1. Bevezetés

Smullyan a „Mi a címe ennek a könyvnek?" [22] című könyvét egyszerű beugratós feladatokkal kezdi, majd fokozatosan nehezedő fejtörők magával ragadó folyamát indítja el. Mire az olvasó a könyv végére ér, megérti Gödel híres tételét és annak hátterét. Ez a könyv a logikai fejtörők egyik leggazdagabb gyűjteményének tekinthető, így nem csoda, hogy a könyv megjelenését követően virágzásnak indult automatikus tételbizonyítás számára kihívást jelentett a könyvben szereplő fejtörők megoldása. Több cikk és könyv mutat be különféle módszereket egyik-másik fejtörő megoldására [1, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 23], de egyik mű sem vállalkozott a könyv összes logikai fejtörőjének megoldására. A dolgozatom ezt a hiányt próbálja pótolni.

A fejtörőkben a szereplők állításokat tesznek, és ezekből kell messzemenő következtetéseket levonnunk a fejtörő megoldásához. A dolgozatom megmutatja, hogyan formalizálhatóak ezek a fejtörők speciális modális logikai nyelveken, melyek modális operátora a *mond* illetve a *mondhat* [4, 5]. Ismertetjük a nyelvekhez tartozó szekventkalkulusokat [2], továbbá két speciális igazságtáblát [6], melyek segítségével a formalizált feladatok megoldását automatizálhatjuk. A dolgozatban belátjuk ezen eszközök helyességét és teljességét [2]. Megvizsgálunk továbbá pár, tőlem származó kerettörténethez kapcsolódó logikai nyelvet [2, 9], s megállapításokat teszünk a nyelvek speciális alakú, érvényes formuláival kapcsolatban. Végül egy alkalmazást vázolunk fel [10].

A dolgozatomban ismertetett egységes tárgyalásmódban [22] összes fejtörője megoldható [4, 5]. A dolgozat a szekventkalkulust mutatja be megoldási módszerként [2], ám ugyanilyen jól használható az analitikus táblázat módszere [3], illetve a természetes levezetés [7]. A dolgozatban ismertetett logikai nyelvekhez tartozó szekventkalkulusokat, illetve analitikus táblázatokat Prolog [3], illetve Lotrec [8] nyelven implementáltam.

Az előbb említett logikai nyelvek konstrukciója, azok érvényes formuláinak generálása, a szekventkalkulusok megalkotása, igazságtáblák alkalmazása, ezek helyességének, teljességének belátása önálló kutatásaim eredménye [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

A továbbiakban ismertetjük a fejtörők kategóriáit, majd a dolgozatban vizsgált tizenöt nyelvet definiáljuk (2. fejezet). Ezután az ezekhez a nyelvekhez kapcsolódó helyes és teljes szekventkalkulusokat mutatjuk be (3. fejezet). Ezt követően megadunk két módszert, mellyel azok a feladatok is megoldhatóak, melyekhez nem elegendő a szekventkalkulus (4. fejezet). Ezt azoknak a logikai nyelveknek az ismertetése követi, melyek túllépnek a könyv keretein (5. fejezet), majd az érvényes formulák generálását mutatjuk be (6. fejezet). Végezetül egy lehetséges alkalmazást vázolunk fel (7. fejezet).

A fejtörők típusai

Adam Kolany [15] Smullyan fejtörőit a következő három kategoriába csoportosította:

Találd ki, hogy ki vagyok! Ebben az esetben ismerjük a fejtörő összes hipotézisét, és egy előre megadott formulahalmaznak azt az elemét kell kiválasztani amely logikai következménye a hipotéziseknek.

Elfelejtettem, hogy mit mondtál. (Metafejtörők) Ekkor az egyik hipotézis és a következmény nem ismert, ám adott az a két formulahalmaz, melyben megtalálhatóak.

Mit mondjak?/Mit kérdezzek? Ekkor ismert a következmény és egy kivételével az összes hipotézis. Felatunk ennek a hipotézisnek a meghatározása.

Az első két esetben azt a C következményt, illetve a C következményt és a H_n hipotézist kell kiválasztani, melyre a

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \supset C \tag{1}$$

formula érvényes. A harmadik kategóriába eső feladatoknál annak az X formulának a meghatározása a feladat, melyre a

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge C_a X \supset C \tag{2}$$

illetve a

$$H_1 \wedge \cdots \wedge H_n \supset ((C_a X \supset C) \wedge (C_a \neg X \supset \neg C)) \tag{3}$$

formula érvényes, ahol $C_a X$ jelöli azt, hogy az a személy kimondhatja az X állítást.

Az első két kategória esetén az (1) érvényességének ellenőrzése helyett a szekventkalkulusbeli levezethetőségét vizsgáljuk, mert hamarosan látni fogjuk, hogy ez a két fogalom egybeesik. A harmadik kategóriába eső feladatoknál speciális igazságtáblára lesz szükségünk.

2. Logikai nyelvek

Smullyan fejtörőiben a szereplők állításokat tesznek a többiekről, és néha saját magukról is. Az önhivatkozás vizsgálata az ókorig nyúlik vissza: a hazug paradoxona azóta foglalkoztatja a matematikusokat és filozófusokat. E paradoxon könyvtárnyi irodalmából most csak két frissebb cikket említünk meg: [19, 20]. Az önhivatkozás felmerül a *tud* és *hisz* (knowledge and belief) vizsgálatakor is. Eme jelenleg virágzó témakör jelölésrendszerét alkalmazzuk a dolgozatban. A dolgozat keretein túlmutató cikk [10] felvázolja, hogyan kombinálható a *mond* és a *hisz*, ami a kommunikáció szerepének erősödésével azzal kecsegtet, hogy a *mond* modális operátor *tud* és *hisz* méltó párja lehet.

Smullyan [23] és mások (például [12]) kijelentéslogikai formulákat használtak a fejtörők leírására, ám ezzel a fejtörők formalizáltjai feleslegesen elbonyolódnak, ami az ismertetésre kerülő nyelvek alkalmazásával elkerülhető [5].

A fejtörők kerettörténeteit tíz logikai nyelv írja le. A szerző ezen kívül további öt nyelvet konstruált az eredeti kerettörténetek variánsainak leírására. Ezeket a nyelveket az 1. ábra foglalja össze, míg az ábra jelöléseit a függelék részletezi. Mivel két alkalommal ugyanahhoz a szintaxishoz két különböző szemantika is járul, ezért a logikákat az 1. ábra számozásával pontosítjuk a későbbiekben.

3. Szekventkalkulus

A dolgozatban a szekventkalkulust használjuk levezetésre. Ugyanazokat a definíciókat használjuk, mint Kleene [14], ám az olvasó kényelméért a levezetési szabályokat megismételjük a 2. ábrán.

Kleene szabályai csak a kijelentéslogikához elegendőek. A további logikák esetén ezt a szabályhalmazt további szabályokkal kell kiegészíteni. A kiegészítéseket a 3. ábra tartalmazza, míg a tábla jelöléseit a függelék ismerteti.

Az itt szereplő tizenöt szekventkalkulus helyes, azaz érvényes rájuk a következő tétel [2].

	Nyelv	Szintaxis	Szemantika
1.	$\mathcal{L}_0$	F0–F3	$\langle\vartheta_S\rangle$, V0-V5
2.	$\mathcal{L}^{tf}$	F0–F6	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V8
3.	$\mathcal{L}^{tfm}$	F0–F7	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T,\vartheta_U\rangle$, V0-V9
4.	$\mathcal{L}^{tfw}$	F0–F6, F8	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T,\vartheta_U\rangle$, V0-V8, V10
5.	$\mathcal{L}^{tfb}$	F0–F6, F9	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T,\vartheta_U\rangle$, V0-V8, V11
6.	$\mathcal{L}^{lu}$	F0–F3, F10, F11	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V5, V12, V14
7.	$\mathcal{L}^{luf}$	F0–F3, F5, F10, F11	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V5, V7, V12, V14
8.	$\mathcal{L}^{mv}$	F0–F3, F6, F7, F12	$\langle\vartheta_S,\vartheta_U,\vartheta_V\rangle$, V0-V5, V9, V16, V17
9.	$\mathcal{L}^{tfn}$	F0–F3, F6, F7, F12	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V7, V18, V19
10.	$\mathcal{L}^{tfn'}$	F0–F3, F6, F7, F12	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V7, V18-V22
11.	$\mathcal{L}^{tf}_s$	F0–F5, F14	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T,\vartheta_U\rangle$, V0-V7, V23
12.	$\mathcal{L}^{tfnm}$	F0–F7, F13	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V7, V24, V25
13.	$\mathcal{L}^{ih}$	F0–F3, F6, F15	$\langle\vartheta_S,\vartheta_U,\vartheta_V\rangle$, $\vartheta_U\cup\vartheta_V=\mathcal{P}$, V0-V5, V26-V28
14.	$\mathcal{L}^{ih}$	F0–F3, F6, F15	$\langle\vartheta_S,\vartheta_U,\vartheta_V\rangle$, V0-V5, V26, V27, V29
15.	$\mathcal{L}^{tfm}$	F0–F7	$\langle\vartheta_S,\vartheta_T\rangle$, V0-V7, V30, V31

1. ábra. Logikai nyelvek

$$\frac{A,\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\supset B}\;{\to\supset}\qquad\qquad \frac{\Gamma\to\Theta,A\;;\;B,\Gamma\to\Theta}{A\supset B,\Gamma\to\Theta}\;{\supset\to}$$

$$\frac{\Gamma\to\Theta,A\;;\;\Gamma\to\Theta,B}{\Gamma\to\Theta,A\wedge B}\;{\to\wedge}\qquad\qquad \frac{A,B,\Gamma\to\Theta}{A\wedge B,\Gamma\to\Theta}\;{\wedge\to}$$

$$\frac{\Gamma\to\Theta,A,B}{\Gamma\to\Theta,A\vee B}\;{\to\vee}\qquad\qquad \frac{A,\Gamma\to\Theta\;;\;B,\Gamma\to\Theta}{A\vee B,\Gamma\to\Theta}\;{\vee\to}$$

$$\frac{A,\Gamma\to\Theta}{\Gamma\to\Theta,\neg A}\;{\to\neg}\qquad\qquad \frac{\Gamma\to\Theta,A}{\neg A,\Gamma\to\Theta}\;{\neg\to}$$

$$\frac{A,\Gamma\to\Theta,B\;;\;B,\Gamma\to\Theta,A}{\Gamma\to\Theta,A\equiv B}\;{\to\equiv}\qquad\qquad \frac{A,B,\Gamma\to\Theta\;;\;\Gamma\to\Theta,A,B}{A\equiv B,\Gamma\to\Theta}\;{\equiv\to}$$

2. ábra. Szekventkalkulus szabályai

1. Tétel. *Ha az A formula bizonyítható a szekventkalkulusban, akkor érvényes.*

A szekventkalkulus és szemantika összevetésekor egyes nyelvek esetén apró különbségeket fedezhetünk fel. Ezért nem bizonyítható az az állítás, hogy minden érvényes formula levezethető a szekventkalkulusban. Például a lovagok és lókötők nyelvében ($\mathcal{L}^{tf}$) nem bizonyítható a $T_x\equiv\neg F_x$ érvényes formula. (Itt a T_x, F_x, illetve majd a L_x, U_x, N_x, M_x, I_x és a H_x kijelentésváltozókkal az x személy típusát jelöljük.) A fejtörők speciális megfogalmazása miatt a szekventkalkulus a jelenlegi formájában is elegendő a fejtörők megoldására. Természetesen mi nem elégedhetünk meg ennyivel, egy megfelelően megválasztott, érvényes Z formula segítségével szekventkalkulusaink teljessé tehetőek [3]:

2. Tétel. *Ha az A formula érvényes, akkor a $Z\supset A$ formula levezethető a szekventkalkulusban.*

2.	$\to C_1,\, C_1 \to$
3.	$\to C_1,\, C_1 \to$
4.	$\to C_1,\, C_1 \to$
5.	$\to C_1,\, C_1 \to$
6.	$\to C_1^h, \ldots \to C_1^v,\, C_1^h \to, \ldots C_1^v \to$
7.	$\to C_2^h, \ldots \to C_2^v,\, C_2^h \to, \ldots C_2^v \to$
8.	$\to C_2,\, C_2 \to$
9.	$\to C_3,\, C_3 \to$
10.	$\to C_4,\, C_4 \to$
11.	$S \to$
12.	$\to C_5,\, C_5 \to$
13.	$\to C_6,\, C_6 \to$
14.	$\to C_7,\, C_7 \to$
15.	$\to C_8,\, C_8 \to$

3. ábra. A szekventkalkulus kiegészítő szabályai

Az $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}^{mv}$ és $\mathcal{L}^{ih}$ (14.) logikai nyelvek esetén a 2. tétel teljesül, ha a Z konstans igaz formula, más szavakkal ezekben az esetekben nincs szükség Z-re. Az $\mathcal{L}^{tf}$, $\mathcal{L}^{tfm}$ (3.), $\mathcal{L}^{tfw}$ és $\mathcal{L}^{tfb}$ logikai nyelvek esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x)).$$

Az $\mathcal{L}^{lu}$ logikai nyelv és az ikrek esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$((L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge U_b) \vee (\neg L_a \wedge L_b \wedge U_a \wedge \neg U_b)).$$

Az $\mathcal{L}^{lu}$ logikai nyelv valamint az Oroszlán és az Egyszarvú esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$(L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge U_b).$$

Az $\mathcal{L}^{luf}$ logikai nyelv esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\begin{array}{l}
(L_a \wedge U_b \wedge F_c \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b) \wedge \\
(L_a \wedge U_c \wedge F_b \wedge \neg L_b \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c) \wedge \\
(L_b \wedge U_a \wedge F_c \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_b) \wedge \\
(L_b \wedge U_c \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_c \wedge \neg U_a \wedge \neg U_b \wedge \neg F_b \wedge \neg F_c) \wedge \\
(L_c \wedge U_a \wedge F_b \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_b \wedge \neg U_c \wedge \neg F_a \wedge \neg F_c) \wedge \\
(L_c \wedge U_b \wedge F_a \wedge \neg L_a \wedge \neg L_b \wedge \neg U_a \wedge \neg U_c \wedge \neg F_b \wedge \neg Fc)
\end{array}.$$

Az $\mathcal{L}^{tfn}$ és $\mathcal{L}^{tfn'}$ logikai nyelvek esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{P}} ((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x)).$$

Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ logikai nyelv esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{P}}((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg N_x \wedge \neg M_x) \vee$$
$$(\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge N_x \wedge \neg M_x)) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg N_x \wedge M_x))$$

Az $\mathcal{L}^{ih}$ (13.) logikai nyelv esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{P}}(I_x \vee H_x).$$

Az $\mathcal{L}^{tfm}$ (15.) logikai nyelv esetén a 2. tétel teljesül, ha Z

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{P}}((T_x \wedge \neg F_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge F_x \wedge \neg M_x) \vee (\neg T_x \wedge \neg F_x \wedge M_x)).$$

4. Mit kérdezzek?

4.1. Első módszer

A következő fejtörő és megoldása közismert. Ezért ezen mutatjuk be, hogy hogyan működik a harmadik kategóriába eső feladatokat megoldó algoritmus.

> *Egy rab nehéz dilemma előtt áll. A szultán, akinek rabságában sinylődik, felajánlja a rabnak, hogy egy cellába zárja őt két szolgájával, akik közül az egyik mindig hazudik, a másik pedig mindig igazat mond. A cellának két ajtaja van, az egyik a szabadságé, a másik meg a rabszolgaságé. Az lesz a rab sorsa, amelyik ajtót választja. A rabnak joga van egyetlen kérdést feltenni az egyik szolgának. Természetesen nem tudja, hogy melyik szolga hazudik, es melyik mond igazat. Visszanyerheti-e a rab a szabadságát kockázat nélkül?*

A két szolga tulajdonságai alapján a $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelven formalizáljuk a feladatot. A D kijelentésváltozó pontosan akkor legyen igaz, mikor a baloldali ajtó a szabadságé, a két szolgát pedig nevezzük a-val és b-vel. Legyen a keresett X formula olyan, hogy az „Igaz, hogy X?" kérdésre adott válasz pontosan akkor legyen *igen*, mikor a baloldali ajtó a helyes, azaz amikor D igaz. Ezek alapján a feladat formalizáltja a

$$\neg(T_a \equiv T_b) \supset ((C_a X) \equiv D) \tag{4}$$

formula. Ha valamely X formulára (4) érvényes, akkor a feladatnak van megoldása. A (4) pedig pontosan akkor érvényes, ha az (5) és (6) érvényes. (Ebben a lépésben az eredeti formulát d.n.f alakban írtuk fel, s az ismeretlent, illetve a tagadását tartalmazó tagokat külön csoportosítottuk. Ekkor X-et atominak tekintettük.)

T_a	T_b	D	E	X	$\neg F$
1	1	1	0	a	1
1	1	0	0	b	1
1	0	1	0	0 $\leftarrow$	0
1	0	0	1	$\rightarrow$ 1	1
0	1	1	1	$\rightarrow$ 1	1
0	1	0	0	0 $\leftarrow$	0
0	0	1	0	c	1
0	0	0	0	d	1

4. ábra. Az első módszer igazságtáblája

$$\underbrace{\big((T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D)\big)}_{E} \supset X \tag{5}$$

$$X \supset \neg \underbrace{\big((\neg T_a \wedge T_b \wedge \neg D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge D)\big)}_{F} \tag{6}$$

Ez a két formula kijelentéslogikai formulákként is felfoghatóak, és Craig tétele [21, 127. o.] szerint: ha a $E \supset \neg F$ formula érvényes, akkor létezik ilyen X, azaz a fejtörőnek van megoldása. Az X formula megkonstuálható Smullyan módszerével [21, 128. o.] is, de igazságtáblával hamarabb célhoz érünk.

A 4. ábrán T_a, T_b és D függvényeként írjuk fel az E és F formula igazságértékeit, majd feltöltjük az X oszlopát is:

1. Ha az adott sorban az E alatt 1 szerepel, ezt írjunk az X alá.
2. Ha az adott sorban az $\neg F$ alatt 0 szerepel ezt írjunk az X alá.

Ha ez a két szabály valamely sorban egymásnak ellentmond, akkor a feladatnak nincs megoldása. Esetünkben az előbbi szabályokkal négy sor tölthető fel, ezeket nyilakkal jelöltük meg. Az üresen maradt négy hely (ezeket a, b, c és d jelöli) tetszőlegesen tölthető fel, így a feladatnak 16 különböző formula a megoldása.

Az X formulát a szokásos módon konstruáljuk meg. Válasszuk például a következő értékeket: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ és $d = 1$. Ekkor a táblázat alapján X a következő lesz:

$$(T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (\neg T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D).$$

Az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvben érvényes átalakítási szabályokat használva ez a formula több módon is egyszerűsíthető, és az eredmény többféleképp interpretálható;

- $\neg(T_b \equiv D)$:
  - „Nem igaz, hogy a másik őr pontosan akkor igazmondó, ha a baloldali ajtó hozza a szabadulást?”
- $\neg T_b \equiv D$:
  - „A másik őr pontosan akkor hazug, ha a baloldali ajtó hozza a szabadulást?”,
  - „A másik őr nem mondhatja, hogy a baloldali ajtó hozza a szabadulást?” vagy

- ◦ „A másik őr mondhatja, hogy a jobboldali ajtó hozza a szabadulást?”

Ha $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ és $d = 0$, akkor az X a következő:

$$(T_a \wedge T_b \wedge \neg D) \vee (T_a \wedge \neg T_b \wedge \neg D) \vee (\neg T_a \wedge T_b \wedge D) \vee (\neg T_a \wedge \neg T_b \wedge D). \tag{7}$$

Ezzel két további, kevésbé ismert megoldást nyerünk:

- $T_a \equiv D$:
  - ◦ „Pontosan akkor vagy lovag, ha a baloldali ajtó hozza a szabadulást?” vagy
  - ◦ „Igennel válaszolnál, ha azt kérdezném, hogy a baloldali ajtó hozza a szabadulást?”

A módszer helyességét és teljességét a következő tétel mondja ki [6]:

3. Tétel. *A (2) illetve a (3) formula akkor és csak akkor érvényes valamely X formulára, ha az első módszer meghatározza ezt az X formulát.*

4.2. Második módszer

Az első módszernek megkötései vannak:

- Az eredeti formulának érvényesnek kell lennie.
- A formula csak egy ismeretlent tartalmazhat.

Smullyan néhány rejtvényében több ismeretlen mondat szerepel, s ezek formalizálásakor több ismeretlen formulát kapunk, így az első módszer nem alkalmazható. Ha m ismeretlen formulánk van, és azok maximum n ismert atomi formula logikai kombinációjaként állnak elő, akkor egy 2^n sort és 2^m oszlopot tartalmazó igazságtáblát kell készítenünk. Az előző példa ilyen igazságtáblája az 5. ábrán látható.

			$\neg(T_a \equiv T_b) \supset ((T_a \equiv X) \equiv D)$	
T_a	T_b	D	$(X = 1)$	$(X = 0)$
1	1	1	1	$1'$
1	1	0	$1'$	1
1	0	1	$1'$	0
1	0	0	0	$1'$
0	1	1	0	$1'$
0	1	0	$1'$	0
0	0	1	$1'$	1
0	0	0	1	$1'$

5. ábra. A második módszer igazságtáblája

Az 1 darab ismeretlen formulának 2 oszlop, a 3 darab ismert atomi formulának 8 sor felel meg. Miután az eredeti formula érvényes, így az ismert atomi formulák minden értékelése esetén igaz. Ezért, ha például T_a, $\neg T_b$ és D igazak (a táblázat harmadik sora), akkor az X formulának is igaznak kell lennie. A megoldás meghatározásához minden sorból pontosan egy egyest kell kiválasztani. Ha valamely sorban nincs egyes, akkor a feladatnak nincs megoldása, ha valamely sor többet is tartalmaz, akkor tetszőlegesen választhatunk közülük. A megjelölt egyeseket választva a korábbi megoldást kapjuk vissza.

Az ismeretlen formula megkonstruálása hasonlóan megy mint korábban, azokat az egyeseket kell kiválasztani, melyek az ismeretlen formula igaz értékéhez tartozó oszlopba esnek, és a sorokhoz tartozó értékelés alapján kell elkészíteni a d.n.f-t. A megjelölt egyeseket választva az X formula a (6) lesz, amit — mint korábban — $T_a \equiv D$ formára egyszerűsíthetünk.

Lássuk, hogyan alkalmazható a módszer több ismeretlen esetén ([22, 173. fejtörő])!

A „Ha P, akkor Q” állítás megfordítása a „Ha Q, akkor P” állítás. Van két állításunk, melyek egymás megfordításai, és olyanok, hogy

1. Egyik sem következik a másikból.

2) Ha egy erdélyi állítja valamelyiket, akkor ebből következik, hogy a másik igaz.

Tudna két ilyen állítást mondani?

Könnyebb a feladatot megoldani, ha független állításokkal dolgozunk, így jelölje X és Y az egyik állítás elő- és utótagját. Az első megkötés nem fogalmazható meg logikai törvénnyel, így a másik megkötést teljesítő megoldások közül kell kizárni azt, melyre ez a feltétel nem teljesül. A feladat formalizálására a $\mathcal{L}^{mv}$ nyelvet használjuk, s a feladat igazságtáblája a 6. ábrán látható. A két ismeretlennek megfelelően a táblázatnak négy oszlopa van.

		$\big(C_a(X \supset Y) \supset (Y \supset X)\big) \wedge \big(C_a(Y \supset X) \supset (X \supset Y)\big)$			
		$(X=1)$		$(X=0)$	
		$(Y=1)$	$(Y=0)$	$(Y=1)$	$(Y=0)$
V_a	M_a	$1'$	0	0	1
$\neg V_a$	M_a	1	$1'$	1	1
V_a	$\neg M_a$	1	1	$1'$	1
$\neg V_a$	$\neg M_a$	1	0	0	$1'$

6. ábra. A 173. fejtörő igazságtáblázata

Az algoritmus a tábla alapján $2 \times 4 \times 4 \times 2 = 64$ megoldást ad, ám mindegyikre külön-külön ellenőrizni kell, hogy teljesíti-e az első feltételt vagy sem. Tekintsük a megjelölt egyeseket tartalmazó megoldást. Az $X = 1$ jelű oszlopok alapján $X \sim (V_a \wedge M_a) \vee (\neg V_a \wedge M_a) \sim M_a$, míg az $Y = 1$ jelű oszlopok alapján $Y \sim (V_a \wedge M_a) \vee (V_a \wedge \neg M_a) \sim V_a$. Erre a megoldásra az első feltétel teljesül, így a kérdésben szereplő két állítás a következő: „Ha vámpír vagyok, akkor egészséges vagyok.” és „Ha egészséges vagyok, akkor vámpír vagyok.”

A módszer helyességét és teljességét a következő tétel mondja ki [6]:

4. Tétel. *A második módszer pontosan akkor határozza meg az ismeretlen X formulát, ha (2), illetve (3) érvényes, feltéve hogy ha az X a $P_1,\ldots,P_n$ atomi formulák logikai kombinációja, akkor a táblázat sorait legalább ezeknek az atomi formuláknak kombinációi adják.*

A módszerek alkalmazására további példákat [6] tartalmaz.

5. Variánsok

5.1. Egy nemnormális modális logika

Habár a fejtörőkben a *mond(ta)* szerepel, Naish [17] kivételével — akinek egyébként nem teljes a rendszere — mindenki a *mondhatja* alakot használta a fejtörők formalizálására, megoldására. Ezt azért is tehették, mert ha valaki mond valamit, akkor a lehetősége is megvan rá. Smullyan feladataiban csak a hipotézisekben szerepelt a mond, és ott is csak nem tagadott formában. Ilyen megkötéseket rendszerint nem tartalmaznak a logikák, ezért tekintsük általánosan a problémát! A szemantika megadásakor minden személyhez hozzá kell rendelni, hogy mely állításokat mondta ki, ám tetszőleges ilyen hozzárendelés esetén összeütközésbe kerülhetünk az emberek típusaival. Ezért legyen ϑ_U részhalmaza a $\mathcal{P} \times \mathcal{F}$ halmaznak, és ${}_\vartheta\models S_x B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $((x, B) \in \vartheta_U$ és ${}_\vartheta\models T_x \equiv B)$. Megjegyezzük, hogy semmilyen megkötést nem tettünk a ϑ_U halmazra, bár természetes igény, hogy a $\{B|(x, B) \in \vartheta_U\}$ halmaz minden lakos esetén véges legyen. Ennek a szemantikának megfelelő $\to S$ szekventkalkulusi szabályt hagyományosan használva nem sikerült bizonyítani $S_x B \supset S_x B$-t:

$$\boxed{T_x, B \longrightarrow S_x B}$$

$$\boxed{F_x \longrightarrow B, S_x B}$$

$$\begin{array}{c} S_x B \longrightarrow S_x B \\ \longrightarrow (S_x B \supset S_x B) \end{array}$$

Ezt elkerülendő, a $\to S$ szabályt csak bizonyos feltételek teljesülése esetén lehet használni:

- $\mathtt{S}_x B$ *(azaz az a formula, melyre a szabályt alkalmazzuk) ne szerepeljen a szekvent jobb oldalán.*
- *Az* $\mathtt{S}_x B$ *formula foka legyen nagyobb, mint a szekvent bármely, nem* SyC *alakú formulájának foka.*

Formula fokán a benne szereplő logikai összekötőjelek és modális operátorok számát értjük. Az előbbi megkötéssel a szekventkalkulus teljes lesz [8], ám a $S_a X \wedge S_a(X \supset Y) \supset S_a Y$ formula továbbra sem vezethető le, azaz ez egy nem-normális modális logika [11], amelyben még a $(A \equiv B) \supset (S_x A \equiv S_x B)$ (rule of extensibility) sem teljesül. Megjegyezzük, hogy az itt bemutatott módszerrel az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelvhez hasonlóan a többi nyelvnek is készíthető nem-normális variánsa.

5.2 Lovagok, lókötők és a többiek

Smullyan lovagjai mindig igazat mondanak, így hamis állításokat lovagok nem mondhatnak. Miután Smullyan nem említett tabukat a lovagokkal kapcsolatban, feltehetjük, hogy a lovagok minden igaz állítást kimondhatnak. Lókötőknél minden pontosan fordítva van. Ezeket az információkat táblázatba szedhetjük:

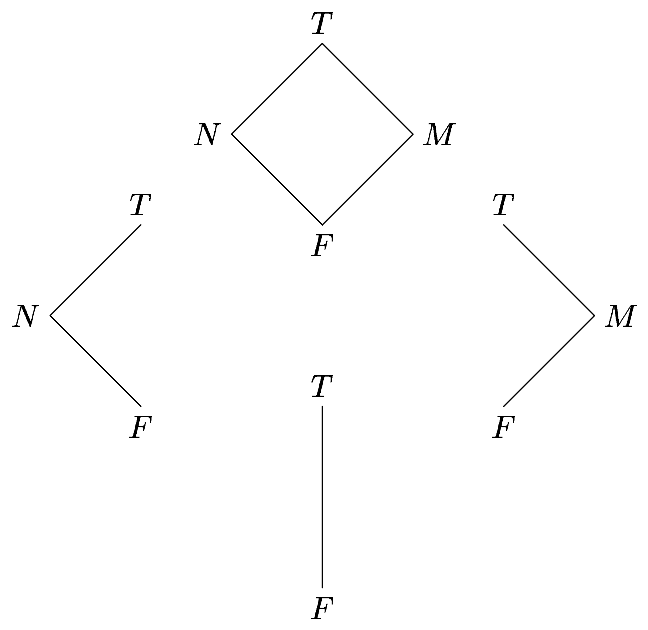
	hazudhat	nem hazudhat
mondhat igazat		*lovag*
nem mondhat igazat	*lókötő*	

A későbbiekben Smullyan bevezeti a normálisak fogalmát, aki mondhat igazat is, és hazudhat is. Ezt is beírva a táblázatba egy rublika marad üresen. Az itt szereplő nem mondhat se igazat, se hamisat, azaz nem mondhat semmit, ezért nevezzük el némának [2]! Az $\mathcal{L}^{tfnm}$ nyelv ezt a kerettörténetet írja le.

	hazudhat	nem hazudhat
mondhat igazat	*normális*	*lovag*
nem mondhat igazat	*lókötő*	*néma*

Mikor Dragálin Albert először mutatta meg Smullyan fejtörőit, a könyv orosz fordítását használta, amelyben valószínűleg az szerepelt ahelyett, hogy *minden lakos vagy lovag vagy lókötő*: *minden lakos igazmondó vagy hazug*. A megengedő vagy használata új logikát teremtett: $\mathcal{L}^{ih}$ (13). Ennek szintaxisát használva egy újabb szemantikával visszakapjuk a némákat is tartalmazó logikát.

Ha a nem hazug igazmondókat lovagoknak, a nem igazmondó hazugokat lókötőknek és a hazug igazmondókat némáknak nevezve egy újabb logikát kapunk ($\mathcal{L}^{tfm}$, 15) mely lezárja ezen logikák csoportját. Ha rendre az T, F, N és M jelöli a lovagokat, lókötőket, normálisokat és némákat, akkor a következő rajzot készíthetjük:



7. ábra. A logikai nyelvek variánsai

A T-t eggyel, az F-t nullával azonosítva a négy ábra egy négyelemű algebra részalgebráival rokonítható Az alsó rajz a lovagok és lókötők, a baloldali a lovagok, lókötők és normálisak logikáját adják, míg a további kettő a szerző verziói.

6. Érvényes formulák generálása

Legyen adott az $\mathcal{L}^{tf}$ logikai nyelv és tekintsük azt a $\mathcal{L}'$ kijelentéslogikai nyelvet, melynek atomi formulái a következő halmazt alkotják: $\mathcal{S} \cup \{T_x | x \in \mathcal{P}\}$. Legyen $'$ az a leképezés, mely a $\mathcal{L}^{tf}$ formuláihoz a $\mathcal{L}'$ formuláit rendeli a következőképpen:

$$
\begin{aligned}
p' &= \quad p, \text{ ha } p \in \mathcal{S}\\
(T_x)' &= \quad T_x\\
(F_x)' &= \quad \neg T_x\\
(\neg A)' &= \quad \neg A'\\
(A \triangle B)' &= \quad A' \triangle B'\\
(C_x A)' &= \quad T_x \equiv A'
\end{aligned}
$$

Könnyedén belátható az alábbi tétel:

5. TÉTEL. *Az A $\mathcal{L}^{tf}$-formula pontosan akkor érvényes, amikor az A' $\mathcal{L}'$-formula érvényes.*

Jegyezzük meg, hogy az $'$ leképezés nem bijektív, például a $C_x A$ és $T_x \equiv A$ képe egyaránt $T_x \equiv A'$. Mivel az $\mathcal{L}'$ logikai nyelv tekinthető az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv résznyelvének, az $\mathcal{L}^{tf}$ nyelv összes érvényes formulája az $\mathcal{L}'$ nyelv érvényes formulája lesz. Az $\mathcal{L}'$ nyelv eddig fel nem sorolt további érvényes formulái azok, melyekben F_x vagy C_x fordul elő. Ezeket úgy kaphajuk meg, hogy a $\mathcal{L}'$ nyelv érvényes formuláiban a $\neg T_x$ részformula helyett F_x-t, illetve a $T_x \equiv A$ részformula helyett $C_x A$-t írunk. Például a $T_x \equiv ((T_x \equiv B) \equiv B)$ érvényes $\mathcal{L}'$-formulából a $T_x \equiv ((C_x B) \equiv B)$, $C_x((T_x \equiv B) \equiv B)$ és $C_x(C_x B \equiv B)$ további érvényes $\mathcal{L}^{tf}$-formulákat kaphatjuk.

Smullyan fejtörőivel kapcsolatban felmerült, hogy melyek azok az állítások, melyeket mindenki mondhat. Az előbbi módszert használva, a feladat a $C_x A$ alakú érvényes formulák generálására korlátozódik. A $T_x \equiv T_x$, $T_x \equiv \neg(\neg T_x)$, $T_x \equiv (T_x \equiv \top)$ és $T_x \equiv (T_x \equiv (T_y \equiv T_y))$ érvényes $\mathcal{L}'$-formulákból többek között a $C_x T_x$, $C_x \neg F_x$, $C_x C_x \top$ és $C_x C_x C_y T_y$ érvényes $\mathcal{L}^{tf}$-formulákat kaphatjuk. Ezek szerint a lovag-lókötő sziget minden lakosa állíthatja, hogy *ő lovag*, hogy *ő nem lókötő*, hogy *ő állíthatja, hogy kétszer kettő négy*, valamint hogy *hogy állíthatja egy másik lakosról, hogy az azt állíthatja magáról, hogy lovag.* Már ez az utolsó példa is sejteti, hogy végtelen sok ilyen állítás létezik.

Természetesen a többi logikai nyelv esetén is felmerülhet ugyanez a kérdés. Általános esetben a $'$ leképezés az atomi formulákhoz önmagukat rendeli. (Az előbb ezt az F_x esetén megszegtük, hogy egyszerűbb legyen az 5. tétel.) Ekkor tetszőleges $\mathcal{L}$ nyelvre érvényes a 6. tétel, ahol a benne szereplő Z formulát a 3. fejezetben definiáltuk.

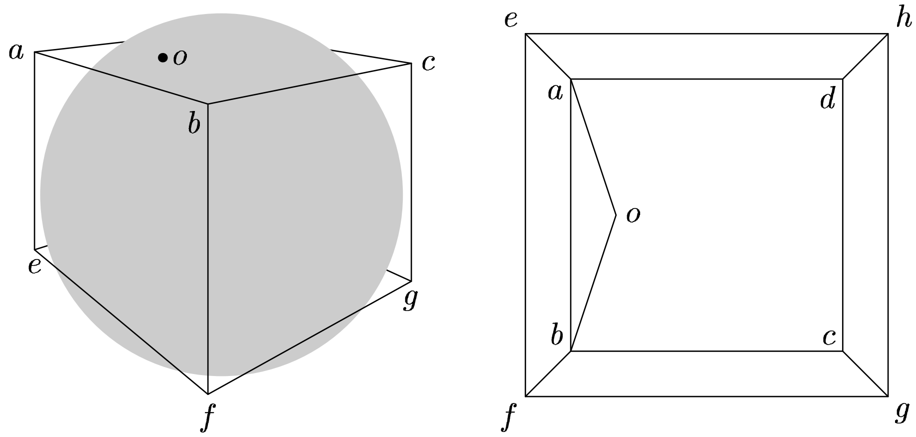
6. TÉTEL. *Az A $\mathcal{L}$-formula pontosan akkor érvényes, amikor az $Z \supset A'$ $\mathcal{L}'$-formula érvényes.*

Speciálisan az Oroszlán és Orrszarvú fejtörőit megvizsgálva az derül ki, hogy hétfőn (valamint kedden és szerdán) mindkét állat akkor mondhatja az A állítást, ha $U_x \equiv A$. Csütörtökön, (valamint pénteken és szombaton) ez $\neg U_x \equiv A$-ra módosul. Innen látható, hogy nincs olyan állítás, amit mindketten bármely nap kimondhatnának.

7. ALKALMAZÁS

A valós életben valószínűtlen, hogy egy ágens (robot vagy program) a lókötőhöz hasonlóan folyamatosan hazudjon, pontosabban folyamatosan igaz állítások tagadását állítsa. Jóval valószínűbbek a lovaghoz (megbízható), normálishoz (megbízhatatlan) és a némához (üzemképtelen) hasonlító ágensek. A fejtörőkben a lakosok ismerték egymás típusát, és pontosan meg tudták mondani, hogy ki milyen állításokat tehet. A valós életben az ágensek igen ritkán tudják a többi ágensről, hogy azok megbízhatóak-e vagy sem. Ezért azt sem képesek meghatározni, hogy a másik mit mondhat, viszont azt képesek memorizálni, hogy a másik mit mondott. S ez az, amiatt ebben a fejezetben a *mondhat* modális operátor helyett a *mond* operátort használjuk.

Az ágensekkel foglalkozó irodalom nagy része nyilvános közleményekkel dolgozik, habár méretesebb hálózat, kiváltképp dinamikusan változó hálózat esetén nehezen garantálható, hogy minden üzenet mindenkihez eljusson. A kommunikáció irodalmában, főleg a protokolok leírásánál a direkt, *point-to-point* üzenetváltás a gyakori. Ebben az esetben viszont nehézkes a megbízhatatlan alkatrész kiszűrése. Éppen ezért félnyilvános kommunikációt vizsgálunk: minden kijelentést pontosan a szomszédos ágensek kapnak meg.



8. ábra. Műholdak a föld körül

Példánkban nyolc műhold és egy földi állomás szerepel. A műholdak egy képzeletbeli kocka csúcsaiban helyezkednek el (8. ábra), és a kocka élei mentén tudnak kommunikálni. (A jobboldali kép a kommunikációs csatornákat ábrázolja.) Jelölje Q és R a műholdak egy-egy megfigyelését! A műholdak megfigyeléseikről jelentést küldhetnek, illetve más műholdak jelentéseit továbbíthatják. Ha az e műhold érzékeli, hogy Q teljesül, akkor ezt jelent(het)i (S_eQ), amit az a műhold felfog, és továbbít (S_aS_eQ). Miután a földi állomás szomszédja az a-nak, így megkapja az e műhold jelentését.

Tegyük fel, hogy a nyolc műhold közül egyszerre legfeljebb egy romlik el (megbízhatatlan, vagy üzemképtelen lesz). Ezen feltételek mellett, ha a földi állomás az S_aS_eQ és az S_bS_fQ üzeneteket fogja, biztos lehet benne, hogy a Q valóban igaz. Ha történetesen az S_aS_eQ és az $S_aS_dS_hQ$ a két üzenet, akkor már ebből nem következik, hogy Q igaz, mert ha a megbízhatatlan, egyik üzenetben sem lehet megbízni. Az S_aS_eQ és az $S_bS_f\neg Q$ egymásnak ellentmondó üzenetek semmi információt nem hordoznak Q-ról, de ezek alapján tudjuk azt, hogy az a, b, e és f műhold egyike megbízhatatlan. Ebben az esetben az S_aS_dR és az $S_bS_c\neg R$ további üzenetekből az is kiderül, hogy vagy az a vagy a b műhold megbízhatatlan.

A $\mathcal{L}^{tfnm}$ logika alapján könnyedén megkonstruálható a $\mathcal{L}^{tnm}$ logika, és az ahhoz tartozó szekventkalkulus, mellyel kideríthetőek az üzenetek következményei.

8. Függelék

A formulák halmazának ($\mathcal{F}$) képzési szabályai a következők:

F0. $\top \in \mathcal{F}$ és $\bot \in \mathcal{F}$.
F1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$,
F2. Ha $B \in \mathcal{F}$, akkor $\neg B \in \mathcal{F}$.
F3. Ha $B \in \mathcal{F}$ és $C \in \mathcal{F}$, akkor $(B \supset C) \in \mathcal{F}$, $(B \vee C) \in \mathcal{F}$ és $(B \wedge C) \in \mathcal{F}$.
F4. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $T_x \in \mathcal{F}$.
F5. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $F_x \in \mathcal{F}$.
F6. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{C}_x B \in \mathcal{F}$.
F7. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $M_x \in \mathcal{F}$.
F8. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $W_x \in \mathcal{F}$.
F9. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $B_x \in \mathcal{F}$.
F10. Ha $x \in \mathcal{P}$ és akkor $L_x \in \mathcal{F}$ és $U_x \in \mathcal{F}$.
F11. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{C}^h_x B \in \mathcal{F}$, $\mathtt{C}^k_x B \in \mathcal{F}$, $\ldots \mathtt{C}^v_x B \in \mathcal{F}$.
F12. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $V_x \in \mathcal{F}$.
F13. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $N_x \in \mathcal{F}$.
F14. Ha $x \in \mathcal{P}$ és $B \in \mathcal{F}$, akkor $\mathtt{S}_x B \in \mathcal{F}$.
F15. Ha $x \in \mathcal{P}$ akkor $I_x \in \mathcal{F}$ és $H_x \in \mathcal{F}$.

A ϑ értékelés definíciójának pontjai:

V0. ${}_\vartheta\!\models \top$, ${}_\vartheta\!\not\models \bot$.
V1. Ha $Q_i \in \mathcal{S}$, ${}_\vartheta\!\models Q_i$ akkor és csak akkor, ha $Q_i \in \vartheta_S$.
V2. ${}_\vartheta\!\models \neg B$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\!\not\models B$.
V3. ${}_\vartheta\!\models B \supset C$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\!\not\models B$ vagy ${}_\vartheta\!\models C$.
V4. ${}_\vartheta\!\models B \vee C$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\!\models B$ vagy ${}_\vartheta\!\models C$.
V5. ${}_\vartheta\!\models B \wedge C$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\!\models B$ és ${}_\vartheta\!\models C$.
V6. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\!\models T_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = t$
V7. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\!\models F_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = f$
V8. ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\!\models T_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).
V9. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\!\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$
V10. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\!\models W_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$
V11. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\!\models B_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$
V12. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\!\models L_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = l$
V13. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\!\models U_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = u$
V14. (${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^h_x B$, ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^k_x B$ és ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^s_x B$) akkor és csak akkor,
ha (${}_\vartheta\!\models L_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models U_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$).
(${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^c_x B$, ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^p_x B$ és ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^z_x B$) akkor és csak akkor,
ha (${}_\vartheta\!\models L_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models U_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).
${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^v_x B$ akkor és csak akkor, ha ${}_\vartheta\!\models B$.
V15. (${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^h_x B$, ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^k_x B$ és ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^s_x B$) akkor és csak akkor,
ha (${}_\vartheta\!\models L_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models U_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).
(${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^c_x B$, ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^p_x B$ és ${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^z_x B$) akkor és csak akkor,
ha (${}_\vartheta\!\models L_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models U_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).
${}_\vartheta\!\models \mathtt{C}^v_x B$ akkor és csak akkor,
ha (${}_\vartheta\!\models L_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models U_x$ és ${}_\vartheta\!\models B$) vagy (${}_\vartheta\!\models F_x$ és ${}_\vartheta\!\not\models B$).

V16. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models V_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_V$

V17. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x A$ akkor és csak akkor, ha

($_\vartheta\not\models M_x$, $_\vartheta\not\models V_x$ és $_\vartheta\models A$) vagy

($_\vartheta\models M_x$, $_\vartheta\models V_x$ és $_\vartheta\models A$) vagy

($_\vartheta\not\models M_x$, $_\vartheta\models V_x$ és $_\vartheta\not\models A$) vagy

($_\vartheta\models M_x$, $_\vartheta\not\models V_x$ és $_\vartheta\not\models A$).

V18. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$) vagy ${}_\vartheta\models N_x$.

V19. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\models N_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = n$

V20. ${}_\vartheta\models T_{x'}$ akkor és csak akkor ha ${}_\vartheta\models F_x$,

V21. ${}_\vartheta\models F_{x'}$ akkor és csak akkor ha ${}_\vartheta\models T_x$ és

V22. ${}_\vartheta\models N_{x'}$ akkor és csak akkor ha ${}_\vartheta\models N_x$.

V23. ${}_\vartheta\models \mathtt{S}_x B$ akkor és csak akkor ha $(x, B) \in \vartheta_U$ és (${}_\vartheta\models T_x$ pontosan akkor, mikor ${}_\vartheta\models B$)

V24. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$) vagy ${}_\vartheta\models N_x$.

V25. Ha $x \in \mathcal{P}$, ${}_\vartheta\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = m$

V26. ${}_\vartheta\models I_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_U$.

V27. ${}_\vartheta\models H_x$ akkor és csak akkor, ha $x \in \vartheta_V$.

V28. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor, ha (${}_\vartheta\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\models H_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$).

V29. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\models H_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$) vagy (${}_\vartheta\not\models I_x$, ${}_\vartheta\not\models H_x$).

V30. ${}_\vartheta\models \mathtt{C}_x B$ akkor és csak akkor ha (${}_\vartheta\models T_x$ és ${}_\vartheta\models B$) vagy (${}_\vartheta\models F_x$ és ${}_\vartheta\not\models B$).

V31. Ha $x \in \mathcal{P}$ ${}_\vartheta\models M_x$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta_T(x) = m$.

Kiegészítő szekventkalkulusi szabályok:

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A, F_x \;;\; F_x, A, \Gamma \to \Theta, T_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A} \;{\scriptstyle \to C_1}$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x \;;\; F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta} \;{\scriptstyle C_1 \to}$$

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x \;;\; L_x, A, \Gamma \to \Theta, U_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^h_x A} \;{\scriptstyle \to C^h_1}$$

$$\frac{L_x, \Gamma \to \Theta, A, U_x \;;\; U_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^c_x A} \;{\scriptstyle \to C^c_1}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^v_x A} \;{\scriptstyle \to C^v_1}$$

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x \;;\; L_x, \Gamma \to \Theta, A, U_x}{\mathtt{C}^h_x A, \Gamma \to \Theta} \;{\scriptstyle C^h_1 \to}$$

$$\frac{L_x, A, \Gamma \to \Theta, U_x \;;\; U_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x}{\mathtt{C}^c_x A, \Gamma \to \Theta} \;{\scriptstyle C^c_1 \to}$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta}{\mathtt{C}^v_x A, \Gamma \to \Theta}\ C^v_1{\to}$$

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, F_x\ ;\ L_x, A, \Gamma \to \Theta, U_x, F_x\ ;\ F_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, U_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^h_x A}\ {\to}C^h_2$$

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, F_x\ ;\ L_x, \Gamma \to \Theta, A, U_x, F_x\ ;\ F_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, U_x}{\mathtt{C}^h_x A, \Gamma \to \Theta}\ C^h_2{\to}$$

$$\frac{L_x, \Gamma \to \Theta, A, U_x, F_x\ ;\ U_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, F_x\ ;\ F_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, U_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^c_x A}\ {\to}C^c_2$$

$$\frac{L_x, A, \Gamma \to \Theta, U_x, F_x\ ;\ U_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, F_x\ ;\ F_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, U_x}{\mathtt{C}^c_x A, \Gamma \to \Theta}\ C^c_2{\to}$$

$$\frac{U_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, F_x\ ;\ L_x, \Gamma \to \Theta A, U_x, F_x\ ;\ F_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, U_x\ ;}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}^v_x A}\ {\to}C^v_2$$

$$\frac{U_x, A, \Gamma \to \Theta, L_x, F_x\ ;\ L_x, A, \Gamma \to \Theta, U_x, F_x\ ;\ F_x, \Gamma \to \Theta, A, L_x, U_x}{\mathtt{C}^v_x A, \Gamma \to \Theta}\ C^v_2{\to}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, M_x, V_x, A\ ;\ M_x, V_x \Gamma \to \Theta, A\ ;\ V_x A, \Gamma \to \Theta, M_x\ ;\ M_x, A, \Gamma \to \Theta, V_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\ {\to}C_2$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Theta, M_x, V_x\ ;\ M_x, V_x, A, \Gamma \to \Theta,\ ;\ V_x, \Gamma \to \Theta, M_x, A\ ;\ M_x, \Gamma \to \Theta, V_x A}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\ C_2{\to}$$

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A, F_x, N_x\ ;\ F_x, A, \Gamma \to \Theta, T_x, N_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\ {\to}C_3$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x, N_x\ ;\ F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x, N_x\ ;\ N_x, \Gamma \to \Theta, T_x, F_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\ C_3{\to}$$

$$\frac{T_x, F_{x'}, \Gamma \to \Theta, A, F_x, N_x, T_{x'}, N_{x'}\ ;\ F_x, T_{x'}, A, \Gamma \to \Theta, T_x, N_x, F_{x'}, N_{x'}}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\ {\to}C_4$$

$$\frac{S_1 \;;\; S_2 \;;\; S_3}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\, C_4{\to},$$

ahol

S_1: $T_x, F_{x'}, A, \Gamma \to \Theta, F_x, N_x, T_{x'}, N_{x'}$,
S_2: $F_x, T_{x'}, \Gamma \to \Theta, A, T_x, N_x, F_{x'}, N_{x'}$ és
S_3: $N_x, N_{x'}, \Gamma \to \Theta, T_x, F_x, T_{x'}, F_{x'}$.

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x \;;\; F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x}{\mathtt{S}_x A, \Gamma \to \Theta}\; S{\to}$$

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A, F_x, N_x, M_x \;;\; F_x, A, \Gamma \to \Theta, T_x, N_x, M_x \;;\; M_x, \Gamma \to \Theta, T_x, F_x, N_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\; {\to}C_5,$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x, N_x, M_x \;;\; F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x, N_x, M_x \;;\; N_x, \Gamma \to \Theta, T_x, F_x, M_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\; C_5{\to}$$

$$\frac{I_x, \Gamma \to \Theta, A \;;\; H_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\; {\to}C_6$$

$$\frac{I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x \;;\; H_x, \Gamma \to \Theta, A, I_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\; C_6{\to}$$

$$\frac{I_x, \Gamma \to \Theta, A \;;\; H_x, A, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\; {\to}C_7$$

$$\frac{I_x, A, \Gamma \to \Theta, H_x \;;\; H_x, \Gamma \to \Theta, A, I_x \;;\; \Gamma \to \Theta, I_x, H_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\; C_7{\to}$$

$$\frac{T_x, \Gamma \to \Theta, A, F_x, M_x \;;\; F_x, A, \Gamma \to \Theta, T_x, M_x M_x, \Gamma \to \Theta, T_x, F_x}{\Gamma \to \Theta, \mathtt{C}_x A}\; {\to}C_8$$

$$\frac{T_x, A, \Gamma \to \Theta, F_x, M_x \;;\; F_x, \Gamma \to \Theta, A, T_x, M_x}{\mathtt{C}_x A, \Gamma \to \Theta}\; C_8{\to}$$

Irodalomjegyzék

[1] Rodolphe Arthaud, Pierre Bieber, Luis Farinas Del Cerro, Jean Henry, and Andreas Herzig. *Molog - Manuel d'utilisation.* Universite Paul Sabatier, Toulouse, février 1986.

[2] László Aszalós. The Logic of Knights, Knaves, Normals and Mutes. *Acta Cybernetica*, 14:533–540, 2000.

[3] László Aszalós. A Method to Solve the Puzzles of Knights and Knaves. Publi. Math., Debrecen, közlésre beadva, 2000.

[4] László Aszalós. Smullyan logikai rejtvényei és automatikus megoldásuk. Technical Report 2000/14, Matematikai és Informatikai Intézet, Debreceni Egyetem, 2000.

[5] László Aszalós. Automated Puzzle Solving. Journal of Applied Non-Classical Logic, Toulouse, közlésre beadva, 2001.

[6] László Aszalós. Automated Solution of the Riddle of Dracula and Other Puzzles. In Rajeev Goré, Alexander Leitsch, and Tobias Nipkow, editors, *Proc. Int. Joint Conf. on Automated Reasoning (IJCAR'01)*, pages 1–10, Siena, June 2001.

[7] László Aszalós. Four type of inhabitants. Technical Report 267, Institute of Mathematics and Informatics, University of Debrecen, Hungary, 2001.

[8] László Aszalós. Said and Can Say in Puzzles of Knights and Knaves. In B. Chaib-draa and P. Enjalbert, editors, *Proc. 1ères Journées Francophones des Modèles formels pour l'interaction*, volume 3, pages 353–362, Toulouse, May 2001.

[9] László Aszalós. Truthtellers and liars. 2001.

[10] László Aszalós and Andreas Herzig. Reasoning about Failure. In *Workshop Notes of Engieneering Societies in the Agents' World*, pages 67–78, Prague, July 2001. LNAI közlésre elfogadva.

[11] Brian F. Cellas. *Modal logic: an introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[12] David Gries and Fred B. Schneider. *A Logical Approach to Discrete Math.* Springer Verlag, 1993.

[13] H. James Hoover and Piotr Rudnicki. Teching freshman logic with Mizar-MSE. In *DIMACS Symposium on Teaching Logic and Reasoning in an Illogical World*, Rutgers University, Piscataway, New Jersey, 1996.

[14] S. C. Kleene. *Mathematical Logic.* John Wiley & Sons, Inc., 1967.

[15] Adam Kolany. A general method of solving Smullyan's puzzles. *Logic Log. Philos.*, (4):97–103, 1996.

[16] E. Lusk L. Wos, R. Overbeek and J. Boyle. *Automated Reasoning: Introduction and Applications.* McGraw-Hill., 1992.

[17] L. Naish. A NU-Prolog program to solve knights-knaves puzzles. comp.lang.prolog hírcsoport, 2000. február 11.

[18] H. J. Ohlbach and M. Schmidt-Schauss. The lion and the unicorn. *J. Automat. Reason.*, 1(3):327–332, 1985.

[19] György Serény. Gödel, Tarski, Church, and the Liar. Technical Report TUB/Math-99/01, Technical University of Budapest, 1999.

[20] Keith Simmons. Deflationary thruth and the liar. *Journal of Philosophical Logic*, (28):455–488, 1999.

[21] R. M. Smullyan. *First-order logic.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1968. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 43.

[22] R. M. Smullyan. *What is the name of this book? (The riddle of Dracula and other logical puzzles).* Prentice Hall, Inc., 1978.

[23] R. M. Smullyan. *Forever Undecided – A Puzzle Guide to Gödel.* Alfred A. Knopf, Inc., New York, 1987.