Debreceni SZEMLE

tudomány
kultúra

2002 | 1

Pokorádi László

Mi is az a matematikai modell?

Szerzői előszó

Már több mint 10 éve foglalkozom különféle üzemeltetési és technikai rendszerek, folyamatok matematikai modellezésével és modellvizsgálatával. Erről beszélni lényegében csak a „matematikai modell” kifejezéséig lehet (sajnos , néha még a mérnökök körében is), mert ekkor valami elvont, egy „normális" ember számára érthetetlen dologra asszociálnak, meg sem gondolva, hogy ez nem is olyan bonyolult. Ezen tapasztalat adta az ötletet, hogy most megkíséreljem kifejteni a címben szereplő kérdésre a választ: Mi is az a matematikai modell? Cikkemben nem a legprecízebb matematikai megfogalmazásokra, hanem a közérthetőségre törekszem.

1. A modell fogalma általában

A mérnöki gyakorlatban rendszernek nevezzük egy vagy több (adott esetben végtelen sok) elem összességét. A rendszerek (jelenségek) vizsgálatának célja az, hogy megállapítsuk a rendszer viselkedését, azaz a behatások (input) és a reakciók (output) közti kapcsolatokat. Egy adott rendszer korszerű, tudományos igényű vizsgálatának feltétele a rendszermodell megalkotása.

Modellezésen értjük a valóságos rendszer lényegi tulajdonságainak felismerését, és azok valamilyen formájú leképezését [6].

A modell egy valóságos rendszer egyszerűsített, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait kiemelő mása. A modell mindazon másodlagos jellemzőket elhanyagolja, amelyeket a kitűzött vizsgálat szempontjából nem tekintünk meghatározónak. Ezért elég, ha a modell a valódi rendszert csak a meghatározott szempontból vagy szempontokból helyettesíti. Sőt, a vizsgálat szempontjából lényegtelen szempontok figyelembevétele káros is lehet. Mert bonyolítja magát a modellt és így a vizsgálatot, de lényegi információhoz nem jutunk vele.

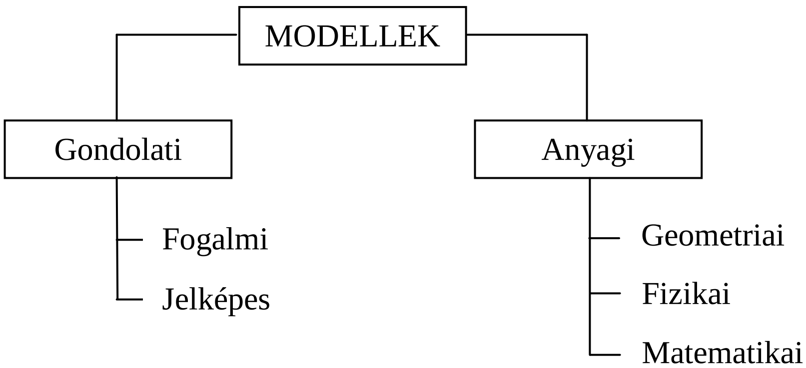
Például egy ballisztikus rakétát — legegyszerűbben — egy ferdén elhajított kővel tudunk modellezni, ha a pályáját, repülés dinamikáját vizsgáljuk és nem foglalkozunk a hajtóművében lejátszódó hő- és áramlástani folyamatokkal.

Nincs kikötve, hogy modell csak az lehet, amit kizárólag erre a célra készíttünk. Ez nem feltétele a modellnek. Valamilyen tárgy akkor válik modellé, ha a vizsgálatot végző személy ilyen funkciót ad neki. A modellválasztás mégsem önkényes, hiszen teljesítenie kell mindazokat a követelményeket, amelyek az eredeti rendszerrel, jelenséggel való hasonlóságát biztosítják.

A fenti példában szereplő követ használhatjuk másra is, nem csak a rakéta modellezésére.

2. A modellek csoportosítása

A modellek osztályozásával kiterjedt irodalom foglalkozik. A modelleket csoportosíthatjuk például aszerint, hogy milyen a modell belső természete. Ez alapján anyagi és gondolati modelleket különböztethetünk meg (1. ábra).



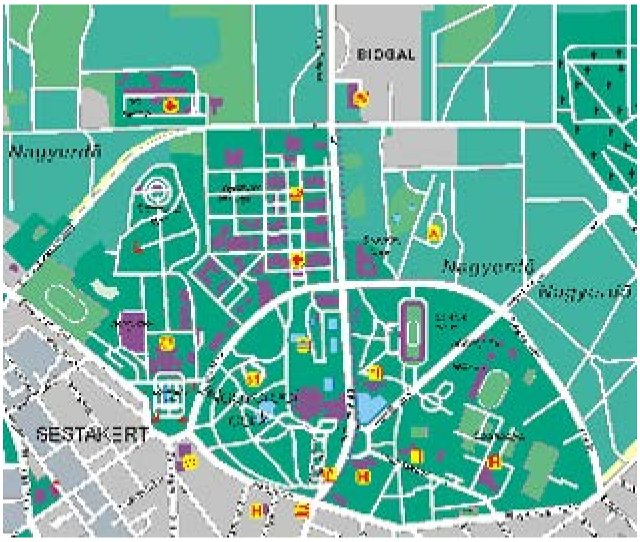
1. ábra Modellek csoportosítása

A gondolati vagy másnéven eszmei modellek az ember által felállított logikai kapcsolat szerint „működnek". Módszerüket, formájukat illetően szubjektívek, de tartalmukat nézve — azaz a tárgykört, amellyel foglalkoznak — objektívek. Az eszmei modellek nélkülözhetetlen elemei a megismerés folyamatának. Természetesen a logikai törvények alapján kapott eredményeket ellenőrizni kell a fizikai valóságban is. Ilyen értelemben csak utólag dönthető el, hogy valóban modelljei voltak-e a vizsgált folyamatnak. Mint az az ábrából is látszik, kétféle gondolati modellfajtát különböztetünk meg:

- ✈ fogalmit és
- ✈ jelképest.

A fogalmi modell a közvetlen érzéki tapasztalatoknak az absztrakt gondolkozás segítségével történő „feldolgozása". Feladata a kísérletek értelmezése, a kísérleti eredmények alapján a hipotézisek ellenőrzése, illetve újabb hipotézisek alkotása. Jelentős eszköze a gondolati kísérlet. Ennek során ismert természeti, társadalmi vagy gazdasági törvények felhasználásával megalkotott fogalmi modellünket gondolatban meghatározott körülmények közé helyezzük és levezetjük a vizsgált rendszer várható viselkedését, a folyamat várható lefolyását. Az így kapott eredmények kísérleti ellenőrzése a gondolatmenet helyességének eldöntésére, illetve hiányosságainak feltárására alkalmas. Ilyen gondolati kísérletnek kell megelőznie minden tényleges kísérletet, ha el akarjuk kerülni, hogy durva hibákat kövessünk el. Egyes területeken, például az elméleti fizikában vagy a csillagászatban, a fogalmi modellalkotás nélkül lehetetlen kutatómunkát végezni.

A jelképes modell az empíria (tapasztalat) adatait vagy feladatait fogalmazza meg jelrendszerek segítségével. A mérési eredmények rendszerint táblázat, grafikus ábrázolás vagy szám-, esetleg jelrendszer formájában adottak. Ezek közvetlenül a tudományos szintű feldolgozás, általánosítás céljára alkalmatlanok. A mérnöki gyakorlatban például egy többoldalas táblázatot vagy leírást szemléletesség szempontjából helyettesíteni tudunk egy egyszerű grafikonnal. „A mérnök diagramokban gondolkodik.", ahogy jelen sorok írója is tanulta egyetemista korában professzorától. A köznapi életben talán a leggyakrabban alkalmazott jelképes modellek a különféle térképek.



2. ábra Debreceni térképrészlet, mint jelképes modell

Az anyagi modellek saját, objektív törvényeik szerint működnek. Csak a működés feltételeit választhatjuk meg, de a belső törvényszerűségeket nem tudjuk irányítani.

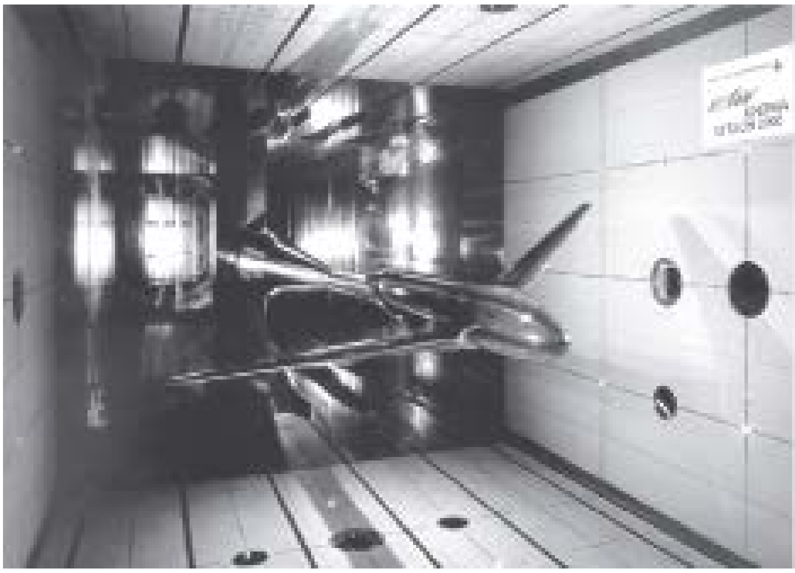
Az anyagi modelleket — realizálási módjuk szerint — csoportosíthatjuk, úgymint:

- homológ, vagy más néven geometriai;
- analóg, azaz fizikai;
- matematikai

modell.

A homológ modell geometriailag hasonló az eredeti rendszerhez, benne (vagy körülötte) ugyanolyan fizikai jelenségek játszódnak le. A műszaki életben a geometriai modelleket elsősorban a tervezése során használjuk fel. Ekkor a bonyolult elrendezésű építmények, szerkezetek térbeli elhelyezését előbb geometriai modellen készítjük el, ezért ezt térbeli tervezésnek is nevezzük. A térbeli tervezés szükségtelenné teheti a szerelési műhelyrajzokat, mivel ezeket a kisminta egyes csomópontjainak fényképe helyettesítheti. Ennek eredményeképpen fokozódik a tervezés megbízhatósága is.

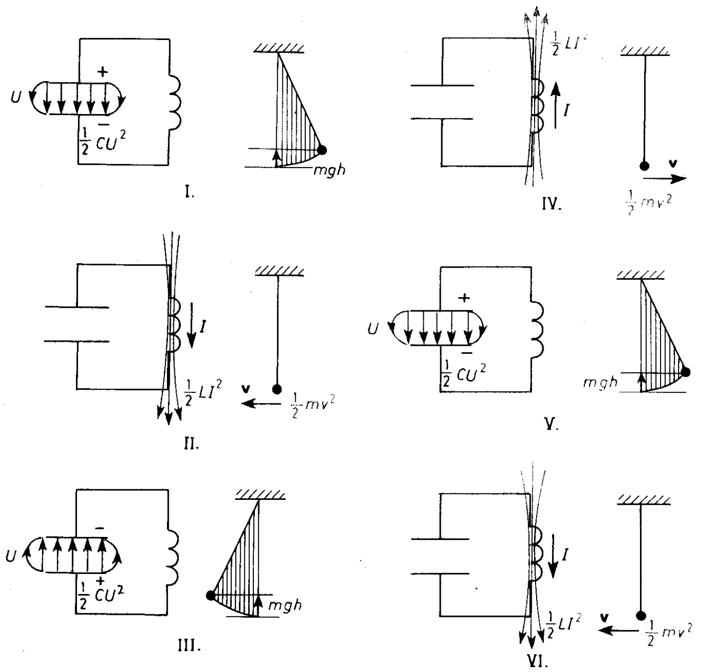
Például a gyakorlati aerodinamikában — a repülőgépek vagy gépkocsik tervezése, fejlesztése során — homológ modelleket alkalmaznak a szélcsatorna kísérletekben.



3. ábra Szélcsatorna mérőtere repülőgép modellel

Fizikai modell esetén az eredetivel megegyező fizikai természetű modellen tanulmányozzuk a rendszerben lejátszódó jelenséget. Az eredeti és a modell hasonlóságának feltétele, hogy mindkettő matematikai leírása (azaz a matematikai modellje) megegyezzék. Az analóg modell az eredeti rendszerhez viszonyítva hasonló behatásra hasonló módon válaszol. A fizikai modell semmilyen szemléletes kapcsolatban nem kell, hogy álljon az eredeti jelenséggel, csak az inputok és outputok közötti kapcsolatot adja vissza hűen. Az ilyen modelleket realizáló berendezéseket analóg számítógépeknek is nevezik. A modellek ezen csoportjába tartoznak a különféle folyamatokat szimuláló áramkörök [3].

Analóg számítógépekben az adatábrázolás folytonos fizikai mennyiségekkel (távolság, feszültség, ellenállás, nyomás stb.) történik. A műveletek végrehajtása a legtöbb analóg számítógépben gyakorlatilag az adatbevitel pillanatában megtörténik, így azt „zérus működési idejű"-nek is nevezzük. Az analóg számítógépek pontossága megegyezik azoknak a mérési módszereknek a pontosságával, amelyek segítségével az adatábrázoló fizikai mennyiségeket mérhetjük. Alkalmazások szempontjából az analóg számítógépek általában úgynevezett célgépek, amelyek kizárólag egy-egy speciális feladatkörben (folyamatszabályozás, lőelemképzés, hálózatméretezés stb.) felmerülő számítások, illetve speciális típusú matematikai feladatok elvégzésére alkalmasak. Példaképpen a 4. ábra egy kitérített, majd magára hagyott inga lengőmozgásával analóg elektromágneses rezgőkörben lejátszódó folyamatokat és az kettő közti analógiát szemlélteti.



4. ábra Az inga mozgása és a rezgőkörben lejátszódó folyamat összehasonlítása

3. A matematikai modell

A modellek közül napjaink mérnöki gyakorlatában leggyakrabban alkalmazott a matematikai modell. Ennek fő oka a számítástechnika robbanásszerű elterjedése A matematikai modell a matematika szimbólumrendszerén keresztül teremt kapcsolatot a vizsgált rendszer be- és kimenő jellemzői között. A matematikai formulák ismert, valamint ismeretlen mennyiségeket tartalmaznak, és a feladat határozottsága esetén az ismeretlen kimenő jellemzők meghatározhatók az ismert bemenő és belső jellemzők birtokában. A matematikai modell kellően definiált kezdő és peremfeltételekkel együtt egyben az adott jelenség algoritmusát is szolgáltathatja.

A rendszer viselkedését leíró matematikai összefüggések jellege, vagy meghatározásának módszere szerint — páronként — az alábbi matematikai modelleket különböztetjük meg [2]:

Statikus — dinamikus modellek:

Statikus modell egy időben nem változó állapotot ír le. Matematikailag megfogalmazva, ha a rendszer állapota algebrai egyenletekkel, vagy idő szerinti deriváltakat nem tartalmazó differenciálegyenletekkel írható le. Jellemzésére elterjedt még a stacionárius (vagy stacioner), állandósult, illetve egyensúlyi modell kifejezés is.

A dinamikus modellek a vizsgált rendszer, folyamat jellemzőinek időbeni változását írják le. Megjelenési formájuk közönséges vagy parciális differenciálegyenlet. Lehetséges, hogy a tárgyalás nem az idő-, hanem valamely célszerűen megválasztott transzformált tartományban valósul meg.

Matematikailag leírhatjuk egy gépkocsi egyenletes sebességű, egyenes irányú mozgását, ekkor statikus modellt hozunk létre, mivel a kocsi sebessége, motorjának teljesítménye időben nem változik. De ha ugyanezen jármű egy bizonyos sebességről egy adott másikra történő felgyorsulását akarjuk modellezni, akkor dinamikus modellt kell felállítanunk. Ebben az esetben transzformált tartománynak az felelhet meg, ha az előbb említett gépkocsi sebességét nem időben, hanem egy ponttól mért távolság függvényében vizsgáljuk és adjuk meg.

Lineáris — nemlineáris modellek:

A lineáris modellekben csak a változók és deriváltjaik szerepelhetnek, általában állandó együtthatókkal szorozva. Alakjuk lineáris vagy linearizált egyenlet, illetve egyenletrendszer.

A nemlineáris modellek az előző kötöttségektől mentesek. Az adott rendszerben lejátszódó folyamatot leíró egyenletek legalább egyike nemlineáris, azaz valamilyen hatvány szög-, vagy egyéb más függvényt is tartalmaz.

A nemlineáris modellek — az egyszerűbb vizsgálat érdekében — valamilyen linearizálási módon alakíthatók át lineáris modellekké.

A matematikai modellvizsgálatok kezdetén — a korlátozott numerikus számítási lehetőségek miatt — általában csak lineáris modellek felállításával és alkalmazásával foglalkoztak a szakemberek. A lineáris vagy linearizált modellek viszont csak viszonylag szűk paramétertartományban alkalmazhatóak megfelelő pontossággal. Napjainkban a számítási módszereket és főleg a számítógépes lehetőségeket kihasználva egyre jobban terjednek el a nemlineáris matematikai modellek. Ez viszont magával vonja, hogy a modellezések során megjelennek különféle kaotikus jelenségek.

Determinisztikus — sztochasztikus modellek:

A determinisztikus modellekben szereplő jellemzők, valamint maguk a változók egyértelmű függvényekkel térben és időben egyaránt megadhatók.

A sztochasztikus modellek ugyanezen jellemzői és változói csak bizonyos valószínűségi összefüggések felhasználásával határozhatók meg.

Például ha egy dobókocka röppályáját vizsgáljuk, akkor determinisztikus modellt kell alkalmaznunk. Ha viszont az érdekel minket, hogy milyen számmal felfelé esik le, akkor sztochasztikus modellt kell választanunk vizsgálatunkhoz.

Folytonos idejű — diszkrét idejű modellek:

Folytonos idejű modellek esetén a modellezett rendszert vagy folyamatot leíró jellemzők, független és függő változók a vizsgált idő alatt bármelyik pillanatban vehetnek fel valamilyen értéket.

Diszkrét idejű modell, illetve folyamat esetében a jellemzők csak adott, konkrét időpillanatokban vehetnek fel értékeket.

Folytonos paraméterű — diszkrét paraméterű modellek:

A folytonos modellekben a változók egy adott tartományon, értékhatáron belül bármilyen értéket felvehetnek.

Diszkrét paraméterű modellek esetén a változók csak meghatározott diszkrét értékeket vehetnek fel.

A lottószámokat adott időben húzzák és azok csak konkrét, egész számok lehetnek. Így a lottóhúzás egy diszkrét idejű, diszkrét állapotterű (sztochasztikus) folyamat.

Életünk során — sajnos — folyamatosan öregszünk, azaz matematikailag megfogalmazva: életünk egy folytonos idejű folyamat. De mivel életkorunkat években határozzuk meg, így az csak diszkrét értékeket vehet fel. Ez példa arra, hogy egy folytonos paraméterű (vagy idejű) folyamatot diszkrét paraméterűként (vagy idejűként) is vizsgálhatunk.

A bemutatott felsorolás természetesen nem teljes, mivel egy konkrét, gyakorlatban megvalósított matematikai modell általában a fenti jellegek szintézisét jelenti (például az előbb már említett lottóhúzás).

4. A matematikai modell képzése

Egy rendszer matematikai modelljének megalkotásához alapvetően két út kínálkozik:

- az általános természettudományos ismeretekre támaszkodva, fizikai megfontolások alapján analitikus formájú közvetlen matematikai modell előállítása — úgynevezett ***white-box*** eljárás;
- megfigyelési, illetve kísérleti meghatározás, ahol a matematikai modell megalkotásához az alapvető információkat mérések sorozatával kapjuk meg — ez a ***black-box*** eljárás.

A black-box eljárást alkalmazzák az általános iskola alsó tagozatos tanulói matematika órákon, amikor a „darálóba" beeső és onnan kieső számok alapján találják ki, hogy mi történik a gépben. Valójában a darálóban történtek matematikai modelljét állítják fel.

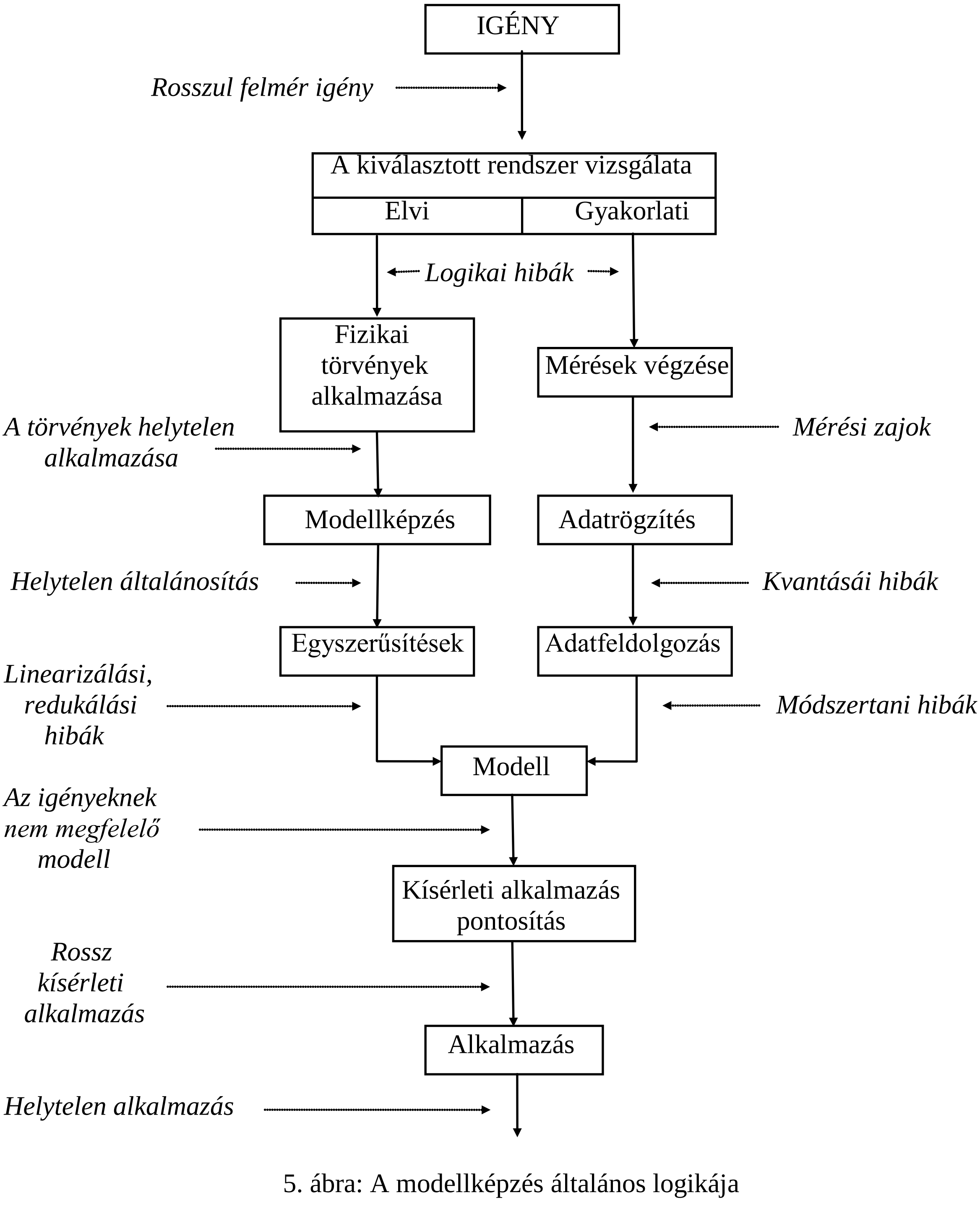
A fizikai megfontolások alapján történő matematikai modellalkotás folyamatában döntő az absztrahált modell megalkotása. Ehhez ismernünk és elemeznünk kell a rendszerben lejátszódó folyamat belső, a vizsgálat szempontjából lényegi tulajdonságait. Ezek a fizikai megfontolások elsősorban extenzív jellemzőkre felírt mérlegegyenleteket, valamint az extenzív és intenzív jellemzők között kapcsolatot teremtő összefüggéseket eredményeznek.

A vizsgálat során a modell létrehozásának egyik legfontosabb eleme a modellképzés céljának meghatározása. Ezek lehetnek:

- modellezés (tervezés alatt álló rendszerek vagy speciális jelenségek vizsgálata, lehetséges műszaki megoldások kiválasztása, egyes szerkezeti jellemzők eltéréseinek tanulmányozása);
- tervezés (optimális rendszerek kialakítása, gazdaságosabb megoldások keresése, élettartam- és költségtervezés);
- vizsgálat (üzemi jellemzők értékelése, szerkezeti, üzemeltetési jellemzők eltérései hatásainak értékelése, diagnosztikai jellemzők kiválasztása);
- vizsgálat tervezése (kísérleti próbajáratok, üzembe-helyezési programok meghatározása, diagnosztikai üzemmódok kijelölése, alkalmassági vizsgálatok programjainak összeállítása);
- minősítés (alkalmassági előírások, minőségi követelmények kidolgozása);
- irányítás, szabályozás (optimális és adaptív irányítás, egyedi állapotszabályozás

megvalósítás);

✈ állapot-felismerés (adatgyűjtő és feldolgozórendszerben alkalmazható, könnyen azonosítható, adaptív modellek kidolgozása).



5. ábra: A modellképzés általános logikája

A modellképzési feladat jellegét és logikáját a következő kérdésekre adott válaszok határozzák meg:

✈ Milyen modellt kívánatos létrehozni?

A kérdésre adott felelet határozza meg a szükséges pontosságot és bonyolultságot, valamint alkalmazandó matematikai módszerek körét is.

- Hogyan építhető fel a modell?
- Milyen gazdaságossági követelményeket, vagy korlátozásokat kell állítanunk a modellel szemben?
- Hogyan ellenőrizzük, értékeljük a modell minőségét és pontosságát?
- Hogyan dolgozzuk fel az összes rendelkezésre álló információt?
- Milyen módon lehet optimálisan megszerezni a hiányzó információkat?
- Mi legyen a modellen belüli nem-linearitásokkal?
- Célszerű-e linearizálni az egyenleteket? Az esetleges linearizálás után megfelelő pontosságú lesz-e a modell?

A fenti kérdésekre adott válaszok lényegében meghatározzák a felépítendő modell sajátosságait. A modellképzés általános logikáját mutatja be az 5. ábra, ahol dőlt betűkkel a lehetséges hibák is elolvashatók [5].

5. A káoszról röviden

A nemlineáris matematikai modellek alkalmazásakor könnyen találkozhatunk úgynevezett kaotikus jelenségekkel. Káosz az a jelenség, amikor egyszerű szabályok, egyenletek segítségével leírható egy bonyolult rendszer, amelynek állapotai nem ismétlődnek, és így lehetetlen jövőbeni állapotait megjósolni.

A káosz tudományos forradalmának alapja az a felismerés, hogy egyszerű törvények is igen bonyolult viselkedéshez vezethetnek. A káosz az összetett, nemlineáris rendszerek időbeli viselkedése. Mivel szinte minden rendszer ilyen, a káosz megjelenése tipikus. Ez a kaotikus határozatlanság azt jelenti, hogy a jelenségek lefolyása rendkívül érzékeny a kiinduló helyzetre. Ha a hibák rövid idő alatt ugyanakkorára nőnek, mint maguk a mérendő mennyiségek, akkor e rövid kezdeti idő után a folyamat véletlenszerűnek tűnik. Ezért át kell térni annak valószínűségi leírására.

Az előrejelezhetetlenség az úgynevezett kaotikus attraktoron érvényes. Biztos, hogy a kaotikus attraktorra elegendő hosszú idő után rákerülünk. Ez a meghatározottság egyik fontos megnyilvánulása. A káosz az időbeli kiszámíthatatlanság és az állapottérbeli rend egyszerre történő megjelenése. A káosznak, mint jelenségnek a kutatása még csak napjainkban kezdődött el.

Kaotikus rendszerekben gyakori, hogy a kiindulási feltételek kismértékű megváltoztatása is nagy mértékű változásokat idéz elő egy rendszer állapotában viszonylag rövid időn belül. Ez a jelenség az úgynevezett pillangó-effektus.

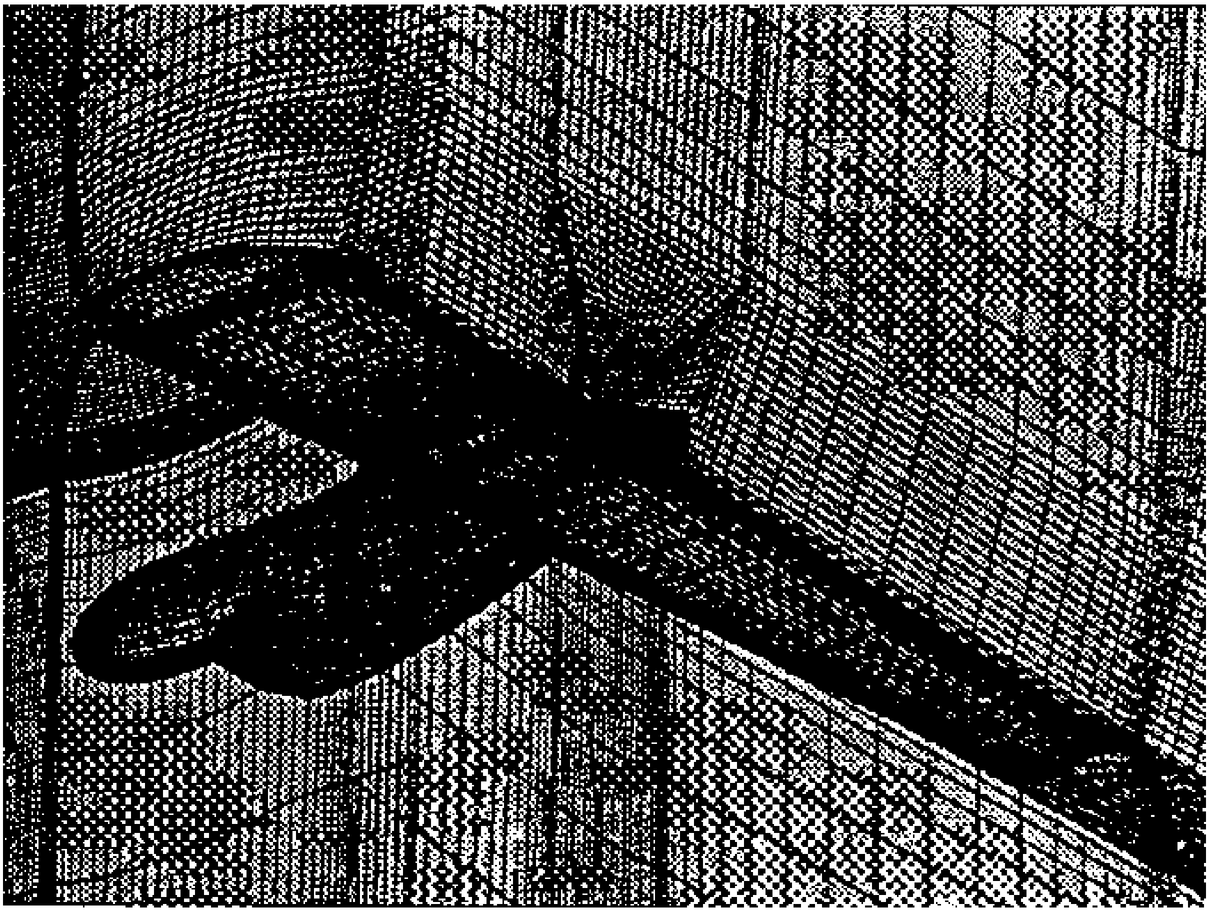
Nézzünk egy hétköznapi példát a pillangó effektusra. A debreceni unokáihoz igyekvő nagymama Hajdúböszörményben csak a síneken átbukdácsolva nagy nehezen tud felszállni a vonatra a két nagy kosár friss cseresznyéjével. Így a vonat a menetrendhez képest később indul el az állomásról. (Történetünkben ez a kicsi késés lesz a fenti „kiindulási feltételek kismértékű megváltoztatása”.) Ezáltal a tiszalöki személy késve fog megérkezni a debreceni Nagyállomásra. Nem baj az unokák kicsit többet várnak, és a csatlakozó pesti gyors úgy is megvárja a kis pirost. Igen, de ennek következtében a gyorsvonat késve fog érkezni Ceglédre. A hozzá csatlakozó szegedi vonat is késni fog. Kecskeméten viszont az ellenvonatnak kell majd várnia (és utána késnie), mert ott egyvágányú a vonal. S történetünk folytatódhat tovább… Végül este, amikor az Axa Intercity késéssel fut be Sopronba, már senki sem tudja, hogy az a „hajdúböszörményi két kosár cseresznye” következménye. S gondoljunk bele, a vonatokon egy nagy hány nagymama utazik! Hasonló jelenségek játszódnak le a nemzetközi közforgalmi repülésben is, de ott globális méretekben.

6. A numerikus aerodinamika

A számítástechnikai robbanásszerű térhódításával egyre szélesebb körben elterjedő matematikai modellezésre talán a legjobb példa a numerikus aerodinamika, angol nevén **C**omputed **F**luid **D**ynamics — CFD fejlődése.

A numerikus aerodinamika az áramlástani vizsgálatok, elemzések számítógépes megoldásával foglalkozó tudomány. Célja a légi eszközök és elemeik (szárny, szárnymetszet stb.) környezetében a sebességtér meghatározása, és így az aerodinamikai jellemzők számítása, illetve adott aerodinamikai jellemzőkhöz az optimális geometriai forma megállapítása. Eszközeit tekintve többnyire az áramlási alapmodellek, illetve az úgynevezett panelmódszer használatára épít.

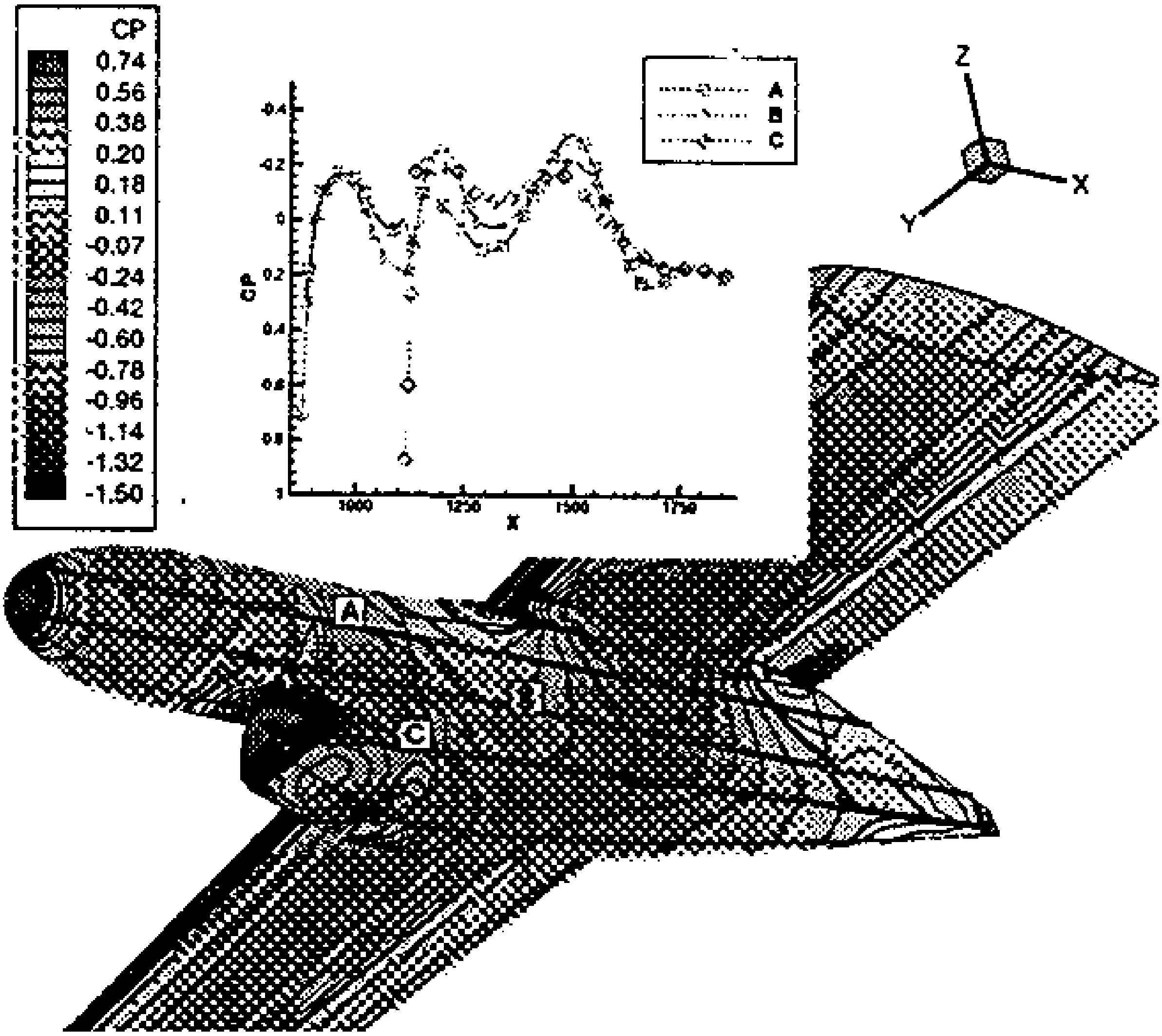
A panelmódszer lényege az, hogy a vizsgált, modellezett test felületét sík vagy görbe (parabolikus) panelokra osztjuk (6. ábra). A test térfogatát a felületpanelokra helyezett állandó vagy meghatározott törvényszerűség szerint változó intenzitású folytonos eloszlású úgynevezett forrásokkal, nyelőkkel vagy dipólusokkal (áramlási alapmodellekkel) modellezzük. A test áramlás szempontjából fontos végpontjaiból (például a szárny kilépőéléből) kiinduló áramvonal-felületeket szintén panelokra bontjuk, és a panelokat úgynevezett örvénykeretekkel helyettesítjük. A panelokon középpontjában felvett ellenőrző pontokra felírjuk az eredő áramlási sebesség számítására szolgáló egyenleteket. Így egy, a panelok számával egyenlő számú (esetenként akár több tízezer) egyenletből álló algebrai egyenletrendszert kapunk. Ez az egyenletrendszer lesz a test körüli áramlás matematikai modellje. Az egyenletrendszert megoldva — melynek nagy mérete következtében csak korszerű, nagy teljesítményű számítógéppel lehetséges — az ellenőrző pontokban kialakuló a nyomásértékek és így végső soron az aerodinamikai jellemzők könnyen meghatározhatók.



6. ábra Egy repülőgép szárnya körüli panelhálózat

A numerikus aerodinamika jól felhasználható a testek környezetében kialakuló áramlási viszonyok, a testek (például egy szárny és hajtóműgondola) egymásra hatásának, az úgynevezett aerodinamikai interferenciájának meghatározására. Példaképpen a 7. ábra egy repülőgép szárnya és hajtóműgondolája körüli nyomástényező-megoszlás meghatározásának eredményét szemléltetni.

A gázdinamikában ismert sajátosságoknak (a súrlódási ellenállás elhanyagolható) köszönhetően a numerikus aerodinamika sikeresen alkalmazható szuperszonikus áramlásokba helyezett testek aerodinamikai vizsgálatakor is [4].



7. ábra Egy repülőgép hajtóműgondolája körül számított nyomástényező-eloszlás

A numerikus aerodinamika alkalmazásával jelentősen csökkenthető a repülőgépek áramlástani tervezésének költség, idő és energia igénye. Ugyanis a számítások elvégzésével jelentős mennyiségű szélcsatorna (homológ modell) kísérletet lehet kiváltani. Ezen szélcsatorna kísérletek ugyanis nagy energiát és speciális, igen pontos mérőműszerparkot igényelnek.

Felhasznált irodalom

[1] **Korn G. A., Korn Th. M.,** Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
[2] **Pokorádi L.,** A matematikai modellek és alkalmazásuk a repülőműszaki gyakorlatban,

pályamunka , MHTT. Légvédelmi Repülő és Űrhajózási Szakosztály, Budapest, 1992.
[3] **POKORÁDI L.,** Mi a matematikai modell?, Haditechnika, Budapest, 1993/4, p. 2 — 5.
[4] Repülési Lexikon, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
[5] **ROHÁCS J., SIMON I.,** Repülőgépek és helikopterek üzemeltetési zsebkönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1989.
[6] **SZŰCS E.,** Hasonlóság és modell, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.