásban alkalmaztuk. Először hatodik évfolyamon, majd nyolcadik évfolyamon, más-más aspektusból. Kontextusában a hatodikos kutatás az algebrai gondolkodást közvetlenül megalapozó aritmetikai készségekre, míg a nyolcadik osztályban végzett kutatásra az értelemalkotó algebra program keretében került sor, melynek egyik célja a program eredményességének kvalitatív vizsgálata.

A problémaalkotás módszerét Ellerton (2013) *Active Learning Framework* (röviden ALF) keretrendszer alapján vezettük be a tanórákon. Ennek egyik jellemzője, hogy a tanóra során a tanulói aktivitás fokozatosan emelkedik, míg a tanári irányítás ennek megfelelően csökken, átalakul. Első lépésben a tanár bemutat egy modellproblémát,

amelyet frontálisan részletesen kidolgoznak. Ekkor a tanulók inkább megfigyelnek, memorizálnak, befogadók maradnak. Ezt követi a gyakorló tevékenység, amely során a tanulói aktivitás növekszik, felhasználják, megismétlik a modellprobléma megoldásánál megfigyelt lépéseket. A gyakorló feladatok után a tanuló kezdeményez egy problémát, mely során ismét növekszik a tanulói aktivitás. A tanári irányítás ennél a pontnál csökken, átalakul. A tanár feladata az osztálytermi feladatok szervezése és felügyelete lesz. Az utolsó fázisban a tanár választja ki az osztályszintű megvitatásra megfelelő problémákat a tanulók által alkotott problémák közül. Ellerton összesen hat fázisba rendezte az ALF órák osztálytermi tevékenységeit. Kutatásunk során átalakítottuk ezt a modellt úgy, hogy négy fő fázisra osztottuk azt, a 23. táblázat szerint, és ennek alapján alakítottuk ki a kísérleti órák szerkezetét is.

23. táblázat

ALF órák osztálytermi tevékenységei

Modellprobléma	Gyakorlás	Problémaalkotás	Probléma megoldás
Új ismeret feldolgozása, tanár modellezi a példákat, tanár felhívja a figyelmet a tankönyvre	A tanulók példákat keresnek és problémákat oldanak meg a modell alapján.	A tanulók a modellel azonos szerkezetű problémát alkotnak.	Az osztály megvitatja és megoldja a tanulók által alkotott problémákat.

Cai és mtsai. (2015) jó zárótevékenységként tekintenek a probléma-alkotásra, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy megszilárdítsák és kritikusan gondolkodjanak a tanultakról.

Egy akciókutatásban a hatodikosok körében vizsgáltuk, milyen eredményesen lehet beépíteni a tanulói problémaalkotást a tanórákba (Kovács és mtsai., 2023). A beavatkozás során a tanulói problémafelvetést vegyes képességekkel rendelkező, 11-12 éves tanulókból álló osztályokban alkalmaztuk. A kutatás célja kettős volt. Egyrészt azt vizsgáltuk, hogy a tanulók képesek-e ezt a tevékenységet előzetes tapasztalat nélkül is elvégezni, és a problémaalkotás sikeressége kapcsolatban van-e a tanulók matematika osztályzataival kifejezett matematikai készségeivel. Az akciókutatás egyik eredménye volt, hogy a problémaalkotás az ALF keretrendszer alkalmazásával nehézségek nélkül beépíthető a tanórába, akkor is, ha a tanulóknak nincs előzetes tapasztalata a problémaalkotásról. A másik eredmény az volt, hogy a problémaalkotás sikerességét és eredményességét előre jelzi a tanuló matematika érdemjeggyel jelzett matematikai teljesítményszintje, a gyengébb matematikai teljesítményű tanulók a problémaalkotásban kevésbé sikeresek.

Jelen disszertációban részletesen a nyolcadik évfolyamon végzett kutatást ismertetjük. A nyolcadikos tanulók által készített problémák vizsgálatának célja nem csupán a tanulók szintaktikai, szerkezeti megértésébe való betekintés, hanem a tanulók szemantikai megértésébe is, felmérve, hogy képesek-e alkalmazni a tanult problématípusokat saját problémáik megfogalmazására. A szerkezeti megértést azt tükrözi, hogy a létrehozott probléma szövegében olyan szerkezeti elemek fordulnak-e elő, amelyek lehetővé teszik a probléma megoldását a tanult eljárással. A szemantikai megértést a probléma szemantikai helyessége alapján lett értékelve, azaz, hogy a megtanult matematikai modell alkalmazható-e a szövegben leírt helyzetre.

7.1.1. A kísérleti óra felépítése

A nyolcadikosok körében végzett kísérleti órák közül az utolsó, az együttes munkavégzéses feladatokra épül. A kutatás első ciklusa után ezen tanóra felépítésében nem történt változás. Az óra felépítésének elejét az előző fejezetben kifejtettük, így jelen fejezetben az óra zárókövét jelentő tanulói problémaalkotások elemzéséhez szükséges részeit mutatjuk be. Az óra az ALF paradigmát követte, vagyis egy modellprobléma kitűzésével és megoldásával kezdődött, majd gyakorlás következett több feladaton keresztül, végül saját probléma megfogalmazása, illetve annak megoldása volt a tanulók feladata. Az óra tervezésekor fontos szempont volt az ALF tulajdonsága, hogy a tanulói aktivitás fokozatosan növekedjen. Amíg a modellprobléma megoldása a tanár által erősen irányított volt, addig a problémaalkotás és megoldás már teljesen önálló feladat.

Az óra tervezésekor a tanulók önálló problémamegoldását megelőző gyakorló feladatokat úgy alakítottuk ki, hogy azok összhangban legyenek a könyvekben szereplő feladattípusokkal. Ennek alapján a három feladat három kategóriát fedett le (24. táblázat):

24. táblázat

Gyakorló feladatok, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

Feladat szövege	Feladat típusa
1. Bob kecskéket, Kevin juhokat tart a gazdaságban. Egy szekér széna a juhoknak 3 hétre, a kecskéknak 6 hétre elegendő. Bob és Kevin megegyeznek, hogy közösen használnak fel egy szekér szénát. Hány napra lesz elegendő a takarmány?	Közös étkezés
2. A közösen felépített várat hárman fogják kitakarítani, mert szép körülmények között akarják a focimeccset nézni a tévében. Kevin egyedül 3 óra alatt takarítaná ki a várat, Stuart szintén, Bob	Takarítás

Feladat szövege	Feladat típusa
pedig két óra alatt. A mérkőzés 55 perc múlva kezdődik. Kitakarítanak-e addigra?	
3. Az úszómedence az egyik csapon keresztül 3 óra alatt töltődik fel, a másik csapon keresztül másfél óra alatt. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mindkét csapot megnyitottuk?	Medence feltöltése

7.1.2. Tapasztalatok

Mivel a tanulói problémaalkotás a tanóra záróköve volt, így erre a fázisra nem minden osztályban jutott idő. Az eredményeket 5 osztály (8A, 8B, 8D, 8F, 8G) 79 tanulójának munkájára alapozzuk.

A tanulók nagyrészt beöltöztetett problémákat készítettek (Ambrus, 2014), melyek szövegét kétféleképpen értékeltük. Egyrészt szerkezeti, másrészt szemantikai szempontból. Egy szerkezetileg helyes problémának több kritériumnak is meg kell felelnie. A szövegben kettő vagy több szereplő kell, hogy legyen. A munka-idő-teljesítmény adatok közül kettőt meg kell adni, és a harmadikra kérdez rá a feladat. Erre ellenpélda az S8063 tanuló munkája, aki olyan adatokat ad meg a szövegben, amelyből nem lehet következtetni a szereplők teljesítményére, vagyis az egységnyi idő alatt elvégzett munkára.

„Egy partiban 2 cukorka adagoló van. Az egyik 2 óráig jó de a másikkal együtt 6 óráig. Mennyi ideig jó a második cukorka adagoló?” (S8063)

Ugyanakkor szerkezetileg helyes lehet a probléma, ha valamelyik szereplőnél nincs meg ez az adat, de kiszámítható a szereplők együttes teljesítményéből.

„A medence három csapon keresztül tölthető. Az egyik csap 5 óra alatt, a másik 6 óra alatt tölti meg egyedül. A három együtt 3 óra alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a harmadik csap egyedül?” (S8009)

A probléma szerkezeti helyességéhez kiszámíthatónak kell lennie, hogy a megnevezett folyamat hányad részénél tart 1 óra alatt. A kérdésnek az együttes munkavégzésre kell vonatkoznia, illetve a szöveg nem tartalmazhat olyan adatokat, amely alapján együtt hosszabb ideig tartana az adott tevékenység. Erre ellenpélda az S8066 tanuló munkája.

„A kert virágait összesen 3 óra alatt öntözi meg két csap. Az egyik csap 1,5 óra alatt öntözi meg. Mennyi idő alatt öntözi meg a másik csap?” (S8066)

Szemantikailag akkor megfelelő egy probléma, ha olyan tevékenységet nevez meg a tanuló, amelyet lehet együtt végezni, és amit ha együtt végeznek, rövidebb idő alatt készülnek el. Ilyen például a takarítás, medence feltöltés, gyümölcs hámozása. Ellenpéldaként hozható a főzés, a szellemi tevékenységek (versírás, tanulás) és az egyéni sportok (futás, úszás). Olyan tevékenység kell, hogy szerepeljen egy szemantikailag helyes problémában, amelynél az elvégzett munka, egy szereplő esetén az idővel egyenesen arányos, több szereplő esetén a teljesítmények összeadódnak. Vagyis a munkában részt vevő felek mindig ugyanolyan sebességgel dolgoznak, akár egyedül, akár együtt végzik a munkát. Ellenpélda, ha két ugyanolyan teljesítményű lovat fogunk be a szekér elé. Ekkor nem lesz fele annyi idő az út, legalábbis bizonytalan, jöllehet az együttes munkavégzésnél tanult kiszámítási mód alkalmazható. Azonban a valós folyamatnak ez nem megfelelő matematikai modellje.

A szemantikai helyességet csak a szerkezetileg megfelelő problémák esetében vizsgáltuk. (25. táblázat)

25. táblázat

Példák tanulói problémaalkotásokra, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

Probléma szövege és rövid elemzése	Szerkezetileg	Szemantikailag
„Bob, Stuart és Kevin banánt gyűjtöttek a közös kosarukba ami 5 literes. Bob 1 óra alatt 12, és Stuart 22 banánt gyűjtött. Hány banánt gyűjtött Kevin, ha a kosárba csak 116 banán fér be és Kevin kevesebb mint 40% át gyűjtötte?” (S8075) Bob és Stuart teljesítménye meghatározható. Kevin teljesítményének, munkájának kiszámításához nincsenek adatok (pl. mennyi idő alatt gyűjtött össze 116 banánt).	helytelen	-
„Kevin egy levest 1 óra alatt készít el. Stuart 1 óra 10 perc alatt, Bob 1 óra 30 perc alatt. Hány óra alatt készítik el ugyanazt a levest 3-man?” (S8105) Az egyéni teljesítmények kiszámításához minden adat megtalálható, de a főzés nem olyan tevékenység, ahol a teljesítmények összeadhatók.	helyes	helytelen
„Áron egyedül 3 óra alatt takarítja ki a házat. Nővére Enikő, 2 óra alatt. Együtt mennyi idő alatt takarítanak ki a házat?” (S8044)	helyes	helyes

Probléma szövege és rövid elemzése	Szerkezetileg	Szemantikailag
------------------------------------	---------------	----------------

Az egyéni teljesítmények kiszámításához az összes adat rendelkezésre áll, és ha együtt dolgoznak, a teljesítmények összeadódnak.

A szerkezetileg és szemantikailag is helyes feladatok kontextusát eredetiség szempontjából értékeltük. A fent leírt három gyakorlati feladat szövege a következő kategóriákba sorolható: közös étkezés, takarítás, medence feltöltése. Megvizsgáltuk, hogy a feladatok szövegei mennyiben térnek el ezektől, kisebb vagy nagyobb mértékben. Egy feladat kevésbé tért el, ha például folyadékkal teli medence helyett poharat használtak. Vagy csak a számok változtak a gyakorló feladathoz képest. Példa a jelentősen eltérő összefüggésre:

„Barni 2 óra alatt vágja le a füvet körömcsipesszel, Lilla 3 óra alatt vágja le körömcsipesszel. Együtt hány óra alatt vágják le.” (S8067)

Ha a tanuló olyan problémát készített, amely mind szerkezetileg, mind szemantikailag helyes volt, és ha a feladat kontextusa jelentősen különbözött a gyakorló feladatoktól, ezen problémák „bátor kontextusú” elnevezést kaptak.

Az önálló problémaalkotások megoldásának vizsgálatakor a 26. táblázatban összefoglalt kategóriákat határoztuk meg.

26. táblázat

Tanulói problémaalkotások megoldásának vizsgálata. 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

A probléma megoldása	Meghatározás
nincs megoldás	A tanuló üresen hagyta a megoldás részt.
elvileg helyesen elkezdett, de nem befejezett	Helyesen írja fel az egyenletet, vagy ha következtetéssel akarja megoldani, akkor fel tudja írni az egységet, de nem fejezi be a megoldást.
elvileg helyes, de procedurálisan helytelen	Helyesen írja fel az egyenletet, vagy ha következtetéssel akarja megoldani, akkor fel tudja írni az egységet, de a tanuló hibát vét a

A probléma megoldása	Meghatározás
	mérlegelvvel, algebrai átalakítással vagy aritmetikai hibája van.
elvileg helytelen	Helytelenül írja fel az egyenletet, vagy ha következtetéssel akarja megoldani, akkor nem tudja helyesen felírni az egységet
elvileg és procedurálisan helyes	Helyes megoldást kap a tanuló.

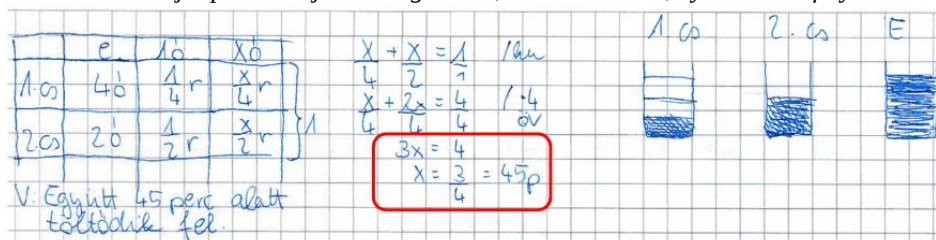
S8129 tanuló által készített probléma szövege szerkezetileg és szemantikailag is helyes.

„Egy medencét az egyik csapon keresztül 4 óra alatt a másik csapon 2 óra alatt töltünk meg. Mennyi idő alatt töltődik fel, ha mindkét csap meg van nyitva.” (S8129)

A probléma megoldása pedig elvileg helyes, de procedurálisan hibás (32. ábra). A tanuló helyesen kitölti a táblázatot, kezdve a megadott adatokkal, hogy egyedül mennyi ideig tartana feltölteni a medencét az egyik, és a másik csapnak. Majd beírja az egy időegység alatt, vagyis ennél a feladatnál az egy óra alatt elvégzett munkát. Az egyik csap egy óra alatt a medence $\frac{1}{4}$ részét tölti fel, míg a másik csap az $\frac{1}{2}$ részét. A következő oszlopban bevezet egy ismeretlent, amely segítségével fel tudja írni a helyes egyenletet. Az egyenletmegoldás első három lépésénél helyesen használja a mérlegelvet. Először közös nevezőre hozza a egyenletben szereplő törtet, majd mint a két oldalt megszorozza a nevezővel, vagyis 4-gyel. Az egyenlet bal oldalán helyesen végez összevonást is. Azonban az utolsó lépésnél procedurális hibát vét, mert $\frac{3}{4}$ -et ír fel, $\frac{4}{3}$ helyett.

32. ábra

S8129 tanuló saját problémájának megoldása, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam



S8021 tanuló munkája szintén helyes szerkezeti és szemantikai szempontból is sőt, még a kontextusa is bátor, hiszen jelentősen eltér a gyakorló feladatoktól.

Józsi bácsi ugyanazt a fagyis kocsit 2 óra alatt tölti fel, míg Ferenc 30 perc alatt. Ha közösen dolgoznának, hány másodperc alatt töltenék fel a fagyis kocsit? (S8021)

A probléma megoldásánál azonban több hibát is vét a tanuló (33. ábra). A táblázatot helyesen kezdi el kitölteni az általa megadott adatokkal, hogy egyedül mennyi ideig tart az adott munka elvégzése. Itt egy helyes átváltást is csinál, 30 perc = 0,5 óra. Az egy óra alatt elvégzett munkánál helyesen megkapja, hogy ennyi idő alatt Józsi bácsinak $\frac{1}{2}$ munkát sikerül elvégeznie, míg Ferencnek $\frac{1}{0,5}$ munkát. Azonban a következő oszlopban ismeretlen bevezetése helyett az időegység kétszeresét szeretné felírni. Józsi bácsinál már hibázik, mert 2-vel való szorzás helyett egy bővítést végez $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, amivel hamis eredményt kap. Hasonlóan jár el Ferencnél is, itt is egy bővítés látható. Érdekes, hogy ezzel az oszloppal a megoldás további részében nem foglalkozik, nem viszi tovább az itt kapott számokat. Egyenletet szeretne felírni, amit helyesen kezd el, de hibázik, mert az egyenletnek csupán a bal oldalát írja fel. Az egyenlet helyesen $\frac{x}{2} + \frac{x}{0,5} = 1$ lenne. Bár hiányos az egyenlete, mégis használja rá a mérlegelvet, de ismét hibázik. Ennél a lépésnél még felírja az egyenletmegoldás következő lépését, amit szeretne elvégezni, de nem halad tovább. A hibásan felírt egyenlet miatt tehát ez a megoldás elvileg helytelen, és procedurális hibákat is felsorakoztat.

33. ábra

S8021 tanuló saját problémájának megoldása, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

	egyéb	1h alatt	2h alatt
Józsi bácsi	2h	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$
Ferenc	30 perc = 0,5h	$\frac{1}{0,5}$	$\frac{2}{1}$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{0,5} = 1$	$\cdot 1 \cdot x$
$2 + 0,5 = x$	$1 - 0,5$

A tanulók által alkotott problémák szövege esetében minden, fentebb meghatározott kategória előfordult. Volt szerkezetileg helytelen, szerkezetileg helyes, de szemantikailag helytelen, és volt minden szempontból helyes probléma is.

A 79 tanulóból 69-en készítettek szerkezetileg helyes problémát, melyek közül 61 probléma volt szemantikailag is helyes. 11 tanuló pedig mindezek mellett még "bátor" kontextust is alkalmazott. A tanulók nagy része (87,3%) tehát érti a probléma szerkezetét, azaz a matematikai modellt procedurális szempontból. A szemantikai

rész még hiányos, nem tiszta a tanulóknak, hogy pontosan mely feltételeknek kell megfelelnie egy szemantikailag is helytálló problémának.

Az önálló problémaalkotást megelőző gyakorló feladatok során, a problémaalkotásban, illetve a saját probléma megoldásában elért eredményeket összehasonlítottuk a tanulók általános matematikai teljesítményét kifejező osztályzatukkal, azaz a kísérleti órát megelőző a félévi vagy év végi matematika érdemjegyükkel.

A korábbi, hatodik évfolyamon végzett kutatás (Kovács és mtsai. 2023) egyik tapasztalata az volt, hogy a jobb matematikai készségekkel rendelkező tanulók sikeresebbek voltak a problémaalkotásban, a leggyengébb tanulók számára a problémaalkotás módszere kevésbé hatásos. Ezért jelen kutatás problémaalkotásainak vizsgálatánál a tanulók mintájából kivettük a leggyengébb, vagyis az elégséges teljesítményt nyújtó tanulókat, azaz azokat a tanulókat, akiknek a kutatást megelőző félévi vagy év végi matematika érdemjegye 2 volt. Ebben a redukált mintában a szerkezetileg helyes feladatot alkotók, a problémaalkotást megelőző feladatoknál szignifikánsan több pontot értek el. A gyakorlásban elért pontszám és a problémaalkotás szerkezeti helyessége között szignifikáns, pozitív kapcsolat mutatható ki (Spearman-féle rangkorreláció: $\rho = 0.269$, $p = 0.022$, $n = 74$). A korrelációs együttható értéke alapján a kapcsolat gyenge-mérsékelt erősségű. Azok a tanulók, akik szerkezetileg helyes feladatokat alkottak, szignifikánsan több pontot értek el a gyakorlás során, még az osztályzat hatásának kontrollálása mellett is. Az eredmény azt jelenti, hogy a problémaalkotást megelőző modellfeladat és a két gyakorló feladat támogatta a feladat struktúrájának megértését a jó matematikai készségekkel rendelkező tanulók esetében.

Ugyanakkor a szerkezetileg helyes problémát alkotó tanulók körében, az alkotott probléma szemantikai helyessége nem korrelált sem az órai feladatmegoldásban elért eredménnyel ($\rho = 0.006$, $p = 0.959$, $n = 65$), sem az osztályzattal ($\rho = 0.115$, $p = 0.363$, $n = 65$).

A kísérletben volt 2 olyan nyolcadikos osztály (8A és 8B), akik korábban, hatodikos korukban részt vettek az előző részben bemutatott, problémaalkotást vizsgáló kutatásban (Kovács és mtsai., 2023). Az eredmények azt mutatták, hogy nincs összefüggés a korábbi tapasztalat és az alkotott problémák helyessége között (Fisher-féle egzakt teszt: $p = 1$). Ez a tapasztalat megerősítette a korábbi kutatás tapasztalatát (Kovács és mtsai., 2023), hogy a problémaalkotást az említett formában és keretek között bátran lehet alkalmazni a tanórákon (27. táblázat).

27. táblázat

Tanulói problémaalkotások a korábbi tapasztalat szempontjából, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

	Szerkezetileg helyes	Szerkezetileg nem helyes	Összesen
Van korábbi tapasztalat	35	5	40
Nincs korábbi tapasztalat	34	5	39
Összesen	69	10	79

A tanulók által alkotott problémák megoldását is vizsgáltuk (28. táblázat). Elvileg helyes, vagy helyesen elkezdett, de nem befejezett megoldást összesen 36 tanuló adott be. Helytelen megoldást összesen 18 tanuló készített, amelyek közül 9 elvileg helyes, és 9 elvileg helytelen. Ez utóbbi 9 tanuló munkáját megnézve megállapítható, hogy a procedurális tudás hiánya okozta a sikertelenséget, úgy, mint az algebrai átalakítások vagy a mérlegelv. Volt, aki aritmetikai hibát vétett.

28. táblázat

Tanulók által alkotott problémák megoldása, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

A probléma megoldása	Tanulók száma
nincs megoldás	15
elvileg helyesen elkezdett, de nem befejezett	6
elvileg helyes, de procedurálisan helytelen	9
elvileg helytelen	9
elvileg és procedurálisan helyes	30
Összesen	69

A matematika osztályzatnak itt meghatározó szerepe volt a saját feladatuk megoldásában ($p = 0.365$, $p = 0.002$, $n = 69$). Meglepő, hogy a már korábban említett három, a problémaalkotást megelőző órai feladat megoldásának sikeressége nem

befolyásolta a saját probléma megoldását. Ennek a jelenségnek egy lehetséges oka, hogy a probléma megoldásánál a tanulók a meglévő ismereteikre alapoztak, vagyis a probléma megoldásához általános matematikai műveltségre volt szükség. A saját probléma előtti gyakorló feladatok mintát adtak a megoldáshoz, amit a jobb matematikai képességekkel rendelkező tanulók fel tudtak használni, és a magasabb matematikai ismereteiknek köszönhetően helyes eredményt kaptak.

Azoknak a tanulóknak a munkáját, akik az eredeti kontextust alkalmazták, külön is megvizsgáltuk. A hipotézis az volt, hogy ha egy tanuló olyan magabiztos, hogy a gyakorló feladatoktól eltérő, teljesen új kontextust hozzon létre, akkor a feladatmegoldásban is sikeres lesz. Azonban a tapasztalat nem ezt mutatta. A 11 tanulóból csupán 7 adott helyes megoldást, egy tanuló pedig nem készített megoldást. A 3 rossz megoldást adó tanuló közül egy tanuló megoldása elvileg és procedurálisan is helytelen volt (a korábban bemutatott S8021 tanuló munkája). A másik két tanuló (S8127 és S8134) megoldása elvileg helyes, de procedurálisan hibás. A problémaalkotás és a problémamegoldás közötti kapcsolat tehát nagyon összetett.

Az egyik úszó 2 óra alatt úszik 4000 m, a másik 1,5 óra alatt. Hány perc alatt úsznak összesen 4 km-t? (S8127)

34. ábra

S8127 tanuló saját problémájának megoldása, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

The image shows handwritten work on grid paper. On the left, an equation is solved: $x + \frac{2}{3}x = 1$ km. The steps are: $\frac{3x + 2x}{3} = 1 / \cdot 3$, $5x = 3$, $x = \frac{3}{5}$, $x = 0.6$ h, $x = 36$ min. Below this, it says "40 perc alatt úsznak 4000 m-t." On the right, there is a diagram with three rectangles labeled "1. óra", "1.5 óra", and "1 óra". To the right of the diagram, it says "1 óra alatt 7/6" and "1.5 óra alatt 4/6".

S8127 tanuló az egyenletet helyesen írta fel, vagyis elvileg helyes a megoldás (34. ábra). Az egyenletmegoldás első lépésénél, ami a törtek közös nevezőre hozása, hibázik. Helyesen bővíti a $\frac{2}{3}$ -ot, megkapja a $\frac{4}{6}$ -ot, de az x változót már nem viszi tovább.

Az egyik szüretelőkombájn 3 óra alatt szed le 1 hektár szőlőt a másik kombájn pedig 2 óra alatt szed le 1 hektárt. 2-en együtt hány óra alatt szedik le a 3 hektárt? (S8134)

35. ábra

S8134 tanuló saját problémájának megoldása, 5. kísérleti óra, nyolcadik évfolyam

The image shows handwritten work on grid paper. On the left, there is a table with 2 rows and 4 columns. The first row contains 1, 3, 3, and $\frac{x}{3}$. The second row contains 2, 2, 2, and $\frac{x}{2}$. To the right of the table is a large curly brace. Below the table, there is a calculation: $\frac{5}{50} \cdot 6 = 0,81$, followed by 20 and $0,81 \cdot 60$. On the right side of the grid, there are several equations: $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 1$, $\frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} = \frac{6}{6}$, $5x = 6$, and $x = 49,2$ perc alatt. Below these, there is a note: "U: Ikkor én egyenletet kért, mert alatt szerettem volna megoldani".

S8134 tanuló is helyesen írta fel az egyenletet, és a mérlegelvet is jól használta egészen az utolsó lépésig (35. ábra). Az $5x = 6$ lépés után már csak a 49,2 perc eredményt látjuk, de a mellékszámításból látszik, hogy hol hibázott. $\frac{6}{5}$ helyett $\frac{5}{6}$ hányadosát számolta ki, és ezzel az eredménnyel számolt tovább. Ezért ez a megoldás is elvileg helyes, de procedurálisan hibás.

7.2. Összegzés, pedagógiai implikációk

RQ4 Milyen kapcsolat figyelhető meg a tanulók által alkotott problémák szerkezeti és szemantikai helyessége, a saját problémák megoldásának eredményessége, valamint a tanulók matematikai teljesítménye között?

Az együttes munkavégzéses problémák struktúrájának megértését támogatták a problémaalkotást megelőző gyakorló feladatok, illetve a modellfeladat. A gyengébb tanulóknak azonban kevésnek bizonyult a gyakorlás, több ilyen tanuló alkotott szerkezetileg helytelen problémát. Ezért a gyengébb tanulók számára az egyéni felkészítés lehet célravezető, a probléma szerkezetének megértéséhez. Ennek megvalósítása, a differenciált foglalkoztatás keretein belül egy elkövetkezendő kutatás tárgya lehet.

Sok tanuló alkotott minden szempontból helyes problémát, de több olyan tanuló is volt, aki szerkezetileg helyes, ugyanakkor szemantikailag helytelen problémát írt le. A szemantikai helyesség nem korrelált sem a tanulók érdemjegyeivel, sem a gyakorló feladatok során elért eredményeikkel. Ebből azt a pedagógiai implikációt szűrtük le, hogy a gyakorló feladatok során nagyobb hangsúlyt kell fektetni az együttes munkavégzés modelljére, szükség van ellenpéldákra is. Szükséges, hogy a tanulók lássanak olyan problémát, amely szerkezetileg sem jó, és olyat is, amely szemantikailag nem megfelelő. Ezzel bővíülhet a látóköruk, és jobban megismerhetik a modell feltételeit, az ilyen típusú feladatok felépítését is. A modell korlátaira rá kell

világítani, mert erősítheti a tananyag mélyebb megértését. Ezáltal fejlődik a tanulók kritikai gondolkodása is.

A megoldások vizsgálatakor kiderült, hogy a megoldás sikeressége a tanuló általános matematikai ismereteitől függ. A problémaalkotást megelőző tevékenységek sikerességének nem volt bejósoló szerepe.

A problémaalkotás sikeressége nem függött a korábbi tapasztalattól. Azon tanulók eredményességét, akik korábban már több alkalommal is foglalkoztak problémaalkotással, összevetve a többi tanuló munkájával megállapítható, hogy nincs szignifikáns különbség. Tehát a problémaalkotást bármikor be lehet vinni a tanórákra. A tanulók által alkotott problémák vizsgálatával pedig mélyebb betekintést nyerhet a tanár és a kutató a tanulók megértésébe (Silver, 1994). Fény derülhet olyan finomságokra, amelyek egy hagyományos problémamegoldás során nem merülnek fel. A problémaalkotás és a problémamegoldás közötti kapcsolat nagyon összetett. A szerkezetileg és szemantikailag is helyes problémát alkotók, akik a gyakorló feladattól is el mertek rugaszkodni, nem feltétlenül lesznek sikeresek a probléma megoldásában. A problématípus szerkezeti és szemantikai megértése tehát egyaránt fontos, és a problémaalkotás módszerével mindkettőbe bepillantást nyerhet a tanár.

8. Következtetések és további kutatási lehetőségek

Kutatásunkban az aritmetikai-algebrai átmenet megkönnyítésének lehetőségeit vizsgáltuk, az értelemalkotó algebra megközelítésén keresztül. Hetedik évfolyamon problémaalapú kísérleti órákat valósítottunk meg egy dizájn kutatás keretében, nyolcadik évfolyamon a többféle reprezentáció került előtérbe az egyenlettel megoldható szöveges feladatok kapcsán. Hatodik és nyolcadik évfolyamon a tanulói problémaalkotásokat és megoldásokat is vizsgáltuk, a tanulói megértés szempontjából. Most röviden összgezést adunk az eredményekről.

RQ1 Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során?

A problémaalapú tanítási stratégia, amely során átélhető kontextusba helyezett problémával foglalkoztak a tanulók, pozitív visszajelzést kapott mind a tanárok, mind a tanulók részéről. A tanulók az átlagosnál aktívabban vettek részt a tanórán, és érdeklődést mutattak az óra témája iránt. A kutatás alátámasztja a szakirodalomban szereplő eredményeket, miszerint a tanulók a korai algebratanulás fázisában szívesen és helyesen általánosítanak, érvelnek. Az általánosítás gyakran nem egyéni tevékenységként, hanem a csoportos megbeszélés eredményeként jött létre. Ekkor a tanulók szóban, a természetes nyelvi eszközeikkel fejezték ki gondolataikat. A szöveges megfogalmazás dominanciája az írásbeli munkákban, a tanulási ciklus végéig fennmaradt. A tanári magatartás minden megfigyelt órán a tanulás támogatását szolgálta. A tanárok igazodtak a tanulók képességeihez, és kompenzálták az esetleges hiányosságokat, bizonytalanságokat. Az értelemalkotó algebra természetes módon segítheti a tanulókat az általánosítás elsajátításában, de elengedhetetlen a szakszerű tanári irányítás.

RQ2 Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?

A számok és változók közötti kapcsolatok felírása kihívást jelenthet a tanulók számára. Szinte minden megfigyelt osztályban a legfontosabb lépés az összefüggés természetes nyelven történő megfogalmazása volt. Ezt követően a tanulókat könnyebben tudták átvezetni tanáraik a szimbólumokkal való felírásra. Az algebrában használt új jelölési konvenciók eltérnek a tanulók korábbi, aritmetikai tapasztalataitól. Például korábban megtanulták, hogy mit jelentek a számjegyek, ha egymás után írják őket, de az algebrai kifejezéseknél ugyanez a jelölés mást jelent. A tapasztalatok alapján bár a tanulók képesek elvégezni az algebrai tevékenységeket, az értő és készség szintű alkalmazásukhoz még nem elég fejlett a tudásuk. A hetedikes tanulók számára nehézséget jelenthet a megoldás értelmezése, ha algebrai kifejezés

is szerepel benne. A behelyettesítés jelentős segítséget nyújthat a tanulóknak az algebrai megoldás megértésében.

RQ3 Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?

Gyakori volt, hogy a tanulók az új grafikus reprezentáció helyett az ismerős egyenlettel szerették volna megoldani a feladatot, amivel viszont sokszor nem boldogultak. A tanulók saját problémájuk megoldásánál leggyakrabban szintén az egyenletekre támaszkodtak. Azok a tanulók, akik a grafikus megoldást választották, és mégis helytelen eredményt kaptak hibás, vagy hiányos ábrát készítettek, esetleg hiányzott a megoldás befejezése. Minden olyan tanuló, aki minden szempontból helyes problémát alkotott, és a megoldás során grafikus és szimbolikus módszert is alkalmazott, helyes eredményt ért el. Fontos megjegyezni azonban, hogy ezek a tanulók mind 5-ös matematika érdemjeggyel rendelkeznek, azaz erős matematikai alapokkal bírnak.

A vizsgált csoportban a tanulók 27%-a rendelkezett fejlett, és szintén 27%-a közepes grafikus ábrázolási készséggel, ami potenciálisan lehetővé teszi számukra a feladatok grafikus megoldását. Azonban a kutatás kvantitatív eredményei azt mutatják, hogy a grafikus készségek nem magyarázták a tanuló önálló stratégiaválasztást. Az önálló stratégia választásban tehát más lehetséges tényezők is szerepet játszanak, például az önszabályozás és a tanári kontroll hatása.

RQ4 Milyen kapcsolat figyelhető meg a tanulók által alkotott problémák szerkezeti és szemantikai helyessége, a saját problémák megoldásának eredményessége, valamint a tanulók matematikai teljesítménye között?

A hatodik évfolyamon végzett kísérletben három fő tényező befolyásolta a problémafelvetés minőségét, a tanulók matematikai képességei, a probléma matematikai háttere, és a probléma kitűzésének módja. A problémamegoldás sikerességét illetően szintén három jelenséget tártuk fel a kísérletben. Az első, hogy a jobb matematikai képességű osztályokban a problémamegoldás sikerességét befolyásoló tényező az volt, hogy a tanuló a saját problémáját vagy egy osztálytársának a problémáját oldotta-e meg. A második jelenség az volt, hogy a szövegbe ágyazott feladatokat sikerebben oldották meg, mint a csak számokat tartalmazó feladatokat. Végül, ebben a kísérletben a problémaalkotás minősége előre jelezte a problémamegoldás sikerességét; a jobb problémaalkotók sikereesebbek voltak a problémamegoldásban. Nyolcadik évfolyamon végzett kutatás alátámasztja a szakirodalomból ismert eredményeket, mi szerint a tanulók által alkotott problémák elemzése révén a tanár és a kutató alaposabb rálátást nyerhet a tanulók megértésére.

A kísérlet során sok tanuló minden szempontból helyes problémát alkotott, de olyanok is akadtak, akik szerkezetileg helyes, de szemantikailag hibás problémát fogalmaztak meg. A szemantikai helyesség nem mutatott összefüggést sem a tanulók érdemjegyeivel, sem a gyakorló feladatokban elért eredményeikkel. A megoldások elemzése alapján kiderült, hogy a megoldás sikeressége a tanuló általános matematika tudásától függött. A problémaalkotást megelőző tevékenységek sikeressége viszont nem befolyásolta előre a végső eredményeket.

A jövőben a nyolcadikos kísérleti órák, jelen dolgozatban be nem mutatott óráinak tapasztalatait szeretnénk elemezni a tanulók reprezentációhoz való viszonya és a reprezentációválasztás szempontjából. Ezen tanórák szintén az egyenlettel megoldható szöveges feladatok köré épülnek, melynek témái a geometriai feladatok, a fizikai, vagyis mozgásos feladatok, illetve a kémiai vagy más néven keveréses feladatok. A kísérleti órák közös jellemzője, hogy a szimbólumoktól eltérő reprezentációval támogattuk a tanulói megértést. További lehetőség, hogy a hetedik és nyolcadik évfolyamon végzett design kutatást további kutatási ciklusokkal egészítsük ki.

9. Összefoglaló

Az aritmetikai feladatok után sok tanulónak nehézséget okoz az algebrai kifejezések értő használata, hiszen a megszokott szám-feladatok helyett betűk is szerepelnek a feladatokban. A dolgozat fő célja az aritmetikai-algebrai átmenet megkönnyítési lehetőségeinek tárgyalása, amelynek érdekében hetedik és nyolcadik évfolyamon dizájn kutatás végeztünk (Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Swan, 2014). A kísérleti órákat az értelemalkotó algebra elvei szerint alakítottuk ki, mely a konceptuális megértésre összpontosít, szemben az eljárások algoritmikus végrehajtásával. Jellemzője a probléma megélhető kontextusba helyezése, a különböző reprezentációs formák használata, az általánosítás, az érvelés és a szociális tanulás (Palatnik & Koichu, 2017).

Hetedik évfolyamon a problémaalapú tananyagfeldolgozás elveit követő órákat terveztünk, melyek az algebra bevezetésénél, még az egyenlet előtti tanórákon támogatják az algebrai megértést. Hetedik évfolyamon az RQ1 és RQ2 kérdésekre kerestünk választ, a kutatás folyamán.

RQ1 Az értelemalkotó algebra beavatkozás során milyen hatása van a hetedik osztályos tanulókra a kontextusba helyezésnek, milyen sajátosságai vannak az általánosítás folyamatának, és milyen kihívások figyelhetők meg a folyamat során?

A problémaalapú tanítási stratégia, amelyben a tanulók megélhető kontextusba helyezett problémákkal foglalkoztak, pozitív visszajelzéseket váltott ki a tanárok és a tanulók részéről egyaránt. A tanulók aktívan részt vettek az órákon, szívesen és helyesen végeztek általánosítást és érvelést, gyakran a csoportos megbeszéléseknek köszönhetően. A tanárok minden órán támogatták a tanulási folyamatot, igazodtak a tanulók képességeihez, és segítettek a hiányosságok kompenzálásában. Az értelemalkotó algebra természetes módon segítheti az általánosítás elsajátítását, de a szakszerű tanári irányítás elengedhetetlen.

RQ2 Hogyan jellemezhető a hetedikes tanulók szimbólumhasználata, milyen lehetőségei vannak a tanárnak a tanulói szimbólumhasználat támogatásában?

A számok és változók közötti kapcsolatok felírása kihívást jelenthet a tanulóknak. A megfigyelt osztályokban a legfontosabb lépés az összefüggés természetes nyelven történő megfogalmazása volt, amit követően tanáraik könnyebben át tudták vezetni a tanulókat a szimbólumok használatára. Az algebraiban alkalmazott új jelölések eltérnek a korábbi aritmetikai tapasztalatoktól, ez nehézséget okozhat a megértésben. Bár a tanulók képesek algebrai tevékenységeket végezni mire az egyenletekre kerül a sor, az értő alkalmazásukhoz még több gyakorlásra van szükség. A hetedikesek számára a megoldás értelmezése nehéz, ha algebrai kifejezés szerepel benne, de a behelyettesítés segíthet a megértésben.

Nyolcadik évfolyamon az egyenlettel megoldható szöveges feladatok témaköréhez készítettünk kísérleti órákat, ahol leginkább a különböző reprezentációk alkalmazása volt hangsúlyos. A dizájn kutatás nyolcadikos óráihoz az RQ3 és RQ4 kutatási kérdéseket foglalmaztuk meg. Az RQ4 eredményeiben beszámolunk egy hatodik évfolyamon végzett kutatás eredményeiről is, amely kapcsolódik a tanulói problémaalkotáshoz.

RQ3 Milyen a nyolcadikos tanulók hozzáállása a grafikus reprezentációhoz, milyen grafikus ábrázolási készségekkel rendelkeznek, és mely tényezők befolyásolják az autonóm reprezentációválasztást?

A kísérleti órákon többször előfordult, hogy a tanulók az új grafikus reprezentáció helyett az ismert egyenletekkel próbálták megoldani a feladatokat, amivel sokszor nem boldogultak. A legtöbb tanuló, a maga által alkotott probléma megoldásánál is egyenletekre támaszkodott. Volt olyan tanuló, aki a grafikus megoldást választotta egy probléma megoldására, de hibás ábrát készítettek, vagy nem fejezték be a megoldást, ezért helytelen eredményt kaptak. Azon tanulók, akik mindkét módszert alkalmazták (grafikus és szimbolikus megoldás), helyes eredményt értek el, de ők mind erős matematikai alapokkal rendelkező tanulók voltak. A vizsgált csoportban a tanulók 27%-a rendelkezett fejlett grafikus készséggel, de a kutatás eredményei azt mutatják, hogy a grafikus készségek nem befolyásolták az önálló stratégia választását, amelyet más tényezők, például az önszabályozás és a tanári kontroll is alakíthatnak.

RQ4 Milyen kapcsolat figyelhető meg a tanulók által alkotott problémák szerkezeti és szemantikai helyessége, a saját problémák megoldásának eredményessége, valamint a tanulók matematikai teljesítménye között?

A hatodik évfolyamos kísérletben három tényező befolyásolta a problémafelvetés minőségét: a tanulók matematikai képességei, a probléma matematikai háttere és a kitűzés módja. A problémamegoldás sikerességét három tényező határozta meg: a tanuló saját vagy osztálytársa problémáját oldotta meg, szöveges feladatot kellett megoldaniuk (előbbiben sikeresebbek voltak a tanulók), és a problémaalkotás minősége (a jobb problémaalkotók sikeresebbek voltak a megoldásban is). A nyolcadikos tanulók által alkotott problémák elemzése megerősítette, hogy a tanár és a kutató jobban megértheti a tanulók tudását a tanulói problémaalkotásokon keresztül. Bár sok tanuló minden szempontból helyes problémát alkotott, voltak olyanok is, akik szerkezetileg helyes, de szemantikailag hibás problémát foglalmaztak meg. A szemantikai helyesség nem függött a tanulók általános matematika tudásától vagy a problémaalkotást megelőző gyakorlati feladatokban elért eredményeiktől. A problémamegoldások sikerességét a problémaalkotást megelőző tevékenységek eredményessége nem befolyásolta, azonban a tanuló matematikatudásától függött.

Összességében elmondható, hogy az aritmetikai-algebrai átmenetet a megélhető kontextusba helyezett problémák tanórán való tárgyalása támogatja. Problémamegoldás során a tanulók sokszor a korábban megismert egyenletekre támaszkodnak a grafikus reprezentációval szemben, hiába van fejlett vagy közepes grafikus reprezentációs készségük. Ezen stratégiaválasztást az önszabályozás és a tanári kontroll is befolyásolhatja. A tanulói problémaalkotásokon keresztül betekintést nyerhetünk a tanulók megértésének finom szerkezetébe.

10. Summary

After arithmetic, many students have difficulty understanding algebraic expressions because these expressions use letters instead of the familiar numbers. The main aim of this thesis is to discuss ways to facilitate the transition from arithmetic to algebra by conducting design-based research in seventh and eighth grades. The experimental lessons were designed according to the principles of meaning-making algebra, which focuses on conceptual understanding rather than algorithmic implementation of procedures. It is characterised by putting the problem in a tangible context and using different forms of representation, generalisation, reasoning, and social learning.

In the seventh grade, we designed lessons following the principles of problem-based learning to support algebraic understanding in the introduction to algebra before the equation lessons. In grade 7, we sought to answer questions RQ1 and RQ2 during the research.

RQ1 During the meaning-making algebra intervention, what is the impact of contextualisation on seventh-grade students, what are the characteristics of the generalisation process, and what challenges are observed during the process?

The problem-based teaching strategy, in which students engaged with problems in a tangible context, elicited positive feedback from both teachers and students. The pupils actively participated in the lessons, making generalisations and arguments willingly and correctly, often through group discussions. Teachers supported the learning process in all lessons, adapting to pupils' abilities and helping to compensate for gaps. Sense-making algebra is a natural way of helping students to learn generalisation, but skilled teacher guidance is essential.

RQ2 How can we describe the symbol use of seventh-grade students and what opportunities do teachers have to support students' symbol use?

Writing down relationships between numbers and variables was challenging for students. In the classes observed, the most important step was to formulate the relationship in natural language, after which their teachers could more easily guide students to use symbols. The new notations used in algebra differ from students' previous experience with arithmetic, and those differences can cause difficulties in understanding. Students can perform algebraic manipulations on equations, but they need more practice to apply them meaningfully. For seventh graders, interpreting the solution is difficult when algebraic expressions are involved, but substitution can help with understanding.

We prepared experimental lessons in the eighth grade on word problems that can be solved with equations, primarily emphasising the use of different representations.

RQ3: How do eighth-grade students relate to graphical representation, what are their graphical representation skills, and what factors influence their autonomous choice of representation?

In the experimental lessons, there were several instances of students trying to solve problems using known equations instead of the new graphical representation, which often failed. Most of the pupils also relied on equations to solve the problem they had created themselves. There were some students who chose the graphical solution to solve a problem but produced an incorrect graph or did not complete it, so they got an incorrect result. The students who used both methods (graphical and symbolic solutions) obtained correct results, but they were all students with a strong mathematical background. In the study group, 27% of the students had advanced graphical skills, but the results of the research show that graphical skills did not influence students' autonomous choice of strategy, which may be shaped by other factors such as self-regulation and teacher control.

RQ4 What relationship can be observed between the structural and semantic correctness of the problems posed by the students, the success of solving their own problems, and the students' mathematical performance?

In the sixth-grade experiment, three factors influenced the quality of problem posing: students' mathematical performance operationalized by mathematics grades, the mathematical background of the problem, and the way the problem was posed. The success of problem solving was determined by three factors: the student solved their problem or a classmate's problem; they had to solve a word problem (students were more successful when solving their own problem); and the quality of problem posing (better problem posers were also more successful at solving). Analysis of the problems created by the eighth-grade students confirmed that the teacher and researcher can better understand students' knowledge through students' problem posing. Although many students created a problem that was correct in all aspects, there were also some students who formulated a problem that was structurally correct but semantically incorrect. Semantic correctness did not depend on the students' general mathematical mathematical performance operationalized by mathematics grades or on their performance in the practice tasks preceding problem posing. The success of problem-solving was not influenced by the success of the activities preceding problem posing; it depended on the mathematical knowledge of the student.

Overall, classroom discussion of problems in a tangible context supports the transition from arithmetic to algebra. When solving problems, students often rely on previously learnt equations rather than graphical representation, even though they have advanced or intermediate graphical representation skills. Self-regulation and

teacher control can influence this choice of strategy. Through student problem posing, we can gain insights into the subtle structures of student understanding.

11. Irodalomjegyzék

- Ambrus, G. (2014). Egy nyitott, valós szituáción alapuló feladat variációi és lehetőségei az oktatásban és a didaktikai kutatásban. *Gyermeknevelés Tudományos Folyóirat*, 6(1), 55–65. <https://doi.org/10.31074/gyn201815565>
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Balassa, L., Szilas, Á., & Tomcsányi-Szabó, K. (2022). *Negyedik matematikakönyvem*. Oktatási Hivatal.
- Bánfi, G., & Korom, E. (2022). Tanulói aktivitásra alapozott oktatási módszerek alkalmazásának vizsgálata általános és középiskolai tanárok körében. *Iskolakultúra*, 32(10), 3–21.
- Báró, E. (2022). Positive changes in affective variables: Two-round action research in Hungary and Romania. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy*, 1311–1319.
- Bastable, V., & Schifter, D. (2017). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & maria L. Blanton (Szerk.), *Algebra in the Early Grades* (o. 165–184). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-8>
- Ben-Zeev, T. (1998). Rational errors and the mathematical mind. *Review of General Psychology*, 2(4), 366–383. <https://doi.org/10.1037//1089-2680.2.4.366>
- Bevan, D., & Capraro, M. M. (2021). Posing Creative Problems: A Study of Elementary Students' Mathematics Understanding. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/11109>
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 37–55. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7>
- Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (o. 103–123). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_5
- Bonwell, C. C., & Eison, J. a. (1991). Active Learning : Creating Excitement in the Classroom. *Learning*. <https://doi.org/ED340272>

- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141–178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher*, 18(1), 32–42. <https://doi.org/10.3102/0013189X018001032>
- Burkhardt, H., & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise. *Educational Researcher*, 32(9), 3–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X032009003>
- Cady, J. A., & Wells, P. J. (2016). Patterns on a Calendar. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 21(7), 198–201. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.21.7.0392>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Szerk.), *Mathematical Problem Posing* (o. 3–34). Springer.
- Carraher, D., & Schliemann, A. D. (2014). Early Algebra Teaching and Learning. In S. Lerman (Szerk.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (o. 193–196). Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54
- Chen, J. (2015). Calendar Tricks. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(7), 448. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.20.7.0448>
- Cifarelli, V. V., & Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. In *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (o. 177–194). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_8
- Csahóczi, E., Csátár, K., Kovács, C., Morvai, É., & Széplaki, G. (2021). *Matematika 7. Tankönyv* (G. Wintsche, Szerk.). Oktatási Hivatal.
- Csíkos, C. (2010). Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra*, 12, 52–60.
- Csíkos, C. (2012). *Pedagógiai kísérletek kutatómódszertana*. Gondolat Kiadó.
- Dewey, J. (1938). *Experience And Education*. Free Press.

- Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems - a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261–271. <https://doi.org/10.1007/BF00305073>
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: Development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87–101. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z>
- Fitriana, L. D., Ekawati, R., & Kovacs, Z. (2022). Perspectives on the problem-posing activity by prospective teachers: A cross-national study. *Journal on Mathematics Education*, 13(1), 149–172. <https://doi.org/10.22342/jme.v13i1.pp149-172>
- Fong, N. S., Lee, K., Yin, A. S., & Khng, F. (2006). Model method: Obstacle or bridge to learning symbolic algebra. In W. D. Bokhorst-Heng, M. D. Osborn, & K. Lee (Szerk.), *Redesigning pedagogy: Reflections of theory and praxis* (o. 227–242). Sense Publishers. https://doi.org/https://doi.org/10.1163/9789087900977_017
- Fowler, S., Cutting, C., Fiedler, S. H. D., & Leonard, S. N. (2023). Design-based research in mathematics education: trends, challenges and potential. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 635–658. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00407-5>
- Freudenthal, H. (1977). What is algebra and what has it been in history? *Archive for History of Exact Sciences*, 16(3), 189–200. <https://doi.org/10.1007/BF00328154>
- Friedlander, A., & Arcavi, A. (2017). *Tasks and competencies in the Teaching and learning algebra*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (2020). Reasoning with Algebra. *The Mathematics Teacher*, 90(6), 442–447. <https://doi.org/10.5951/mt.90.6.0442>
- Fülöp, M. (2020). *Szöveges matematikafeladatok: 3. évfolyam*. Oktatási Hivatal.
- Gagatsis, A., & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 447–454.
- Gosztonyi, K. (2016). Mathematical culture and mathematics education in Hungary in the XXth century. In B. Larvor (Szerk.), *Mathematical Cultures* (Szám August, o. 71–89). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28582-5_5

- Gosztonyi, K. (2019). History of mathematics, mathematical histories, storytelling in Hungarian mathematics education. In J. Sjuts & É. Vásárhelyi (Szerk.), *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können* (o. 137–148). <https://doi.org/10.37626/ga9783959871143.0.07>
- Gosztonyi, K. (2020). Tamás Varga's reform movement and the Hungarian Guided Discovery approach. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3). <https://doi.org/10.5485/tmcs.2020.0475>
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (2020). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115–141. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.25.2.0116>
- Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of PME 15*, 2(1989), 72–79.
- Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Szerk.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (13th, Paris, France, July 9-13, 1989), Volume 2. (pp. 45–51). International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(2), 329–336. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4>
- Hmelo-Silver, C. E. (2004). Problem-Based Learning: What and How Do Students Learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235–266. <https://doi.org/10.1023/B:EDPR.0000034022.16470.f3>
- Huang, R., Prince, M., K., & Sschmidt, T. (2014). Exploration of Patterns in a Calendar. *The Mathematics Teacher*, 108(5), 336–342.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Jupri, A., & Drijvers, P. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in Algebra. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(9), 2481–2502. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1299a>
- Kaput, J. J. (2018). 1 What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? *Algebra In The Early Grades*, 5–18. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-2>
- Keazer, L. M., & Menon, R. S. (2015). Reasoning and Sense Making Begins with the Teacher. *The Mathematics Teacher*, 109(5), 342–349. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.5.0342>

- Kelly, A. E. (2003). *Research as design*. 32(1), 3–4. <http://er.aera.net>
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades : What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. K. Lester (Szerk.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Köt. 6179, Szám 619, o. 707–762). Information Age Publishing.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up. Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Kónya, E., & Kovács, Z. (2022). Management of problem solving in classroom context. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 12(1), 81–101. <https://doi.org/https://doi.org/10.26529/cepsj.895>
- Kónya, E., & Kovács, Z. (2023). The role of procedural and conceptual understanding in problem solving. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Szerk.), *Problem Solving and Problem Posing: Perspectives and Potentials in Research and Practice : Proceedings of the 22nd ProMath conference from August 22-24, 2022 in Thessaloniki* (o. 97–111). Aristotle University of Thessaloniki.
- Kovács Csongorné, Szeredi, É., & Sztrókeyné Földvári, V. (1988). *Matematika. Általános iskola 7. [Mathematics for seventh graders]*. Tankönyvkiadó.
- Kovács, Z., Báró, E., Lócska, O., & Kónya, E. (2023). Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes. *Education Sciences*, 13(2), 151. <https://doi.org/10.3390/educsci13020151>
- Lócska, O. D., Kondé, Z., & Kovács Zoltán. (2023). Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-algebra transition: The issue of strategy choice. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*.
- Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2022). The „Sense-Making-Algebra” project for Hungarian seventh graders. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (Köt. TWG03). <https://hal.science/hal-03745145>
- Lócska, O. D. (2025). What Teachers Learn From Students’ Problem Posing in Algebra: A Self-Study With Eighth Graders. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 17, 25–43.

- Magyar Közlöny. (2020). *A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról.*
- Martin, W. G. (2009). Focus in high school mathematics: reasoning and sense making. In *The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.* The National Council of Teachers of Mathematics.
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting educational design research.* Routledge.
- Ngu, B. H., Yeung, A. S., & Tobias, S. (2014). Cognitive load in percentage change problems: Unitary, pictorial, and equation approaches to instruction. *Instructional Science*, 42(5), 685–713. <https://doi.org/10.1007/s11251-014-9309-6>
- Palatnik, A., & Koichu, B. (2017). Sense making in the context of algebraic activities. *Educational Studies in Mathematics*, 95(3), 245–262. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9744-1>
- Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child.* Orion Press.
- Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton University Press.
- Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving, (Combined Edition). In *New York, John Willey & Son.*
- Pöhler, B., & Prediger, S. (2015). Intertwining lexical and conceptual learning trajectories - A design research study on dual macro-scaffolding towards percentages. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1697–1722. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1497a>
- Prediger, S., Kuzu, T., Schüler-Meyer, A., & Wagner, J. (2019). One mind, two languages—separate conceptualisations? A case study of students’ bilingual modes for dealing with language-related conceptualisations of fractions. *Research in Mathematics Education*, 21(2), 188–207. <https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1602561>
- Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons on concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79(3), 483–500. <https://doi.org/10.1348/000709908X398106>
- Rott, B. (2020). Teachers’ Behaviors, Epistemological Beliefs, and Their Interplay in Lessons on the Topic of Problem Solving. *International Journal of Science and*

- Mathematics Education*, 18(5), 903–924. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09993-0>
- Savery, J. R., & Duffy, T. M. (1995). Problem based learning: An instructional model and its constructivist framework. *Educational Technology*, 35(1991), 31–38. <https://doi.org/47405-1006>
- Scheiner, T. (2016). New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 165–183. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9665-4>
- Schoenfeld, A. H. (2008). Early Algebra as Mathematical Sense Making. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Szerk.), *Algebra in the Early Grades* (o. 479–510). Lawrence Erlbaum Associates. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-21>
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1 & 2), 9–34.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. *Journal of Education*, 196(2), 1–38. <https://doi.org/10.1177/002205741619600202>
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 420–427.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28. <https://doi.org/10.2307/40248099>
- Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: Looking back, looking around, and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157–162. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3>
- Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1). <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x>
- Skemp, R. R. (1971). The psychology of learning mathematics. In *The Psychology of Learning Mathematics: Expanded American Edition*. Penguin Books. <https://doi.org/10.4324/9780203396391>
- Small, M. (2012). *Good Questions: Great Ways to Differentiate Mathematics Instruction*. Teachers College Press.
- Star, J. R. (2005). Procedural Knowledge Reconceptualizing. *Star*, 36(5), 404–411.

- Stoyanova, E., & Ellerton, N. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In P. Clarkson (Szerk.), *Technology in mathematics education* (o. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australia.
- Swan, M. (2014). Design Research in Mathematics Education. In S. Lerman (Szerk.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (o. 148–152). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_180
- Tóthné, S. A. (2020). *Matematika 7. tankönyv (FI-503010701/1)*. Oktatási Minisztérium.
- Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument. In *The Uses of Argument: Updated Edition*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005>
- Vygotsky, L. S. (1978). Mind and Society: The Development of Higher Psychological Processes. In *Harvard University Press*. Harvard University Press.
- Yew, E. H. J., & Goh, K. (2016). Problem-Based Learning: An Overview of its Process and Impact on Learning. In *Health Professions Education* (Köt. 2, Szám 2, o. 75–79). <https://doi.org/10.1016/j.hpe.2016.01.004>

12. A disszertáció témájában készített publikációk

- Kovács, Z., Báró, E., Lócska, O., & Kónya, E. (2023). Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes. *Education Sciences*, 13(2), 151. <https://doi.org/10.3390/educsci13020151>
- Lócska, O. D., Kondé, Z., & Kovács Zoltán. (2023). Rethinking the bridging function of graphical model method in the arithmetic-algebra transition: The issue of strategy choice. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*.
- Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2022). The „Sense-Making-Algebra” project for Hungarian seventh graders. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (Köt. TWG03). <https://hal.science/hal-03745145>
- Lócska, O. D. (2025). What Teachers Learn From Students' Problem Posing in Algebra: A Self-Study With Eighth Graders. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 17, 25–43.

13. Egyéb publikációk és előadások

- Lócska, O. D., & Kovács, Z. (2018). 14 to 18-year-old Hungarian high-school students' view of mathematicians appearing in the media - a case study. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16(2), 183–194. <https://doi.org/10.5485/tmcs.2018.0446>
- Szerk. Lócska, O., & Herendiné Kónya, E. (2024). Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2024: absztraktkötet.
- Szerk. Lócska, O., & Herendiné Kónya, E. (2025). 2025 MIDK Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások: absztraktkötet

Mellékletek

1. melléklet: Óraterv – 7.évfolyam, első kísérleti óra

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 7.x

Az óra témája: Ismerkedés az algebrával

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: A matematikához való pozitív attitűd erősítése, önálló gondolatok megfogalmazásának és a matematikai érvelésnek a támogatása. A matematikai szépségének és hasznosságának felismerése.

Készségek, képességek: A problémaérzékenység, a kreativitás képességének fejlesztése. Rész-egész megfigyelésének képessége, számolási készség alkalmazása. Matematikai szókincs megfelelő használata, érvelési képesség, általánosítás erősítése. Az önálló és páros munkavégzéshez szükséges képességek fejlesztése.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: Műveletek kifejezése algebrai jelekkel, szöveg alapján. Aritmetikai magyarázat után az algebrai bizonyítás megértése. Önálló munkavégzés, a megadott instrukciók alapján.

Az óra didaktikai feladatai: Új ismeretszerző óra, az algebrai kifejezések használata

Tantárgyi kapcsolatok: -

Felhasznált források:

- Huang, Prince and Schmidt: Exploration of patterns in a calendar. Mathematics Teacher. 108(5), 2015.
- Dr. Hajdu Sándor: Matematika 7. Gondolkodni jó! Műszaki kiadó, Budapest, 2017.
- Soós Edit: Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam, Maxim kiadó, Szeged, 2010.

Dátum: 2021.

Megfigyelési szempontok (fókuszpontok): Fókusz a naptár feladaton:

- A tanulók tevékenységét (szóbeli megszólalásait, emocionális megnyilvánulásait) minél pontosan rögzíteni.
- Okozott-e „sokkot” a betű megjelenése?

Idő	Az óra menete	Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	Megjegyzés
I. SZERVEZÉSI FELADATOK					
2' (2)	Jelentés, hiányzók beírása. Házi feladat ellenőrzése. Óraszám és cím felírása a füzetbe: Ismerkedés az algebrával	Ellenőrzés, megbeszélés	Frontális	Interaktív táblán kivetítem a házi feladatot	
II. RÁHANGOLÓDÁS, ISMÉTLÉS					
10' (12)	<u>Naptár – projekt:</u> Vegyél észre mintákat a 2021. szeptemberi/októberi naptárban. Nézd csak milyen érdekes 1, 9, 17, 25 (beszíneznél az interaktív táblán). Mi ebben az érdekes? (Várható válasz: 8 a különbség) Tanári kérdés: Vegyél észre még érdekes sorozatokat a naptárban! Pármunka. (Várható válasz: horizontális, vertikális, diagonális sorozatok. Plusz kreatív megoldások, pl. lólépés)	szemléltetés, tanári előadás munkáltatás megosztás (interaktív táblán)	Páros, frontális	Interaktív táblán kivetítem a naptárt.	Feladatlap (minden pár kap egyet): 4 aktuális havi naptár egy A4-es lapon, ahol önállóan színeznél, a szabályaik alapján. Ne felejtse el a gyerekek munkáját lefotózni/szkennelni.

	Felvetődhet a kérdés: minden hónapban igaz-e? Ezt beszéljük is meg, hogy miért. (A naptár „heti” struktúrája garantálja.) Fennmaradhat a táblán egy bal alsó sarokból a jobb felső sarokba tartó sorozat, pl. 29, 23, 17, 11, 5 Augustus 2021 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 Szeptember 2021 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 Október 2021 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 <table><thead><tr><th>Hétfő</th><th>Kedd</th><th>Szerda</th><th>Csütörtök</th><th>Péntek</th><th>Sombat</th><th>Vasárnap</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr><tr><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td><td>26</td></tr><tr><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td></td><td></td><td></td></tr></tbody></table>	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Sombat	Vasárnap			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30							
Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Sombat	Vasárnap																																									
		1	2	3	4	5																																									
6	7	8	9	10	11	12																																									
13	14	15	16	17	18	19																																									
20	21	22	23	24	25	26																																									
27	28	29	30																																												
III. ISMERETEK RENDSZEREZÉSE, KIBŐVÍTÉSE																																															
10’ (22)	Számkitalálós bűvésztükk: Válassz ki egy számot a naptárból úgy, hogy legyen jobb felső és bal alsó szomszédja. (Egy példa és egy ellenpélda bemutatása a táblán) Írd le a számot a füzetbe! Add össze fejben a számot a jobb felső és bal alsó szomszédjával, majd írd le az összeget a füzetedbe! Mond ki az összeget, kitalálom a gondolt számot! 1. A krétás táblára írja a tanár (egymás alá) mit mond a	Szemléltetés, megbeszélés	Frontális, egyéni	Krétás táblán a táblázat, a naptár kivetítve marad az interaktív táblán																																											

	gyerek, mit válaszolt ő, és 3 után <i>más is lehet a bűvész</i>. Ha nem 3-mal osztható a szám, akkor gondold újra, valahol tévedtél. (4-5 tanuló számát kitalálni.) Pl.: <table border="1"> <tr> <td>Összeg</td><td>27</td><td>39</td><td>75</td><td>24</td><td></td></tr> <tr> <td>Szám</td><td>9</td><td>13</td><td>25</td><td>8</td><td></td></tr> </table> 2. Hogyan találta ki a bűvész a számot? (Ismerjék fel a szabályt!)	Összeg	27	39	75	24		Szám	9	13	25	8					
Összeg	27	39	75	24													
Szám	9	13	25	8													
10' (32)	3. Ki tudná megmagyarázni? (“Tudni miért!”) -> pl elmondja a sajátját 6-tal nagyobb, illetve kisebb a szám (Ha nincs önálló javaslat: konkrét számra. Pl. 23-ra 17 (6-tal kisebb, miért is: visszautalás a sorozatra, akár ez a példa fenn is maradhat, olyan szám), 29 (miért is: utalás a sorozatra)) <i>Aritmetikai</i> magyarázat: $17+23+29 = (23-6)+23+(23+6) = 23-6+23+23+6 = 3 \cdot 23$ 4. <i>Algebrai</i> magyarázat: Általánosan, ha nem 23-ból, hanem n-ből indulunk ki: Most felírjuk betűvel ugyanezt $(n-6)+n+(n+6) = n-6+n+n+6 = n+n+n = 3 \cdot n$: az összeget mindig 3-mal kell elosztani, hogy megkapjam a számot. 5. A táblázatba is beírjuk: $3n$, n <table border="1"> <tr> <td>Összeg</td><td>27</td><td>39</td><td>75</td><td>24</td><td>$3 \cdot n$</td></tr> </table>	Összeg	27	39	75	24	$3 \cdot n$	Problémamegoldás	Frontális	Az interaktív táblára, egymás alá kerül az aritmetikai és az algebrai magyarázat, közben a naptár is látható, lekicsinyítve							
Összeg	27	39	75	24	$3 \cdot n$												

	<table><tr><td>Szám</td><td>9</td><td>13</td><td>25</td><td>8</td><td>n</td></tr></table>	Szám	9	13	25	8	n				
Szám	9	13	25	8	n						
6. Próba: 33 az összeg, mire gondoltam?											
IV. ISMERETEK ALKALMAZÁSA											
8' (40)	Készíts saját bűvésztükköt! (Az előbbi bűvésztükk mintájára találj ki saját bűvésztükköt, amivel elkápráztatod a többieket! Meg tudod magyarázni a trükköt?)	Munkáltatás	Pármunka, majd osztály-megbeszélés		A tanár figyeli a munkát, egy sikeres pár fogja bemutatni az osztálynak a bűvésztükköt.						
V. ÉRTÉKELÉS											
5' (45)	Szóbeli értékelés, dicséret, kilépőkártya. Reflexió: Hogyan tudnád befejezni a mondatokat? Válassza egy mondatot és azt fejezd be a kilépő kártyádon. Ha kimész az osztályból, tedd a tanári asztalra. - Az órán az tetszett a legjobban, amikor.... - Nem tetszett az a rész, amikor... - Érdekes volt, amikor... - A mai órán azt tanultam, hogy...	Értékelés	Frontális	A6 méretű lap a gyerekeknek, rajta a megkezdett mondatok, hely a befejezésnek.	A lehetőségeket kivetítjük.						

2.melléklet: Utóteszt a 7.évfolyam, első kísérleti órája után, az első kutatási ciklusban

1. Nándi kiválasztott egy számot a naptárban, majd összeadta a jobb és bal szomszédját. Az összeget megfelelően pontosan a kiválasztott számot kapta. Szerinted ez mindig igaz, ha olyan számot választ, aminek van jobb és bal szomszédja is? **Indokold!**
2. Csenge egy olyan számot választott a naptárból, amelynek van alsó és felső szomszédja is. Összeadta a két szomszédot, majd megfelezte az összeget. Mit tapasztalt? Ez mindig igaz lesz, ha olyan számot választ, aminek van alsó és felső szomszédja is? **Indokold!**

MÁRCIUS 2021						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

MÁRCIUS 2021						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

Szorgalmi feladat:

Lacinak volt egy olyan trükkje, hogy ha valaki elárulta három, V alakban megadott szám összegét a naptárban, akkor kitalálta a középső számot. (Például, ha valaki megmondta, hogy az összeg 22, akkor ő tudta, hogy a középső szám a 12.) **De sajnos elfelejtette hogyan működött a trükk. Segíts neki!**

MÁRCIUS 2021						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

3.melléklet: Óraterv – 7.évfolyam, második kísérleti óra

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 7.x

Az óra témája: Gyakorlás

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: Eltérő nézőpontok elfogadása, saját gondolatok megfogalmazása. A matematika, mint összefüggő rendszer szépségeinek megismerése. A matematika mint kulturális örökség bemutatása.

Készségek, képességek: Számolási készségek fejlesztése. Mintafelismerő képesség, érvelési készségek fejlesztése. Egyéni és pármunkához szükséges készségek erősítése. Szaknyelvi kommunikáció használata. Elvonatkoztatás képességének fejlesztése.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: Alapműveletek elvégzése a racionális számok körében. Egynemű és különmemű algebrai kifejezések magabiztos felismerése, egynemű kifejezések összevonása. Helyettesítési érték pontos kiszámítása.

Az óra didaktikai feladatai: Meglévő ismeretek gyakorlása.

Tantárgyi kapcsolatok: történelem

Felhasznált források:

- Dr. Hajdu Sándor: Matematika 7. Gondolkodni jó! Műszaki kiadó, Budapest, 2017.
- Soós Edit: Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam, Maxim kiadó, Szeged, 2010.

Dátum: 2021.

Megfigyelési szempontok (fókuszpontok):

- Hogyan magyarázzák az eredményben az 1 számlálót a tanulók?
- Megjelenik-e az algebrai magyarázat igénye?
- Könnyen megy-e az egymást követő természetes számok felírásánál, hogy n és $n+1$, vagy esetleg két külön változót vezetnének be? (Észreveszik-e, ki tudják-e fejteni a kapcsolatot a két, egymás követő szám között?)

Idő	Az óra menete	Módszerek	Munkaforma	Eszközök	Megjegyzés
	Szervezési feladatok A tanulók két csoportra bontása már itt megtörténik (a tanár által preferált módszerrel), de a csoportokat nem kell elválasztani az ülésrendben. A csoportok neve lehet más is.				
5' (5)	Házi feladat ellenőrzés				
5' (10)	Ráhangelés				
	A Rhind papirusz kivetítése Szerintetek honnan való, és mikor keletkezett a kivetített mű? Egyiptom, Kr. E. 2000 környékén. Anyaga papirusz. Az egyiptomiak a papiruszt használták az írás rögzítésére. A papirusz növényi rostokból, elsősorban papiruszsásból készült. Az egyiptomiak nagyon sok matematika ismerettel rendelkeznek, és különösen nagy becsben tartották azokat az egynél kisebb törteteket, amelynek számlálója 1. Mondjatok ilyen törteteket! (Példák.) Az ilyen törteteket ma egyiptomi törteknek, vagy egységtörtnek is nevezzük. Az egyiptomiak az egységtörtekkel nagyon ügyesen tudtak számolni, egy ilyen számolási trükköt most Ti is felfedezhettek.	Ötletbörze, tanári előadás.	csoport	vetítő	
	Alkalmazás				

5' (15)	Párhuzamos tevékenység két csoportban: Mézeskalács csoport (átlag alatti képességű tanulók) Végezd el a következő műveleteket! $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{7}{42} - \frac{6}{42} = \frac{1}{42}$ $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{11}{110} - \frac{10}{110} = \frac{11-10}{110} = \frac{1}{110}$ Cukorpálca csoport (átlag feletti képességű tanulók) 2. Írj le két, egymást követő, egynél nagyobb természetes számot, majd írd fel a számok reciprokát! Végül, a nagyobb törtből vond ki az kisebbet, és számold ki az eredményt. Végezd el ezt a tevékenységet háromszor!	Feladat-megoldás, differenciálás (Az átlag feletti tanulók feladata nyitott, a reciprokot és az össze-hasonlítást önállóan végzik)	Önálló munka	Interaktív tábla, füzet	A táblán mind a két csoportnak megjelenik a feladata, egyértelműen elválasztva.  
6' (21)	Hasonlítsátok össze a pártársatokkal a megoldásokat! Mit tapasztaltok? Mit fedeztetek fel? (3 perc pármunka, 3 perc megbeszélés) Várható észrevételek (az ötletbörzén elhangzott javaslatok felkerülhetnek a táblára) - a végeredmény számlálója mindig egy - a végeredmény nevezője a nevezők szorzata	Párbeszéd, irányító kérdések	Pármunkában megbeszélük, majd frontálisan megbeszéljük az észrevételeiket	Interaktív tábla, füzet	Az egymás mellett ülő gyerekek nem fontos, hogy azonos csoportba tartozzanak. Felhívni a figyelmet, hogy ne felejtsek el bejelölni (karikázni, aláhúzni, kiemelni) az észrevételeket a

					füzetben. Írják le néhány szóban is.
5' (26)	Vajon ezek mindig teljesülnek, ha a feladatban 1-esek a számlálók, és a nevezők egymás utáni természetes számok? Tegyünk egy újabb próbát! <i>A tanulók tesznek néhány javaslatot, közösen számolunk. Próbáld meg megmagyarázni a felfedezést!</i> Várható válasz a tanuló természetes nyelven: - a közös nevező a nevezők szorzata, a bővítés utáni számlálók pedig az eredeti nevezők, amely közül a kibővítendő eggyel nagyobb, mint a kivonandó.	Kérdezés, megbeszélés	Csoport-megbeszélés		Hangozzon el a magyarázat! Nagyon figyelj!
5' (31)	Hogyan tudnánk általánosan felírni a tapasztalatot? (Betűk használatával. Csak akkor áruljuk el, ha nincs erre utaló javaslat.) Lépésenként haladunk, várjuk meg, míg a gyerekek javasolják a betűket, főleg a második számot. (Kifejezik-e a számok között fennálló relációt, vagy új betűt javasolnak?) - két egymást követő természetes szám: n és $n+1$ - ezek reciprokai: $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{n+1}$ - összehasonlítás: $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$	Tanári közlés, irányító kérdések, kérdve kifejtő módszer	Csoport-megbeszélés		Lehetőleg a tanár csak az írnok szerepét töltsse be, a tanulók mondják.

	- kivonás: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n \cdot (n+1)} - \frac{n}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1-n}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$				
10' (41)	Az előbbi megfigyelésünket úgy is felírhatjuk, hogy $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ Az egyiptomiak tetszőleges 0 és egy közé eső törtet fel tudtak írni különböző egységtörtek összegeként. Neked menni fog? Alkalmazd az $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ összefüggést! A második feladathoz kérhetsz segítőkétyát, ha nem megy önállóan. (Önálló munka kb. 6 perc) 1. Feladat: $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \text{---} + \text{---}$ 2. Feladat: $\frac{5}{6} =$ 3. Feladat	Probléma- megoldás	Önálló munka majd csoport- megbeszélés	Segítő kétyák	Mindhárom feladatot egyszerre kapják meg a tanulók, az első feladanál a segítséggel együtt. Az első feladat csak a képletbe történő behelyettesítést kívánja meg. A második feladat már stratégiaalkotást kíván. Ha nem megy, akkor az első lépést áruljuk el. (Célszerű lenne a segítőkétyás megoldás, annak, aki kéri.) A 3. feladatnál már feltehetően az 1/2-del való próbálkozást önállóan is megteszik.

	$\frac{9}{10} =$ Megoldások. (Lehetőség szerint ellenőrizzünk, akár számológéppel is az interaktív tábla segítségével.) 1. Feladat: $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \text{---} + \text{---}$ Megoldás: $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$ 2. Feladat $\frac{5}{6} =$ Segítőkártya: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \text{---}$ Megoldás: $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 3. Feladat $\frac{9}{10} =$ Megoldás:				
--	--	--	--	--	--

	$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$				
	Értékelés				
4' (45)	Milyennek érezted ezt az órát? Szavak láthatóak a táblán össze-vissza, a tanulók válasszanak ki egyet, kettőt vagy akár hármat, majd írják le a füzetükbe. De lehet önálló szó is. Néhány véleményt meghallgatunk, indoklás is lehet. színes, szürke, csendes, zajos, izgi, unalmas, értettem, elvesztem Ügyesen dolgozó tanulók kiemelése szóban, az osztályban szokásos jutalmazás	Értékelés, párbeszéd	Egyéni, frontális	Interaktív tábla, füzet	Füzetfotók az óra után!

4.melléklet: Óraterv – 7.évfolyam, harmadik kísérleti óra, kutatás első ciklusa

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 7.x

Az óra témája: Gyakorlás

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: a tanuló ismerje meg a matematikát mint az általánosítás eszközét, érdekes feladattal szerezzen pozitív élményt.

Készségek, képességek: a számolási készség fejlesztése: helyiérték táblázat használata; a matematizálás képességének fejlesztése: betűk használata az általánosítás eszközeként; indoklás-érvelés képességének fejlesztése: a tanuló képes legyen numerikus tapasztalatait megmagyarázni. A szimbolikus-formális nyelv használata: egyszerű algebrai átalakítás végzése.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: A numerikus tapasztalat alapján minta felismerését minden tanulótól elvárjuk. A szimbólumok önálló használatát a jobb képességű tanulóktól várjuk el, a gyengébb képességű tanulóknál az elérendő cél a tanár magyarázatának követése.

Az óra didaktikai feladatai: Meglévő ismeretek gyakorlása.

Tantárgyi kapcsolatok:

Felhasznált források:

- Dr. Hajdu Sándor: Matematika 7. Gondolkodni jó! Műszaki kiadó, Budapest, 2017.
- Soós Edit: Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam, Maxim kiadó, Szeged, 2010.

Dátum: 2021.

Megfigyelési szempontok (fókuszpontok):

- Megjelenik-e az algebrai magyarázat igénye?

Idő	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia	Megjegyzések
-----	---------------	-----------------------------	--------------

		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
I. SZERVEZÉSI FELADATOK					
2' (2)	Jelentés, hiányzók bejegyzése.		Frontális		
II. RÁHANGOLÓDÁS, ISMÉTLÉS					
5' (7)	Házi feladat ellenőrzése, megbeszélése	Ellenőrzés, megbeszélés	Frontális	Interaktív tábla	
2' (9)	Ismétlő kérdések az eddig, algebra témakörben tanultakról. Pl.: Mit jelent az összevonás? Hogyan szorzunk egytagú algebrai kifejezést egytagú algebrai kifejezéssel?	Kérdezés	Frontális		
III. ISMERETEK ALKALMAZÁSA					
1' (10)	Óraszám és cím felírása: Gyakorlás		Frontális	Interaktív tábla, füzet	
3' (13)	Az instrukciók megjelennek a kivetítőn. - Írj fel egy kétjegyű természetes számot. (A két számjegynek különböznie kell egymástól!) - Cseréld meg a számjegyeket, majd ezt a számot is írd le, az előző mellé. - Vond ki a nagyobb számból a kisebbet! - Végezd el ugyanezt még háromszor, mindig különböző számokat választva.	Munkáltatás, strukturálás	Egyéni	Interaktív tábla, füzet	Közben a differenciáláshoz tartozó feladatlapok kiosztása. A csoport jele: 

					B csoport jele: 						
2' (15)	- Dolgozz a padtársaddal közösen! Hasonlítsátok össze a különbségeket, amiket kaptatok! Mit tapasztaltok? Írjátok le!	Megbeszélés	Pármunka	Interaktív tábla, füzet							
3' (18)	Frontális megbeszélés. Várt megállapítás: A különbség mindig 9 többszöröse. A különbség 9 és a számjegyek különbségének szorzata. Miért? – Ötletek megbeszélése.	Kérdezés, megbeszélés	Frontális	Interaktív tábla	Néhány példa kivetítve a táblán.						
5' (23)	Differenciált munka, az algebrai magyarázathoz, feladatlapon. A csoport (kevésbé erős tanulók) 1. Melyik számot írtam a helyiérték-táblázatba? Írd fel helyiérték szerinti összegalakban! <table border="1" data-bbox="401 861 629 968"><tr><td>t</td><td>e</td></tr><tr><td>8</td><td>a</td></tr></table> $8 \cdot 10 + a \cdot 1 = 8 \cdot 10 + a$ 2. Írd be a helyiérték-táblázatba a számjegyek felcserélésével kapott számot! <table border="1" data-bbox="401 1090 629 1141"><tr><td>t</td><td>e</td></tr></table>	t	e	8	a	t	e	Munkáltatás	Egyéni	Interaktív tábla, feladatlapok	Várható kérdés: Melyik szám a nagyobb? Hiszen „a” bármennyi lehet...
t	e										
8	a										
t	e										

	<table><tr><td>a</td><td>8</td></tr></table>	a	8									
a	8											
3. Melyik szám ez? Írd fel helyiérték szerinti összegalakban! $a \cdot 10 + 8 \cdot 1 = 10a + 8$ 4. Az első számból vond ki a másodikat! Írd fel a kivonást! $8 \cdot 10 + a - (10a + 8)$ B csoport (erősebb tanulók) 1. Melyik számot írtam a helyiérték-táblázatba? Írd fel helyiérték szerinti összegalakban! <table><tr><td>t</td><td>e</td></tr><tr><td>b</td><td>a</td></tr></table> $b \cdot 10 + a \cdot 1 = 10b + a$ 2.Írd be a helyiérték-táblázatba a számjegyek felcserélésével kapott számot! <table><tr><td>t</td><td>e</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td></tr></table> 3. Melyik szám ez? Írd fel helyiérték szerinti összegalakban! $a \cdot 10 + b \cdot 1 = 10a + b$ 4. Az első számból vond ki a másodikat! Írd fel a kivonást! $10b + a - (10a + b)$					t	e	b	a	t	e	a	b
t	e											
b	a											
t	e											
a	b											

5' (28)	Frontális ellenőrzés, megbeszélés. A megbeszélés vegyesen zajlik, mind a két csoport figyel, mindenkinek tudni kell válaszolni.	Kérdezés, megbeszélés, ellenőrzés	Frontális	Interaktív tábla, feladatlapok	
2' (30)	Zárójelek felbontása, összevonás A csoport: $8 \cdot 10 + a - (10a + 8) = 80 + a - 10a - 8 = 72 - 9a$ B csoport: $10b + a - (10a + b) = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a$	Kérdezés	Frontális	Interaktív tábla, feladatlapok	
1' (31)	Hasonlítsuk össze a két csoport megoldását! Ha a két megoldás megegyezik, akkor mennyi lehet a „b” az A csoportnál? Várható válasz: Mivel $9 \cdot b = 72$, ezért $b = 8$. Írjuk fel úgy az A csoport megoldását, hogy a kisebbítendő is egy szorzat legyen, akár a B csoportnál! Várható válasz: $72 - 9a = 9 \cdot 8 - 9a$	Kérdezés, magyarázat	Frontális	Interaktív tábla, feladatlapok	
2' (33)	Kiemelés. Mit veszünk észre mind a két csoportnál? Milyen szorzótényezőt látunk mindkét sorban? Várható válasz: 9-est látunk. Kiemelés a téglalap kerületének példája nyomán ($2a+2b = 2(a+b)$) A csoport: $9 \cdot 8 - 9a = 9 \cdot (8 - a)$	Kérdezés, szemléltetés, magyarázat	Frontális	Interaktív tábla, feladatlapok	A kiemelést még nem tanulták, így tanári rávezetés szükséges.

	B csoport: $9b - 9a = 9 \cdot (b - a)$				
2' (35)	Milyen tapasztalatokat szűrhetünk le ez alapján? Várható válaszok: - A különbség mindig osztható 9-cel. - A két szám különbsége a 9, és a két számjegy különbségének szorzata.	Kérdezés, megbeszélés	Frontális		
2. ÉRTÉKELÉS					
4' (39)	Exit card: 1. Hogy éreztet magadat az órán? _____ 2. Melyik állítás igaz rád a leginkább? a) Mindent értettem a mai órán. b) A legtöbb dolgot értettem a mai órán. c) Sok dolgot nem értettem a mai órán. d) Semmit nem értettem a mai órán. 3. Üzenet Orsi néninek: _____	Reflexió	Egyéni	Exit card-ok	A kitöltés név nélkül történik.
3. HÁZI FELADAT					
1' (40)	Algebrai manipulációkat gyakorló feladat a feladatgyűjteményből.		Frontális		

5.melléklet: Óraterv – 7.évfolyam, harmadik kísérleti óra, kutatás második ciklusa

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 7.x

Az óra témája: Gyakorlás

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: a tanuló ismerje meg a matematikát mint az általánosítás eszközét, érdekes feladattal szerezzen pozitív élményt.

Készségek, képességek: a számolási készség fejlesztése: helyiérték táblázat használata; a matematizálás képességének fejlesztése: betűk használata az általánosítás eszközeként; indoklás-érvelés képességének fejlesztése: a tanuló képes legyen numerikus tapasztalatait megmagyarázni. A szimbolikus-formális nyelv használata: egyszerű algebrai átalakítás végzése.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: A numerikus tapasztalat alapján minta felismerését minden tanulótól elvárjuk. A szimbólumok önálló használatát a jobb képességű tanulóktól várjuk el, a gyengébb képességű tanulóknál az elérendő cél a tanár magyarázatának követése.

Az óra didaktikai feladatai: Meglévő ismeretek gyakorlása.

Tantárgyi kapcsolatok:

Felhasznált források:

- Dr. Hajdu Sándor: Matematika 7. Gondolkodni jó! Műszaki kiadó, Budapest, 2017.
- Soós Edit: Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam, Maxim kiadó, Szeged, 2010.

Dátum: 2021.

Megfigyelési szempontok (fókuszpontok):

- Megjelenik-e az algebrai magyarázat igénye?

Idő	Az óra menete	Módszerek	Munkaforma	Eszközök	Megjegyzések
-----	---------------	-----------	------------	----------	--------------

5' (5)	Óraszervezés, házi feladatok ellenőrzése	megbeszélés	csoport																										
5' (10)	A helyiértéktáblázat ismételése. Feladatlap, 1. feladat Az első sort közösen oldjuk meg, a következő négy feladatot a tanulók önállóan határozzák meg a füzetben. Ellenőrzés. (Akinnek mind a négy jó, az osztályban szokásos „jutalmat” kapja.) A megbeszéléskor a tanár rákérdez arra, hogy mennyi a harmadik szám értéke, ha $x = 7$, a negyedik szám értéke, ha $a = 2, b = 5$, az ötödik szám értéke, ha $u = 1$. <table><tr><td>sz</td><td>t</td><td>e</td><td>összegalak</td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>8</td><td>$10 \cdot 7 + 8$</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>$100 + 10 \cdot 2 + 2$</td></tr><tr><td></td><td>x</td><td>7</td><td>$10 \cdot x + 7$</td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>$10 \cdot a + b$</td></tr><tr><td>u</td><td>5</td><td>5</td><td>$100 \cdot u + 10 \cdot 5 + 5$</td></tr></table>	sz	t	e	összegalak		7	8	$10 \cdot 7 + 8$	1	2	2	$100 + 10 \cdot 2 + 2$		x	7	$10 \cdot x + 7$		a	b	$10 \cdot a + b$	u	5	5	$100 \cdot u + 10 \cdot 5 + 5$	feladatmegoldás	egyéni	Feladatlap	A feladatlapba a javításokat javító színnel vezessék át.
sz	t	e	összegalak																										
	7	8	$10 \cdot 7 + 8$																										
1	2	2	$100 + 10 \cdot 2 + 2$																										
	x	7	$10 \cdot x + 7$																										
	a	b	$10 \cdot a + b$																										
u	5	5	$100 \cdot u + 10 \cdot 5 + 5$																										
7' (17)	Feladatlap 2. feladat Az instrukciók megjelennek a kivetítőn. - Írj fel egy kétjegyű természetes számot. (A két számjegynek különböznie kell egymástól!)	Feladatmegoldás mintakeresés	Egyéni, páros	Interaktív tábla és feladatlap																									

	- Cseréld meg a számjegyeket, majd ezt a számot is írd le, az előző mellé. - Vond ki a nagyobb számból a kisebbet! - Végezd el ugyanezt még háromszor, mindig különböző számokat választva. Egy példát közösen megcsinálnak, pl. 89. Ezután mindenki egyénileg dolgozik. Pármunkában ellenőriznek és megbeszélik a tapasztalatokat. Írják be a tapasztalatokat a feladatlapba. <table><tr><th>Szám</th><th>csere</th><th>különbség</th></tr><tr><td>89</td><td>98</td><td>98-89=9</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Szám	csere	különbség	89	98	98-89=9													
Szám	csere	különbség																		
89	98	98-89=9																		
3' (20)	A tapasztalatok megbeszélése. Várt megállapítás: A különbség mindig 9 többszöröse. A különbség 9 és a számjegyek különbségének szorzata. Ha a második észrevétel nem kerül elő, akkor a tanár rákérdez. (Pl. Hogyan tudnád pontosan megadni, hogy a különbség hányszorosa kilencnek?) Mi lehet a jelenség magyarázata? – Ötletek megbeszélése.	megbeszélés	csoport	Interaktív tábla	Néhány példa kivetítve a táblán.															

	A megbeszélést tereljük abba az irányba, hogy betűkkel az összes tapasztalatot egyszerre megbeszélhetjük.																												
3' (23)	Feladatlap 3. feladat. Legyen a nagyobb szám tízes helyiértékű jegye „a”, az egyesek helyén pedig „b” áll. Töltsd ki a feladatlapot!	problémamegoldás	egyéni	feladatlap	Valószínűleg csak a jobb képességű gyerekek tudják megoldani.																								
7' (30)	A harmadik feladat megbeszélése (a>b) <table border="1"><thead><tr><th colspan="4">szám</th><th colspan="4">a számjegyeket felcseréljük</th></tr></thead><tbody><tr><td>sz</td><td>t</td><td>e</td><td>összegalak</td><td>sz</td><td>t</td><td>e</td><td>összegalak</td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>b</td><td>10a + b</td><td></td><td>b</td><td>a</td><td>10b + a</td></tr></tbody></table> $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$ Az eredmény alapján magyarázzák meg a tapasztalatot. Végeznek konkrét behelyettesítést is.	szám				a számjegyeket felcseréljük				sz	t	e	összegalak	sz	t	e	összegalak		a	b	10a + b		b	a	10b + a	Kérdve kifejtő	csoport	tábla	
szám				a számjegyeket felcseréljük																									
sz	t	e	összegalak	sz	t	e	összegalak																						
	a	b	10a + b		b	a	10b + a																						

10' (40)	További gyakorló feladat a tanmenetnek megfelelően, vagy az előbbi probléma felderítése, ha a számot és a felcserélt számot nem kivonjuk, hanem összeadjuk. $(10a + b) + (10b + a) = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$ A numerikus tapasztalatszerzésre ebben az esetben is kerüljön sor. (A munkát végezhetik a feladatlapon.)				
4' (44)	Exit card: 1. Hogy érezted magadat az órán? _____ 2. Melyik állítás igaz rád a leginkább? a) Mindent értettem a mai órán. b) A legtöbb dolgot értettem a mai órán. c) Sok dolgot nem értettem a mai órán. d) Semmit nem értettem a mai órán. 3. Üzenet Kriszta néninek: _____ _____	Reflexió	Egyéni	Exit card-ok	A kitöltés név nélkül történik.
1' (45)	Értékelés		Frontális		

6.melléklet: Óraterv – 7.évfolyam, negyedik kísérleti óra

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 7.x

Az óra témája: Gyakorlás – 5-re végződő számok négyzete

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: A matematika iránti pozitív attitűd erősítése érdekes feladattal.

Készségek, képességek: Elvonatkoztatás képességének fejlesztése, algebrai gondolkodás megalapozása. Mintafelismerő és érvelési képesség fejlesztése, kritikai gondolkodás elősegítése.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: Algebrai kifejezések magabiztos használata: egy szám és a rákövetkező természetes szám kifejezése pl.: x és $x+1$. Többtagú algebrai kifejezések szorzása többtagú algebrai kifejezéssel.

Az óra didaktikai feladatai: Meglévő ismeretek gyakorlása.

Tantárgyi kapcsolatok: Technika és életvitel.

Felhasznált források:

- Kovács Csongorné, Sz. Földvári Vera, Szeredi Éva: Matematika 7., Tankönyvkiadó, Budapest, 1980, 29-30-31. oldal
- Dr. Hajdu Sándor: Matematika 7. Gondolkodni jó! Műszaki kiadó, Budapest, 2017.
- Soós Edit: Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam, Maxim kiadó, Szeged, 2010.

Dátum: 2021.

Megfigyelési szempontok (fókuszpontok):

- Megjelenik-e az algebrai magyarázat igénye?
- A szabálygépénél **hogyan jutnak el az „ $a(a+1)$ ” alakhoz?** Milyen ötletek merülnek fel közben?
- Sikerül-e megérteniük, hogy a $10a+5$ egy szám, helyi érték szerinti összegalakban?
- Megértik a trükk működését az óra végére, vagy homályos marad?

Idő	Az óra menete	Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	Megjegyzések												
5'	Szervezési feladatok, házi feladat ellenőrzés		csoport														
5' (10)	Verseny a számológéppel. Egy tanuló kijön a táblához, ahol meg van nyitva a számológép. Egy másik tanuló mond egy kétjegyű, 5-re végződő természetes számot. A feladat az, hogy a tanuló a számológéppel számolja ki, amilyen gyorsan csak tudja, a kétjegyű szám négyzetét. Ugyanígy ez a feladata a tanárnak is, de a tanár fejben számol. Pl: $35^2 = 1225$. Ezt 5 db kétjegyű számmal is elvégzik, minden számnál más tanuló van a táblánál (más versenyez). A tapasztalatokat közben lejegyzik. Pl. <table border="1"> <tr> <td>szám</td><td>35</td><td>65</td><td>25</td><td>95</td><td>42</td></tr> <tr> <td>négyzete</td><td>1225</td><td>4225</td><td>625</td><td>9025</td><td>2025</td></tr> </table> Ha valaki jelentkezik, hogy megpróbálja a fejben számolást, akkor adjunk rá lehetőséget.	szám	35	65	25	95	42	négyzete	1225	4225	625	9025	2025	Játék	egy-egy tanuló a táblánál	Interaktív tábla, krétás tábla	
szám	35	65	25	95	42												
négyzete	1225	4225	625	9025	2025												
2' (12)	A tanulók leírják a táblán lévő számokat, majd megbeszéljük az észrevételeiket. (Keressük a trükk lényegét.) Várható észrevétel: A négyzet mindig 25-re végződik Hogyan kapjuk a 25 előtt álló számot? A tízesek helyén álló számjegyet eggyel nagyobb számjeggyel szorozzuk.	Kérdezés, megbeszélés	csoport	Interaktív tábla, füzet													

5' (17)	Magyarázzuk meg a szabályt, miért működik a trükk? Hogyan tudnál általánosan felírni egy ötre végződő kétjegyű számot? Ötlebörze: $(10a+5)$. Készítsünk helyiérték-táblázatot <table><tr><td>sz</td><td>t</td><td>E</td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>5</td></tr></table> Írjuk fel a számot helyiérték szerinti összegalakban! $10a + 5$ Próba behelyettesítés: ha $a=2$, akkor $10 \cdot 2 + 5 = 25$ Ezt a számot kell négyzetre emelni, azaz megszorozni saját magával.	sz	t	E		a	5	Ötlebörze, Kérdve-kifejtő	csoport	Interaktív tábla, füzet				
sz	t	E												
	a	5												
5' (22)	$(10a + 5)^2 = (10a + 5) \cdot (10a + 5)$ A négyzetre emelés az osztály gyakorlatának megfelelően történjen. Ha biztosan tudják a „minden tagot szorzunk minden taggal” szabályt, akkor algebrailag. Ha a területmodell alkalmazásában járatosak, akkor azt is alkalmazhatjuk. Területmodellel: <table><tr><td>10a</td><td>100a²</td><td>50a</td></tr><tr><td>5</td><td>50a</td><td>25</td></tr><tr><td></td><td>10a</td><td>5</td></tr></table>	10a	100a ²	50a	5	50a	25		10a	5	Magyarázat, szemléltetés	csoport	Interaktív tábla, krétás tábla, füzet	
10a	100a ²	50a												
5	50a	25												
	10a	5												

	$100a^2 + 50a + 50a + 25 = 100a^2 + 100a + 25$ Próba behelyettesítés: Ha $a = 2$, akkor $100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 2 + 25 = 400 + 200 + 25 = 625$				
3' (25)	Végezzünk kiemelést! Az első két tagból kiemelhető $100a$. $100a^2 + 100a = 100a(a + 1)$ Vagyis a négyzetszám $100 \cdot a \cdot (a + 1) + 25$ Próba behelyettesítés: Ha $a = 2$, akkor $100 \cdot 2 \cdot 3 + 25 = 600 + 25 = 625$	Kérdezés, megbeszélés	csoport	Interaktív tábla, füzet	
5' (30)	Visszacsatolás az óra elejére: Mi történik, ha háromjegyű, 5-re végződő természetes számokat nézünk? A számot ekkor is felírhatjuk $10a+5$ alakban, csak most az a kétjegyű. Pl. $325 = 32 \cdot 10 + 5$. A trükk ekkor is működik, csak nehezebb fejben kiszámolni a 25 előtt álló számot. A 325 esetében a 25 előtt $32 \cdot 33 = 1056$ fog állni, azaz $325^2 = 105625$ De néhány esetben könnyű. Pl. ki tudja fejben meghatározni? (A vállalkozó tanuló, ha helyesen kiszámolta fejben a négyzetet, akkor kaphat piros pontot. A társak írásban ellenőrzik.) $105^2 = 11025$ $205^2 = 42025$ $305^2 = 93025$	Kérdezés, megbeszélés	csoport	füzet, interaktív tábla, krétás tábla	

	$115^2 = 13225$				
10' (40)	Gyakorló feladat a tanmenetnek megfelelően.				
4' (44)	Tanulói reflexió írásban, üzenőkártyával: - Mi volt a legjobb az órán? - Mi volt a legrosszabb?	Kérdezés, reflexió	egyéni	füzet, interaktív tábla	
1' (45)	Tanári értékelés.				

7.melléklet: Óraterv – 8.évfolyam, első kísérleti óra

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 8.x

Az óra témája: Szöveges feladatok egyenlettel való megoldása

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. Más nézőpont elfogadása.

Készségek, képességek: A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése. Algebrai módszerek és leírások használata.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: A szöveges feladatokban előforduló adatok és összefüggések megfelelő értelmezése, ezek alapján grafikus reprezentáció, „letöltési sávok” elkészítése. Egyenlet felírása és megoldása a grafikai reprezentáció után, hasonló típusfeladatok esetén.

Az óra didaktikai feladatai: Új ismeret feldolgozása, alkalmazás

Tantárgyi kapcsolatok:

- Biológia

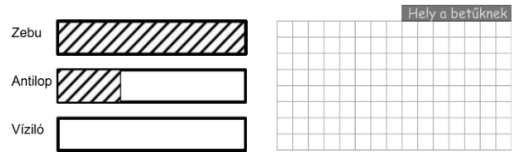
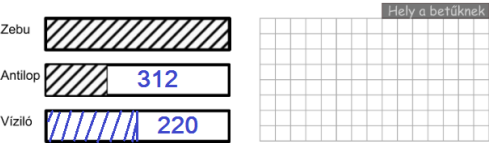
Felhasznált források:

- Nyíregyházi Állatpark honlapján található információk
- Soós Edit, Maróti Lászlóné (2017): Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 8. évfolyam, Maxim Kiadó, Szeged

Dátum: 2022.

Idő	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia	Megjegyzések
-----	---------------	-----------------------------	--------------

		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
I. SZERVEZÉSI FELADATOK					
3' (3)	Jelentés, hiányzók beírása. Óraszám és cím felírása a füzetbe: Szöveges feladatok		Frontális	Kivetítő, füzet	
II. RÁHANGOLÓDÁS, ISMÉTLÉS					
5' (8)	1.Piros pont szerző feladat: a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy dobókockával 5-nél kisebb számot dobunk? (tört alakban add meg) 4/6 b) Hány liter víz fér el egy 1 méter magas, 4 m átmérőjű, henger alakú akváriumba? 12560 liter	Kérdés, jutalmazás	Egyéni, frontális ellenőrzés	Kivetítő, füzet	
III. ISMERETEK RENDSZEREZÉSE, KIBŐVÍTÉSE					
2' (10)	A foglalkoztató lap feladatának elolvasása. Az állatkertben minden állatról van egy információs tábla, amelyen szerepel az állat tömege. A feliratokat azonban kiradíroztam és egy fejtörőben rejtettem el. A zebu 312 kg-al nagyobb tömegű, mint az antilop és 220 kg-al nehezebb a törpe vízilónál. A három állat együttes tömege 932 kg. Mennyi az állatok tömege külön-külön? Törpevíziló Marmagasság 150 cm Tömeg  Antilop Marmagasság 120 cm Tömeg  Zebu Marmagasság 150 cm Tömeg 	Megbeszélés	Frontális	Kivetítő, füzet, foglalkoztató lapok	Fel kell hívni a figyelmet, hogy a „Hely a betűknek” részt hagyják üresen!

5' (15)	Foglalkoztató lap instrukciót követni. A felső téglalap a zebu tömegét szemlélteti, és elkészítettük az antilop tömegét szemléltető letöltési sávot. Ez csak egy vázlat, mert a letöltési sávról nem tudjuk pontosan hol jár, hiszen nem ismerjük az antilop tömegét. A feladatod az lesz, hogy készítsd el a törpeviziló tömegét szemléltető letöltési sávot, majd írd be a téglalapok üresen maradt részébe a feladatban szereplő számok közül a megfelelőt!  Hogyan magyaráznád el a letöltési sávok segítségével, mit jelent a feladatban szereplő 932 kg? Add meg, hogy a három teljes téglalap együtt mennyi tömeget ér! A zebu tömegével milyen kapcsolatban van a három teljes téglalap együttléve? A fentiek alapján már tudni fogod a választ a fejtörőre. Írd le a számításod!		Pármunka	Foglalkoztató lapok	
3' (18)	Ellenőrzés:  Hogyan magyaráznád el a letöltési sávok segítségével, mit jelent a feladatban szereplő 932 kg?	Kérdezés, megbeszélés	Frontális	Kivetítő, foglalkoztató lapok	

	= 932 A besatírozott részek együttes tömege Add meg, hogy a három teljes téglalap együtt mennyi tömeget ér! 932 + 312 + 220 = 1464 kg A zebu tömegével milyen kapcsolatban van a három teljes téglalap együttvéve? Harmada a zebu tömege A fentiek alapján már tudni fogod a választ a fejtörőre. Írd le a számításod! 1464 : 3 = 488 zebu → 488 kg antilop → 488 – 312 = 176 kg víziló → 488 – 220 = 268 kg				
3’ (21)	Írjuk fel betűkkel! Tanári kérdés lehet: - Melyik adatot érdemes változóval eljelölni? Zebu Antilop 312 Víziló 220 Hely a betűknek x x - 312 x - 220 - Mit tudunk a három állat együttes súlyáról? Hogy tudjuk felírni ezt az összefüggést? x + (x - 312) + (x - 220) = 932 - Végezzük el az egyenletet! x + x - 312 + x - 220 = 932 3x - 532 = 932 3x = 1464 x = 488	Megbeszélés, kérdés	Frontális	Kivetítő, füzet, foglalkoztató lapok	

	- Mit jelöltünk x-szel, milyen adatot? A zebu tömegét.				
IV. ISMERETEK ALKALMAZÁSA					
5' (26)	Feladatgyűjtemény 74/1. Egészítsd ki a letöltési sávot, majd ez alapján számold ki a megoldást! Jutkának 230 Ft-tal kevesebb pénze van, mint Mártának. A két lánynak összesen 1850 Ft-ja van. Hány forintjuk van külön-külön? Márta Jutka	Munkáltatás	Egyéni	Kivetítő, feladatgyűjtemény	Az üres letöltési sávok megjelennek a táblán.
2' (28)	Ellenőrzés: Tanuló berajzolja a letöltési sávot a táblánál. Márta Jutka 230 Hogyan számoltál? A besatírozott rész összesen 1850 Ft. 1850 + 230 = 2080 2080 : 2 = 1040. Vagyis Márta vagyona 1040 Ft, Jutkái pedig (1040-230=) 810 Ft.	Kérdés, megbeszélés	Frontális	Kivetítő, feladatgyűjtemény	
1' (29)	Írjuk az árba mellé betűkkel! Márta x Jutka 230 x - 230	Magyarázat	Frontális	Kivetítő, feladatgyűjtemény	

2' (31)	Írjuk fel egyenlettel és oldjuk meg az egyenletet! $x + (x-230) = 1850$ $2x - 230 = 1850$ $2x = 2080$ $x = 1040$ Mivel x-szel Márta vagyonát jelöltük, így meg is kaptuk a választ.	Megbeszélés	Frontális	Kivetítő, feladatgyűjtemény							
7' (38)	A feladatlapok hátoldalán mindenki talál egy feladatot. Készíts saját fejtörőt! A fejtörő megoldását is készítsd el! Készíts az előzőhöz hasonló fejtörőt a társadnak az állatok névjegykártyáinak segítségével! A csoport: <table><tr><td>Gorilla Marmagasság 190 cm Tömeg 180 kg</td><td>Varánusz Hossz 300 cm Tömeg 189 kg 5000 db el belőle</td><td>Jegesmedve Marmagasság 153 cm Tömeg 448 kg</td></tr></table> B csoport: <table><tr><td>Orrszarvú Hossz 385 cm Tömeg 2100 kg</td><td>Zsíríf Marmagasság 570 cm Tömeg 1928 kg 55 km/h sebességgel fut</td><td>Elefánt Marmagasság 490 cm Tömeg 5456 kg</td></tr></table>	Gorilla Marmagasság 190 cm Tömeg 180 kg	Varánusz Hossz 300 cm Tömeg 189 kg 5000 db el belőle	Jegesmedve Marmagasság 153 cm Tömeg 448 kg	Orrszarvú Hossz 385 cm Tömeg 2100 kg	Zsíríf Marmagasság 570 cm Tömeg 1928 kg 55 km/h sebességgel fut	Elefánt Marmagasság 490 cm Tömeg 5456 kg	Munkáltatás	Egyéni	Foglalkoztat ó lapok	
Gorilla Marmagasság 190 cm Tömeg 180 kg	Varánusz Hossz 300 cm Tömeg 189 kg 5000 db el belőle	Jegesmedve Marmagasság 153 cm Tömeg 448 kg									
Orrszarvú Hossz 385 cm Tömeg 2100 kg	Zsíríf Marmagasság 570 cm Tömeg 1928 kg 55 km/h sebességgel fut	Elefánt Marmagasság 490 cm Tömeg 5456 kg									
V. ÉRTÉKELEÉS											
1' (39)	Dicséret. Piros pont jár, ha jó a fejtörő és jó a megoldása is.	Értékelés, jutalmazás	Frontális		Lapok beszédése, óra után scannelése						
VI. HÁZI FELADAT											
1' (40)	Házi feladat: FGY 74/2. és 75/3. Készíts hozzá letöltési sávot!		Frontális								

mit jelent a feladatban szereplő 932 kg?

Add meg, hogy a három teljes téglalap együtt mennyi tömeget ér!

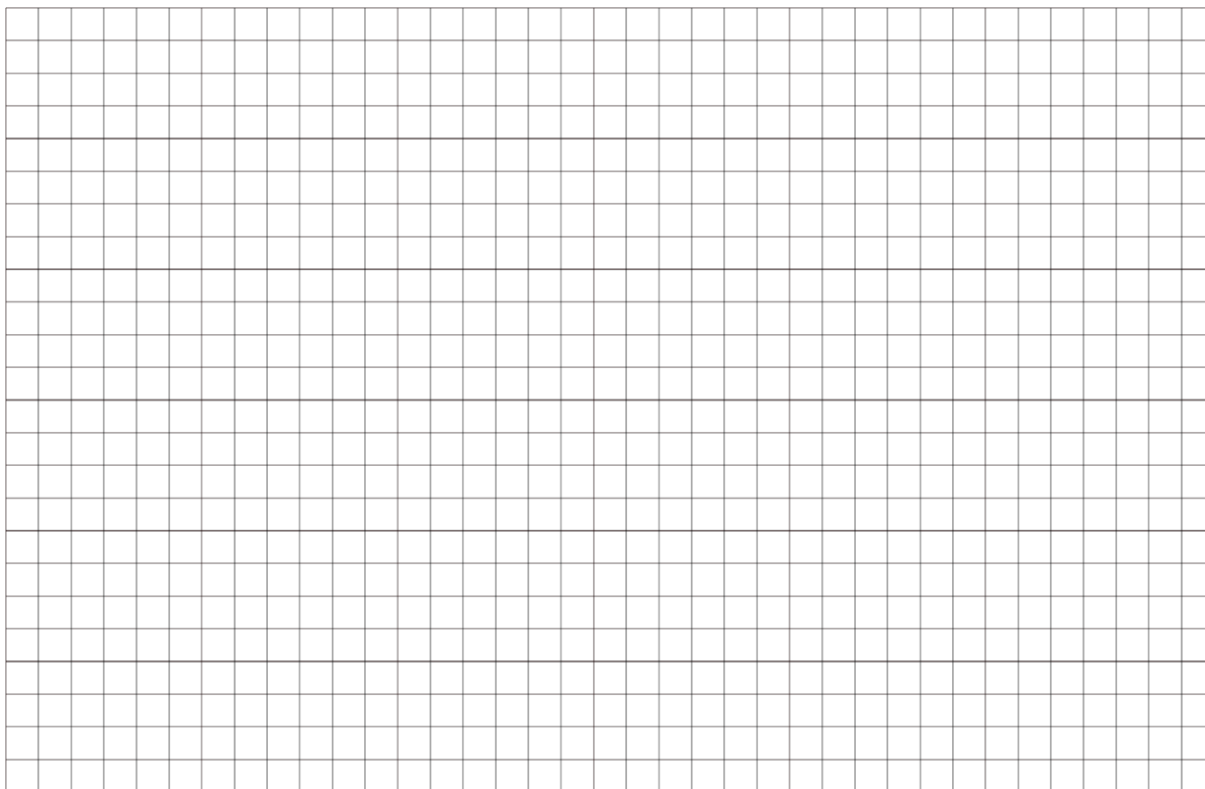
A zebu tömegével milyen kapcsolatban van a három teljes téglalap együttléve?

A fentiek alapján már tudni fogod a választ a fejtörőre.
Írd le a számításod!

Készíts az előzőhöz hasonló fejtörőt a társadnak az állatok névjegykártyáinak segítségével!

Gorilla Marmagasság 190 cm Tömeg 180 kg	Varánusz Hossz 300 cm Tömeg 189 kg 5000 db él belőle	Jegesmedve Marmagasság 153 cm Tömeg 448 kg
--	--	---

A feladat megoldása:



9.melléklet: Feladatlap – 8.évfolyam, első kísérleti óra, B csoport

Az állatkertben minden állatról van egy információs tábla, amelyen szerepel az állat tömege. A feliratokat azonban kiradíroztam és egy fejtörőben rejtettem el.

A zebu 312 kg-al nagyobb tömegű, mint az antilop és 220 kg-al nehezebb a törpe vízilónál. Együtt a tömegük 932 kg. Mennyi az állatok tömege külön-külön?

Törpevíziló Marmagasság 150 cm Tömeg	Antilop Marmagasság 120 cm Tömeg	Zebu Marmagasság 150 cm Tömeg
--	--	---

A felső téglalap a zebu tömegét szemlélteti, és elkészítettük az antilop tömegét szemléltető letöltési sávot. Ez csak egy vázlat, mert a letöltési sávról nem tudjuk pontosan hol jár, hiszen nem ismerjük az antilop tömegét. A feladatod az lesz, hogy készítsd el a törpevíziló tömegét szemléltető letöltési sávot, majd írd be a téglalapok üresen maradt részébe a feladatban szereplő számok közül a megfelelőt!

		Hely a betűknek
Zebu		
Antilop		
Víziló		

Hogyan magyaráznád el a letöltési sávok segítségével,

mit jelent a feladatban szereplő 932 kg?

Add meg, hogy a három teljes téglalap együtt mennyi tömeget ér!

A zebu tömegével milyen kapcsolatban van a három teljes téglalap együttléve?

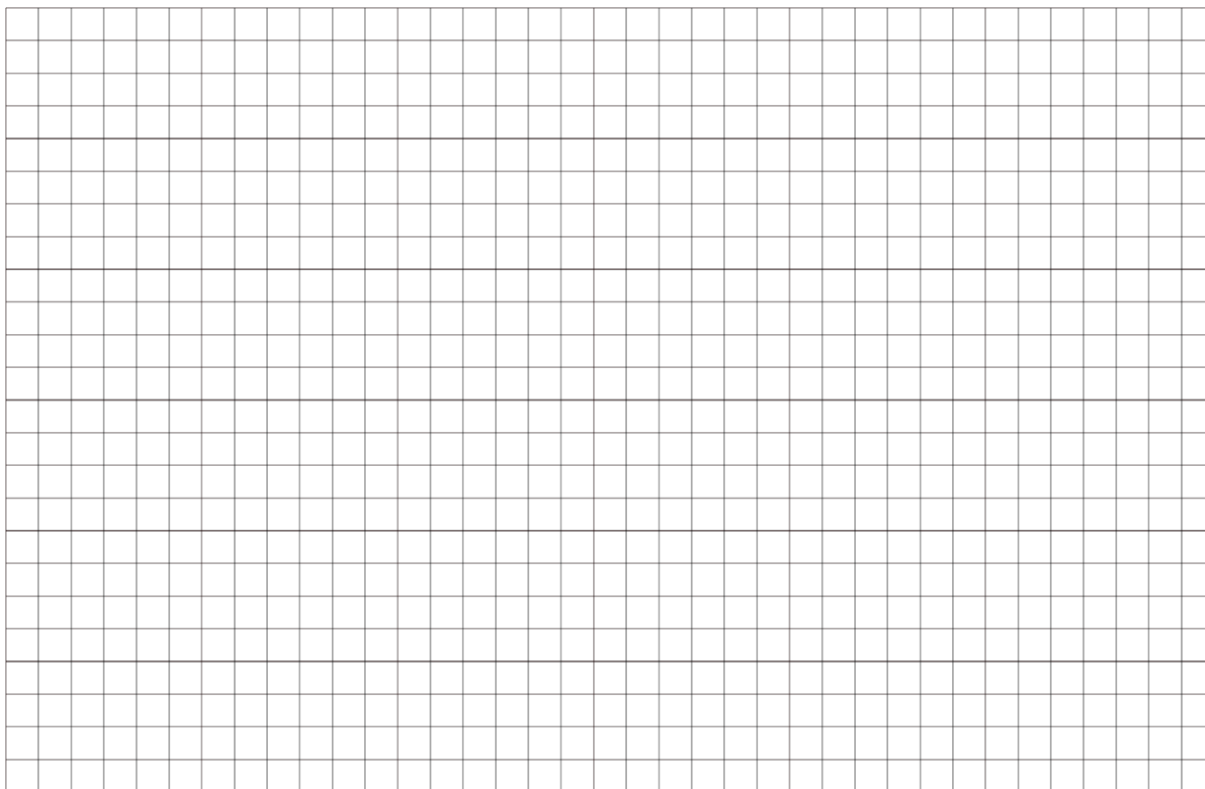
A fentiek alapján már tudni fogod a választ a fejtörőre.
Írd le a számításod!

Készíts az előzőhöz hasonló fejtörőt a társadnak az állatok névjegykártyáinak segítségével!

Orrszarvú Hossz 385 cm Tömeg 2100 kg	Zsiráf Marmagasság 570 cm Tömeg 1928 kg 55 km/h sebességgel fut	Elefánt Marmagasság 490 cm Tömeg 5456 kg
---	---	---

--

A feladat megoldása:



10.melléklet: Óraterv – 8.évfolyam, ötödik kísérleti óra

Műveltségi terület: Matematika

Tantárgy: Matematika

Osztály: 8.x

Az óra témája: Együttes munkavégzés

Az óra cél-és feladatrendszere:

Fejlesztendő attitűd: Önbizalom fejlesztése, önálló gondolatok megfogalmazásának bátorsága. Más nézőpont elfogadása.

Készségek, képességek: A matematikai gondolkodás, a modellalkotás, a modellek érvényességi körének eldöntése. A matematikai és a grafikus reprezentáció készségének fejlesztése. Algebrai módszerek és leírások használata.

Elérendő fejlesztési szint, tudásszint: Az együttes munkavégzéses feladatokhoz képes legyen önállóan ábrát készíteni, amely segíti a táblázat kitöltését. A táblázat alapján képes legyen önállóan egyenletet felírni és megoldani azt.

Az óra didaktikai feladatai: Új ismeret feldolgozása, alkalmazás

Tantárgyi kapcsolatok:

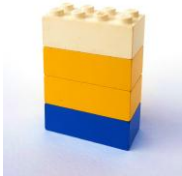
- biológia

Felhasznált források:

- Soós Edit, Maróti Lászlóné (2017): Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 8. évfolyam, Maxim Kiadó, Szeged

Dátum: 2022.

A vizsgálat fókusza az 1. 2. és 4. feladaton van.

Idő	Az óra menete	Nevelési-oktatási stratégia			Megjegyzések
		Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	
I. SZERVEZÉSI FELADATOK					
2' (2)	Jelentés, hiányzók beírása. Óraszám és cím felírása a táblára és a füzetbe: Együttes munkavégzés		Frontális	Kivetítő, füzet	
II. RÁHANGOLÓDÁS, ISMÉTLÉS					
3' (5)	Fejtörő, önálló munka, frontális megbeszélés. Gondolkozz és válaszolj! Bob, Kevin és Stuart várat építenek. Bob két nap alatt, Kevin 3 nap alatt, Stuart 4 nap alatt épít fel egy várat. Elkészül-e egy nap alatt a vár, ha együtt építenek?  <u>Megoldás:</u> A sárgarész jelöli a Bob által felépített részt. Mert ha ő két nap alatt építi fel, akkor egy nap alatt felépíti a felét a várnak. Stuart munkáját jelöli a kék rész, ami a teljes vár ¼ része. Így a teljes	Kérdezés, megbeszélés	egyéni, frontális	Kivetítő, füzet	A kivetítőn megjelenő kép gyakorlatilag megoldást ad a kérdésre. A tanulók anélkül is megoldhatják, de segítség is lehet.

	vár $\frac{1}{4}$ része maradt Kevinre, aki egy nap alatt az $\frac{1}{3}$ részét tudná megépíteni, vagyis végez az $\frac{1}{4}$ résszel el.				
III. ISMERETEK RENDSZEREZÉSE, KIBŐVÍTÉSE					
3' (8)	Feladatlapok kiosztása, 1. feladat. Bob kecskéket, Kevin juhokat tart a gazdaságban. Egy szekér széna a juhoknak 3 hétre, a kecskéknek 6 hétre elegendő. Bob és Kevin megegyeznek, hogy közösen használnak fel egy szekér szénát. Hány hétre lesz elegendő a takarmány? Önállóan dolgozz! A téglalap egy szekér szénát jelképez. Satírozd a téglalapot annak megfelelően, hogy egy hét alatt mennyi fogy el belőle!  juhok  kecskék  együtt Egy hét alatt egy szekér széna hányad részét ették meg együtt az állatok? _____	Kérdezés	egyéni	feladatlap	Az önálló munka végét egy cikk-cakk vonal jelzi. Eddig a vonalig haladjanak a diákok, utána osztálymegbeszélés.

	Az eredményed alapján következtess arra, hogy hány hétre elegendő egy szekér széna, és válaszolj a feladat kérdésére! _____												
3' (11)	Osztálymegbeszélés. <u>Közösen dolgozunk tovább</u> A téglalap egy szekér szénát jelképez. Satírozd a téglalapot annak megfelelően, hogy egy hét alatt mennyi fogy el belőle!    juhok kecskék együtt Egy hét alatt egy szekér széna hányad részét ették meg együtt az állatok? 3/6 részét, vagyis a felét. Az eredményed alapján következtess arra, hogy hány hétre elegendő egy szekér széna, és válaszolj a feladat kérdésére! Mivel a felét 1 hét alatt ették meg, ezért 2 hétre lesz elég a széna.	megbeszélés, szemléltetés	Frontális	feladatlap, kivetítő	A tanulók ekkor már csak a cikk-cakk vonal alatt dolgozhatnak, a felette lévő részhez nem nyúlhatnak!								
5' (16)	Megoldás egyenlettel: <table><tr><td></td><td>egyedül (1 hét)</td><td>1 hét alatt (rész)</td><td>x hét alatt (rész)</td></tr><tr><td>juhok</td><td>3</td><td>1/3</td><td>x/3</td></tr></table>		egyedül (1 hét)	1 hét alatt (rész)	x hét alatt (rész)	juhok	3	1/3	x/3				A feladatlapon szereplő táblázatot közösen töltjük ki. Felírjuk és
	egyedül (1 hét)	1 hét alatt (rész)	x hét alatt (rész)										
juhok	3	1/3	x/3										

	kecskék	6	1/6	x/6				megoldjuk az egyenletet.								
	$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$ $\frac{2x}{6} + \frac{x}{6} = 1$ $2x + x = 6$ $3x = 6$ $x = 2$, vagyis 2 hétre elegendő a széna.															
IV. ISMERETEK ALKALMAZÁSA																
5' (21)	A közösen felépített várat hárman fogják kitakarítani, mert szép körülmények között akarják a focimeccset nézni a tévében. Kevin egyedül 3 óra alatt takarítaná ki a várat, Stuart szintén, Bob pedig két óra alatt. A mérkőzés 55 perc múlva kezdődik. Kitakarítanak-e addigra?				Kérdezés	Egyéni	feladatlap	A feladatlap bal oldalán dolgoznak a tanulók, az „Önállóan” felirat alatt.								
3' (24)	<u>Megoldás:</u> Ábrázolva:    Kevin Stuart Bob Az adatok az ábra alapján táblázatba rendezve: <table><tr><td></td><td>egyedül (óra)</td><td>1 óra alatt (rész)</td><td>x óra alatt (rész)</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>					egyedül (óra)	1 óra alatt (rész)	x óra alatt (rész)					Kérdezés, megbeszélés, szemléltetés	Frontális	feladatlap, kivetítő	A feladatlap jobb oldalán, a „Közösen dolgozunk tovább” részhez kerül a feladat helyes megoldása. A bal oldalhoz ne nyúljanak akkor sem, ha hibás számolás van rajta.
	egyedül (óra)	1 óra alatt (rész)	x óra alatt (rész)													

	<table><tr><td>Kevin</td><td>3</td><td>1/3</td><td>x/3</td><td></td></tr><tr><td>Stuart</td><td>3</td><td>1/3</td><td>x/3</td><td></td></tr><tr><td>Bob</td><td>2</td><td>1/2</td><td>x/2</td><td></td></tr></table> Egyenlettel folytatva: $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 1$ $2x + 2x + 3x = 6$ $7x = 6$ $x \approx 0,86$ vagyis 0,86 óra alatt végeznek együtt. $0,86 \cdot 60 = 51,6$ vagyis 51,6 perc alatt végeznek. Válasz: Igen, kitakarítanak a mérkőzés előtt.	Kevin	3	1/3	x/3		Stuart	3	1/3	x/3		Bob	2	1/2	x/2					
Kevin	3	1/3	x/3																	
Stuart	3	1/3	x/3																	
Bob	2	1/2	x/2																	
3' (27)	3.a) Az úszómedence az egyik csapon keresztül 3 óra alatt töltődik fel, a másik csapon keresztül másfél óra alatt. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mindkét csapot megnyitottuk?	Kérdezés	Egyéni	feladatlap	Ismét a feladatlap bal oldalán dolgoznak a tanulók.															
3' (30)	<u>Megoldás:</u> Ábrázolva: I. csap II. csap együtt A választ már az ábráról leolvashatjuk: 1 óra alatt. A feladatot táblázattal és egyenlettel is meg lehet oldani:	Kérdezés, megbeszélés	Frontális	feladatlap, kivetítő	A feladatlap jobb oldalára kerül a helyes megoldás.															

		egyedül (óra)	1 óra alatt (rész)	x óra alatt (rész)					
	I.csap	3	1/3	x/3					
	II.csap	1,5	2/3	2x/3					
	$\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} = 1$ $x + 2x = 3$ $3x = 3$ $x = 1$, vagyis 1 óra alatt telik meg így a medence.								
8' (38)	4. A saját feladatomban.				Kérdezés	Egyéni	feladatlap	A tanuló készít egy hasonló problémát és megoldja azt.	
3. ÉRTÉKEELÉS									
1' (39)	Dicséret, az órával kapcsolatos kérdések megbeszélése.				dicséret	Frontális	Kivetítő		
4. HÁZI FELADAT									
1' (40)	Házi feladat: A 3. feladat b) része lehet házi feladat vagy szorgalmi. Az úszómedence két csapon keresztül tölthető. Az egyik csap 3 óra alatt tölti meg a medencét, a két csap együtt pedig 2 óra alatt. Mennyi idő alatt tölti meg a medencét a másik csap? <u>Megoldás:</u>					Frontális		Feladatlapok beszédese!	

		egyedül (óra)	1 óra alatt (rész)	2 óra alatt (rész)					
	I.csap	3	1/3	2/3					
	II.csap	x	1/x	2/x					
	$\frac{2}{3} + \frac{2}{x} = 1$ $2x + 6 = 3x$ $6 = x$, vagyis a második csap egyedül 6 alatt tölténé meg a medencét.								

11.melléklet: Feladatlap – 8.évfolyam, ötödik kísérleti óra

1. feladat

Név, osztály:

Bob kecskéket, Kevin juhokat tart a gazdaságban. Egy szekér széna a juhoknak 3 hétre, a kecskéknak 6 hétre elegendő. Bob és Kevin megegyeznek, hogy közösen használnak fel egy szekér szénát. Hány hétre lesz elegendő a takarmány?

Önállóan dolgozz!

A téglalap egy szekér szénát jelképez. Satírozd a téglalapot annak megfelelően, hogy egy hét alatt mennyi fogy el belőle!



juhok



kecskék



együtt

Egy hét alatt egy szekér széna hányad részét ették meg együtt az állatok? _____

Az eredményed alapján következtess arra, hogy hány hétre elegendő egy szekér széna, és válaszolj a feladat kérdésére!

~~~~~  
**Közösen dolgozunk tovább**

A téglalap egy szekér szénát jelképez. Satírozd a téglalapot annak megfelelően, hogy egy hét alatt mennyi fogy el belőle!



juhok



kecskék



együtt

Egy hét alatt egy szekér széna hányad részét ették meg együtt az állatok? \_\_\_\_\_

Az eredményed alapján következtess arra, hogy hány hétre elegendő egy szekér széna, és válaszolj a feladat kérdésére!

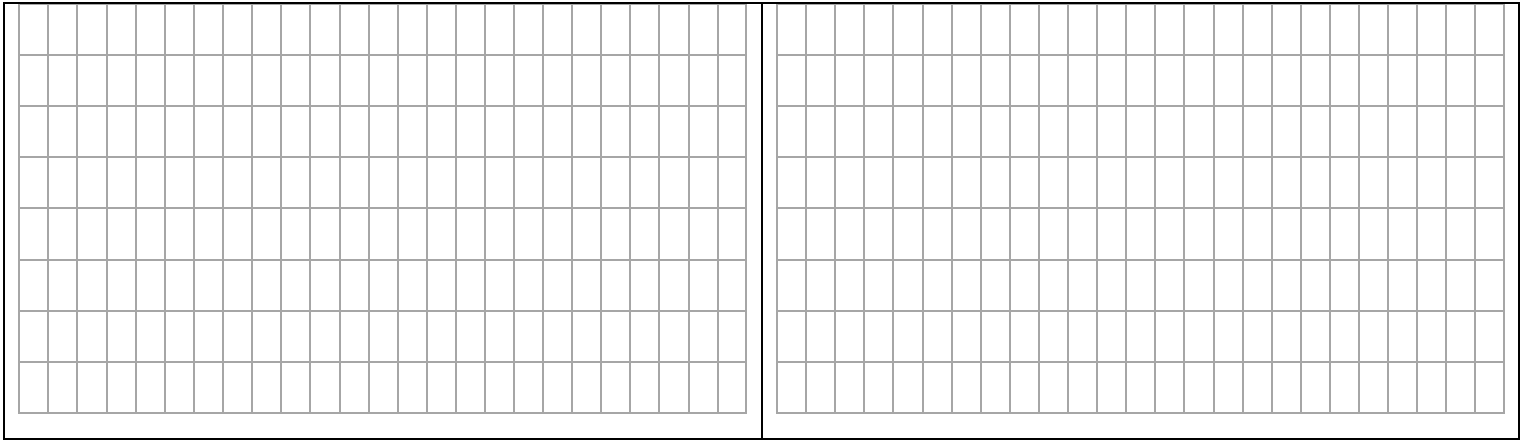
Megoldás egyenlettel:

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

2. A közösen felépített várat hárman fogják kitakarítani, mert szép körülmények között akarják a focimeccset nézni a tévében. Kevin egyedül 3 óra alatt takarítaná ki a várat, Stuart szintén, Bob pedig két óra alatt. A mérkőzés 55 perc múlva kezdődik. Kitakarítanak-e addigra?

3. a) Az úszómedence az egyik csapon keresztül 3 óra alatt töltődik fel, a másik csapon keresztül másfél óra alatt. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha mindkét csapot megnyitottuk?





4. feladat

Név, osztály: \_\_\_\_\_

A saját feladatod:

|  |
|--|
|  |
|--|

