Vizsgálatok speciális Finsler-terekben

doktori (Ph.D.) értekezés

Szilágyi Brigitta

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2004

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és Számítástudomány Doktori Iskola Differenciálgeometria és Alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (Ph.D.) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2004. augusztus 19.

(Szilágyi Brigitta)

Tanúsítom, hogy Szilágyi Brigitta doktorjelölt 1997-2004 között a fent megnevezett Doktori Iskola Differenciálgeometria és Alkalmazásai programja keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2004. augusztus 19.

(Dr. Bácsó Sándor)

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

1. Alapfogalmak, alaptételek **5**

1.1. Homogén függvények 5
1.2. Regularitás 7
1.3. Az alapfüggvény 8

2. Projektív Finsler-geometria **11**

2.1. Projektív reláció 11
2.2. Projektív invariánsok 16
2.3. Skalár és konstans görbületű Finsler-terek 17

3. Speciális Finsler-terek **23**

3.1. Riemann-terek 23
3.2. Lokálisan Minkowski-terek 26
3.3. Berwald-terek 28
3.4. Landsberg-terek 30
3.5. Wagner-terek 32
3.6. (α, β)-metrikával ellátott Finsler-terek 35
3.7. Douglas-terek 40

4. Finsler-terek projektív megfeleltetései **45**

4.1. Síkprojektív Finsler-terek 45
4.2. Speciális Finsler-terek projektív megfeleltetései 48

5. Vizsgálatok speciális Finsler-terekben **51**

5.1. Differenciálegyenletek kiegyenesíthetőségéről 51
5.2. Gyengén Berwald Finsler-terek 55
5.3. Kétdimenziós Finsler-terek 58
5.4. $^*P$ Finsler-terek Randers-transzformációja 66
5.5. Néhány Finsler-geometriai modell 73

5.5.1. Speciális Finsler-metrikák (történeti áttekintés) 73
5.5.2. A Funk-féle távolságfüggvény 75
5.5.3. A Hilbert-féle távolságfüggvény 76
5.5.4. A Funk- és a Hilbert-metrika 76
5.5.5. Lehetséges Finsler-metrikák a pszichometriában 78

Irodalomjegyzék **81**

Bevezetés

Bár az általánosított metrikus differenciálgeometriai – később Finsler – tér fogalmát Riemann [R] 1854-ben vetette fel abban a híres habilitációs előadásában, amelyben az n-dimenziós tér metrizálhatóságának különböző módozatait vizsgálta, a Finsler-geometria számos, figyelemre méltó eredménye az utóbbi évtizedekben született meg. Riemann a fő hangsúlyt arra a metrikára helyezte, amely egy pozitív definit kvadratikus forma négyzetgyökeként áll elő, de lehetséges általánosításképpen megemlítette azt a metrikát is, amit ma Finsler-metrikaként ismerünk.

A Finsler-téren lényegében minden pont érintőterében egy-egy általánosított normafüggvény van megadva, amely nem szükségképpen származik belső szorzatból. Meglepő módon a Riemann-tér ilyenfajta általánosítása több, mint hatvan évre feledésbe merült. Riemann maga, bonyolultságra hivatkozva vetette el az – ekkor még „általánosított metrikának" nevezett – új lehetőséget.

Az első fontos eredmény ebben a témakörben Paul Finsler [F1] 1918-ban megjelent dolgozata (innen származik a Finsler-tér elnevezés is, amelyet 1927-ben J. H. Taylor vezetett be). Finslert a tanára, Carathéodory által bevezetett és a variációszámítás paraméteres problémáinak megoldására alkalmazható új geometriai módszerek ihlették, amelyek alapjaként az indikátrix fogalma szolgált. 1925-ben J. H. Taylor [T], J. L. Synge [S] és L. Berwald [B1], [B2] szinte egyidejűleg kezdte el az elméletnek a tenzoranalízis eszközeivel való vizsgálatát. Elsődleges céljuk a tér geometrizálása, azaz a metrikával összhangban lévő párhuzamosság fogalom, illetve deriválási kalkulus kiépítése volt.

Váratlan és új fordulat ment végbe a Finsler-elmélet fejlődésében 1934-ben, amit É. Cartannak [C1] a Finsler-terekről megjelent értekezése idézett elő. Cartan elmélete egy speciális megközelítésen alapult: olyan teret tekintett, amely nem pontokból, hanem ún. vonalelemekből áll. Ezen a téren már meg lehet adni olyan konnexióparamétereket és így kovariáns deriválást is, amely hasonlít a Riemann-terek elméletéből ismertekhez. (Például igaz a Ricci-lemma, amely a metrikus tenzor kovariáns deriváltjának eltűnését követeli meg és amelyik nem teljesül, ha a teret ponttérként kezeljük.) Bizonyos analógiákra alapozva sikerült meghatározni e geometria jellemző tenzorát, összefüggési együtthatóit, stb.. A Cartan-terek teljes invariánsrendszerének kiszámítását Rapcsák András végezte el, pontosan leírva azokat a tenzorokat, illetve vektorokat, amelyeknek, illetve amelyek kovariáns deriváltjainak függvényeként minden más tenzori differenciálinvariáns előállítható. Sokan tekintették úgy, hogy az elmélet fejlődése ezzel elérte csúcspontját. Számos fizikai probléma vizsgálata esetén azonban sokkal hasznosabb, ha mégis ponttérnek tekintjük a Finsler-teret, másrészt a Cartan-féle megközelítés jelentősen csökkenti a Finsler-elmélet és a variációszámítás kapcsolatát.

A második világháborút követően a Finsler-geometria egy új fejezete kezdődött H. Busemann [Bu1] munkásságával. Busemann célul tűzte ki a „Finsler-geometria erdejének megtisztogatását a tenzorok dzsungelétől", továbbá hangsúlyozta a Minkowski-geometria tanulmányozását a Finsler-geometria minél gyorsabb fejlődése érdekében [Bu2], [Bu3].

Ekkor született meg a Finsler-geometria egyik kitűnő monográfiája H. Rund tollából [Ru].

Már e geometria kiépülésekor is jól megfigyelhető a meglévő geometriákban fennálló összefüggések vizsgálata, általánosítása. Önként kínálkozik az a gondolat, hogy akár a tér metrikus jellegét szem előtt tartva, akár arról lemondva foglalkozzunk a geodetikusok illetve a pályák elméletével. (E két, Riemann-terek esetén szinoním fogalom általánosabb terekben szétválhat.) A geodetikusok és a pályák illetve a geodetikus- és a pályatartó leképezések vizsgálata a Finsler-geometria bármely periódusában időszerűnek bizonyult. J. Douglas pontterek pályáira kidolgozott elméletét – melynek első összefoglalása L. P. Eisenhart: "Non-Riemannian Geometry" [E] című könyvében található – Finsler-terekre Rapcsák András [Rap2], [Rap3] általánosította, aki a pályatartó leképezések számos klasszikus eredményét adta meg. Napjainkban (többek között) Makoto Matsumoto és Bácsó Sándor publikációi világítják meg új és új oldalról ezen leképezések tulajdonságait.

Az utóbbi évtizedekben a Finsler-geometriában számos figyelemre méltó eredmény látott napvilágot, előtérbe került a Finsler-terek kutatása. A teljesség igénye nélkül álljon itt az ezidőtájt íródott, kiváló összefoglaló, áttekintő jellegű munkák, monográfiák szerzőinek névsora, akiknek nevéhez egy-egy iskola működése is kapcsolódik: M. Matsumoto [M2], S. S. Chern, D. Bao, Z. Shen [BCS], [She3]. A valós Finsler-metrikákat vizsgáló írások mellett megszülettek a komplex Finsler-metrikákkal foglalkozó tanulmányok is [AP].

A Finsler-geometria történetét vizsgálva szembeötlő, hogy már a korai eredmények alkalmazásai is milyen hasznosnak bizonyultak a fizikában. Az alkalmazások köre az utóbbi időben jelentősen bővült, a fizika, a biológia mellé egyéb tudományterületek is felsorakoztak [AIM], [AM].

A szerző eredményeit – melyek részben a témavezetővel, Bácsó Sándorral közös munka és tanulás termékei – az 5. fejezet tartalmazza. Így kiemeljük a közönséges másodrendű differenciálegyenletek "kiegyenesíthetőségét" és a kétdimenziós Douglas-terek geodetikusai közötti kapcsolatot taglaló; a Kropina típusú gyengén Berwald-terek létezését vizsgáló publikációkat. Továbbá kiszámoltam a kétdimenziós Wagner-Douglas-terek főskalárját és tanulmányoztam $^*P$-Finsler-terek Randers-transzformációit. Eredményeimet a [BOSZ], [BSZ], [Szi1], [Szi2], [BGYPSZ] dolgozatokban jelentettem meg. Az 5.1.8., az 5.2.5., az 5.2.6., az 5.3.15. az 5.4.10., az 5.4.11., az 5.4.12. tételek a szerző saját illetve társszerzőkkel közös eredménye.

1. fejezet

Alapfogalmak, alaptételek

Ebben a fejezetben a téma megértéséhez szükséges fogalmakat és eredményeket foglaljuk össze.

1.1. Homogén függvények

Legyen U az $\mathbb{R}^n$ egy nyílt tartománya és legyen

$$f(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = f(x, y) : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

C^2-osztályú leképezés. Legyen továbbá $c : [a, b] \to U$ egy

$$x^i = x^i(t) \,, \quad a \le t \le b$$

alakban megadott görbe U-ban, amely C^1-osztályú $[a, b]$-n. Az ilyen tulajdonságú görbék közül megengedetteknek nevezzük azokat, amelyeknek $x(a)$ és $x(b)$ pontja rögzített.

Tekintsük most az ilyen megengedett görbék esetén a

$$J(c) = \int_a^b f\big(x(t), \dot{x}(t)\big) dt \,, \quad \text{ahol} \quad \dot{x} := \frac{dx}{dt} \tag{1.1.1}$$

integrált és a variációszámítási probléma paraméteres alakját. Közismert, hogy ekkor a $J(c)$ minimumát adó c görbe tetszőleges C^1-osztályú darabja szükségképpen kielégíti az

$$E_i(c) := \frac{d(\partial f / \partial y^i)}{dt} - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \tag{1.1.2}$$

Euler-egyenletet. Természetes követelmény, hogy a megengedett görbék irányítottak legyenek növekvő t paraméterrel és a $J(c)$ integrál ne függjön a paraméter megválasztásától. Így egy olyan $t = \varphi(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ paramétertranszformációval foglalkozunk, melyre $\dfrac{d\varphi}{d\tau} > 0$ és feltételezzük, hogy

$$\int_a^b f(x, dx/dt)dt = \int_\alpha^\beta f(x, dx/d\tau)d\tau \,, \tag{1.1.3}$$

ahol $a = \varphi(\alpha)$ és $b = \varphi(\beta)$. Ha ezt τ szerint differenciáljuk és tekintetbe vesszük, hogy az $x(\beta)$ végpont tetszőleges, akkor a következőt kapjuk:

$$f(x, dx/dt)(dx/d\tau) = f(x, dx/d\tau) \,.$$

Speciálisan vehetjük a $t = p\tau$ paramétertranszformációt, ahol $p > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor

$$f(x, dx/dt)p = f\big(x, (dx/d\tau)p\big) \,. \tag{1.1.4}$$

Definíció: [AIM] Egy $g(u) := g(u^1, \ldots, u^n)$, $u = (u^i)$, n változós függvényt u-ban r-edfokú pozitív homogénnek nevezzük (röviden $(r)_p$-homogénnek) U-ban, ha

$$g(pu) = p^r g(u)$$

teljesül tetszőleges pozitív p-re.

Így (1.1.4) azt mutatja, hogy $f(x, y)$ szükségképpen elsőfokú homogén y-ban. Megfordítva, nyilvánvaló, hogy (1.1.4)-ből következik (1.1.3). Így a Carathèodory-tételhez jutunk:

1.1.1. Állítás: *[AIM] A $J(c)$ integrál pontosan akkor független a c paraméterének megválasztásától, ha az $f(x, y)$ függvény $(1)_p$-homogén y-ban.*

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy az $f(x, y)$ függvény x^i szerinti parciális deriváltjai szintén $(1)_p$-homogének.

Tekintsük a $g(u)$ n változós, u-ban r-edfokú pozitív homogén függvényt. A definícióban szereplő egyenlőséget p szerint deriválva és $p = 1$-et helyettesítve a következő egyenlőség adódik:

$$(\partial g/\partial u^i)u^i = rg(u) \,. \tag{1.1.5}$$

Megfordítva, (1.1.5)-ből az

$$rg(pu) = (\partial g/\partial u^i)\big|_{pu}\, pu^i = (\partial g(pu)/\partial p)p$$

egyenlőséget kapjuk.

Most $g(pu)$-t egy p-től függő $h(p)$ függvénynek tekintve a fentiekből $d\big(h(p)/p^r\big)/dp = 0$ következik, vagyis $h(p) = p^r h(1)$. Ez pedig éppen a fenti definícióban szereplő egyenlőség. Ilymódon Eulernek a homogén függvényekről szóló tételéhez jutunk:

1.1.2. Tétel: *[AIM] Egy C^1-osztályú $g(u)$ függvény pontosan akkor $(r)_p$-homogén, ha eleget tesz az (1.1.5) feltételnek.*

Az (1.1.5) egyenlőséget u^j szerint differenciálva:

$$\left(\frac{\partial(\partial g/\partial u^i)}{\partial u^j}\right) u^i + \frac{\partial g}{\partial u^j} = r\frac{\partial g}{\partial u^j} \ ,$$

ebből

$$\left(\frac{\partial(\partial g/\partial u^i)}{\partial u^j}\right) u^i = (r-1)\frac{\partial g}{\partial u^j} \ .$$

Így igaz a következő
Megjegyzés: Ha egy C^2-osztályú $g(u)$ függvény $(r)_p$-homogén u-ban, akkor $\partial g/\partial u^i$ $(r-1)_p$-homogén u-ban.

A definícióbeli egyenlőségből belátható még, hogy ha egy u-ban r-edfokú pozitív homogén $g(u)$ függvény folytonos $u = 0$-ban, akkor

$$\begin{aligned} r > 0 \quad &\text{esetén:} \quad g(0) = 0 \ , \\ r = 0 \quad &\text{esetén:} \quad g(u) = \text{konstans} \ . \end{aligned}$$

1.1.3. Állítás: *[AIM] Ha $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindenütt C^1-osztályú és $(1)_p$-homogén, akkor lineáris függvény.*

1.2. Regularitás

Az (1.1.2) Euler-egyenlet vizsgálatánál kikötöttük, hogy f C^2-osztályú és $(1)_p$-homogén legyen y-ban. Alkalmazva az $f_i := \partial f/\partial y^i$ és $f_{ij} := \partial f_i/\partial y^j$ jelöléseket, és az (irodalomban szokásos) Einstein-konvenciót, a következő alakot nyerjük:

$$E_i(c) = f_{ij}\frac{dy^j}{dt} + \frac{\partial f_i}{\partial x^j}y^j - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \ .$$

Mivel f_i nulladfokú pozitív homogén y-ban, $f_{ij}y^i = 0$. Így a $(h_{ij} = f\partial_i\partial_j f)$ mátrix rangja kisebb, mint n és az $E_i(c) = 0$ másodrendű differenciálegyenletet nem tudjuk ún. normál alakba írni. Továbbá, mivel $\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}y^i = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$

miatt $E_i(c)y^i = 0$, ez az n darab egyenlet nem független egymástól.

Írjuk át (1.1.2)-t az

$$F(x,y) = \big\{f(x,y)\big\}^2/2 \tag{1.2.1}$$

y-ban másodfokú pozitív homogén függvény segítségével, vagyis

$$E_i(c) = \frac{d(F_i/f)}{dt} - \frac{(\partial F/\partial x^i)}{f} = 0\ ,$$

ahol $F_i = \partial F/\partial y^i$.

A c görbének a

$$\tau = \int\limits_a^t f\big(x(t), \dot{x}(t)\big)\,dt$$

összefüggéssel megadott τ ívhosszparaméterét véve világos, hogy $d\tau/dt = f(x,\dot{x})$, a homogenitásból pedig azt kapjuk, hogy $f(x,\dot{x})dt/d\tau = f(x, dx/d\tau) = 1$. Tehát

$$E_i(c) = dF_i/d\tau - \partial F/\partial x^i = 0\ , \quad y = dx/d\tau\ .$$

Az

$$F_{ij}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \tag{1.2.2}$$

helyettesítéssel az

$$E_i(c) = F_{ij}(x,y)\frac{dy^j}{d\tau} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x^j}y^j - \frac{\partial F}{\partial x^i}\right) = 0\ , \quad y = \frac{dx}{d\tau} \tag{1.2.3}$$

alakhoz jutunk. Eképpen, ha $\det(F_{ij})$ nem tűnik el, az n darab független $E_i(c) = 0$ egyenletet át tudjuk írni normál alakba.

Definíció: [AIM] Ha $\det(F_{ij})$ nem tűnik el, akkor a variációszámítás paraméteres problémáját regulárisnak nevezzük.

1.3. Az alapfüggvény

Legyen M egy n-dimenziós differenciálható sokaság és $L(x,y)$ egy valós függvény M érintőterén, TM-en. Legyen $x^i = x^i(t)$, $a \le t \le b$ valamely c

görbe egy U koordinátakörnyezetbe eső szeletének az egyenlete. Ezen görbedarab s ívhosszát a következő integrál adja meg:

$$s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big) dt \,. \qquad (1.3.1)$$

Definíció: [AIM] Egy a fenti ívhosszfogalommal ellátott M sokaságot egy L alapfüggvényű, n-dimenziós Finsler-térnek mondunk, ha L teljesíti az alábbi feltételeket:

Differenciálgeometriai céljaink érdekében fel kell tételeznünk, hogy L differenciálható x^i-ben és y^i-ben. Hacsak más nem szerepel, legyen L mindig C^∞-osztályú.
Továbbá:

(1) Tetszőleges irányított görbe ívhossza független a paraméter megválasztásától, vagyis L elsőfokú pozitív homogén y-ban.

(2) Az (1.3.1) egy reguláris variációszámítási problémát eredményez, azaz a

$$g_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j} \,, \quad F := L^2/2 \qquad (1.3.2)$$

determinánsa nem zérus.

(3) Tetszőleges $x \in M$ pont T_xM érintőterében van egy olyan T_xM^* tartomány, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- L differenciálható y^i-ben, ha $y^i \in T_xM^*$,
- T_xM^* nem tartalmazza a nullvektort,
- pozitívan kúpszerű tartomány, tehát olyan nem nulla $y \in T_xM^*$ érintővektorokból áll, amelyekre $py \in T_xM^*$ tetszőleges $p > 0$ esetén.

Eképpen $TM^* := \bigcup\limits_{x \in M} T_xM^*$ az L alapfüggvény értelmezési tartománya.

(4) Az L alapfüggvény pozitív értékű T_xM^*-on.

Megjegyzések:

1. A g tenzormezőt metrikus tenzornak nevezik. A $g_{ij}(x,y)$ komponensek nulladfokú pozitív homogének, valamint
$$y_i = g_{ij}(x,y)y^j = \frac{\partial F}{\partial y^i} = L\frac{\partial L}{\partial y^i}\,, \tag{1.3.3}$$
$$g_{ij}(x,y)y^iy^j = 2F(x,y) = L^2(x,y)\,. \tag{1.3.4}$$
2. Ha $g_{ij}(x,y)$ folytonos az $y=0$ pontban, akkor a g_{ij}-k csak x-től függő mennyiségek és (1.3.4) az $L^2(x,y) = g_{ij}(x)y^iy^j$ Riemann-metrikára redukálódik.

Definíció: [AIM] Az $s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt$ ívhosszintegrál extremálisait a tér geodetikusainak nevezzük.

Egy Finsler-tér geodetikus görbéinek differenciálegyenlet-rendszerét kanonikus paraméter esetén a következőképpen adhatjuk meg:
$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0\,, \tag{1.3.5}$$
ahol
$$2G_j = g_{ij}(x,y)G^i(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^j \partial x^i}y^i - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x^j}\,, \tag{1.3.6}$$
ahol $F(x,y) = \big(L(x,y)\big)^2/2$.

2. fejezet

Projektív Finsler-geometria

A Riemann-térben a geodetikus vonalaknak két tulajdonsága van. A metrikus tulajdonság alapján a geodetikusok két pont legrövidebb összekötő vonalai. Van azonban a közönséges egyeneseknek egy olyan, nem-metrikus tulajdonsága is, amely jellemző rá, s amely érvényes a Riemann-geometria geodetikus vonalaira is: érintői párhuzamosak egymással. Mivel ez utóbbi tulajdonság teljesedésének vizsgálatához nincs szükség metrikára, ezeket a vonalakat pályáknak nevezzük, ezzel is kifejezve azt, hogy a metrika hiánya miatt nem mondhatjuk, hogy e vonalak minimális ívhosszú görbék. Minthogy a Finsler-térben metrikus alapfüggvény is létezik, ezért olyan jellegű tételek felkutatása kívánatos, amelyekben a tér alapfüggvénye is szerepel. Ebben az irányban haladva, a Finsler-terek geodetikustartó leképezéseit tanulmányozva meg kell említenünk Rapcsák András nevét, akinek sikerült differenciálegyenlet-rendszerrel jellemezni azoknak a Finsler-tereknek az alapfüggvényeit, amelyek geodetikusan leképezhetők egy másik Finsler-térre [Rap2]. Rapcsák e dolgozata még két szükséges és elégséges feltételt is tartalmaz két Finsler-tér geodetikus megfeleltethetőségére vonatkozóan.

Ugyancsak Rapcsák volt az, aki a sokasághoz tartozó Weyl- illetve Douglas-tenzorok (ld. jelen fejezet 2. része), valamint kovariáns deriváltjainak felhasználásával kritériumot adott egy leképezés pályatartó voltára, s megmutatta, hogy e tenzorok a pályatartó leképezés teljes invariánsrendszerét adják [Rap3].

2.1. Projektív reláció

Mint ismert, egy $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big)$ Finsler-tér geodetikusait az (1.3.5) differenciálegyenlet szolgáltatja. Ha a geodetikusok lokálisan felírhatók –

$x^i = x^i(t)$, ahol t paraméter – akkor az előbb említett differenciálegyenlet

$$d^2x^i/dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t)dx^i/dt \tag{2.1.1}$$

alakot ölt, ahol

$$G^i(x,y) = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^i \partial x^k}y^k - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x^j}\right) \qquad \text{és}$$

$$\gamma(t) := (ds^2/dt^2)/(ds/dt)\,.$$

Definíció: [AIM], [She3] Tekintsük az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big)$ valamint az $\bar{F}^n = \big(M^n, \bar{L}(x,y)\big)$ közös alapsokaságú Finsler-tereket. Ha az F^n tér minden geodetikusa egybeesik az $\bar{F}^n$ tér valamely geodetikusával (mint ponthalmazzal) és fordítva, akkor az $L(x,y) \to \bar{L}(x,y)$ megfeleltetést projektívnak nevezzük és azt mondjuk, hogy F^n projektív $\bar{F}^n$-hez.

Legyen $c : x^i = x^i(t)$ az M^n egy olyan görbéje, amely közös geodetikusa F^n-nek és $\bar{F}^n$-nek. Ekkor c egyenletét F^n-ben (2.1.1) szolgáltatja, míg $\bar{F}^n$-ben

$$d^2x^i/dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t)dx^i/dt$$

alakban írható. Ezért

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t))\, dx^i/dt\,.$$

Mivel a fenti egyenlőségnek bármely x pontban és bármely dx/dt irányban teljesülnie kell, így igaz a következő tétel:

2.1.1. Tétel: *[K] Egy F^n Finsler-tér projektív egy $\bar{F}^n$ Finsler-térhez pontosan akkor, ha létezik olyan $p(x,y)$ elsőfokú pozitív homogén skalármező, amely kielégíti a*

$$\bar{G}^i(x,y) = G^i(x,y) + p(x,y)y^i$$

egyenlőséget. A $p(x,y)$ skalármezőt a projektív transzfomáció projektív faktorának nevezzük.

Tekintsük most az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big)$ Finsler-tér $B\Gamma = (G^i_{jk}, G^i_j, 0)$ Berwald-konnexióját, legyen $g_{ij}(x,y)$ az F^n alaptenzora. A Berwald típusú konnexió paraméterei:

$$G^i_j(x,y) = \partial G^i/\partial y^j$$
$$G^i_{jk}(x,y) = \bar{\partial} G^i_j/\partial y^k$$

Alkalmazzuk a $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ és $\dot\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$ jelöléseket, így

$$G_i = (y^r \dot\partial_i L \partial_r L + y^r L \dot\partial_i \bar\partial_r L - L\partial_i L)/2$$

alakban írható.

Definiáljuk az $S(x, y)$ skalármező esetén a g_i operátort:

$$g_i(S) = (y^r \dot\partial_i S \partial_r S + y^r S \dot\partial_i \bar\partial_r S - S\partial_i S)/2 \,. \tag{2.1.2}$$

Ekkor $g_i(L) = G_i$ minden $L(x, y)$ alapfüggvényre M^n-en. Jelöljük $(;)$-vel és $(\cdot)$-tal a h- és v-kovariáns deriváltakat, amelyeket F^n Berwald-konnexiójával képzünk. Ekkor

$$S_{;i} = \partial_i S - \dot\partial_r S - G_i^r \,, \quad S_{\cdot i} = \dot\partial S \,.$$

A továbbiakban használjuk a következő szimbólumokat:

$$S_i = \dot\partial_i S \quad \text{és} \quad S_{ij} = \dot\partial_i \dot\partial_j S \,.$$

Ha (2.1.2)-be behelyettesítjük a $\partial_i S = S_{;i} + S_r G_i^r$ kifejezést és definiáljuk az

$$r_i(S) = S_{;i} - S_{;r\cdot i} y^r \tag{2.1.3}$$

operátort, akkor a $g_i(S)$-re a következőt kapjuk:

$$2g_i(S) = S_{;j} y^j S_i + 2(SS_{ir} + S_i S_r)G^r - Sr_i(S) \,. \tag{2.1.4}$$

Monográfiákban elterjedt jelölés, hogy a H_{ijk}^h és G_{ijk}^h szimbólumok a Berwald-konnexió h- és hv-görbületi tenzorait jelölik. Az előbbi kielégíti a

$$H_{ijk}^h + (i, j, k) = 0 \tag{2.1.5}$$

összefüggést, ahol (i, j, k) ciklikus permutációt jelölnek az i, j és k indexekre. Az utóbbira igaz a következő:

$$G_{ijk}^h = G_{ij\cdot k}^h \,.$$

Így a G_{ijk}^h szimmetrikus az i, j, k indexekre és

$$G_{ijk}^h y^k = 0 \,. \tag{2.1.6}$$

Legyen $r_{ij} = \dot\partial_j r_i$ egy új operátor, amelyre az

$$r_{ij}(S) = S_{;i\cdot j} - S_{;j\cdot i} - S_{;r\cdot i\cdot j} y^r$$

kifejezést nyerjük.

Mindebből a következő felcserélési formulákat kapjuk:

$$S_{;i\cdot j} - S_{\cdot j;i} = 0\,, \tag{2.1.7}$$
$$V_{i;j\cdot k} - V_{i\cdot k;j} = -V_r G^r_{ijk}\,, \tag{2.1.8}$$

ahol V_i egy kovariáns vektormező.

Észrevehetjük, hogy

$$S_{;r\cdot i\cdot j}y^r = S_{i;r\cdot j}y^r = (S_{\cdot i\cdot j;r} - S_{\cdot s}G^s_{irj})y^r\,,$$

és így a fentiek következményeként az

$$r_{ij}(S) = S_{\cdot j;i} - S_{\cdot i;j} - S_{\cdot i\cdot j;r}y^r \tag{2.1.9}$$

adódik.

Tekintsük ismét az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big)$ és az $\bar{F}^n = \big(M^n, \bar{L}(x,y)\big)$ Finsler-tereket. A (2.1.4) és a $g_i(\bar{L}) = \bar{G}_i$ összefüggések a

$$2\bar{G}_i = \bar{L}_{;0}\bar{l}_i + 2(\bar{h}_{ir} + \bar{l}_i\bar{l}_r)G^r - \bar{L}r_i(\bar{L})$$

egyenlőséget implikálják, ahol $\bar{l}_i = \dot{\partial}_i\bar{L}$ egységvektor és $\bar{h}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \bar{l}_i\bar{l}_j$ az ún. "angular-metric" tenzor $\bar{F}^n$-ben. Ezek ismeretében jutunk a

$$2\bar{G}_i = \bar{L}_{;0}\bar{l}_i + 2\bar{g}_{ir}G^r - \bar{L}r_i(\bar{L})$$

kifejezéshez, melyet $\bar{g}^{ij}$-vel kontrahálva

$$2\bar{G}^j = 2G^j + \bar{L}_{;0}y^j/\bar{L} - \bar{g}^{ij}r_i(\bar{L})\,. \tag{2.1.10}$$

Most tegyük fel, hogy az $\bar{F}^n$ és az F^n projektívak. Ennek szükséges és elegendő feltétele a már ismertetett

$$\bar{G}^i = G^i + py^i$$

összefüggés. Ezt y^j majd y^k szerint deriválva megkapjuk a (G^i_j, G^i_{jk}) és $(\bar{G}^i_j, \bar{G}^i_{jk})$ Berwald típusú konnexiók közötti projektív megfeleltetést, amik a következők:

$$\bar{G}^i_j = G^i_j + p_jy^i + p\delta^i_j \qquad (p_j = \dot{\partial}_j p)\,, \tag{2.1.11}$$
$$\bar{G}^i_{jk} = G^i_{jk} + p_{jk}y^i + p_j\delta^i_k + p_k\delta^i_j \qquad (p_{jk} = \dot{\partial}_k p_j = \dot{\partial}_k\dot{\partial}_j p)\,. \tag{2.1.12}$$

Így az alapfüggvény kovariáns deriváltjára

$$\bar{L}_{;i} = 0 = \partial_i \bar{L} - \bar{l}_r \bar{G}_i^r = \bar{L}_{;i} - \dot{\partial}_i(\bar{L}p)$$

adódik, míg

$$r_i(\bar{L}) = \dot{\partial}_i(\bar{L}p) - \dot{\partial}_i\big(\dot{\partial}_r(\bar{L}p)\big)y^r \,.$$

Mivel $\bar{L}p$ másodfokú pozitív homogén, így $r_i(\bar{L}) = 0$. Következésképpen $r_i(\bar{L}) = 0$ és (2.1.10) a

$$\bar{G}^j = G^j + \bar{L}_{;0} y^j / 2\bar{L}$$

összefüggés teljesülését vonja maga után. A projektivitás megléte miatt teljesül a következő

2.1.2. Tétel: *[Rap2], [M3] $\bar{F}^n$ akkor és csakis akkor projektív F^n-hez, ha*

$$r_i(\bar{L}) = \bar{L}_{;i} - \bar{L}_{;r\cdot i} y^r = 0 \,.$$

Ekkor a projektív faktor

$$p = \bar{L}_{;r} y^r / 2\bar{L}$$

alakú.

A továbbiakban az $r_i(\bar{L}) = \bar{L}_{;i} - \bar{L}_{;r\cdot i} y^r = 0$ feltételt átírjuk, (2.1.9)-ből kapjuk, hogy

$$r_{ij}(\bar{L}) = \bar{l}_{j;i} - \bar{l}_{i;j} - \bar{l}_{ij;r} y^r = 0 \,, \quad (\bar{l}_{ij} = \bar{h}_{ij}/\bar{L}) \,.$$

Mivel $\bar{l}_{j;i} - \bar{l}_{i;j}$ ferde-szimmetrikus és $\bar{l}_{ij}$ szimmetrikus az i, j indexekben, így

$$\begin{aligned} \bar{l}_{i;j} - \bar{l}_{j;i} &= 0 \,, && (2.1.13) \\ \bar{l}_{ij;r} y^r &= 0 \,. && (2.1.14) \end{aligned}$$

Megmutatható, hogy (2.1.14) a (2.1.13) következménye, ezért igaz a

2.1.3. Tétel: *[Rap2], [M3] Az $\bar{F}^n$ Finsler-tér F^n Finsler-térhez való projektivitásának szükséges és elegendő feltétele az*

$$\begin{aligned} \bar{l}_{i;j} - \bar{l}_{j;i} &= 0 \qquad \textit{vagy} \\ \bar{l}_{ij;r} y^r &= 0 \end{aligned}$$

egyenlőségek valamelyikének teljesülése.

2.2. Projektív invariánsok

Ezen alfejezetben megvizsgáljuk, milyen kapcsolat van a Berwald típusú konnexió torzió és görbületi tenzorai között egymáshoz projektív Finsler-terek esetén.

A (2.1.12) összefüggést y^h szerint deriválva és az alsó indexbeli szimmetriát fölhasználva adódik a hv-görbületi tenzorok közötti

$$\bar{G}^i_{hjk} = G^i_{hjk} + p_{hjk}y^i + \left\{p_{jk}\delta^i_h + (h,j,k)\right\} \tag{2.2.1}$$

reláció, melyben δ^i_h a Kronecker-féle szimbólumot, (h,j,k) pedig az indexek permutálását, majd összegzést jelent az adott kifejezés esetén. Másrészt az $R^i_{jk} = \delta_k N^i_j - \delta_j N^i_k$ R^1 torzió tenzor és (2.1.11) felhasználásával a $(v)h$-torzió tenzorok közötti kapcsolathoz jutunk, amely:

$$\bar{R}^i_{jk} = R^i_{jk} + y^i Q_{jk} + \delta^i_j Q_k - \delta^i_k Q_j \ , \tag{2.2.2}$$

ahol $Q_j := p_{;j} - pp_j$, $Q_{jk} := p_{j;k} - p_{k;j}$.

A (2.2.2) egyenlőséget y^h szerint differenciálva az $R^i_{jk\cdot h} = H^i_{hjk}$ egyenlőséget figyelembe véve a h-görbületi tenzorok közötti összefüggés:

$$\bar{H}^i_{hjk} = H^i_{hjk} + \delta^i_h Q_{jk} + y^i Q_{jk\cdot h} + \delta^i_j Q_{k\cdot h} - \delta^i_k Q_{j\cdot h} \ . \tag{2.2.3}$$

Könnyen beláthatók a

$$Q_{jk} = -(Q_{j\cdot k} - Q_{k\cdot j}) \qquad \text{és} \qquad Q_{ij\cdot k} + (i,j,k) = 0 \tag{2.2.4}$$

azonosságok. Ha a p tenzort (2.2.1)-ből elimináljuk és bevezetjük a $G_{ij} := G^h_{ijh}$ hv-Ricci tenzort, amely $G^i_{hjk} = \dot{\partial}_h \dot{\partial}_j \dot{\partial}_k G^i$-ből adódóan szimmetrikus, akkor a $p_{ij} = (\bar{G}_{ij} - G_{ij})/(n+1)$ összefüggést kapjuk. Helyettesítsük ezt (2.2.1)-be és az úgynevezett Douglas-tenzor [D] adódik, amely a következő alakú:

$$D^i_{hjk} := G^i_{hjk} - G_{hj\cdot k} y^i/(n+1) - \left\{G_{jk}\delta^i_h + (h,j,k)\right\}/(n+1) \ . \tag{2.2.5}$$

Megmutatható, hogy a Douglas-tenzor invariáns az $L \to \bar{L}$ projektív megfeleltetés esetén, azaz

$$D^i_{hjk} = \bar{D}^i_{hjk} \ .$$

A Douglas-tenzorral kapcsolatos eredményekről – amelyet Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto új kutatási eredményei szolgáltatnak – később ejtünk szót.

A projektív Finsler-geometria és ezen belül a Douglas-tenzor biológiában való alkalmazásáról részletesen olvashatunk P. L. Antonelli, R. S. Ingarden és M. Matsumoto közös munkájának [AIM] 5. fejezetében.

Létezik egy másik invariáns is a projektív megfeleltetéssel szemben, amelyet Riemann-metrika esetén 1921-ben H. Weyl [We] vezetett be, s amely később a Weyl-tenzor elnevezést kapta. E tenzor fogalmának általánosítása Finsler-metrikák esetén J. Douglas [D] és L. Berwald [B3], [B4], [B5] nevéhez fűződik.

Elimináljuk (2.2.2)-ből a Q tenzorokat és használjuk a h-Ricci tenzorra vonatkozó $H_{ij} := H^r_{ijr}$ kapcsolatot. A H_{ij} tenzor általában nem szimmetrikus, mivel a $H^h_{ijk} + (i,j,k) = 0$ a $H_{ij} - H_{ji} = -H^r_{rij}$ összefüggést implikálja. A (2.2.3) és (2.2.4) segítségével a $\bar{H}^r_{rjk} = H^r_{rjk} + (n+1)Q_{jk}$ egyenlőséghez jutunk. Így

$$Q_{jk} = \{(H_{jk} - H_{kj}) - (\bar{H}_{jk} - \bar{H}_{kj})\}/(n+1)\,. \tag{2.2.6}$$

Továbbá (2.2.3)-ból adódik a

$$\bar{H}_{0j} = H_{0j} + Q_{j0} - (n-1)Q_j \tag{2.2.7}$$

összefüggés. Q_{j0}-at (2.2.6) szolgáltatja. A Q_{j0}-ra kapottakat (2.2.7)-be behelyettesítve és a $H_j := (nH_{0j} + H_{j0})/(n-1)$ jelölést bevezetve a

$$Q_j = (H_j - \bar{H}_j)/(n+1) \tag{2.2.8}$$

adódik. Végül (2.2.6)-t és (2.2.8)-t helyettesítjük be (2.2.2)-be és így a

$$W^i_{jk} := R^i_{jk} + \{y^i H_{jk} + \delta^i_j H_k - \delta^i_k H_j\}/(n+1) \tag{2.2.9}$$

projektív invariáns tenzort nyerjük, ez a Weyl-féle torzió tenzor.

A már említett $R^h_{ij\cdot k} = H^h_{kij}$ vezet egy másik invariáns tenzorhoz:

$$W^i_{hjk} := H^i_{hjk} + \{\delta^i_h H_{jk} + y^i H_{jk\cdot h} + \delta^i_j H_{k\cdot h} - \delta^i_k H_{j\cdot h}\}/(n+1)\,, \tag{2.2.10}$$

amelyet Weyl-féle projektív görbületi tenzornak hívunk.

2.3. Skalár és konstans görbületű Finsler-terek

Közismert, milyen fontos osztályt alkotnak a Riemann-terek esetén a konstans görbületűek. Ezeket különböző szempontokból vizsgálva a matematika különböző fejezeteiben kerülnek tárgyalásra (például: izometria csoportok, nem-euklideszi geometriák).

Az eredmények bősége miatt csak az egyik legfontosabb tételt idézzük itt:

Tétel: *(Killing(1891) – Hopf(1925))*

Ha M egyszeresen összefüggő, n-dimenziós, teljes, 0, $+1$, vagy -1 konstans görbületekkel rendelkező Riemann-féle sokaság – azaz euklideszi, szférikus illetve hiperbolikus térforma –, akkor M izometrikusan leképezhető $\mathbb{R}^n$-re, S^n-re illetve $\mathbb{H}^n$-re.

A Riemann-geometriában megismert görbület fogalmát először Berwald általánosította Finsler-terekre [B1].

Terjesszük ki a Riemann-tér esetén megismert metszetgörbület fogalmát!

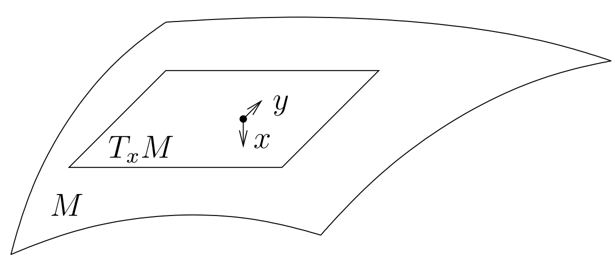
$$R = R_{hijk}X^hY^iX^jY^k/(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})X^hY^iX^jY^k\,, \tag{2.3.1}$$

ahol az R_{hijk} tenzorkomponensek a h-görbületi tenzor komponensei egy Finsler-konnexióban. Látható, hogy R függvénye a helynek és az érintővektornak, azaz nem határozza meg az adott pont és egy kétdimenziós metszet, ellentétben a Riemann sokaságoknál tapasztaltakkal.

Tekintsük most a Berwald típusú konnexiót. Ekkor a görbületet a következőképpen definiálhatjuk:

$$K := H_{hijk}(x,y)y^hX^iy^jX^k = \big(g_{hj}(x,y)g_{ik}(x,y) - g_{hk}(x,y)g_{ij}(x,y)\big)y^hX^iy^jX^k\,, \tag{2.3.2}$$

ahol H a $B\Gamma$-beli h-görbületi tenzor.



Definíció: [B4] Ha a K görbület bármely (x,y) pontban független X-től, azaz $K(x,y)$ egy skalármező, akkor a Finsler-teret skalár görbületűnek mondjuk.

Tudjuk, hogy $R_{ijk}+R_{jki}+R_{kij} = 0$, ami $R_{ijk}y^j$ szimmetriáját vonja maga után, így a skalár görbületekre vonatkozó feltétel

$$R_{i0k} = L^2Kh_{ik} \tag{2.3.3}$$

formát ölt, ahol $h_{ik} = g_{ik} - l_i l_k$ és $l_i = \dfrac{\partial L}{\partial y^i}$. Írjuk át most (2.3.3)-t egy másik alakba! Mivel $H^h_{ijk} + H^h_{jki} + H^h_{kij} = 0$ és $H^i_{0jk} = R^i_{jk}$, továbbá $R^h_{ij\cdot k} = H^h_{kij}$ és $R^h_{ij} = H^h_{i0j} - H^h_{j0i}$, így

$$H^h_{i0j} = R^h_{0j\cdot i} + R^h_{ij} \, .$$

Eliminálljuk H^h_{i0j}-t s ekkor az

$$R_{hjk} = \left\{ R_{h0k}|_j - R_{r0k} C^r_{hj} - (j/k) \right\}/3 \, , \tag{2.3.4}$$

ahol $|_j$ a $B\Gamma$-beli v-kovariáns deriválást, (j/k) a j és k indexek felcserélésével kapott kifejezést jelöli. (Ezen konnexió szerinti kovariáns derivált egy tetszőleges $T^i_j(x,y)$ Finsler-tenzormező esetén a következő alakú:

$$T^i_{j|k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_j}{\partial y^r} G^r_k + T^r_j G^i_{rk} - T^i_r G^r_{jk} \, .)$$

Helyettesítsük be (2.3.3)-t (2.3.4)-be és alkalmazzuk az angular-metric tenzorra vonatkozó összefüggéseket, így az

$$R_{ijk} = h_{ik} K_j - h_{ij} K_h \tag{2.3.5}$$

egyenlőséghez jutunk, amelyben

$$K_j = L^2 K|_j/3 + LK l_j \, . \tag{2.3.6}$$

Ismét a H h-görbületi tenzort és a már említett $R^h_{ij\cdot k} = H^h_{kij}$ kapcsolatot használva nyerjük a

$$H_{hijk} = h_{ik} K_{j\cdot h} + (h_{hi} l_j + h_{hj} l_i) K_k / L - (j/k) \tag{2.3.7}$$

egyenlőséget.

Foglaljuk össze a fent leírtakat:

2.3.1. Tétel: *[B4] Egy Finsler-tér pontosan akkor skalár görbületű, ha az alábbi feltételek valamelyike teljesül:*

(1) $R_{i0h} = L^2 K h_{ik}$,

(2) $R_{ijk} = h_{ik} K_j - h_{ij} K_k$, *ahol* $K_j = L^2 K|_j/3 + LK l_j$,

(3) a H h-görbületi tenzor Berwald-konnexió esetén

$$H_{hijk} = h_{ik} K_{j\cdot h} + (h_{hi} l_j + h_{hj} l_i) K_k / L - (j/k)$$

alakba írható.

Megjegyzések:

1. A skalár görbületű Finsler-terek ilyen koncepcióját Berwald még 1942 előtt dolgozta ki, hiszen 1942-ben meghalt.
2. Az R_{ijk} tenzor kétdimenziós esetben mindig a (2.3.5)-beli formában írható, továbbá bármely kétdimenziós Finsler-tér skalár görbületű.

Schur tételéből (1866) tudjuk, hogy ha M legalább háromdimenziós, összefüggő, izotróp szemi-Riemann sokaság, akkor M állandó görbületű.

Ha $\dim M = 2$, akkor

$$R_{ijkl} = K\big(g_{ik}(x)g_{jl}(x) - g_{ij}(x)g_{kl}(x)\big) ,$$

most T_xM az egyetlen altér, $K = K(x)$ a Gauss-görbület.

Hogyan hangzik ennek a tételnek az általánosítása?

Tegyük fel, hogy most a skalárgörbület csak a hely függvénye, ekkor $K_j = KLl_j$, ezért (2.3.5) és (2.3.7)

$$R_{ijk} = KL(h_{ik}l_j - h_{ij}l_k) = KL(g_{ik}l_j - g_{ij}l_k) \tag{2.3.8}$$

és

$$H_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij}) \tag{2.3.9}$$

formára redukálódik.

Mivel az y^i-ben $(0)_p$-homogén skalár görbület most h-kovariáns konstans, így az alábbi tételt felhasználva adódik a Riemann-geometriából ismert Shur-tétel általánosítása.

2.3.2. Tétel: *[MT]*

Legyen $F = \big(M, L(x,y)\big)$ n-dimenziós, nem zérus skalárgörbületű Finsler-tér. Ha egy $S(x,y)$ $(r)_p$-homogén skalármező F-en h-kovariáns konstans a Cartan-konnexióban, akkor $S(x,y)$ felírható $S(x,y) = c\big(L(x,y)\big)^r$ formában, ahol c konstans.

2.3.3. Tétel: *[M2] Ha egy legalább háromdimenziós skalárgörbületű Finsler-tér esetén a skalárgörbület csak a hely függvénye, akkor az konstans.*

Definíció: [M2] Egy $n \geq 2$ dimenziós skalárgörbületű Finsler-teret konstans görbületűnek mondunk, ha K konstans.

A (2.3.8) és (2.3.9) összefüggéseket megvizsgálva mondhatjuk a következőt:

2.3.4. Tétel: *[M2] Egy kettőnél nagyobb dimenziós Finsler-tér pontosan akkor konstans görbületű, ha az alábbi egyenlőségek valamelyike teljesül:*

(1) $R_{ijk} = KL(h_{ik}l_j - h_{ij}l_k) = KL(g_{ik}l_j - g_{ij}l_k)$,

(2) $H_{hijk} = K(g_{hj}g_{ik} - g_{hk}g_{ij})$.

Példák konstans görbületű Finsler-terekre

A negatív konstans görbületű Finsler-terek szerkezete már kellőképpen tisztázott. Legkorábban P. Funk [Fu2], majd H. Busemann [Bu3], H. Busemann és J. P. Kelly [BK], a nyolcvanas évek végén pedig Akbar-Zadeh munkái révén.

A pozitív konstans görbületű terekről P. Funk [Fu3] egy kései cikkében olvashatunk, napjainkban pedig Z. Shen [She1] és R. Bryant [Br1] [Br2] [Br3] ért el szép eredményeket. R. Bryantnek sikerült a kétdimenziós gömbön +1 görbületű, globális Finsler-metrikáknak két osztályát megkonstruálnia.

Számos nagyszerű eredmény született speciális Finsler-metrikák vizsgálata folytán is, ezekről a későbbiekben – a speciális Finsler-tereket tárgyaló fejezetekben – kívánunk szót ejteni.

3. fejezet

Speciális Finsler-terek

A Finsler-terek elméletében a speciális Finsler-terek vizsgálata a legfontosabb, ugyanis ezek között találjuk az alkalmazásban fontos, lényeges eseteket (fizika, biológia, ...).

3.1. Riemann-terek

Amióta Einstein megalkotta az általános relativitás elméletét a Riemann-geometria a matematika egyik fontos ágává vált. Kiterjedt irodalma van, számos érdekes és igen értékes publikációval: [Berg1], [Berg2], [Berg3], [BC], [CE], [GLP], [To], [Kl1], [Kl2], [CG1], [CG2].

Jelen fejezetben azonban csak arra szorítkozhatunk, hogy a Riemann-terekre, mint Finsler-terekre vonatkozó legkiemelkedőbb eredményeket ismertejük. Ezek megszületésében szerepe volt annak is, hogy bár a Riemann-geometria, mint a négydimenziós tér-idő kontinuum geometriája az általános relativitáselmélet révén döntő szerephez jutott a fizikai jelenségek leírásánál, mégis, a fizikusok, s elsőként maga Einstein is, olyan általánosabb geometriákat kerestek, amelyek alkalmasak lennének nemcsak a gravitációs, hanem az elektromágneses jelenségek leírására is. Bár az egységes térelmélet megalkotása szempontjából a Finsler-geometria eddig még nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket, mindazonáltal mind a matematika, mind a fizika számára sok hasznos eredmény született e kutatásokból.

Legyen M a jól ismert $L(x, y)$ Riemann-metrikával ellátott Riemann-tér, azaz

$$L(x, y) = g_{ij}(x)y^i y^j .$$

Itt a g tenzormező komponensei csak a hely függvényei. Másrészt tudjuk, hogy a Cartan által bevezetett $C_{ijk} := \frac{1}{2}(\dot\partial_k g_{ij} + \dot\partial_i g_{jk} - \dot\partial_j g_{ki})$ tenzor [C1], a $g_{ij} = \dot\partial_i \dot\partial_j (L^2/2)$ összefüggés miatt $C_{ijk} = \frac{1}{2}\dot\partial_k g_{ij}$ alakban írható. Ezért igaz a következő tétel:

3.1.1. Tétel: *[C1] A Finsler-terek között a Riemann-terek osztályát a Cartan-tenzorra vonatkozó $C_{ijk} = 0$ feltétel meghatározza.*

Ismerünk két fontos tételt, amelyek valamilyen tértípus Riemann-térbe való átmenetének feltételeit határozzák meg.

Az első az úgynevezett Deicke-tétel, amelyet először 1953-ban A. Deicke bizonyított affin differenciálgeometriai eszközöket használva , majd Brickell 1965-ben adott egy másik bizonyítást, amelyben az E. Hopf-féle maximumelvet alkalmazta elliptikus differenciáloperátorokra.

3.1.2. Tétel: *[De] Legyen az $L(x, y)$ alapfüggvény pozitív értékű és C^4-osztályú minden nem nulla (y^i) vektorra, ekkor ha az $A_i = LC_i$ torzióvektor azonosan zérus, a tér Riemann típusú, ahol $C_i = C_i{}^r{}_r$ és $C_i{}^j{}_k = g^{js}C_{isk}$.*

Megjegyzés:
Az $A_i = 0$ feltételt teljesítő Finsler-terekkel többen foglalkoztak: W. Barthel [Bar], B. Su [Su], J. M. Wegener [Weg]. É. Cartan monográfiájában [C1] említi azokat az általa megalkotott Cartan-tereket, amelyekben $A_i = 0$. Berwald posthumus munkájában [B4] megtaláljuk azokat a kétdimenziós Riemann típusú Finsler-tereket, amelyekben $A_i = 0$.

Nemsokkal a Deicke-tétel megjelenése után Moór Artúr közölt egy olyan példát, amellyel rámutatott arra, hogy a 3.1.2. tételből az alapfüggvény pozitív értékűségének feltétele nem hagyható el. Moór példájában egy a 3.1.3. állításban bevezetésre kerülő metrikával (Moór-metrika) ellátott, páros dimenziós, $A_i = 0$ torziójú, nem Riemann Finsler-teret mutat, amelyben csak a $\det(g_{ij}) > 0$ teljesülését követeli meg, így L nem szükségképpen mindig pozitív.

3.1.3. Állítás: *[Mo1] Legyen M az*

$$L(x, y) = c(x)\left(y^1 y^2 \dots y^n\right)^{1/n}$$

Finsler-metrikával ellátott Finsler-tér, ahol $c(x)$ olyan tetszőleges nem zéró függvény, amely csak a hely függvénye. Ekkor az A_i torzióvektor azonosan zéró M-en.

Most nézzük a másik fontos tételt, az ún. Brickell-tételt:

3.1.4. Tétel: *[Bri2] Ha a Cartan-konnexió S^2 v-görbületi tenzormezője, melynek komponensei*

$$S^i_{hjk} = \dot{\partial}_k V^i_{hj} + V^r_{hj} V^i_{rk} - (\dot{\partial}_j V^i_{hkn} + V^r_{hk} V^i_{rj})$$

egy $n \geq 3$ dimenziós Finsler-téren azonosan nulla, akkor a tér Riemann, feltéve, hogy az $L(x, y)$ alapfüggvény teljesíti a következő feltételeket:

(i) *$L(x, y)$ meghatározott és pozitív minden nemzérus y vektorra,*

(ii) *$L(x, -y) = L(x, y)$, ha $y \neq 0$,*

(iii) *a g alaptenzor pozitív definit,*

(iv) *L differenciálható , ha $y \neq 0$.*

Megjegyzések:

1. 1956-ban A. Kawaguchi már foglalkozott az $S^2 = 0$ feltételt teljesítő Finsler-terekkel [Kaw].

2. 1959-ben Laugwitz bebizonyította, hogy kétdimenziós Finsler-tér esetén $S^2 = 0$, majd 1965-ben megfogalmazott egy sejtést, mely szerint egy $n \geq 3$ dimenziós $S^2 = 0$ tenzorral ellátott Finser-tér Riemann típusú.

3. A Brickell-féle bizonyítás az $L(x, y) = L(x, -y)$ feltételt nem használja ki teljes egészében. Az (i) és a (iv) feltételt azonban nem hagyhatjuk el, erre Kikuchi mutatott egy érdekes példát [Ki]:

   Legyen M $n = 2k + r$ dimenziós Finsler-tér, amelynek alapfüggvénye:

   $$L^2(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ L_i \left(x, y^{2i-1}, y^{2i} \right) \right\}^2 + \sum_{p,q=2k+1}^{n} g_{pq}(x) y^p y^q \,,$$

   ahol az $L_i \left(x, y^{2i-1}, y^{2i} \right)$ $i = 1, \ldots, k$ $(1)_p$-homogén függvények y^{2i-1}-ben és y^{2i}-ben.

   Az S^2 v-görbületi tenzor (Cartan típusú konnexió esetén) eltűnik a Laugwitz által bizonyítottak miatt, viszont (i) és (iv) az $(y^i) = (0, 0, y^3, \ldots, y^n)$ $y^j \neq 0$ $(j = 3, \ldots, n)$ pontban nem teljesül.

Szokás a Finsler-geometriában a Riemann-térre úgy tekinteni, mint amely egy tetszőleges M Finsler-tér adott x pontbeli $T_x M$ érintőtereként áll elő, ekkor a $g_{ij}(x, y)$ alaptenzorban x rögzített. Ilyen aspektusból származó eredményekről olvashatunk például a Matsumoto-monográfia [M2] 31. fejezetében és Varga Ottó cikkében [V1].

3.2. Lokálisan Minkowski-terek

Már az 1930-as években ismertté vált, hogy egy Minkowski-tér hiperfelületein indukált metrika Finsler-féle és így a Finsler-terek modellezhetők Minkowski-terek segítségével is. A Minkowski- és Finsler-féle geometriák iránti megnövekedett érdeklődés sok új eredményt hozott. E kutatásoknak azért van még ma is nagy jelentősége, mert nem tudjuk, hogy egy tetszőlegesen megadott Finsler-geometriához meg lehet-e szerkeszteni egy alkalmas Minkowski-teret és abban egy felületet úgy, hogy a tér Minkowski-geometriája által a felületen indukált geometria az előre megadott Finsler-geometria legyen. Ezért aktuális minden olyan vizsgálat, amely tételeket mond ki a Minkowski-tér felületeire, mert így remélhetjük, hogy egyszer elégséges feltételek rendszerét tudjuk az előző kérdésre adott válaszként felírni. Erről olvashatunk Ichijyō munkáiban [Ich1], [Ich2],[Ich3], [Ich4].

Tehát, ha adott egy n-dimenziós, $L(x,y)$ alapfüggvénnyel ellátott Finsler-tér, akkor annak egy tetszőleges x pontbeli T_xM érintőtere tekinthető úgy, mint az $L(x,y)$ normafüggvénnyel ellátott Minkowski-tér, habár szigorúan véve $L(x,y)$ csak a zérus vektorban tűnhetne el és ki kellene elégítenie a háromszög-egyenlőtlenséget. Ez vezetett a következő definícióhoz:

Definíció: [AIM] Egy Finsler-teret lokálisan Minkowski-térnek nevezünk, ha minden pontjában megadható egy olyan koordinátarendszer, amelyben az alapfüggvény nem függ a helytől. Az ilyen koordinátarendszert adaptált koordinátarendszernek mondjuk.

Ezzel ekvivalens a következő

3.2.1. Állítás: *[AIM] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor lokálisan Minkowski-tér, ha lefedhető olyan koordinátakörnyezetekkel, amelyek mindegyikében az alaptenzor komponensei csak a hely függvényei.*

Jól ismert, hogy Riemann-geometriában a normál koordinátarendszerek közötti transzformáció affin. Hasonló következtetések vonhatók le adaptált koordinátarendszer esetén is.

3.2.2. Tétel: *[He] Bármely két adaptált koordinátarendszer közötti transzformáció affin. Így egy lokális koordinátarendszer, amelyet adaptált koordinátarendszerből affin transzformációval nyertünk szintén adaptált.*

Legyen ugyanis (x^i) és $(\bar{x}^a)$ két koordinátarendszer, amelyek koordinátakörnyezetei metszik egymást. Ekkor

$$\frac{\partial y^i}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial\left(\bar{y}^b \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^b}\right)}{\partial \bar{x}^a} = \bar{y}^b \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b} \, ,$$

amely maga után vonja, hogy

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^a} = \frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} + \left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\right)\bar{y}^b\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}\right) . \tag{3.2.1}$$

Ha tehát a két koordinátarendszer adaptált, azaz $\dfrac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{x}^a} = 0$ és $\dfrac{\partial L}{\partial x^i} = 0$, akkor (3.2.1)-ből $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}$ eltűnése következik, vagyis a transzformáció affin. Míg, ha (x^i) adaptált és a transzformáció affin, akkor (3.2.1) jobb oldala eltűnik, vagyis $(\bar{x}^a)$ is adaptált koordinátarendszer.

Mindez már a Finsler-geometria korai periódusában is ismert volt. Varga Ottó már 1943-ban utalt rá [V2], bár a bizonyítást először E. Heil publikálta [He] 1966-ban.

Korai eredmény a lokálisan Minkowski-terek invariáns karakterizációja is:

3.2.3. Tétel: *[B2] [C1], [Ru] Egy Finsler-tér pontosan akkor lokálisan Minkowski-tér, ha*

(i) $R^2 = \nabla^h C = 0$, *vagyis* $R^h_{ijk} = C_{hij|k} = 0$ *Cartan-konnexió esetén,*

(ii) $H = G = 0$, *azaz* $H^h_{ijk} = G^h_{ijk} = 0$ *Berwald típusú konnexió esetén,*

(iii) $K = \nabla^h C = 0$ *vagy* $K = F = 0$ *Rund-konnexióban, azaz*

$$K^h_{ijk} = C_{hij|k} = 0 \quad \text{vagy} \quad K^h_{ijk} = F^h_{ijk} = 0 ,$$

ahol R^2 : *h-görbületi tenzormező,*
$\nabla^h C$: *a C-tenzor h-kovariáns deriváltja,*
H : *h-görbületi tenzor,*
G : *hv-tenzor,*
K : *h-görbület,*
F : *hv-görbületi tenzormező az említett konnexiók esetén.*

L. Berwald [B2] 1928-ban, É. Cartan [C1] 1934-ben bizonyítás nélkül közli egy Finsler-tér lokális Minkowski voltának tenzoriális feltételeit. H. Rund monográfiájában [Ru] már az igazolást is megtaláljuk, míg M. Matsumoto [M4] és Numata [Nu1] cikkében egy-egy másik bizonyítást találhatunk.

Következmény: *[So] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor lokálisan Minkowski-tér, ha az* R^1 *(v)h-torzió - melynek komponensei* $R^i_{jk} = \delta_k N^i_j - \delta_j N^i_k$ *- megegyezik a C-tenzor h-görbületi deriváltjával Cartan típusú konnexióban.*

Ez a megjegyzés Soós Gyula munkájában található, amelyben a szerző tenzor-egyenleteket tanulmányoz annak eldöntésére, hogy létezik-e a kívánt koordinátarendszer.

Példa lokális Minkowski metrikára (Antonelli)**:**

Legyen $L : T\mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$

$$L(y) := \exp\left[2\, \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_1 + \alpha_2}\, (\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) \right] L_0(y)\,,$$

ahol

$$L_0(y) := \sqrt{(y^1)^2 + (y^2)^2}\, \exp\left[\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\, \tan^{-1}\left(\frac{y^1}{y^2}\right)\right],$$

α_1, α_2 konstansok és $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$,

továbbá (x^1, x^2) a hely és (y^1, y^2) az irány koordinátái.

3.3. Berwald-terek

Berwald 1928-as cikkében [B2] felsorol néhány speciális Finsler-tértípust, ezek között említi az affin összefüggő Finsler-tereket, amelyeket egy tenzor-egyenlet segítségével már korábbi munkájában [B1] vizsgál. Bár az affin összefüggő elnevezés magától Berwaldtól ered, Wagner révén [W1] ezeket a tereket Berwald-tereknek hívjuk.

Definíció: [M2] Egy Finsler-teret Berwald-térnek nevezünk, ha a Berwald típusú konnexió $G^i_{jk} = \dot\partial_j N^i_k = F^i_{jk} + C^i_{jk|l} y^l$ koefficiensei csak a hely függvényei valamely koordinátarendszerben.

Így a Berwald-tér $B\Gamma$ Berwald-konnexiója hasonlít a lineáris konnexióhoz. Ezesetben a geodetikusok (1.3.5) egyenlete

$$d^2x^i/ds^2 + G^i_{jk}(x)(dx^j/ds)(dx^k/ds) = 0 \tag{3.3.1}$$

alakban írható hasonlóan a Riemann-térbeli esethez. Mivel $\dot\partial_k G^h_{ij} = G^h_{ijk}$, így a definitív tulajdonság a következőképpen is megfogalmazható:

3.3.1. Tétel: *[C1], [B6] Egy Finsler-tér pontosan akkor Berwald-tér, ha a Berwald-konnexió G (G^h_{ijk}) hv-görbületi tenzora azonosan zéró.*

Ez a tétel csak annak ismeretében nem tűnik triviálisnak, ha tudjuk, hogy G^h_{ijk} tenzor volta már korábban ismert volt, mint az, hogy G^h_{ijk} a hv-görbületi tenzor komponense. É. Cartan monográfiájában [C1] bizonyítás nélkül közli a 3.3.1. tétel Cartan-konnexióbeli megfelelőjét, melyet Berwald [B6] bizonyított.

3.3.2. Tétel: *[C1] A C tenzor h-kovariáns deriváltjának eltűnése ($C_{hij|k} = 0$) Berwald-teret karakterizál.*

A már említett $G^i_{jk} = F^i_{jk} + C^i_{jk|l}y^l$ összefüggésből jól látható, hogy Berwald-tér esetén $F^i_{jk} = G^i_{jk}$, ezért F^i_{jk} szintén csak a hely függvénye, vagyis igaz a

3.3.3. Állítás: *[M2] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor Berwald-tér, ha a Cartan-konnexió F^i_{jk} együtthatói csak a hely függvényei, azaz a Rund-konnexió F (F^h_{ijk}) hv-görbületi tenzora eltűnik.*

A korábbiakban láttuk, hogy egy tetszőleges Finsler-sokaság adott pontbeli érintőtere tekinthető egy Minkowski normával ellátott vektortérnek. Ezt figyelembe véve Ichijyō [Ich1]-ben a Berwald-tereket a Riemann-sokaságok és az általános Finsler-sokaságok közé helyezi. Lényegében bármely összefüggő Berwald-tér modellezhető pontosan egy Minkowski-térrel, habár ez utóbbi pontos meghatározása Berwald-terenként változik.

Azt mondhatjuk tehát, hogy a Berwald-terek a Riemann- és a Minkowski-tereknél általánosabbak. Berwald [B7], [B3] osztályozta a kétdimenziós, nem Riemann- és nem lokálisan Minkowski-tereket. [M2]-ben és [AIM]-ben példákat találhatunk (ezekkel később még részletesen foglalkozunk). Rund könyvében szintén ad példát valódi Berwald-metrikára, igaz az alapfüggvény nem a teljes érintőtéren erősen konvex.

Kérdezhetnénk, hogy létezik-e olyan Berwald-tér, amelynél az alapfüggvény sima és erősen konvex $TM\backslash\{0\}$-n. Ezzel a problémával Szabó Zoltán foglalkozott, és megállapította:

3.3.4. Tétel: *[Sz1] Legyen M kétdimenziós, összefüggő differenciálható sokaság, (M, L) Berwald-tér, ahol L sima és erősen konvex $TM\backslash\{0\}$-n.*

Ha a Gauss-görbület azonosan zéró, akkor a tér lokálisan Minkowski.

Ha a Gauss-görbület nem azonosan zérus, akkor a sokaság Riemann.

Így tehát, ha olyan Berwald-teret keresünk, amely nem Riemann és nem lokálisan Minkowski, s az alapfüggvény teljesíti a már említett két feltételt, akkor három vagy annál nagyobb dimenzióban kell keresnünk. Egy később sorra kerülő metrika-típus (Randers) vizsgálatával ezt a célt elérhetjük. Erről a problémáról olvashatunk még Matsumoto [M5], Hashiguchi és Ichijyō [HI2], Shibata, Shimada, Azuma és Yasuda [SSAY], Kikuchi [Ki], Kawaguchi [Kaw] munkáiban.

Végezetül álljon itt a konkrét példák közül egy, amelyet Antonelli, Han és Modayil adott [AHM] Berwald-metrikára:

Legyenek λ, α_i $(i=1,2,3)$ pozitív skalárok, $L: TR^2 \to [0,\infty)$, ekkor

$$L(y) := \frac{(y^2)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{(y^1)^{\frac{1}{\lambda}}} \exp\left(-\alpha_1 x^1 + (\lambda+1)\alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^1 x^2\right) ,$$

ahol (x^1, x^2) a hely és (y^1, y^2) az irány koordinátái.

3.4. Landsberg-terek

A speciális Finsler-terek ezen osztályához G. Landsberg egy variációs probléma vizsgálata folytán jutott [L1], [L2], [L3]. Kétdimenziós esetben, a görbület fogalmát szem előtt tartva folytatta számításait, látva, hogy a görbület csak a hely függvénye, mivel a jól ismert Gauss–Bonnet-formula teljesül.

Definíció: [M3] Egy Finsler-teret Landsberg-térnek mondunk, ha a Berwald-konnexió h-metrikus.

Landsberg példát is adott az új metrikára:

$$L(x,y) = \left\{a_i(x)y^i\right\}^r \cdot \left\{b_j(x)y^j\right\}^s , \quad r+s=1 . \tag{3.4.1}$$

Könnyen igazlható, hogy egy ilyen alapfüggvény Berwald-metrikát szolgáltat. A valódi Landsberg-metrika megtalálása még napjainkban is várat magára.

1926-ban Berwald [B1] a stretch görbület vizsgálatakor megállapította, hogy az eltűnik a Landsberg által felfedezett tértípus esetén. Erről említést tesz É. Cartan [C2], Moór Artúr [Mo2] és H. Rund [Ru] is.

3.4.1. Tétel: *[M3] Cartan típusú konnexióban Landsberg-tér esetén teljesül a következő feltételek valamelyike:*

(1) a P^1 $(P^i_{jk} = \dot\partial_k N^i_j - F^i_{kj})$ $(v)hv$*-torzió tenzor eltűnik, azaz* $C_{hij|0} = 0$,

(2) a P^2 $(P^h_{ijk} = F^h_{ijk} - V^h_{ik|j} + V^h_{ir} P^r_{jk}$, *ahol az* F *tenzor komponensei:* $F^h_{ijk} = \dot\partial_k F^h_{ij})$ hv*-görbületi tenzor azonosan zéró.*

A 3.4.1. tétel (1) feltételének párhuzamos eltolásban játszott szerepéről olvashatunk É. Cartan [C1] írásában.

Figyelembe véve a Berwald-konnexió h-metrikusságát, a 3.4.1. tétel (1) részét és a $G^i_{jk} = F^i_{jk} + C^i_{jk|0}$ összefüggést adódik a

3.4.2. Állítás: *[AIM] Egy Finsler-tér pontosan akkor Landsberg, ha a Berwald-konnexió koefficiensei megegyeznek a Rund-konnexió paramétereivel.*

Többször utaltunk már egy Finsler-térre úgy, mint egy Riemann-tér általánosítására. Ezt a gondolatmenetet követve eredményes lehet azon tenzorok vizsgálata, amelyek Riemann-tér esetén eltűnnek, nevezetesen a P^1, P^2 és S^2 tenzorok Cartan-konnexióban. Landsberg-terek esetén ez a vizsgálati módszer különösen hatékonynak bizonyult, erről Hashiguchi, Hojo és Matsumoto [HHM], Ichijyō [Ich5] vagy Kawaguchi [H.Kaw] munkáit tanulmányozva győződhetünk meg.

A P^1 és P^2 tenzorok speciális formájúak, ha a dimenzió kettő. Ennek miértjére adnak választ Hashiguchi és Matsumoto tételei:

3.4.3. Tétel: *[H1], [M5] Ha a P_{hijk} hv-görbületi tenzor szimmetrikus j-ben és k-ban, továbbá a P_{ijk} $(v)hv$-torzió tenzor arányos a C_{ijk} $(h)hv$-torzió tenzorral, akkor $P_{hijk} = 0$ (azaz a tér Landsberg), vagy az S_{hijk} v-görbületi tenzor azonosan zéró.*

3.4.4. Tétel: *[H1], [M5] Ha létezik olyan X_i Finsler-vektormező, amelyre*

$$P_{hijk} = X_h C_{ijk} - X_i C_{hjk} \ ,$$

akkor $P_{hijk} = 0$ (a tér Landsberg típusú) vagy $S_{hijk} = 0$.

Minden esetben $S_{hijk|m} = 0$.

S. Numatának sikerült a Landsberg-terek egy újabb definitív tulajdonságát feltárni:

3.4.5. Tétel: *[Nu1] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor Landsberg, ha*

$$y_s G^s_{jkl} = -2P_{jkl} = 0 \ ,$$

ahol P_{jkl} a hv-torzió tenzor és $G_{jk;l} = -2P_{jkl}$ teljesül Berwald típusú konnexió esetén.

Most nézzük a Cartan-konnexió három görbületi tenzorát, R^2-t, P^2-t és S^2-t!

R^2 : $R^i_{hjk} = K^i_{hjk} + V^i_{hr} R^r_{jk}$, ahol a K-tenzor K^i_{hjk} komponenseit a $K^i_{hjk} = \delta_k F^i_{hj} + F^r_{hj} F^i_{rk} - (\delta_j F^i_{hk} + F^r_{hk} F^i_{rj})$ egyenlőség adja;

P^2 : $P^i_{hjk} = F^i_{hjk} - V^i_{hk|j} + V^i_{hr} P^r_{jk}$, ahol az F-tenzor komponensei: $F^i_{hjk} = \dot\partial_k F^i_{hj}$;

S^2 : $S^i_{hjk} = \dot\partial_k V^i_{hj} + V^r_{hj} V^i_{rk} - (\dot\partial_j V^i_{hk} + V^r_{hk} V^i_{rj})$.

A 3.4.1. tétel értelmében, ha a P^2 hv-görbületi tenzor eltűnik, akkor a tér Landsberg, míg a 3.1.4. tétel miatt S^2 v-görbületi tenzor eltűnése Riemann-teret implikál.

R^2 zérus volta esetén csak a következőt állíthatjuk:

3.4.6. Tétel: *[M3] Ha R^2 (R^h_{ijk}) h-görbületi tenzor azonosan zéró Cartan típusú konnexióban, akkor:*

(1) $P_{hij|k}$ és $C_{hij|k|0}$ teljesen szimmetrikus és a

(2) $Q_{hijk} = P^r_{hk} P_{rij} + P^r_{hj} P_{rik}$ tenzor eltűnik.

3.5. Wagner-terek

1943-ban V. V. Wagner [W2] általánosította a Berwald tér fogalmát és az új tértípust általánosított Berwald-térnek nevezte el. Majd 1975-ben M. Hashiguchi [H2] – a Finsler-geometria mai fogalom- és eszközrendszerét alkalmazva – az itt említésre kerülő definíciókat dolgozta ki és megadta annak szükséges feltételét, hogy egy Finsler-tér általánosított Berwald-tér legyen.

Definíciók: [H2] Vegyünk egy n-dimenziós $L(x, y)$ alapfüggvénnyel ellátott Finsler-teret. Ekkor egy adott T^i_{jk} ferdeszimmetrikus, nulladfokú pozitív homogén Finsler-tenzormező számára egyértelműen létezik egy $C\Gamma(T) = (F^i_{kj}, N^i_k, C^i_{jk})$ Finsler-konnexió, amely teljesíti a következő négy axiómát:

($\widetilde{C}1$) $C\Gamma(T)$ metrikus: $g_{ij|k} = 0$ és $g_{ij}|_k = 0$,

($\widetilde{C}2$) a D deflexió tenzormező eltűnik: $N^i_k = g^j F^i_{jk}$,

($\widetilde{C}3$) a T $(h)h$-torzió tenzormező T^i_{jk} komponenseit az $F^i_{jk} - F^i_{kj} = T^i_{jk}$ különbség adja,

$(\widetilde{C}4)$ az S^1 $(v)v$-torzió tenzormező eltűnik, így $C^i_{jk} = C^i_{kj}$.

$C\Gamma(T)$-t általánosított Cartan-konnexiónak hívjuk és koefficiensei a következőképpen adódnak:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} =&\Gamma^{*i}_{jk} - g^{ih}C_{jkm}(C^m_{hr}A^r_{00} - A^m_{0h}) + C^i_{jm}(C^m_{kr}A^r_{00} - A^m_{0k})+\\ &+ C^i_{km}(C^m_{jr}A^r_{00} - A^m_{0j}) + A^i_{jk}\ ,\end{aligned}$$

ahol $(\Gamma^i_{jk}, G^i_k, C^i_{jk})$ a Cartan-konnexió együtthatói és

$$A^i_{jk} = \frac{T_j{}^i{}_k - T^i{}_{jk} + T_{jk}{}^i}{2}\ .$$

Egy Finsler-teret általánosított Berwald-térnek mondunk, ha az általánosított Cartan-konnexió bevezethető oly módon, hogy az F^i_{jk} konnexiókomponensek csak a hely függvényei.

Egy adott s $(0)_p$-homogén, kovariáns Finsler-vektormező esetén egyértelműen létezik olyan $W\Gamma(s) = (F^i_{jk}, N^i_k, C^i_{jk})$ Finsler-konnexió, amely kielégíti a $(\widetilde{C}1)$, $(\widetilde{C}2)$, $(\widetilde{C}4)$ axiómákat és $(\widetilde{C}3)$ helyett $(\widetilde{C}3^*)$ teljesül:

$(\widetilde{C}3^*)$ $W\Gamma(s)$ ferdeszimmetrikus és s-re igaz a következő összefüggés:

$$F^i_{jk} - F^i_{kj} = \delta^i_j s_k - \delta^i_k s_j\ .$$

$W\Gamma(s)$-t Wagner-konnexiónak nevezzük, komponenseit az

$$\begin{aligned}F^i_{jk} &= \Gamma^{*i}_{jk} + L^2(S^i_{jkl} + C^i_{jm}C^m_{kl})s^l + (y^iC_{jkl} - y_jC^i_{kl} - y_kC^i_{jl})s^l + C^i_{jk}s_0 +\\ &\quad +g_{jk}s^i - \delta^i_k s_j\ ,\\ N^i_k &= G^i_k - L^2C^i_{kl}s^l + y_ks^i - \delta^i_k s_0\ ,\\ C^i_{jk} &= (g^{ir}\dot{\partial}_j g_{kr})/2\end{aligned}$$

egyenlőségek szolgáltatják, ahol $s^l = g^{lm}s_m$, $s_0 = s_l y^l$, $y_j = g_{jr}y^r$ és S^i_{jkl} a Cartan típusú konnexió S^2 v-görbületi tenzormezőjének komponensei.

Egy Finsler-teret Wagner-térnek nevezünk, ha a $W\Gamma(s)$ Wagner-konnexió bevezethető úgy, hogy az F^i_{jk} együtthatók csak a hely függvényei.

Az általánosított Berwald-terek vizsgálatával több munka foglalkozik, így azok geodetikusairól T. Aikou és M. Hashiguchi [AH], izometriáiról Szabó Zoltán [Sz2] cikkében olvashatunk. A kétdimenziós általánosított Berwald-tereket M. Matsumoto tanulmányozta [M7]-ben. Szép példákkal M. Hashiguchi, Y. Ichijyō [HI1] és Y. Ichijyō [Ich1] szolgál. Annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy Finsler-tér mikor Wagner-tér Bácsó Sándor, M. Hashiguchi és M. Matsumoto "Generalized Berwald spaces and Wagner spaces" [BHM] című cikkében találjuk meg, míg Matsumoto monográfiájában ugyanerre egy másik tenzoriális feltételt olvashatunk.

3.5.1. Tétel: *[M2] Egy Finlser-tér pontosan akkor Wagner-tér, ha létezik olyan s kovariáns Finsler-vektormező, hogy $\nabla^h C = 0$ fennáll.*

Az előbbi cikkben találjuk a következő érdekes tételeket:

3.5.2. Tétel: *[BHM] Egy $n \geq 2$ dimenziós eltűnő T tenzorú Wagner-tér Landsberg.*

3.5.3. Tétel: *[BHM] Egy $n \geq 2$ dimenziós Finsler-tér Landsberg és Wagner pontosan akkor, ha az s kovariáns vektormező komponensei kielégítik a következő két lineáris egyenletrendszert:*

$$C_{hij|k} = W_{hijkr}s^r \qquad \text{és} \qquad T_{hijr}s^r = 0 \, ,$$

ahol

$$\begin{aligned} W_{hijkl} &= \frac{1}{2}T_{hijr}V^r_{0kl} + \left[L^2 C_{hir}S^r_{jkl} + C_{hil}h_{jk} - C_{hik}h_{jl} + (h,i,j)\right] \, , \\ T_{hijk} &= LC_{hij}|_k + l_h C_{ijk} + l_i C_{hjk} + l_j C_{hik} + l_k C_{hij} \, , \\ V^i_{0kh} &= y_k \delta^i_h - y_h \delta^i_k - L^2 C^i_{kh} \end{aligned}$$

és $|_k$ a v-kovariáns deriválást $W\Gamma(s)$-ben, (h,i,j) az indexek ciklikus permutációját és az azt követő összegzést jelöli.

A skalár görbületű Wagner-terekről M. Hashiguchi és Varga Tünde [HV], V. P. Singh és R. K. Srivastava [SS] munkáiban olvashatunk.

Továbbá M. Hashiguchi és Y. Ichijyō [HI2]-ben a konform transzformációkat tanulmányozva kiemelkedő eredményeket értek el. Nevezetesen:

3.5.4. Tétel: *[HI2]*

(1) A Wagner-terek a konform transzformációkra nézve zártak.

(2) Ha egy Finsler-tér konform egy Berwald-térhez, akkor az szükségképpen Wagner.

(3) Ha egy Finsler-tér egy lokálisan Minkowski-térhez konform, akkor az szükségképpen Wagner-tér azonosan zéró h-görbületi tenzorral.

3.6. (α,β)-metrikával ellátott Finsler-terek

1941-ben G. Randers [Ra] egy több szempontból érdekes Finsler-struktúrát tanulmányozott. A Riemann-térbeli indikátrix (ellipszoid) centrumát tolta el, így egy aszimmetrikus metrikát kapott. Erre a gravitációs térelmélet és az elektrodinamika tanulmányozása inspirálta. Ezesetben az alapfüggvény

$$L(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}+b_i(x)y^i \tag{3.6.1}$$

alakban írható, ahol $\alpha(x,y)$ a már említett Riemann-metrika, $\beta(x,y)$ pedig egy differenciál egy-forma.

16 évvel később R. S. Ingarden [In1] monográfiájában ismét a (3.6.1)-beli metrikával találkozunk, szintén konkrét fizikai probléma kapcsán.

További alkalmazások találhatók G. S. Asanov munkáiban [As1],[As2] és [HrS]-ben.

Az új metrika más szempontból is fontosnak bizonyult:

A Yasuda–Shimada-tételből [YS] tudjuk, hogy a Randers-metrikák példával szolgálnak negatív konstans görbületű Finsler-metrikákra.

Az új geometriai invariánsok (mint a Z. Shen által bevezetett S-görbület [She2]) konkrét kiszámítása – könnyen kezelhetősége folytán – szintén a (3.6.1)-beli metrikával ellátott Finsler-tér esetén valósult meg.

Végül axiomatikus szempontból is kivételes kategóriát képeznek a Randers-metrikával ellátott Finsler-terek. Például egy Randers-tér részsokasága szintén Randers-tér.

Érdekességképpen megemlítjük, hogy D. Baonak és Z. Shennek a következő speciális Randers-metrikával sikerült -1 negatív konstans görbületű metrikát konstruálnia:

Legyen $\mathbb{H}^n=(R^n,\alpha)$ -1 negatív konstans görbületű hiperbolikus Riemann-tér és $\rho(x)$ jelölje az origótól mért távolságot. Ekkor

$$L(x,y)=\sqrt{\alpha(x,y)}+\frac{\sinh\rho(x)}{\cosh\rho(x)}\rho(y)\ ,\quad y\in T_xR^n$$

Randers-metrika.

Ugyancsak egy Riemann-metrikából és egy differenciál egy-formából felépülő, másik nevezetes Finsler-metrika 1959 és 1961 között született meg. Kropina a Finsler-terek projektivitását vizsgálva az

$$L(x,y)=\frac{\alpha^2(x,y)}{\beta(x,y)}=\frac{a_{ij}(x)y^iy^j}{b_k(x)y^k} \tag{3.6.2}$$

alakú metrikát vezette be.

A (3.6.1)-beli és a (3.6.2)-beli Finsler-metrikák általánosításaként 1972-ben Matsumoto megalkotta az (α, β)-metrika fogalmát:

Definíció: [M8] Egy $L(x, y)$ Finsler-metrikát (α, β)-metrikának nevezünk, ha L elsőfokú pozitív homogén függvénye $\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ -nek és $\beta(x, y) = b_i(x)y^i$ -nek, s erre az $L(\alpha, \beta)$ jelölést alkalmazzuk.

Megjegyzés: (α, β)-metrika esetén a Riemann-metrika nem szükségképpen reguláris és pozitív definit.

Bár Kropina a róla elnevezett (3.6.2)-beli metrikát pusztán matematikai szempontból vizsgálta, később Shibata [Shi1], [Shi2] illetve Ingarden [In2] tollából megszülettek a dinamikai illetve thermodinamikai alkalmazások is.

Hashiguchi, Hojo és Matsumoto pedig általánosította a Kropina-metrikát:

Definíció: [HHM] Az

$$L = \alpha^{m+1}\beta^{-m} \qquad (m \neq 0\ ,\ -1) \tag{3.6.3}$$

alakú (α, β)-metrikát általánosított m-Kropina metrikának mondjuk.

1980-ban Hashiguchi és Ichijyō a következő érdekes megállapításokat közölte:

3.6.1. Tétel: *[HI3] Egy $L = \alpha + \beta$ Randers-metrika pontosan akkor pozitív értékű, ha $a_{ij} - b_i b_j$ pozitív definit, feltéve, hogy a_{ij} pozitív definit.*

3.6.2. Tétel: *[HI3] Ha egy Finsler-tér bármely pontjában az indikátrix kvadratikus hiperfelület, akkor az alapfüggvény kielégíti a következő másodfokú egyenletet:*

$$r(x)L^2 + 2q_i(x)y^i L + p_{ij}(x)y^i y^j = 0\ ,$$

továbbá $\alpha + \beta$, $-\alpha + \beta$ vagy α^2/β alakú.

Fizikai jelenség, a fény anizotróp közegben való terjedése inspirálta Paul Finslert, amikor 1969-ben levelet írt Makoto Matsumotonak. Ezen levélváltás eredménye egy újabb (α, β)-metrika, amelyet M. Matsumoto [M9]-ben publikált kétdimenziós esetben. Később Aikou, Hashiguchi és Yamauchi általánosította ezt a metrikát n-dimenziós esetre.

Definíció: [AHY] Az

$$L = \alpha^2/(\alpha - \beta) \tag{3.6.4}$$

alakú (α, β)-metrikát Matsumoto-metrikának hívjuk.

Felmerül a kérdés, milyen az (α, β)-metrikával ellátott Finsler-terek kapcsolata a már ismertetett speciális Finsler-terekkel? A teljesség igénye nélkül álljon itt néhány jól ismert eredmény. Nézzük először a tenzoriális feltételeket megadó eredményeket:

3.6.3. Tétel: *[M5], [Ki], [M10] Egy Randers-tér pontosan akkor Berwald, ha $b_{i,j} = 0$, ekkor $G^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$, ahol Γ^i_{jk} a Christoffel-, Γ^{*i}_{jk} az általánosított Christoffel-szimbólumokat és a vessző szimbólum a Levi–Civita-féle kovariáns deriválást jelöli.*

3.6.4. Tétel: *[SSAY] Egy Randers-tér esetén a következő hat feltétel ekvivalens egymással:*

(1) A tér Landsberg,

(2) A tér Berwald,

(3) $C_{i|0} = 0$ $B\Gamma$-ban és $C\Gamma$-ban,

(4) $\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$,

(5) $b_{i;j} = 0$,

(6) $b_{i|j} = 0$ $C\Gamma$-ban.

3.6.5. Tétel: *[Shi1] A $\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$ feltétel akkor és csakis akkor teljesül egy Kropina-metrikával ellátott Finsler-tér esetén, ha $b_{i;j} = 0$. Ekkor a tér Berwald típusú.*

A 3.6.5. tétel szerint tehát $b_{i;j} = 0$ teljesülése csak szükséges, de nem elegendő feltétel ahhoz, hogy egy Kropina-tér Berwald-tér legyen. A szükséges és elegendő feltétellel Kropina-tér esetén [Shi1], [Ki], [Shi3], [M10], általánosított m-Kropina-tér esetén [Ki], [She3] foglalkozik. (Ezeket bonyolultságuk miatt itt nem idézzük).

3.6.6. Tétel: *[HI1] Ha egy (α, β)-metrikával ellátott Finsler-tér esetén teljesül a $b_{i;j} = 0$ feltétel, akkor a tér Berwald és $G^i_{jk} = \Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$.*

C. Shibata [Shi3] megadta annak szükséges feltételét, hogy egy (α, β)-metrikával ellátott Landsberg-tér Berwald típusúvá váljon (ezt komplikáltsága miatt nem említjük). Sikerült még belátnia a következőt:

3.6.7. Tétel: *[Shi3] Ha egy (α, β)-metrikával ellátott Finsler-tér esetén az R^i_{hjk} h-görbületi tenzor eltűnik Cartan típusú konnexió esetén, akkor a tér Landsberg, feltéve, hogy a metrika pozitív definit.*

Ugyancsak ebben a cikkben, C. Shibatának sikerült a 3.6.6. tételt továbbfinomítani a következőképpen:

3.6.8. Tétel: *[Shi3] Egy (α,β)-metrikával ellátott Finsler-térben a $\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma^i_{jk}$ feltétel $C\Gamma$-ban pontosan akkor teljesül, ha $b_{i;j} = 0$ és ekkor a tér Berwald típusú.*

A skalár görbületű (α,β)-metrikával ellátott Finsler-terek vizsgálata a következő eredményekhez vezetett:

Definíció: [Shi1] Legyen F^n egy n-dimenziós (α,β)-metrikával ellátott Finsler-tér, tekintsük a vele megegyező alapsokaságú Riemann-teret. Ez utóbbit F^n-hez asszociált Riemann-térnek nevezzük.

3.6.9. Tétel: *[M15] Egy (α,β)-metrikával ellátott Finsler-tér akkor és csakis akkor skalár görbületű, ha az asszociált Riemann-tér skalár görbületű.*

3.6.10. Tétel: *[M5] Egy Randers-metrikával elátott Landsberg-tér pontosan akkor skalár görbületű, ha az asszociált Riemann-tér konstans görbületű.*

Ismert a Numata-tétel [Nu1], amely szerint egy legalább három dimenziós nem zéró skalár görbületű Landsberg-tér konstans görbületű Riemann-tér.

Míg Randers-metrikával ellátott Landsberg-tér esetén igaz a

3.6.11. Tétel: *[SSAY] Egy legalább három dimenziós Randers-metrikával ellátott skalár görbületű Landsberg-tér Riemann vagy lokálisan Minkowski típusú. Kétdimenziós esetben csak lokálisan Minkowski-tér lehet.*

H. Yasuda és H. Shimada [YS]-ben megállapította annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy Randers-tér skalár görbületű legyen – ez a feltétel később hiányosnak bizonyult – és egy bonyolult formulát is adtak a skalárgörbületre. Következményként pedig megállapították, hogy egy Randers-tér, melynél a b_i gradiens vektor $\big(F_{ij} = (\partial b_i/\partial x^j - \partial b_j/\partial x^i)/2 = 0\big)$ pontosan akkor skalár görbületű, ha az asszociált Riemann-tér konstans görbületű.

Ugyancsak ebben a munkában találjuk meg a kettőnél nagyobb dimenziós konstans görbületű Randers-terek osztályozását. (Ez utóbbiról olvashatunk még [M11]-ben is.)

A lokálisan Minkowski típusú Finsler-terek és az (α,β) metrikával ellátott Finsler-terek kapcsolatáról – többek között – az alábbiak ismeretesek:

3.6.12. Tétel: *[YS] Egy nem triviális Randers-tér esetén a következő négy állítás ekvivalens:*

(1) A tér lokálisan Minkowski típusú,

(2) A tér konstans zéró görbületű, azaz $H^i_{hjk}=0$,

(3) R^i_{hjk} h-görbületi tenzor azonosan zéró,

(4) Az R^i_{jk} $(v)h$-torzió tenzor azonosan zéró $C\Gamma$-ban.

3.6.13. Tétel: *[Shi1] Egy pozitív definit Kropina-metrikával ellátott Finsler-tér esetén a következő három kijelentés egyenértékű:*

(1) A tér lokálisan Minkowski típusú,

(2) $R^i_{hjk}=0$,

(3) $H^i_{hjk}=0$ és a "stretch" görbület eltűnik.

(Ez utóbbi a Berwald-típusú konnexió egy nem metrikus tenzora, melynek komponensei $\Sigma_{hijk}=-y_r\dot{\partial}_i H^r_{hjk}=2(P_{hij|k}-P_{hik|j})$, ahol $P_{hij}=g_{hr}P^r_{ij}$.)

3.6.14. Tétel: *[Ki] Egy Randers-tér pontosan akkor lokálisan Minkowski típusú, ha $b_{i;j}=0$ és $R^r_{hijk}=0$.*

Ejtsünk még szót az (α,β)-metrikával ellátott lokálisan Minkowski-terek egy speciális osztályáról, melyet M. Matsumoto vezetett be.

Definíció: [M13] Egy (α,β)-metrikával ellátott lokálisan Minkowski-teret flat parallelnek mondunk, ha α lokálisan flat, azaz $R^r_{hijk}=0$ és β párhuzamos, azaz $b_{i;j}=0$.

A 3.6.14. tétel következtében egy Randers-tér mindig flat parallel, ha lokálisan Minkowski típusú. Egyéb (α,β)-metrikával ellátott lokálisan Minkowski-terek esetén pedig fennáll a

3.6.15. Állítás: *[M13] Ha egy (α,β)-metrikával ellátott lokálisan Minkowski-tér alapfüggvénye*

(1) $c_1\alpha+c_2\beta+\beta^2/\alpha$, ahol $c_1,\ c_2$ konstansok és $c_2\neq 0$

vagy

(2) $c_1\alpha+c_2\beta+\alpha^2/\beta$, ahol $c_1,\ c_2$ konstansok és $c_1\neq 0$

vagy

(3) $(c_1\alpha^2+c_2\alpha\beta+c_3\beta^2)/(\alpha+\beta)$, ahol $c_1,\ c_2,\ c_3$ konstansok

alakú, akkor a tér flat parallel.

Megjegyzés: A 3.6.15. állításból nyilvánvaló, hogy a (3) osztályba tartozó Matsumoto-tér flat parallel.

Végezetül idézzük S. Numata egy érdekes eredményét. A szerző egy új, a Randers-metrikához hasonló Finsler-metrikát konstruált, amely $L(x,y) = \mu(y) + \beta(x,y)$ alakú, ahol $\mu(y)$ egy lokálisan Minkowski-metrika, $\mu(y) = \sqrt{g_{ij}(y)y^i y^j}$ és $\beta(x,y) = b_i(x)y^i$ egy differenciál egy-forma. Az $F_{ij}(x) = (\partial b_i/\partial x^j - \partial b_j/\partial x^i)/2$ mennyiséget vizsgálva adódik a következő

3.6.16. Tétel: *[Nu2] Ha egy Numata-metrikával ellátott Finsler-tér teljesíti az $F_{ij} = 0$ feltételt, akkor a tér skalár görbületű. Ha a görbület konstans, akkor csak zérus lehet és a tér lokálisan Minkowski típusú.*

3.7. Douglas-terek

Ebben a fejezetben a Berwald-tér egy új, természetes általánosítását definiáljuk, amelyet Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto vezetett be 1997-ben [BM1] és Douglas-térnek nevezett el.

Tekintsük az 1.1 fejezetben már említett Euler-egyenletet – használva az ott bevezetett jelöléseket –

$$E_i(c) = \frac{d\,\partial L/\partial y^i}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0\,. \tag{3.7.1}$$

Ha alkalmazzuk az $F = L^2/2$ jelölést, akkor az alaptenzor komponensei $g_{ij} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial y^i}$ formában írhatók és jól ismert a

$$2G_j = \frac{\partial^2 F}{\partial y^j \partial x^r} y^r - \frac{\partial F}{\partial x^j}$$

függvények ilyen előállítása. Használjuk a $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ és $G^i = g^{ij}G_j$ összefüggéseket, így az

$$Lg^{ij}E_j(c) = \ddot{x}^i + 2G^i(x,\dot{x}) - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{x}^i = 0$$

egyenlőség és az ívhossz-integrál extremálisaira az

$$\ddot{x}^i\dot{x}^j - \ddot{x}^j\dot{x}^i + 2D^{ij}(x,\dot{x}) = 0 \tag{3.7.2}$$

differenciálegyenletek adódnak, ahol

$$D^{ij}(x,y) = G^i(x,y)y^j - G^j(x,y)y^i\,. \tag{3.7.3}$$

Definíció: [BM1] Egy Finsler-teret Douglas-térnek nevezünk, ha a (3.7.3)-beli függvényrendszer y^i-ben harmadfokú pozitív homogén.

A kétdimenziós eset vizsgálata folytán adódott a

3.7.1. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha egy (x, y) lokális koordinátarendszerben a geodetikusok $y'' = f(x, y, y')$ differenciálegyenletében az $f(x, y, y')$ függvény y'-ben legfeljebb harmadfokú pozitív homogén.*

A szerzőknek azt is sikerült igazolni, hogy egy

$$y'' = Y_3(y')^3 + Y_2(y')^2 + Y_1(y') + Y_0$$

alakú differenciálegyenlet, ahol az Y_3, Y_2, Y_1, Y_0 az (x, y) függvényei, esetén ez a speciális alak nem függ a koordinátarendszer megválasztásától.

Másrészt az előbbi definíció implikálja, hogy egy Finsler-tér pontosan akkor Douglas típusú, ha

$$D^{lm}_{hijk} = \dot\partial_k \dot\partial_j \dot\partial_i \dot\partial_h (G^l y^m - G^m y^l) = 0 \; .$$

A kijelölt számításokat elvégezve és a projektív invariáns Douglas-tenzor

$$D^l_{hij} = G^l_{hij} - \frac{1}{n+1} G_{hij} y^l - \frac{1}{n+1} \left\{ G_{hi} \delta^l_j + (h, i, j) \right\}$$

komponenseit felismerve

$$D^{lm}_{hijk} = (\dot\partial_k D^l_{hij}) y^m + \left\{ D^l_{ijk} \delta^m_h + (h, i, j, k) \right\} - \left\{ D^m_{ijk} \delta^l_h + (h, i, j, k) \right\}$$

adódik, ahol $G_{hi} = G_{hi}{}^r{}_r$ a hv-Ricci tenzor Berwald típusú konnexió esetén, $G_{hij} = \dot\partial_j G_{hi}$, (h, i, j, k) jelentése (h, i, j)-vel analóg. Így kimondható a

3.7.2. Tétel: *[BM1] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas típusú, ha Douglas-tenzora azonosan zérus.*

3.7.3. Tétel: *[BIK], [BM2] Ha egy Landsberg-tér Douglas típusú, akkor az Berwald-tér.*

A 3.7.3. tétel bizonyítását pozitív definit metrika esetén a [BIK] dolgozatban, nem feltétlenül pozitív definit metrikák alkalmazása mellett [BM2]-ben találjuk.

A Douglas-tenzor projektív invarianciája miatt igaz a

3.7.4. Tétel: *[BM1] Ha egy Finsler-tér projektív relációban van egy Douglas-térrel, akkor az Douglas típusú.*

Néhány Douglas-teret megadó metrikára több példát is találunk:

1. Példa: [AMa], [BM1] Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y + R(x) = 0\ .$$

Ez egy kétdimenziós olyan Douglas-térnek a geodetikusait adja meg, amelynek metrikus alapfüggvénye

$$L(x, y) = \frac{1}{y^1} e^{\int P(x)dx} \left[2R(x) - Q(x)x^2(y^1)^2 + (y^2)^2\right]$$

alakú és ahol $x = (x^1, x^2)$ illetve $y = (y^1, y^2)$ a hely- illetve az irányvektorok a megfelelő koordinátákkal.

2. Példa: [AMa], [BM1] Legyen adva az

$$y'' = (y')^2 + 1$$

differenciálegyenlet. Ez az

$$L(x, y) = (y^2) \arctan \frac{(y^1)}{(y^2)} - (y^1) \log \sqrt{1 + \left(\frac{(y^2)}{(y^1)}\right)^2} - (x^1)(y^2)$$

alakú Douglas-metrika geodetikusait adja megoldásként ugyancsak kétdimenziós esetben (x és y mint az 1. példában). E metrika már nem Berwald típusú metrika.

További példát kapunk Douglas-terekre, ha a Douglas típusú Wagner-tereket vizsgáljuk:

3.7.5. Tétel: *[BM1] Egy n-dimenziós Wagner-tér Douglas-voltának szükséges és elegendő feltétele, hogy a*

$$W^{ij} = L^2(g^{il}y^j - g^{jl}y^i)s_l$$

y^i-ben harmadfokú pozitív homogén ($s_l(x)$ a Wagner-konnexiót megadó definícióban szereplő vektormező).

Az (α, β)-metrikával ellátott Finsler-terek és a Douglas-terek kapcsolatát vizsgálva a szerzőpáros a következő tételeket igazolta:

3.7.6. Tétel: *[BM1] Legyen F^n egy Kropina-tér.*

(1) Ha F^n $(n > 2)$ egy Wagner-tér, akkor az Douglas típusú.

(2) Minden F^2 (Kropina-tér) Douglas típusú.

3.7.7. Tétel: *[BM1] Egy n-dimenziós Randers-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha a β egy-forma zárt, azaz $\dot{\partial}_j b_i - \dot{\partial}_i b_j = 0$. Ekkor*

$$2G^i = \Gamma^i_{00} + \frac{r_{00}}{\alpha + \beta} y^i ,$$

ahol $r_{ij} = b_{i;j}$.

Érdekes összevetni a 3.7.7. tételt a Kikuchi-tétellel, mely szerint egy Randers-tér pontosan akkor Berwald típusú, ha $b_{i;j} = 0$ és ekkor $2G^i = \Gamma^i_{00}$.

4. fejezet

Finsler-terek projektív megfeleltetései

4.1. Síkprojektív Finsler-terek

A síkprojektív terek olyan affin pályaterek, amelyeknek pályái egyenesek. Ha azt kérdezzük: melyek azok a Finsler-terek, amelyek síkprojektív térre pályatartóan leképezhetők, akkor Hilbert negyedik problémáját fogalmaztuk meg: melyek azok az alapfüggvények, amelyeknek extremális serege egyenesekből áll [Hi1].

Definíció: [AIM] Egy Finsler-teret egyenes geodetikusokkal rendelkezőnek vagy síkprojektívnek mondunk, ha az alapsokaság lefedhető olyan koordinátakörnyezetekkel, amelyekben minden geodetikus reprezentálható n darab $x^i = x^i_0 + ta^i$ t paraméteres lineáris egyenlettel.

Jól ismert, hogy egy lokálisan Minkowski-tér adaptált koordinátarendszerének értelmezési tartománya által az alapsokaság egy olyan lefedését kapjuk, amelyben az alapfüggvény csak y^i függvénye. Ekkor a G^i mennyiségek eltűnnek és a geodetikusok (1.3.5) egyenlete $d^2x/ds^2 = 0$-ra redukálódik, azaz a geodetikusok „kiegyenesíthetők". Ezek szerint bármely síkprojektív Finsler-tér projektív egy lokálisan Minkowski-térhez.

Sajnos a síkprojektív tér létezéséhez szükséges eltűnő Weyl-tenzor illetve kétdimenziós esetben a K görbületi tenzor (amelynek komponensei Rund típusú konnexió esetén $K^i_{hjk} = R^i_{hjk} - C^i_{hr}R^r_{jk}$) a számítások szempontjából rendkívül nehézkes és hosszadalmas. Így az alkalmazások szempontjából fontos, hogy lényegesen könnyebben számítható tenzorokat találjunk a már említettek helyett. Ezek az új tenzorok – amelyeket Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto vezetett be – az ún. Q-invariánsok segítségével adódnak. Tekintsük az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big) \longrightarrow \tilde{F}^n = \big(M^n, \tilde{L}(x,y)\big)$ projektív megfeleltetést, amely mellett változatlanul maradnak a következő projektív invariánsok:

$$\begin{aligned} &Q^0\text{-invariáns:} \quad Q^h = G^h - \frac{1}{n+1} G y^h \,, \\ &Q^1\text{-invariáns:} \quad Q^h_i = \dot{\partial}_i Q^h = G^h_i - \frac{1}{n+1}\big(G_i y^h + G\delta^h_i\big) \,, \\ &Q^2\text{-invariáns:} \quad Q^h_{ij} = \dot{\partial}_j Q^h_i = G^h_{ij} - \frac{1}{n+1}\big(G_{ij} y^h + G_i \delta^h_j + G_j \delta^h_i\big) \,, \end{aligned}$$

ahol $G = G^r_r$, $G_i = G^r_{ri}$ és $G_{ij} = G^r_{rij}$ a hv-Ricci-tenzor Berwald-konnexió esetén.

A Q^2-invariáns kielégíti a következő fontos azonosságokat:

$$Q^h_{ij} = Q^h_{ji} \,, \qquad Q^r_{rj} = 0 \,. \tag{4.1.1}$$

Másrészt a Q^2-invariánsból egyszerűen származtatható a

$$D^h_{ijk} = \dot{\partial}_k Q^h_{ij} \tag{4.1.2}$$

Douglas-tenzor és egy újabb Q^3-invariáns tenzor:

$$Q^h_{ijk} = \delta_k Q^h_{ij} + Q^r_{ij} Q^h_{rk} - \delta_j Q^h_{ik} - Q^r_{ik} Q^h_{rj} \,, \tag{4.1.3}$$

ahol $\delta_k Q^h_{ij} = \partial_k Q^h_{ij} - \big(\dot{\partial}_r Q^h_{ij}\big) G^r_k$.

A Q^3-invariánsra fennáll a

$$Q^h_{ijk} + (i,j,k) = 0 \,, \qquad Q^r_{rjk} = 0 \tag{4.1.4}$$

összefüggés.

Így a $Q_{ij} = Q^r_{ijr}$ Ricci típusú tenzor segítségével két, a projektív Finsler-geometria elméletében (az alkalmazások terén) jelentős tenzort állítanak elő a szerzők [BM3]-ban:

$$\Pi^1\text{-tenzor:} \quad \Pi^h_{ijk} = Q^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\big(\delta^h_j Q_{ik} - \delta^h_k Q_{ij}\big) \,, \tag{4.1.5}$$

$$\Pi^2\text{-tenzor:} \quad \Pi_{ijk} = \delta_k Q_{ij} + Q^r_{ij} Q_{rk} - \delta_j Q_{ik} - Q^r_{ik} Q_{rj} \,. \tag{4.1.6}$$

Majd belátják, hogy igaz a

4.1.1. Tétel: *[BM3] A Berwald-féle görbületi tenzorból képezhető Weyl-féle projektív görbületi tenzor egybeesik a Q invariánsokból származó Π^1-tenzorral.*

A (4.1.2)-ből látható, hogy egy Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha a Q^h_{ij} függvények csak a helytől, azaz x^i-től függnek. Ennek következtében a (4.1.3)-ban megadott Q^3 invariáns tenzor sem függ y^i-től és ezáltal a Π^1 és Π^2 tenzorok is csak a hely függvényei. Így igaz a következő:

4.1.2. Tétel: *[BM3] Egy Douglas-térben a Weyl-tenzor komponensei csak a hely függvényei.*

Következésképpen a síkprojektív térre egy – a definícióbelihez képest – új karakterizáló tulajdonságot állapíthatunk meg:

4.1.3. Tétel: *[BM3] Egy F^n Finsler-tér pontosan akkor síkprojektív, ha az Douglas-tér és teljesül a*

$$(1) \quad n > 2: \quad \Pi^h_{ijk} = 0 \qquad \text{vagy} \qquad (2) \quad n = 2: \quad \Pi_{ijk} = 0$$

feltétel.

A koordinátatranszformációk vizsgálatát megkönnyíti, hogy a Q^2 invariánsok által meghatározott Π^1 és Π^2 tenzorok csak a hely függvényei egy Douglas-térben. Így elegendő csak az $(x^i) \to (\tilde{x}^i)$ koordinátatranszformációt tekinteni. Ennek kapcsán a másodrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásainak „kiegyenesíthetőségére” jól kezelhető, szügséges és elegendő feltételek adhatók kétdimenzióban [BM3].

(1) Az $y'' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai akkor és csakis akkor adják egy síkprojektív Finsler-tér geodetikusait, ha $f(x, y) = A(x)y + B(x)$ alakú, azaz $f(x, y)$ y-ban lineáris.

    Ez az eset az $y'' = k(x, y)(y')^3$ differenciálegyenletnél pontosan akkor következik be, ha $k(x, y) = C(y)x + D(y)$ alakú.

(2) Az $y'' = P(x)y' + Q(x)y + R(x)$ másodrendű közönséges differenciálegyenlet síkprojektív, kétdimenziós Finsler-tér geodetikusait szolgáltatja.

Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto a síkprojektív terek további vizsgálata folytán a következő eredményeket nyerték:

4.1.4. Tétel: *[BM4] Egy legalább háromdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor síkprojektív Berwald-tér, ha az lokálisan Minkowski típusú vagy konstans görbületű Riemann-tér.*

4.1.5. Tétel: *[BM5] Legyen (x^i) és $(\tilde{x}^i)$ két egyenesvonalú koordinátarendszer – azaz olyan koordinátarendszer, amelyben a geodetikusok* *lineáris egyenletrendszerrel adhatók meg – egy síkprojektív Finsler-térben. A kettő közötti kapcsolatot az*

$$\tilde{x}^i = \frac{c^i_r x^r + c_i}{c_r x^r + c}\,, \quad \textit{ahol} \quad c^i_r,\ c^i,\ c_r,\ c \quad \textit{konstansok} \tag{4.1.7}$$

összefüggés írja le.
Fordítva, ha (x^i) egy egyenesvonalú koordinátarendszer, akkor ebből a (4.1.7) szerint adódó $(\tilde{x}^i)$ koordinátarendszer is egyenesvonalú.

A 4.1.5. tételben szereplő transzformációt projektívnek nevezzük. Ennek a tételnek egy hosszadalmas és bonyolult bizonyítását találjuk [M12]-ben, míg a Douglas-tereknél elért eredmények felhasználásával egy könnyen áttekinthető, rövid igazolást láthatunk, amely a már említett Heil-tétel eredményét pontosítja.

Egyenes geodetikusokkal rendelkező Finsler-terekről Hilbert (1894) és Hamel (1901) munkái óta számos érdekes eredmény látott napvilágot, többek között Wirtinger [Wi], Funk [Fu2], [Fu3], Berwald [B5], Varga [V3], Rapcsák [Rap1] és Okada [O1], [O2], Hashiguchi és Ichijyō [HI3] munkái.

M. Matsumoto több írásában foglalkozik síkprojektív Finsler-terekkel, [M13]-ban szükséges és elegendő feltételt ad egy (α, β)-metrikával ellátott Finsler-tér síkprojektív voltára, [M12]-ben a konstans görbületű, síkprojektív Finsler-tereket térképezi föl.

4.2. Speciális Finsler-terek projektív megfeleltetései

I. W. Roxburgh: "Finsler spaces with Riemannian Geodesics" című munkájában veti fel a következő – napjainkban sem teljes egészében megoldott – problémát [Rox]:

Határozzuk meg az összes olyan Finsler-teret, amelynek geodetikusai egyidejűleg valamely Riemann-térnek is geodetikusai, azaz adjuk meg az összes olyan Finsler-teret (metrikát), amely projektív valamilyen Riemann-térhez (metrikához).

Mivel egy Riemann-térben a Douglas-tenzor azonosan zérus, így az előbbi tulajdonságú Finsler-terek csak a Douglas-terek között fordulhatnak elő. Bácsó Sándor geodetikus leképezéseket vizsgáló dolgozatában [Ba] a fenti problémához tartozó több részeredmény található. A szerző ismerteti Rapcsák András [Rap2] és M. Matsumoto [M3] azon tételét, amely szerint:

Ha egy $F^n = (M^n, L)$ Finsler-tér projektív egy $\tilde{F}^n = (M^n, \tilde{L})$ Finsler-térhez, akkor

$$\tilde{l}_{ij;r} y^r = 0\,, \tag{4.2.1}$$

ahol $\tilde{l}_{ij} = \frac{1}{L}\tilde{h}_{ij} = \frac{1}{L}(\tilde{g}_{ij} - \tilde{l}_i\tilde{l}_j)$ és $\tilde{l}_i = \dot{\partial}_i\tilde{L}$, a ; szimbólum a Berwald-konnexió szerinti h-kovariáns deriválást jelöli.

Majd a (4.2.1) egyenletet használva bevezeti az erős projektivitás fogalmát.

Definíció: [Ba] Ha a Finsler-terek közötti projektív megfeleltetésnél az $\tilde{l}_{ij;k} = 0$ feltétel teljesül, akkor azt erős projektivitásnak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy az $\tilde{l}_{ij;k} = 0$ feltétel teljesül pozitív definit Berwald-terek és Riemann-terek közötti projektív megfeleltetésnél is.

Továbbá a szerző belátja, hogy igaz a

4.2.1. Tétel: *[Ba] Tekintsük az F^n Finsler-tér és R^n Riemann-tér közötti erős projektivitást, ekkor a projektív faktor $p(x,y) = e^{\varphi(x)}B(x,y)$ formájú, ahol $B(x,y)$ az R^n Riemann-tér metrikus alapfüggvénye, φ tetszőleges, csak a helytől függő, differenciálható függvény.*

4.2.2. Tétel: *[Ba] Ha az $F^n = (M^n, L) \longrightarrow R^n = (M^n, \bar{L})$ megfeleltetés erős projektivitás és F^n konstans görbületű, akkor a következő két eset lehetséges:*

$$(1) \quad K = 0 \qquad \textit{vagy} \qquad (2) \quad K \neq 0 \quad \textit{és} \quad \bar{L} = e^{\psi(x)}L\,,$$

ahol K a görbületi konstans, ψ tetszőleges, csak a helytől függő, differenciálható függvény.

Megjegyzés:
H. Rund [Ru] és T. Aikou [Ai] számításaiból tudjuk, hogy a (2) esetben ez a megfeleltetés hasonlóság.

Bácsó Sándornak és Makoto Matsumotonak (α, β)-metrikával ellátott Finsler-terek esetén sikerült igazolni a következő osztályozási tételeket:

4.2.3. Tétel: *[BM6] Tekintsük a*

$$\gamma : F^n = \big(M^n, L(\alpha,\beta)\big) \longrightarrow \tilde{F}^n = \big(M^n, \tilde{L}(\alpha,\beta)\big)$$

projektív megfeleltetést $n > 2$ esetén. Ekkor a következő három osztály lehetséges:

(1) γ hasonlóság, ekkor $\tilde{L} = rL$, ahol $r \neq 0$ konstans;

(2) β zárt forma és (α, β) parallel pár, ekkor γ ún. Randers-megfeleltetés, azaz $\tilde{L} = rL + s\beta$, ahol $r \neq 0$ és s konstans;

(3) (α,β) *parallel pár, ekkor minden* (α,β)*-metrika projektív egymáshoz és az asszociált Riemann-térhez is. Ebben az esetben a Berwald-konnexió egybeesik a Levi–Civita-konnexióval.*

4.2.4. Tétel: *[BM6] A*

$$\gamma : F^2 = \big(M^2, L(\alpha,\beta)\big) \longrightarrow \tilde{F}^2 = \big(M^2, \tilde{L}(\alpha,\beta)\big)$$

projektív megfeleltetés esetén az előző tétel három osztályán kívül még további három osztály adódik:

(4) $b_r b^r = b^2 \neq 0,$ ekkor $\tilde{G} = G$ és $a_{ij} = b_i b_j / b^2 + \varepsilon c_i c_j$

$$\big(\beta = b_i(x)y^i\ ,\ \ \alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}\ ,\ \ \varepsilon = \pm 1\ ,\ \ c_i = c_i(x)\ ,\ \ c_j = c_j(x)\big)$$

továbbá $\partial_j b_i - \partial_i b_j = A(x)(b_i c_j - b_j c_i)$, ahol $A(x)$ tetszőleges függvény;

(5) $b^2 = 0$ és $\alpha^2 \not\equiv 0 \pmod{\beta}$, ekkor az (1) és (2) eseteket kapjuk;

(6) $b^2 = 0$ és $\alpha^2 \equiv 0 \pmod{\beta}$, ekkor $\tilde{G} = G$ és $a_{ij} = (b_i c_j + b_j c_i)/2$, továbbá

$\partial_j b_i - \partial_i b_j = B(x)(b_i c_j - b_j c_i)$, ahol $B(x)$ tetszőleges függvény.

5. fejezet

Vizsgálatok speciális Finsler-terekben

Ebben a fejezetben saját eredményeimet részletezem.

5.1. A közönséges másodrendű differenciálegyenletek kiegyenesíthetőségéről

V. I. Arnold a differeciálegyenletek geometriai tartalmát vizsgáló könyvében részletesen elemzi a

$$d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$$

másodrendű egyenletet. Többek között azt a kérdést boncolgatja, hogy az egyenlet által az (x, y) síkon megadott kétparaméteres görbesereg kiegyenesíthető-e (áttranszformálható-e egyenessereggé) a sík egy alkalmas diffeomorfizmusával. Ennek kapcsán bizonyításra kerül az 5.1 fejezet első tétele.

5.1.1. Tétel: *[Arn] A*

$$d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx) \tag{5.1.1}$$

differenciálegyenlet pontosan akkor hozható $d^2\bar{y}/d\bar{x}^2 = 0$ alakúra a sík valamely diffeomorfizmusa segítségével, ha Φ dy/dx-ben legfeljebb harmadfokú polinom és ez a duálisára ugyancsak teljesül.

Tekintsünk most egy n-dimenziós Finsler-teret! Ennek geodetikusait a már említett

$$d^2x^i/dt^2 = -2G^i(x, \dot{x})$$

differenciálegyenletek szolgáltatják. A fenti egyenlet integrálgörbéit pályáknak nevezzük. [AIM]-ból ismert, hogy ezek az egyenletek a P^n pályateret implikálják, amely projektív az F^n Finsler-térhez, ha P^n egy pályája geodetikus görbéje F^n-nek és fordítva.

M. Matsumoto egyik, a témával foglalkozó dolgozatából ismert az

5.1.2. Tétel: *[M14] Egy kétdimenziós pályatér projektív valamely kétdimenziós Finsler-térhez.*

A projektív reláció folytán előálló invariáns tenzorok, a Weyl- és a Douglas-tenzor közül az utóbbi

$$D^h_{ijk} = \partial^3 Q^h / \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i$$

alakban írható, ahol $Q^h = G^h - \dot{x}^h G \frac{1}{n+1}$, $G = G^r_r$, $G^i_j = \partial G^i / \partial \dot{x}^j$ [BM1].

Ugyancsak ebben a dolgozatban bizonyított az

5.1.3. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas típusú, ha a geodetikusok (x, y) lokális koordinátarendszerben megadott*

$$d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx) \tag{5.1.2}$$

egyenletében a Φ legfeljebb harmadfokú polinom dy/dx-ben.

Az elmondottakból következik az

5.1.4. Tétel: *[BM3] A $d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$ másodrendű differenciálegyenlet $d^2\bar{y}/d\bar{x}^2 = 0$ alakúra hozható, ha – az egyenlet által indukált – P^2 pályatér projektív egy kétdimenziós Douglas-térhez.*

Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto a kétdimenziós Douglas-terek feltárása kapcsán igazolták az alábbi három tételt:

5.1.5. Tétel: *[BM3] Egy kétdimenziós Finsler-tér pontosan akkor síkprojektív, ha Douglas típusú és teljesíti a $\Pi_{ijk} = 0$ feltételt, ahol*

$$\Pi_{ijk} = \partial Q_{ij}/\partial x^k + Q^r_{ij} Q_{rk} - \partial Q_{ik}/\partial x^j - Q^r_{ik} Q_{rj} \qquad \text{és}$$

$$Q^h_{ij} = \frac{\partial^2 \left(G^h - \dot{x}^h G \frac{1}{n+1} \right)}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\,.$$

5.1.6. Tétel: *[BM3] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha az (5.1.2) egyenlet*

$$\begin{aligned} y'' &= k(x,y)(y')^3 + h(x,y)(y')^2 + g(x,y)y' + f(x,y) = \\ &= Q^1_{22}(y')^3 - (Q^2_{22} - 2Q^1_{12})(y')^2 - (2Q^1_{12} - Q^1_{11})y' + Q^2_{11} \text{ alakot ölt.} \end{aligned}$$

5.1.7. Tétel: *[BM3] Egy kétdimenziós Douglas-tér pontosan akkor síkprojektív, ha* $\Pi_{112} = 0$ *és* $\Pi_{212} = 0$ *teljesül.*

Alkalmazva a fenti eredményeket, kiszámoltuk a Π_{112} és Π_{212} komponenseket.

5.1.8. TÉTEL: *[BOSZ] Douglas-térben a* Π_{112} *és* Π_{212} *komponensek a következőképpen állíthatók elő:*

$$\begin{aligned}\Pi_{112} =& -\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + \\ &+ h(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \\ &+ k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{27}g^2(x,y)h(x,y) + \frac{2}{3}g(x,y)k(x,y)h(x,y) - \\ &- \frac{2}{3}f(x,y)h(x,y)k(x,y)\,;\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{212} =& -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}h(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial y} + \\ &+ 2k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \\ &+ \frac{2}{3}k(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \frac{4}{27}g(x,y)h^2(x,y) + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{3}k(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{9}h(x,y)g(x,y)k(x,y) + \\ &+ \frac{2}{9}g^2(x,y)k(x,y)\,.\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Nézzünk most néhány példát kétdimenziós, síkprojektív Finsler-terekre!

Tegyük föl, hogy $F^2 \quad (x,y)$ síkon megadott geodetikusainak differenciálegyenlete az alábbi öt osztály valamelyikébe tartozik:

(1) $y'' = f(x,y)$;

(2) $y'' = g(x,y)y' + f(x,y)$;

(3) $y'' = k(x,y)(y')^3$;

(4) $y'' = h(x,y)(y')^2$;

(5) $y'' = g(x,y)y'$.

Ekkor a Π tenzor komponensei rendre a következőképpen adódnak:

(1) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,, \quad \Pi_{212} = 0\,;$

(2) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial y} - \dfrac{1}{3}g(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,,$

$\Pi_{212} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}\,;$

(3) $\Pi_{112} = 0\,, \quad \Pi_{212} = -\dfrac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2}\,;$

(4) $\Pi_{112} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}\,, \quad \Pi_{212} = \dfrac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} + h(x,y)\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x}\,;$

(5) $\Pi_{112} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{3}g(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,, \quad \Pi_{212} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}\,.$

Következésképpen, F^2 akkor és csakis akkor síkprojektív, ha az előbbi f, g, h és k függvények rendre az alábbiak szerint írhatók:

(1) $f(x,y) = A(x)y + B(x)$;

(2) $f(x,y) = \sigma_1(x)y^3 + \sigma_2(x)y^2 + \sigma_3(x)y + \sigma_4(x)\,, \quad g(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x)\,;$

(3) $k(x,y) = C(y)x + D(y)$;

(4) $h(x,y) = E(y)x + F(y)$, ahol $dE(y)/dy + \big(E(y) + F(y)\big)E(y) = 0\,;$

(5) $g(x,y) = \gamma(x)y + \delta(x)$, ahol $\dfrac{2}{3}d\gamma(x)/dx - \dfrac{1}{3}\big(\gamma(x)y + \delta(x)\big)\gamma(x) = 0\,.$

5.2. Gyengén Berwald Finsler-terek

Ebben a fejezetben a már részletesen tárgyalt Berwald-terek egy újabb általánosításával ismerkedünk meg. Z. Shen monográfiájában találkozhatunk a weakly affin spray fogalmával:

Definíció: [She3] Egy sprayt weakly affin spraynek nevezünk, ha a $G_{kl} = G^r_{rkl}$ (hv)-Ricci tenzor azonosan zérus, ahol a (hv) görbületi tenzor a Berwald-konnexió koefficienséből $G^i_{jkl} = \dot{\partial}_l G^i_{jk}$ formában származtatható.

Ez motivált bennünket egy új, speciális Finsler-tér típus bevezetésére:

DEFINÍCIÓ: [BSZ] Egy Finsler-teret gyengén Berwald-térnek mondunk, ha a (hv)-Ricci tenzor azonosan zéró.

E tértípust tanulmányozta Bácsó Sándor és R. Yoshikawa 2002-ben megjelent dolgozatában.

M. Fukui és T. Yamada bizonyította, hogy az eltűnő Douglas tenzorú Berwald-tereket a $G_{ij} = 0$ összefüggés karakterizálja. Másszóval ezt így mondhatnánk:

5.2.1. Tétel: *[BY] Egy legalább kétdimenziós Finsler-tér gyengén Berwald és Douglas típusú akkor és csakis akkor, ha Berwald.*

5.2.2. Tétel: *[BY] Egy kétdimenziós Finsler-tér gyengén Berwald és Landsberg típusú pontosan akkor, ha Berwald.*

Megjegyzés:

Mivel három vagy annál nagyobb dimenzió esetén a $G_{ij} = 0$ és $y^r G^r_{ijk} = 0$ feltételekből nem következik G^r_{ijk} eltűnése, így egy gyengén Berwald és Landsberg típusú Finsler-tér sem szükségképpen Berwald.

5.2.3. Tétel: *[BY] Egy legalább háromdimenziós, síkprojektív gyengén Berwald-tér zérustól különböző konstans görbületű Riemann-tér vagy Minkowski-tér.*

5.2.4. Tétel: *[BY] Egy három vagy annál nagyobb dimenziós skalár görbületű Finsler-tér konstans görbületű voltához szükséges és elégséges feltétel, hogy a $G_{ij;k}$ tenzor mindhárom indexében szimmetrikus legyen. (A ; szimbólum a Berwald típusú konnexió szerinti h-kovariáns deriválást jelöli.)*

Következmény:
Egy kettőnél nagyobb dimenziós, skalár görbületű gyengén Berwald-tér konstans görbületű.

[BSZ]-ben a Kropina típusú gyengén Berwald Finsler-terek vizsgálatát végeztük el:

Jól ismert, hogy Kropina-térben a $G^i(x,y)$ függvények

$$2G^i = \Gamma^i_{00}(x) - 2\left(F_0 + \frac{\beta E_{00}}{\alpha^2}\right)\frac{y^i}{b^2} - \frac{\alpha^2 F^i_0}{\beta} + \left(\frac{\alpha^2 F_0}{\beta} + E_{00}\right)\frac{b^i}{b^2} \tag{5.2.1}$$

alakban írhatók, ahol $\Gamma^i_{jk}(x)$ az $\alpha(x,y)$ Riemann-metrika Christoffel-szimbólumait jelöli [M15], [Shi1].

Továbbá

$$E_{ij} = (\nabla_j b_i + \nabla_i b_j)/2\,, \tag{5.2.2}$$
$$F_{ij} = (\nabla_j b_i - \nabla_i b_j)/2\,, \tag{5.2.3}$$
$$F^i_j = a^{ir}F_{rj}\,; \quad F_i = b_r F^r_i\,; \quad F^i = a^{ir}F_r\,, \tag{5.2.4}$$
$$b_i = a^{ir}b_r\,; \quad b^2 = b^r b_r\,, \tag{5.2.5}$$
$$E_{0i} = E_{ri}y^r\,; \quad E_{00} = E_{rs}y^r y^s\,, \tag{5.2.6}$$
$$F_0 = F^r y_r\,; \quad F^i_0 = F^i_r y^r\,, \tag{5.2.7}$$

amelyekben ∇ a Levi–Civita konnexió szerinti kovariáns deriválásra utal, (a^{ij}) pedig az (a_{ij}) mátrix inverze.

Az (5.2.1) ismeretében adódik a

$$\begin{aligned}2G^i_j =& 2\Gamma^i_{j0} - 2\left[F_j + \frac{b_j E_{00} + 2\beta E_{j0}}{\alpha^2} - \frac{2E_{00}a_{j0}}{\alpha^4}\right]\frac{y^i}{b^2} - (2F^i_0 a_{j0} + \alpha^2 F^i_j)\beta + \\ &+ \frac{\alpha^2 F^i_0 b_j}{\beta^2} + \left[(2F_0 a_{j0} + \alpha^2 F_j)\beta - \frac{\alpha^2 F_0 b_j}{\beta^2} + 2E_{j0}\right]\frac{b^i}{b^2}\,.\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

összefüggés, amelyből az i és j indexekkel való kontrahálás után kapott kifejezést y^k és y^l szerint deriválva a (hv)-Ricci tenzor

$$\begin{aligned}G_{kl} = &- \frac{2(n+1)}{\alpha^2 b^2}\Bigg[-\left(\frac{b_k a_{l0} + b_l a_{k0} + \beta a_{kl}}{\alpha^2} - \frac{4\beta a_{k0}a_{l0}}{\alpha^4}\right)E_{00} + \\ &+ \frac{b_k - 2\beta a_{k0}}{\alpha^2}E_{l0} + \frac{b_l - 2\beta a_{l0}}{\alpha^2}E_{k0} - \beta E_{kl}\Bigg]\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

alakban írható.

Most már a G^i_{jk} konnexiókoefficiensek kiszámolhatóak és a (hv)-görbületi tenzor Kropina-tér esetén

$$\begin{aligned}
G^i_{jkl} =& U^i_l E_{jk} + U^i_j E_{kl} + U^i_k E_{lj} + V^i_{kl} E_{j0} + V^i_{lj} E_{k0} + V^i_{jk} E_{l0} + Z^i_{jkl} E_{00} + \\
&+ A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + A_{kl}\left(-F^i_j + F_j \frac{b^i}{b^2}\right) + \\
&+ A_{lj}\left(-F^i_k + F_k \frac{b^i}{b^2}\right) + B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0 \frac{b^i}{b^2}\right)
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

alakot ölt, amely

$$\begin{aligned}
G^i_{jkl} =& U^i_l E_{jk} + V^i_{kl} E_{j0} + \frac{1}{3} Z^i_{jkl} E_{00} + A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + \\
&+ \frac{1}{3} B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0 \frac{b^i}{b^2}\right) + (j,k,l)
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

formában is írható, ahol

$$\begin{aligned}
K_j &= -b_j + 2\frac{\beta a_{j0}}{\alpha^2} , \\
U^i_j &= \frac{2}{\alpha^2 b^2}(K_j y^i - 2\beta \delta^i_j) , \\
V^i_{jk} &= \frac{4}{\alpha^2 b^2}\left[\left((b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk})\alpha^2 - \frac{4 a_{j0} a_{k0}}{\alpha^4}\right) y^i + K_j \delta^i_k + K_k \delta^i_j\right] , \\
Z^i_{jkl} &= \frac{2}{\alpha^4 b^2}\Bigg\{\left[b_j a_{kl} - \frac{4}{\alpha^2}(b_j a_{k0} + \beta a_{jk}) a_{l0} + \frac{8\beta a_{j0} a_{k0} a_{l0}}{\alpha^4} + (j,k,l)\right] y^i + \\
&+ \left[2(b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk} - \frac{4\beta a_{j0} a_{k0}}{\alpha^2})\delta^i_l + (j,k,l)\right]\Bigg\} , \\
A_{jk} &= \frac{2}{\beta}\left[a_{jk} - \frac{a_{j0} b_k + a_{k0} b_j}{\beta} + \frac{\alpha^2 b_j b_k}{\beta^2}\right] , \\
B_{jkl} &= \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{2 a_{j0} b_k b_l}{\beta} - a_{jk} b_l - \frac{\alpha^2 b_j b_k b_l}{\beta^2} + (j,k,l)\right) .
\end{aligned}$$

Így az (5.2.9) és (5.2.11) egyenletek struktúráját tekintve a következő két tétel nyert igazolást:

5.2.5. TÉTEL: *[BSZ] Egy n-dimenziós Kropina-térben, ha $E_{kl} = 0$, akkor $G_{kl} = 0$.*

5.2.6. TÉTEL: *[BSZ] Egy n-dimenziós Kropina-térben, ha F_{kl} nem azonosan zérus, akkor a G^i_{jkl} (hv)-görbületi tenzor sem szükségképpen zéró.*

Az előbbi tételeket használva egy konkrét példát adunk gyengén Berwald típusú Finsler-térre:

Legyen $\big(b_i(x)\big)$ kovariáns vektormező egy páratlan dimenziós euklideszi térben, ekkor $E_{kl} = 0$ és $F_{kl} \neq 0$. Jelöljön Ω_{ij} egy $(n \times n)$-es, ferdeszimmetrikus, kvadratikus mátrixot, (x^i) pedig egy pont koordinátáit. Konstruáljuk meg a $\big(b_i(x)\big)$ vektormezőt a következőképpen:

$$b_i(x) = \Omega_{ij} x^j + c_i \ ,$$

ahol c_i-k konstansok. Könnyen belátható, hogy ebben a speciális esetben $\nabla_j b_i + \nabla_i b_j = 0$ és $\nabla_j b_i - \nabla_i b_j \neq 0$, ezért egy olyan Kropina-tér, amelyben a β egy-formát a $b_i(x) = \Omega_{ij} x^j + c_i$ generálja. E tér gyengén Berwald és nem Berwald típusú.

A Randers típusú gyengén Berwald Finsler-terek leírását Bácsó Sándor és R. Yoshikawa dolgozatában találjuk. A szerzők bebizonyították, hogy igaz az

5.2.7. Tétel: *[BY] Egy Randers-tér pontosan akkor gyengén Berwald típusú, ha a $\big(b_i(x)\big)$ vektor kielégíti az*

$$E_{ij} + b_i F_j + b_j F_i = 0 \tag{5.2.12}$$

egyenletet, amelyben a jelölések az (5.2.2) és (5.2.4)-ben említettek.

5.3. Kétdimenziós Finsler-terek

A Berwald-frame

A Riemann-geometriában megismertekhez hasonlóan az alacsony dimenziós Finsler-terek számos speciális jellegzetességgel bírnak. Ebben a fejezetben a kétdimenziós Finsler-terekkel foglalkozunk részletesen.

Az ilyen terek tanulmányozását, a felmerülő számítások elvégzését megkönnyíti egy ortonormált frame, az ún. Berwald-frame használata, amelynek (l, m) vektormezőit a következőképpen definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} & l^i = \frac{1}{L} y^i \,, \quad l_i = \dot{\partial}_i L \,, \\ & h_{ij} = \varepsilon m_i m_j \,, \quad \varepsilon = \pm 1 \,, \\ & l_i m^j = 0 \,, \quad m_i m^i = \varepsilon \,, \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

ahol $h_{ij} = L\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j L$ és ε a kétdimenziós Finsler-térhez tartozó szignatúra. Az (5.3.1)-ben leírtakból adódnak a

$$\begin{aligned} & g_{ij} = l_i l_j + \varepsilon m_i m_j = l_i l_j + h_{ij} \,, \\ & (m^1, m^2) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(-l_2, l_1) \,, \\ & (m_1, m_2) = \sqrt{|g|}(-l^2, l^1) \,, \\ & g = \det(g_{ij}) = \varepsilon(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

összefüggések. Továbbá a $C_{ijk} = \dot{\partial}_i\dot{\partial}_j\dot{\partial}_k(L^2/4)$ Cartan-tenzor komponensei Berwald-frame-ben

$$LC_{ijk} = I m_i m_j m_k \tag{5.3.3}$$

alakban írhatók. Az így definiált I skalármezőt a kétdimenziós Finsler-tér főskalárjának nevezzük.

A kétdimenziós Finsler-terek elméletének alapjait Berwald nagyszerű munkáiban találjuk meg [B1], [B3], [B7], [B8], [B9].

A [B7]-ben bevezetett főskalár (5.3.3)-beli elegáns formáját [B3]-ban olvashatjuk, [B4]-ben pedig Berwald utal arra, hogy (5.3.3)-ból következik az

$$LC_i = I m_i \,, \tag{5.3.4}$$

kapcsolat, ezért $C_i = 0$ a C-tenzor eltűnését implikálja, azaz a tér Riemann típusú.

Tekintsük az ismert

$$\begin{aligned} & L\dot{\partial}_j l^i = \varepsilon m^i m_j \\ & L\dot{\partial}_j l_i = \varepsilon m_i m_j \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

összefüggéseket és az (5.3.3) egyenlőséget, ekkor a

$$\dot{\partial}_i \Theta = \frac{1}{L} m_i \tag{5.3.6}$$

differenciálegyenlet

$$\dot{\partial}_j(\dot{\partial}_i\Theta) = -\frac{1}{L^2}(l_i m_j + l_j m_i) + \frac{1}{L^2} m_i m_j \tag{5.3.7}$$

alakúra hozható, amely i és j indexekben szimmetrikus. Továbbá (5.3.6) integrabilitási feltételét vizsgálva láthatjuk, hogy a megoldásként előálló Θ egy additív, csak helytől függő függvény.

Definíció: [L1], [L2], [L3] Az (5.3.6)-ban definiált, Landsberg által 1908-ban bevezetett Θ mennyiséget a kétdimenziós Finsler-tér Landsberg-szögének nevezzük.

A Θ tekinthető az euklideszi síkon jól ismert radián általánosításaként. Az analógia miatt, Riemann-metrikát alapul véve a Θ megegyezik az indikátrix görbe hosszával. (Ekkor a teljes szög nem szükségképpen 2π.)

Tekintsük most a kovariáns deriváltakat! Jelölje ;, . illetve $_|$, $|$ a Berwald-konnexió illetve a Cartan-konnexió szerinti kovariáns deriválást. Ekkor az $S(x,y)$ skalármező esetén

$$S_{;i} = S_{|i} = \partial_i S - (\dot{\partial}_r S) G_i^r \ ,$$
$$S_{.i} = S|_i = \dot{\partial}_i S$$

teljesül, míg $S_{|i}$ és $LS|_i$ az $(l.m)$ Berwald-frame-ben

$$S_{|i} = S_{,1} l_i + S_{,2} m_i \ ,$$
$$LS|_i = S_{;1} l_i + S_{;2} m_i$$

alakban írható. Az S_1, S_2 illetve $S_{;1}, S_{;2}$ párt S h- illetve v-skalár deriváltjának mondjuk.

5.3.1. Állítás: *[M2]*

(1) Ha S egy r-edfokú, pozitív homogén Finsler-skalármező, akkor $S_{;1} = rS$.

(2) Ha S nulladfokú pozitív homogén, akkor $S_{;1} = 0$ és $LS|_i = S_{;2} m_i$.

Az (l,m) frame komponenseire igazak az

$$\begin{array}{ll} l_{i;j} = 0 \ , & m_{i;j} = -\varepsilon I_{,1} m_i m_j \ , \\ Ll_{i.j} = \varepsilon m_i m_j \ , & Lm_{i.j} = -(l_i - \varepsilon I m_i) m_j \ , \\ l_{i|j} = 0 \ , & m_{i|j} = 0 \ , \\ Ll_i|_j = \varepsilon m_i m_j \ , & Lm_i|_j = -l_i m_j \end{array}$$

összefüggések.

A fent említetteket alkalmazva a görbületi és torzió tenzorok Cartan típusú konnexió esetén

$$\begin{aligned}
R_h{}^i{}_{jk} &= \varepsilon R(l_h m^i - l^i m_h)(l_j m_k - l_h m_j)\ ,\\
P_h{}^i{}_{jk} &= \frac{1}{L} I_{,1}(l_h m^i - l^i m_h) m_j m_k\ ,\\
R^i{}_{jk} &= \varepsilon L R m^i (l_j m_k - l_k m_j)\ ,\\
P^i{}_{jk} &= I_{,1} m^i m_j m_k
\end{aligned}$$

alakúak, R-et F^2 görbületének mondjuk. Az $S^i_{hjk} = C^r_{hk}C^i_{rj} - C^r_{hj}C^i_{rk}$ v-görbületi tenzor komponensei kétdimenziós Finsler-tér esetén eltűnnek.

Másrészt Berwald-konnexióban a h-görbületi tenzor komponensei:

$$H_h{}^i{}_{jk} = \varepsilon\big\{R(l_h m^i - l^i m_h) + R_{;2} m_h m^i\big\}(l_j m_k - l_k m_j)\ ,$$

a hv-görbületi tenzor komponensei:

$$G_h{}^i{}_{jk} = \frac{1}{L}(-2I_{,1}l^i + I_2 m^i) m_h m_j m_k$$

formában adódnak, ahol $I_2 = I_{,1;2} + I_{,2}$.

A $(v)h$-torzió tenzor $R^i{}_{jk}$ komponensei megegyeznek a Cartan-konnexióbeliekkel.

A skalár deriváltak formulái

$$\begin{aligned}
&(1)\quad S_{,1,2} - S_{,2,1} = -RS_{;2}\ ,\\
&(2)\quad S_{,1;2} - S_{;2,1} = S_{,2}\ ,\\
&(3)\quad S_{,2;2} - S_{;2,2} = -\varepsilon(S_{,1} + IS_{,2} + I_{,1}S_{;2})
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

alakúak.

A Bianchi-identitások kétdimenziós Finsler-terek esetén egyetlen azonossággá redukálódnak:

$$I_{,1,1} + RI + \varepsilon R_{;2} = 0\ . \tag{5.3.9}$$

M. Matsumoto [M16]-ban megmutatta, hogy a $G^i(x,y)$ függvények

$$2G^i = L_r y^r l^i + \frac{L^2 M}{\sqrt{|g|}} m^i \tag{5.3.10}$$

alakúak, ahol $M = \dot\partial_2 \partial_1 L - \dot\partial_1 \partial_2 L$, másrészt a kétdimenziós esetben bevezethető

$$W = \frac{\dot\partial_1 \dot\partial_1 L}{(y^2)^2} = \frac{-\dot\partial_2 \dot\partial_1 L}{y^1 y^2} = \frac{\dot\partial_2 \dot\partial_2 L}{(y^1)^2}$$

Weierstrass-invariánsok segítségével az „angular metric" tenzor komponense

$$h_{11} = L\dot{\partial}_1\dot{\partial}_1 L = LW(y^2)^2 \tag{5.3.11}$$

illetve

$$h_{11} = \varepsilon(m_1)^2 \tag{5.3.12}$$

alakú. Az (5.3.11) és (5.3.12) összefüggésekből az

$$L^3 W = g \tag{5.3.13}$$

egyenlőség következik.

Így (5.3.10) egyszerűbben

$$\begin{aligned} 2G^1 &= \frac{1}{L}\left(L_r y^r y^1 - \frac{M}{W}\dot{\partial}_2 L\right) \\ 2G^2 &= \frac{1}{L}\left(L_r y^r y^2 - \frac{M}{W}\dot{\partial}_1 L\right) \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

formában írható.

Mit tudunk a kétdimenziós speciális Finsler-terekről? Számos jelentős eredmény közül említsük meg a következőket:

5.3.2. Tétel: *[B3] Tegyük fel, hogy az F^2 kétdimenziós Finsler-tér nem lokálisan Minkowski típusú. Ezesetben a tér pontosan akkor Berwald típusú, ha a főskalár konstans.*

5.3.3. Tétel: *[M2] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Landsberg-tér, ha $I_{,1} = 0$.*

5.3.4. Tétel: *[BM4] Egy kétdimenziós, síkprojektív Finsler-tér Berwald voltának szükséges és elegendő feltétele, hogy az alábbi három osztály valamelyikébe tartozzon:*

(1) lokálisan Minkowski-terek,

(2) konstans görbületű Riemann-terek,

(3) $L = \beta^2/\gamma$ alapfüggvénnyel, $\varepsilon = \pm 1$ szignatúrával és $I^2 = 9/2$ főskalárral rendelkező Finsler-terek (β és γ 1-formák).

5.3.5. Tétel: *[BM2] Egy kétdimenziós, eltűnő T tenzorú Landsberg-tér szükségképpen Berwald.*

5.3.6. Tétel:

(1) [M19] Bármely kétdimenziós Randers és Landsberg-tér Berwald típusú.

(2) [KAM] Kétdimenziós, $L = \alpha + \beta$ alapfüggvénnyel ellátott Randers-tér esetén a főskalár kielégíti az

$$\varepsilon I^2 = \frac{9\gamma^2}{4L\alpha}$$

egyenletet, ahol $\gamma^2 = b^2\alpha^2 - \beta^2$ és $b^2 = b_i b^i$.

5.3.7. Tétel:

(1) [M19] Bármely kétdimenziós Kropina és Landsberg-tér Berwald típusú, feltéve, hogy $b^2 \neq 0$.

(2) [KAM] Kétdimenziós, $L = \alpha^2/\beta$ alapfüggvénnyel ellátott Kropina-tér esetén a főskalár kielégíti az

$$\varepsilon I^2 = \frac{9\gamma^2}{2Lb^2\beta}$$

egyenletet, ahol γ^2 a már említett kvadratikus forma, $b^2 = b_i b^i$.

5.3.8. Tétel: *[M19] Tekintsük az F^2 kétdimenziós, $L = \alpha^t\beta^{1-t}$ $(t \neq 0, 1, 2)$ általánosított Kropina-metrikával ellátott Finsler-teret. Ha F^2-ben $b^2 \neq 0$ és a tér Landsberg típusú, akkor Berwald típusú is.*

5.3.9. Tétel: *[B7] Az összes kétdimenziós, csak helytől függő főskalárral rendelkező Finsler-tér az alábbi négy osztály valamelyikébe sorolható és alapfüggvénye az alábbiakban említett alakú:*

(1) $\varepsilon = 1,\ I^2 > 4\ :\ L^2 = \beta\gamma(\gamma/\beta)^{I/r},\ r = \sqrt{I^2 - 4}$;

(2) $\varepsilon = 1,\ I^2 = 4\ :\ L^2 = \beta^2 \exp(I\gamma/\beta)$;

(3) $\varepsilon = 1,\ I^2 < 4\ :\ L^2 = (\beta^2 + \gamma^2)\exp\left\{(2I/r)\arctan(\gamma/\beta)\right\},\ r = \sqrt{4 - I^2}$;

(4) $\varepsilon = -1,\ L^2 = B_\gamma(\gamma/\beta)^{I/r},\ r = \sqrt{I^2 + 4}$;

ahol β és γ független 1-formák.

A következőkben fordítsuk figyelmünket az eltűnő Douglas-tenzorú Wagner-terekre. Amit már ismerünk:

5.3.10. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Finsler-tér pontosan akkor Douglas típusú, ha a $(\dot{\partial}_2\partial_1 L - \dot{\partial}_1\partial_2 L)/W$ harmadfokú homogén polinom (y^1, y^2)-ben (W a már említett Weierstrass-invariánst jelöli).*

Mivel a Douglas-tenzor

$$3LD^h_{ijk} = -(6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2)m_i l^h m_j m_k \tag{5.3.15}$$

alakot ölt kétdimenziós esetben, így igaz az

5.3.11. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha a főskalár kielégíti a*

$$6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2 \tag{5.3.16}$$

egyenletet, amelyben $I_2 = I_{,1;2} + I_{,2}$.

5.3.12. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Wagner-tér Douglas voltának szükséges és elegendő feltétele, hogy $\left(L^3/\sqrt{|g|}\right)s_2$ harmadfokú, homogén polinom legyen (y^1, y^2)-ben, $s_i = s_1 l_i + s_2 m_i$ a Wagner-konnexió feltételeinek eleget tevő vektormező.*

Megjegyzés:

Érdemes összevetnünk a fent említett tételt a kétdimenziós Berwald-terekről elmondottakkal, ugyanis a főskalár csak helytől függő volta ($I_{;2} = 0$) ekvivalens azzal, hogy $L^2/\sqrt{|g|}$ (y^1, y^2)-ben másodfokú, homogén polinom. Továbbá Wagner 1943-ban publikált írásaiból ismert az

5.3.13. Tétel: *[W2] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Wagner típusú, ha $\partial I/\partial\Theta$ csak a főskalár függvénye, feltéve, hogy $\partial I/\partial\Theta \neq 0$. Ezesetben a Wagner-konnexió által meghatározott kovariáns vektormező komponensei*

$$s_1 = -(I_{,2} + II_{,1})/I_{;2}\,, \qquad s_2 = I_{,1}/I_{;2}$$

alakúak.

A 5.3.13. tételbeli $\partial I/\partial\Theta \neq 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy a T tenzor nem tűnik el. Azt pedig [M7]-ből és [M17]-ből tudjuk, hogy eltűnő T tenzorral bíró Wagner-tér Berwald típusú.

Ugyancsak M. Matsumoto mutatta meg, hogy igaz az

5.3.14. Tétel: *[M7] Az*

$$\begin{aligned} I_{,1} &= I_{;2}s_2 \,, & I_{,2} &= -I_{;2}(s_1 + Is_2) \\ & & \text{és} & \\ (s_1)_{;2} - s_2 &= 0 \,, & (s_2)_{;2} + s_1 + Is_2 &= 0 \,, \\ (s_1)_{;1} &= 0 \,, & (s_2)_{;1} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

egyenlőségek teljesülése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a kétdimenziós Finsler-tér Wagner-tér legyen.

A fent elmondottakból adódik a kérdés: meg tudjuk-e adni egy Douglas típusú Wagner-tér főskalárját egzakt formában?

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy az eltűnő Douglas-tenzorú Wagner-tér skalárgörbülete azonosan zérus. Mivel M. Matsumoto [M18] megmutatta, hogy a Weyl- és a Douglas-tenzor eltűnése kétdimenziós esetben a H_{ijk} tenzorkomponensek zérus voltát vonja maga után, ahol

$$\begin{aligned} H_{ijk} &= \dot\partial_k \dot\partial_j H_i + G_{jk;i} \,, \\ H_i &= L(3Rl_i + R_{.2}m_i) \,, \\ G_{jk} &= I_2 m_j m_k / L \,, \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

így R zérus voltából $H_i = 0$ adódik s így $G_{jk;i}$ szintén zéró.

Alkalmazva az

$$\begin{aligned} m_{ij} &= l^i_{;j} m_i + l^i m_{i;j} = 0 \,, \\ l^i m_i &= 0 \,, \\ l^i_{;j} &= 0 \end{aligned}$$

formulákat a $G_{jk} = I_2 m_i m_j / L$ segítségével

$$G_{jk;i} = I_{2;i} m_j m_k / L \tag{5.3.19}$$

adódik. A (5.3.19)-ben foglaltakból $I_{2;2}$ eltűnése következik, míg a Douglas-tenzor (5.3.15)-beli alakjából kapjuk a

$$3I_{,1} + II_2 = 0 \tag{5.3.20}$$

összefüggést. M. Matsumoto 5.3.14. tételbeli feltételeit figyelembe véve

$$I_{;2,1} = I_{;2;2}s_2 \tag{5.3.21}$$

$$I_2 = I_{;2;2}s_2 - 2I_{;2}(s_1 + s_2) \tag{5.3.22}$$

egyenlőségek állnak elő, amelyekből a Bianchi-identitás alkalmazásával

$$I_{;2;2}s_2 = -\frac{I_{;2}s_{2,1}}{s_2}\,, \quad s_2 \neq 0 \tag{5.3.23}$$

adódik. (Ha s_2 eltűnik, akkor a Wagner-tér Landsberg típusú az 5.3.3. tétel miatt, s így Berwald [M7].)

Helyettesítsük most (5.3.23)-t (5.3.22)-be, ekkor az

$$I_2 = -\frac{I_{;2}s_{2,1}}{s_2} - 2I_{;2}(s_1 + Is_2) \tag{5.3.24}$$

kifejezést kapjuk.

A kapottakat (5.3.20)-ba beírva és $I_{,1} = I_{;2}s_2$ felhasználva

$$I_{;2}\big(3s_2 - 2I(s_1 + Is_2) - Is_{2,1}/s_2\big) = 0 \tag{5.3.25}$$

egyenlőség áll fönn.

Ha $I_{;2} = 0$, akkor a Wagner-tér Berwald típusú [M7], [M17].

Ha feltesszük, hogy $I_{;2} \neq 0$, akkor a szorzat másik tényezője tűnik el, azaz

$$3s_2 - 2I(s_1 + Is_2) - Is_{2,1}/s_2 = 0\,. \tag{5.3.26}$$

Ez I-ben egy másodfokú egyenlet, s így a főskalár

$$I = \frac{-(2s_1 + s_{2,1}/s_2) \pm \sqrt{4s_1^2 + 4s_1s_{2,1}/s_2 + s_{2,1}^2/s_2^2 + 24s_2^2}}{4s_2}\,. \tag{5.3.27}$$

Általában az (5.3.27)-beli főskalár esetén $I_{;2} \neq 0$ teljesül, ezért igaz az

5.3.15. TÉTEL: *[Szi1] Kétdimenziós, eltűnő Douglas-tenzorú, zérus skalárgörbületű Wagner-tér esetén a főskalár (5.3.27)-beli alakban írható.*

5.4. $^*P$ Finsler-terek Randers-transzformációja

C-, P-reducibilitás, Randers-csere

Ebben a fejezetben egy, H. Izumi által bevezetett újabb speciális Finsler-tértípussal ismerkedünk meg, az ún. $^*P$ Finsler-térrel, előtte azonban néhány szükséges fogalom kerül bevezetésre.

Definíció: [M2] Egy legalább háromdimenziós Finsler-teret C-reducibilisnek mondunk, ha a $C_{ijk} = \frac{1}{2}\dot{\partial}_k g_{ij}$ tenzor

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{kj}C_i\right)\,, \tag{5.4.1}$$

ahol $C_i = C_{ijk}g^{jk}$, $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$ és $l_i = \dot{\partial}_i L$.

A C-reducibilitás fogalmának bevezetésével Cartan típusú konnexió esetén a $(v)hv$-torzió és a hv-, illetve v-görbületi tenzor speciális, érdekes formában írható. (Erről bővebben olvashatunk a Matsumoto mongráfiában [M2].)

A P-reducibilitás fogalmát M. Matsumoto és H. Shimada vezette be:

Definíció: [MS], [M21] Egy háromnál nagyobb dimenziós Finsler-teret P-reducibilisnek nevezünk, ha a $(v)hv$-torzió

$$P_{ijk} = C_{ijk|0} \tag{5.4.2}$$

vagy

$$P_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_{k|0} + h_{jk}C_{i|0} + h_{ki}C_{j|0}\right) \tag{5.4.3}$$

alakban írható Cartan típusú konnexióban.

Definíció: [Iz1], [Iz2] Egy Finsler-teret $^*P$-típusúnak mondunk, ha a P_{ijk} tenzor komponensei

$$P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \tag{5.4.4}$$

alakúak.

Ezen fogalmak bevezetése után a speciális Finsler-terek vizsgálatával sok értékes eredmény született, amelyek közül a legismertebbek:

5.4.1. Tétel: *[M2] Egy $n \geq 3$ dimenziós Finsler-tér pontosan akkor C-reducibilis, ha Randers- vagy Kropina-metrikával ellátott.*

5.4.2. Tétel: *[M2] C-reducibilis Landsberg-tér szükségképpen Berwald.*

5.4.3. Tétel: *[Iz1] Egy legalább négydimenziós C-reducibilis $^*P$ Finsler-tér esetén a $\lambda(x,y)$ függvény $k(x)L(x,y)$ alakú.*

5.4.4. Tétel: *[Iz2] Háromnál nagyobb dimenziós $^*P$-Finsler-téren a Douglas-tenzor azonosan zérus.*

5.4.5. Tétel: *[BP] Eltűnő Douglas-tenzorú $^*P$ Randers-tér Riemann típusú, ha a tér dimenziója nagyobb, mint három.*

Definíció: [M20], [HI3] Legyenek $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ azonos alapsokaságú Finsler-terek. Az

$$\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y) \tag{5.4.5}$$

transzformációt Randers-transzformációnak nevezzük, ahol $\rho(x,y) = \rho_i(x)y^i$ differenciál 1-forma M-en.

A Randers-transzformáció akkor és csakis akkor projektív, ha a $(\rho_i(x))$ gradiens vektormezőt alkot.

A Randers-transzformáció fogalmának megalkotása M. Matsumoto nevéhez fűződik, míg az elnevezés Hashiguchitól és Ichijyōtól származik.

Ez utóbbi szerzőpáros ugyancsak [HI3]-ban bizonyította, hogy a Randers-csere projektív – azaz geodetikus megőrző – voltának szükséges és elegendő feltétele az $s_{ij} = (\rho_{i;j} - \rho_{j;i})/2$ eltűnése. Itt a pontosvessző szimbólum a Berwald-konnexió szerinti kovariáns deriválást jelöli.

S. Numata 1978-ban egy, a [Nu2]-beli tételhez hasonló redukciós tételt igazolt:

5.4.6. Tétel: *[BM2] Tekintsük az $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ egymáshoz projektív, legalább háromdimenziós Finsler-tereket. Ha $(M, L(x,y))$ Landsberg-tér, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ Berwald típusú.*

5.4.7. Tétel: *[Nu2] Tekintsük az $(M, L(x,y)) \to (M, \bar{L}(x,y))$ kettőnél nagyobb dimenziós Finsler-terek Randers-transzformációját. Ha $(M, L(x,y))$ C-reducibilis, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ is az.*

M. Matsumoto 1998-ban általánosította Numata tételét P-reducibilis Finsler-terekre bevezetve a triviális Randers-transzformáció fogalmát:

Definíció: [M20] Egy Randers-transzformációt triviálisnak mondunk, ha

$$s_{ij} = \frac{\rho_{i;j} - \rho_{j;i}}{2} = 0 \qquad \text{és} \qquad r_{00} = r_{ij}y^i y^j = \frac{\rho_{i;j} + \rho_{j;i}}{2} = 0$$

feltételek teljesülnek.

5.4.8. Tétel: *[M20] Legyenek $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ P-reducibilis, három vagy annál nagyobb dimenziós Finsler-terek és $(M, L(x,y)) \to (M, \bar{L}(x,y))$ egy nem triviális és projektív Randers-transzformáció. Ekkor az alábbi két eset valamelyike teljesül:*

(1) Mindkét tér Berwald típusú Randers-metrikával.

(2) Mindkét tér Kropina típusú.

Tekintsünk most egy erősebb feltételt, $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ is legyen Landsberg típusú. Ekkor, ha ezen terekben még a C-reducibilitási feltétel is teljesül, akkor a 5.4.2. tétel miatt ezek a terek Berwald típusúak. Tehát igaz az

5.4.9. Tétel: *[M20] Ha $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ legalább háromdimenziós Landsberg-terek és $(M, L(x,y)) \to (M, \bar{L}(x,y))$ nemtriviális és projektív Randers-transzformáció, akkor az alábbi két feltétel valamelyike teljesül:*

(1) Mindkét tér Berwald típusú Randers-metrikával.

(2) Mindkét tér Berwald típusú Kropina-metrikával.

Szenteljük most figyelmünket a kétdimenziós esetnek, ezt csak az utóbbi tétel esetén tehetjük meg, hiszen a P-reducibilitás nem bír jelentéssel háromnál kisebb dimenziószám esetén. Tekintsük tehát kétdimenziós Finsler-terek Randers-transzformációját! Ha (l, m) és $(\bar{l}, \bar{m})$ jelöli a Berwald-frameket a megfelelő terekben és feltesszük, hogy $\rho_i = \sigma l_i + \tau m_i$, akkor

$$\begin{aligned} &\sigma = \frac{\rho}{L}\,, \quad p_i = \tau m_i\,, \qquad \text{és} \\ &\bar{l}^i = \frac{1}{t} l^i\,, \quad \bar{l}_i = t l_i + m_i\,, \\ &\bar{m}^i = \mu_1 l^i + \mu_2 m^i\,, \quad \bar{m}_i = \mu m_i\,, \end{aligned}$$

ahol $(\mu_1, \mu_2) = (-\varepsilon\mu\tau/t^2, \mu/t)$, $\mu^2 = t\bar{\varepsilon}\varepsilon$ és ε illetve $\bar{\varepsilon}$ a megfelelő kétdimenziós Finsler-terek szignatúrái.

Így a főskalárok között fennáll az

$$\bar{\varepsilon}\bar{I} = \frac{\varepsilon t}{\mu} I + \frac{3\tau}{2\mu}$$

kapcsolat [M20]. Ezért, ha $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ Landsberg típusúak ($I_{,1} = 0$ és $\bar{L}_{,1} = 0$), akkor az $(M, L(x,y))$ tér főskalárja kielégíti a

$$\sigma_{,1} I + 3\varepsilon\left(\sigma_{,2} - \frac{\tau}{2t}\sigma_{,1}\right) = 0$$

egyenlőséget.

A P_{ijk} tenzor transzformációja projektív Randers-transzformáció esetén

A $P_{ijk} = C_{ijk|0}$ $(v)hv$-torzió tenzor transzformációját M. Matsumoto tanulmányozta [M20] és levezette a

$$\bar{C}_{ijk|0} = tC_{ijk|0} + \frac{r_{00}}{2L} C_{ijk} + \frac{1}{2L}\left(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ik}q_j\right) \tag{5.4.6}$$

transzformációs szabályt, ahol

$$\begin{aligned}
2C_{ijk} &= \partial g_{ij}/\partial y^k \ , \\
h_{ij} &= g_{ij} - l_i l_j \ , \\
l_i &= \partial L/\partial y^i \ , \\
q_k &= r_{0k} - \frac{r_{00}}{2L} + \{\rho_k + (1+t)l_k\} \ , \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j \rho_i + \partial_i \rho_j) - \rho_r F^r_{ij} \ , \\
t &= \frac{\bar{L}}{L}
\end{aligned}$$

és F^r_{ij} a Cartan-konnexió koefficiensét jelöli. Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned}
C_{ijk|0} = P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \qquad \text{és} \\
\bar{C}_{ijk|0} = \bar{P}_{ijk} = \lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} \ ,
\end{aligned}$$

azaz F^n és $\bar{F}^n$ is ${}^*P$ Finsler-tér. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} = \left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right) C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j). \tag{5.4.7}$$

Projektív Randers-transzformáció esetén a h_{ij} tenzor

$$\frac{\bar{h}_{ij}}{\bar{L}} = \frac{h_{ij}}{L}$$

összefüggés szerint transzformálódik, amely az

$$\bar{L}\bar{h}^{ij} = Lh^{ij} \tag{5.4.8}$$

egyenlőséget implikálja [HI3]. Az (5.4.8) összefüggést és Matsumoto [M20]-beli eredményeit használva az (5.4.7) baloldalát $\bar{L}\bar{h}^{ij}$-vel, míg jobboldalát Lh^{ij}-vel kontrahálva kapjuk, hogy

$$q_k = \frac{2}{n+1}\left(\lambda(x,y)\bar{L}\bar{C}_k - L\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right) C_k\right). \tag{5.4.9}$$

Helyettesítsük (5.4.9)-et (5.4.7)-be, így

$$\begin{aligned}
\lambda(x,y) = \bar{C}_{ijk}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right) C_{ijk} + \\
+ \frac{1}{L(n+1)}\Big[\lambda(x,y)\bar{L}(\bar{C}_k h_{ij} + \bar{C}_i h_{jk} + \bar{C}_j h_{ki}) - \\
- L\Big(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\Big)(C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\Big].
\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Írjuk be az $\dfrac{\bar{L}}{L} h_{ij} = \bar{h}_{ij}$ összefüggést (5.4.10)-be, s a

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\left[(n+1)\bar{C}_{ijk} - (\bar{C}_k\bar{h}_{ij} + \bar{C}_i\bar{h}_{jk} + \bar{C}_j\bar{h}_{ki})\right] = \\ &= \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{L}\right)\left[(n+1)C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\right]\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

egyenlőséget kapjuk.

Összegezzük a fent leírtakat!

5.4.10. TÉTEL: *[Szi2] Legyen $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ $^*P$ Finsler-tér. Ha létezik projektív Randers-transzformáció $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar{L}(x,y))$ között, akkor $(M, L(x,y))$ akkor és csakis akkor C-reducibilis, ha $(M, \bar{L}(x,y))$ is az.*

Most tegyük fel, hogy az F^n Finsler-terünk $^*P$-típusú, azaz

$$C_{ijk|0} = P_{ijk} = \lambda(x,y) C_{ijk}\ ,$$

ekkor a

$$\bar{P}_{ijk} = t\lambda(x,y)C_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j) \tag{5.4.12}$$

adódik.

Az [M6]-ben leírtakat alkalmazva és (5.4.12)-t balról $\bar{L}\bar{h}^{ij}$-vel, jobbról Lh^{ij}-vel kontrahálva az

$$\bar{L}\bar{P}_k = C_k\left(\bar{L}\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2}\right) + \frac{n+1}{2}q_k$$

egyenlőséghez jutunk, amelyből

$$q_k = \frac{2}{n+1}\bar{L}\bar{P}_k - \frac{2}{n+1}\left(\bar{L}\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2}\right)C_k \tag{5.4.13}$$

következik.

A (5.4.13)-t (5.4.12)-be helyettesítve nyerjük a

$$\begin{aligned}\bar{P}_{ijk} = &\frac{1}{n+1}\frac{\bar{L}}{L}(\bar{P}_k h_{ij} + \bar{P}_i h_{jk} + \bar{P}_j h_{ki}) + \\ &+ \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)\left\{(n+1)C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\right\}\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

összefüggést, amely a $h_{ij} = \dfrac{L\bar{h}_{ij}}{\bar{L}}$ egyenlőséggel a

$$\begin{aligned}\bar{P}_{ijk} - \frac{1}{n+1}(\bar{P}_k\bar{h}_{ij} + \bar{P}_i\bar{h}_{jk} + \bar{P}_j\bar{h}_{ki}) &= \\ = \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)&\left\{(n+1)C_{ijk} - (C_kh_{ij} + C_ih_{jk} + C_jh_{ki})\right\}\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

egyenlőséget implikálja, s így igaz az

5.4.11. TÉTEL: *[Szi2] Legyen $(M, L(x,y))$ $^*P$-típusú és $(M, \bar{L}(x,y))$ tetszőleges Finsler-tér. Ha létezik $\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$ projektív Randers-transzformáció, akkor a $\bar{P}_{ijk}$ és C_{ijk} tenzorkomponensek kielégítik az (5.4.15) egyenlőséget.*

A fenti tétel feltételeit használva adódik az alábbi két

Következmény:

(1) Ha $(M, L(x,y))$ C-reducibilis tér, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ P-reducibilis.

(2) Ha $(M, L(x,y))$ P-reducibilis tér, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ C-reducibilis.

Most foglalkozzunk azzal az esettel, amikor $(M, \bar{L}(x,y))$ $^*P$ Finsler-tér, azaz $\bar{C}_{ijk|0} = \lambda(x,y)\bar{C}_{ijk}$. Ezesetben (5.4.6) a

$$\lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} = tP_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j) \tag{5.4.16}$$

egyenlőséget implikálja. Ezután alkalmazva az $\bar{L}\bar{h}^{ij} = Lh^{ij}$ transzformációs kapcsolatot kapjuk a

$$q_k = \frac{2}{n+1}\left(\lambda(x,y)\bar{L}\bar{C}_k - \bar{L}P_k - \frac{r_{00}}{2}C_k\right) \tag{5.4.17}$$

összefüggést. Ez utóbbi egyenlőséget (5.4.16)-ba helyettesítve a

$$\begin{aligned}\lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} = \frac{t}{n+1}&\left\{(n+1)P_{ijk} - (P_kh_{ij} + P_ih_{jk} + P_jh_{ki})\right\} - \\ &- \frac{r_{00}}{2(n+1)L}\left\{(n+1)C_{ijk} - (C_kh_{ij} + C_ih_{jk} + C_jh_{ki})\right\} + \\ &+ \frac{1}{(n+1)L}\left\{\lambda(x,y)\bar{L}(\bar{C}_kh_{ij} + \bar{C}_ih_{jk} + \bar{C}_jh_{ki})\right\} .\end{aligned} \tag{5.4.18}$$

adódik. A $h_{ij} = L\dfrac{\bar{h}_{ij}}{\bar{L}}$ összefüggés segítségével (5.4.18)

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\{(n+1)\bar{C}_{ijk} - (\bar{C}_k\bar{h}_{ij} + (\bar{C}_i\bar{h}_{jk} + (\bar{C}_j\bar{h}_{ki})\} = \\ &= \frac{t}{n+1}\{(n+1)P_{ijk} - (P_k h_{ij} + P_i h_{jk} + P_j h_{ki})\} - \\ &- \frac{r_{00}}{2(n+1)L}\{(n+1)C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\} \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

formába írható, és megfogalmazható az

5.4.12. ÁLLÍTÁS: *[Szi2] Legyen $(M, \bar{L}(x,y))$ $^*P$-típusú és $(M, L(x,y))$ tetszőleges Finsler-tér. Ha létezik egy $\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$ projektív Randers-transzformáció, akkor $\bar{C}_{ijk}$, P_{ijk} és C_{ijk} tenzorkomponensekre igaz az (5.4.19) összefüggés.*

A fenti állításból következik, hogy ha $(M, L(x,y))$ C-reducibilis, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ is az. Másrészt jól ismert, hogy egy Funk-metrikával ellátott Fisler-tér $^*P$-típusú és $P_{ijk} = -KLC_{ijk}$ $(K \in \mathbf{R}^+)$ [She3]. Ezért igaz az alábbi

Következmény:

Ha létezik projektív Randers-transzformáció egy $^*P$-típusú, Funk-metrikával ellátott Finsler-tér és egy tetszőleges Finsler-tér között, akkor ez a Finsler-tér szükségképpen P-reducibilis.

5.5. Néhány Finsler-geometriai modell és alkalmazási lehetőségek

5.5.1. Speciális Finsler-metrikák (történeti áttekintés)

Amint már néhány példával illusztráltuk, Finsler-metrikákkal a fizikában, a biológiában, a geológiában, a pénzügyi matematikában is találkozhatunk. Jelen fejezet egy újabb alkalmazási területet mutat be: néhány lehetséges speciális Finsler-metrikát a pszichológiában.

Talán a legrégebbi Finsler-metrikának az ún. Hilbert-metrikát tekinthetjük, amely még az 1900-as évek előtt született, de kutatása napjainkban is folyik.

A D. Bao, S. S. Chern és Z. Shen által írt „An introduction to Riemann–Finsler Geometry” [BCS] című könyvben – mint a címe is mutatja – a korábbi

Finsler-geometria, Finsler-metrika elnevezést a szerzők Riemann–Finsler-geometriára, Riemann–Finsler-metrikára módosították, hangsúlyozva ezzel B. Riemann szerepét az „új geometria létrejöttében”.

A szerzők a Riemann–Finsler-metrikát a következőképpen definiálják:

Legyen M egy n-dimenziós differenciálható sokaság, amelynek (x^i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ pontbeli érintőterét T_xM, a T_xM-beli vektorok koordinátáit (y^i) jelölje. Az $L(x, y) : TM(= \bigcup_x T_xM) \to \mathbb{R}$ függvény Riemann–Finsler-metrika, ha teljesíti a következő feltételeket:

(1) Regularitás: $L(x, y)$ C^∞-osztályú a $TM \setminus 0$ sokaságon.

(2) Pozitív homogenitás: $L(x, \lambda y) = \lambda L(x, y)$ bármely pozitív λ esetén.

(3) Erős konvexitás: a
$$g_{ij}(x, y) = \frac{\partial^2 L^2(x, y)}{\partial y^i \partial y^j}$$
$n \times n$-es mátrix pozitív definit bármely zérustól különböző y vektor esetén.

Megjegyezzük, hogy némely esetben a Riemann–Finsler-metrika teljesíti az $L(x, y) = L(x, -y)$ feltételt, általános esetben viszont ez túl erős megszorítás, hiszen például a már említett nem triviális (nem Riemann) Finsler-metrika, a Randers-metrika sem tesz eleget ennek a feltételnek. Ez a feltétel azonban még ott szerepel Paul Finsler doktori disszertációjában és Riemann „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrund liegen” c. előadásában is. Míg Riemann úgy vélte,

> „ha nem ragaszkodunk az ellipszoidokhoz (pozitív definit kvadratikus formákhoz), akkor a számítások túl bonyolultakká válnak”,

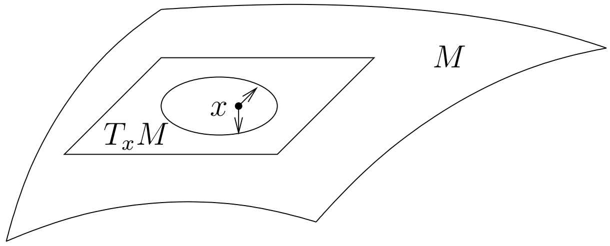
a Finsler-geometria egyik ma élő legnagyobb képviselője, Siing-Shen Chern szerint:

> „In fact, the general case is just as simple and a main point went unnoticed by Riemann and his successors.” [Ch1]
>
> „I belive a major part of differential geometry in the 21th century should be Riemann–Finsler geometry.” [Ch2]

A jól ismert, G. Randers által felfedezett metrika kétdimenzióban a következőképpen szemléltethető:

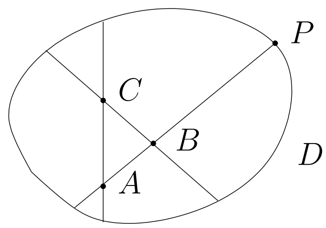
Látható, hogy a T_xM érintőtérbeli indikátrix egy olyan ellipszis, amelynek fókuszában van az origó.

A következőkben a Randers-metrika egy általánosítását vizsgáljuk meg, az ún. Funk-metrikát, amely a Hilbert-metrikából származtatható.



5.5.2. A Funk-féle távolságfüggvény

Legyen D az $\mathbb{E}^n$ n-dimenziós euklideszi tér egy erősen konvex tartománya, ∂D pedig jelölje D határát.



Definíció: [Fu2] Legyenek az A és B pontok a D tartomány tetszőleges pontjai, P az $|AB|$ egyenes és a ∂D közös pontja, továbbá a pontok sorrendje A, B, P. Legyen k egy pozitív konstans, ekkor az $f(A, B)$ ún. Funk-féle távolságfüggvény a következőképpen definiálható:

$$f(A, B) = \frac{1}{k} \log(AP/BP)\,,$$

ahol AP és BP az euklideszi távolságokat jelölik.

A fenti definíció segítségével könnyen igazolható, hogy a Funk-féle távolságfüggvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(1) Nemnegatív, azaz $f(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in D$ esetén;

(2) $f(A, B) = 0$ pontosan akkor, ha $A = B$;

(3) Teljesül az ún. háromszög-egyenlőtlenség, vagyis $f(A, B) + f(B, C) \geq f(A, C) \quad \forall A, B, C \in D$ pontokra, az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fönn, ha B illeszkedik az $|AC|$ egyenesre;

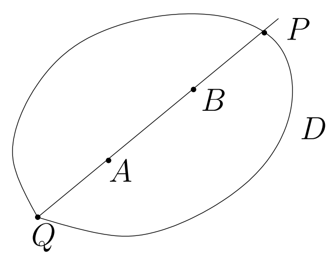
(4) Általában $f(A,B) \neq f(B,A)$, de $f(A,A_n) \to 0$ pontosan akkor, ha $f(A_n,A) \to 0$.

5.5.3. A Hilbert-féle távolságfüggvény

Definíció: [Hi2] A Hilbert-féle távolságfüggvény a Funk-féle távolságfüggvény szimmetrizációjaképpen adódik:

$$h(A,B) = \frac{1}{2}\big\{f(A,B) + f(B,A)\big\} = \frac{1}{2k}\log(AP/BP \times BQ/AQ)\ ,$$

ahol P és Q az $|AB|$ egyenes és ∂D közös pontja, továbbá a pontok sorrendje: Q, A, B, P.



Könnyen belátható, hogy a Hilbert-féle távolságfüggvény esetén igazak az alábbi állítások:

(1) Nemnegatív, $h(A,B) \geq 0$ minden D-beli A, B pontra;

(2) $h(A,B) = 0$ pontosan akkor, ha $A = B$;

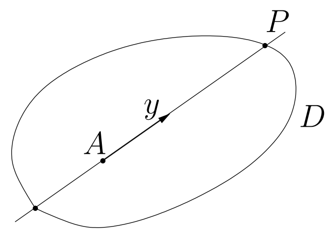
(3) Igaz a háromszög-egyenlőtlenség, tehát $h(A,B) + h(B,C) \geq h(A,C)$ bármely A, B, C D-beli pontokra. Az egyenlőség fennállásának szükséges és elegendő feltétele, hogy a B illeszkedjen az $|AC|$ egyenesre az erősen konvex D tartományban;

(4) Szimmetrikus: $h(A,B) = h(B,A)$ bármely D-beli A, B pontok esetén.

5.5.4. A Funk- és a Hilbert-metrika

Jelölje (x^i) az A pont koordinátáit, (y^i) az $y \neq 0$ vektor koordinátáit. Definiáljunk egy r függvényt a következőképpen:

$$r(x,y) = AP/\|y\|\ ,$$



ahol AP a szokásos euklideszi távolság, $\|y\|$ pedig az y vektor euklideszi normája.

Az így definiált r függvényre igazak az alábbiak:

(1) Pozitív: $r(x,y)$ minden (x,y) párra;

(2) Az r (-1)-edfokú pozitív homogén y-ban;

(3) Ha $\partial D = \{z^i | \Phi(z^i) = 0\}$, akkor $\Phi(x^i + r(x,y)y^i) = 0$. Vagyis, ha a P határpont, akkor (z^i) koordinátái $z^i = x^i + r(x,y)y^i$ alakban írhatók;

(4) Az r függvény C^∞-osztályú.

Definíció: Legyen

$$L_f = \frac{1}{kr(x,y)} \qquad \text{és} \qquad L_h = \frac{1}{2k\{r(x,y) + r(x,-y)\}}\,,$$

ekkor az L_f függvényt Funk-metrikának és az L_h függvényt Hilbert-metrikának mondjuk.

5.5.4.1. Tétel: *[Bu3] Mind a Funk-, mind a Hilbert-metrika valódi Riemann–Finsler-metrika.*

Definíció: Legyen D egy erősen konvex tartomány az n-dimenziós euklideszi térben, ekkor a (D, L_f) párt Funk-térnek, a (D, L_h) párt Hilbert-térnek nevezzük.

5.5.4.2. Tétel: *[She3] Mind a Funk-, mind a Hilbert-tér konstans görbületű, a görbület éréke rendre $-k^2/4$ illetve $-k^2$.*

Tekintsünk néhány érdekes speciális esetet:

Legyen a D erősen konvex tartomány ∂D határa egy nem elfajuló másodrendű görbe:

$$\partial D \,:\, \phi(z^i) = 0\,,$$

ahol $\phi(z^i) = b_{ij}z^iz^j + c_iz^i + d,\ b_{ij} = b_{ji}$.

Ez esetben

$$L_f = \frac{1}{k}\Big[\big\{a_{ij}(x)y^iy^j\big\}^{d/2} + b_i(x)y^i\Big] \qquad \text{és}$$
$$L_h = \frac{1}{2k}\big\{a_{ij}(x)y^iy^j\big\}^{d/2} .$$

Így (D, L_f) egy $-k^2/4$ negatív konstans görbületű Randers-tér és (D, L_h) $-k^2$ negatív konstans görbületű Riemann-tér. Ha D az egységkör, akkor (D, L_h) a hiperbolikus tér jól ismert Klein-féle modelljét adja.

5.5.5. Lehetséges Finsler-metrikák a pszichometriában

A Finsler-metrikák fizikában való alkalmazásáról már többször ejtettünk szót. Most egy a korallzátonyok tanulmányozásában használatos Finsler-metrikát mutatunk meg:

Tekintsük az $\mathbf{x} = (x^1, x^2) = (x, y)$ és $\mathbf{u} = (y^1, y^2) = (h, v)$ lokális koordinátarendszert kétdimenziós esetben, ekkor a metrika:

$$L(x, y, h, v) = e^{\Phi(x,y)}N(h, v)$$

alakú, ahol N egy speciális Minkowski-metrika (a főskalár konstans volta egy erős megszorítás erre a metrikára) [AIM].

Ez a metrika nagyon hasonló ahhoz, amelyet a pszichometriában használnak:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \xi(\mathbf{x})|\mathbf{u}| ,$$

ahol $\xi(\mathbf{x}) > 0$ és $|\mathbf{u}|$ az $\mathbf{u}$ vektor Minkowski-normája [DC1], [DC2].

Az ilyen típusú Finsler-metrikát konform Minkowski vagy sík konform metrikának mondjuk, ezen metrika tanulmányozása jelenleg is folyik.

Tekintsük az alábbi konform Minkowski metrikákat:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = e^{ax+by}\sqrt[4]{h^4 + v^4 + h^2v^2} ,\\
&(2) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = e^{cxy}\sqrt[4]{h^4 + v^4 + h^2v^2} ,\\
&(3) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = e^{ax+by}\sqrt[4]{(h^2 + v^2 + hv)(h^2 + v^2)} ,\\
&(4) \quad F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = e^{cxy}\sqrt[4]{(h^2 + v^2 + hv)(h^2 + v^2)} ,
\end{aligned} \tag{5.5.5.1}$$

ahol a, b, c valós számok.

Kétdimenzióban az (1)-beli metrika Gauss-görbülete:

$$
\begin{aligned}
&-72\sqrt{u^4+v^4+u^2v^2}\big(4b^2u^{14}-4abvu^{13}-40u^{12}b^2v^2+u^{12}a^2v^2+\\
&+34av^3u^{11}-83u^{10}b^2v^4-7u^{10}a^2v^4+146av^5bu^9-50u^8a^2v^6-\\
&-95u^8b^2v^6+188av^7bu^7-50u^6b^2v^{38}-95u^6a^2v^8+146av^9bu^5-\\
&-7a^4b^2v^{10}-83u^4a^2v^{10}+34av^{11}bu^3+u^2b^2v^{12}-40u^2a^2v^{12}-\\
&-4av^{13}bu+4a^2v^{14}\big)e^{(-2ax-2by)}/(2u^4+11u^2v^2+2v^4)^4\,.
\end{aligned}
$$

A (2), (3) és (4)-beli metrikák Gauss-görbülete még a fentinél is bonyolultabb.[A fenti számítás Kozma László eredménye.]

A jövőben vizsgálható néhány probléma:

Érdekes volna megvizsgálni, hogy egy Randers-metrika mikor alkalmazható a pszichometrikus vizsgálatokban. Ez nyilván csak olyan esetekben fordulhat elő, ahol a probléma aszimmetrikus metrikát kíván. (Ilyenekről olvashatunk [DC1]-ben.)

Tanulmányozható az is, milyen feltételek mellett lesz egy Randers-metrika konform Minkowski típusú. Egy szükséges és elegendő feltétel már ismert, de ez az alkalmazások szempontjából nagyon komplikált.

Az (5.5.5.1)-ben említett metrikák geodetikusainak meghatározása kétdimenzióban egy fontos problémát oldana meg a pszichometriában, ugyanis a mérés ezekben a kísérletekben a geodetikusok mentén történik.

Nem tisztázott még teljes egészében az sem, hogy egy pszichometriában alkalmazott Finsler-metrika mikor Douglas típusú.

A [BM1], [BM3], [BM7], [Arn] dolgozatokból tudjuk, hogy ekkor a geodetikusok differenciálegyenlete

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=a(x,y)\big(y'\big)^3+b(x,y)\big(y'\big)^2+c(x,y)y'+d(x,y)$$

alakú, y'-ben harmadfokú polinom.

Reméljük, hogy a közeljövőben sikerül karakterizálni a pszichometriában használt metrikus függvényeket és választ adhatunk az itt felmerülő kérdésekre.

Irodalomjegyzék

[AH] T. Aikou, M. Hashiguchi: *On the paths in generalized Berwald spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.) 14, (1981), 1-8.

[AHM] P. L. Antonelli, B. Han, J. Modayil: *New results on 2-dimensinal constant sprays with an application to heterocrony*, (preprint 1998)

[AHY] T. Aikou, M. Hashiguchi, K. Yamauchi: *On Matsumoto's Finsler space with time measure*, to appear in Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.)

[Ai] T. Aikou: *Some remarks on conformal changes of generalized Finsler metrics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys and Chem.) 20, (1987), 57-61.

[AIM] P. Antonelli, R. Ingarden, M. Matsumoto: *The theory of sprays and Finlser spaces with applications in physics and biology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (1993)

[AM] P. Antonelli, R. Miron: *Lagrange and Finsler Geometry*, Applications to Physics and Biology, volume 76 of FTPH, Kluwer Academic Publishers, (1995)

[AMa] P. L. Antonelli, M. Matsumoto: *On conformal and projective flatness of two-dimenyional constant Berwald-Finsler spaces in Epidemiology*, Open System and Information Dinamics 3, (1995), 305-317.

[AP] M. Abate, G. Patrizio: *Finsler metrics – A Global approach, with applications to geometric function theory*, Lecture Notes in Mathematics 1591, Springer Verlag, Berlin, (1994)

[Arn] V. I. Arnold: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1983)

[As1] G. S. Asanov: *C-reducible Finsler spaces. Finsler spaces with Randers metrics and Kropina metrics*, (Russian), Problem. of Geom. 11, (1980), 65-88.

[As2] G. S. Asanov: *Finsler geometry, relativity and gauge theories*, Fund. Theo. Phys., D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland, (1985)

[B1] L. Berwald: *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelism*, Math. Z. 25, (1926), 40-73, 26, (1927), 176.

[B2] L. Berwald: *Parallelübertraung in allgemeinen Räumen*, Atti Congr. Intern. Mat. Bologna, 4, (1928), 263-270.

[B3] L. Berwald: *On Finsler and Cartan geometries III, Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, ann. of Math. 42, (1941), 84-112.

[B4] L. Berwald: *Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung*, Ann. of Math. 48, (1947), 755-781.

[B5] L. Berwald: *Über die n-dimensionalen geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Z. 30, (1929), 449-469.

[B6] L. Berwald: *Über die Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, (1946), 642-647. = Indag. Math. 8, (1946), 401-406.

[B7] L. Berwald: *Über zwei dimensionale allgemeine metrische Räume I, II*, J. Reine Angew. Math. 156, (1927), 191-222.

[B8] L. Berwald: *Zur Geometric ebener Variationsprobleme*, Lotos Prag 74, (1926), 43-52.

[B9] L. Berwald: *Über Finslersche und Cartansche Geometrie I. Geometrische Erklärungen der Krümmung und des Hauptskalars eines zweidimensionalen Finslerschen Räumen*, Math. Timişoara 17, (1941), 34-58.

[Ba] S. Bácsó: *On geodesics mappings of special Finsler spaces*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Suppl. 59, (1999), 83-87.

[Bar] W. Barthel: *Über die Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen*, Ann. Math. Appl. (4)36, (1954), 159-190.

[BC] D. Bao, S. S. Chern: *On a notable connection in Finsler geometry*, Houston J. Math. 19(1), (1993), 135-180.

[BCr] R. Bishop, R. Crittenden: *Geometry of manifolds*, Academic Press, (1964)

[BCS] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen: *An Introduction to Riemann Finsler Geometry*, Springer Verlag, (2000)

[Berg1] M. Berger: *Les variétés Riemanniennes* 1/4-*pincées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (III), 14(2), (1960)

[Berg2] M. Berger: *Sur les variétés à courbure positive de diamétre minimum*, Comment. Math. Helv. 35(1), (1961)

[Berg3] M. Berger: *Riemannian geometry during the second half of twentieth century*, I. H. E. S. preprint (1997)

[BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Matematicae, (2003), 30. 23-30.

[BHM] S. Bácsó, M. Hashiguchi, M. Matsumoto: *Generalized Berwald spaces and Wagner spaces*, Analele Stiintifice Ale Universităth „Al. I. Cuza" Iaşi, Tomul XLIII. s. I. a, Matematiča, (1997), 307-321.

[BIK] S. Bácsó, F. Ilosvay, B. Kis: *Landsberg spaces with common geodesics*, Publ. Mat. Debrecen 42/1-2., (1993), 139-144.

[BK] H. Busemann, J. P. Kelly: *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press, New York, (1953)

[BM1] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion Berwald space*, Publ. Math. Debrecen 51, (1997), 385-406.

[BM2] S. Bácsó, M. Matsumoto: *Reduction theorems of certain Landsberg spaces to Berwald spaces*, Publ. Math. Debrecen 48, (1996), 357-366.

[BM3] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type II., Projectively flat sapces*, Publ. Math. Debrecen 53, (1998), 423-438.

[BM4] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type III., Finslerian Geometries (edited by P. N. Antonelli)*, Kluwer Academic Publishers, (2000), 89-94.

[BM5] S. Bácsó, M. Matsumoto: *Finsler spaces with the h-curvature tensor dependent on position alone*, Publ. Math. Debrecen 55, (1999), 199-210.

[BM6] S. Bácsó, M Matsumoto: *Projective change between Finsler spaces with (α, β)-metric*, Tensor N. S. 55, (1994), 252-257.

[BM7] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler-spaces of Douglas type IV. Projectively flat Kropina spaces*, Publ. Math. Debrecen, 56, (2000), 213-221.

[BOSZ] S. Bácsó, Á. Orosz, B. Szilágyi: *On the rectifiability condition of a second order ordinary differential equation*, Acta Math. Acad. Ped. Nyíregyháza, (2001), 127-129.

[BP] S. Bácsó, I. Papp: *$^*P$-Finsler spaces with vanishing Douglas tensor*, Acta Acad. Paed. Agriensis, 25, (1998), 91-95.

[Br1] R. L. Bryant: *Finsler structures on the 2-sphere satisfying K=1*, volume Finsler Geometry of Contemporary Mathematics (196), AMS (1996), 27-42.

[Br2] R. L. Bryant: *Projectively flat Finsler 2-spheres of constant curvature*, Selcta Math. New Series 3, (1997), 161-204.

[Br3] R. L. Bryant: *Some remarks on Finsler manifolds with positive constant flag curvature*, Houston J. Math. 28(2), (2002), 221-262.

[Bri1] F. Brickell: *A new proove of Deicke's theorem on homogeneous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 16, (1965), 190-191.

[Bri2] F. Brickell: *A theorem on homogeneous functions*, J. London Math. Soc. 42, (1967), 325-329.

[BSZ] S. Bácsó, B. Szilágyi: *On a weakly-Berwald Finlser space of Kropina type*, Mathematica Pannonica 13/1, (2002), 91-95.

[Bu1] H. Busemann: *The geometry of Finsler spaces*, Ball. Amer. Math. Soc. 56, (1950)

[Bu2] H. Busemann: *The foundations of Minkowskian geometry*, Comment. Math. Helvet. 24, (1950), 156-187.

[Bu3] H. Busemann: *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, (1955)

[BY] S. Bácsó, R. Yoshikawa: *Weakly-Berwald process*, Publ. Math. Debrecen 61, (2002), 219-231.

[C1] É. Cartan: *Les espaces de Finsler*, Actualités 79, Paris, (1934)

[C2] É. Cartan: *Sur un problème de' équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés*, Math. Cluj. 4, (1930), 114-136., Oeuvres Compl. III 2, 1131-1153.

[CE] J. Cheegner, D. Ebin: *Comparison theorems in Riemannian geometry*, North-Holland Publishing Company, (1975)

[CG1] J. Cheegner, D. Gromoll: *The splitting theorem for manifolds of nonegative Ricci curvature*, J. Differential Geometry 6, (1971), 119-128.

[CG2] J. Cheegner, D. Gromoll: *On the structure of complete manifolds of nonegative curvature*, Ann. of Math. 96, 413-443.

[Ch1] S. S. Chern: *Finsler Geometry is just Riemann Geometry Without Quadratic Restrictions*, Notices of AMS, 46, (1996), 959-962.

[Ch2] S. S. Chern: *Back to Riemann*, Mathematics: Frontiers an Perspectives (2000), 33-34.

[D] J. Douglas: *The general geometry of paths*, Ann. of Math. 29, (1927-1928), 143-168.

[DC1] E. N. Dzhafarov, H. Colonius: *Fechnerian metrics in unidimensional and multidimensional stimulus spaces*, Psychonomic Bulletin and Review, 6(2), (1999), 239-268.

[DC2] E. N. Dzhafarov, H. Colonius: *Multidimensional Scaling: Basics*, Journal of Mathematical Psychology, 45, (2001), 670-719.

[De] A. Deicke: *Über die Finsler-Räume mit* $A_i = 0$, Arch. Math. 4, (1953), 45-51.

[E] L. P. Eisenhart: *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. VIII, New York, (1927)

[F1] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, (Disertation Göttingen, 1918), Birkhäuser Verlag, Barel, (1951)

[Fu2] P. Funk: *Über Geometrien bei denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Ann. 101, (1929), 226-237.

[Fu3] P. Funk: *Über zweidimensionale Finslersche Räume, insbesondere über solche mit geradlinigen Extremalen und positiver konstanter Krümmung*, Math. Z. 40, (1936), 86-93.

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu: *Structures métriques pour les varétiés Riemanniennes*, Cedic-Fernand Nathan, Paris, (1981)

[H1] M. Hashiguchi: *On the hv-curvature tensors of Finsler spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. 4, (1971), 1-5.

[H2] M. Hashiguchi: *On Wagner's generalized Berwald space*, J. Korean Math. Soc. 12, (1975), 51-61.

[He] E. Heil: *Eine Charakterisierung lokal-Minkowskischer Räume*, Math. Ann. 167, (1966), 64-70.

[HHM] M. Hashiguchi, S. Hojo, M. Matsumoto: *On Landsberg spaces of two dimensions with (α,β)-metrics*, J. Korean Math. Soc. 10, (1973), 17-26.

[Hi1] D. Hilbert: *Matematische Probleme*, Gött. Nachrichten, (1900), 253-297.; könyv alakjában kommentárokkal ellátva P. Sz. Alekszandrov szerkesztésében: *Problemü Gil'berta*, Nauka, Moszkva, (1969), 29-31.

[Hi2] D. Hilbert: *Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*, Math. Ann. 46, (1901), 91-96.

[HI1] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *On some special (α,β)-metrics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. 8, (1975), 39-46.

[HI2] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *On conformal transformations of Wagner spaces*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.) 10, (1977), 19-25.

[HI3] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *Randers spaces with rectilinear geodesics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.) 13, (1980), 33-40.

[H.Kaw] H. Kawaguchi: *On the Finsler spaces with the vanishing second curvature tensor*, Tensor N. S. 26, (1972), 250-254.

[HrS] D. Hriminc, H. Shimada: *On the α-duality between Lagrange and Hamilton manifolds*, Nonlinear World 3, (1966), 613-641.

[HV] M. Hashiguchi, T. Varga: *On Wagner spaces of W-scalar curvature*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 14, (1979), 11-14.

[Ich1] Y. Ichijyō: *Finsler manifold modeled on a Minkowski space*, J. Math. Kyoto Univ. (Kyoto Daigaku J. Math.) 16-3. , (1976), 639-652.

[Ich2] Y. Ichijyō: *Finsler manifolds with a linear connection*, J. Math. Tokushima Univ. 10, (1976), 1-11.

[Ich3] Y. Ichijyō: *On the Finsler connection associated with a linear connection satisfying $P^h_{ikj} = 0$*, J. Math. Tokushima Univ. 12, (1978), 1-7.

[Ich4] Y. Ichijyō: *On the condition for a $\{V, H\}$-manifold to be locally Minkowskian or conformally flat*, J. Math. Tokushima Univ. 13, (1979), 13-21.

[Ich5] Y. Ichijyō: *On special Finlser connections with the vanishing hv-curvature tensor*, Tensor N. S. 32, (1978), 146-155.

[In1] R. S. Ingarden: *On the geometrically absolute optical representation in the electron microscope*, Trav. Soc. Sci. Letr. Wroclav, B45, (1957)

[In2] R. S. Ingarden: *Geometry of thermodynamics*, Proc. XV, Intern. conf. diff. geom. methods in theor. physics, World Sci. Publ., Singapore, (1987), 455-465.

[Iz1] H. Izumi: *On $^*P$-Finsler spaces I, II*, Memoirs of the Defense Academy, 17, (1997), 1-9, 133-138.

[Iz2] H. Izumi: *On $^*P$-Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor N. S., 38, (1982), 220-222.

[K] M. S. Knebelman: *Collineations and notions in generalized spaces*, Amer. J. of Math. 51, (1927), 527-567.

[KAM] M. Kitayama, M. Azuma, M. Matsumoto: *On Finsler spaces with an (α, β)-metric, Regularity, geodesics and main scalars*, J. Hokkaido Univ. of Education 46, (1995), 1-10.

[Kaw] A. Kawaguchi: *On the theory of nonlinear connections II, Theory of Minkowski spaces and nonlinear connections in a Finlser space*, Tensor N. S. 6, (1956), 165-199.

[Ki] S. Kikuchi: *On the condition that a space with (α, β)-metric be locally Minkowskian*, Tensor N. S. 33, (1979), 242-246.

[Kl1] W. Klingenberg: *Contributions to Riemannian geometry in the large*, Ann. Math. 69, (1959)

[Kl2] W. Klingenberg: *Über Riemannische Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comment. Math. Helv. 35, (1961)

[L1] G. Landsberg: *Über die Totalkrümmung*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 16, (1907), 36-46.

[L2] G. Landsberg: *Krümmungstheorie und Variationsrechnung*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 16, (1907), 547-551.

[L3] G. Landsberg: *Über die Krümmung in der Variationsrechnung*, Math. Ann. 65, (1908), 313-349.

[M1] M. Matsumoto: *History of Finsler geometry*, Debrecen, (1979)

[M2] M. Matsumoto: *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Japan, (1986)

[M3] M. Matsumoto: *The Tavakol-van der Bergh conditions of the theories of gravity and projective change of Finsler metrics*, Publ. Math. Debrecen 42, (1993), 155-168.

[M4] M. Matsumoto: *On some transformations of locally Minkowskian spaces*, Tensor N. S. 22, (1971), 103-111.

[M5] M. Matsumoto: *On Finsler spaces with Randers metric and special forms of important tensors*, J. Math. Kyoto Univ. (Kyoto Daigaku J. Math.) 14, (1974), 477-498.

[M6] M. Matsumoto: *On Finsler spaces with curvature tensors of some special forms*, Tensor N. S. 22, (1971), 201-204.

[M7] M. Matsumoto: *On Wagner's generalized Berwald spaces of dimension two*, Tensor N. S. 36, (1982), 303-311.

[M8] M. Matsumoto: *On C-reducible Finsler spaces*, Tensor N. S. 24, (1972), 29-37.

[M9] M. Matsumoto: *A slope of a mountain is a Finlser surface with respect to a time measure*, J. Math. Kyoto Univ. 29, (1989), 17-25.

[M10] M. Matsumoto: *The Berwald connection of a Finlser space with an (α, β)-metric*, Tensor. N. S. 50, (1991), 18-21.

[M11] M. Matsumoto: *Randers spaces of constant curvature*, Rep. Math. Phys. 28, (1989), 105-117.

[M12] M. Matsumoto: *Projectively flat Finsler spaces of constant curvature*, J. Natl. Acad. Math., India (Gorakhpur), 11, (1983), 142-164.

[M13] M. Matsumoto: *Projectively flat Finslser spaces with (α, β)-metric*, Rep. on Math. Phys. 30, (1991), 15-20.

[M14] M. Matsumoto: *Every path space of dimension two is projectively related to a Finlser space*, Open Syst. and Inform. Dynamics 3, (1995), 291-303.

[M15] M. Matsumoto: *Theory of Finsler spaces with (α, β)-metric*, Rep. on Math. Phys. 31, (1992), 43-83.

[M16] M. Matsumoto: *Two-dimensional Finsler spaces whose geodesics constitute a family of special conic sections*, J. Math. Kyoto Univ. 35, (1995), 357-376.

[M17] M. Matsumoto: *On three-dimensional Finsler spaces satisfying the T- and B^P-conditions*, Tensor N. S. 29, (1975), 13-20.

[M18] M. Matsumoto: *Projective changes of Finsler metries and projectively flat Finsler spaces*, Tensor N. S. 34, (1980), 303-315.

[M19] M. Matsumoto: *Landsberg spaces of dimension two with (α, β)-metric*, Tensor N. S. 57, (1996), 145-153.

[M20] M. Matsumoto: *Projective Randers change of P-reducible Finlser spaces*, Tensor N. S. 59, (1998), 6-11.

[M21] M. Matsumoto: *Finsler spaces with the hv-curvature tensor P_{hijk} of a special form*, Rep. on Math. Phys., 14, (1978), 1-13.

[Mo1] A. Moór: *Über die Dualität von Finslerschen Grundfunktionen*, Publ. Math. Debrecen 2, (1952), 178-190.

[Mo2] A. Moór: *Über die Torsions- und Krümmungsinvarianten der dreidimensionalen Finslerschen Räume*, Math. Nachr. 16, (1957), 85-99.

[MS] M. Matsumoto, H. Shimada: *On Finsler spaces with the curvature tensors P_{hijk} and S_{hijk} satisfying special conditions*, Rep. on Math. Phys., 12, (1977), 77-87.

[MT] M. Matsumoto, L. Tamássy: *Direct method to characterize conformally Minkowski Finsler speaces*, Tensor N. S., 33, (1979), 380-384.

[Nu1] S. Numata: *On Landsberg spaces of scalar curvature*, J. Korea Math. Soc. 12, (1975), 97-100.

[Nu2] S. Numata: *On the torsion tensors R_{jhk} and P_{hjk} of Finsler spaces with a metric $ds = (g_{ij}(dx)dx^i dx^j)^{1/2} + b_i(x)dx^i$*, Tensor N. S. 32, (1978), 27-31.

[O1] T. Okada: *On global models of Finsler spaces* to appear in Tensor N. S.

[O2] T. Okada: *On models of projectively flat Finsler spaces of constant negative curvature*, Tensor N. S. 40, (1983), 117-124.

[R] B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttingen, (1854)

[Ra] G. Randers: *On an asymmetric metric in the four-space of general relativity*, Phys. Rev. (2) 59, (1941), 195-199.

[Rap1] A. Rapcsák: *Die Bestimmung der Grundfunktionen projektiveliener metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen 9., (1962), 164-167.

[Rap2] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen 8., (1961), 285-290.

[Rap3] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume*, Publ. Math. Debrecen 8., (1961), 225-230.

[Rox] I. W. Roxburgh: *Finlser spaces with Riemannian geodesics*, General Relativity and Gravitation 23, (1991), 1071-1080.

[Ru] H. Rund: *The differential geometry of Finlser spaces*, Springer Verlag, (1959)

[S] J. L. Synge: *A generalization of the Riemannian line-element*, Trans. Amer. Math. Soc. 27, (1925)

[She1] Z. Shen: *Finsler manifolds of constant positive curvature*, volume Finsler Geometry of Contemporary Mathematics (196), AMS (1996), 83-92.

[She2] Z. Shen: *Curvature, distance and volume in Finsler geometry*, unpublished

[She3] Z. Shen: *Differential geometriy of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, (2001)

[Shi1] C. Shibata: *On Finlser spaces with Kropina metric*, Rep. on Math. Phys. 13, (1978), 117-128.

[Shi2] C. Shibata: *On Finsler geometry of thermodinamical states given by R. S. Ingarden* to appear in Rep. on Math. Phys.

[Shi3] C. Shibata: *On Finsler spaces with an (α, β)-metric*, J. Hokkaido Univ. of Education, II A, 35, (1984), 1-16.

[So] Gy. Soós: *Über einfache Finslersche Räume*, Publ. Math. Debrecen 7, (1960), 364-373.

[SS] V. P. Singh, R. K. Srivastava: *On h-recurrent Wagner spaces of W-scalar curvature*, Acta. Math. Hungarica 64(2), (1994), 151-156.

[SSAY] C. Shibata, H. Shimada, M. Azuma, H. Yasuda: *On Finsler spaces with Randers metric*, Tensor N. S. 31, (1977), 219-226.

[Su] B. Su: *On the isomorphic transformations of minimal hypersurfaces in a Finlser space*, (Chinese), Acta Math. Sinica 5, (1955), 471-488.

[Sz1] Z. Szabó: *Positive definite Berwald spaces (structure theorems on Berwald spaces)*, Tensor N. S. 35, (1981), 25-39.

[Sz2] Z. Szabó: *Generalized spaces with many isometries*, Geometriae Dedicata 11, (1981), 369-383.

[Szi1] B. Szilágyi: *Some problems in Wagner spaces with vanishing Douglas tensors*, Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering, 47/1, (2003), 75-80.

[Szi2] B. Szilágyi: *Projective Randers change of $^*P$-Finsler spaces*, Acta Univ. Palack. Olomounc, Fac. Rerum Natur. Math. 42, (2003), 105-109.

[T] J. H. Taylor: *A generalization of Levi–Civita's parallelism and the Frenet formulas*, Trans. Amer. Soc. 27, (1925), 246-264.

[To] V. Toponogov: *Riemannian spaces with curvature bounded below*, Uspehi Math. Z. 25, (1926), 723-733.

[V1] O. Varga: *Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Räumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Räumes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20, (1956), 41-51.

[V2] O. Varga: *Zur Begründung der Minkowskischen Geometrie*, Acta Univ. Szeged Sci. Math. 10, (1941-1943), 149-163.

[V3] O. Varga: *Zur Begründung der Hilbertschen Verallgemeinerung der nichtenklidischen Geometrie*, Monatsh. Math. 66, (1962), 265-275.

[W1] V. V. Wagner: *Über Berwaldsche Räume*, Rec. Math. (Mat. Sb.) (2)3, (1938), 655-662.

[W2] V. V. Wagner: *On generalized Berwald spaces*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 39, (1943), 3-5.

[We] H. Weyl: *Zur Infinitesimalgeometrie*, Göttinger Nachrichten, (1921), 99-112.

[Weg] J. M. Wegener: *Hyperflächen in Finslerschen Räumen als Transversalflächen einer Schar von Extremalen*, Monatsch. Math. Phys. 44, (1936), 115-130.

[Wi] W. Wirtinger: *Über allgemeine Massbestimmungen in welcher die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen darstellt werden*, Monatsh. Math. Phys. 33, (1923), 1-14.

[YS] H. Yasuda, H. Shimada: *On Randers spaces of scalar curvature*, Rep. on Math. Phys. 11, (1977), 347-360.

Vizsgálatok speciális Finsler-terekben

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika tudományágban

Írta: Szilágyi Brigitta okleveles matematika-fizika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudomány Doktori Iskolája (Differenciálgeometria és Alkalmazásai programja) keretében

Témavezető: Dr. Bácsó Sándor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....

A doktori szigorlat időpontja: 2004. augusztus 30.

Az értekezés bírálói:

Dr.	....
Dr.	....
Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 2004................