A MATEMATIKATANÍTÁS HATÉKONYSÁGÁNAK NÖVELÉSE A NEM SZAKIRÁNYÚ MŰSZAKI FELSŐOKTATÁSBAN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Dékány Kornélia Éva

Témavezetők: Dr. Vásárhelyi Éva és Dr. Gilányi Attila

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2025

A MATEMATIKATANÍTÁS HATÉKONYSÁGÁNAK NÖVELÉSE A NEM SZAKIRÁNYÚ MŰSZAKI FELSŐOKTATÁSBAN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Dékány Kornélia Éva

Témavezetők: Dr. Vásárhelyi Éva és Dr. Gilányi Attila

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2025

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi/műszaki doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2025. . . . .

…………………………………………………

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Dékány Kornélia Éva doktorjelölt 2009 – 2025 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányítással végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2025. . . . .

……………………………… ………………………………

a témavezetők aláírása

A MATEMATIKATANÍTÁS HATÉKONYSÁGÁNAK NÖVELÉSE A NEM SZAKIRÁNYÚ MŰSZAKI FELSŐOKTATÁSBAN

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika és számítástudományok tudományágban

Írta: Dékány Kornélia Éva okleveles matematika-fizika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája
(Matematika-didaktika programja) keretében

Témavezetők: Dr. Vásárhelyi Éva és Dr. Gilányi Attila

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Gál Zoltán
tagok:	Dr. Boros Zoltán
	Dr. Téglási Ilona

A doktori szigorlat időpontja: 2023. december 4.

Az értekezés bírálói:

Dr. Csernoch Mária
Dr. Osztián Erika

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ....
tagok:	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2025. ……………… … .

„Félig sem olyan fontos az, hogy mit tanítunk, mint az, hogy tanítjuk."

Eötvös József

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőm, Dr. Vásárhelyi Éva segítségét, különösen mondanivalóm megformálásában és az intuitív ötleteim elméleti háttérrel való összekapcsolásában.

Köszönöm tanítványaimnak, hogy örömmel és lelkesedéssel vettek részt a tanulási módszerek kipróbálásában.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A hazai és külföldi felsőoktatásban a nem szakirányú matematikaoktatás dilemmáiban közös, hogy miközben a matematika alkalmazásaival szemben támasztott elvárás növekszik, a matematikára fordított idő és energia pedig nem változik, esetleg éppen csökken [1], [2].

30 éves középiskolai és egyetemi tanítási tapasztalattal rendelkezem, több mint 10 éve veszek részt a Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetem Matematika és Természettudományi Alapok Intézet Matematika és Modellezés Tanszék, illetve jogelődje, a Szent István Egyetem Gépész Kar Matematika Tanszék oktatójaként a mérnök hallgatók matematika képzésében.

Korábban végzett kérdőíves felméréseim és mások kutatásai alapján – akár az alapképzést, akár a mesterképzést illetően – elmondható, hogy a hallgatók többsége elsősorban a választott szakma iránti érdeklődésből és nem a matematika szeretete miatt iratkozik be erre a képzésre [3].

A középiskolai alapszintű követelményekre épülő szintfelmérő dolgozatok tanúsága szerint az alapképzésre bekerülő hallgatók matematikai ismeretei hiányosak. Az egyetemi tananyag hagyományos elrendezése és felépítése nem segíti a középiskolai és az egyetemi matematika közötti szakadék áthidalását. A tananyag túlságosan elméleti, nem a gyakorlatból indul ki és nem is oda érkezik. A tananyag ütemezése sem veszi figyelembe a tanuláselméleti szempontokat, túl gyors tempót diktál, nincs érési idő, nincs idő gyakorlásra [4], [5].

Az érdeklődés és alaptudás nélküli hallgatók számára nem elég hatékony a tananyagot részletesebben leírni, konzultációkon jobban elmagyarázni, vagy egyéb szakszerű segítséget nyújtani, hiszen a segítség eredményes felhasználása kompetenciamotivációt feltételez [6], [7].

Olyan matematikai témákat és módszertani megoldásokat kerestem, amelyek a hallgatónak a matematikáról és a saját problémamegoldási eredményességéről alkotott képét is kedvezően befolyásolják. A játékelméletben például olyan témát találtam, amely a matematika iránt érdeklődő és kevésbé érdeklődő közönség számára is érdekessé, hozzáférhetővé tehet bizonyos matematikai modellalkotási és problémamegoldási módszereket. Így a játékelmélet hozzájárul, hogy a matematikát a matematikai tartalom lényeges sérülése nélkül népszerűbbé tegyük [58].

Módszertani szempontból sorra mérlegeltem minden olyan eszköz – játék, eljárás, módszer – felsőfokú matematika tanításban való alkalmazhatóságát, amelyet tanári pályafutásom során valaha sikerrel alkalmaztam (kooperatív tanulási módszer, IKT eszközök, előhívásos tanulás [55]).

A törekvések megvalósíthatóságát, az irányok helyességét saját reflexióm, illetve tanítványaim szóbeli és írásbeli visszajelzése alapján, kérdőívek segítségével, megfigyelésekkel, esettanulmányokkal vizsgáltam.

A *2. fejezet* a kutatás hipotéziseit tartalmazza.

A 3. *fejezetben* próbálkozásaim pedagógiai, pszichológiai és matematika didaktikai hátteréről írok.

A 4. *fejezetben* sorra veszem az alapfokú gépész képzésen oktatott matematika tárgyaimat, ismertetem a „módszertani újításaimat”, azok hatékonyságát és a bevezetésükkel kapcsolatos tanulságokat (Matematikai alapok – játékosítás, Matematika I – kooperatív tanulási módszer, digitális kompetencia fejlesztése, Valószínűségszámítás és statisztika, Játék és matematika, E-tananyag: Matematikai érdekességek).

Az *5. fejezet* témája a műszaki menedzser szakon folyó mesterképzés keretében oktatott Műszaki-gazdasági matematika tantárgy. Ismertetem és elemzem a tárgyhoz kapcsolódó esettanulmányokat, valamint tartalmi és módszertani javaslatokat teszek a hatékonyság növelése érdekében.

A *6. fejezetben* arról a vizsgálatról számolok be, amelynek során az előhívásos módszer első fázisának – közvetlen visszakérdezés – hatékonyságát mértem. A kísérleti csoport, a kontrollcsoport és a 442 fős évfolyam előrehaladását statisztikai módszerekkel hasonlítottam össze.

A *7. fejezetben* módszertani újításaim eredményét vizsgálom a hipotézisek tükrében és kitérek néhány diszkussziós kérdésre.

A dokumentáció terjedelmes része a dolgozat végén található *Mellékletekbe* került.

2. A kutatás hipotézisei

Első hipotézis (H1)

A vizsgált módszerekkel mind a tanítási órákon, mind az egyéni tanulás során fejleszthetők

- a hallgatók kompetenciamotivációjának legfontosabb összetevői (pl. az énhatékonyság, a saját eredményességéről alkotott kép a matematikai problémák kezelését illetően [26]);
- a matematikai kompetenciák (lásd Reiss-féle kompetenciarendszer [13]);
- az EU kulcskompetenciák szinte kivétel nélkül [2].

Második hipotézis (H2)

A kiválasztott módszerek több időt és energiát igényelnek ugyan mind a tanár, mind a hallgató részéről, de pozitív az időmérleg.

- Minőségileg megváltozik a diákok részvétele a matematikatanulási folyamatban.
- Minőségileg megváltozik a tanár szerepe, részvétele a matematikatanulási folyamatban.
- Az IKT eszközök nagy mértékben segítik a kísérleti program megvalósítását.

3. Módszertani „újításaim” pedagógiai, pszichológiai és didaktikai háttere

A disszertációban újításnak nevezek minden olyan megoldást, módszertani eszközt, amely a körülményekhez jól illeszthető, és bár az adott miliőben – műszaki felsőoktatás – szokatlan, de a pedagógiai, módszertani szakirodalom tanúsága szerint valamilyen más környezetben már bizonyítottan pozitív hatással vannak a tanulás eredményességére.

A választott megoldásokat a bejövő hallgatók felkészültsége, érdeklődése, pályaképe; a tárgy óraszáma és óráinak elosztása, tematikája befolyásolta.

3.1. A matematikai pontosság kérdése

A matematikára építő szaktárgyi oktatók és a matematikát oktatók egyetértenek abban, hogy az oktatott tananyagnak matematikailag korrektnek kell lennie. Ugyanakkor a szereplők matematikáról és a matematikatanulásról alkotott képének divergens volta miatt szinte mindenki mást ért matematikai korrektségen. A vég nélküli vitákat elkerülendő rögzíteni kell valahol a pontosság határát. Ez a határ a matematika különböző területein máshol húzódik. A dilemmát a következőképpen érzékelteti Kalmár László, – aki a matematika, a kibernetika és a filozófia területén is elismerésre méltót alkotott.

„…megjártam a matematikai egzaktság magasiskoláját s látom, hogy az egzaktságnak nincs határa, nincs olyan precíz módon megfogalmazott definíció, vagy tétel, amibe még precízebb álláspontról bele ne lehetne kötni, mégpedig nemcsak szőrszálhasogatásból és kákáncsomókeresésből, hanem alapos okkal (mert a precízebb álláspont el nem fogadása effektív hibákhoz, hamis eredményekhez vezethet); éppen ezért nem tudom többé statikus-dogmatikusan felfogni a matematikai precízséget: aki ezen innen van, nem precíz, aki túl, az precíz. Ezzel együtt elejtettem persze a matematikának, mint »abszolút igaz tudománynak« a képzetét. Nem írom, hogy kénytelen voltam elejteni, mert az a meggyőződésem, hogy épp az a szép a matematikában, hogy magán viseli az emberi alkotás minden bizonytalanságát. Félre ne érts: létezik számomra is precízség, de nem statikus, hanem dinamikus értelemben: mint precízségre törekvés." [8].

Pólya szerint a matematika nem csupán feszes logikai rend alapján közelíthető meg.

„A matematikának két arca van: a matematika egyfelől Euklidesz szigorú tudománya, de valami más is. Az euklideszi módon tárgyalt matematika – miközben dolgozik vele

az ember – kísérleti, induktív jellegű. A matematika mindkét arculata ugyanolyan régi mint maga a matematika.” [9].

Magam is úgy tartom, hogy más-más szabatossági követelmény vonatkozik az írott és a szóban elmondott tartalomra. A tananyag kiválasztásával és elrendezésével törekedtem arra, hogy példát mutassak a különböző matematikai tevékenységekre: az ötletek, sejtések megszületésének ösztönzésére, az intuíciók működtetésére, a kreativitás fejlesztésére, továbbá hosszabb, összetettebb logikai lánc követésére és kigondolására.

3.2. Kompetenciamotiváció és kompetencia fejlesztés

White szerint [10] a szakértelem és az illetékesség nem elegendő ahhoz, hogy úgy is cselekedjünk. Van azonban egy globális belső törekvés az emberben, hogy hatékonyan kezelje a környezetét. Ez a kompetenciamotiváció kiindulópontja.

A kompetenciamotiváció egyik összetevője az a felismerés, hogy az egyén képes célokat kitűzni, és megvalósítani, mert birtokában van a szükséges adottságoknak. (Énhatékonyság tudat [6]). Az énhatékonyság tudat befolyásolja a tevékenységválasztást, erőfeszítést, kitartást. Ennek növeléséért tanítványaim számára sikerélmény biztosítására, a kudarc és a szorongás csökkentésére törekszem. A kompetencia motiváció csak akkor kapcsolódik be és fejlődik, ha a megoldandó problémák „optimális kihívást” jelentenek, amelyek leküzdése az önképet javítja [11]. Az optimális kihívást jelentő tevékenységekben elért sikerek nem csak az énhatékonyság érzését erősítik, hanem a belső motivációt is. A várakozástól eltérő szituációk is működhetnek kihívásként (kíváncsiság, felfedezési vágy). De ha a helyzet túlságosan elüt a megszokottól, akkor az illető önvédelemből figyelmen kívül hagyja, illetve szorong, pánikba esik. A kíváncsiság és az ismeretlentől való félelem párharcára döntő befolyással van a problémamegoldásban való jártasság, a problémamegoldási stratégiák ismerete, kreatív alkalmazása.

A tematikában rögzített matematikai ismeretek átadásán túl a kompetenciamotiváció [7] és az európai kulcskompetenciák [2] fejlesztése is fontos célom. Az Európai Uniónak a leendő műszaki értelmiséggel szembeni követelményei

- Az anyanyelven folytatott kommunikáció;
- Az idegen nyelveken folytatott kommunikáció;
- Matematikai kompetencia és alapvető kompetenciák a természet- és műszaki tudományok terén;
- Digitális kompetencia;

- A tanulás elsajátítása;
- Szociális és állampolgári kompetenciák;
- Kezdeményezőkészség és vállalkozói kompetencia, valamint
- Kulturális tudatosság és kifejezőkészség.

A matematika tanítása közben, különösen a gyakorlatokon és a szemináriumokon, építünk a fenti kompetenciákra és egyben fejlesztjük is azokat.

A gépészmérnök hallgatók esetében különösen fontos megmutatni, hogy (akár közvetlenül is) hasznosítható ismereteket kapnak. Ezt szolgálják az általuk ismert szituációba helyezett reális kérdésfelvetések, az énkép megerősítését szolgáló számonkérési és visszajelzési módok. A mindenkori tananyaghoz kapcsolódóan természetes módon adódik számos matematikai és matematikán kívüli kompetencia fejlesztésének lehetősége. Például a lineáris programozás területén a szimplex módszer alkalmazása mellett fejleszthető és fejlesztendő a számolási készség, a fogalom pontos ismerete, a szövegértés és értelmezés, a szabálykövetés, a feladattartás, a kommunikáció (a gondolatok pontos kifejezése, íráskészség, helyesírás, áttekinthető íráskép), a téma kapcsolata a mindennapi élettel, kreativitás.

A dolgozatban és a mindennapi munkámban a Pisa 2012-es matematikai kompetenciarendszert tudom legjobban használni, mert például a Sulinova kompetenciarendszere elsősorban az iskolai tananyagra koncentrál, a Czeglédi István-féle kompetenciarendszer [12] sem illeszkedik a felsőoktatásban folyó nem szakirányú matematikaoktatás folyamatához. A legalkalmasabbnak a [13] által összeállított matematikai kompetenciák bizonyultak, ennek összetevői

- a matematikai gondolkodás (jellegzetes kérdések; egy fogalom értelmezésének érvényességi köre; kiterjesztés, általánosítás, specializálás; az állítások fajtái);
- a matematikai érvelés (magyarázat, indoklás, bizonyítás, sejtés);
- a matematikai problémamegoldás (a matematikai problémamegoldási stratégiák, a problémamegoldási folyamat lépéseinek megismerése, illetve önálló alkalmazása egyszerű esetekben);
- a matematikai modellalkotás (változatos kontextusból származó problémák megoldása, kapcsolat a matematikai modell és a valóság között);
- a matematikai ábrázolások alkalmazása (módszerek ismerete, összehasonlítása, célszerű megválasztása);
- a matematika szimbólumaival és a formai elemeivel dolgozni, az eredményt köznyelvi formában értelmezni;

- a matematikai kommunikáció (team munka, saját gondolat kifejezése matematikai és köznyelvi formában;
- az eljárások és a segédeszközök alkalmazása (kalkulátorok, számítógépes szoftverek használatának és használhatóságának ismerete).

3.3. Játékosítás és kooperatív tanulási módszerek

Játékosítás

A játékosítás lényege Barbarits [14] szerint, hogy a játékokra jellemző elemek (játékosság, kíváncsiság, szocializálás vágya, tudásvágy kielégítése, kutatási vágy és a tervezés igénye, teljesítményre való törekvés, feszültségigény, versenyszellem, szereplési és elismerés utáni vágy) az ismert és megszokott játéktevékenység során az új tartalomra is átvihetők. A játékelemek egyrészt ösztöneinkhez, másrészt a környezet igényeihez kötődnek és sokféle módon átszövik a játékot, kiegészítik egymást, de versenyezhetnek vagy akár ütközhetnek is egymással (szocializálás vágya kontra versenyszellem).

A játék tehát ösztönzi a hallgatót

- hogy új formában, játékosan – akár a régi tartalommal is – találkozni kívánjon a matematikai fogalmakkal, eljárásokkal;
- csoportos tevékenységre (kártyajátékok és társasjátékok);
- hogy maga is készítsen játékot;
- hogy ne csak a minimum szintet célozza meg;
- hogy összehasonlítsa eredményét a többiekével;
- hogy megoldását indokolja, érveit nyilvánosan kifejtse.

A játék fizikailag is élénkíti is az órát, megmozgatja a hallgatókat (másik helyre ülnek, körbeállnak).

A játékos tanulás sikere három szereplő, a játékos, a játékvezető és a játék, egymásra találásán, együttműködésén múlik. Elengedhetetlen feltétel, hogy a játékos hajlandó legyen játszani (kompetenciamotiváció). A játékvezető feladata a professzionális előkészítés (kihívás jellegű, technikailag megvalósítható). A játékba hitelesen beépül a teljesítmény jutalma, és egyúttal elősegíti a kritikus gondolkodást és a problémamegoldást.

Ha a diákok ismerik az alkalmazott játékot, van játéktapasztalatuk, elsajátították a játékhoz kapcsolódó magatartásformákat, akkor feltételezhetjük, hogy a játékelemek a matematikai tematikájú játékok esetén is jelen vannak, transzferálódnak.

Ha olyan játékot játszunk, melynek szabályát nem mindenki ismeri, akkor először érdemes egy próbapartit játszani az eredeti játékkal.

Kooperatív tanulási módszerek

A kooperatív csoportmunka keretében a tanulók együttes munkát végeznek, így egyaránt felelősek egymás tanulási eredményeiért és a sajátjukért. A kooperatív tanulási forma nagy előnye, hogy sok lehetőséget ad a tanulók egymás közti kommunikációjára, egymás segítésére. *„Ebben nagy szerepe van a tanulói önállóságnak, az önálló tanulásnak, és az együttműködésen alapuló (kooperatív) tanulásnak, amelynek értékei között szerepet kap az egymástól való tanulás, az egymásra figyelés az egymás tanítása, segítségnyújtás, ön- és társértékelés igénye és képessége, valamint az együttműködés igénye és képessége.”* [15] A kooperatív tanulási módszert elsajátító és hatékonyan használni tudó diákok remélhetőleg ezt az együttműködő szemléletet átviszik az élet más területeire, például a későbbi munkahelyükre, mivel egyre több helyen fontos az együttműködési készség megléte.

Bár leginkább a tanulócsoporton belüli együttműködési képességek kialakításához és fejlesztéséhez használják a kooperatív tanulási módszert, ez a forma a szociális készségek fejlesztésén túl az ismeretek és az intellektuális készségek fejlesztésére is alkalmas [16]. A kooperatív tanulás esetén a tanár feladatai színesednek, sokrétűbbek (tanulási szituációk szervezése, folyamatok koordinálása, felügyelete, segítése, értékelése).

A matematika tanulásról elterjedt nézet, hogy individuális tevékenység. A matematika tanítási gyakorlatába csak lassan épül be a kooperatív tanulási módszer, pedig más tantárgyakban, már a bölcsődétől kezdve építenek a közös (páros vagy kiscsoportos) tanulás előnyeire (fejlesztő és gyógypedagógia, alsó tagozat). Újabban a matematika tankönyvekben (OFI) is megjelennek csoportmunkában, együttműködéssel megoldandó feladatok. A tanárképzés módszertani tananyagában jelen van ugyan a kooperatív módszer, de a matematika szakos tanárjelöltek az egyetemen saját ismereteiket alapvetően hagyományos módszerrel szerzik.

Egyetemi és főiskolai oktatásban is előfordul, hogy a diákok együttműködésére építő feladatokat fogalmaznak meg az oktatók (nyelvtanulás, laboratóriumi mérések ...), de matematikából erre alig van példa.

3.4. Metakogníció

Flavell [17] szerint a saját gondolkodásról való gondolkodás segít a feladatválasztásban, a végrehajtás tervezésében és értékelésében. A pszichológia oldaláról az a fő kérdés, hogy a metakogníció milyen szerepet játszik az önszabályozott tanulásban. A jól működő önszabályozás pozitív kölcsönhatásban van az énhatékonysággal. A matematika-didaktika szempontjából a problémamegoldás lépéseiről való gondolkodás áll a középpontban, amely már Pólya Györgynél [18] is megtalálható. Johann Sjuts és kutatócsoportja Osnabrückben évtizedek óta végez tehetséggondozást és ezzel párhuzamosan kutatja a metakogníciós készség fejleszthetőségét és a metakogníció hatását a problémamegoldás sikerességére. Tanulmányok sora bizonyítja, hogy a tanulás eredményességére pozitív hatással vannak a metakognitív stratégiák [19], [20].

A tanulás-ellenőrzési stratégiákat lehet [21] és kell fejleszteni, így az oktatás minden szintjén szükség van arra, hogy időt szánjunk a metakognícióra. Hallgatóim döntő többsége aktív szervezője a tanulmányainak (már a szakválasztás ténye is ezt támasztja alá). Beszélgetésekből, kérdőívekből kiderült, hogy képesek tanulási tevékenységüket, motivációjukat és viselkedésüket monitorozni, kontrollálni és szabályozni. A többségük értékes tanulási célokat fogalmaz meg és nem a „túlélésre” dolgozik.

3.5. Az analógia

A műszaki felsőoktatásban a matematika tananyag legfontosabb részeit az azokhoz kapcsolódó központi kérdésfeltevés segítségével mutatom be. Az egyes jelenségcsoportokat, a hozzájuk kapcsolódó probléma-felvetéseket és feladatcsaládokat az analógia köti össze. A konkrét példák, a hasonló szituációk összekapcsolása, az analógia felfedezése és a transzfer a friss tapasztalatok rendszerbe való beillesztését is segítik. Sok esetben a jelenségcsoportok kapcsolatát éppen a közös matematikai modell mutatja meg (rezgőmozgás – váltóáram; növekedési, illetve fogyási folyamatok).

Az analógián alapuló gondolkodásnál két (vagy több) jelenségnek, jelenségcsoportnak bizonyos tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrákban való hasonlóságából vagy egyezéséből más tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrákban való hasonlóságára vagy egyezésére következtetünk. A megvizsgált, összehasonlított ismérvek szerint a megfelelés, lényegesben megegyezés mértéke különböző fokozatot érhet el, egészen az azonosságig.

Az analóg következtetés lényege a következő:

ALAPSÉMA: A viszonya B-hez olyan, mint C viszonya ? -hez.

Budapest ugyanazt jelenti Magyarországnak, mint Bécs AUSZTRIÁ-nak.

Az analógián alapuló következtetés tehát valószínűségi következtetés, az ismert jelenségcsoport ismérveit átruházzuk az ismeretlen, vagy kevésbé ismert jelenségcsoportra.

Nemcsak a megegyezések tudatosítása, felismertetése a feladatunk, hanem az analóg következtetéssel „megelőlegezett" ismérvek teljesülésének ellenőrzése, ellenőriztetése is. Az ellenőrzési folyamat dönti el, hogy az analóg következtetés igaz vagy hamis. Igaz következtetés esetén a kezdetben részlegesen megállapított egyezések, hasonlatosságok teljessé válnak. Hamis következtetés esetén kiderül, hogy lényeges különbség is van a két jelenségcsoport között, és az analógián alapuló következtetéssel a hasonlóság és különbözőség helyett csak a hasonlóságot fejeztük ki.

„Tanuláspszichológiai szempontból az igaz analóg következtetéseknek az általánosításban, a hamisnak a differenciálásban, a szabály érvényességi körének megállapításában van jelentős szerepe." [14] A logaritmussal végzett műveleti szabályok esetén például nem elegendő a „szorzatból összeg lesz" szabály megjegyzése, hiszen negatív számok esetén nincs értelmezve a szorzótényezők logaritmusa.

A jelenségcsoportok, rendszerek, gondolati sémák közötti hasonlóság jellege szerint a szakirodalom strukturális (szerkezeti) és funkcionális (működési) analógiát különböztet meg.

A strukturális analógia jellemzője, hogy az egyik rendszer elemei között fennálló bizonyos kapcsolatok megfeleltethetők a másik rendszer kapcsolatainak (anélkül, hogy a rendszer elemeit egymásnak meg kellene feleltetni.) A matematikán belüli analóg következtetések alapja elsősorban strukturális analógia, ennek sajátosságait Pólya György a modern heurisztika megalkotója, sok-sok példával szemlélteti [22], [26]. A tanulási folyamatban az ismeretszerzés eszközeként és az ismeretszerzés módszereként egyaránt alkalmazhatjuk az analógia felismerését, felismertetését. Talán a legnagyobb az analógia jelentősége akkor, amikor – a feladat feltételeinek tüzetes elemzése nélkül – sejtések, ideiglenes modellek segítségével jutunk el a megoldáshoz. Módszertani szempontból rendezés, rendszerezés, magyarázat, értelmezés, bizonyítás, igazolás, szemléltetés során is hasznos lehet az analógia [23]. A tárgyak, jelenségek egyezéseinek tudatos keresése, megmutatása hatékonyabbá teszi az új ismeretek szerzésének, rögzítésének, helyes használatának folyamatát. Miközben az új struktúrát a régihez hasonlítjuk, a régire is másképp tekintünk, esetleg új tulajdonságot fedezünk fel. A modellalkotásban is hasznos az analógia, ilyenkor az ismeretszerzés eszköze.

3.6. Az előhívásos tanulás

Arra törekszünk, hogy az elsajátított ismereteket és eljárásokat tároljuk és szükség szerint előhívjuk, felidézzük és valamilyen formában felhasználjuk. Az agykutatás komoly változást hozott azzal a felfedezéssel, hogy az emlékképeinket duálisan kódolva tároljuk [24]. Az emlékezetről alkotott régi séma („kódol-tárol-előhív") a bevitelre, a kódolásra helyezte a hangsúlyt. Ha probléma adódott az előhívással, akkor az ismételt, esetleg változatlan bevitelt, újratanulást tekintették megoldásnak. Az újratanulásos elmélet az emberi memóriát raktárhoz hasonlítja és az előhívásban nem lát mást, mint az ismeretek elővételét vagy eljárások aktivizálását. Ez a megközelítés a felejtést a tárolás problémájának tekinti. A „kódol-tárol-előhív" megközelítés szerint az előhívás mindössze az ellenőrzés módszere, nem a tanulási folyamat szerves része. Az utóbbi száz évben jelentősen megváltoztak a hatékony tanulásról, a tartós tudásról vallott nézetek, mert többet tudunk a tanulási folyamatról. Az újratanulás a rövidtávú emlékezést, az előhívásos tanulás pedig a hosszútávút támogatja [25], [26]. Számon kutató úgy véli, hogy az ismeretek előhívása (teszt, feleltetés, dolgozat, vizsga) nem kárba veszett idő, hanem a tanulás eszköze. Az ismételt felidézés erősíti a memóriát. Endel Tulving [27] kimutatta az információ jelenlétének és elérhetőségének relatív függetlenségét: Egy időben több információt fogadunk be, mint amennyit később egyszerre képesek vagyunk előhívni. Egy adott ismeret, illetve eljárás reprezentációja azokat a környezeti elemeket is tartalmazza, amelyek között a tanulás megvalósult. Tehát, ha a tanulás és az előhívás ugyanabban a kontextusban valósul meg (akár érzelmi, akár fizikai állapotra gondolunk), akkor lényegesen jobb előhívási teljesítményhez vezet. Többnyire segíti az előhívást ezeknek az epizodikus elemeknek a felidézése. Elizabeth F. Loftus szerint az előhívás aktiválja és meg is változtatja az információt.

Az újratanulás során felületesen átugrunk az ismerős részeken (a velük tárolt hibákkal együtt) és nem változik a tudás minősége. A jól időzített előhívás (pl. óravégi) megakadályozza a téves információ rögzítését, korrigálja azt vagy annak helyét a tudáshálóban. A teszteléssel a tanár azokra a momentumokra irányíthatja a diák figyelmét, amelyek az ő strukturált tudása alapján fontosak (feltételek, kivételek, lényegesebb tulajdonságok).

Pszichológiai kísérletekben igazolták a következőket:

- A jól ütemezett, megismételt előhívás csökkenti a felejtést [29], mintegy konzerválja az emlékek elérési útvonalát. A kísérletet laboratóriumi körülmények között, egyetemi hallgatók körében, angol szöveg tanulása közben végezték.

- A megismételt előhívás jobb hosszútávú előhívási teljesítményt eredményez [30].
- A megismételt előhívás lelassítja a felejtés ütemét [31]. Idegen nyelv elsajátítását vizsgálták laboratóriumi körülmények között. Az előhívásos módszerrel tanulók esetén, rövidtávon kisebb intenzitású, de tartósan megmaradó agyi aktivitás volt észlelhető, az újratanulásos módszerrel tanulók esetén pedig közvetlenül a tanulás után volt nagyobb az agyi aktivitás, de ez egy héttel később lecsökkent.
- Az előhívás (a tesztelés) körülményeinek hatásáról megmutatták [30], hogy az eredmény kicsit változik aszerint, hogy korrigálták-e a tanulási szakaszban a tévedést.
- Ugyancsak ők mutatták meg, hogy az előhívási hatás feleletválasztós tesztnél és rövid kifejtős kérdéseknél egyaránt fellép. A visszajelzés a rövid kifejtős kérdéseknél bizonyult hatékonyabbnak.
- Az előhívás nem csak a tudás mennyiségére, hanem minőségére is hat, az így szerzett tudás könnyebben transzferálható [32].
- Az előhívási hatást kimutatták a szövegtanulás és az idegen szavak tanulásán túl a térképen való tájékozódásnál, valamint orvostanhallgatóknál biológia órán [33].

A tesztelési hatást különböző korosztályokban óvodás és iskola-előkészítős gyerekeknél, általános iskola alsó és felső tagozatán, gimnáziumban, egyetemisták és idősebbek körében is vizsgálták.

A teszthatás idegrendszeri hátterének vizsgálatát funkcionális mágneses rezonancia (fMRI) segítségével Magyarországon a BME Kognitív Tudományi Tanszékén Racsmány Mihály és társai [31] végzik idegennyelv tanulásával kapcsolatban.

A matematika tanításával kapcsolatos vizsgálatokat az ELTE Matematikai Tanuláselméleti Pszichológiai Kutatócsoportja Szabó Csaba vezetésével végzi, illetve irányítja. Ezeknek a kutatásoknak közös jellemzője, hogy a mindennapi tanulási-tanítási gyakorlatban az érvényes tantervi előírások betartásával folynak. Az eddig elvégzett és kiértékelt kísérletek a választott matematikai téma, a tanulók életkora, iskolatípus és földrajzi elhelyezkedés szempontjából is változatosak. Mérték a teszthatást

- elemi geometriából szakközépiskolában;
- térgeometriából gimnáziumban;
- számelméletből tanárjelölteknek;
- racionális számokkal végzett műveletek általános iskolában (Kárpátalján, magyar nyelven, Jakab Enikő vezetésével).

Én magam az akkori Szent István Egyetem Gépészmérnöki Karán a mesterszakosok nem szakirányú matematika képzésében próbáltam ki a módszert 2018 őszén. Annál is könnyebb volt beilleszteni a módszertani eszköztáramba, mert a spiralitás elve szerint felépített tananyag támogatja az ütemezett előhívást.

Az egyetemi tanulási folyamathoz illeszkedve az elsőhívásnak négy fázisát érdemes megkülönböztetni:

1. fázis: közvetlen előhívás (óravégi kérdések);

2. fázis: rövidtávú előhívás (házi feladat);

3. fázis: középtávú előhívás (zárthelyi, illetve vizsgadolgozat);

4. fázis: hosszútávú előhívás (szigorlat, záróvizsga).

A kísérleteim során a 4. fázist nem állt módomban alkalmazni.

3.7. A tananyag kiválasztás és elrendezés szempontjai

A tananyag kiválasztásában és elrendezésében Fritz Schweiger osztrák matematikus által megfogalmazott fundamentális elv [34] szerint a fundamentális elvek keresése maga is fontos folyamat, hiszen feltételezi a matematikáról és matematikából szerzett ismeretek felidézését, összehasonlítását és rendszerezését. Bár a fundamentális elvek kiválasztása nem egységes a szakirodalomban, de nyilvánvaló, hogy csaknem minden „elv" a matematika valamely jelentős szempontját ragadja meg és a különböző elvek egy rendszerbe szervezhetők (pl. mérés, számok, mozgás, szimmetria, valószínűség stb.). Schweiger értelmezésében a fundamentális elvek a matematikában a következők:

- történeti dimenzió: tartósan jelen vannak a matematika fejlődésében;
- horizontális dimenzió: jelen vannak a matematika különböző területein;
- vertikális dimenzió: jelen vannak a matematika különböző szintjein;
- emberi dimenzió: a mindennapi tevékenységben gyökereznek.

A történetiség elsősorban szemléletmódot jelent és nem megtanulandó ismereteket. A feladat nem a történeti tények tanítása, hanem az érdeklődés felkeltése és a kulturális kontextus biztosítása. A matematikatörténet jelentősége annak kiemelése, hogy a matematika az emberiség évezredeket átívelő alkotása, amihez minden embernek köze van. A nevezetes, sokáig megoldatlan problémák (A kör négyszögesítése, déloszi probléma, szögharmadolás) – melyek évszázadokon át foglalkoztatták a matematikával foglalkozókat – szóba hozása arra hívja fel a hallgatók figyelmét, hogy ezek nem elvont matematikai problémák, melyek csak egy maroknyi matematikust foglalkoztatnak, hanem akár egy egész társadalom érdeklődésére is számot tarthatnak.

A Fermat sejtés, Goldbach sejtés, négyszínsejtés megemlítése segíthet abban, hogy láttassuk, a matematika különböző területei között milyen szoros összefüggés áll fenn. Az egyikben gyakori bizonyítási mód használható egy másikban is; az egyik eredménye új perspektívát nyithat meg egy másikban. A párhuzamossági axióma bizonyítására tett évszázados erőfeszítések sikertelenségét nem kudarcként éljük meg, hanem a nemeuklideszi geometria kifejlesztésének lehetőségeként, mely nemcsak a matematika, hanem a fizika szempontjából is hatalmas nyereség.

A törtek és az algebrai törtek, az osztás és a polinom osztás ugyanannak a dolognak a matematika különböző szintjein megjelenő változatai.

A valószínűségszámítás kialakulása egyszerű emberek mindennapi életében felmerült problémájának (három kocka problémája, De Méré lovag problémája) megoldásának köszönhető. Erdős Pál fontos problémák megoldására sokszor pénzdíjat tűzött ki, néhány dollárostól több ezer dollárosig.

Az a törekvés vezetett, hogy a matematikatanulás eredményessége érdekében nem leegyszerűsíteni kell a matematikát, hanem a matematika alapvető gondolatait, a fundamentális elveit kell megkeresni és azok köré megszerkeszteni a tananyagot. Ilyenek például az elért eredmények ellenőrzése, tesztelése és igazolása, a nézőpont-váltás, az iteráció és a rekurzió, amelyek a matematikai kutatásban alapvetőek, és amelyek a matematika tanulásában is nélkülözhetetlenek.

A játékelmélet például egy olyan témakör, amelyben szinte minden fundamentális elvvel találkozhatunk.

3.8. Az ismeret, jártasság. készség kialakításának didaktikai szempontjai

Már Piaget [69] munkássága rámutatott arra, hogy a matematikatanítás során a konkrét műveletek szakaszának (7–11 év) meg kell előznie a formális műveletek szakaszát (11 évtől). A túl korai absztrakció megfelelő tapasztalati alapozás nélkül olyan szakadást idéz elő az absztrakciós folyamatban, amely mindvégig rányomja bélyegét a tanulók matematikai teljesítményére és matematikához való hozzáállására.

A külvilág feldolgozása több forrásból (látási, hallási stb.) származó információ alapján megy végbe. Egyénfüggő, hogy képszerűen vagy valamilyen más módon idézünk fel egy tárgyat. A felidézett képet mentális reprezentációnak nevezzük.

A Bruner által leírt reprezentációs elmélet szerint [35] az ismeretszerzés három síkon, három reprezentációban megy végbe, amelyek egymásra épülnek. Az első a materiális (enaktív, cselekvéses) sík, ahol az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységeken keresztül megy végbe (eszközök használata). A második a képi (ikonikus) sík, ahol az ismeretszerzés szemléletes képek, elképzelt szituációk segítségével történik (Venn-diagram, fagráf, szemléltető ábrák, …). A harmadik a szimbolikus sík, itt az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével történik (ismeretlen jelölése, integrál jel). A szimbólumok elszakadnak a konkrét tárgyi megvalósulásuktól, saját jelentésük van. A matematika tanítás minden szintjén rendkívül fontos, hogy (lehetőleg) tárgyi tevékenységgel, de legalább képi ábrázolással alapozzuk meg egy új fogalom kialakítását mielőtt szimbolikus reprezentációt alkalmazunk. A megfelelő előkészítés hiányában a szimbolikus módszerek üres formulákat jelentenek csupán, amelyeket a tanulók képtelenek lesznek új helyzetekben alkalmazni.

A mentális reprezentáció-kutatás másik elmélete Allan Paivio [24], [36], [37] kettős kódolási elmélete (dual coding theory). E szerint két külön kódolási rendszerünk van: egy képi és egy verbális; az első a képi információkat, a második a verbális információkat dolgozza fel. Akár szavakat, akár képeket észlelünk, az eredeti nyelvi vagy képi kódot követően mindkét kód felépülhet. A képi és nyelvi kód egymást erősítő voltát nagyszámú tanulási, emlékezeti kísérlet igazolta. Kísérleti eredményei azt is igazolják, hogy a személyek általában hatékonyabban idézik fel a képi ingereket, mint a verbálisakat.

David Tall és Shlomo Vinner bevezették a fogalomképzet (concept image) fogalmát. A fogalomképzet egy fogalom nevéhez kapcsolódó teljes kognitív struktúrát jelenti. A felidézett képhez hozzákapcsolódnak az ábrák, konkrét tapasztalatok, példák és élmények, melyek jelentős szerepet játszanak a hatékony fogalomképzet kialakításában. A konkrét tárgyi és képi reprezentációk segítik a fogalom mentális képének létrehozását, amely nem egyszerű másolata a képi reprezentációknak, hiszen egyéni aktivitás révén jön létre, és függ az egyén tapasztalataitól, tudásától. David Tall proceptnek nevezi a szimbólumok folyamatként (process) és fogalomként (concept) való felfogását. Tall és Gray feltételezték, hogy e fogalom használatával jól magyarázhatóak a tanulók közötti matematikai különbségek. A matematikában tehetséges tanulók rugalmas procepteket használnak, ezzel szemben a gyengébb tanulók a matematikát elkülönített eljárások összességeként fogják fel.

A tanulási folyamat három fázisa Fitts és Posner [38] szerint a kognitív, az asszociatív és az autonóm szint. Egyetemi matematika oktatásban a fogalmak, tételek, eljárások elsajátítását általában kognitív szinten biztosítjuk. Az előadások, de a gyakorlatok többsége is frontálisan zajlik. A tanuló a tanári magyarázat és a példák alapján kialakít egy pontos képzetet a fogalomról. Ez a számonkérés szintje is BSc-n a kötelező tárgyak esetében: számítási feladatokban a tanított eljárások szinte változtatás nélküli alkalmazását kérjük számon.

Az asszociatív szint – a tanuló összegyűjti és rendezi az információkat pl. a tanár vagy társak segítségével – többnyire a hallgatóra marad. Ebben a fázisban illeszti be a hallgató a tudáshálójába az új ismeretet. Minél több szállal kapcsolódik az addigi ismereteihez, annál erősebben tapad meg, könnyebben lesz előhívható, sokoldalúbban lesz felhasználható. Egy számítógépes program, animáció, játék erre alkalmas lehet. Ha épp csak bemutatunk egy-egy programot, már azzal is lehetőséget biztosítunk a hallgatónak, hogy önállóan alkalmazza azt és a közvetlen hasznon túl ezzel meglevő ismereteit is szilárdítja, gazdagítja. Ha MSc szinten a feltett kérdést a hallgató mindennapi életéhez kapcsolom, ezzel is ezt segítem elő.

Az autonóm szint elérésére – a tanuló folyamatos gyakorlással fejleszti a készségét automatikus szintre – kevés a ráhatásunk. Az egyetemi matematika tanítás egyik fő problémáját az okozza, hogy a hallgatók a középiskolában nem tanulták meg autonóm szinten például az algebrai törtekkel, hatványokkal való számolást. Új ismeret tanítását nagyban nehezíti, hogy az alkalmazott átalakításokat mindig részletesen el kell magyarázni. Ez nemcsak a haladást lassítja és unalmassá teszi az órát, de a hallgatóban azt a képzetet kelti, hogy a matematika nagyon bonyolult tudomány. Pedig ez gyakran csak a középiskolai ismeretek nem autonóm szintű tudásának a következménye.

3.9. Az oktatás támogatása informatikai eszközökkel

Marc Prensky [39] már 2001-ben felhívta a figyelmet a megváltozott digitális környezet (számítógépes hálózatok, mobiltelefon, táblagépek, videojátékok) várható hatásaira, illetve, hogy a tanároknak és az oktatásnak igazodniuk kell a megváltozott tanulói elvárásokhoz (1. táblázat).

Született digitális tanuló	Bevándorló digitális tanár
többféle média által jut el az információhoz (gyors hozzáférés)	nyomtatott anyagból szerzi az információt (lassú hozzáférés)
gyakran ellenőrizetlen forrásból szerzi az információt	megbízható forrásból szerzi az információt
kép, hang és videó preferenciája a szöveggel szemben	szöveg preferenciája a kép, hang és videóval szemben
szimultán interakció preferenciája	egyéni munkavégzés preferenciája
azonnal megosztja a készülő gondolatot (közösségi oldalon)	egyéni alkotás, befejezettet oszt meg, ha egyáltalán…
elsősorban belülről motivált	kívülről (is) motiválható
azonnali visszajelzést igényel	késleltetett visszajelzést is kivár
azonnal hasznosíthatót akar	tudáshálót épít

1. táblázat: Digitális generációk összehasonlítása.

Azóta kutatási eredmények támasztják alá, hogy az új vizuális médiában gazdag és infokommunikációs technológiával átszőtt környezetben felnővő gyermekek agya másképp fejlődik, ezért másképp is viselkednek, mind 20–30 évvel ezelőtt élő társaik, ezen kívül más oktatási módszereket és tananyag tartalmat igényelnek [70].

Az infokommunikációs eszközök számos előnye mellett a túlzott használat többféle probléma kialakulását vetíti előre [26], [71].

- A világhálón a butaság is gyorsan terjed.
- Kevesebb a fejszámolás. Különösen az írásbeli osztás forog veszélyben, ami egy összetett lépéssorozat hibátlan és csak részben automatizált elvégzését jelenti. Ezzel ráadásul elveszítjük azt az analógiát, ami a polinommal való osztást és az írásbeli osztást összeköti.
- A kalkulátorral leszoktatjuk a gyerekeket a gondolkodásról és az önálló tevékenységről, gombnyomásra redukálódik a problémamegoldás.
- A gép mellett elvész a bizonyítás és az ellenőrzés igénye.
- Kopik a kézírás, stílus, helyesírás, a nyelvhasználat elkorcsosul.
- A gombnyomás a melléütés, a téves leolvasás veszélyét rejti.
- A maradandóság értéke csökken (a gépről egyetlen gombnyomásra eltűnik).

Az infokommunikációs eszközök használata segítséget tud nyújtani matematikai problémák hatékony megoldásában.

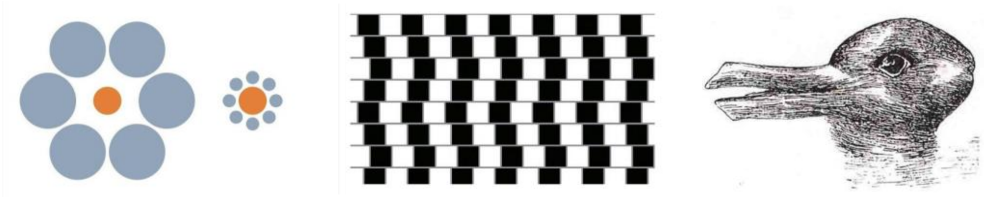
- Kéznél van a zsebszámológép (sima, tudományos, programozható, grafikus, …) vagy legalább a mobil telefon.

- A zsebszámológép leveszi az unalmas számolás terhét a diákról és időt hagy magasabb rendű feladatok elvégzésére.
- CAS (Computer Algebra System) programmal tudnak deriválni, egyenletet megoldani, szélsőértéket számolni, függvényt ábrázolni (például függvény-transzformáció lépéseit közös koordinátarendszerben).
- CAS program segítségével térbeli testeket, áthatást szemléltethetünk változó nézőpontból.
- Segítségükkel olyan diákok is képesek feladatot megoldani, akik elakadnának a számolási nehézségek miatt (például levelező oktatás).

Az infokommunikációs eszközök használata segítséget tud nyújtani a matematikán kívül is. Szemléltethetjük, ami túl kicsi (nano világ), túl nagy (naprendszer), túl lassú (növény kifejlődése), túl gyors (elgáncsolta-e?), azaz nehezen megmutatható.

Mi a megoldás? Használjuk ki korunk vívmányait és kompenzáljunk, ahol kell. Kár lenne lemondani arról az élményről és tudásról, amit az IKT adhat. Az egyetem úgyis legfeljebb azt írhatja elő, hogy tanítási órán és számonkéréskor mi használható. A többszörös reprezentáció szükséges és hasznos is egy mai diák számára.

Fontos a szöveg is! Ezért hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a látvány nem mindig megbízható. (Melyik narancssárga kör nagyobb? Egyenesek-e az „egyenesek”? Kacsát vagy nyulat látunk? 1. ábra).



1. ábra: Optikai csalódások.

Ha fontosabb a gondolkodás, mint a gombnyomás és nem szeretnénk, hogy felületesek legyenek hallgatóink, akkor olyan feladatot kell adni, amiben a gondolkodó jobban boldogul. Például a legtöbb CAS program megmondja egy függvény Taylor sorát, de nem mondja meg a konvergencia halmazt. Így a diák a konvergencia halmazon kívüli pontban is képes (hibásan) számolni vele.

A manapság divatos, tetszetős és látványos powerpointos előadás az újratanulás irányába tereli a hallgatót. Sokszor olyan sok információt tartalmaz, ami első hallásra nehezen megjegyezhető. Az előadás gyakran tetszőlegesen újranézhető. Ezt előhívásos tanulással kompenzálhatjuk.

3.10. Sokoldalú taneszközünk a feladatlap

A sokoldalú jelző már a hagyományos papír-ceruzás korszakban is ráillett a feladatlapokra.

„A legjobb feladatlap egy szép fehér papír azzal az utasítással, hogy hajtogass belőle repülőgépet." [40]

Ez valóban jó feladat, mert onnan visszük el a diákokat, ahol tényleg vannak (biztosított a tanulás előfeltétele). A diáknak létre kell hoznia valamit, önállóan dolgozik, miközben sok dolgot megtapasztal a papírról, a hajtogatásról, a repülésről. A reptetés eldönti, hogy ki érte el a célt, és ki nem (szó szerint is).

Az a tanári művészet, ha eltaláljuk feladatlapon az üres és a tele arányát és megtaláljuk hozzá az alkalmas megfogalmazást.

A feladatlap a diákok számára

- relatív önállóságot teremt, rugalmas lehetőséget ad a tanulási célok elérésére;
- biztosíthatja a tanulási eredmény ellenőrzését (esetleg visszajelzését is);
- a felkészültebbek számára kitekintő, elmélyítő kitérőket kínálhat;
- a kevésbé felkészülteknek mélyebb, részletesebb magyarázatot, gyakorlási lehetőséget adhat.

A tanár használhatja a feladatlapot

- a fontosabb fogalmak, algoritmusok és kapcsolatok kiemelésére;
- a feldolgozás ütemének és fő vonalának kijelölésére;
- a hallgatók figyelmének orientálására;
- az anyag szerkezetének, arányainak, súlypontjainak megmutatására;
- egyéni differenciálásra;
- az óravezetés áttekinthetővé, rekonstruálhatóvá tételére, didaktikai céljainak láttatására;
- a reflexió és az ebből adódó korrekció megkönnyítésére;
- a számonkérés során várható feladattípusok bemutatására.

A kutató számára a feladatlap lehet

- az órai interakciók egyik hasznos és információ-gazdag protokollja;
- az elvárt (elvárható) megoldásoknak a diákprodukciókkal való összehasonlításának eszköze.

A feladatlapok kutatási célú felhasználásáról olvasható például Vásárhelyi és társai [41] a 60–61. oldalon. Továbbá ilyen módszerrel hasonlította össze doktori disszertációjában Ambrus Gabriella a hagyományos és a problémaközpontú tanítási stílust [42]. A feladatlapok szolgálnak a diagnosztikai mérések alapjául [43], [44].

Magam is feladatlapokat használtam a zárthelyi dolgozatokra való felkészítéshez, valamint az előhívásos és az ismételt tanulásos tanulási stílus hatékonyságának összehasonlításához.

Napjainkban alapvetően megváltozott a feladatlapok mennyisége és népszerűsége. Az általános és középiskolai matematika tankönyvekben gyakoriak a tudáspróba típusú összefoglaló feladatsorok. A gyors technológiai fejlődés (számítógép, lapolvasó, fénymásoló, mobiltelefon, táblagép) egyszerűvé és könnyűvé tette a feladatlapok előállítását és megosztását.

Ez a fellendülés nem csupán a karantén okozta távoktatás miatt van így, bár az nagyon is igényli a tanulói teljesítmény mérésénél és a teljesítmény-visszajelzésnél a feladatlapokat, legyen az feleletválasztós, rövid válaszos, illetve kifejtős. A legújabb tanuláspszichológiai eredmények és a fejlett tanulási formák használata megköveteli az önálló és autonóm tanulást lehetővé tevő munkamódszereket és taneszközöket, mint amilyenek például az interaktív, multimédiás feladatlapok. Ezzel párhuzamosan növekszenek a feladatlapok minőségével kapcsolatos elvárások [45], [46]. A mérés módszertanának három általános alapkövetelménye az objektivitás, az érvényesség és a megbízhatóság [43].

A vitathatatlan előnyökön (függetlenség, a helyzethez való alkalmazkodás, individualizálás és a differenciálás, a rendelkezésre álló idő gazdasági felhasználása) túl, a hátrányokat nem szabad figyelmen kívül hagyni. A feladatlapok aránytalan túltengése átalakíthatja, nem kívánt módon egyoldalúvá deformálhatja a tanulási folyamatot (pl. az időfaktor túlhangsúlyozása). A feladatlapok kidolgozása, javítása és a visszajelzés elszívhatja a tanárt más alapvető pedagógiai feladatoktól. A munkalapok nem helyettesítik az órát, a tanári magyarázatot, a tanár és a társak jelenlétét.

Az Európai Unió 2006/962/EK ajánlása az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kulcskompetenciákról felhívja a figyelmet arra, hogy a tanulás képességének fejlesztése legalább olyan fontos, mint az átadott tananyag.

A tanár segíthet az önálló tanulásban differenciálással, egyéni vagy csoportos támogatással, interaktív tudáspróba típusú feladatlapokkal, digitális szintfelmérőkkel.

4. Újítások az alapfokú mérnökképzés általam oktatott matematika tárgyaiban, a módszerek kipróbálása

4.1. A populáció bemutatása

A kutatás időszaka alatt (2015–2018) az alapfokú mérnökképzésben egy szemeszterben egy csoportban heti 2 órás, három csoportban heti 4 órás gyakorlatokat tartottam az akkori Szent István Egyetem Gépészmérnöki Karán. Hallgatóim számára a matematika alapozó tárgy, amely a továbbhaladás feltétele. Szinte kivétel nélkül jellemző rájuk, hogy az órán fegyelmezetten dolgoznak.

Kérdőíves felmérés (2015)

Az egyik kurzusomban a 2015-ös év tavaszi félévében egy kérdőíves felmérést végeztem (1. melléklet 124. o.), mert tudni szerettem volna, hogy milyen az érdeklődésük és a matematikához való viszonyuk. Ebből kiderült, hogy a megkérdezettek 93%-a mérnöki, technikai érdeklődése miatt választotta a szakot. A szakmán kívüli érdeklődésük sokoldalú (többféle sport, idegen nyelv, gondolkodtató játékok, néptánc, ...). A matematikával kapcsolatos esetleges negatív élményt a tanár személyére, tanári fluktuációra és egyéb külső körülményekre vezették vissza. A többség szereti a matematikát, páran semlegesek iránta, senki nem írta, hogy nem szereti. A kérdőív eredményei tökéletesen egybeesnek a tíz éves személyes tapasztalatommal.

Alapintelligencia vizsgálat (2015)

Az egyik – tíz éves tapasztalatom alapján átlagos felkészültségű – csoport hallgatói körében a 2015-ös tavaszi félévében felmértem az alapintelligencia általános összetevőinek szintjét.

A szakirodalom szerint az alapintelligencia mérésére legalkalmasabb a CFT kultúrafüggetlen intelligenciateszt [47], mert az iskolai tudásanyagtól, valamint a szociális környezet hatásaitól függetlenül méri az értelmi funkciók működését. A teszt középső nehézségi szintű változatát használtam.

A hallgatóim eredményei 29% és 82% közé estek. Az átlag 60%, a medián 64%. Ennek alapján elmondhatjuk, hogy a hozzánk járó diákok többsége átlagos vagy annál magasabb intelligenciájú.

4.2. Új módszerek a Matematikai alapok tárgyban

Az egyetemünkön továbbtanuló magyar diákok jelentős része középszintű érettségit tett matematikából. A sikeres egyetemi tanulmányokhoz viszont egy jeles középszintű matematika érettségi gyakran nem elegendő, bár nem elengedhetetlen a teljes emelt szintű tananyag ismerete. Az egyetemi matematika tanulás feltételeinek biztosításához létrehoztuk a Matematikai alapok tárgyat. A tárgy célja a középiskolai matematika anyag bizonyos részeinek rendszerezése, felelevenítése, pontosítása, kiegészítése. Ezen túl a frissen felvett hallgatók pontosan lássák, milyen típusú és mélységű középiskolai matematika tudást várunk tőlük egyből az egyetemre bekerüléskor. A tárgy tematikája: halmazok, logika, elsőfokú egyismeretlenes egyenletek és egyenlőtlenségek, elemi algebrai ismeretek, másodfokú egyenletek és egyenlőtlenségek, a hatványozás azonosságai, számolás hatványokkal és gyökökkel, exponenciális- logaritmusos kifejezések, algebrai átalakítások, magasabb fokú egyenletek és egyenletrendszerek, vektorok, vektorműveletek, alapvető trigonometriai fogalmak, nevezetes szögek szögfüggvényei, trigonometrikus egyenletek, függvények, függvénytranszformációk.

A nálunk tanuló külföldi hallgatók számára angol nyelven folyik a tárgy oktatása (Basics of Mathematics), ami különösen fontos a követelmények tudatosítása, fogalmi, elnevezésbeli, jelölésbeli különbségek tisztázása miatt.

A magyar hallgatók számára a tanév megkezdése előtti, úgynevezett nulladik héten, hétfő délelőtt kezdődő, péntek délutánig tartó intenzív felzárkóztató kurzust tartunk. A kurzust lezáró sikeres zárthelyi dolgozattal a Matematikai alapok tárgy teljesíthető. Ennek köszönhetően a hallgatók többsége az első tanítási nap előtt megszerzi az aláírást a tárgyból.

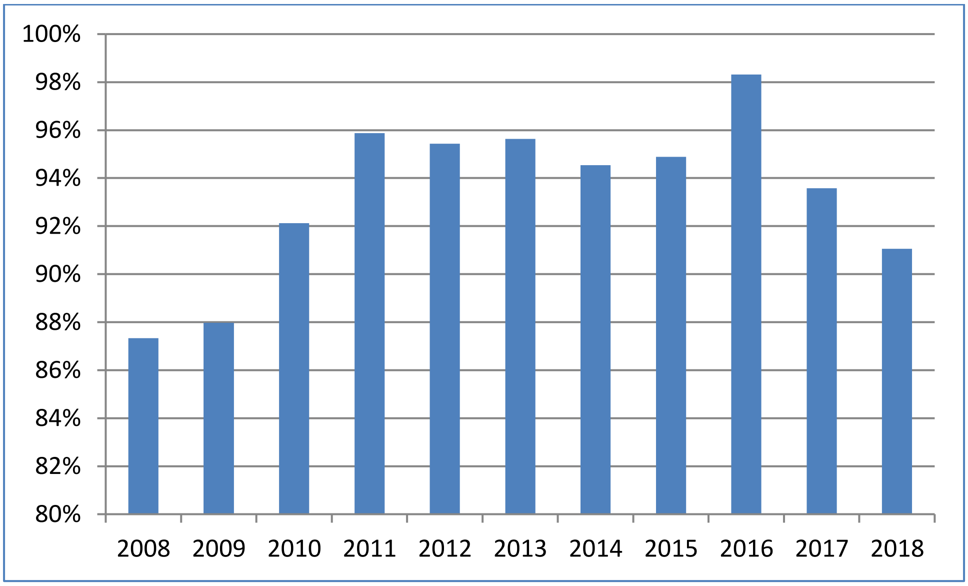
A többi hallgató további két alkalommal próbálkozhat, amelyhez korábban mindössze konzultációval nyújtottunk segítséget. Azokat a hallgatókat, akik ezen két alkalom során sem érik el a minimális 51 százalékot, a tantárgy ismételt felvételére kötelezzük.

2010 őszétől tanítom a Matematikai alapok tárgyat, 2012 őszétől tantárgyfelelősként. Azóta a sikeres hallgatók aránya magas (95% körül) és stabil. (2. ábra).

Az általam bevezetett lényegesebb változtatások a következők.

- A tematika terén: Matematikából szükséges, hasznos és minden számonkérésen megengedett a zsebszámológép használata. Ezért a zsebszámológép használatát betettem a tematikába. Mivel egyetemünkön matematikából nemcsak a tanórákon, hanem minden számonkérésen megengedett a zsebszámológép használata ezért fontos, hogy a hallgatók minél több funkciót megismerjenek és tudjanak használni. Már régóta minden hallgatónk saját tudományos számológépével kezdi meg egyetemi tanulmányait. Mivel nagyon sokféle számológép van a hallgatók kezében, ezért egyénileg is szükség van használati tanácsokra. Minden kurzusban több hallgató több funkcióval itt találkozik először. Később a Matematika I.-II. és a Valószínűségszámítás és statisztika tárgyakban tapasztaltam, hogy természetes módon veszik elő a hallgatók a kalkulátort.

- A számonkérésnél: Az elvárások illesztése a középszintű érettségi követelményekhez (pl.: paraméteres egyenletek kihagyása). Az összetett feladatok egyszerűbbre cserélése az egyes fogalmak, eljárások ismeretének közvetlen ellenőrzése és a következményhibák elkerülése érdekében.
- Évközi felkészítés létrehozása: 2017 óta az intenzív kurzust sikertelenül záró hallgatók számára a tanév során kötelező kurzust tartok, melynek során két alkalommal lehet zárthelyi dolgozatot írni.



2. ábra: A sikeres hallgató aránya

A tanulást segítő módszerek az évközi felkészítésben

Reflexió

Következetesen figyeltem a teljesítmény-visszajelzésre, reflexióra. Az éppen megírt zárthelyi dolgozat tanulságait megbeszéltük (részletes megoldás, típushibák és egyéni hibák tisztázása, az alkalmazott módszerek tudatosítása, a saját elgondolásokkal való összevetése – metakogníció [48].

IKT támogatás

Számítógépes weboldal[1] segítségével a függvény fogalmának kialakításakor a kiindulási és a transzformált függvények grafikonjainak ábrázolása közös koordináta rendszerben, egymás után, különböző színekkel; megmutatható a hozzárendelési szabály változtatásának hatása a függvény grafikonjára; a grafikon tulajdonságaiból következtetés a függvény tulajdonságaira.

Az IKT jelentősége különösen nagy az angol nyelven tanuló külföldi hallgatók számára. A szokásos e-learning támogatáson túl (tantárgyi ismertető, tananyag, minta zárthelyi dolgozat) a Matematikai alapok tárgy tananyagához angol nyelvű, a magyarországi matematikatanítási gyakorlathoz illeszkedő magyarázattal ellátott részletes megoldásokat tartalmazó weboldalak, egyszerű komputeralgebrai, -grafikai műveletek elvégzésére alkalmas online programok (pl. mathsisfun.com, mathportal.org) hozzáférhetővé tétele.

Játékosítás

Ismert társasjátékokból a különböző tanulási szituációkhoz, az óra tematikájához és a nehézségi szinthez illeszkedő tematikus „játékokat" alakítottam ki.

Memóriajáték

Azonos értékű, különböző módon megadott kifejezéseket kell összepárosítani. Hasonló játék az interneten is megtalálható online formában[2]. (Okosdoboz, Utolsó megnyitás 2021. 06. 10.)

A Memóriajáték matematikai tartalma és a feladványok nehézségi foka korlátlanul bővíthető. (Ugyanez elmondható a Dominójátékról is.) Tematikus játékokat készítettem a hatványozás, a négyzetgyökvonás, a logaritmus, illetve a trigonometriai azonosságok gyakorlásához (2. melléklet 125. o.).

A memóriajáték jelentősége a Matematikai alapok című tárgyban egy adott azonosság két oldalának összekapcsolásában, D. Tall szerint a (process) + (consept) = (prosept) folyamatban van.

A kézbe vehető, konkrét kártyák előnye a digitális játékokkal szemben például az, hogy

[1] https://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php
[2] https://www.okosdoboz.hu/feladatsor?id=1552

- párban, csoportban játszható;
- kettőnél több (páros sok) alak is szerepelhet ugyanarra az értékre.

Az elején homogén nehézségű feladatokat érdemes kitűzni, majd fokozatosan egy-két nehezebb feladattal fokozni az érdeklődést.

Érdemes megengedni a számológép használatát játék közben. Ezzel kapcsolatban az a tapasztalatom, hogy a készletbe olyan kártyát is kell tenni, amelyet a számológép nem tud jól kezelni.

A hatványozáshoz például az alábbi kártyaváltozatok készültek:

- Ugyanazon számok különböző szerepben (például 3^2; 2^3) típusú memória-kártyák az alap és a kitevő szerepének tudatosítására alkalmasak.
- A szabályok konkrét számokkal, illetve paraméterekkel szerepelnek.
- A hatványalap prím (azonos alapú hatványok szorzatára, illetve hányadosára vonatkozó azonosságok gyakorlása).
- A hatványalap összetett szám (szorzat hatványára vonatkozó azonosságok).
- A régi és új jelölések (például 3^{-1} és $\frac{1}{3}$ vagy $\sqrt{2}$ és $2^{\frac{1}{2}}$) összekapcsolódásának támogatása vizuálisan.

A logaritmus-kártyákon összekötöttem a hatványozás gyakorlását az inverz gondolattal, a logaritmussal. Az argumentumban változatos írásmódban szerepeltettem a hatványokat és sorra kerültek a logaritmus (a hatványkitevő) negatív, nulla, pozitív, egész, illetve tört értékei (könnyen felismerhető számértékekkel). A logaritmus azonosságainak gyakorlását segítő kártyákon olyan kifejezéseket szerepeltettem, amelyek párosításához kiszámítás helyett az azonosságokat kell alkalmazni.

A négyzetgyökös kifejezésekkel való műveletek (szorzat négyzetgyöke, négyzetgyökös kifejezést tartalmazó nevezetes azonosságok, gyöktelenítés) gyakorlásához is készült kártyakészlet (2. melléklet 125. o.).

A trigonometrikus függvényekhez az alábbi témakörökből készült kártyacsomag (2. melléklet 125. o.):

- nevezetes szögek átszámítása fokból radiánba és fordítva;
- nevezetes szögek szinuszának, illetve koszinuszának pontos megadása;
- nevezetes pótszögpárok szinusza és koszinusza közötti kapcsolat;
- szögfüggvények páros, illetve páratlan tulajdonsága;
- adott szög szögfüggvényei közötti kapcsolat.

Hatökör vagy Vigyázz 6! kártyajáték

A kártyajátékot az eredeti játékszabállyal és lapokkal kezdtük, majd áttértünk matematikai kártyalapokra. A kártyalapokon szereplő számokat nagyság szerint kell összehasonlítani, de 1-től 66-ig minden egyes természetes szám helyett olyan művelet szerepelt, amelynek eredménye az adott szám. A kártyalapokat a 3. melléklet (129. o.) mutatja.

Ki nevet a végén

A Ki nevet a végén játékhoz hasonló szabályok szerint (helyes válaszért jutalomlépés, helytelenért nincs büntetés) a pozitív megerősítés elvének alapján játszottuk saját táblán. Egy táblán 4–5 fős csoport játszott. A kijelölt pályán a kockadobás szerint lép a játékos. Az nyer, aki előbb ér a célba. A véletlen szerepét módosítják a „létrák" és a „kitüntetett mezők".
A létrát tartalmazó mezőről a létra mentén kell továbbhaladni, ami előrejutást és visszacsúszást is jelenthet. A kitüntetett mezőkhöz tartozó „szerencsekártyákon" egy-egy matematikai feladat szerepelt (szorzattá alakítás, nevezetes azonosságok felismerése, egyenletmegoldás, elemi alapfüggvények, valamint egyszerű transzformáltjaik grafikonjának ábrázolása). (4. melléklet 130. o.). Helyes megoldásért előre meghatározott számú mezőnyi előrelépés járt, helytelen megoldás következménye helyben maradás volt.

Összegezve

- A játékosítás által nem végeztünk kevesebbet a tervezett tananyagnál.
- Az egyes matematikai témák tudnivalóit oldott légkörben, aktívan, szemmel láthatóan jókedvűen gyakorolták a hallgatók – matematikai kompetenciák fejlődése.
- Fejlődött a kommunikációs készség általában – szociális és kommunikációs kompetenciák – és a matematikáról való kommunikáció is. (A csoportmunka során egymást kérdezték és ellenőrizték. Olyanok is megszólaltak, akik más körülmények között nem szoktak. Kivárták egymást, tisztelettel viselkedtek egymással is, egészséges versenyszellemmel, versengés nélkül küzdöttek.)
- Tanárként az én szerepem is megváltozott, elsősorban tanácsadóként, mediátorként volt rám szükség, vitás esetekben segítettem a döntést. Egyre kevesebb segítséget kértek tőlem, igyekeztek egymás között megoldani a problémát – kompetenciamotiváció fejlődése.

Fejleszteni kell a Matematikai alapok tárgyhoz készült interaktív tananyagot. A jövőben nemcsak az önálló tanulásnál, hanem a tanórákon is nagyobb hangsúlyt fektetek az IKT használatra (változatos feladattípusok).

4.3. Változtatásaim a Matematika I. tárgyban

Egyetemünkön az első éves gépész és környezetmérnök hallgatók számára kötelező tárgy a Matematika I. A tárgy 6 kredites, heti 2 óra előadás és 4 óra gyakorlat van. A tantárgyfelelős úgy találta, hogy jobb eredmények születnek, ha gyakoribb a számonkérés, így minden második héten röpdolgozat van a kétheti anyagból. Az öt röpdolgozat eredménye adja a megszerezhető 50 pontot. A másik 50 pont vizsgadolgozat írásával szerezhető, így 100 pont alapján kapják a hallgatók a vizsga jegyet.

2017 előtt heti 3 óra előadás és 3 óra gyakorlat volt, 2017-ben ez átrendeződött, 2 óra előadásra és 4 óra gyakorlatra. A gyakorlat megnövekedett idejét részben arra fordítottam, hogy az órán kooperatív tanulási módszereket próbáljak ki. A tanszék oktatóival áttekintettük, hogy az általam ismert kooperatív technikák közül melyeket tudnánk mi is alkalmazni a matematikaoktatásban. A megnövekedett előkészítő munka vállalására ösztönöztek a kooperatív tanulással kapcsolatos kutatási eredmények [49], [50]. Nem csak a kooperatív tanulást népszerűsítő irodalom támogatja ezt a módszert a hagyományos frontális óravezetéshez képest, hanem tanuláspszichológiai kísérletek is alátámasztják, hogy a kooperatív tanulási módszer alkalmazása során a hallgatók nagyobb érdeklődéssel állnak a feladat megoldásához, oldottabbnak, nyugodtabbnak érzik az óra légkörét, fantáziájukat jobban szabadjára engedik, ötleteiket elmondják, kevésbé félnek attól, hogy hibáznak, javul a kapcsolatuk egymással [49 – 54].

Részletesen kidolgoztam a kiválasztott tanulási módszer alkalmazását a javasolt anyagrészekre, elkészítettem a segédeszközöket [55].

Játékok

Körforgás

Célja az ismerkedés, a hallgatók egymás közötti kapcsolódási pontjainak és közös érdeklődési körének megtalálása.

Egy körben egymással szemben álló párok azt a feladatot kapják, hogy egy adott jelre egy adott témáról kezdjenek egymással beszélni nagyjából két percig és találjanak mindkettőjüket érdeklő közös pontokat. A következő jelzéskor a külső körben állók az óramutató járásával megegyező irányban a következő hallgatóhoz lépnek és a megadott új témáról kezdenek beszélgetni.

A tanár a kiadott feladatokkal tematikussá teheti a beszélgetést.

- Az első óra utolsó 20 percében játszottuk.
- A tábla előtt a belső körbe a kollégistákat állítottam, mert ők már ismerték egymást. A többiek velük szemben álltak. (Mivel páratlanul voltak, én is beálltam.)
- Javasoltam, hogy például zenéről, sportról, filmről, szabadidős tevékenységről, kedvenc ételről, számítógép használatról beszélgessenek.

Tapasztalatok

Valóban az óra végén érdemes játszani. Amikor elfogytak a témák, elölről kezdtük (új beszélgető partnerrel). Jó hangulatban zajlottak a beszélgetések, én magam is nagyon élveztem. Az egy-egy témára szánt 2–3 perc elegendő volt ahhoz, hogy kapcsolódási pontokat találjanak a párok. A 20 perc elég volt ahhoz, hogy a csoportban a párbeszédek elinduljanak, ugyanakkor nem vált unalmassá a játék. Számomra meglepetés volt, hogy a velem egy párba került hallgatók milyen nyíltan és természetesen kezdtek beszélgetni velem.

Villám-randi

Az exponenciális sorozatok végtelenben vett határértékének meghatározásánál próbáltam ki a módszert. Az előző órán a polinom és algebrai tört alakú sorozatok végtelenben vett határértékének meghatározására oldottunk meg feladatokat. Az óra elején a q^n sorozat végtelenben vett határértékét ismételtük át.

A hallgatókat 4-es csoportokba osztottam. (Ha nem néggyel osztható a létszám, akkor például a legjobbakat be lehet osztani a csoportok mellé mentornak.)

Minden blokkban ugyanúgy, A, B, C, D szereposztásnak megfelelően osztottam ki a kidolgozott példákat. Mindenki elolvasta a saját feladatát és a megoldást. Aki nem értette, megkérdezhetett engem. (10 perc)

1) *A* a *B*-nek, illetve *C* a *D*-nek megmutatta a feladatát és elmagyarázta a megoldás menetét. (5 perc)
2) Szerepet cseréltek és *B* magyarázott *A*-nak, illetve *D* a *C*-nek. (5 perc)

A párok – *A* és *B,* illetve *C* és *D* – feladatot cseréltek. *A* és *C* helyet cseréltek és az új partnerrel megismételték az 1) - 2) lépéseket. Gondolkodási idő már nem volt. A hallgató nem a leírás, hanem a társa magyarázata alapján értette meg a feladat megoldását. (10 perc)

A módszer előnyei:

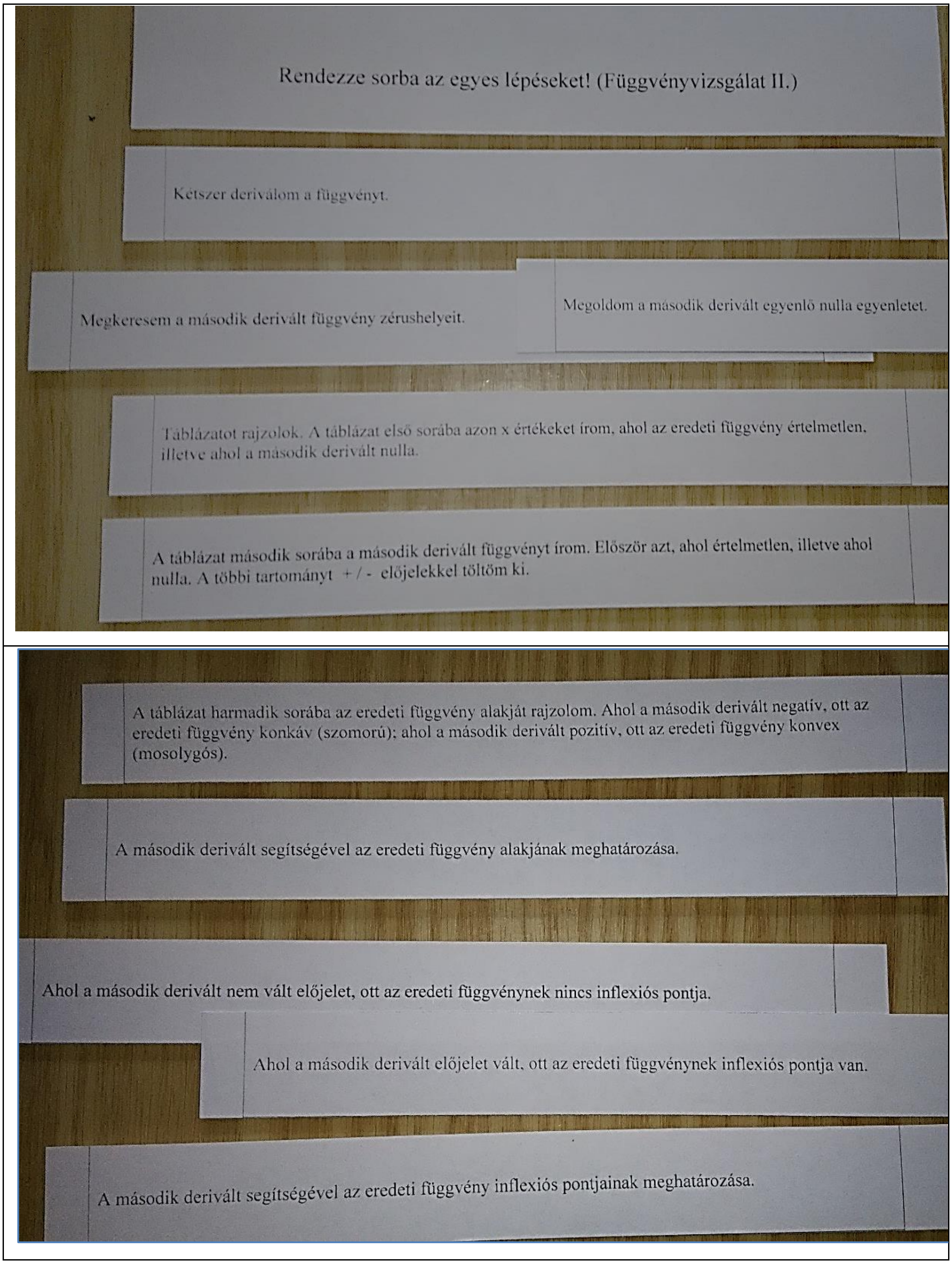
- Tanították egymást és közben a saját tudásuk is jobban elmélyült. (A tanulás tanulása.)
- Nem szóbeli tanári magyarázat segítségével, hanem leírás, illetve a társa magyarázata alapján kellett megértenie egy-egy feladat megoldását. (A tanulás tanulása.)
- Nem volt elég megérteni, el is kellett magyarázni társának. (Matematikai kommunikáció.)

A hallgatók maguktól leírták a füzetükbe a feladatokat és azok megoldását.

Sorbarakás

A módszert a függvényvizsgálat I. és II. témakörökben próbáltam ki az egyik óra elején, miután az előző órákon már több függvény globális és lokális vizsgálatát elvégeztük. A tananyag a differenciálható függvények helyi szélsőértékeinek meghatározása, valamint a függvény menetének jellemzése az első derivált segítségével, illetve a függvénygrafikon alakjának leírása, valamint az inflexiós pontjainak megkeresése a második derivált segítségével volt. Ezekben a témákban összetett feladatokat kell megoldani, amelyeknél fontos a lépések sorrendje és a kapott részeredmény értelmezése. A visszatekintés, az elvégzett lépések sorrendjének és értelmének tudatosítása, verbalizálása (metakogníció) a tanulás második fázisa (az ismeret tárolása), valamint a harmadik fázis (az ismeret előhívása és alkalmazása) miatt fontos.

Külön lépéssorozatokat készítettem (5. melléklet 131. o.) a Függvényvizsgálat I, illetve a Függvényvizsgálat II témakörhöz. Voltak olyan lépések, amelyeket többféleképpen is megfogalmaztam. Egy-egy lépéssorozatot papírcsíkokra vágtam és összekevertem. A hallgatók párokban dolgoztak, egy-egy pár egy-egy lépéssorozatot rakott sorba. A lényegében azonos tartalmú lépéseket egymás mellé kellett helyezni (3. ábra).



3. ábra: Hallgatói megoldás a Függvényvizsgálat II. lépéseinek sorbarakásáról.

.

Módszertani megjegyzések

Bár maga a feladat absztrakt, mégis manuálisan oldották meg.

A sikeres feladatmegoldáshoz nem volt feltétlenül szükséges, hogy a hallgató szabatosan megfogalmazza az egyes lépéseket, de egy-egy összetett függvényvizsgálati feladat megoldásához hasznos a szimbólumokkal elvégzett tevékenység nyelvi megfogalmazása is. Nem vártam el, hogy a hallgatók maguk alkossák meg ezeket a mondatokat, de azt feltétlenül szükségesnek tartottam és tartom az egyes lépések felismerését, értelmezését és helyes sorrendbe állítását.

Úgy gondoltam, hogy az összetett feladat lépéseiről való gondolkodás közben a cédulákra leírt megfogalmazások felszabadítják a munkamemóriát. A cédulás módszer könnyen javíthatóvá teszi a tévedést. A páros munka magabiztosságot adhat, mert a döntést megbeszélhetik egymással.

Meglepő volt, mennyire gyengén sikerült a feladat megoldása. Többen feladták mielőtt a lépéssorozat végére értek volna. Elképzelhető, hogy nem ismerték fel, hogy milyen konkrét számítási tevékenységet takar egy-egy szabatosan megfogalmazott mondat.

Az is elképzelhető, hogy a megfogalmazás stílusa túlságosan eltért az általuk használt, leegyszerűsített, esetleg pontatlan kifejezésmódtól (például „a derivált 0”). Annak felismerésével is adódhattak problémák, hogy egy-egy mondat ugyanazt a lépést takarja vagy nem.

Ezek a nehézségek a matematikáról való kommunikáció, illetve a szövegértelmezés hiányosságaira mutatnak rá. Több feladat megoldása során sem tudatosult bennük automatikusan a szükséges lépések sorrendje, ezért a jövőben nagyobb figyelmet kell fordítanom a metakognícióra. Kellő előkészítés mellett ez a feladattípus az előhívásos tanulás része, segít a fogalmi hálóban a megfelelő kapcsolatokat kialakítani, elmélyíteni.

Készíts feladatot!

A „Készíts feladatot” kooperatív tevékenységet a határozatlan integrál témakörben próbáltam ki. A hallgatókat hármasával ültettem egy-egy padhoz. Az eredeti ülésrenden csak annyit változtattam, hogy a legjobb hármat, akik eredetileg egymás mellett ültek, beosztottam harmadiknak egy-egy csoportba.

Szereposztás

Minden csoportban három szerep volt, *A*, *B* és *C*.

Az A hallgatóknak egy saját feladatot kellett alkotniuk alapintegrál kiszámítására.

A B szerepbe beosztott hallgatóknak olyan integrálási feladatot kellett írni, amelyek a „nulladik szabály" (elvégzem a szorzás, osztás, hatványozás műveletet, ha lehet, hátha utána már tudom integrálni) alkalmazásának célszerűségét támasztják alá.

A C hallgatóknak az $f(ax + b)$ típusú függvény határozatlan integráljára vonatkozó feladatot kellett kitalálniuk.

Mindegyik szereplő használhatta a füzetét, de tilos volt olyan feladatot írni, amit már megoldottunk. Egy játékkártya méretű papíron dolgoztak, a bal felső sarokba felírták a „Feladat" szót és a szerepüket (A vagy B vagy C).

Az egyes munkafázisok

Minden szereplő

1) írt egy feladatot a szerepének megfelelően;
2) a kártya másik oldalára átmásolta a feladatát és leírta a megoldást;
3) visszafordította a „Feladat" oldalra és a saját csoportjában továbbadta (A a B-nek, B a C-nek, C az A-nak);
4) megoldotta a kapott feladatot a füzetében, majd összehasonlította a papíron levő megoldással (eltérés esetén egyeztetett a feladat készítőjével, szükség esetén kijavították a papíron levő eredeti megoldást) és a saját csoportjában továbbadta a ciklusnak megfelelően;
5) megismételte a 4)-es lépést, így visszajutott a feladat a készítőhöz.

(25 perc)

Névvel ellátva összeszedtem és átnéztem a munkákat.

Az óra további részében kijavítottam az összes feladatot, ők pedig integrálszámítási feladatokat oldottak meg közben.

(10 perc)

Visszaadtam a kijavított feladatot a készítőjének. Majd felhívtam a figyelmet az esetleges rossz feladatokra, illetve ismertettem a rosszul megoldott feladatok helyes megoldását.

(5 perc)

A teljes időszükséglet 40 perc volt. Meglepő módon utána sem ültek vissza a helyükre, hanem ott maradtak a „csoportjukban" egész órán.

Kevés olyan hiba volt, hogy valaki nem a szerepének megfelelő típusú feladatot írt. (Valószínűleg azért, mert használhatták a füzetüket.)

Voltak integrálási hibák, ami azért súlyosabb, mert hárman is elkövették ugyanazt a hibát. Ez is azt bizonyítja, hogy szükség volt a feladatok javítására. (Nem veszett kárba a javítással töltött 10 perc.)

Az is fontos volt, hogy addig beszéljük meg a hibákat, amíg befolyásolni tudjuk, hogy mit jegyeznek meg. (Nem veszett kárba a megbeszélésre szánt 5 perc.)

Az egymásnak adott feladataik nehézségi szintje megegyezett az órai mintapéldákéval.

A kooperatív tanulási módszer alkalmazásának eredményessége és a matematika tanuláson túli haszna

A kooperatív technikák hatására a hallgatók matematikához való hozzáállása kognitív, érzelmi és viselkedési szempontból is pozitívabb lett. Az órák színesebbek, a hallgatók közötti kommunikáció és szociális kapcsolatok erősebbek lettek. Az ismerkedésből olyan baráti körök alakultak ki, akik nem csak együtt szórakoztak, hanem együtt is tanultak.

Nem csupán új matematikai tartalmat tanultak, hanem el is magyaráztak egy-egy megoldást. Abban az irányban is fejlődött a kommunikáció, hogy a társak magyarázatából ismerték meg a megoldást. Többféle reprezentációs módban találkoztak a hallgatók az egyes fogalmakkal.

A feladatkészítés legfontosabb funkciója, hogy a hallgató észrevegye a feladatok közötti tartalmi hasonlóságot, a matematikai szempontból jellemző jegyeket és ezek felismerése után saját maga is képes legyen ilyen típusú feladatot készíteni. Ez a tanulási folyamatban más szerepet enged meg a diák számára, ami nagy felfedezés lehet a hallgatónak, hogy olyan feladatot végez, amit általában csak a tanár szokott.

A meghatározott szempontok szerinti feladatkészítés az előhívásos tanulási módszernek is eszköze, más oldalról találkoznak az egyes integrálási típusok jellemző jegyeivel, felidézik az elemi függvények, szorzat, hányados, hatvány integrálását, illetve az olyan esetet, amikor a belső függvény lineáris. Ez a „raktározás" előtti korrekció fázisa, ha téves az elgondolás, akkor időben felfedezzük és kijavítjuk.

A feladatkészítés és a saját feladat megoldásának követése aktív részvételt kíván, fokozza az érdeklődést.

A hallgatók teljesítményének változása

A kooperatív módszer alkalmazása a tanulmányi előmenetel szempontjából is hasznos volt. A hallgatók tetszés szerint jelentkezhettek ugyanazon tárgy egy-egy csoportjába, így feltételezhető, hogy a kísérleti csoport felkészültsége átlagos volt. A számonkérés egységes volt az egész évfolyamon. Azoknak a hallgatóknak a félévi teljesítményét vizsgáljuk, akik a Matematika I. tárgyban a félév során legalább 4 röpdolgozatot megírtak az 5 közül. A kísérleti csoport tagjai átlagosan a szerezhető maximális pontszám 61%-át érték el, míg az évfolyam átlag 39%-os teljesítmény volt. A kísérleti csoport az évfolyam teljesítményének 1,56-szorosát érte el.

A digitális kompetencia fejlesztése a Matematika I tárgyban

2018 őszén a heti 4 óra gyakorlatból 1 órát arra fordítottam, hogy olyan webes felületek használatát ismertessem meg a hallgatókkal, amelyek a Matematika I tárgy tanulása közben és később is többféleképpen segítségükre lehetnek. A webes felület előnye, hogy platform-független és akár személyi számítógépen, akár táblagépen, akár okostelefonon bármely keresőben elérhető, így remélhetőleg más tárgyakban vagy a hétköznapokban felmerülő kérdések megválaszolásához is igénybe veszik az IKT eszközök által nyújtható segítséget.

Az első két alkalommal az egyénileg ingyenesen elérhető Wolfram Programming Lab matematikai weboldal használatát gyakoroltuk együtt ([74], [75]). Aki meg tudta oldani a feladatot, az ellenőrizhette az eredményt; aki ismerte a megoldás menetét, az kiszámíttathatta az egyes lépések részeredményeit. A hallgatók megtapasztalhatták, hogy nagyon sok tennivalót a papír-ceruza módszer helyett a számítógépre lehet bízni:

- a polinomokkal és az algebrai törtekkel végzett műveletek;
- bizonyos egyenletek és egyenletrendszerek megoldása;
- a függvények körében végzett alapműveletek, inverz-, illetve kompozícióképzés eredményének (hozzárendelési szabály és grafikon) előállítása;
- véges elemszámú halmazokkal végzett műveletek;
- vektorok, mátrixok, determinánsok körében végzett műveletek;
- az egyenlőtlenségek és egyenlőtlenség-rendszerek megoldásában;
- sorozatok ábrázolásában, monotonitásának és határértékének vizsgálatában;
- függvények határértéke, folytonossága, aszimptotája;
- függvények differenciálhányadosa, a differenciálszámítás alkalmazásai;
- Taylor-polinom; ...

Az utolsó öt szolgáltatást sajnos csak képernyőkivágásokon tudtam bemutatni, mert kiderült, hogy az ingyenes használat nem vonatkozik a tantermi használatra.

Továbbra is fontosnak tartom, hogy a hallgatókat megismertessem a számítógép által elérhető segítséggel, ezért több felhasználóbarát programot ajánlottam és az óráimon a működésüket is bemutattam:

- a Mátrix kalkulátort a mátrix műveletekhez[3];
- a Symbolab nevű szoftvert a függvények határértékéhez[4];
- a függvénygrafikon rajzoló program (Function Grapher and Calculator[5]) segítségével szemléltettem például néhány függvény és az aszimptotájának viszonyát.

4.4. Szemléltetés a Valószínűségszámítás és statisztika tárgyban

A 3 kredites tárgyat előadás nélkül, heti 2 óra gyakorlaton tanítjuk. 8 alkalommal foglalkozunk a valószínűségszámítás témakörével és 4 alkalommal statisztikával. Igyekszünk a megoldandó feladatok szövegét a hallgatók mindennapi életéhez vagy leendő szakmájához illeszteni (pl.: az egyetem melletti pizzaárus által naponta eladott pizzák száma; az alpesi szimentáli és a magyar tarka tehenek napi tejtermelésének összehasonlítása). Továbbá igyekeztem az összetett képletek, szabályok alkalmazásakor rajzos, képi (a Bruner-féle ikonikus szint) szemléltetést mutatni és a hallgatóimat is megtanítani arra, hogy a megoldás lépéseit kövessék szemléltető ábrán. Az egyik leghatékonyabb szemléltetés a visszatevés nélküli mintavételre (4. ábra), a másik a teljes valószínűség tételére, (5. ábra) illetve a Bayes tételre vonatkozott.

A szemléltető ábrát minden hallgató alkalmazta, aki az adott témakörből írt zárthelyi dolgozatban sikeresen foglalkozott a visszatevés nélküli mintavétel, a teljes valószínűség tétele, illetve a Bayes tétellel kapcsolatos feladatokkal.

[3] https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-calculator.html
[4] https://www.symbolab.com
[5] https://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php

Példa: Egy gyufagyárban a percenként készített 1000 gyufa közül a tapasztalatok szerint 8 selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 10 elemű mintában 2 selejtes lesz?

N
(sokaság)

S
(kitüntetett)

$N - S$
(nem kitüntetett)

k
(kitűntetettek közül)

$n - k$
(nem kitűntetet-tek közül)

n
(minta)

kedvező: $\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}$

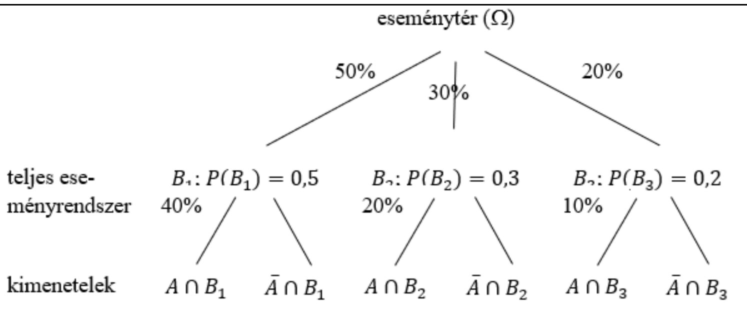
összes: $\binom{N}{n}$

$$P(A) = \frac{\binom{S}{k}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Az A esemény azt jelenti, hogy egy N elemű sokaságból, amelyben S kitüntetett elem van, n elemű mintát veszünk és ezek között k kitüntetett elem lesz.

4. ábra: Visszatevés nélküli mintavétel.

Példa: Az egyetemi büfében a naponta készített pizzák 50%-a sonkás, 30%-a gombás és 20%-a szalámis. A sonkásak 40%-a, a gombásak 20%-a és a szalámisok 10%-a csípős. Mennyi a valószínűsége, hogy csípős lesz, ha véletlenszerűen választok egy pizzát?



valószínűségek

$P(A \cap B_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$

$P(A \cap B_2) = P(B_2) \cdot P(A|B_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$P(A \cap B_3) = P(B_3) \cdot P(A|B_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}28$$

5. ábra: Bayes tétel.

4.5. A Játék és matematika tárgy kidolgozása és bevezetése

Játék és matematika címmel kidolgoztam egy kötelezően választható C tárgyat BSc-s nappali tagozatos hallgatóknak és 2017 óta tartom. A tárgy tematikájával a matematika iránti érdeklődés felkeltését, a matematika tanulásához szükséges gondolkodási módszerek és problémamegoldási stratégiák tudatosítását, valamint a párhuzamosan futó valószínűségszámítás és statisztika tanulmányok segítését (kombinatorikus gondolkodás, esetek azonosítása, leszámolási módszerek) tűztem ki célul.

Az órán játékos módszerek, illetve tényleges játékok szerepeltek. A kombinatorikus alapon tanított valószínűségszámítás feltételezi a helyes kombinatorikus gondolkodást, amit játékosan, illetve játékkal (szavak kiolvasása különböző betűelrendezések esetén, sakktáblán bábuk elhelyezése és lépés lehetőségek, a matematikatörténetben nevezetessé vált problémák, szerencsejátékok, Galton deszka, véges stratégiájú játékok) igyekszem fejleszteni. Bár az általam bemutatott játékok (Bridges, Skyscrapers, ABC View, CalcuDoku) papír - ceruza segítségével is játszhatók, de a tetszetős külsőn túl az azonnali javítás lehetősége, az áttekinthetőség, a teljesítmény – visszajelzés az online változat mellett szól. A játékok a szórakoztatáson túl a matematikai szemlélet formálásában nagyon jól hasznosíthatók. Online logikai feladványok segítségével szinte észrevétlenül hoznak döntéseket és számolnak azok következményeivel, gyakorolják

- a szükséges és elégséges feltétel kapcsolatát;
- a matematikai műveleteket;
- az esetfelsorolást;
- az összefüggések felfedezését;
- a szabálynak megfelelő szituáció felismerését.

A számonkérés részeként egy feladvány megoldását kellett írásban, illetve szóban ismertetni. Az órai és vizsgán való szereplésük alapján megállapítottam, hogy a stratégiai játékokhoz szükséges logikai készségük és az erről való kommunikációs készségük is fejlődött.

A hallgatói visszajelzések szerint élvezték az órákat, különösen az online logikai játékokat.

4.6. E-tananyag összeállítása Matematikai érdekességek címmel

2018-ban egy EFOP pályázat keretében a középiskolások számára matematikából érdeklődésfelkeltő elektronikus tananyagot dolgoztunk ki egy négy fős csoportban [56].

A tananyag fejezetei

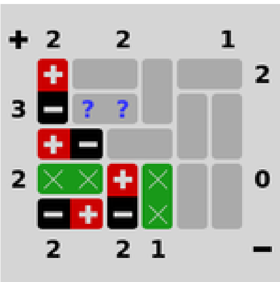
1) Matematikai érdekességek
2) A mértani sorozat és gazdasági alkalmazásai
3) Matematika a természetben
4) Az exponenciális és logaritmus függvény. Műszaki alkalmazásaik
5) Matematikai játékok, játékok matematikája
6) Nevezetes matematikai problémák
7) Matematikai útravaló
8) Záróteszt

Az 5)–8). fejezeteket én dolgoztam ki.

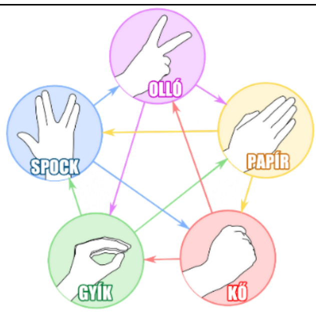
A portálon nyomon követhető a tanulói próbálkozások eredményessége.

A diákok az internetről többféle eszközzel is elérhetik az egyetem e-learning portálján az elkészült tananyagot. (Sajnos csak Neptun kóddal rendelkezők tudnak belépni. A tanulók az iskola közvetítésével kaphatnak kódot.)

A Matematikai játékok, játékok matematikája című fejezetben az interneten is megtalálható online játékokra (Mágnes és Sátrak - Tatham, Szomszédok - Daily Neighbours) vonatkozó hasznos tanácsok (lépésenkénti megoldással) találhatók. Mindegyik játékhoz három, fokozatosan nehezedő feladvány megoldása szerepel.



Forrás: Brain Bashers Daily Neighbours. https://www.brainbashers.com/neighbours.asp (Utolsó megnyitás 2021. 06. 10.)



Kő, papír, olló, gyík, Spock. Forrás: Agymenők rajongói oldal. Kő, papír, olló, gyík. http://bigbangtheory.lapunk.hu/?modul=oldal&tartalom=1195704 (Utolsó megnyitás 2021. 06. 10.)

A kör négyszögesítése. Forrás: http://pic.lol.hu/lolhu_7719447a.jpg (Utolsó megnyitás 2021. 06. 10.)

6. ábra: Képek az E-tananyagból.

A fejezet második része a játékelmélet néhány érdeklődésfelkeltő kérdését, majd a játékelmélet legfontosabb fogalmainak (játék, teljes információjú játék, kétszemélyes zérus-összegű játék, stratégia, Neumann János tétele) magyarázatát tartalmazza, majd a Kő-papír-olló és a Kő-papír-olló-gyík-Spock játékokról esik szó. A négy legfontosabb csapdahelyzet (Fogolydilemma, Nemek harca, Vezérürü, Gyáva nyúl) rövid ismertetésével zárul a fejezet.

A 6. fejezetben a matematikatörténet olyan nevezetes problémáiról esik szó, amelyek középiskolás háttértudással megérthetők (A kör négyszögesítése, Kockakettőzés, Szögharmadolás, A nagy Fermat sejtés, Goldbach sejtés, Négyszínsejtés, négyszíntétel).

Matematikai útravalóként néhány számolást könnyítő trükk, oszthatósági szabály (lehetőség szerint az ismertetett módszer helyességének bizonyításával); néhány matematikatanulási tanács (részfeladat, új ismeretlen, összes eset felsorolása, jó vázlatok) valamint érettségire készülést segítő feladatsor (kombinatorikai és valószínűségszámítási alapötletek, szövegértelmezés, leszámlálási problémák, események függetlensége) szerepel.

A tananyag végén egy online kiértékelésű feladatsor, Záróteszt található.

5. A mesterképzésben bevált didaktikai eszközök

Megfigyelések és tapasztalatok a Műszaki-gazdasági matematika tantárgy 2015-ös, illetve 2018-as tanítása során

Ebben a fejezetben leírok néhány – esettanulmányok során szerzett – tapasztalatot, valamint tartalmi és módszertani javaslatokat teszek a Műszaki-gazdasági matematika tantárgy hatékonyságának növelése érdekében. Az esettanulmányok mindegyikét az akkori Szent István Egyetem Gépészmérnöki Karán az egy félévig tartó Műszaki-gazdasági matematika tárgy keretében, a teljes szemeszteren keresztül végeztem 2015-ben és 2018-ban.

5.1. Műszaki-gazdasági matematika tárgy a menedzserképzésben

A tárgy helyzete országosan

Magyarországon az elmúlt néhány évben a Debreceni Egyetem Műszaki Karán, az Edutus Egyetemen (Tatabánya), a Pannon Egyetem Gazdaságtudományi Karán (Veszprém), a Soproni Egyetem Simonyi Károly Műszaki, Faanyag-tudományi és Művészeti Karán, a Széchenyi István Egyetem AUDI Hungaria Járműmérnöki Karán (Győr), a Szent István Egyetem Gépészmérnöki Karán (Gödöllő) és a Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Karán képeztek Műszaki menedzsereket mesterszakon, levelező tagozaton. A tematikák alapján megállapítható, hogy különböző név hasonló tantárgyat takarhat (2. táblázat).

Intézmény neve	**Tárgy neve**	**Óraszám ea/gy/labor**		**Kredit**
		Heti	**Féléves**	
Debreceni Egyetem Műszaki Kar	Kvantitatív módszerek	1/1/0	26	5
Edutus Egyetem	Operációkutatás műszakiaknak	5/10/0 (félévente)	15	5
Pannon Egyetem Gazdaságtudományi Kar	Operációkutatás II.	2/0/0	26	2
Soproni Egyetem Simonyi Károly Műszaki, Faanyag-tudományi és Művészeti Kar	Műszaki számítások	18/félév 6*(1/2/0)	18	3
	Kvantitatív módszerek	1/1/0	26	5
Széchenyi István Egyetem AUDI Hungaria Járműmérnöki Kar	Matematikai modellek és módszerek		15	
Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar	Műszaki-gazdasági matematika		16	6
Szegedi Tudományegyetem Mérnöki Kar	Műszaki-gazdasági matematika	1/1/0	26	4
	Operációkutatás	1/1/0	26	4

2. táblázat: A hasonló képzések áttekintése a műszaki menedzser mesterképzésben.

A képzésben a Matematika Tanszékek által oktatott tárgyak féléves óraszámai 15 és 26 között mozognak, egy-egy tárgy kreditértéke 2 és 6 között változik Operációkutatás (3), Kvantitatív módszerek (2), Műszaki-gazdasági matematika (2), Műszaki számítások, Matematikai modellek és módszerek címmel. Két helyen két tárgyat is oktatnak. Az intézmények többségében nagyobb óraszámban oktatott témák az Operációkutatás, illetve a Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Kisebb óraszámban oktatott témák a Gráfelmélet, a Játékelmélet, a Döntéselmélet, az Excel használat, a Differenciálegyenletek és a Vektoralgebra. Átfedések is vannak az egyes tantárgyak (fizika, informatika, ...) között, az egyes tananyagok nemcsak matematikából szerepelnek a tantervben.

Megállapítható, hogy a tárgy tematikája megfelel az országosnak, de az óraszám a legalacsonyabbak közé tartozik.

A tárgy helyzete az akkori SZIE Gépészmérnöki Karán

A nappali, illetve a levelező tagozatosak számára meghirdetett Műszaki-gazdasági matematika tantárgy Neptun kódja SGMMAX02XMN és SGMMAX02XML. A két tárgy követelményrendszere közös (6. melléklet 132. o.):

„A tárgy legfőbb célja a korábbi matematikai tárgyakra építve olyan további alapvető matematikai és statisztikai ismeretek átadása, amelyek – a műszaki tárgyak matematikai igényén túlmenően – a műszaki menedzsment területén szükséges legfontosabb döntéstámogatási modellek alkalmazását segítik. Kiegészítő ismeretek az analízis, a közönséges differenciálegyenletek és a közgazdaságtani modellek területén. A tárgy további célja újabb készségek kialakítása a szerzett ismeretek számítógépes alkalmazásában. A tantárgy a műszaki-gazdasági területen a problémafeltárást megalapozó matematikai ismereteket ad át. Erősíti a hallgatók problémamegoldó technikáit, fejleszti az elemző és döntéshozó készségüket, az egzakt fogalmi és algoritmikus gondolkodásukat."

Részlet a tantárgyi ismertetőből MGM tárgyleírás 2015[6].

[6] A Neptun tanulmányi rendszerben oktatók, illetve hallgatók számára érhető el.
A szak akkreditációs dokumentuma 2017. https://www.gek.szie.hu/muszaki-menedzser-msc (Utolsó megnyitás 2020. 01. 31.)
Műszaki-gazdasági matematika tárgyleírás, 2015. https://www.gek.szie.hu/node/1497 (Utolsó megnyitás 2020. 01. 31.)

A Műszaki-gazdasági matematika tárgyra vonatkozó preferenciáim

A tematikában rögzített matematikai ismeretek átadásán túl a kompetenciamotiváció és az Európai kulcskompetenciák [2] fejlesztése is fontos cél volt. A tananyaghoz kapcsolódóan természetes módon adódik számos matematikai és matematikán kívüli kompetencia fejlesztésének lehetősége. A tantárgyi követelmények ismeretében olyan módszereket kerestem, amelyekkel az órákon és az egyéni felkészülés során támogathatók a hallgatók kompetenciamotivációjának legfontosabb összetevői és a kompetencia megszerzése. A matematikai ismereteken túl a matematika tanulásával közvetlen kapcsolatban levő egyéb kulcskompetenciákra is gondolva az alábbi kompetenciák fejlesztését tűztem ki célul [51].

I. A matematikai tartalmat, a problémafeltárást megalapozó matematikai ismereteket, problémamegoldó technikákat, az elemző és döntéshozó készséget, a fogalmi és algoritmikus gondolkodást illetően:

I. a) Lineáris programozás (LP)
LP1 optimumkeresés lineáris programozással
LP2 a szimplex módszer táblázata
LP3 a szimplex módszer alkalmazása
LP4 a Leontief-féle input-output modell értelmezése és alkalmazása

I. b) Gráfelmélet (GE)
GE1 az Euler-vonal a gyakorlatban
GE2 a Hamilton-kör a gyakorlatban
GE3 a gráf minimális feszítőfájának megkeresése
GE4 a legrövidebb út megkeresése

I. c) Játékelmélet (JE)
JE1 mátrix játék megoldása tiszta stratégiával
JE2 mátrix játék megoldása kevert stratégiával
JE3 bimátrix játék megoldása tiszta stratégiával
JE4 bimátrix játék megoldása kevert stratégiával

I. d) Differenciálegyenlet (DE)
DE1 differenciálhányados, deriválási szabályok
DE2 integrálási szabályok
DE3 differenciálegyenlet
DE4 differenciálegyenlet típusok, megoldási eljárások

II. A matematikatanulási folyamat számára fontos és a matematika által is fejleszthető úgynevezett kulcs- vagy általános matematikai kompetenciák (ÁK):

ÁK1: szövegértés, szövegértelmezés
A feladat, probléma kitűzésekor elengedhetetlen a szövegértés, az új matematikai ismeretek pedig hozzájárulnak a későbbiekben a szabatos szövegértelmezéshez.

ÁK2: számolási, számítási készség
A kompetencia tartalma a matematikatanulás folyamán végig változik. Például az algebrai törtek, gyökvonás, hatványozás középiskolai anyag. Az egyetemen feltételezzük ezek ismeretét és hiányuk megakadályozhatja a munkát [4].

ÁK3: ismert definíció, tétel, eljárás helyes alkalmazása
Az elnevezés, az azonosító tulajdonságok és az érvényességi kör felidézése, valamint azok kritériumszerű alkalmazása.

ÁK4: szabálykövetés
Felismeri, értelmezi és alkalmazza a szabályt. (Például összetett algoritmus alkalmazása).

ÁK5: feladattartás
A kitűzött feladat kitartó, céltudatos megoldása, összpontosított tevékenységgel, „a matematika fegyelmez”.

ÁK6: kommunikáció a matematikáról, illetve a matematika segítségével
(a gondolatok pontos kifejezése, íráskészség, helyesírás, áttekinthető íráskép).

ÁK7: a mindennapi élettel való kapcsolat keresése és felismerése

ÁK8: kreativitás
Önálló változatok, megközelítési módok felkutatása és kihasználása a problémamegoldásban.

Az egyes számonkérési módok elemzése során arra is kitérek majd, hogy mely kompetenciák meglétét tételezik fel az egyes kérdések, hogyan viszonyulnak ezekhez a preferenciákhoz.

5.2. Az esettanulmány körülményei

A populáció bemutatása

2015-ben és 2018-ban a Műszaki-gazdasági matematika tantárgyat tanítottam műszaki -menedzsereknek mesterszakon. A tárgyat 2015-ben 48, 2018-ban 52 nappali és levelező tagozatos hallgató vette fel. Hallgatóim többségében levelező tagozatosok voltak. Hallgatóink különböző intézményekben végezték a BSc tanulmányaikat, így különböző előismeretekkel kerültek hozzánk.

A 2018-as évfolyam összetételét és matematika iránti érdeklődését egy kérdőívvel is megvizsgáltam (3. táblázat).

A kérdőív eredménye egybeesik a több évtizedes személyes tapasztalatommal: a Műszaki-gazdasági matematika tantárgyat felvevő mesterszakos hallgatók többsége (85%) már szerzett felsőfokú képesítést és évek óta dolgozik, munka esetleg család mellett végzi tanulmányait, amihez szorosabb időbeosztás, felelősségteljes hozzáállás szükséges. Az alapképzés óta viszonylag rövid idő telt el, tudásuk frissnek mondható.

Munkahelyi tapasztalatuk alapján pontosabb elképzeléseik vannak a szakma elvárásairól, a tanultak hasznosíthatóságáról és ilyen típusú tudást vártak el a képzéstől. A matematika fontosságát és hasznosságát megtapasztalták az alapképzés során, sokan személyesen is érdekesnek tartják.

hány éves	22–42-ig	átlag: 26	medián: 25
hány évesen szerezte a BSc-t	22–33-ig	átlag: 24	medián: 24
a matematikát érdekesnek tartja	79%		
a matematikát fontosnak tartja	100%		
a matematikát hasznosnak tartja	97%		

3. táblázat: A 2018-as évi kérdőív (a 100% 52 főt jelent).

Az oktatás blokkosítva folyt, 4 hónapon át, havonta egy alkalommal tartottam foglalkozást. Egy foglalkozás 2015-ben 5, 2018-ban 4 matematika órából állt. A hallgatók két alkalom között végezték a mindennapi feladataikat a munkahelyen és a családban. Így munkahelyi tapasztalatuk alapján pontosabb elképzeléseik vannak a szakma elvárásairól, a tanultak hasznosíthatóságáról. Különösen fontosnak tartottam, hogy (akár közvetlenül is) megtapasztalják, hogy hasznosítható ismereteket kapnak. Ezt szolgálják az általuk ismert szituációba helyezett reális kérdésfelvetések, az énkép megerősítését szolgáló számonkérési és visszajelzési módok.

A tananyag kiválasztása, elrendezése és a fókuszpontok elhelyezése

A tárgy tematikája a lineáris programozás, gráfelmélet, játékelmélet és differenciálegyenletek témaköröket tartalmazza.

A tananyag kiválasztásával, elrendezésével, feldolgozásával igyekeztem felkelteni és ébren tartani a hallgatók érdeklődését, megkönnyíteni a tananyag megértését és tartós bevésését. A 2015-ös és a 2018-as félévben megfigyeltem, hogy ez lehetséges-e a matematikai tartalom sérülése nélkül.

Az egyes témakörökben feldolgozott konkrét tananyag kiválasztásában és a fókuszpontok elhelyezésében Schweiger [34] fundamentális elveit iránytűként használtam. Az érintett témakör standard feladatait olyan szituációba helyeztem, amely közelebb viszi az érintett matematikai fogalmat, eljárást, módszert a hallgatók mindennapi életéhez, munkájához (humán dimenzió).

A tárgy tananyagának túlnyomó része az operációkutatás területéhez tartozik, amelynek didaktikai jelentőségét – a matematikai kompetenciák fejlesztésére való alkalmasságon túl – történeti és alkalmazási szempontok is növelik. Az operációkutatás kidolgozása a második világháború elején kezdődött. Az Egyesült Államok hadserege létrehozott egy kutatócsoportot a katonai operációk matematikai megalapozására. Innen származik a terület elnevezése, az operációkutatás (Operations Research). A csoport tagja George Dantzig újraalkotta a lineáris programozási modellt és hatékony algoritmust adott, a szimplex módszert (történeti dimenzió [34]). Az operációkutatás területén számos magyar kutató is világhírre tett szert. Példaként említem Kőnig Dénes, Egerváry Jenő, Prékopa András, Erdős Pál, Lovász László nevét.

A lineáris programozás témakörében elsősorban a történeti és alkalmazási szempontokat hangsúlyoztam. A kétváltozós lineáris programozási feladatok megoldásához a grafikus módszert használtuk. Ez a szemléletes módszer a hallgatók koordinátageometriai ismereteire támaszkodik, ezáltal a régi ismeretet magasabb szintű probléma megoldására használtuk.

Érdemes rámutatni a módszer eredményességének matematikai hátterére. Az eltérésváltozók használata megkönnyíti a probléma leírását és megoldását. Azok használata nélkül egyenlőtlenségrendszer, használatukkal egyenletrendszer megoldásával dolgozunk. Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy az eltérésváltozó tetszőleges valós szám lehet ugyan, de a megoldás a feladat szövegéből eredően más számhalmazra korlátozódhat.

A gráfelmélet nagyon alkalmas arra, hogy a hallgatók kevés új fogalom és szabály megismerésével egyre bővülő problémamegoldási gyakorlatra tegyenek szert.

Az ismeretek és eljárások rögzítését és előhívását a képi és a szimbolikus ábrázolási módok párhuzamos használatával segítettem.

A Königsbergi hidak problémájával kezdtünk, amely a gráfelmélet kialakulásában is nagy jelentőségű (Leonhard Euler 1736, történeti dimenzió). Ez a probléma arra is alkalmas, hogy a hallgatók egy hétköznapi kérdésből kiindulva jussanak el matematikai fogalmakhoz és meggondolásokhoz.

Rajzoltunk borítékot, ahonnan egyenes út vezetett az Euler-vonalhoz (a konkrét tevékenységtől az absztrakt matematikai fogalomig vezető út érzékeltetése). Szántunk néhány percet a végtelen gráfokra való kitekintésre is (vertikális dimenzió).

Megismerkedtünk a gráfelmélet néhány alkalmazásával (minimális feszítőfa megkeresésére, legrövidebb út megkeresésére). Azt is feladatomnak tekintettem, hogy a hallgatók a mindennapi életükből keressenek alkalmazásokat (úthálózat, elektromos hálózat, postaszolgálat, riadólánc…). Kitekintésként utaltunk néhány egyéb alkalmazásra is (számítógép tudomány, elektrotechnika, robotika, pszichiátria, kapcsolatrendszer a közösségi médián). A témakör feldolgozása közben nemcsak az ismeretek bővültek, hanem gazdagodott a megoldáshoz használt matematikai eszközök, reprezentációk köre is. Például bevezettük a gráfok szomszédsági mátrixát, táblázatba rendezve végeztük el a Dijksra algoritmus egyes lépéseit. (Erre szükség volt, mert a gráf egyre kevésbé áttekinthető lett).

A minimális feszítőfa megkeresésére a Prim-algoritmust választottam, hogy a kevésbé felkészült diákok is megtapasztalhassák az egyszerű eljárás hatékonyságát. Csúcsonként haladva építjük fel a fát minden egyes lépésben a lehető legolcsóbb élt vesszük hozzá. Egy-egy választásnál hangsúlyozni kell az egyenértékűséget, mert a hallgatóknak kevés korábbi tapasztalatuk van elágazó matematikai megoldásokról. Példaként fontos láncra és elágazó fára vezető eseteket is bemutatni. A teljes eljárást az időigényesség és az összetettség miatt 10-nél több csúcsot tartalmazó gráfra nem érdemes végrehajtani.

A legrövidebb út megkeresésére a Dijkstra-algoritmust használtuk, mert irányított és nem irányított súlyozott gráfokra egyaránt használható. A kiindulópontból csúcsonként haladva építjük fel a végponthoz vezető legrövidebb utak fáját. Feladatainkban kevés csúccsal, pozitív fokszámokkal dolgoztunk.

A játékelmélet témakör tananyagát a megelőző kurzusokhoz képest jelentősen átalakítottam, új feladatlapokat készítettem, alkalmazások irányába kibővítettem [62].

A játékelmélet iránti érdeklődés felkeltését szolgálhatja az is, ha szólunk annak magyar vonatkozásairól és a magyar matematikusok nemzetközi sikereiről.

A játékelmélet alapjait Neumann János fektette le 1928-ban, önálló elméletként pedig 1944-ben született meg, amikor Neumann János és az osztrák Oskar Morgenstern együtt megírták és kiadták könyvüket [64].

Harsányi János 1967 és 1968 között fejtette ki legfontosabb gondolatait, elsősorban ezek miatt kapta meg később a Nobel-díjat is. Harsányi különböztette meg először a ma ismert formában a kooperatív és a nem kooperatív játékokat. Ő alkotta meg a korlátozott információjú, a tökéletlen információkra alapozott játékelméletet, melyben a vetélkedő játékos csak korlátozott mértékben ismeri ellenfele célját és az ellenfél rendelkezésére álló stratégiai eszközeit.

Azóta a játékelméleti megközelítési mód megváltoztatta a közgazdaságtani és politikai gondolkodás alapjait. Például a nemzetközi leszerelési tárgyalásokon, a szovjet-amerikai nukleáris elrettentésben, az olajmezők licenszeinek állami árverésein, a rádiós- és televíziós frekvenciák kiosztásain.

A hallgatóknak is igyekeztem megmutatni, hogy a játékelmélet az élet számos területén felbukkanó problémák, döntési helyzetek modellezésére is alkalmazható, amiről nem is gondolnánk, hogy köze lehet a matematikához.

A játékelmélet oktatásánál nagy előny, hogy számos esetben a probléma kezeléséhez alkalmas matematikai modell újabb matematikai apparátus nélkül, józan meggondolás alapján felállítható és a válasz a négy alapművelet ismeretében megadható akár a matematikából, akár a mindennapi életből ered a probléma.

A mindennapi problémák vizsgálata mellett szól, hogy nem pusztán egy számítás végeredményét keressük, hanem a hallgató számára konkrét tartalommal rendelkezik az eredmény, így kíváncsi is rá, ami nagy hajtóerő.

A megismert modellek haszna bemutatható olyan problémákon, amelyek az élet teljesen különböző részéről származnak, de ugyanazzal a matematikai modellel kezelhetők.

- Két ember versengése ugyanazon állásért:
  A „játékosok” lehetséges stratégiái a nyelvtanulás, a számítógépes ismeretek fejlesztése, vezetői tanfolyam elvégzése vagy MSc képzés. A választást az egyes stratégiapárok esetén várható nyereség határozza meg.
- Két áruházlánc versengése a vevőkért:
  Vevőcsalogató lehet az ingyenes parkolás, illetve ingyenes bevásárló szatyor biztosítása, hosszabb nyitvatartás vagy törzsvásárlói kártya kibocsátása kedvezményekkel. A választást az egyes stratégiapárokhoz tartozó vásárlói érdeklődés határozza meg.
- Két politikai párt versengése a szavazatokért:
  Szavazatszerző ígéret lehet az oktatás fejlesztése, az egészségügy állapotának javítása, a nyugdíjemelés vagy a kisvállalkozások támogatása. A stratégiapárok sikeressége a szavazók érdeklődésétől függ.

A 2015-ös kurzus játékelmélet fejezetének tanmenete és óravázlatai didaktikai megjegyzésekkel a Dékány [62] cikkben olvashatók. Ebben rámutatok, hogy feltétlenül szerepeltetni kell olyan feladatot, ahol

- egyetlen tiszta optimális stratégiapár van és az első játékos nyeresége nem nulla;
- a játék igazságos;
- több tiszta nyeregpont van (felcserélhetőségi és ekvivalencia tulajdonság szemléltetése).

Az eljárás lényegét jobban megmutatja, ha ellenőrizzük az optimális stratégiától való egyoldalú eltérés következményeit.

A bimátrixjáték tanítása közben

- megmutatható, hogy a dominancia elv segítségével csökkenthető a mátrix mérete, a feladat megoldása technikailag könnyebbé válik.
- példát adhatunk a matematikai fogalmak különböző reprezentációira (mátrixmodell, stratégiapár rendezett számpár alakban).
- nézőpontváltás szükséges (A két játékosnak két különböző nyereségmátrixa van, így az ugyanazon stratégiapárhoz tartozó nyereséget nem ugyanabból a mátrixból kell az egyik, illetve a másik játékos szempontjából kiolvasni).

A matematikai modellalkotás természetes gyakorlására ad módot a kooperációs és a koordinált játékok modelljének felismerése a minket körülvevő világban.

A fogolydilemma (Prisoner's dilemma, 2015) tárgyalása közben a matematikatörténeti érdekességen túl (a fundamentális elvek idődimenziója) arra is rámutathatunk, hogy

- az emberek sokkal inkább hajlanak a kooperációra, mint az a „racionális” modell alapján várható lenne, az embereknek előzetes információjuk is van;
- ez a társadalom és a gazdaság számos problémájának prototípusa (a fundamentális elvek horizontális dimenziója);
- a kérdésnek erkölcsi tartalma is van (a fundamentális elvek emberi dimenziója).

A differenciálegyenletek témaköre különösen alkalmas arra, hogy ugyanazon matematikai modell sokoldalú felhasználhatóságát bemutassuk. Newton és Leibniz munkássága alapján lehetővé vált a fizikában, mérnöki tudományokban (például szabadesés légellenállással, elektromos áramkörök, pontszerű test hőmérséklet-változása, a hővezetés egyenlete), a közgazdaságtanban felmerülő problémák (a klasszikus és a neoklasszikus növekedéselmélet, gazdasági modellek stabilitási vizsgálata, akcelerációs modellek) differenciálegyenletben való megfogalmazása és azok megoldása. A téma alkalmas a matematikai modellalkotás két irányának bemutatására is. A mennyiség és a változása közötti kapcsolatot vagy megfigyeljük, vagy elméleti modell alapján feltételezzük. Newton II tétele az egyik modellben törvény, a másikban axióma.

A differenciálegyenletek anyagrészből nagyon különböző volt a hallgatók előismerete, ezért megkérdeztem a hallgatókat, ki melyik tanulási módszert támogatja az alábbi a), b) és c) lehetőségek közül. A lehetőségeket és a szavazatokat a 4. táblázat mutatja.

	Lehetőségek	**Szavazatok megoszlása**
a)	önállóan átnézik a kitűzött tananyagot	2
b)	a tananyag kiegészítése tanári magyarázattal élőszóban	16
c)	élőszavas tanári magyarázat és közösen megoldott gyakorló feladatok	30

4. táblázat: A választott munkamódszer.

Amint vártam, a többség hatékonyabbnak gondolta a kontakt órát. Így a közös gyakorlást választottam.

A közönséges differenciálegyenletek típusaira és azok megoldási módszerére helyeztem a hangsúlyt. Egyrészt arra gondolva, hogy a későbbi tantárgyak keretében hitelesebb és valódi alkalmazási területeket ismerhetnek meg, másrészt apparátust, eszközt szerettem volna biztosítani, hogy az alkalmazások megértésében ne legyenek matematikai problémáik.

Bemutattam, hogy a Wolfram Programming Lab webes alkalmazás segítségével hogyan lehet az általuk tanult differenciálegyenlet típusokat megoldani.

A probléma megoldását megkönnyíti, ha az elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet megoldásának lépéseit algoritmusszerűen végezzük (feladattartás, szabálykövetés). A differenciálegyenlet sikeres megoldásában nagy jelentősége van a számolási készségnek, a fordított irányú gondolkodásnak, a figyelemnek és a pontosságnak.

5.3. A tanulást támogató módszerek és eszközök

Tájékoztató anyagok az egyetem hivatalos e-learning portálján

A hallgatóknak szóló hivatalos információk között hagyományosan megtalálható

- az aktualizált tantárgyleírás (6. melléklet 132. o.),
- a korábbinál bővebb kötelező és ajánlott irodalom jegyzéke (esetenként maga az irodalom is),
- a feladatok megoldásához szükséges egyre bővülő informatikai segédeszközök elérhetősége,
- a konzultációs időpontok.

A korábbinál bővebb formában tettem elérhetővé a teljesítmény-visszajelzési adatokat (dolgozatok, beadandó házi feladatok teljesítését és a kapott pontszámokat).

A kötelező tartalmakon túl elérhetővé tettem számos oktatási segédanyagot pdf formátumban:

- a tananyagnak az órai anyagnál részletesebb leírása,
- a tananyaghoz tartozó kitekintés, alkalmazások,
- önellenőrzést segítő munkalapok,
- zárthelyi minta és megoldási segédlet.

A tanulás támogatására használt informatikai eszközök és programok

A hallgatók számára igyekeztem követhetővé, szemléletesebbé és interaktívabbá tenni a tanulási folyamatot. Leggyakrabban az órai prezentációt, animációkat, szimulációkat használtam.

Többféle reprezentáció alkalmazása

- Vizuális szemléltetés, a kifizetőmátrix
  A kifizetőmátrix bevezetésével például vizuálisan is érzékeltettem a stratégiapárok és a nyeremények kapcsolatát. Ez jelentősen növelte az áttekinthetőséget és a megoldások megbeszélése közben segített egyértelművé tenni a mondanivalót.
- Egyenletek és egyenlőtlenségek szemléltetése grafikusan
  A vizualizálás jelentősége az alkalmazott eszköztől (papír-ceruza, grafikus kalkulátor, telefonos alkalmazások, táblázatkezelők, komputeralgabrai rendszerek stb.) függetlenül jelentős a szélsőérték számításban, lineáris programozásban, játékelméletben, …
- Optimumkereséskor a GeoGebra szoftver segítségével szemléltettem, hogy az optimum egyenlőtlenség-, illetve egyenletrendszerek megoldásával is elérhető.
- Egyenletek és egyenlőtlenségek mátrixos alakban

Ha egy kétszemélyes játékban mindkét félnek két választási lehetősége van és a játékosok egyes számú stratégiáinak valószínűségét tekintjük változónak, akkor a nyereség maximalizálásához felírt egyenlőtlenséget vagy egyenlőtlenség-rendszert reprezentálhatjuk mátrixos alakban. Ez is növeli az áttekinthetőséget.

Órai prezentáció

Az órákon pdf formátumú állományt vetítettem ki. A fájlba előzetesen beépítettem a bemutatandó animációk, szimulációk és egyéb alkalmazások linkjeit, így ezek bemutatása zökkenőmentesen történt. A kivetített szöveghez fűztem magyarázatot.

A pdf állományt és a kapcsolódó animációkat és szimulációkat hozzáférhetővé tettem az e-learning portálon.

Annak a módszernek, hogy az óra anyaga elérhető komoly hátránya, hogy az ismételt tanulás irányába tereli a hallgatókat. A pillanatnyi gondjaikkal foglalkoznak, mivel tudják, hogy később is hozzáférhetnek az anyaghoz. Mégis az óra anyagának hozzáférhetővé tétele mellett döntöttem számos előnye miatt. Ha valamit hiányosan vagy hibásan jegyzetelt a hallgató, akkor később pótolhassa, kijavíthassa. A hiányzók, illetve valamilyen okból akadályoztatottak később is hozzáférhessenek az óra anyagához.

Excel munkalap

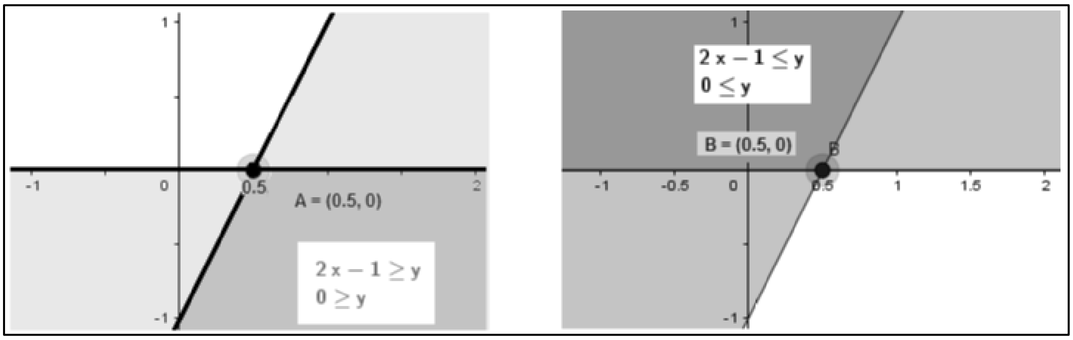
A szimplex módszer lépéseit Excel munkalapon elkészített mintamegoldás segítségével demonstráltam az órán. A munkalapot a hallgatók számára is hozzáférhetővé tettem, hogy tudatosuljon bennük, hogy melyik Excel parancs milyen változtatást eredményez az adatállományon. Az Excel mellett szól, hogy szinte minden hallgató ismeri, több platformról is elérhető és a vizualizálás és interaktivitás irányába kiterjeszthető (grafikus ábrázolások, videofelvétel).

Univerzális segédeszközöm a GeoGebra dinamikus geometriai szoftver

Ingyenes, magyar nyelvű, számos platformon használható program, amelyen párhuzamosan megfigyelhető az analitikus (CAS) és 2-, illetve 3-dimenziós szintetikus ablak. Saját készítésű és mások által publikált munkalapok is használhatók. A Geomatech projektnek köszönhetően egyre bővül a felhasználható interaktív munkalapok száma.

Ez különösen hasznos volt a játékelméletben, ahol párhuzamosan megfigyelhető volt a folyamat az egyik, illetve a másik játékos nézőpontjából.

A kevert stratégiájú játék szemléltetésére a 2D változat is alkalmas. Tegyük fel, hogy az első játékos $(p, 1-p)$, a második játékos $(q, 1-q)$ valószínűséggel keveri az egyes stratégiáit. A játékosok nyereségét két lineáris egyenlőtlenség rendszer írja le, és a szimmetria miatt a megoldás $p = q = 0{,}5$. (7. ábra)



7. ábra: Geogebra munkalap kevert stratégiájú játékhoz.

Mátrixkalkulátor

A mátrix műveletek elvégzéséhez a Matrix Calculator nevű webes alkalmazást használtuk[7]. Ennek előnye, hogy a webes formátum miatt minden platformon elérhető és használható. A program használata semmiféle informatikai előismeretet nem igényel, megjelenése áttekinthető, igazán felhasználóbarát. A kiegészítő ismeretekhez (indoklások, ellenőrzések) angol nyelvismeret szükséges.

Solve a Bimatrix Game

A bimátrix játék megoldásához a „Solve a Bimatrix Game” weboldalt használtuk[8]. Ez az alkalmazás (vagy a hozzá hasonlóak) kiváltják a viszonylag sok numerikus számítást és az eredmény értelmezésére koncentrálhatnak a hallgatók. Bár a weboldal angol nyelven íródott, egy rövid magyar nyelvű ismertetővel fel lehet készíteni a hallgatókat a használatára. A weboldalra Tóth I. János könyve [61] hívta fel a figyelmemet.

[7] https://www.mathsisfun.com/algebra/matrix-calculator.html
[8] http://banach.lse.ac.uk/ [60]

Solution Page

Please check that the matrices displayed below are as you intended. If not please go back and re-enter the

```
3 x 3 Payoff matrix A:

  -1   1   1
  -1  -1   1
  -1  -1  -1



3 x 3 Payoff matrix B:

  1  -1  -1
  1   1  -1
  1   1   1

EE = Extreme Equilibrium, EP = Expected Payoff

Decimal Output

  EE  1  P1:  (1)  0.000000  0.000000  1.000000  EP=  -1.0  P2:  (1)  1.000000  0.000000  0.00
  EE  2  P1:  (2)  0.000000  1.000000  0.000000  EP=  -1.0  P2:  (1)  1.000000  0.000000  0.00
  EE  3  P1:  (3)  1.000000  0.000000  0.000000  EP=  -1.0  P2:  (1)  1.000000  0.000000  0.00

Rational Output

  EE  1  P1:  (1)  0  0  1  EP=  -1  P2:  (1)  1  0  0  EP=  1
  EE  2  P1:  (2)  0  1  0  EP=  -1  P2:  (1)  1  0  0  EP=  1
  EE  3  P1:  (3)  1  0  0  EP=  -1  P2:  (1)  1  0  0  EP=  1

Connected component 1:
{1, 2, 3}  x  {1}
```

8. ábra: Bimatrix Game.

Redmenta feladatlapkészítő alkalmazás

Magyar fejlesztésű, magyar nyelvű, ingyenes program. Kifejezetten oktatási célra fejlesztették, számos pedagógiai cél teljesítését megkönnyíti. Egyetlen hallgatónak sem okozott technikai gondot a Redmentában kitűzött feladatok megoldása és beküldése.

Azért választottam a hasonló programok közül (Kahoot!, LearningApps, Quizlet…) éppen ezt, mert:

- változatos feladattípusok (egy jó válasz, több jó válasz, eldöntendő, rövid válasz, kifejtős, párosítós, sorbarendező),
- már meglévő feladatlapok rugalmas átdolgozási lehetősége,
- ugyanannak a feladatlapnak személyhez, illetve csoporthoz való hozzárendelése,

- időzítés – beállíthatjuk a kitűzés időpontját, a feldolgozás időtartamát, a hozzáférés időintervallumát személyre vagy csoportnak szólóan (az intervallum megválasztásával alkalmazkodni kell a levelezős hallgatók időbeosztásához),
- ponthatárok beállítása, akár közvetlen osztályozás (a rövid válaszos és a kifejtős feladatok kivételével online értékelést ad),
- az eredmények (elért pontszám, százalékos teljesítés, felhasznált idő) regisztrálása részben a tanár, részben a diák számára.

A diák feladatonként láthatja, hogy helyes vagy helytelen választ adott-e az egyes kérdésekre és mi lett volna a helyes válasz. Módszertanilag nagy előny, hogy a kérdés és a helyes válasz együtt látható a visszajelzésnél. Lehetőség van arra is, hogy a diák értékelje az egyes feladatokat 0–5-ös skálán.

Matematikai alkalmazás szempontjából a program hátránya, hogy a matematikai szimbólumokat és ábrákat képként kell bevinni, és ez nem valósítható meg a felkínált válaszokban. Ezáltal el kell választanunk a választ annak tartalmától.

Wolfram Programming Lab webes alkalmazás

A differenciálegyenletek megoldásakor az is hasznos, ha megtudjuk, a matematikai modell milyen megoldásokat szolgáltat, mert így a megoldások értelmezésére koncentrálhatunk. Ebben segít ez a webes alkalmazás[9].

Tudáspróba típusú feladatlapok

A hallgatók számára már az általános iskolából ismert munkaeszközt alkalmaztam a teljesítmény-visszajelzés támogatására. A feladatlapokhoz megoldási útmutatót is készítettem, amelyek mélyebb, részletesebb magyarázatot tartalmaznak, mint általában a példatári megoldások (megoldási ötlet, végeredmény). A válaszok orientálják a hallgatókat a megoldás leírásával kapcsolatos tartalmi és formai követelményeiről.

A megoldást, néha a feladatot is kis lépésekre, gondolati egységekre bontottam. A lépésekhez általában kétféle segítséget adtam, az eredményt, illetve megoldási segítséget. Azoknak, akik önállóan meg tudják oldani a részfeladatot, elegendő, hogy ellenőrizhessék az eredményt. Akik nem boldogulnak a részfeladattal, azoknak rávezető kérdés, elindulási ötlet, elméleti tudnivaló könnyíti a továbbhaladást.

---

[9] https://lab.open.wolframcloud.com/objects/wpl/GetStarted.nb

Még ezekben a „kis” gondolati egységekben is bőven van szövegértési, szövegértelmezési, matematikai, algoritmikus… tudnivaló.

A hosszabb feladatok egymásra épülő lépésekre bontásával igyekeztem mintát adni arra, hogyan lehet egy problémát részproblémákra, gondolati egységekre bontani és az egyszerűbb, közvetlen kérdéseket megfogalmazni és megválaszolni.

A hallgató a tudáspróba típusú feladatlap megoldása közben

- megismer egy-egy célszerű megoldási módszert;
- pozitív visszajelzést, illetve figyelmeztetést kap, szembesülhet a részfeladatok megoldásához szükséges ismeretek birtoklásáról vagy hiányáról;
- új ismereteket szerezhet, eljárásokat gyakorolhat be;
- meggyőződhet bizonyos ellenőrzési módok hatékonyságáról;
- fennmarad az érdeklődése, mert nem arra helyezzük a hangsúlyt, hogy mit nem tud, hanem arra, hogy mit sajátított el eredményesen.

Mind a négy témához készítettem tudáspróbát. Azoknál a témaköröknél, amelyek tartalmát nem változtattam meg lényegesen, a feladatlapokhoz felhasználtam a korábbi kurzusok (az elődöm által összeállított) feladatanyagát. A Mellékletek című fejezetben egy-egy példán mutatom be a tudáspróba szerkezetét a lineáris programozás (7. melléklet 134. o.), a gráfelmélet (8. melléklet 138. o.) és a differenciálegyenletek témakörben (9. melléklet 140. o.).

A játékelméletből a teljes tudáspróbát bemutatom, mivel a témakör anyagát jelentősen átdolgoztam (10. melléklet 141. o.).

A tiszta nyeregponttal rendelkező bimátrix játék azért fontos, mert a megoldásához más stratégiát kell használni, mint amit a mátrix játékoknál használtunk (nem nullösszegű).

A tudáspróba anyagából kihagytam azokat a részeket, amelyeket célszerűbb számítógépes alkalmazások segítségével megoldani, továbbá amit nem szándékoztam a vizsgán közvetlenül számonkérni. Ilyen például a vegyes stratégiájú bimátrixjáték. A bimátrixjáték gondolati tartalmának megértését más feladatokon is ellenőrizhetjük. Például a vegyes stratégia fogalmának megértése a mátrixjátékok megoldásából is mérhető.

Didaktikai megjegyzések a lineáris programozásra vonatkozó tudáspróbából – a szimplex módszerről

A lineáris programozás témakör fontosabb fogalmai és problémakezelési módja a szimplex módszer alkalmazásával megmutathatók.

- A megoldás jelentős részben a szöveg értelmezésén múlik (szövegértési kompetencia). A matematikai modell elkészítéséhez elengedhetetlen a fogalom pontos ismerete.
- A probléma a matematikai modellen egy tanult algoritmus pontos végigvitelével oldható meg (szimplex módszer, szabálykövetési kompetencia).
- A feladat sikeres megoldásában nagy jelentősége van a számolási készségnek.
- Fontos a rendszerezett, áttekinthető íráskép, a figyelem és a pontosság. (feladattartási kompetencia).
- Egy algoritmus pontos végigkövetésének képessége a matematikai eredményen túl a szociális és állampolgári kompetencia része.
- A hosszú számolási lánc végén különösen fontos az eredeti szöveghez való visszatérés, hiszen ennek alapján dönthető el az eredményről, hogy reális-e (a téma kapcsolata a mindennapi élettel). Például lehet-e törtszám az eredmény vagy egész számnak kell lennie.

Didaktikai megjegyzés a gráfelméletre vonatkozó tudáspróbából – a minimális feszítőfa megkeresése

Azért választottam 7 pontú gráfot, mert elég összetett ahhoz, hogy minden döntéshelyzet előálljon, és elég egyszerű ahhoz, hogy a teljes eljárás áttekinthető legyen (síkbarajzolható), még a tananyag fellapozásával együtt is kb. 15 perc alatt elvégezhető legyen.
A játékelmélethez készített tudáspróba (2015) elemzéssel együtt a 10. mellékletben (141. o.) található.

A didaktikai elvek és a preferenciák érvényesülése az évközi dolgozatban (2015)

A hallgatók nemcsak elmondás és a tantárgyismertető alapján, hanem a tudáspróba típusú feladatlapokból is ismerhették a tantárggyal kapcsolatos preferenciáimat. Én magam is igyekeztem az évközi dolgozatban ezeket érvényesíteni.

Már a 2015-ben is feladatlapokon dolgoztak a hallgatók és minden írott segédeszközt használhattak a teszt megoldása során. Úgy gondoltam, hogy mesterszakon már nem azt kell ellenőrizni, hogy valamit ki tud-e számolni a hallgató, hiszen arra ott vannak a számológépek, illetve alkalmazások, sőt programokat is megismernek később ezen feladatok megoldására. A zárthelyi dolgozat 5 feladatból állt, amelyek tartalmilag nem függetlenek egymástól.

A feladatok a 11. mellékletben (146. o.) találhatók, mivel ezeket a 2018-as vizsgamintában is használtam.
A végeredmények a 12., a részletes, magyarázatokkal ellátott megoldások pedig a 13. mellékletben találhatók (149. o., illetve 153. o.).

Az alábbiakban a 2015. évi évközi dolgozathoz fűzök módszertani megjegyzéseket.

- Az egyes feladatok megoldásához szükséges kompetenciákat szembesítem az előzetesen megfogalmazott preferenciáimmal.
- Kitérek a pontozásra, a hallgatói megoldásokra, a gyakori hibákra.
- Az elért pontszámok tükrében statisztikai úton vizsgálom az egyes feladatok szerepét a számonkérésben.

Didaktikai megjegyzések a 2015-ös Műszaki-gazdasági matematika dolgozathoz, a dolgozat a 15. mellékletben (163. o.) található.

Az 5. táblázat tartalmazza az adott témakörhöz kapcsolódó legfontosabb kompetenciákat, fogalmakat, módszereket és modelleket és azok megjelenését a tesztben. A megjelenő matematikai kompetenciák a lineáris programozás (LP) és gráfelmélet (GE) témaköréből, az általános kompetenciák (ÁK) a problémamegoldás területéről származnak.

Kompetenciák	Feladatok						
	1	2	3	4a	4b	5a	5b
LP2 – a szimplex módszer táblázata	+						
LP3 – a szimplex módszer alkalmazása			+				
LP4 – Leontief modell értelmezése és alkalma-		+					
GE1 – az Euler-vonal a gyakorlatban				+			
GE2 – a Hamilton-kör a gyakorlatban					+		
GE3 – a gráf minimális feszítőfájának megkere-						+	
GE4 – a legrövidebb út megkeresése							+
ÁK1 – szövegértés, szövegértelmezés	+	+					
ÁK2 – számolási, számítási készség			+			+	+
ÁK3 – definíció, tétel, eljárás helyes alkalmazása				+	+		
ÁK4 – szabálykövetés			+			+	+
ÁK5 – feladattartás			+			+	+
ÁK6 – matematikai kommunikáció				+	+		
ÁK7 – kapcsolat keresése a mindennapi élettel	+	+		+	+		
ÁK8 – kreativitás				+	+		

5. táblázat: Az évközi dolgozat preferenciái (2015).

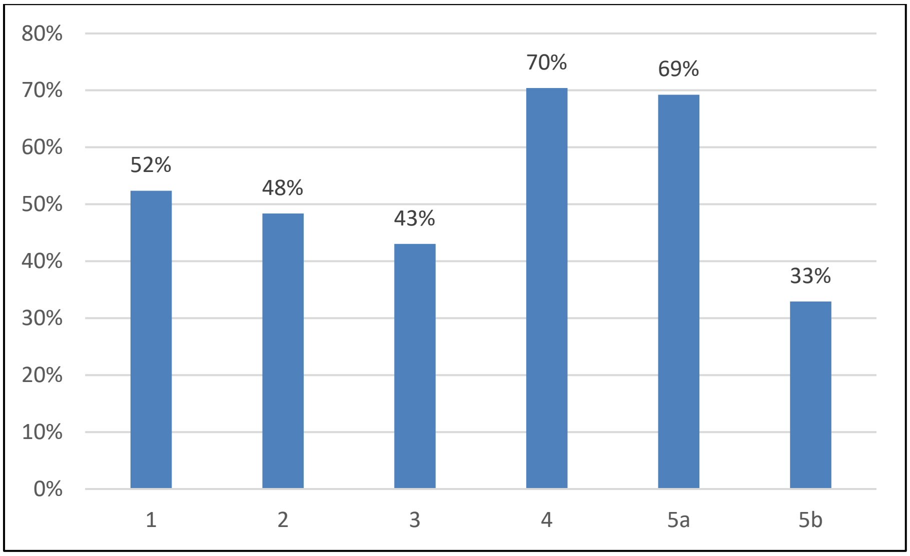
Az LP1 – optimumkeresés lineáris programozással kompetencia összetett, úgy is mondhatjuk, hogy LP2 és LP3 ennek az indikátorai. A táblázatból látszik, hogy a feltételezett kompetenciák között minden – a preferenciákban előzőleg megnevezett – kompetencia szerepel, de az ÁK7 (a mindennapi élettel való kapcsolat keresése és felismerése) szándékomnak megfelelően kiemelten szerepel.

A pontozás és az elért pontszámok

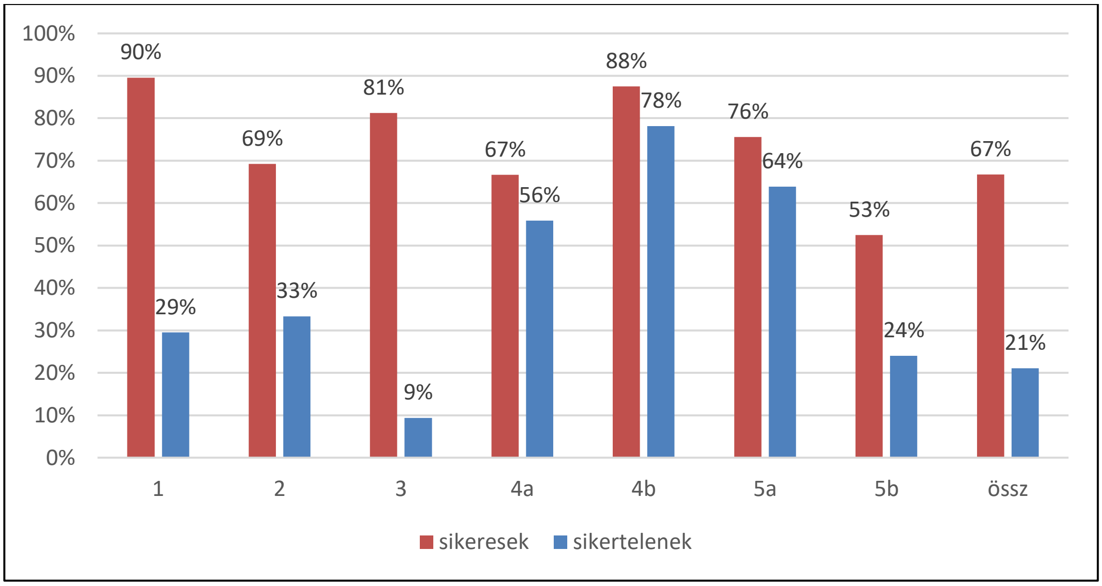
Mivel a két témakör a tananyag felét tette ki, ezért az összesen elérhető 100 pontot is megfeleztem. A dolgozatban összesen 50, témakörönként 25-25 pontot lehetett elérni. A zárthelyin szerzett pont egyúttal vizsgapont is. A vizsgára bocsájtás feltétele 20 pont volt, amit már az egyik témakörből is el lehetett érni. A dolgozatot úgy állítottam össze, hogy a lineáris programozás, illetve a gráfelmélet legfontosabb algoritmusainak ismerete nélkül ne lehessen teljesíteni a vizsgára bocsátás feltételét, ugyanis a 3. és 5b feladatok együttes pontszáma meghaladja az elérhető pontszám 60%-át. A feladatok százalékos megoldottságát a 9. ábra mutatja.

A két legfontosabb feladat bizonyult a legnehezebbnek, de azok megoldottsága is 30% fölött van. A mindennapi élethez kapcsolódó 4. feladat és az egyszerűbb algoritmusra épülő 5.a feladat megoldottsága viszonylag magas. Ennek alapján nem volt igazán nehéz és nagyon könnyű feladat sem a dolgozatban. Mind a preferenciákat, mind a megoldottságot tekintve megfelelőnek mondható a dolgozat. (A 2018-as kurzus során be is tettem a vizsgaminta feladatai közé.)

Összehasonlítottam a „sikeres” (ezzel a teszttel teljesítette a vizsgára bocsájtás feltételét) és a „sikertelen” hallgatók (ezzel a teszttel nem teljesítette a vizsgára bocsájtás feltételét) feladatonkénti teljesítményét (10. ábra). A „sikeres” hallgatók a teljes tesztben átlagosan 68%-ot (a minimálisan szükséges 40% helyett), de az 5b feladatban ők is csak 53%-ot értek el. A legnagyobb különbség a szimplex módszer alkalmazását igénylő 3. feladatban volt.



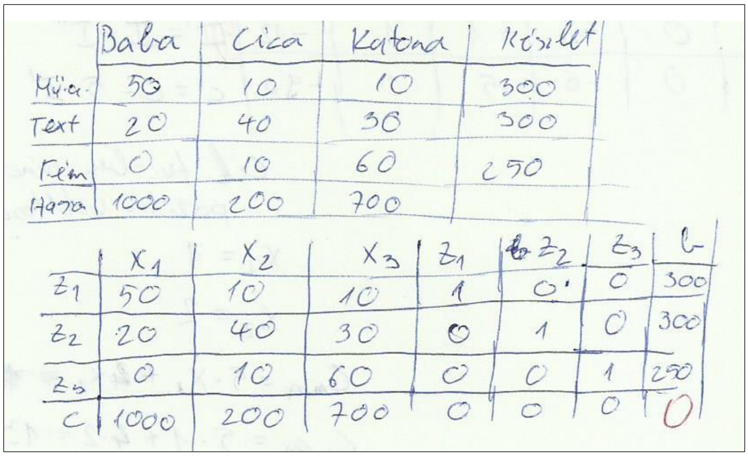
9. ábra: Az egyes feladatok megoldottsága százalékosan.



10. ábra: A 40% fölötti (sikeres) és a 40% alatti (sikertelen) összteljesítményű hallgatók feladatonkénti teljesítményének összehasonlítása.

Didaktikai megjegyzések az egyes feladatokhoz

Az *1. feladat* funkciója, hogy a hallgatók szövegértési, szövegértelmezési készségét és a szimplex módszer kiindulási táblájának ismeretét a közvetlen alkalmazás szintjén ellenőrizzük. A kiindulási szimplex tábla kitöltését, azaz az adott algoritmus szöveghez illesztését azért tartom alapvető fontosságúnak, mert ezen múlik, hogy a számítások eredménye mennyire illeszkedik a valósághoz. Magát a számolást sok-sok platform felkínált alkalmazásai elvégezhetik. Az 1. feladatot jellemzően vagy egyáltalán nem, vagy tökéletesen oldották meg a hallgatók.



	Baba	Cica	Katona	Készlet
Műa.	50	10	10	300
Text	20	40	30	300
Fém	0	10	60	250
Haszn	1000	200	700	

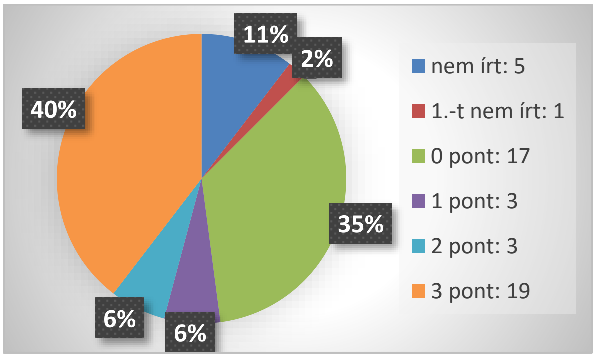
	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3	b
z_1	50	10	10	1	0	0	300
z_2	20	40	30	0	1	0	300
z_3	0	10	60	0	0	1	250
c	1000	200	700	0	0	0	0

11. ábra: Szinte hibátlan hallgatói megoldás az 1. feladatra.

A 11. ábra egy hallgató rendezett, áttekinthető megoldását mutatja. A hallgató mindkét táblázatot elkészítette, noha ez nem volt követelmény. Mindössze annyit hibázott, hogy a kiinduló szimplex táblázat utolsó celláját üresen hagyta.

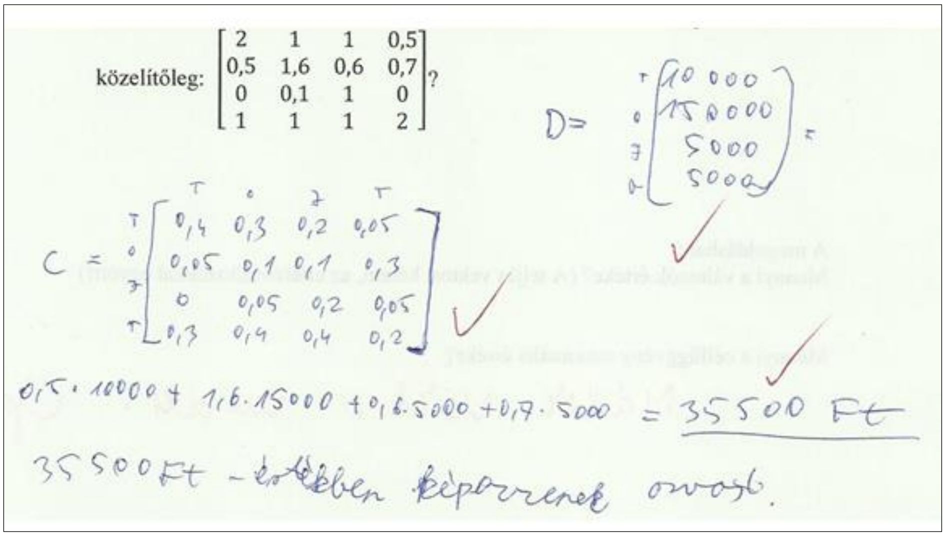
Pontvesztésre valamilyen hiányosságért (a bázisvektorok, célfüggvény hiánya) került sor, ami kevés esetben fordult elő. A 12. ábra mutatja a pontszámok eloszlását, leolvasható, hogy a legnépesebb csoport a hibátlan megoldóké.

Az 1. feladat megoldásában elért kudarc szinte előrevetítette a 3. feladat megoldásának eredménytelenségét, hiszen a szimplex módszer legfontosabb elemének, a szimplex táblának ismerete szükséges mindkét feladathoz.



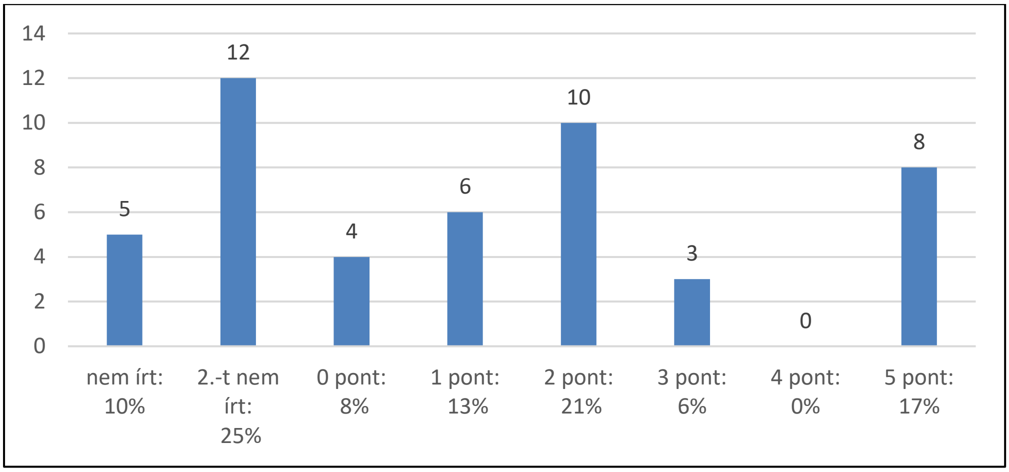
12. ábra: Az 1. feladat megoldásának pontszám szerinti megoszlása.

A *2. feladat* a Leontief modell ismeretét és alkalmazását igényli. A megoldáshoz a szöveggel leírt problémához ki kellett választani a két tanult eljárásból a megfelelőt és a szövegben szereplő adatoknak megkeresni a helyét az algoritmusban. Ebben a feladatban a fogalom ismeretén és közvetlen alkalmazásán, valamint a matematikai szabatosságon túl a szövegértés, szövegértelmezés és a mindennapi élettel való kapcsolat is feltételezett kompetencia. A szorzatmátrix megfelelő elemére szövegesen kérdez rá a feladat (Hány forint értékű orvost képezzenek ...) és a válasz formája a „probléma világában” szintén szöveges. A számolási részt az inverz mátrix megadásával szándékoztam lerövidíteni. Csak a megoldás végén kellett számolni és az eredményt értelmezni. Az algoritmus utolsó lépését a szorzatmátrix kiszámítása nélkül is végre lehet hajtani: elegendő a megfelelő sor és oszlop szorzatát kiszámolni és interpretálni.



13. ábra: Egy hallgató hibátlan megoldása a 2. feladatra. Pontosan azt számolja ki, ami szükséges. Szöveges választ is ad, noha a számokat szebben írja, mint a betűket.

A 2. feladat megoldottságát pontszám szerinti eloszlásban a 14. ábra mutatja. Szembetűnő, hogy sok hallgató (12 fő) nem is foglalkozott a feladattal. A másik gyakori eset (10 fő) a 2 pontos válasz, ami általában a két mátrix felírásáért járt. Sokan (8 fő) értek el maximális pontszámot a hibátlan megoldással. 4 pontot az kapott volna, aki csak számolási hibát vét és most ilyen nem volt.

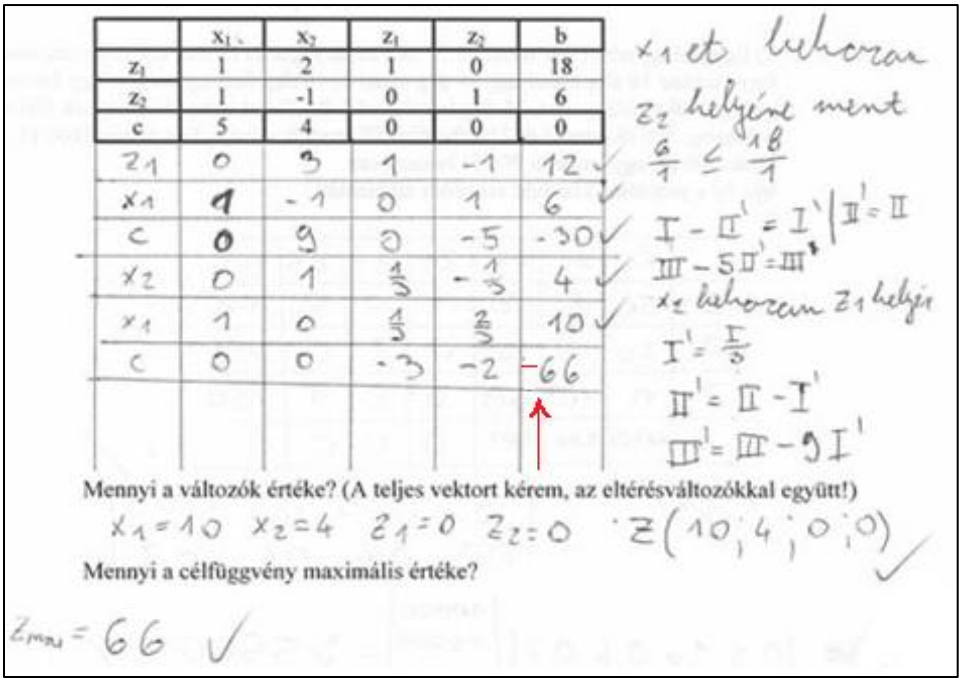


14. ábra: A 2. feladatért kapott pontszámok eloszlása.

Ténylegesen elő is fordult minden várható hiba a 2. feladatban. Számolási hiba volt például a helyiérték tévesztése, hibás szorzás. Szövegértelmezési hiba volt, hogy nem tudta beazonosítani a megfelelő adatot a mátrixban, a hiányzó mennyiség jelzésére nem írta be a nullát. Az eljárás szabályainak ismeretében hiányosság volt, hogy nem a megfelelő mátrixszal számolt. Különböző szintű hibákat vétettek a mátrix-szorzásban, és akik jól összeszorozták a két mátrixot, azok között is akadt, aki nem tudta kiválasztani a szorzatmátrix megfelelő elemét. Aki felismerte, hogy nem kell a teljes mátrix-szorzást elvégezni, az az említett hibákat nyilván elkerülte. Az, hogy megadtam az inverz mátrixot csak annak segített, aki valóban értette az eljárást.

Az 1. és a 2. feladat egyaránt leegyszerűsített valós szituációra vonatkozik. Hosszú, sok adatot tartalmazó szövegből kell kikeresni a feladat megoldásához szükséges adatokat és megkeresni a megfelelő táblázatban, mátrixban a helyét. Áttekinthetően, célszerűen elrendezve (például helyiérték szerint) kell az adatokat írni ahhoz, hogy a tanult módon megoldható legyen a feladat.

A *3. feladatban* egy tanult algoritmus lépéseinek pontos végrehajtását, egyszerű számítások elvégzését kértem számon. A sikeres megoldáshoz az algoritmus ismeretén túl a pontosságnak, a figyelemnek, a hibátlan számolási készségnek, valamint az áttekinthető írásképnek is fontos szerepe van. Egy algoritmus pontos végrehajtása egyrészt azért fontos, mert így kaphatjuk meg a probléma megoldását, másrészt a mai társadalomban az egyénnek tudnia kell a tevékenységét különböző szabályoknak megfelelve sikeresen elvégezni (szociális és állampolgári kompetencia). Mivel azt szerettem volna, hogy néhány viszonylag egyszerű számolási lépést tényleg elvégezzenek, kihagytam a szövegértelmezés részt, nehogy rossz értelmezés miatt ne kerüljön sor a tanult algoritmus számítási lépéseinek végrehajtására.



	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	1	2	1	0	18
z_2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0
z_1	0	3	1	-1	12
x_1	1	-1	0	1	6
c	0	9	0	-5	-30
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	4
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	10
c	0	0	-3	-2	-66

Mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!)

$x_1 = 10$ $x_2 = 4$ $z_1 = 0$ $z_2 = 0$ $z(10;4;0;0)$

Mennyi a célfüggvény maximális értéke?

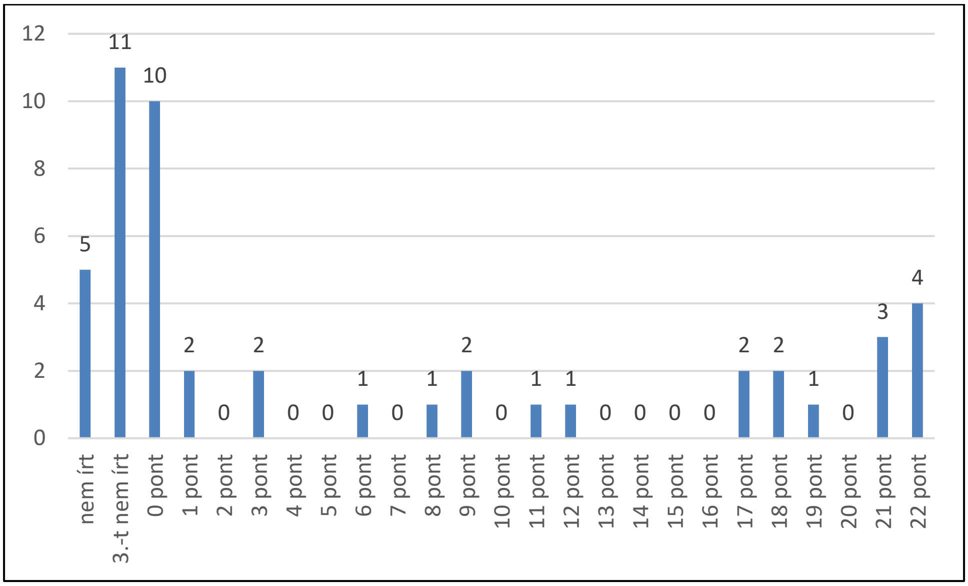
$z_{max} = 66$

15. ábra: Egy hallgató lényegében hibátlan megoldása.

A 15. ábra mutatja, hogy a hallgatói a tanár által elkezdett táblázatot az adott formátumban tovább folytatta. A szükséges indokláson túl feltüntette a táblázat mellett az alkalmazott lépéseket is. (A több évig tanult egyenletmegoldási módszerhez hasonlóan rögzítette, hogy milyen művelettel kapjuk meg az adott sorból a következőt.)

A feladatlapként kiadott vizsga dolgozat előnye, hogy figyelmeztethetjük a hallgatót azokra a lépésekre, amikre a munka hevében, a hosszú lépéssorozat végrehajtása során el szoktak felejtkezni. Ilyen figyelmeztetés volt például „Mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!)”, illetve „Mennyi a célfüggvény maximális értéke?”.

Míg az előző feladatok a témakör szempontjából az alapműveleteket, alapeljárásokat kérték számon (a tudás 1. és 2. szintje), a 3. feladat az évközi vizsgadolgozat gerince, a témakörhöz tartozó legfontosabb modellezési eljárás, a szimplex módszer összes lépésére kérdez rá. Azt méri, hogy a hallgató végre tudja-e hajtani a témakör legfontosabb algoritmusát, a célfüggvény maximalizálását szimplex módszerrel. Ezért lehetett a helyes megoldásra 22 vizsgapontot kapni. A bázistranszformáció és a célfüggvény meghatározása 9 pontot, a döntés és a 2. rész kiszámítása újabb 9 pontot, az eredmény értelmezése 4 pontot ért.



16. ábra: A 3. feladatban elért pontszámok eloszlása.

A grafikonról leolvasható, hogy a feladat szét is húzta a mezőnyt. 21 fő nem tudott mit kezdeni a problémával. Vagy hozzá sem kezdtek vagy 0 pontot értek el. 18 fő legalább egy bázistranszformációt helyesen elvégzett. Az algoritmust 12 hallgató végrehajtotta, közülük 7-en lényegében hibátlanul. Az egyik hallgató például a báziscsere lépéseit kommentálva, hibátlanul elvégezte, de a célfüggvény utolsó komponensének az előjelét elvétette (15. ábra).

A kiinduló szimplex tábla fogalmának ismerete az 1. és a 3. feladatban egyaránt alapvetőnek bizonyult. Szinte ugyanazok a hallgatók szerepelnek az 1., illetve a 3. feladatban sikertelenek között. Azok közül, akik az 1. feladattal nem boldogultak, mindössze egy hallgató tudta -más módszerrel- megoldani a 3. feladatot.

A *4. feladat* a mindennapi életből származó olyan konkrét szituáció megfogalmazását kérte számon, amelyek matematikai modelljében az adott fogalom, módszer szerepel. Ezzel azt szerettem volna mérni, hogy látja-e a hallgató a tanultak kapcsolatát a mindennapjaival. Azt is szerettem volna, hogy tudatosuljon bennük az adott modell érdekessége és fontossága. A 4. feladat mindkét része feltételezi az Euler vonal és a Hamilton kör definíciójának pontos ismeretét (ne keverje össze az Euler vonalat és a

Hamilton kört), kreatív alkalmazását. Matematikailag és nyelvileg helyes, értelmes magyar mondatokban kellett megadniuk a választ (matematikai kommunikáció). A feladat nem szó szerint kéri a definíciókat számon, hanem annak értelmét, tág teret engedve a kreativitásnak, az egyéni kezdeményezőkészségnek.

A módszertanilag fontos nyitott feladatokra ritkán kerül sor a műszaki felsőoktatásban. A tesztek javítása során nyilvánvalóvá vált számomra, hogy még több gyakorlásra lenne szükség [66], [67], [68].

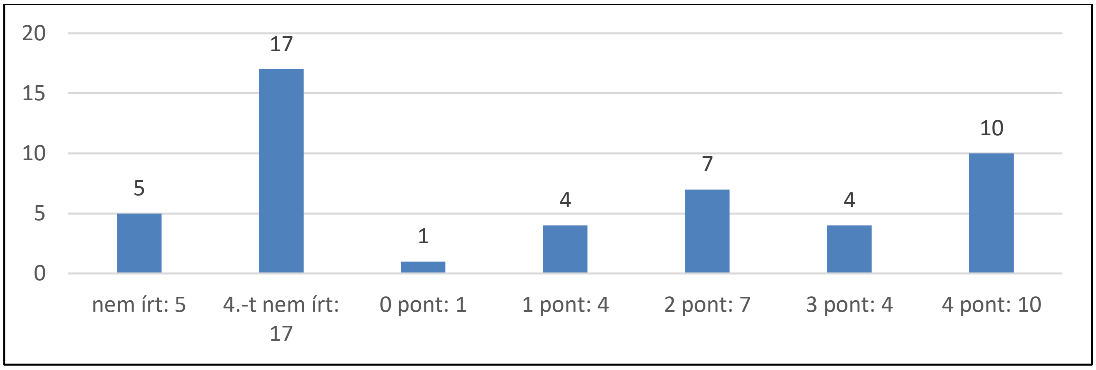
a) Euler vonal meghatározására adott példák – a kérdés első része

- Útellenőrzés, ahol az összes útszakaszon végig kell menni anélkül, hogy ugyanazon az útszakaszon kétszer végighaladnánk.
- Utcaseprő gép, ami egyszer megy végig minden utcán, úgy szedi fel a szemetet.
- Veteményezésnél a vetőgép minden úton pontosan egyszer halad végig.
- A Google utcakép-néző szolgáltatása úgy készült, hogy a város összes utcáját végig kellett fényképezni.
- Útlocsoló kocsi végighalad a kerület útjain, mindegyiken, de csak egyszer.

b) Hamilton kör meghatározására adott példák – a kérdés második része

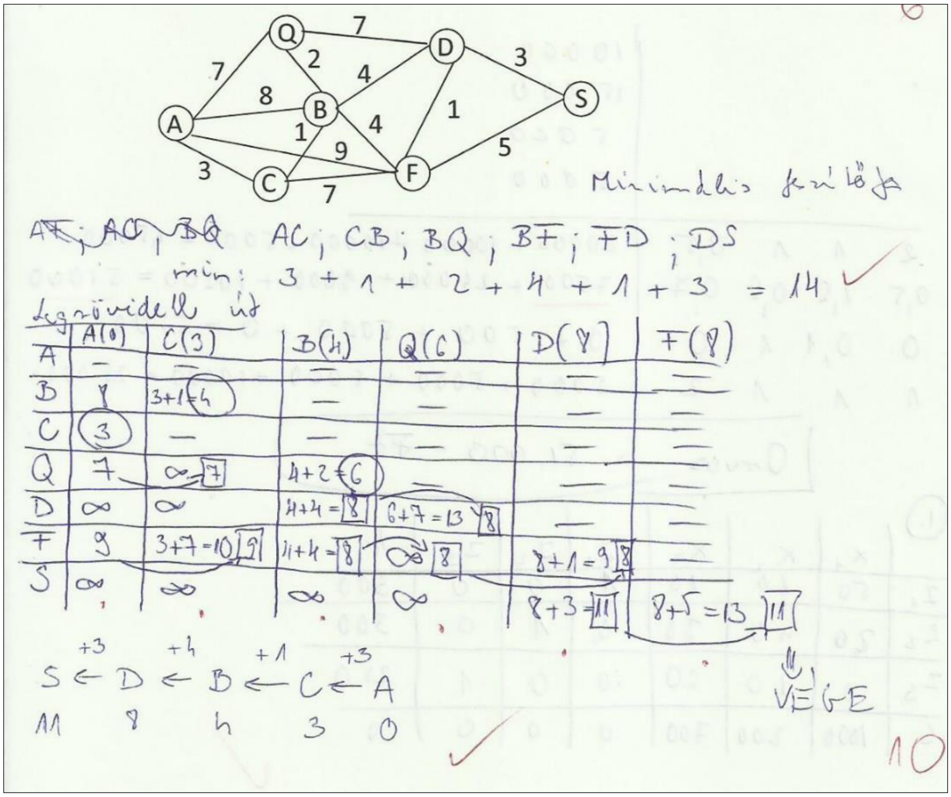
- Postás útvonala, ha minden házba be kell térni anélkül, hogy ugyanannál a háznál kétszer haladna el.
- Például egy tejtermékeket forgalmazó cég kiszállító autója. Lényeg, hogy minden boltot érintsen.
- Csomagszállítás (ki lehet hagyni utakat, de minden pontba el kell jutni).
- Vízhálózat szerelés (minden pontot egyszer érint).

17. ábra: Hallgatói megoldások a 4. feladatra.



18. ábra: A 4. feladatban elért pontszámok eloszlása.

A 19. ábra alapján szembetűnő, hogy a 4. feladatban (Euler-vonal és Hamilton kör) voltak a legsikeresebbek a hallgatók. A jobbak a feladat megoldásába azt is beleértették, hogy meg kell magyarázni a kérdéses fogalmakat, így az is kiderült, hogy mely ismérvét fejezi ki az általuk említett példa az adott fogalomnak. Volt azonban néhány olyan hallgató, aki megelégedett a definíció visszaadásával. Ez számomra azt jelzi, hogy nincs gyakorlatuk az absztrakt irányból a konkrét felé haladásban.

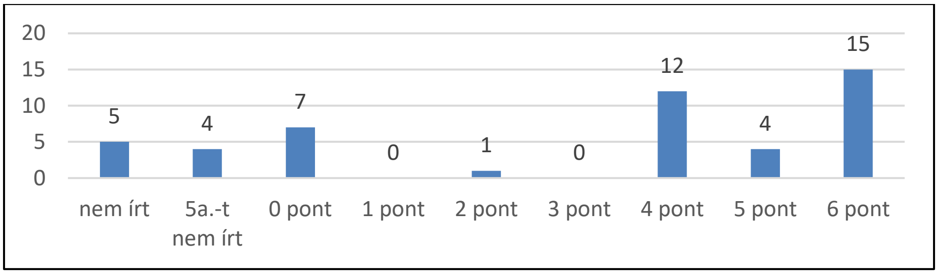


19. ábra: Tömör, áttekinthető hallgatói megoldás az 5. feladatra.

A pontszámok eloszlásából azt gondolhatjuk, hogy az a 17 hallgató, aki semmit nem írt ehhez a feladathoz, valószínűleg nem készült. Az Euler-vonal és a Hamilton kör ismerete között nem mutatkozott lényeges különbség, ezért vizsgáltam együtt az 4a és 4b rész megoldottságát. Különböző fogalmak definiáló tulajdonságainak összekeverését is tapasztaltam a példákban. Az is előfordult, hogy saját példa kigondolása helyett valamelyik órai példát ismételték meg. Homályos utalásokból (kukásautó, elektronika) nem derül ki, hogy mire gondolt a hallgató.

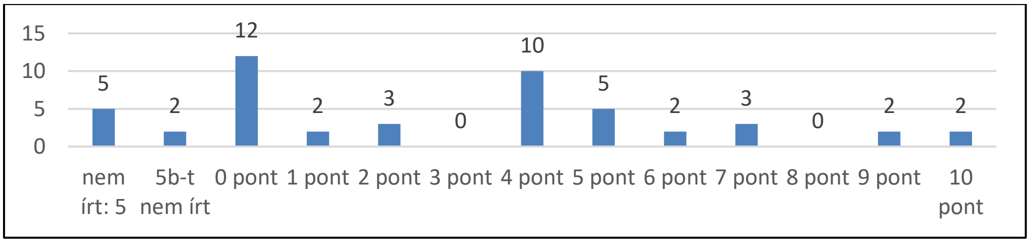
Az 5. *feladat* megoldása két tanult algoritmus alkalmazását követeli meg. A megadott gráf összetettsége és így a feladat nehézségi szintje sem haladta meg az órán feldolgozott példáét. Az 5a feladat megoldásához a Prim-algoritmust, az 5b feladathoz pedig a Dijkstra-algoritmust tanultuk. A két feladatrészt az kötötte össze, hogy ugyanannak a gráfnak az adatait kellett használni. A javítás során bebizonyosodott, hogy jobb lett volna két külön feladatként megfogalmazni a kérdéseket, mert egy kicsit megzavarta a hallgatókat, az a és b rész megoldása több dolgozatban nem különült el kellően.

Az 5. feladat a, illetve b részében kapott pontszámok eloszlását mutatja a 20. ábra és a 21. ábra.



20. ábra: Az 5a feladatban elért pontszámok eloszlása.

Az 5a feladatban 15 hallgató ért el maximális pontszámot. 4 pontot kapott 12 fő, akik nem oldották meg a teljes feladatot, csak a minimális feszítőfát adták meg.



21. ábra: Az 5b feladatban elért pontszámok eloszlása.

Az 5b feladat meglepően gyengén sikerült. Mindössze 14 hallgató érte el a pontszám felét vagy annál többet, 2 hallgató oldotta meg hibátlanul. A leggyakoribb elért pontszám a 0 pont, összesen 14 hallgató nem tudott mit kezdeni a feladattal. Viszonylag sokan kaptak 4 pontot, ez a 10 fő az algoritmus második részével nem boldogult. Sokan nem vették észre az A és F pontok közötti 9 súlyú élt, de számomra ez önmagában nem magyarázza meg ezt a jelentős különbséget. A sikertelenség okait kereshetjük abban, hogy ez volt az utolsó feladat és elfáradhattak vagy nem jutott rá elég idő. Az is lehet, hogy nem ismerték fel a dolgozatra készülve, hogy a szükséges algoritmus összetett, minden egyes következő lépést más-más döntési helyzetben meghozott választás határoz meg.

Vizsgaminta a Műszaki-gazdasági matematika kurzushoz (2018)

A 2015-ös kurzus tanulságai közül megszívleltem azt, hogy a hallgatók nem tudják, hogyan kell válaszolni. Ennek a gondnak az orvoslására vezettem be egy új gyakorló feladatlap típust, a vizsgamintát. A tudáspróba és a vizsgaminta feladattípusai megegyeznek. Míg a tudáspróba típusú feladatlap kitöltés közben is tanít, a vizsgaminta

- rámutat a sikeresen vagy kevésbé sikeresen elsajátított tananyagrészekre;
- tájékoztat a vizsgán várható számonkérés mélységéről, a feladatok nehézségi fokáról;
- megmutatja, hány kérdés várható, milyen pontszámmal, mennyi hely szükséges egy kérdés megválaszolásához.

További segítségnek érzem az eredményesség növelése szempontjából, hogy ez nem egy téma, hanem a kurzus teljes tananyagának áttekintését segíti. A feladatsor, az eredmények, illetve a részletes megoldások (lásd 7 – 10. melléklet 134. o. – 141. o.) szándékosan külön szerepeltek, hogy elkülönüljön a hallgató tényleges tudása és az elvárt megoldás. Az eredményeknél megismételtem a feladatokat, hogy könnyebben eligazodjon a hallgató. A megoldások részletezése elsősorban azoknak hasznos, akik nem tudták megoldani a feladatot vagy elakadtak valahol a megoldás közben.

Emlékeztető – puska használata (2018)

2015-ben bármilyen írott tananyagot használhattak a hallgatók a vizsgán. Tapasztalatom szerint kizárólag a saját jegyzeteikre és a kurzuson kapott elektronikus segédanyagok kinyomtatott példányaira szorítkoztak. Annak ellenére, hogy ismertettem a vizsga pontosabb tematikáját, a hallgatók egy része válogatás nélkül kinyomtatott minden anyagot, amit elérhetővé tettem. Ami egyrészt káros a környezetünkre, másrészt felesleges. Elmondható, hogy a kinyomtatott anyagra számítva felületesebben készültek és sok időt és energiát pazaroltak a helyszínen a keresgélésre. Néhányan azt sem tudták, mit és hol kellene keresni.

A helyes tanulási szokások és a tudatos felkészülés támogatására 2018-ban megváltoztattam a dolgozatírás alatt felhasználható segédletekre vonatkozó szabályt. Két A4-es, sajátkezűleg írott lapot használhattak dolgozatírás közben. Így szándékoztam abba az irányba terelni a hallgatókat, hogy otthon végigolvassák a tananyagot, kiszűrjék a lényegét és emlékeztetőt írjanak. Ezt a puskát nem csupán a dolgozat szempontjából tartom hasznosnak, hanem arra a tanulási hatásra is gondolok, hogy a legfontosabb tudnivalókat (fogalmak, jelölések, képletek, szabályok) írásban is rögzítik. Hiszen tudjuk, hogy az emberek jelentős része vizuális típus, ami azt jelenti, hogy amit leírva lát, főleg, ha azt saját maga írta le, az sokkal jobban megmarad a memóriájában.

Ütemezett visszakérdezés, folyamatos teljesítmény-visszajelzés interaktív feladatlappal (2018)

A 2015-ös tapasztalataim alapján a hallgatók gyakran csak fizikailag voltak jelen az órákon. A nagy mennyiségű segédanyag is az ismétléses tanulás irányába tolta a hallgatók jelentős részét. Ezért a 2018-as tanév őszi félévében az előhívásos tanulás módszerét alkalmaztam a tárgy tanításakor. Ennek értelmében az ismeretek előhívása (teszt, feleltetés, dolgozat, vizsga) nem kárba veszett idő, hanem a tanulás eszköze.

A hallgatók tudtával bevezettem az óravégi kérdéseket (röpdolgozat) – közvetlen előhívás és az egy héten belül beadandó feladatokat – késleltetett előhívás. Egy hónap múlva pedig az óra eleji rövid ismétlést.

Az ütemezett előhívás során az óra végén közvetlenül (14. melléklet 159. o.)

- minden lényeges fogalom, tétel, algoritmus megértésére,
- az új definíciók, tételek, eljárások változatlan alkalmazására rákérdeztem.

A házi feladatokban

- a lényegi összefüggéseket,
- szabályok és algoritmusok felidézését, illetve több lépéses alkalmazását,
- a megfelelő eljárás (képlet, algoritmus) kiválasztását, alkalmazását,
- az eredmény értelmezését,
- egyes szoftverek (E-learning, Redmenta, táblázatkezelő, Solve a bimatrix game) használatát,
- saját példa megfogalmazását kértem számon.

Az óravégi röpdolgozatok célja az volt, hogy irányítsák a hallgatót, hogy melyek a legfontosabb fogalmak, tételek, eljárások. Mivel azonnali visszajelzés és javítás volt, ez segítette a hallgatót, hogy helyes emlékképet raktározzon el. Az órákon is nagyobb érdeklődéssel és intenzívebb figyelemmel vettek részt, mert tudták, hogy az órák végén számonkérés lesz. A kurzus során minden 90 perces tanítás után (alkalmanként kétszer) egy 5 perces feleletválasztós tesztet kellett kitölteniük a hallgatóknak a 90 percben elhangzott témából.

Beadandó házi feladatot is kaptak minden alkalommal, amit a tanítás után egy héten belül kellett megoldaniuk. A házi feladatot interaktív feladatlapon kapták meg. A feladatlapon néhány rövid válaszos és két olyan kifejtős feladat volt, amelyek megválaszolásakor ábrák, képletek, matematikai szimbólumok bevitelére lett volna szükség. A kifejtős kérdésekre adott válaszokat (akár kézírásos formában) feltölthették az egyetem e-learning oldalára (ugyanide került később a jó megoldás is). A feladatok 70–80%-a feleletválasztós volt, amelyek megválaszolásakor azonnali visszajelzést kaptak, a kifejtős kérdésekre adott válaszokat egy héten belül kijavítottam és elbíráltam és a program közvetlenül kiértékelte a megoldást.

Tapasztalatok, megjegyzések:

- Az óravégi röpdolgozatok abban is segítettek, hogy a hallgatók bejártak órára, nem kellett külön figyelmeztetni őket, hogy a gyakorlatokon való részvétel kötelező.
- A Redmenta által adminisztrált házi feladatnak az is nagy előnye, hogy azok is dolgozhatnak, akik valamilyen okból nem tudtak az órán jelen lenni. Ez teljesült is, már az első házi feladatot is többen küldték be, mint ahányan jelen voltak az órán.
- A tananyaggal és a tanárral élénkült a kapcsolat. A határidő betartása is problémát okozott néhány hallgatónak. Ha e-mailt írtak nekem, meghosszabbítottam a beadási határidő egy-két nappal vigyázva, hogy az előhívásos tanulási módszer feltételei minél kevésbé sérüljenek.

Az előhívásos tesztek hatása a hallgatói teljesítmény értékelésére

Összesen 40 tesztkérdésre kellett válaszolniuk az óravégi röpdolgozatokban. Ezáltal a vizsgajegyet meghatározó 100 pontból maximum 10-et lehetett megszerezni. A házi feladatokban összesen 60 kérdésre kellett válaszolniuk, amivel maximum 15 vizsgapontot lehetett szerezni. A röpdolgozatokkal és házi feladatokkal szerezhető 25 vizsgapontok már jelentős hatással van a vizsgajegyre, de nem jelent automatikus tárgyteljesítést, mert ahhoz legalább 51 vizsgapont kellett.

5.4. A segítség hatékonyságát mérő módszerek és eszközök

Változtatások 2018-ban 2015-höz képest

2015-höz képest 2018-ban 20%-kal kevesebb volt az óraszám, emiatt mindenképpen át kellett dolgoznom az egyes témák tartalmát, és ha már változtatásoknál tartottam, a szerkezetet és a számonkérés módját is megváltoztattam.

A matematikai tartalomban fontos változás, hogy nagyobb hangsúlyt fektettem a gyakorlati alkalmazásokra. Már 2015-ben is beszéltem a koordinált játékokról, a fogolydilemmáról, de 2018-ban a héja-galamb játékot is hozzávettem.

A legfontosabb szerkezeti változás, hogy a spiralitás elve szerint szerveztem a kurzust, minden témát minden alkalommal (közel egyenlő arányban) szerepeltettem. A fogalomalkotás folyamatának zavartalansága miatt nagyon ügyeltem rá, hogy „jó helyen" váltsunk témát, így nem pontosan 45 percesek lettek az órák. Így hosszabb érési idővel alakulhatnak ki az egyáltalán nem egyszerű fogalmak (bimátrix, inhomogén differenciálegyenlet).

A vizsgán értelemszerűen áttértem a kurzus anyagának egységes számonkérésére. A számonkérés szempontjait a vizsgaminta segítségével közvetítettem a hallgatók felé. Az egyes részletek fogalmi tisztázása, a fogalmi háló bővítése, a helyes és gyors felidézés érdekében az ismételt tanulás helyett az előhívásos módszert támogattam. Sikerült elérni, hogy a tesztelés ne csupán a számonkérés eszköze legyen, hanem valóban a tanulási folyamat részévé váljon.

A központi IKT támogatáson túl (szövegszerkesztő, táblázatkezelő, grafikus szerkesztő, e-learning) 2018-ban saját utakat is találtam, illetve készítettem az óráim számítógépes támogatásához és a hallgatók önálló gyakorlásához.

- Megismertem és megszerettem és alkalmaztam a digitalizált feladatlapok több formáját. Az esettanulmány szempontjából a magyar fejlesztésű Redmenta feladatlap készítő programot találtam leghasznosabbnak (saját adatbáziskezelő, többféle válaszlehetőség, időzítés, csoportszervezés).
- Az e-learning portál több funkciójának használata (két házi feladat feltöltése nagyobb interaktivitást lehetővé tevő fájlformátum).
- A Wolfram Programming Lab matematikai weboldal (akkor ingyenes volt) használatával is megoldottunk differenciálegyenletet.
- Az órán mobil telefonos applikációt használtunk a gráfelmélet gyakorlati alkalmazásához. A vizsgált problémák önmagukban is olyan érdekesek, hogy online játékot is készítettek rá. Az applikáció bemutatásával színesítettem az órát, és megmutattam a hallgatóknak, hogy a gráfelmélet a tudományos eredményeken túl is érdekes.

Az alkalmazott módszertani megoldások közül lényeges változás, hogy

- A kurzus folyamán végig az előhívásos tanulás módszerét alkalmaztam. Az ütemezett előhívás második fázisának, a beadandó házi feladatok beküldéséhez, az eredmények rögzítéséhez és értékeléséhez használtam a Redmenta feladatlap készítő programot.
- 2015-höz képest megváltozott a feladatlapok funkciója. A 2018-as tudáspróba típusú feladatlapok elsősorban a tanulást és nem a számonkérést szolgálták. Igyekeztem minden kérdést, szempontot szerepeltetni, ami a fogalom ismeretéhez, megfelelő alkalmazásához szükséges.
- Áttértünk a tetszőleges segédeszköz használatáról a „puska” használatára.

Igyekeztem megbízható információt kapni a hallgatók tanulási módszereiről és énhatékonyság tudatáról, valamint a Műszaki-gazdasági matematika tantárgyban nyújtott teljesítményéről. Az információkat kérdőív (2015), a hallgatókkal folytatott személyes beszélgetés (2015 és 2018) és tudáspróba típusú interaktív feladatlapok (2018) segítségével nyertem. A tárgy 2015-ös és 2018-as oktatása során más-más és változatos számonkérési formákat alkalmaztam (évközi dolgozat 2015-ben, vizsgadolgozat 2015-ben és 2018-ban, röpdolgozat és beadandó házi feladat 2018-ban). A hallgatói teljesítményeket az egyes számonkérési formák ismertetésénél részletezem.

Visszatekintő kérdőívek (2015, 2018)

<table>
<tr><td colspan="3">Műszaki- gazdasági matematika nappali és levelező tagozat</td><td>Kérdőív 2015.</td></tr>
<tr><td></td><td>Ebben a félévben találkozott-e először az alábbi fogalommal/ algoritmussal?
igen: + nem: -</td><td>Ha már ismerte, tanult-e valami újat az előző ismereteihez képest?
igen: + nem: -</td><td>Hasznosnak/ alkalmazhatónak/ fontosnak tartja-e az alábbiakat?
igen: + nem: -</td></tr>
<tr><td>Szimplex módszer</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Leontief-féle input-output modell</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Euler-vonal</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Hamilton-kör</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Minimális feszítőfa algoritmusa</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Gráfban a legrövidebb út algoritmusa</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Keresztféléves-e? igen/nem
Ha igen, karikázza be a fönti táblázatban, az első oszlopban mindazokat, amiket az előző félévben tanult!
Közelítőleg hány órát tanult az első zh-ra? ________
Úgy érezte, hogy ennyi tanulás kevés / elég / bőven elég lesz a sikeres zh-hoz.
Az eredmény rosszabb lett / olyan lett / jobb lett, mint amire számított.
Közelítőleg hány órát tanult most a zh-ra?
Úgy érezte, hogy ennyi tanulás kevés / elég / bőven elég lesz a sikeres zh-hoz.</td></tr>
</table>

6. táblázat: Kérdőív (Műszaki- gazdasági matematika, Gödöllő 2015. 12. 19.).

28 hallgató töltötte ki a kérdőívet. A válaszadók több mint fele keresztféléves volt, ami az én tárgyam szempontjából azt jelenti, hogy a gráfelmélet fogalmaival előbb találkoznak informatikából, mint matematikából.

A minimális feszítőfa és a legrövidebb út problématípusokat a hallgatók 80%-a hasznosnak és fontosnak tartotta, ez a témakör körülbelül a hallgatók felének volt új. Azok közül, akik már ismerték a témakört a többség hasznosnak tartotta és néhányan még új ismereteket is kaptak.

A szimplex módszer, Euler-vonal, Hamilton kör témakört a hallgatók többsége hasznosnak tartotta. Akinek nem volt új a téma, az is kapott új ismereteket. A Leontiev-féle input-output modellt kevesen ismerték korábbról. és kedvelt. Bár véleményük szerint is sok új ismeretet kaptak, valószínű, hogy a hallgatók keveset tudnak ezen témakör alkalmazhatóságáról.

A (sikertelen) első zárthelyi dolgozatra átlagosan 5,5 órát készültek, nagyok voltak az eltérések, 1 óra volt a minimum és 14 óra a maximum. A 28 hallgató közül 18 azt hitte, hogy eleget tanult a sikeres vizsgához, de 16 tévedett. 9 hallgató gondolta, hogy nem elegendő a felkészülése. A második zárthelyi dolgozatra átlagosan még további 6,5 órát készültek, 1 óra volt a minimum és 30 a maximum. A megismételt vizsga eredményességéhez szükséges felkészülést már reálisan ítélték meg a hallgatók. A két zárthelyi dolgozatra átlagosan 12 órát készültek az első alkalommal sikertelenek. Ez reális is, hiszen a 10 óra kontakt foglalkozás anyagának feldolgozásához 10–12 óra szükséges (még ha ismerős volt is az anyag).

Műszaki- gazdasági matematika nappali és levelező tagozat — Záró kérdőív 2018

	Ebben a félévben találkozott-e először az alábbi fogalommal/ algoritmussal? igen: + nem: -	Ha már ismerte, tanult-e valami újat az előző ismeretei-hez képest? igen: + nem: -	Hasznosnak/ alkalmazhatónak/ fontosnak tartja-e az alábbiakat? igen: + nem: -
Szimplex módszer			
Leontief-féle io modell			
Minimális feszítőfa algoritmusa			
Legrövidebb út algoritmusa (gráfban)			
Játékelmélet			
Differenciálegyenletek			

A most tanult négy tananyagrészt számozza be aszerint, hogy mit gondol, mennyire fogja tudni használni a későbbiekben a munkájában, az életében. A leghasznosabb legyen az 1-es.

Lineáris programozás _____
Gráfelmélet _____
Játékelmélet _____
Differenciálegyenletek _____

Milyen volt az évközi és vizsgára tanulás %-os aránya? _______________

Elegendő segítséget kapott-e a vizsgára való felkészüléshez? igen / nem

A kapott segítségeket számozza be aszerint, hogy mennyire találta hasznosnak a felkészülésben. A leghasznosabb legyen az 1-es.

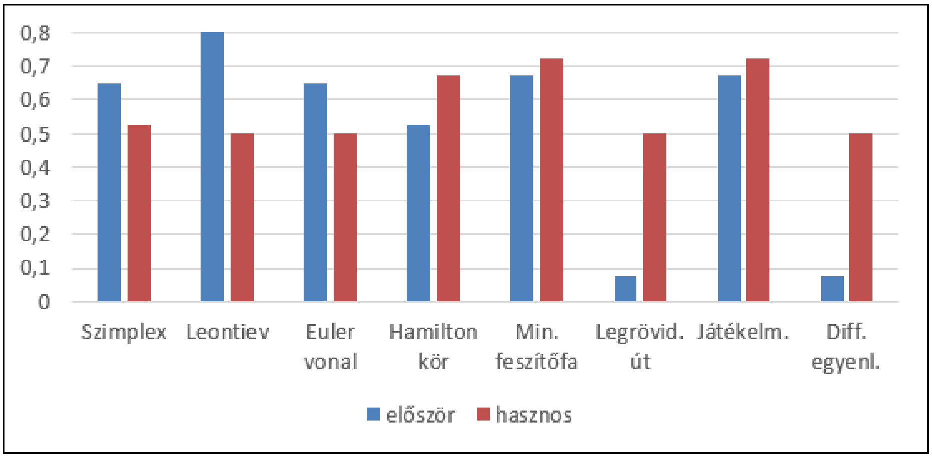
órákon való részvétel _____
e-learningen levő tananyagok _____
vizsgaminta megoldással _____
kézzel írott puska _____

22. ábra: Záró kérdőív (Műszaki- gazdasági matematika, Gödöllő 2018.).

A kérdőív módszerét megtartva kérdeztem meg a hallgatóim véleményét a tananyagról és a segédeszközökről, valamint tanulási szokásaikról. A kérdőíven változtatni kellett, mert két alapvető változtatás volt a 2015-ös és a 2018-as kurzus között. Az egyik változás az volt, hogy a vizsgán a teljes tananyagot kértem számon. A másik pedig az előhívásos tanulási módszer bevezetése volt.

40 hallgató töltötte ki a kérdőívet. A témakörök előzetes ismertsége megegyezett a 2015-ös évfolyaméval, a legrövidebb út problémáját kivéve mindegyik témakört hallotta már a hallgatók több mint fele. A minimális feszítőfát 72%, a legrövidebb út problématípust a hallgatók 50%-a hasznosnak, alkalmazhatónak és fontosnak tartotta. A szimplex módszer, Euler-vonal, Hamilton kör témakört a hallgatók többsége ebben az évben is hasznosnak tartotta. A Leontiev-féle input-output modellt kevesen ismerték korábbról. A hallgatók fele hasznosnak találta ezt az új módszert.

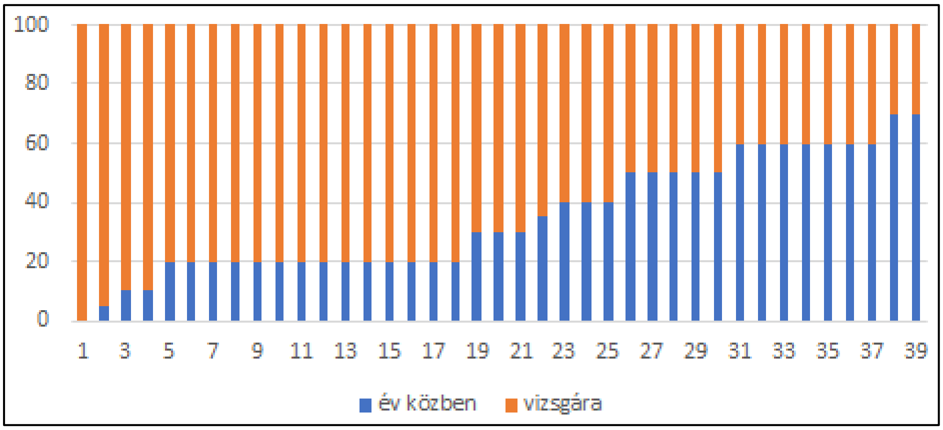
Szemléltetésként a 2018-as kérdőív első kérdésének feldolgozását mutatom be, mert bővebb, mint a 2015-ös és a közös témáknál nagyon hasonló az eredmény.



23. ábra: A 2018-as kérdőív első kérdése.

A 2015-ös kérdőívben a játékelmélet és a differenciálegyenletek témakörök nem szerepeltek, mert évközi zh után töltötték ki a kérdőívet. A 2018-as eredményből látszik, hogy gyakorlatilag senki nem ismerte előzőleg a játékelméletet, mégis nagyon sokan hasznosnak ítélték, sőt a rangsorolás alapján a játékelmélet jött ki leghasznosabbként.

A hallgatók túlnyomó többsége elegendőnek ítélte a felkészüléshez kapott segítséget (87%) és a segédeszközök közül a vizsgamintát és a kézzel írott puskát találta leghasznosabbnak.
Talán az előhívásos módszer hatásának köszönhető, hogy az e-learning az órai részvétel mögé, a negyedik helyre került. Ugyancsak az előhívásos tanulás hatásának tulajdonítom az évközi tanulás növekedését. Az évközi tanulás és a vizsgára való felkészülés arányát hallgatónként, %-osan a 24. ábra mutatja.



24. ábra: Az évközi tanulás és a vizsgára való felkészülés aránya.

Szembetűnő, hogy számottevő mértékű tanulásra került sor évközben is, ami nem jellemző a levelezős vizsgatárgyakra.

A hallgatókkal folytatott személyes beszélgetések (2015, 2018)

Magam is és a hallgatók is találtunk alkalmat a beszélgetésre, mivel a tömbösített órák szüneteiben a terem környékén maradtunk. Észrevehető volt, hogy szabadabban kérdeznek, mint az alapképzésben résztvevők. Ez magyarázható azzal, hogy felnőttebbek, továbbá a menedzser szak miatt feltételezhetjük a jobb kapcsolatteremtési, érdekérvényesítési kompetenciát is. Szabadon elmondták kérdéseiket, kéréseiket, javaslataikat, problémáikat. Itt merült fel az a javaslat is, hogy a játékelmélet témát ne hagyjuk abba a mátrixjátékok után, hiszen a mindennapi életben felmerülő problémák modellezéséhez elengedhetetlen a bimátrixjátékok ismerete (fegyverkezési verseny, környezetszennyezés, klímaváltozás, technológiai szabványok, forgalomszervezés, bliccelés, adócsalás, doppingolás, közlegelők, túlhalászás).

Ugyancsak beszélgetés közben merült fel a konzultáció igénye.

Konzultáció (2018)

A 2015-ös évben a számonkérés nem követelte a tananyag egységes áttekintését, hiszen két részletben szerezték meg a szükséges pontokat (pontosan ezért változtattam meg 2018-ban a számonkérés szerkezetét). A 2018-as vizsgán a teljes félév anyagát kellett áttekinteni és ez a sikertelen vizsgák tanúsága alapján önállóan nem mindenkinek sikerült. Az első sikertelen vizsga után még nem érezték szükségét a külső segítségnek. A második sikertelen vizsga után már kértek segítséget, hiszen már csak egy vizsgalehetőség maradt. Kérésükre konzultációs lehetőséget biztosítottam, amellyel

4–5 hallgató élt. A vizsgaeredményükben jelentős javulást eredményezett a konzultáció. Úgy gondolom, hogy a konzultáció hatékonyságának legfontosabb elemei a következők: A hallgatók számára is ismert a tananyag felépítése és az oktató preferenciái (tényleges követelmény a vizsgalapon). Eligazításra van szükségük abból a szempontból is, hogy miért volt rossz a válaszuk. Arról és olyan részletességgel beszéltünk interaktív módon, amire és ahogyan ennek a néhány embernek szüksége volt.

A csoport teljesítményének, a tanulási-tanítási folyamat hatékonyságának vizsgálata

2015-ben visszatekintő kérdőívet, konzultációkat, az évközi dolgozatot, illetve a vizsgadolgozatot elemeztem a tanulás, illetve tanítás hatékonyságának vizsgálatára. A 2015-ös eredményeket értékelve a tananyag megértésének, megjegyzésének és rugalmas használatának segítéséhez újabb módszertani megoldásokat kerestem. Az eszközöket az IKT irányába bővítettem, didaktikai újításként az előhívásos (teszt) módszert vezettem be. Az IKT eszközöket nem csak az órai anyag szemléltetésében, hanem a számonkérésben is alkalmaztam.

Az óravégi feladatok és válaszok (papír formátumban) az előhívásos tanuláshoz tartozó rögzítési funkción túl arra is alkalmasak voltak, hogy átfogóan informáljanak arról, hogy a kurzus összes résztvevője mennyire sajátította el, értette meg a tananyag egyes részeit.

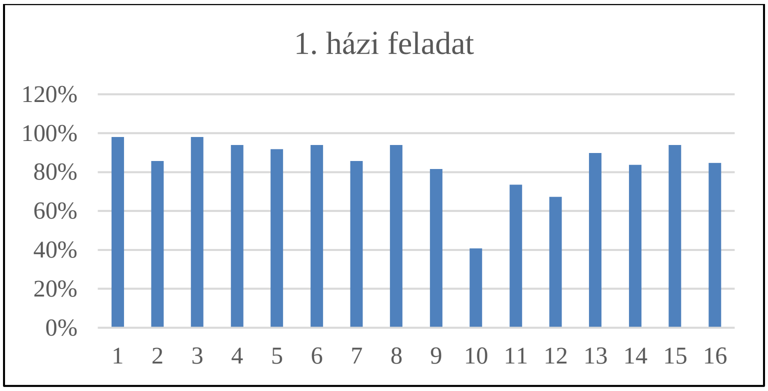
A Redmenta program felhasználásával beküldött házi feladatok egyrészt az előhívásos módszer következő fázisát jelentették, másrészt a tanár számára olyan adatokat rögzítettek, amelyek visszajelzésként szolgáltak az oktatásról.

A vizsgadolgozatok részletes pontozása ugyancsak használható a tanulási folyamat hatékonyságának mérőeszközeként.

Olyan adatsorokhoz jutottam, amelyből a hallgatók egyéni teljesítményén túl az egész csoport előmenetele (akár itemenként) vizsgálható. Az adatbázis alapján átnéztem, hogy melyek a kompenzálásra szoruló fogalmak, tételek, eljárások.

Például az első alkalom második dolgozatában egy differenciálegyenletről kellett eldönteni, hogy homogén-e. Ennek ismerete elengedhetetlen a továbbhaladáshoz. Az eredmények áttekintése közben észrevettem, hogy a feladat megoldottsága mindössze 40%-os, így a következő differenciálegyenlettel foglalkozó órán vissza kellett térni rá.

Hasonlóképpen meg tudtam állapítani például, hogy kétszemélyes játékoknál a nézőpontváltás nehézségekbe ütközik (25. ábra).



25. ábra: Az 1. házi feladat megoldottsága feladatonként.

Az első beadandó házi feladat megoldottsági adatait vizsgálva (25. ábra) nem csupán az a szembetűnő, hogy a 10. feladat sokkal gyengébben sikerült, mint a 9., hanem az is, hogy a hasonló típusú 11. feladat ismét jobban sikerült. A 9. és 10. közötti különbség magyarázható azzal, hogy a 10. összetettebb témára vonatkozik. A 10. és 11. közötti különbséget valószínűleg az okozta, hogy a füzetükben első stratégiára vonatkozó mintafeladatot találtak, és még nem annyira otthonosak a témában, hogy analógia alapján meggondolják a második stratégia valószínűségét. A következő órán erre visszatértem és ezután is igyekszem figyelembe venni azt a különbséget, ami a matematikai és az egyén számára megjelenő szimmetria között van.

9) Az alábbi mátrixjátéknak van-e tiszta nyeregpontja? *(Egy válasz jelölhető)* ________/1 pont

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ van ☒ nincs

10) Az alábbi mátrixjátékban mekkora valószínűséggel válassza az első játékos a második stratégiát? *(Egy válasz jelölhető)* ________/1 pont

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ 3/5 ☒ 2/5

11) Az alábbi mátrixjátékban mekkora valószínűséggel válassza a második játékos az első stratégiát? *(Egy válasz jelölhető)* ________/1 pont

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ☐ 1/5 ☒ 4/5

26. ábra: Az 1. beadandó házi feladat 9-10-11-es feladatának megoldása (Redmenta képernyőkivágás).

A tanulói teljesítmények a vizsgaeredmények tükrében

2015-ben a játékelmélet volt az egyik az írásbeli vizsga két témája közül. A diákoknak négy lehetőségük volt sikeres vizsgadolgozat megírására. A feladatsor a vizsgamintához hasonló volt. A 17 hallgatóból 14 teljesítette a vizsgakövetelményeket, ketten üresen adták be a papírt, de a második vizsgán már jól szerepeltek. Egy hallgató minden kérdésre írt – teljesen rossz – választ, ő csak a harmadik próbálkozásra érte el az elégségest. Mind elfogadták az első zárthelyi dolgozat jegyét, pedig jöhettek volna javítani, mindenkit bátorítottam is erre.

A 2015-ös az évközi dolgozatban, illetve a vizsgán tapasztalt tipikus hallgatói hibák

- Néhányan nem találták meg, vagy nem tudták alkalmazni a megfelelő képleteket, nem jól használták a segédleteket – „bőség zavara”.
- Néhányan nem tudták a számszerű eredményeket értelmezni. Különösen a játékosok közötti nézőpontváltásban hibáztak.
- Számolási hibák (hibás számolás, előjeltévesztés…).
- Megelőző matematikai anyag hiányos felidézése.

A 2018-as kurzussal sikerült

- javítani a tanulási szokásokat: óra végén visszatekintés, beküldendő házi feladat;
- küzdeni a felejtés ellen (a tananyag minden témakörét folyamatosan felszínen tartottuk);
- az előhívásos módszernek köszönhetően a bimátrix- és a mátrixjáték kezelésével kapcsolatos különbségeket tartósan rögzíteni;
- hangsúlyosabban figyelni a nézőpontváltásra és az eredmény értelmezésére (szem előtt tartottuk ugyanannak a játéknak mindkét játékos szempontjából való értékelését);
- a „puska” módszerével az emlékeztetőket helyesen használni.

A 2018-ban kiderült újabb, illetve megmaradt problémák

Minden igyekezetünk ellenére nagyon heterogén maradt az évfolyam absztrakciós szintje. Hiányosságok mutatkoztak a számolási készség (törtek, hatványozás), deriválási és integrálási szabályok ismerete és alkalmazása terén. Bár több helyen felhívtam a figyelmet az ellenőrzési módszerekre (deriválás – integrálás, eszközök és IKT alkalmazások), mégis kevesen alkalmazzák.
Úgy gondolom, hogy differenciálás, egyéni fejlesztés módszere segíthet (akár személyre szóló Redmenta feladatlapok által).

Az egységes fogalmi megalapozás ellen hatott az a körülmény, hogy a csoport egy része az elméleti megalapozás előtt alkalmazott szoftvereket informatikából a tanult fogalmakkal kapcsolatban. Fennáll annak a veszélye, hogy ezek a hallgatók lemaradnak a fogalomalkotás egyes fázisairól, mert nem veszik észre, amikor a túl ismerős környezetben új összetevők jelennek meg.

Mind a 2015-ös, mind az ezzel összehasonlítható 2018-as évfolyam 60%-a szerepelt sikeresen az első vizsgán. Pedig a 2018-as vizsga nehezebb volt, mert a 2015-sel ellentétben egyszerre szerepelt mind a négy témakör.

6. Az előhívásos tanulási módszer vizsgálata alapszakon

6.1. A populáció, a kísérleti és a kontrollcsoportok

A kutatás a Magyar Agrár- és Élettudományi Egyetemen zajlott Gödöllőn. A vizsgálat 2024-ben, 442, Matematika tárgyat tanuló, alapszakos hallgató bevonásával történt. A Matematika tárgy oktatása heti 2 óra előadás és 3 óra gyakorlat keretében történt. A gyakorlatot a 442 hallgató 13 csoportban végezte, a jelentkezésükre az oktatóknak nem volt hatása, így a kísérlet szempontjából véletlenszerűnek tekinthető. Ezen az évfolyamon 3 csoportot tanítottam, a vizsgálatot a két megegyező, mezőgazdasági mérnök alapszakos hallgatókkal végeztem, az egyik csoport a kísérleti, a másik a kontrollcsoport lett.

6.2. A hallgatók teljesítményének értékelési módja

Az óravégi „röpdolgozat" (közvetlen előhívás) értékelése

Az óra végén közvetlen összefoglalásként 4 – 2 elméleti és 2 gyakorlati – kérdésre kellett a hallgatóknak írásban válaszolniuk. A kérdések a lényeges új fogalmak, tételek, algoritmusok megértését kérték számon. A gyakorlati kérdések az új definíciók, tételek, eljárások változatlan alkalmazására vonatkoztak. A „röpdolgozat" írása kb. 5 percet vett igénybe. A megírás után ellenőrizhették a megoldásukat a kivetített helyes válaszok alapján.

Értékelésként összesen 5 pontot lehetett szerezni, ami a félév végén megmutatta az évközi órai munka %-os teljesítményét. Mivel a többi csoportban ilyen nem volt, az „egységes értékelési rendszer" miatt az óravégi számonkérés pontszáma semmilyen formában nem számított bele a félévi jegybe. Ez csökkentette a módszer hatékonyságának kimutathatóságát.

A házi feladatok (rövidtávú tesztelés) megoldásainak értékelése

Az első 10 héten, az adott hét anyagából, kötelező házi feladatok keretében valósítottuk meg online teszt formájában. Ehhez a kollégákkal online feladatbankot hoztunk létre, amelyből a program véletlenszerűen választotta ki a teszt kérdéseit. A teszt kitöltése korlátlan alkalommal ismételhető volt és minden alkalommal az utolsó eredmény számított.

A házi feladatok sikeres megoldásával maximum (10x2=) 20 pont volt szerezhető.

A zárthelyi dolgozatok (középtávú tesztelés) értékelése

Az egyetemi tananyagot 4 hagyományos zárthelyi dolgozat formájában kértük számon, amellyel minden hallgató maximum (4x19=) 56 pontot szerezhetett.

A vizsga (középtávú tesztelés) értékelése

„Az aláírás megszerzésének feltétele

- az előadások és gyakorlatok Tanulmányi és Vizsgaszabályzatban foglaltak szerinti látogatása,
- a bejövő hallgatók tudását felmérő online teszt kitöltése,
- az évközi (szorgalmi időszak) dolgozatokon összesen elérhető 56 pontból legalább 15 pont elérése,
- az évközi (szorgalmi időszak) házi feladatain összesen elérhető 20 pontból legalább 10 pont elérése."

„A tárgyat vizsga zárja, amelyen összesen 100 teljesítménypont szerezhető, és 2 részből áll:

- gyakorlati példák, feladatok: 76 pont, amely dolgozat megírására 70 perc áll rendelkezésre (továbbiakban: vizsga gyakorlati része);
- elméleti kérdések feleletválasztós teszt formájában: 24 pont, amely kitöltésére 20 perc áll rendelkezésre (továbbiakban: vizsga elméleti része). […]
- A vizsga gyakorlati részének teljesítése évközi munkával (évközi dolgozatok és házi feladatok) kiváltható az ott elért eredmény beszámításával. […]

A vizsga pontszáma a gyakorlati részen és az elméleti részen szerzett pontok összege.
A megszerzett pontszám a vizsgajegyet az alábbiak szerint határozza meg:
0 – 50 elégtelen (1)
51 – 60 elégséges (2)
61 – 75 közepes (3)
76 – 85 jó (4)
86 – jeles (5)" ([73])

6.3. Tanítási módszer a kísérleti csoportban

A kísérleti csoportban az előhívásos tanítási módszer (23. o.) azonnali és rövidtávú fázisát alkalmaztam. Ez csupán az azonnali tesztelésben különbözött a többi csoportban – így a kontrollcsoportban is – alkalmazott módszertől. Ennek magyarázata, hogy egyetemünkön 2024 őszétől alapszakon a korábban létező *Matematikai alapok* tárgyat megszüntették és tananyagát beépítettük a *Matematika* tárgyba. Mivel mesterszakon már korábban eredményesen alkalmaztam az előhívásos tanulási módszert (81. o.), teljes évfolyamra nézve kötelezően bevezettük az előírásos tanulási módszer második lépcsőjét, a középtávú előhívást.

Az egységes értékelési rendszerre hivatkozva arra sem kaptam engedélyt, hogy az óravégi számonkérésre pontot adjak a hallgatóknak, ami csökkentette a módszer hatékonyságát.

6.4. Az eredmények dokumentációja és feldolgozása

A tanév elején a 442 hallgató egy online tesztet (T1) töltött ki. Az online teszt célja a populáció matematika terén szerzett előzetes tudásának és készségének felmérése volt, ezt követően egy szemeszteren át heti 3 órás matematika gyakorlaton vettek részt.

A T2 mutató a félév során megírt 4 hagyományos zárthelyi dolgozat eredményének összege.

A kísérlet hatékonyságának vizsgálatához a T1 és T2 mutatókat használtuk.

A fejlődés mérése

A kísérleti módszer hatékonyságának megismerése érdekében alapvető statisztikai mérőszámokat határoztunk meg külön-külön három adathalmazban:

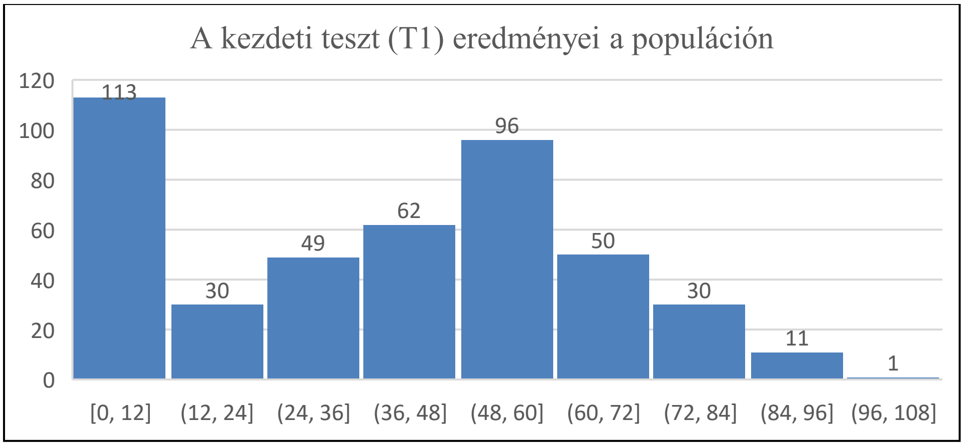
- a populációra vonatkozóan – a hallgatók általános szintjének leírására
- a kontrollcsoportra és a kísérleti csoportra vonatkozóan – az eredmények összehasonlítására, a különbségek jelentőségének tesztelésére, valamint a T2 és T1 pontszámok közötti korrelációk tesztelésére és összehasonlítására.

Ezenkívül meghatároztuk az egyes mutatók (T2 és T1) relatív átlageredményét, azaz a hallgatók által a tesztek során elérhető maximális pontszámhoz viszonyított átlagot. A relatív átlag egyértelműen megmutatja a hallgatók kompetenciáinak átlagos szintjében bekövetkezett változásokat a féléves tanulás előtt és után.

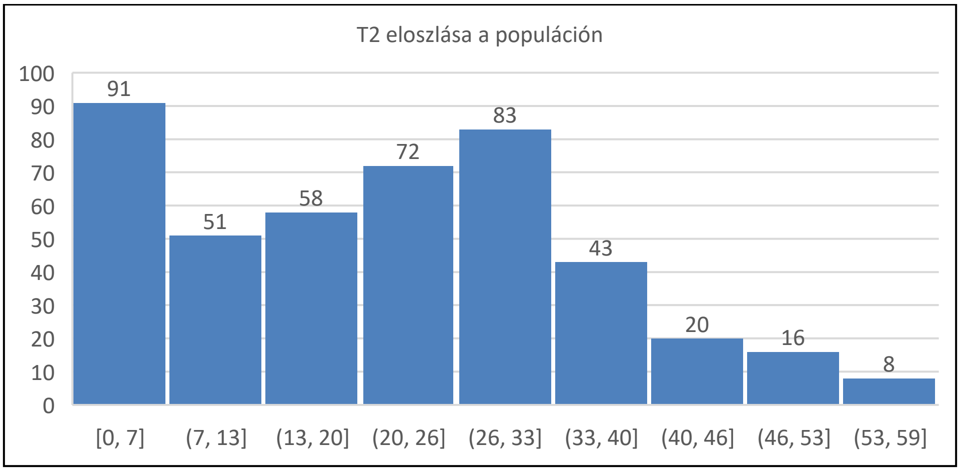
Az átlag és más statisztikai mérőszámok megfelelő értékelése érdekében az elmulasztott és helytelen válaszokat 0 pontként azonosítottuk.

A populáció eredményeinek jellemzői

Ahhoz, hogy megértsük a kísérleti csoportban bekövetkezett változásokat, érdemes megvizsgálni a teljes populáció kompetenciaszintjét a szemeszter kezdetén. A kezdeti teszt eredményeinek eloszlását a 27. ábra mutatja.



27. ábra: Hisztogram – A kezdeti teszt eredményei a populáción.



28. ábra: Hisztogram – T2 eloszlása a populáción.

A kezdeti teszt maximális eredménye 100 pont volt. A teszt átlageredménye 37,51 pont volt, így a relatív átlag a maximális eredmény 37,51%-a volt. A 26,86-os szórással (S=26,86) erős variabilitást (V=71,6%) és az eredményeloszlás nagy inhomogenitását figyelhetjük meg. A tipikus eredmények 10,65 és 64,37 között változnak. Láthatjuk, hogy a hallgatók 25,6%-a 12 pontnál kevesebbet ért el, és 20,8%-a 60 vagy annál több pontot szerzett. Ráadásul 101 hallgató egyetlen pontot sem szerzett (22,85%).

Nagyon gyenge balra dőlést láthatunk (A=-0,06), azonban az eloszlás bimodális, ezért az aszimmetriát nem értelmezzük. A negatív kurtózis (K=-1,07) ismét az eredményeloszlás inhomogenitását bizonyítja. A T2 eloszlását a 28. ábra mutatja.

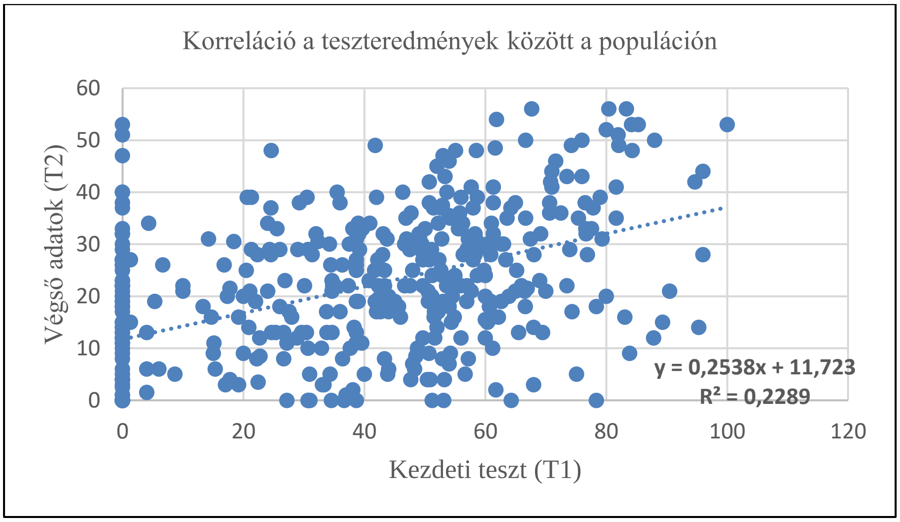
A T2 mutatóban az elérhető maximális pontszám 56 pont volt. Az átlageredmény 21,24 pont volt, tehát a relatív átlag a maximális pontszám 37,94%-a volt. A populáció eredményeinek 14,25-ös szórása ($S = 14{,}25$) erős variabilitást ($V = 67{,}1\%$) mutat, ami azt jelenti, hogy a csoport a félévi teljesítmény tekintetében nagyon változatos volt. A tipikus variabilitás 7 és 35,5 pont között mozog. 56 hallgató (12,67%) nem szerzett pontot. Gyenge jobbra dőlést láthatunk ($A = 0{,}20$), azonban az eloszlás bimodális, ezért az aszimmetriából nem vonunk le következtetéseket. A negatív kurtózis ($K = -0{,}69$) ismét az eredményeloszlás inhomogenitását bizonyítja.

A 7. táblázat a kezdeti (T1) és a félévi teljesítmény (T2) összehasonlítását mutatja.

Mennyiségek	Kezdeti (T1)	Végső (T2)
m (átlag)	21,24	37,51
S	14,25	26,86
V	0,67	0,72
A	0,20	-0,06
K	-0,69	-1,07
D	0,00	0,00
Q1	10,00	9,00
Q3	31,00	57,20
minimum	0	0
maximum	56	100
elérhető maximum	56	100
relatív m	0,379363	0,37511
”0”-k száma	56	101

7. táblázat: Mennyiségek a populáción.

Megfigyelhetjük, hogy a relatív átlag 0,00425-tel (0,425 százalékponttal) nőtt. Bár a hallgatók tudást és készségeket szereztek, az átlagos tesztpontszámmal mért általános szintjük nagyon keveset nőtt. Ezenkívül gyenge korrelációt ($r = 0{,}478$) figyelhetünk meg a kezdeti és a félévi teljesítmény között (29. ábra). Nevezetesen, T2 nem függ annyira T1-től. A félévi teljesítmények variabilitását csak 22,9%-ban magyarázzák T1 eredményei. Tehát más tényezők befolyása 77,1%. A tanár által alkalmazott módszer egy ilyen tényező. Mivel Pearson lineáris korrelációs együtthatót és lineáris regressziós modellt használtunk, arra a következtetésre juthatunk, hogy egy pont növekedés T1-ben 0,2538 pontot eredményez T2-ben.
A függőség gyenge ($T2 = 0{,}2538 * T1 + 11{,}723,\ R^2 = 0{,}2289$).



29. ábra: Lineáris regresszió a kezdeti és a félévi teljesítmény (végső adatok) között.

A kísérleti és a kontrollcsoport eredményeinek összehasonlítása

A kezdeti teszt (T1) a kontrollcsoportban mutatta a legjobb eredményeket. Ez a csoport érte el a legmagasabb átlagot, m = 47,103 pontot, ami majdnem 10 ponttal magasabb, mint a populáció eredménye, és majdnem 12 ponttal magasabb, mint a kísérleti csoport eredménye. A kompetenciaszint skálázása a relatív átlag alapján:

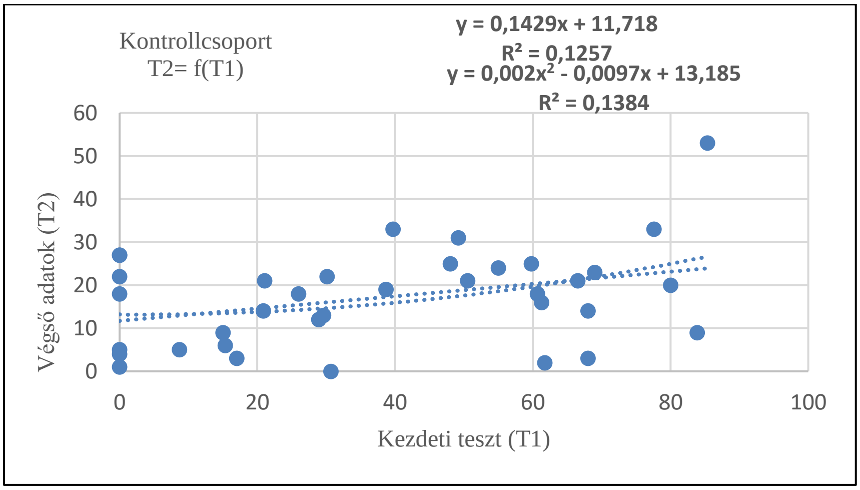
m∈[0%,20%)	nagyon alacsony kompetenciaszint
m∈[20%,40%)	alacsony kompetenciaszint
m∈[40%,60%)	közepes kompetenciaszint
m∈[60%,80%)	magas kompetenciaszint
m∈[80%,100%)	nagyon magas kompetenciaszint.

Az egyetemi matematika tanulása előtt csak a kontrollcsoport mutatott közepes kompetenciaszintet. Ráadásul ez a csoport volt a leghomogénebb ($V = 0{,}49$) a 13 csoportból. A T2 eredmények elemzése érdekes megfigyelést hoz. A kontrollcsoport érte el a legkisebb fejlődést, sőt azt is mondhatnánk, hogy ennek a csoportnak a hallgatói visszafelé haladtak, és a negatív különbség szignifikáns. A maximális eredménynél 0,165-del gyengébb eredményt, azaz 16,5%-kal kevesebbet értek el. A kísérleti csoport is alacsonyabb eredményt ért el T2 szerint, azonban a különbség nem szignifikáns (az empirikus t próba értéke t = 0,124, t (0,9;28) = 0,127). Ami a legfontosabb, a kísérleti és kontrollcsoport eredményeinek összehasonlításakor a kísérleti csoport szignifikánsan jobb eredményt ért el: $m_1 - m_2 = 19{,}724 - 17{,}139 = 2{,}585$ (p = 0,2). Ez azt jelenti, hogy a kísérleti csoport nagyobb fejlődést ért el, és láthattuk, hogy ez a fejlődés nem függött a csoport kezdeti szintjétől. Ezenkívül a kísérleti csoport csökkentette a variabilitást (míg a kontrollcsoport növelte). Ez arra utal, hogy a kísérleti csoport a szemeszter eredményeképpen valamivel homogénebb lett. Ez a kísérleti módszer alkalmazásának egy másik pozitív aspektusa. További statisztikai adatokat találunk a 8. táblázatban.

	Populáció N=442		Kísérleti csoport N=29		Kontrollcsoport N=36	
	T1 (max 56)	T2 (max 100)	T1 (max 56)	T2 (max 100)	T1 (max 56)	T2 (max 100)
Várható érték (m)	21,24	37,51	19,724	35,649	17,139	47,103
S	14,25	26,86	11,98	24,13	11,29	23,11
V	0,67	0,72	0,61	0,68	0,66	0,49
Relatív várható érték	0,379	0,375	0,352	0,356	0,306	0,471
Pearson-féle lineáris korreláció T1 és T2 között	0,478		0,352 (p = 0,001)		0,355 (p < 0,001)	

8. táblázat: Átlag, szórás és korreláció T1és T2 között.

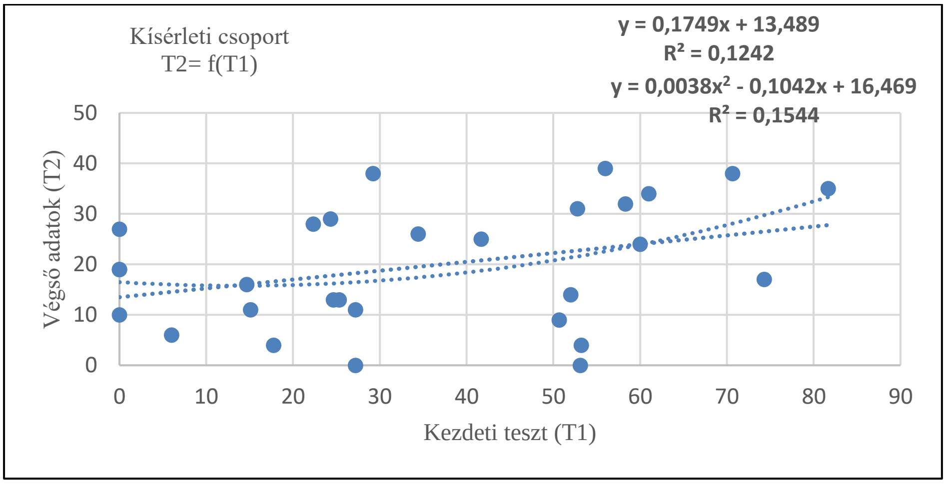
A kísérleti és a kontrollcsoportban a T2 és T1 közötti korrelációk gyengék, ami ismét bizonyítja, hogy bár a korrelációs együtthatók statisztikailag jelentősek voltak, a hallgatók kezdeti szintje nem befolyásolta túlságosan a félévi teljesítményeket. Ez hangsúlyozza a módszer szerepét, mivel az eredmények egyértelműen nem függenek jelentősen a hallgatók korábbi kompetenciáitól. A determinációs együttható azt mutatja, hogy a végeredménynek csak 12%-át magyarázza a kezdeti kompetenciák közötti különbség. Tehát más tényezők hatása 88%, és e tényezők közül nyilvánvalóan az alkalmazott módszer a legfontosabb.



30. ábra: Lineáris és polinomiális regresszió a kontrollcsoportban.

Néhány regressziós modell elemzése megerősíti a korábbi kompetenciaszintnek a gyenge hatását. Mind a lineáris, mind a polinomiális regressziók alacsony determinációs együtthatóval rendelkeznek (12% – 16%). A lineáris modellekből a következőket tudhatjuk meg:

- a kontrollcsoportban 1 ponttal több a T1-ben 0,1429 pontot eredményez a T2-ben, és ez a hatás 13,8%-ban magyarázható (30. ábra)
- a kísérleti csoportban 1 ponttal több a T1-ben 0,1749 pontot eredményez a T2-ben, és ez a hatás 12,4%-ban magyarázható (31. ábra).



31. ábra: Lineáris és polinomiális regresszió a kísérleti csoportban.

Következtetés

A MATE-n a nem szakos matematikaoktatásában a 2024/2025-ös tanév első félévében a Matematika tantárgyat hallgató 442 fő bemeneti matematikai kompetenciáit és félévi teljesítményét vizsgálva statisztikailag is igazoltuk, hogy az előhívásos módszer első fázisa, az azonnali tesztelés jelentősen befolyásolta a hallgatók félévi teljesítményét. Ezt a relatív átlagok, a szórás és a kezdeti szinttel való gyenge korreláció mutatja.

7. Az eredmények a hipotézisek tükrében, kitekintés

H1 hipotézis

A vizsgált módszerekkel mind a tanítási órákon, mind az egyéni tanulás során fejleszthetők

- a hallgatók kompetenciamotivációjának legfontosabb összetevői (pl. az énhatékonyság, a saját eredményességéről alkotott kép a matematikai problémák kezelését illetően [26]);
- a matematikai kompetenciák (lásd Reiss-féle kompetenciarendszer [13]);
- az EU kulcskompetenciák szinte kivétel nélkül [2].

H2 hipotézis

A kiválasztott módszerek több időt és energiát igényelnek ugyan mind a tanár, mind a hallgató részéről, de pozitív az időmérleg.

- Minőségileg megváltozik a diákok részvétele a matematikatanulási folyamatban.
- Minőségileg megváltozik a tanár szerepe, részvétele a tanulási – tanítási folyamatban.
- Az IKT eszközök nagy mértékben segítik a kísérleti program megvalósítását.

Az oktatott tantárgyak mindegyikében alkalmaztam sikeres újítást, figyeltem rá, hogy a változtatás illeszkedjen a tantárgy jellegéhez. Ezek közül a leglényegesebbek: Játékosítás – Matematikai alapok, kooperatív tanulás – Matematika I, vizualizálás – Valószínűségszámítás. Továbbá a két szemeszteren át tartó esettanulmány során számos kezdeményezés a Műszaki-gazdasági matematika tárgyban, melyekből kiemelkedő a feladatlapok és az előhívásos tanulási módszer alkalmazása.

Az alkalmazott tanulási módszerek javították a matematikatanulás minőségét, hatékonyságát. A BSc-n a kísérleti csoport hallgatóinak matematikai teljesítménye jobb lett, mint a párhuzamos kurzusokban (46. o. és 98. o.). Az MSc-s hallgatók teljesítménye legalább olyan jó lett, mint a megelőző időszakban (92. o.). Ugyanakkor az „újítások” kedvezően alakították a matematikáról alkotott képet (érdekes, hasznos, érthető, …), amint az MSc-sek által kitöltött kérdőívre adott válaszok, valamint a hallgatókkal folytatott beszélgetések mutatják. A játékosítás és a kooperatív tanulási módszer fejlesztette az anyanyelvi kommunikációt, a szociális kompetenciát, a matematikai kommunikációt, a kompetenciamotivációt és a metakogníciót.

A tanulás minőségét illetően szemmel látható volt, hogy a passzív részvevő helyett aktívvá, a saját tanulási folyamatát alakítóvá váltak a hallgatók. Korábban örültünk, ha az előadások és gyakorlatok hatására kognitív szinten elsajátították az anyagot. A módszertani újítások és az IKT támogatás hatására asszociatív, helyenként autonóm szintű tanulásra is volt példa [38]. A matematikához és a matematikatanuláshoz való viszonyulást 2015-ben és 2018-ban is kérdőívvel vizsgáltam. Az évközi számonkérés egyik hatása, hogy a sikertelen dolgozatot író hallgatókat szembesítette a tudásuk hiányosságával és tanulásra ösztönözte őket. A felkészülési idő átlagosan 5,5 óráról 12 órára nőtt a kérdőívre adott válaszok alapján (lásd 85. oldal). Az eszközök és módszerek sikeres megválasztásával az énhatékonyság is nőtt. Azon túl, hogy sikeresen teljesítették a matematikán belüli feladatokat, fejlődött a digitális eszközök használatában való jártasságuk és az idegen nyelveken folytatott kommunikáció (javasolt idegennyelvű alkalmazások, taneszközök, szakirodalom, …).

A matematikával szembeni előítélet lebontására a kognitív, az érzelmi és a viselkedési összetevők oldaláról törekedtem. Ezt szolgálta a játékosítás, a kooperatív tanulási technikák alkalmazása (a társakhoz kapcsolódó pozitív élmények) és az előhívásos tanulási módszer. A kognitív hatásokat a hallgatók munkáiból (zárthelyi, vizsgadolgozat), az érzelmi és a viselkedési hatásokat elsősorban közvetlen megfigyeléssel, illetve hallgatói visszajelzésekből – szüneti beszélgetések, konzultációk, kérdőívek – alapján állapítottam meg. Pozitívabb lett a matematikához való hozzáállásuk, többé nem hozzáférhetetlen, sőt érdekes.

A hallgatók szerepe megváltozott az oktatás során. Magánbeszélgetések témája lett a tanulás is. Felvállaltak bizonyos tanári szerepeket, például feladatkészítés, magyarázat, a tanári gép beállítása, szoftver keresés.

Tanárként valóban megváltozott a részvételem minősége a matematikatanulási, -tanítási folyamatban. Módszertani céljaim (előkészítés, levezetés, értékelés) elérésében nagy segítségemre voltak az informatikai eszközök és programok.

Nagyobb felelősséget vállaltam a tananyag kiválasztásában, elrendezésében. Szükség szerint módosítottam a munkamódszert, a környezetet, ülésrendet, … Számos szituációban előadóból tutor lettem (játékosítás, kooperatív módszerek, tudásmérő helyett tudáspróba típusú feladatlapok).

Sikerült elérni, hogy a tesztelés valóban a tanulási folyamat részévé váljon (előhívásos tanulás az MSc-n). Az esettanulmány során szerzett pozitív tapasztalataim alapján bevezettem a BSc-s csoportjaimban is (pozitív fogadtatással). A módszert javasoltam a kollégáimnak is, a kidolgozott anyagaimat is rendelkezésükre bocsátottam.

Az egyetem által biztosított technikai kereteket tartalommal töltöttem meg, például e-learning, számítógép és projektor használata.

A korábbinál többet mozogtam a tanteremben a hallgatók között, ami hozzájárult ahhoz, hogy előadóból tanácsadóvá váljak. Számos visszajelzést nem verbális kommunikáció útján kaptam (megfigyeltem őket munka közben, a szüneti beszélgetések alatt, a munkáik minőségéből, ...). A hallgatókkal való közvetlenebb kapcsolat a reflexió gyakoriságát és őszinteségét is befolyásolta.

A saját munkám eredményességére visszatekintő, metakogníciós szempontból saját feljegyzéseimből és a hallgatók munkáiból következtettem. (Például egy többeknek gyengén sikerült feladat alapján változtattam a magyarázaton, a feladat szövegén vagy a feladat nehézségén, bevezettem a „puskát").

Az időmérleg elkészítéséhez meg kellett határoznom (az oktatás keretrendszerén belül) az elsajátítandó fogalmakat, tételeket, eljárásokat és azok mélységét és azokat kértem számon (preferencia táblázat).

Az eredmények hasznosítása

Egy-egy sikeres kísérlet után a módszertani, tananyagkiválasztási és tananyagelrendezési újításaim többségét a saját oktatói munkámban megtartottam, kollégáimmal megismertettem és néhányat sikeresen bevezettünk az oktatásba. Az előhívásos tanulási módszert illetően a félév végi hallgatói visszajelzések is pozitívek voltak.

Befejezésként említünk néhány további problémát és a megoldásokra vonatkozó javaslatot

A) Az emelt szintű matematika érettségi szükségessége

A műszaki felsőoktatásban továbbtanuló diákok jelentős része középszintű érettségit tesz matematikából. A sikeres felsőfokú műszaki tanulmányokhoz a középszintű érettségi absztrakciós szintjét meghaladó matematikai kompetenciákra van szükség, pedig még a középszint követelményeit illetően is komoly hiányosság tapasztalhatók (az elemi függvények grafikonjának, tulajdonságainak felismerése, nevezetes azonosságok ismerete, ekvivalens átalakítási szabályok alkalmazása [4]).

Megfontolandónak tartom a műszaki felsőoktatásban az *emelt szintű matematika érettségi* megkövetelését. Amennyiben továbbra is helyettesíthető a matematika emelt szint valamely más tárgyból tett emelt szintű érettségivel, meg kellene vizsgálni, hogy elegendő-e azok hatása a műszaki felsőoktatásban szükséges absztrakciós szinthez.

B) Egyetemi tanulmányok kipróbálása, próbaegyetem

Több szakon érdemes lenne nyári iskola, illetve próbaegyetem formájában ízelítőt adni az egyetemi képzésből. Egyrészt többet megtudnának a hallgatók a választott szakról (például a környezetmérnök nem környezetvédő), másrészt azzal is szembesülnének, hogy milyen kihívásokat jelentenek a felsőfokú matematika tanulmányok. Más országokban, például Ausztriában az egyetemi kurzusok közül – különleges hallgatói státuszban – választhatnak az érdeklődők. Sikeres teljesítés esetén beszámít a tanulmányaikba, de a sikertelen teljesítés is fontos információ számukra.

C) Az ismeretek kapcsolatrendszerének megmutatása az oktatásban

A mesterképzésben fontos módszertani feladat a matematikai tartalomnak a matematika más területeivel, más tudományágakkal és a gyakorlattal való kapcsolatának megmutatása, felismertetése.

D) A problémamegoldó képesség fejlesztése

Mivel a munka során a menedzsereknek gyakran feladata, hogy maguk találják meg az adott probléma kezeléséhez a megfelelő modellt, a menedzserképzésben is több figyelmet és időt érdemes a problémamegoldó képesség fejlesztésére, modellalkotásra fordítani.

E) Az előhívásos módszer alkalmazásának könnyítése

A kísérlet dokumentációja szempontjából jobb lett volna, ha az óravégi közvetlen előhívás digitális formában, egy adatbáziskezelővel rendelkező digitális platformon történik. Így az egyes órák végén másodpercek alatt kideríthető lett volna, hogy a csoport, illetve az egyén meddig jutott el.

F) A szövegértés és szövegértelmezés fejlesztése

A szövegértés és szövegértelmezés matematikán belüli szerepével kapcsolatban a következő dilemmát fogalmaznám meg: a túlzott tömörség és szakszerűség nehezíti a szöveg értelmezését, és így nem dönthető el, hogy matematikai vagy szövegértési kompetencia hátráltatja a megoldást. Ugyanakkor törekedni kell rá, hogy hallgatóink az értelmiségi nyelvi rétegnek megfelelően értsék és használják a magyar nyelvet akár szaknyelvről, akár köznyelvről van szó.

8. Összefoglalás

Az egyetem elvégzése óta (1986) tanárként és szülőként folyamatosan szembesültem azzal, hogy a matematika nehéz, az egyetemi nehézségek hátterében gyakran az általános és középiskolai tananyag hiányos elsajátítása áll. A tananyag „ismételt” tanulása tudatilag és érzelmileg is nehézségbe ütközik. A nem szakirányú felsőfokú matematikatanítást nehezíti, hogy a hallgatók túl tömör, absztrakt formában találkoznak a tananyaggal és nem látják annak értelmét, jelentőségét, hasznát.

A műszaki értelmiségtől elvárt élethosszig tartó tanulás, illetve az európai kulcskompetenciák folyamatos fejlesztése feltételezi a kompetenciamotivációt, elsősorban az énhatékonyság tudatot. Olyan módszereket kerestem, amelyek segítségével ezek a célok a tanterv megvalósítása mellett, a matematikai tartalom sérülése nélkül elérhetők.

2015 és 2024 között ilyen irányú kutatásokat végeztem az akkori SZIE Gépészkar, illetve a jelenlegi MATE alapképzésének, illetve a mesterképzés műszaki menedzser szakának matematika tárgyaival.

Kutatásaim kiterjedtek a tananyagkiválasztási, tananyagelrendezési és közvetítési kérdésekre. Kidolgoztam, kipróbáltam és kiértékeltem számos módszertani újítást az általam oktatott matematika tantárgyakkal kapcsolatban.

2015-ben és 2018-ban esettanulmány keretében vizsgáltam a módszertani változtatásoknak a matematikatanulás hatékonyságára gyakorolt hatását az akkori GÉK műszaki menedzser (MSc) szak összevont nappali és levelező tagozatán a Műszaki-gazdasági matematika tárgy keretén belül.

Egy kontrollcsoportos kísérletet végeztem a 2024/2025-ös tanév első félévében a MATE-n a nem szakos matematikaoktatásban a Matematika tantárgyat hallgatók körében. Összehasonlítottam a bemeneti matematikai kompetenciákat és a félévi eredményt a kísérleti csoportban, a kontrollcsoportban, valamint a 442 fős évfolyamon és ezek egymáshoz való viszonyát is vizsgáltam.

A dolgozat *2. fejezete* a kutatás hipotéziseit tartalmazza.
A *3. fejezetben* próbálkozásaim pedagógiai, pszichológiai és matematika didaktikai hátteréről írok.
A *4. fejezetben* sorra veszem az alapfokú gépész képzésen oktatott matematika tárgyaimat, ismertetem a „módszertani újításaimat”, azok hatékonyságát és a bevezetésükkel kapcsolatos tanulságokat (Matematikai alapok – játékosítás, Matematika I – kooperatív tanulási módszer, digitális kompetencia fejlesztése, Valószínűségszámítás

és statisztika, Játék és matematika, E-tananyag: Matematikai érdekességek).
Az *5. fejezet* témája a műszaki menedzser szakon folyó mesterképzés keretében oktatott Műszaki-gazdasági matematika tantárgy. Ismertetem és elemzem a tárgyhoz kapcsolódó esettanulmányokat, valamint tartalmi és módszertani javaslatokat teszek a hatékonyság növelése érdekében.
A *6. fejezetben* arról a vizsgálatról számolok be, amelynek során az előhívásos módszer első fázisának – közvetlen visszakérdezés – hatékonyságát mértem. A kísérleti csoport, a kontrollcsoport és a 442 fős évfolyam előrehaladását statisztikai módszerekkel hasonlítottam össze.
A *7. fejezetben* módszertani újításaim eredményét vizsgálom a hipotézisek tükrében és kitérek néhány diszkussziós kérdésre.
A dokumentáció terjedelmes része a dolgozat végén található *Mellékletekbe* került.

A kutatás rövid bemutatása

A módszertani újításaimat meghatározó didaktikai elméletek közül a legfontosabbak *a szabatosság és az érthetőség egysége*, a tananyagot meghatározó *fundamentális elvek*, a *játékosítás* és a *kooperatív technikák*, valamint az *előhívásos tanulási módszer*.

A *matematikai pontosság* és az *érthetőség* között Kalmár László [8], Pólya György [9] és Reiman István [72] véleményével megerősítve igyekeztem a középutat megtalálni. Megkülönböztettem az írott és a szóbeli közlés szabatossági szintjét, a kiadott segédanyagokban pontosabban szerepeltettem a szóban „elnagyolt” megfogalmazást.

A tananyag kiválasztásánál, elrendezésénél, feldolgozásánál Schweiger [34] *fundamentális elveit* használtam iránytűként (történeti, horizontális, vertikális és humán dimenzió). Igyekeztem felkelteni és ébren tartani a hallgatók érdeklődését, megkönnyíteni a tananyag megértését és tartós bevésését. Olyan matematikai témákat és módszertani megoldásokat kerestem, amelyek a hallgatónak a matematikáról és a saját problémamegoldási eredményességéről alkotott képét is kedvezően befolyásolják. Olyan szituációba helyeztem az érintett matematikai fogalmat, eljárást, módszert, amely közelebb viszi azt a hallgatók mindennapi életéhez, munkájához. Az operációkutatás didaktikai jelentőségét például – a matematikai kompetenciák fejlesztésére való alkalmasságon túl – a kiemelkedő magyar eredmények, az ipari, kereskedelmi, államigazgatási, honvédelmi alkalmazási lehetőségek is növelik. A játékelméletben például olyan témát találtam, amely a matematika iránt érdeklődő és kevésbé érdeklődő közönség számára is érdekessé, hozzáférhetővé tehet bizonyos matematikai modellalkotási és problémamegoldási módszereket [58].

A *játékosítás*, valamint a *kooperatív technikák* előnye módszertani szempontból, hogy a játékokra jellemző pozitív elemek (játékosság, kíváncsiság, szocializálás vágya, tudásvágy kielégítése, kutatási vágy és a tervezés igénye, teljesítményre való törekvés, feszültségigény, versenyszellem, szereplési és elismerés utáni vágy) az ismert és megszokott játéktevékenység során az új tartalomra is átvihetők. A kooperatív munka keretében a tanulók együtt dolgoznak és egyaránt felelősek egymás tanulási eredményeiért és a sajátjukért. A terület kutatóival egyetértésben azt tapasztaltam, hogy a szociális készségeken túl az ismeretek és az intellektuális készségek is fejlődtek [14], [16]. A tanítás során számos játékot magam készítettem, illetve ismert játékokat alakítottam át (*Memória* és *Hatökör* kártyajátékok, *Ki nevet a végén* táblajáték). A kooperatív technikák közül a „*körforgást*", a „*villám randit*", a „*sorbarakást*" és a „*feladatkészítést*" használtuk.

Pszichológiai vizsgálatok sora bizonyítja, hogy az *előhívásra*, azaz a feleltetésre, a röpdolgozatra és a dolgozatra fordított idő nem vész kárba, hanem a tanulási folyamat szerves részévé tehető. A jól ütemezett előhívások csökkentik a felejtést, valamint az így szerzett tudás könnyebben transzferálható. Az első magyarországi kísérletek az idegennyelv tanulásához kapcsolódtak [31], majd az ELTE Matematikai Tanuláselméleti Pszichológiai Kutatócsoportja a matematikatanulás irányába is kiterjesztette a vizsgálatot. 2015 és 2024 között magam is megfigyeltem a módszer hatását a hallgatók tudásnövekedésére.

A kísérletek előkészítésében, lebonyolításában és értékelésében jelentős segítséget nyújtott az IKT. A központi támogatású eszközökön (e-learning, szövegszerkesztő, grafikus szerkesztő, táblázatkezelő) túl 2018-ban saját utakat is találtam, illetve készítettem az óráim számítógépes támogatásához (az órák előkészítéséhez, megtartásához), a hallgatók önálló tanulásának támogatásához és a tanulás eredményességének méréséhez, a teljesítmény-visszajelzéshez. Leggyakrabban a Word, az Excel és a Redmenta programokat használtam. A hallgatók tanulásának támogatására javasoltam még a GeoGebra, Excel, Matrix Calculator, Solve a Bimatrix Game, Redmenta, illetve a Wolfram Programming Lab alkalmazásokat [74], [75].

A kutatás során módszertani eszközként a megfigyelést, a szüneti beszélgetéseket, konzultációkat, kérdőíveket, minta dolgozatot, vizsgamintát, tudáspróba típusú hagyományos, illetve digitális (Redmenta) feladatlapokat használtam.

A *kutatás dokumentációja* megfigyeléssel, kérdőívekkel, standardizált felméréssel, beszélgetéssel, konzultációval, érdemjegyekkel, írásbeli visszajelzésekkel, elsősorban feladatlapokkal valósult meg.

Nem a matematika minden területére irányítottam „felületes” figyelmet, hanem egy-egy kiválasztott témában adtam részletekbe menő ízelítőt (a matematikai gondolkodás, érvelés, problémamegoldás, modellalkotás, ábrázolás, szimbólumok használata, a matematikáról való kommunikáció, valamint hagyományos és modern segédeszközök használata). Törekedtem arra, hogy az egyes megoldások receptszerű megjegyzése helyett a megoldások átgondolásával (metakogníció) stratégiákat alakítsanak ki a hallgatók. A metakogníció nekem is segített a munkám értékelésében, átdolgozásában. A tudáspróba típusú feladatlapok kellően gazdag adatbázist biztosítottak a mélyebb összefüggések vizsgálatához. A feladatlapok összeállításakor arra törekedtem, hogy ne a hiányzó, hanem a megszerzett tudás kerüljön előtérbe.

A törekvések megvalósulását, az irányok helyességét saját reflexióm, illetve tanítványaim szóbeli és írásbeli visszajelzése alapján, kérdőívek segítségével, megfigyelésekkel, esettanulmányokkal vizsgáltam.

Az MSc-n végzett esettanulmány pozitív tapasztalatai alapján a BSc-s csoportjaimban is bevezettem az előhívásos tanulási módszert, ami a hallgatóknak is tetszett. A módszert javasoltam a kollégáimnak is, a kidolgozott anyagaimat is rendelkezésükre bocsátottam (óravégi kérdéssorok, feladatlapok).

A hipotézisek és az eredmények a hipotézisek tükrében (101. o.)

H1 hipotézis A vizsgált módszerekkel mind a tanítási órákon, mind az egyéni tanulás során fejleszthetők a hallgatók kompetenciamotivációjának legfontosabb összetevői (pl. az énhatékonyság, a saját eredményességéről alkotott kép a matematikai problémák kezelését illetően [26]), a matematikai kompetenciák (lásd Reiss-féle kompetenciarendszer [13]), az EU kulcskompetenciák szinte kivétel nélkül [2].
H2 hipotézis A kiválasztott módszerek több időt és energiát igényelnek ugyan mind a tanár, mind a hallgató részéről, de pozitív az időmérleg. Minőségileg megváltozik a diákok részvétele a matematikatanulási folyamatban. Minőségileg megváltozik a tanár szerepe, részvétele a tanulási – tanítási folyamatban. Az IKT eszközök nagy mértékben segítik a kísérleti program megvalósítását.

Az alkalmazott tanulási módszerek *javították a matematikatanulás minőségét, hatékonyságát*. A BSc-n a kísérleti csoport hallgatóinak matematikai teljesítménye jobb lett, mint a párhuzamos kurzusokban (46. o. és 98. o.). Az MSc-s hallgatók teljesítménye legalább olyan jó lett, mint a megelőző időszakban (92. o.). Ugyanakkor az

„újítások” kedvezően alakították a matematikáról alkotott képet (érdekes, hasznos, érthető, …), amint az MSc-sek által kitöltött kérdőívre adott válaszok, valamint a hallgatókkal folytatott beszélgetések mutatják. A játékosítás és a kooperatív tanulási módszer fejlesztette az anyanyelvi kommunikációt, a szociális kompetenciát, a matematikai kommunikációt, a kompetenciamotivációt és a metakogníciót (H1).

A módszereim segítettek a matematikával szembeni kognitív, érzelmi és viselkedési vonatkozású gátlások lebontásában. A kognitív hatásokat a hallgatók munkáiból (zárthelyi, vizsgadolgozat), az érzelmi és a viselkedési hatásokat elsősorban közvetlen megfigyeléssel, illetve hallgatói visszajelzésekből – szüneti beszélgetések, konzultációk, kérdőívek – alapján állapítottam meg. Hallgatóim attitűdjében a legszembetűnőbb változásként az énhatékonyság növekedését, a kudarctól való félelem csökkenését tapasztaltam. Például jelentősen csökkent az olyan feladatok száma, amelyhez hozzá sem kezdtek. Ez részben a feladatlapoknak tulajdonítható (H1).

A kérdőívekre adott válaszok alapján a hallgatók több felelősséget vállaltak a saját tanulmányi előmenetelüket illetően (H1).

Az oktatás keretrendszerén belül meghatároztam az elsajátítandó fogalmakat, tételeket, eljárásokat és azok mélységét és azokat kértem számon (preferencia táblázat) (H1).

A 2024-es vizsgálatban (93. o.) az előhívásos tanulás első, közvetlen fázisának hatását elemeztük. 442 hallgató bemeneti matematikai kompetenciáit és félévi teljesítményét a kísérleti, illetve a kontrollcsoport adataival összehasonlítva statisztikailag is igazoltuk, hogy az előhívásos módszer első fázisa, az azonnali tesztelés jelentősen befolyásolta a hallgatók félévi teljesítményét. Ezt a relatív átlagok, a szórás és a kezdeti szinttel való gyenge korreláció mutatja (H1).

A hallgatók tanulási-tanítási folyamatban betöltött szerepe megváltozott. Magánbeszélgetések témája lett a tanulás. Felvállaltak bizonyos tanári szerepeket, például feladatkészítést, magyarázatot, a tanári gép beállítását, szoftver keresést (H2).

A tanári szerep is megváltozott, más minőségben vettem részt a matematikatanulási, -tanítási folyamatban (H2):

- Nagyobb felelősséget vállaltam a tananyag kiválasztásában, elrendezésében.
- Számos szituációban előadóból tutor lettem (játékosítás, kooperatív módszerek, tudásmérő helyett tudáspróba típusú feladatlapok).
- A korábbinál többet mozogtam a tanteremben a hallgatók között, ami hozzájárult ahhoz, hogy előadóból tanácsadóvá váljak.

Az *IKT eszközök* nagy mértékben segítették a kutatási program előkészítését, lebonyolítását és értékelését (H2).

A hosszú kísérletezésem bebizonyította, hogy lehet és érdemes játékos, színes módszereket bevezetni. A nem szakirányú egyetemi matematikaoktatásban azonban további problémák várnak megoldásra (pályaorientáció, pályaalkalmasság, szövegértés, emeltszintű érettségi, próbaegyetem).

9. Summary

Ever since graduating from university in 1986, as both a teacher and a parent, I've continually faced the challenge that mathematics is difficult. The difficulties encountered at university often stem from an incomplete grasp of primary and secondary school material. Repeatedly trying to learn this material is challenging, both cognitively and emotionally. Teaching non-specialized higher mathematics is further complicated by the fact that students encounter the subject matter in an overly condensed and abstract form, without understanding its meaning, significance, or practical use.

Lifelong learning, expected of technical professionals, and the continuous development of European key competencies, both presuppose competency motivation, primarily a sense of self-efficacy. I sought methods that could achieve these goals alongside curriculum implementation, without compromising the mathematical content.

Between 2015 and 2024, I conducted research in this area using the mathematics courses within the bachelor's programs of the former SZIE Faculty of Mechanical Engineering and the current MATE, as well as the Engineering Management specialization within their master's programs.

My research extended to questions of curriculum selection, organization, and delivery. I developed, tested, and evaluated numerous methodological innovations related to the mathematics courses I taught.

In 2015 and 2018, I conducted case studies examining the impact of methodological changes on the effectiveness of mathematics learning within the "Engineering and Economic Mathematics" course for the combined full-time and part-time sections of the Engineering Management (MSc) program at the then GÉK.

I conducted a control group experiment during the first semester of the 2024/2025 academic year at MATE, involving students enrolled in the "Mathematics" course within non-specialized mathematics education. I compared the incoming mathematical competencies and semester results in the experimental group, the control group, and the entire 442-student cohort, also examining their interrelationships.

Chapter 2 outlines the hypotheses of the research.
In *Chapter 3*, I describe the pedagogical, psychological, and mathematics didactics background of my endeavours.
Chapter 4 systematically presents the mathematics courses I taught in the bachelor's Mechanical Engineering specialization, detailing my "methodological innovations",

their effectiveness, and lessons learned from their implementation (Basics of Mathematics – gamification, Mathematics I – cooperative learning methods, digital competency development, Probability and Statistics, Games and Mathematics, E-textbook: Mathematical Curiosities).

Chapter 5 focuses on the Engineering and Economic Mathematics course taught within the master's program for Engineering Management. I describe and analyse the related case studies and propose content and methodological suggestions for increasing effectiveness.

In *Chapter 6*, I report on the study that measured the effectiveness of the first phase of the retrieval practice method – direct recall. I used statistical methods to compare the progress of the experimental group, the control group, and the entire 442-student cohort.

Chapter 7 examines the results of my methodological innovations in light of the hypotheses and addresses several discussion questions.

A substantial part of the documentation is included in the *Appendices* at the end of the dissertation.

Brief Introduction of the Research

Among the didactic theories that shaped my methodological innovations, the most important are the *unity of rigor and comprehensibility*, the *fundamental principles* defining the curriculum, *gamification* and *cooperative techniques*, and the *retrieval practice learning method*.

Regarding the balance between *mathematical precision* and *comprehensibility*, I aimed to find a middle ground, supported by the views of László Kalmár [8], György Pólya [9], and István Reiman [72]. I distinguished between the level of rigor required for written versus oral communication, ensuring that the written supplementary materials presented more precise formulations of concepts that might have been "simplified" verbally.

When selecting, arranging, and processing the curriculum, I used Schweiger's *fundamental principles* [34] as a guide (historical, horizontal, vertical, and human dimensions). I aimed to spark and maintain students' interest, facilitate their understanding of the material, and ensure its lasting retention. I sought mathematical topics and methodological solutions that would favourably influence students' perception of mathematics and their own problem-solving effectiveness. I placed relevant mathematical concepts, procedures, and methods into situations that connected them more closely to students' daily lives and work. For instance, the didactic significance of operations research is enhanced not only by its suitability for developing mathematical competencies but also by outstanding Hungarian achievements in the field and its application possibilities in industry, commerce, public administration, and defence. In game theory, for example, I found a topic [58] that could make certain mathematical modelling and problem-solving methods interesting and accessible to both mathematics-interested and less interested audiences.

From a methodological perspective, the advantage of *gamification* and *cooperative techniques* is that the positive elements characteristic of games – playfulness, curiosity, desire for socialization, satisfaction of the desire for knowledge, drive for research and planning, striving for achievement, need for tension, competitive spirit, and the desire for performance and recognition – can be transferred to new content during familiar and customary play activities. Within the framework of cooperative work, students collaborate and are equally responsible for each other's learning outcomes as well as their own. In agreement with researchers in this field, I found that beyond social skills, knowledge and intellectual skills also developed [14], [16]. During teaching, I personally created numerous games and adapted existing ones (e.g., *Memory* and *6 nimmt!* card games, *Ludo* board game). Among the cooperative techniques, we used "*Revolving Circle*", "*Speed dating*", "*Sequencing*", and " *Send-a-Problem*".

A series of psychological studies demonstrate that time spent on *retrieval practice* – that is, on oral examinations, quizzes, and tests – is not wasted but can be made an integral part of the learning process. Well-timed retrieval exercises reduce forgetting, and the knowledge acquired this way is more easily transferable. The first experiments in Hungary were related to foreign language learning [31], and later, the ELTE Theory of Learning Mathematics Research Group extended the investigation to include mathematics education. Between 2015 and 2024, I also observed the method's effect on students' knowledge growth.

ICT provided significant assistance in the preparation, execution, and evaluation of the experiments. Beyond centrally supported tools (e-learning platforms, word processors, graphics editors, spreadsheets), in 2018 I also found or created my own ways to provide computer support for my classes (for preparing and conducting lessons), to support students' independent learning, and to measure learning effectiveness and provide performance feedback. Most frequently, I used Word, Excel, and Redmenta. To further support student learning, I also recommended applications such as GeoGebra, Excel, Matrix Calculator, Solve a Bimatrix Game, Redmenta, and Wolfram Programming Lab [74], [75].

During the research, I used observation, informal discussions during breaks, consultations, questionnaires, sample assignments, exam samples, and traditional and digital (Redmenta) knowledge assessment type worksheets as methodological tools.

The *documentation of the research* was carried out through observation, questionnaires, standardized surveys, discussions, consultations, grades, written feedback, and primarily through worksheets.

I did not direct "superficial" attention to every area of mathematics; instead, I provided a detailed taste of selected topics (mathematical thinking, reasoning, problem-solving, modelling, representation, use of symbols, communication about mathematics, and the use of traditional and modern aids). I strived for students to develop strategies through reflecting on solutions (metacognition), rather than merely memorizing solutions like recipes. Metacognition also helped me evaluate and revise my own work. The knowledge assessment type worksheets provided a sufficiently rich database for examining deeper correlations. When compiling the worksheets, I aimed to highlight acquired knowledge rather than focusing on missing knowledge.

I assessed the realization of these endeavours and the correctness of the chosen directions through my own reflection, as well as based on verbal and written feedback from my students, with the aid of questionnaires, observations, and case studies.

Based on the positive experiences from the case study conducted in the MSc program, I also introduced the retrieval practice learning method to my BSc groups, which students also appreciated. I recommended the method to my colleagues as well, making my developed materials (end-of-class question sets, worksheets) available to them.

Hypotheses and Results in Light of the Hypotheses

Hypothesis H1

Through the methods investigated, the most important components of students' competency motivation (e.g., self-efficacy, their perception of their own effectiveness in handling mathematical problems [26]), mathematical competencies (see Reiss's competency framework [13]), and almost all of the EU key competencies [2] can be developed, both during teaching hours and through individual study.

Hypothesis H2
Although the selected methods require more time and effort from both the teacher and the student, the time balance is positive. Students' participation in the mathematics learning process changes qualitatively. The teacher's role and involvement in the learning-teaching process also change qualitatively. ICT tools significantly aid the implementation of the experimental program.

The applied learning methods *improved the quality and effectiveness of mathematics learning*. In the BSc program, the mathematical performance of the experimental group students was better than in parallel courses. The performance of MSc students was at least as good as in the preceding period. At the same time, the "innovations" favourably shaped the perception of mathematics (interesting, useful, understandable, etc.), as shown by the responses to questionnaires filled out by MSc students and discussions with students. Gamification and the cooperative learning method developed native language communication, social competence, mathematical communication, competency motivation, and metacognition (H1).

My methods helped in breaking down cognitive, emotional, and behavioural inhibitions towards mathematics. Cognitive effects were determined from students' work (midterms, exam papers), while emotional and behavioural effects were primarily established through direct observation and student feedback – from discussions during breaks, consultations, and questionnaires. The most striking change I observed in my students' attitudes was an increase in self-efficacy and a decrease in the fear of failure. For example, the number of tasks they didn't even attempt significantly decreased. This is partly attributable to the worksheets (H1).

Based on the responses to the questionnaires, students took more responsibility for their own academic progress (H1).

Within the framework of the education, I defined the concepts, theorems, and procedures to be mastered, as well as their depth, and these were what I assessed (preference table) (H1).

In the 2024 study, we analysed the effect of the first, direct phase of retrieval practice. By comparing the incoming mathematical competencies and semester performance of 442 students with data from the experimental and control groups, we statistically confirmed that the first phase of the retrieval practice method – immediate testing – significantly influenced students' semester performance. This is shown by the relative averages, the standard deviation, and the weak correlation with the initial level (H1).

The *students'* role in the learning-teaching process changed. Learning became a topic of private conversations. They took on certain teacher roles, such as preparing tasks, explanations, setting up the teacher's computer, and searching for software (H2).

The *teacher's* role also changed; I participated in the mathematics learning and teaching process in a different quality (H2):

- I took greater responsibility in selecting and arranging the curriculum.
- In numerous situations, I transitioned from lecturer to tutor (gamification, co-operative methods, using knowledge assessment type worksheets instead of traditional tests).
- I moved around the classroom among the students more than before, which contributed to my transformation from lecturer to advisor.

ICT tools greatly assisted the preparation, execution, and evaluation of the research program (H2).

My lengthy experimentation proved that it is possible and worthwhile to introduce playful, diverse methods. However, further problems await solution in non-specialized university mathematics education (career orientation, career aptitude, reading comprehension, advanced level secondary school leaving exam, trial university programs).

Irodalomjegyzék

[1] Csapó, B. (2002). A tudáskoncepció változása: nemzetközi tendenciák és a hazai helyzet. Új Pedagógiai Szemle, 2. sz. 38–45. https://ofi.oh.gov.hu/tudastar/tudas-koncepcio (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[2] European Key Competences. European Education Area, European Commission, Official Sites of the European Union. https://education.ec.europa.eu/hu/education-levels/school-education/basic-skills (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[3] Csákány, A. (2010). Results of mathematics 'test zero' at Budapest University of Technology and Economics in 2010. http://www.akademiai.com/doi/abs/10.1556/Pollack.7.2012.S.4 (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[4] Dékány, K. É. (2017). A matek miatt nem lesz diplomám? Érintő: Elektronikus Matematikai Lapok http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2017-09/525-a-matek-miatt-nem-lesz-diplomam

[5] Erdélyi, É., Dukán, A., & Szabó, C. (2019). The transition problem in Hungary: curricular approach. Teaching Mathematics and Computer Science, 17(1), 1–16.

[6] Bandura, A. (1994). Self-efficacy. In V. S. Ramachaudran (Ed.), Encyclopedia of human behavior. Vol. 4, 71–81. New York: Academic Press.

[7] Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2006). Competence motivation and competence acquisition: functional didactic options by inner differentiation and individualization. (Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb: Funktionale didaktische Fördermöglichkeiten durch Differenzierung und Individualisierung.) Teaching Mathematics and Computer Science (ISSN: 1589-7389) 4(1) 1–52.

[8] Kalmár, L. (1986). Integrállevél. Gondolat Kiadó, Budapest idézi http://www.inf.u-szeged.hu/projectdirs/ kalmar/pages/breviarium_matematika.php (Utolsó megnyitás 2021. 08. 15.)

[9] Pólya, Gy. (2007). A gondolkodás iskolája. Akkord Kiadó Kft.

[10] White, R. W. (September 1959). „Motivation reconsidered: The concept of competence". Psychological Review. 66 (5): 297–333. doi:10.1037/h0040934. PMID 13844397.

[11] Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2003). Moderne Motivationsforschung als Paradigmenverschmelzung? Die Leistungsmotivationsforschung und ihre Wurzeln als Kern einer allgemeinen Motivationstheorie. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft, 5–60.

[12] Czeglédy, I. (2010). Kompetenciaalapú matematikaoktatás, TÁMOP Eger.

[13] Sälzer, C., Reiss, K., Schiepe-Tiska, A. & Prenzel, M. (2013). Zwischen Grundlagenwissen und Anwendungsbezug: Mathematische Kompetenz im internationalen Vergleich. In M. Prenzel, C. Sälzer, E. Klieme & O. Köller (Hrsg.), PISA 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland (S. 47–97). Münster: Waxmann. https://www.springer.com/de/book/9783658150266 (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[14] Barbarics, M., Rózsahegyiné Vásárhelyi, É., Wintsche, G. (2019). A játékok fejlesztő hatása. Eötvös Loránd Tudományegyetem. ISBN: 9789634891321

[15] Bárdossy, I.: A produktív tanulás főbb összetevői és feltételei. in: Kooperatív pedagógiai stratégiák az iskolában III. Pécs, JPTE Tanárképző Intézete, 1999. 20–21.

[16] Óhidy, A. (2005). Az eredményes tanítási óra jellemzői, Kooperatív tanulási formák a gyakorlatban. Budapest, Új Pedagógiai Szemle 2005/12. 100–108.

[17] Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In: Lauren B. Resnick (Ed.). The nature of intelligence (231–236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[18] Pólya, Gy. (1945). How to Solve It. Princeton: Princeton University Press.

[19] Kaiser, A., Kaiser, R., Lambert, A., & Hohenstein, K. (2018). Metakognition: die neue Didaktik: metakognitiv fundiertes Lehren und Lernen ist Grundbildung. Vandenhoeck & Ruprecht.

[20] Hattie, J. (2008). Visible Learning. London: Routledge.

[21] Molnár, É. (2009). Az önszabályozás értelmezései és elméleti megközelítései. Magyar Pedagógia, 109. 4. sz. 343–364.

[22] Pólya, Gy. (1988). Indukció és analógia - A matematikai gondolkodás művészete I. Gondolat Kiadó

[23] Biela, A. (1991). Analogy in Science: From a Psychological Perspective. Frankfurt: Peter Lang.

[24] Paivio, A., Ernest, C. H. (1971). Imagery ability and visual perception of verbal and nonverbal stimuli. Perception & Psychophysics 10, 429–432.

[25] Wheeler, M. A., & Roediger, H. L. (1992). Disparate effects of repeated testing: Reconciling Ballard's (1913) and Bartlett's (1932) results. Psychological Science, 3(4), 240–245. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1992.tb00036.x

[26] Bernáth, L., Vásárhelyi, É. (2018). Örömteli és eredményes matematikatanulás. 58. Rátz László Vándorgyűlés. Győr, 2018. július 3–6.

[27] Bruner, J. S., Olver, R. R., & Greenfield, P. M. (1966). Studies in cognitive growth.

[28] Tulving, E. (1985). Memory and consciousness. Canadian Psychology/Psychologie canadienne, 26(1), 1–12. https://doi.org/10.1037/h0080017

[29] Roediger, H. L., & Karpicke, J. D. (2006). The Power of Testing Memory: Basic Research and Implications for Educational Practice. Perspectives on Psychological Science, 1(3), 181–210. https://doi.org/10.1111/j.1745-6916.2006.00012.x

[30] Kang, S. H., McDermott, K. B., & Roediger III, H. L. (2007). Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long-term retention. European journal of cognitive psychology, 19(4–5), 528–558.

[31] Keresztes, A., Kaiser, D., Kovács, G., & Racsmány, M. (2014). Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas. Cerebral Cortex, 24(11), 3025–3035.

[32] Lehman, M., Smith, M. A., & Karpicke, J. D. (2014). Toward an episodic context account of retrieval-based learning: dissociating retrieval practice and elaboration. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 40(6), 1787.

[33] Carpenter, S. K., & Pashler, H. (2007). Testing beyond words: Using tests to enhance visuospatial map learning. Psychonomic bulletin & review, 14(3), 474–478.

[34] Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematics education, New mathematics education research and practice, (J. Maa and W. Schlöglmann, eds.), Sense Publisher, Rotterdam, 2006, 63–73.

[35] Bruner, J. S., Olver, R. R., & Greenfield, P. M. (1966). Studies in cognitive growth.

[36] Clark, J.M., Paivio, A. (1987) A Dual Coding Perspective on Encoding Processes. In: McDaniel M.A., Pressley M. (eds) Imagery and Related Mnemonic Processes. Springer, New York, NY.

[37] Clark, J.M., Paivio, A. (1991). Dual coding theory and education. Educ Psychol Rev 3, 149–210.

[38] Fitts, P. M., & Posner, M. I. (1967). Human performance.

[39] Prensky, M. (2001) Digital Natives Digital Immigrants. I-II. On the Horizon MCB University Press, Vol. 9 No. 5, October 2001. http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part1.pdf http://www.marcprensky.com/writing/Prensky%20-%20Digital%20Natives,%20Digital%20Immigrants%20-%20Part2.pdf

[40] Schrackmann, I. (2010). Gestaltung von Arbeitsblättern. Skript für Kursteilnehmende. https://www.zebis.ch/download/unterrichtsmaterial/gestaltung_von_arbeitsblaettern.pdf

[41] Vásárhelyi É., Astleitner, H., Herber, H.-J., Parisot, K. J. (1996). Tanítható-e a problémamegoldás? Iskolakultúra 10. 54–61. http://misc.bibl.u-szeged.hu/45120/1/iskolakultura_1996_010_054–061.pdf

[42] Ambrus, G. (2005). Über einen allgemeinen Übungsbegriff bei verschiedenen Unterrichtsmethoden in der Planung des Mathematikunterrichtes. Teaching Mathematics and Computer Science 2, 1–26. https: //www.researchgate.net/publication/291220107_Uber_einen_allgemeinen_Ubungsbegriff_bei_verschiedenen_Unterrichtsmethoden_in_der_Planung_des_Mathematikunterrichtes (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[43] Csapó, B. (1997). A tanulói teljesítmények értékelésének méréses módszerei. In: Pőcze Gábor (Szerk.) A közoktatási intézmények tevékenységének tervezése és ellenőrzése. OKI. Budapest. 97–111.

[44] Vári, P. (2003). (Szerk.) PISA-vizsgálat 2000. Műszaki Könyvkiadó. Budapest.

[45] Bácsi, J., Sejtes, Gy. (2009). Didaktikai útmutató a szövegértési feladatlapok összeállításához. Anyanyelv-pedagógia: http://www.anyanyelv-pedagogia.hu/cikkek.php?id=218 (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[46] Jakab E. (2017). GeoGebrával készült dinamikus segédanyagok, interaktív munkalapok értékelése. Varga Tamás Módszertani Napok, 2017. november 10–11. https://drive.google.com/file/d/15KH48xqSIn5zvXZgBQM58RU-EPQ02_CwX/view

[47] Cattel, Weiss, (1980). Culture Fair Test 20-R

[48] Sjuts, J.n (2003): Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. Journal für Mathematik-Didaktik 24 (1), 18–40

[49] Kagan, S. (1985). Cooperative Learning. San Clemente, CA: Kagan Publishing

[50] Johnson, D., Johnson, R. (1975). Learning together and alone, cooperation, competition, and individualization. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

[51] Dörner, D. (1999). Bauplan für eine Seele. Reinbek: RowohltFredrickson, B. L. What good are positive emotions? Review of General Psychology, 2, 300–319.

[52] Fredrickson, B. L. & Branigan, Ch. (2005). Positive emotions broaden the scope of attention and thought-action repertoires. Cognition and Emotion, 19 (3), 313–332.

[53] Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (2005). Empirische Forschung in der Didaktik der Mathematik und ihre wissenschaftliche Dokumentation. In Parisot, K. J. &Vásárhelyi, É. (2005). Positionen – Mathematikdidaktik in Entwicklung, Salzburg: Abacus Verlag (in Druck)

[54] Kuhl, J. (2001). Motivation und Persönlichkeit. Interaktionen psychischer Systeme. Göttingen: Hogrefe

[55] Dékány, K. É. (2018). Első tapasztalataim a kooperatív technikák alkalmazásairól az egyetemi matematikaoktatásban. Érintő: Elektronikus Matematikai Lapok. http://www.ematlap.hu/index.php/tanora-szakkor-2018-03/649-dekany-eva-elso-tapasztalataim-a-kooperativ-technikak-alkalmazasairol-az-egyetemi-matematika-oktatasban

[56] Dékány, K. É., Gődényné Hajdu, G., Székely, L., Veres, A. (2018). Matematikai érdekességek. Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar https://ele-arning.szie.hu/mod/scorm/view.php?id=55623

[57] Gallai, T. (1960). A königsbergi hidak, a kilenc ösvény és más gráfelméleti problémák. https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar07.html (Utolsó megnyitás 2021. 06. 10.)

[58] Nagy, T.: Játékelmélet. Miskolci Egyetem Alkalmazott Matematikai Tanszék https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjxpunVuvDuAhXxl4sKHew-tCfYQFjAAegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fwww.uni-miskolc.hu%2F~matente%2Foktatasi%2520tananyagok%2FJATEKELMELET.pdf&usg=AOvVaw0uW0pCD--A9ll8u6pXxKCG (Utolsó megnyitás 2021. 02. 17.)

[59] Mérő, L. (2013). Mindenki másképp egyforma. Tericum Kiadó Kft.

[60] Avis, D., Rosenberg, G., Savani, R., and von Stengel, B. (2010), Enumeration of Nash Equilibria for Two-Player Games. Economic Theory 42, 9–37. Online solver available at http://banach.lse.ac.uk (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[61] Tóth, I. J. (2010). Játékelméleti dilemmák társadalomfilozófiai alkalmazásokkal. JATEPress.

[62] Dékány, K. É. (2018). Game theory for managers and mechanical manager students. Teaching Mathematics and Computer Science 16(1), 73–91. https://ojs.lib.unideb.hu/tmcs/article/view/15010/12912

[63] Lukács, A.: Matematika II/2. Széchenyi István Egyetem, Matematika és Számítástudomány Tanszék https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwi3t9CohPHuAh-VQxIsKHQxADdUQFjAAegQIAxAC&url=http%3A%2F%2Frs1.sze.hu%2F~alukacs%2FMatematika_II_2.pdf&usg=AOvVaw2FRg3_pO-sAJddJCmkkZbvG. (Utolsó megnyitás: 2025. 05. 25.)

[64] Von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). Theory of games and economic behavior Princeton. *Princeton University Press*, *1947*, 1953.

[65] Dékány, K. É. (2017). Engineering and Economic Mathematics for Engineering Management Students. Teaching Mathematics and Computer Science 15(1–2.), 35–50. https://ojs.lib.unideb.hu/tmcs/article/view/15000/12902

[66] Szabó, Cs., Szeibert, J. (2018). Efficiency of Test-Enhanced Learning in Teaching Elementary Geometry. In: Ewa, Bergqvist; Magnus, Österholm; Carina, Granberg;

Lovisa, Sumpter (Ed.) Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Gothenburg, Svédország: University of Gothenburg, 296–296.

[67] Szilágyi, B. (2021). Egy hajóban evezünk, avagy közös nehézségek és megoldások a matematikaoktatásban. Előadás a 60. Rátz László Vándorgyűlésen. https://www.youtube.com/watch?v=TkA3QB9jKyk (Utolsó megnyitás 2025. 05. 25.)

[68] Szűcs, K. (2009). Difficulties of the Non-Major Specific Bilingual Mathematics Education. PhD Thesis University of Debrecen https://dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/handle/2437/93941/t%C3%A9zisf%C3%BCzet_Sz%C5%B1cs.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[69] Piaget, J., & Duckworth, E. (1970). Genetic epistemology. *American Behavioral Scientist*, 13(3), 459–480.

[70] Pintér, M. (2014). A Z- és az alfageneráció tanulási szokásai, matematikai szempontból. *Gyermeknevelés: Online tudományos folyóirat* 2: 2 pp. 2–7., 6 p.

[71] Guidelines on physical activity, sedentary behaviour and sleep for children under 5 years of age. WHO ajánlás https://iris.who.int/handle/10665/311664

[72] Reiman, I. (1986). A geometria határterületei. Gondolat Kiadó, Budapest.

[73] Matematika tantárgyleírás 2024. https://elearning.uni-mate.hu/course/view.php ?id=31835

[74] Wolfram, C. (2020). The Math(s) Fix: An Education Blueprint for the AI Age. Wolfram Media, Incorporated.

[75] Gilányi, A. (2015). Mathability and computer aided mathematical education. In: IEEE (szerk.) 2015 6th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom): Proceedings of a meeting held 19–21 October 2015, Győr, Hungary New York, Amerikai Egyesült Államok: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) (2015) 658 p. pp. 473–477.

Mellékletek

1. melléklet: Kérdőív, 2015

	Kérdőív Matematika II tárgy, 2015. tavaszi félév
Beszélgetés elkezdése	Titoktartás, név nélkül, nem kötelező válaszolni Mi az érdeklődési köre? Mire büszke?
Gondolkodás	Szeret-e logikai játékot játszani? Ha igen, melyiket inkább? (van ellenfél – sakk, malom, nincs ellenfél – sudoku, pasziánsz) Ha nem, akkor milyen játékot? Egy új játéknál szeretné-e, hogy a játékszabályokon túl taktikai tanácsokat is adjanak, vagy szeretné maga kitalálni?
Eddigi matematika (pl. középiskola)	Milyen matematika tanárai voltak? Hogy érezte magát matematika órákon? Milyen a viszonya a matematikához?
Matematika I	Tanítottam-e már? Melyik tárgyból? Mikor járt Matematika I-re? Hányas lett Matematika I-ből? Milyen rendszeresen járt előadásra? Mennyit értett az előadásból? Mennyire tudta használni a gyakorlaton az előadáson tanultakat?
Motiváltság	Hányadik tárgyfelvétele ez? Fontos-e, hogy most elvégezze a tárgyat? Miért?
4 óra, tanár személye	Örül-e annak, hogy a tárgy 3 helyett 4 órás? nem örül --- mindegy --- örül Fontos-e, hogy melyik tanárhoz kerül? nem fontos --- közepesen fontos --- fontos Miért ezt a csoportot választotta?

2. melléklet: Memóriajáték paklijai

Kezdő memória kártyák 3 hatványainak gyakorlásához

$(3^{11})^0$	1
$3\cdot(3^0)^2$	3
$\frac{3^5\cdot 3^6}{3^5\cdot 3^4}$	3^2
$\frac{3^6}{3^3}$	3^3
$3\cdot 3^3$	3^4
$\frac{3^{10}}{3\cdot 3^4}$	3^5
$3^2\cdot 3^4$	3^6
$3\cdot(3^2\cdot 3^4)$	3^7
$(3^2)^4$	3^8
$(3^3)^3$	3^9

Memória kártyák a logaritmus értékének meghatározásához

$\log_2 8$	3
$\log_2 \frac{1}{2^3}$	-3
$\log_2 1$	0
$\log_5 \sqrt{5}$	$\frac{1}{2}$
$\log_5 5^{\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$
$\log_5 25$	2
$\log_5 \frac{1}{5^2}$	-2
$\log_2 -2$	nem értelmezett
$\log_2 \sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{3}$
$2^{\log_2 5}$	5

Memória kártyák a logaritmus azonosságainak gyakorlásához

$\lg 20 - \lg 4$	$\lg 5$
$\lg 4 + \lg 5$	$\lg 20$
$\lg 24 - \lg 4$	$\lg 6$
$\lg 4 + \lg 6$	$\lg 24$
$3 \cdot \lg 2$	$\lg 8$
$2 \cdot \lg 3$	$\lg 9$
$\lg 4 + \lg 4$	$\lg 16$
$\lg 10 \cdot \lg 30$	$\lg 30$
$\frac{\lg 12}{\lg 10}$	$\lg 12$

Memória kártyák a négyzetgyökös kifejezésekre

szorzat négyzetgyöke	$\sqrt{50}$	$5 \cdot \sqrt{2}$
	$\sqrt{20}$	$2 \cdot \sqrt{5}$
	$\sqrt{18}$	$3 \cdot \sqrt{2}$
	$\sqrt{12}$	$2 \cdot \sqrt{3}$
nevezetes azonosságok	$(\sqrt{2}+1)^2$	$3 + 2 \cdot \sqrt{2}$
	$(\sqrt{2}+\sqrt{2})^2$	8
	$(\sqrt{2}+1)^2$	$3 + 2 \cdot \sqrt{2}$
	$(\sqrt{2}-2)^2$	$(2-\sqrt{2})^2$
	$(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)$	1
	$(3+\sqrt{2}) \cdot (3-\sqrt{2})$	7
nevező gyöktelenítése	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$	$\sqrt{2} - 1$

Memória kártyák szögfüggvények gyakorlásához

Nevezetes szögek értékei fokban és radiánban

30°	$\frac{\pi}{6}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$
180°	π
360°	2π

Nevezetes szögek szinuszának, illetve koszinuszának pontos értéke

$\sin 0$	0	$\cos\frac{\pi}{2}$
$\sin\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3}$
$\sin\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4}$
$\sin\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6}$
$\sin\frac{\pi}{2}$	1	$\cos 0$
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\cos\frac{2\pi}{3}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\frac{3\pi}{4}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{5\pi}{6}$
$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	-1	$\cos\pi$

Nevezetes pótszögpárok szinusza és koszinusza közötti kapcsolat

$\sin 0^\circ$	$\cos 90^\circ$
$\sin 30^\circ$	$\cos 60^\circ$
$\sin 45^\circ$	$\cos 45^\circ$
$\sin 60^\circ$	$\cos 30^\circ$
$\sin 90^\circ$	$\cos 0^\circ$

Szögfüggvények paritása

$\sin(-x)$	$-\sin x$
$\cos(-x)$	$\cos x$
$-\cos(-x)$	$-\cos x$
$\mathrm{tg}(-x)$	$-\mathrm{tg}\, x$

Adott szög szögfüggvényei közötti kapcsolat (több egyenlő értékű kártyalap van)

$\sin^2 x + \cos^2 x$	1	A
$\dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\mathrm{tg}\, x$	B
$\mathrm{ctg}\, x$	$\dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$	C
$\mathrm{tg}\, x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\, x}$	B
$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x$	1	A
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$	B
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$	C

3. melléklet: Matematikai kártyalapok a Vigyázz 6! játékhoz

π^0	$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$	$1^{20}\cdot 3$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$	$\frac{20+30}{10}$	$\frac{50+10}{10}$
$\frac{7+7+7}{3}$	$\frac{8+8+8}{3}$	$\frac{1}{3^{-2}}$	$\frac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$	$33\cdot 3^{-1}$	$100\cdot\frac{6}{50}$
$1+2\cdot 6$	$3^0\cdot 14$	$3+2\cdot 6$	$\frac{1}{4^{-2}}$	$\frac{17\cdot 65}{65}$	$2\cdot 3^2$
$19\cdot 1^{-1}$	$60\cdot 3^{-1}$	$\sqrt[3]{21}^3$	$66\cdot 3^{-1}$	$1^{-2}\cdot 23$	$3\cdot 2^3$
$50\cdot 2^{-1}$	$25+3^0$	$\frac{9}{\frac{1}{3}}$	$100\cdot\frac{14}{50}$	$\sqrt{29}^2$	$31+(-1)^3$
$\frac{31+31}{2}$	$16:\frac{1}{2}$	$99\cdot 3^{-1}$	$100\cdot\frac{17}{50}$	$70\cdot 2^{-1}$	$2^2\cdot 3^2$
$37\cdot 1^{\frac{5}{6}}$	$37+(-1)^4$	$\sqrt[3]{39^3}$	$5\cdot 2^3$	$1^{\frac{3}{4}}\cdot 41$	$\frac{21}{50}\cdot 100$
$4^0\cdot 43$	$\frac{22}{\frac{1}{2}}$	$90\cdot 2^{-1}$	$\frac{46+46}{2}$	$(-1)^6+46$	$\frac{1}{\frac{1}{48}}$
$\frac{1}{7^{-2}}$	$2\cdot 5^2$	$51\cdot\frac{19}{19}$	$\sqrt[7]{52}^7$	$\frac{53}{1^{-1}}$	$(-1)^5+55$
$70\cdot 2^{-1}$	$56\cdot 5^0$	$\sqrt{57^2}$	$\frac{58}{1^{20}}$	$\frac{21\cdot 59}{21}$	$\frac{20\cdot 30}{10}$
5^0+60	$\frac{31}{50}\cdot 100$	$21:\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8^{-2}}$	$\frac{17\cdot 65}{17}$	$\frac{1}{\frac{1}{66}}$

4. melléklet: Ki nevet a végén „szerencsekártyák”

Nevezetes azonosságok felismerése

$(x+3)^2$	$(4+x)^2$	$(x-4)^2$	$(2-x)^2$
$(5-x)^2$	$(-x+2)^2$	$(-3+x)^2$	$(-x-3)^2$
$(-2-x)^2$	$(3+x)(3-x)$	$(2-x)(2+x)$	$\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)$

Szorzattá alakítás, egyenletmegoldás

$(2x-3)(x+1)=0$	$x(x+5)=0$	$2(x+3)(x+2)=0$
$2x(x-3)=0$	$(x-4)3x=0$	$2(x+1)^2=0$
$x^2+7x=0$	$2x^2+8x=0$	$x^2-16=0$
$x^2+16=0$	$2x^2-8=0$	$2x^2+8=0$
$x^2+2x+1=0$	$x^2-4x+4=0$	$(x-1)^2(x+3)^2=0$
$4(x+2)(x-3)^3=0$	$x(x+1)(x+2)^2=0$	$2x(x+5)x^2=0$
$(x^2+2x)(x+1)=0$	$(2x+2)(x+x^2)=0$	

Elemi alapfüggvények, valamint egyszerű transzformáltjaik grafikonjának ábrázolása

$f(x)=\sqrt{x}$	$f(x)=x^3$	$f(x)=x^4$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$f(x)=sin\,x$
$f(x)=cos\,x$	$f(x)=tg\,x$	$f(x)=e^x$
$f(x)=ln\,x$	$f(x)=x-4$	$f(x)=5-x$
$f(x)=\frac{8x+4}{4}$	$f(x)=(x-2)^2$	$f(x)=(x+2)^2+3$
$f(x)=5-x^2$	$f(x)=3+\frac{1}{2}x^2$	$f(x)=(x+1)^2-(x-1)^2$
$f(x)=(x-3)(x+3)$	$f(x)=e^{-x}$	

5. melléklet: Függvényvizsgálat I. és Függvényvizsgálat II.

Megkeresem a derivált függvény zérushelyeit.
Ahol a derivált előjelet vált, ott az eredeti függvénynek helyi/lokális szélsőérték helye van. A függvény menetéből látszik, hogy ez helyi minimum vagy maximum.
Rendezze sorba az egyes lépéseket! (Függvényvizsgálat I.)
Ahol a derivált nem vált előjelet, ott az eredeti függvények nincs helyi/lokális szélsőérték helye.
Az első derivált segítségével az eredeti függvény menetének meghatározása.
Az első derivált segítségével az eredeti függvény szélsőérték helyeinek meghatározása.
Táblázatot rajzolok. A táblázat első sorába azon x értékeket írom, ahol az eredeti függvényt értelmetlen, illetve ahol az első derivált nulla.
Megoldom a derivált egyenlő nulla egyenletet.
A táblázat harmadik sorába az eredeti függvény menetét rajzolom. Ahol az első derivált negatív, ott az eredeti függvény csökken, ahol az első derivált pozitív, ott az eredeti függvény nő.
Deriválom a függvényt.
A táblázat második sorában az első derivált függvény írom. Először azt, ahol értelmetlen, illetve ahol 0, a többi tartományt plusz/mínusz előjelekkel töltöm ki.

Rendezze sorba az egyes lépéseket! (Függvényvizsgálat II.)
A második derivált segítségével az eredeti függvényt alapjának meghatározása.
Megoldom a második derivált egyenlő nulla egyenletet.
Megkeresem a második derivált függvény zérushelyeit.
A második derivált segítségével az eredeti függvény inflexiós pontjainak meghatározása.
Ahol a második derivált előjelet vált, ott az eredeti függvénynek inflexiós pontja van.
Kétszer deriválom a függvényt.
Táblázatot rajzolok. A táblázat első sorába azon x értékeket írom, ahol az eredeti függvényt értelmetlen, illetve ahol a második derivált nulla.
Ahol a második derivált nem vált előjelet, ott az eredeti függvénynek nincs inflexiós pontja.
A táblázat harmadik sorában az eredeti függvény alakját rajzolom. Ahol a második derivált negatív, ott az eredeti függvény konkáv (szomorú), ahol a második derivált pozitív, ott az eredeti függvény konvex (mosolygós).
A táblázat második sorában a második derivált függvény írom. Először azt, ahol értelmetlen, illetve ahol nulla. A többi tartományt plusz/mínusz előjelekkel töltöm ki.

6. melléklet: A Műszaki-gazdasági matematika tantárgyi ismertetője 2015.

Szent István Egyetem

Gépészmérnöki Kar

Matematikai és Informatikai Intézet

2015. szeptember

TANTÁRGYI ISMERTETŐ

A tantárgy címe és kódja (magyarul, angolul): Műszaki-gazdasági matematika / Engineering and Economic Mathematics SGMMAX02XMN, SGMMAX02XML

Tárgyfelelős: Dr. Sebestyén Zoltán egyetemi docens

Tárgyfelelős koordinátor: Dékány Kornélia Éva tanszéki mérnök

Hallgatók: GÉK műszaki menedzser (MSc) szak nappali és levelező tagozat.

A tárgy legfőbb célja: a korábbi matematikai tárgyakra építve olyan további alapvető matematikai és statisztikai ismeretek átadása, amelyek - a műszaki tárgyak matematikai igényén túlmenően - a műszaki menedzsment területén szükséges legfontosabb döntéstámogatási modellek alkalmazását segítik. Konkrétan: Kiegészítő ismeretek a vektoranalízis, a közönséges és a parciális differenciálegyenletek és a közgazdaságtani modellek területén. A tárgy további célja újabb készségek kialakítása a szerzett ismeretek számítógépes alkalmazásában.
A tantárgy a műszaki-gazdasági területen a problémafeltárást megalapozó matematikai ismereteket ad át. Erősíti a hallgatók problémamegoldó technikáit, fejleszti az elemző és döntéshozó készségüket, az egzakt fogalmi és algoritmikus gondolkodásukat.

Előtanulmány: Matematika I-II. (a műszaki menedzser alapszak tárgyai vagy azokkal egyenértékű tárgyak)
Vizsgakövetelmény: kollokvium (6 kredit)

Tematika – Nappali és levelező tagozat:
1. kötelező konzultáció – 2015. szeptember 4. 8:15–12:30
Az operációkutatás jellemző vonásai. Gyakorlati problémák. Alapvető fogalmak. Lineáris programozási feladatok geometriája. A megengedett tartomány és tulajdonságai. Extremális pontok és optimalitás. Grafikus megoldás. A szimplexmódszer.
2. kötelező konzultáció – 2015. október 16. 8:15–12:30
Gráfelméleti alapok. A legrövidebb út problémája. Minimális feszítőfák. A Leontief-féle input-output modell.
3. kötelező konzultáció – 2015. november 13. 8:15–12:30
8:15–9:00 Zárthelyi dolgozat
Játékelmélet. Kétszemélyes zéró összegű játékok. Nyeregpontjátékok. Tiszta és kevert stratégiák.

4. kötelező konzultáció – 2015. december 4. 8:15–12:30
Differenciálegyenletek. Szétválasztható változójú, első- és másodrendű lineáris differenciálegyenletek.

Irodalom:
Gődényné Hajdu Gabriella: Műszaki-gazdasági matematika – elektronikus jegyzet

Követelmények:
A tantárgy pontértéke: 100 pont, amelyből a félév során 50, a vizsgán 50 pont érhető el.
A félév elismerését kifejező aláírás megadásának feltétele:
Az aláírás megszerzéséhez szükséges a kötelező konzultációkon való részvétel és a zárthelyi dolgozat eredményes megírása, amihez legalább 20 pontot kell elérni. A Tanszék 2 alkalmat biztosít, melyek ingyenesek. Azok a hallgatók, akik ezen 2 alkalom során nem érik el a minimális 20 pontot, azt a tantárgy ismételt felvételére kötelezzük!
A vizsga/kollokvium alkalmával a hozott pontokhoz további 50 pont szerezhető.
A vizsga időpontjai a szorgalmi időszak utolsó konzultációján kerülnek kihirdetésre az előadáson.
Vizsgára jelentkezni vagy jelentkezést lemondani a NEPTUN rendszerben kell. Vizsgára jelentkezni a vizsga napját megelőző nap déli 12 órájáig van lehetőség. A vizsga írásbeli. A vizsgadolgozat 50 pontos, az osztályzat megállapítása a következő módon történik:

0 – 50 pont	elégtelen (1)
51 – 60 pont	elégséges (2)
61 – 75 pont	közepes (3)
76 – 85 pont	jó (4)
86 – 100 pont	jeles (5)

Gödöllő, 2015. szeptember 1.

(Dékány Kornélia Éva)
tárgyfelelős koordinátor

(Dr. Sebestyén Zoltán)
tárgyfelelős

7. melléklet: Részlet a lineáris programozásra vonatkozó tudáspróbából – szimplex módszer

Feladat: Egy pékségben csokis kalácsot és kakaós csigát készítenek. Egy csokis kalács elkészítéséhez 3 dkg kakaóra, 40 dkg lisztre és 2 dl tejre és 3 dkg élesztőre van szükség. Egy kakaós csiga nyersanyagszükséglete 0,8 dkg, 5 dkg, 0,6 dl és 0,5 dkg (a fenti sorrendben). A raktárban 0,7 kg kakaó, 800 kg liszt, 100 l tej és 0,6 kg élesztő van. Egy kalácson 100 Ft, egy kakaós csigán 20 Ft haszon van. Hány kalácsot és csigát süssenek, hogy a haszon maximális legyen?

A megoldás lépései:

1. lépés: Táblázatba foglaljuk az adatokat.

hozzávalók	csokis kalács	kakaós csiga	szabad kapacitás
kakaó (dkg)	3	0,8	700
liszt (dkg)	40	5	800000
tej (dl)	2	0,6	1000
élesztő (dkg)	3	0,5	600
nyereség/egység (Ft)	100	20	

2. lépés: Jelölje x_1 a csokis kalács, x_2 pedig a kakaós csiga darabszámát. Ezek segítségével felírjuk a korlátozó feltételeket.

$$3x_1 + 0{,}8x_2 \leq 700$$
$$40x_1 + 5x_2 \leq 800000$$
$$2x_1 + 0{,}6x_2 \leq 1000$$
$$3x_1 + 0{,}5x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0 \text{ és } x_2 \geq 0$$

3. lépés: Felírjuk a célfüggvényt az adatokból.

A célfüggvény: $Z(x_1; x_2) = 100x_1 + 20x_2$

Megállapítjuk, hogy milyen típusú szélsőértéket keresünk.

A célfüggvény maximumát keressük, hiszen maximális haszonra törekszünk.

4. lépés: A korlátozó feltételeket – eltérésváltozók segítségével – azokkal ekvivalens egyenletekké transzformáljuk. Ehhez hány eltérésváltozóra lesz szükségünk? Miért?

Mivel 4-féle hozzávaló van, ezért 4 korlátozó feltétel vonatkozik rájuk. A 4 korlátozó feltétel 4 eltérésváltozót hoz be.

5. lépés: Az eltérésváltozók hozzávételével átalakítjuk az egyenlőtlenségrendszert egyenletrendszerré.

$$3x_1 + 0{,}8x_2 + z_1 = 700$$
$$40x_1 + 5x_2 + z_2 = 800000$$
$$2x_1 + 0{,}6x_2 + z_3 = 1000$$
$$3x_1 + 0{,}5x_2 + z_4 = 600$$

Ehhez az egyenletrendszerhez is elkészítjük a célfüggvényt. Mivel a kvázitermékek se nyereséget, se veszteséget nem hoznak, így nem változik a célfüggvény értéke.

$$Z(x; y; z_1; z_2; z_3; z_4) = 100x_1 + 20x_2 + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 + 0 \cdot z_4$$

6. lépés: Kiolvassuk az $x_1 = x_2 = 0$ extremális ponthoz tartozó bázismegoldást. Ebben a pontban meghatározzuk a célfüggvény értékét.

$$x_1 = x_2 = 0, z_1 = 700, z_2 = 800000, z_3 = 1000;\ z_4 = 600,$$

a célfüggvény értéke:

$$Z(x; y; z_1; z_2; z_3; z_4) = 100 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + 0 \cdot z_3 + 0 \cdot z_4 = 0.$$

7. lépés: Felírjuk az egyenletrendszerrel ekvivalens, a Gauss-elimináció használata során szokásos táblázatot. Feltüntetjük a bal oldali oszlopban a bázisváltozókat, valamint a célfüggvény együtthatóit és értékét is.

		$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{z_1}$	$\boldsymbol{z_2}$	$\boldsymbol{z_3}$	$\boldsymbol{z_4}$	b
I.	z_1	3	0,8	1	0	0	0	700
II.	z_2	40	5	0	1	0	0	800000
III.	z_3	2	0,6	0	0	1	0	1000
IV.	z_4	3	0,5	0	0	0	1	600
C	c	100	20	0	0	0	0	0

8. lépés: Megvizsgáljuk, hogy optimális-e ez a megoldás.

Nem optimális, mert a célfüggvény értéke 0, nincs bevétel.

9. lépés: A (0;0) helyett egy másik extremális pontba lépünk. x_1 és x_2 közül valamelyiket bevesszük a bázisba.

Most az x_1-et választjuk, mert annak a szorzója nagyobb.

10. lépés: Eldöntjük, hogy melyik bázisvektor helyére kerüljön az x_1.
Mivel el akarjuk kerülni, hogy a b oszlopban negatív szám legyen, ezért a b és x_1 oszlopokban álló számpárok hányadosai közül ($\frac{700}{3} \approx 233{,}33$; $\frac{800000}{40} = 20000$; $\frac{1000}{2} = 500$; $\frac{600}{3} = 200$) a legkisebb pozitív szám sorában álló bázisvektorra cseréljük x_1-et.
Most ezek közül az utolsó a legkisebb pozitív szám, ezért x_1-re cseréljük a negyedik bázisvektort, a z_4-et.

11. lépés: Ahhoz, hogy az $x_1$negyedik bázisvektor lehessen,
a) a 4. koordinátájának 1-nek kell lennie.
b)–d) a többi koordinátájának 0-nak kell lennie.

a) A negyedik sor minden elemét 3-mal osztjuk ($IV' = \frac{IV}{3}$).

		x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	z_4	b
I.	z_1			1	0	0		
II.	z_2			0	1	0		
III.	z_3			0	0	1		
IV.	x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	200
C	c							

b) x_1 első koordinátáját az új 4. sor -3-szorosának hozzáadásával elimináljuk ($I' = I - 3 \cdot IV'$).

$I' = I - 3 \cdot IV'$	z_1	0	$\frac{3}{10}$	1	0	0	-1	100

c) x_1 második koordinátáját az új 4. sor -40-szeresének hozzáadásával elimináljuk ($II' = II - 40 \cdot IV'$).

$II' = II - 40 \cdot IV'$	z_2	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{40}{3}$	792000

d) x_1 harmadik koordinátáját az új 4. sor -2-szeresének hozzáadásával elimináljuk ($III' = III - 2 \cdot IV'$).

$III' = III - 2 \cdot IV'$	z_3	0	$\frac{4}{15}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	600

12. lépés: A célfüggvényben az új bázisvektor oszlopában is 0-nak kell állnia.
Ehhez a célfüggvény x_1 alatti elemét az új 4. sor -100-szorosának hozzáadásával elimináljuk ($C' = C - 100 \cdot IV'$).

$C' = C - 100 \cdot IV'$	c	0	$\frac{10}{3}$	0	0	0	$-\frac{100}{3}$	-20000

Az első bázisvektor cseréje után az új táblázat:

	x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	z_4	b
z_1	0	$\frac{3}{10}$	1	0	0	-1	100
z_2	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{40}{3}$	792000
z_3	0	$\frac{4}{15}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	600
x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	200
c	0	$\frac{10}{3}$	0	0	0	$-\frac{100}{3}$	-20000

13. lépés: Megvizsgáljuk, hogy optimális-e ez a megoldás.
Nem optimális, mert a célfüggvény sorában még áll pozitív szám. Újabb bázistranszformációra van szükség.
14. lépés: A 10–13 lépések ismétlésével újabb báziscserét végzünk.
A kapott táblázat:

	x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	z_4	b
x_2	0	1	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{1000}{3}$
z_2	0	0	$\frac{50}{9}$	1	0	$-\frac{170}{9}$	$\frac{7133000}{9}$
z_3	0	0	$-\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1550}{3}$

x_1	1	0	$-\frac{5}{9}$	0	0	$\frac{8}{9}$	$\frac{1300}{9}$
c	0	0	$-\frac{100}{9}$	0	0	$-\frac{200}{9}$	$-\frac{190000}{9}$

15. lépés: Megvizsgáljuk, hogy optimális-e ez a megoldás.

Igen, mert a célfüggvény sorában már sehol sem áll pozitív szám.

16. lépés: Kiolvassuk a táblázatból a megoldást és meggondoljuk, hogy hol életszerű a tört és hol van szükség a megengedett legnagyobb egész szám megkeresésére.

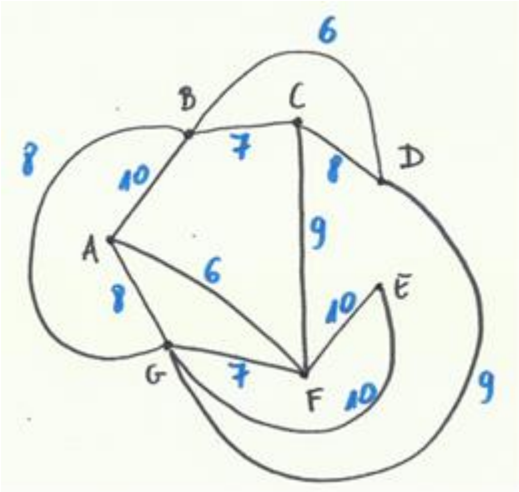
$x_1 = \frac{1300}{9} \approx 144$ darab csokis kalácsot és $x_2 = \frac{1000}{3} \approx 333$ darab kakaós csigát kell sütni.

A hozzávalókból a raktárban $z_1 = 0$ dkg kakaó, $z_2 = \frac{7133000}{9}$ dkg liszt, $z_3 = \frac{1550}{3}$ dl tej és $z_4 = 0$ dkg élesztő maradt.

Az optimális pontban a célfüggvény értéke $100 \cdot \frac{1300}{9} + 20 \cdot \frac{1000}{3} = \frac{190000}{9}$ Ft.

8. melléklet: Részlet a gráfelméletre vonatkozó tudáspróbából – a minimális feszítőfa megkeresése

Feladat: Keressük meg az alábbi gráf (egyik) minimális feszítőfáját, írjuk fel az élsorozatot és adjuk meg a minimális feszítőfa súlyát.



A megoldás lépései:

1. lépés: Kiindulunk valamelyik csúcsból.

(Mindegy melyik csúcsból indulunk, mivel úgyis minden csúcsot fel kell fűzni.)

Az A csúcsból indulunk.

2. lépés: Megkeressük a kiválasztott csúcsból induló legkisebb súlyú élt.

A B, C, D, E, F, illetve G csúcsok valamelyikébe menő élek közül az AF a legkisebb súlyú. Ezért bevesszük az AF élt a minimális feszítőfába.

3. lépés: * Megkeressük a már kiválasztott csúcsokat a még ki nem választott csúcsokkal összekötő élek közül a legkisebb súlyút.

Az A, illetve F csúcsokból a B, C, D, E, G csúcsok valamelyikébe menő élek közül az FG a legkisebb súlyú. Ezért az FG élt bevesszük a minimális feszítőfába.

4. lépés: Megkeressük a következő legkisebb súlyú élt.

Az A, F, illetve G csúcsokból a B, C, D, E csúcsok valamelyikébe menő élek közül a GB a legkisebb súlyú. Ezért a GB élt bevesszük a minimális feszítőfába.

5. lépés: Megkeressük a következő legkisebb súlyú élt.

Az A, B, F, illetve G csúcsokból a C, D, E csúcsok valamelyikébe menő élek közül a BD a legkisebb súlyú. Ezért a BD élt bevesszük a minimális feszítőfába.

6. lépés: Megkeressük a következő legkisebb súlyú élt.

Az A, B, D, F, illetve G csúcsokból a C és E csúcsok valamelyikébe menő élek közül a BC a legkisebb súlyú. Ezért a BC élt bevesszük a minimális feszítőfába.

7. lépés: Megkeressük a következő legkisebb súlyú élt.

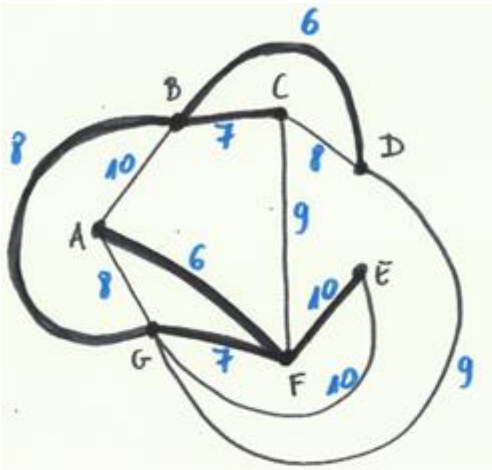
Az A, B, C, D, F, illetve G csúcsokból az E csúcsba menő élek közül az FE és GE egyenlő súlyú, ezért mindegy. hogy melyiket vesszük be a minimális feszítőfába, legyen FE.

8. lépés: Felírjuk a minimális feszítőfa élsorozatát.

A minimális feszítőfa az AF, FG, GB, BD, BC és FE (vagy GE) élekből áll.

9. lépés: Kiszámoljuk a minimális feszítőfa súlyát.

$$6 + 7 + 8 + 6 + 7 + 10 = 44.$$



* A csúcsok kiválasztására ugyanaz a szabály érvényes a további lépésekben is.

9. melléklet: Részlet a differenciálegyenletekre vonatkozó tudáspróbából – elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenletek megoldási módszere

Feladat: Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{y}{3x} + \sqrt[3]{x^4}\,, y(1) = 2.$$

A megoldás lépései:

1. lépés: Megállapítjuk a differenciálegyenletet típusát (Elsőrendű/Másodrendű; Lineáris/Nem lineáris; Homogén/Inhomogén).

Elsőrendű, Lineáris, Inhomogén

2. lépés: Leválasztjuk a homogén egyenletet.

$$y' = \frac{y}{3x}$$

3. lépés: Megoldjuk a homogén egyenletet.

Eredmény: $y_{há} = Cx^{\frac{1}{3}}$

Részletezve: $y_{há} = Ce^{\int \frac{1}{3x}dx} = Ce^{\frac{1}{3}lnx} = Ce^{\ln(x^{\frac{1}{3}})} = Cx^{\frac{1}{3}}$.

4. lépés: Meggondoljuk, milyen alakban kell keresnünk egy partikuláris megoldást.

$$y_p = C(x) \cdot x^{\frac{1}{3}}$$

5. lépés: Meggondoljuk, hogy az $y' = \frac{y}{3x}$ homogén egyenlet, az $y' = \frac{y}{3x} + \sqrt[3]{x^4}$ inhomogén vagy az $y' = \frac{y}{3x} + \sqrt[3]{x^4}\,, y(1) = 2$ inhomogén kezdetiértékes egyenlet megoldása kell legyen a partikuláris megoldás.

az $y' = \frac{y}{3x} + \sqrt[3]{x^4}$ inhomogén egyenlet megoldása

6. lépés: Visszavezetjük a feladatot egy egyszerűbb differenciálegyenlet megoldására.

$$C'(x) \cdot x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^4}.$$

7. lépés: Kifejezzük $C'(x)$-et az egyenletből.

$$C'(x) = x$$

8. lépés: Megadjuk $C(x)$-et az egyenletből.

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2$$

9. lépés: Felírjuk a partikuláris megoldást.

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^{\frac{7}{3}}$$

10. lépés: Az inhomogén egyenlet általános megoldásához összeadjuk a homogén egyenlet általános megoldását és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását.

$$y_{iá} = Cx^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{3}}$$

11. lépés: Figyelembe vesszük a kezdeti érték feltételt.

x helyére 1-et, *y* helyére 2-t írunk.

12. lépés: Meghatározzuk C értékét.

$$C = \frac{3}{2}$$

13. lépés: Felírjuk az inhomogén egyenlet megoldását.

$$y(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{\frac{7}{3}}$$

10. melléklet Tudáspróba játékelmélethez (2015)

1. feladat: Jellemezze és hasonlítsa össze az alábbi mátrixjátékokat!

-4	1	-7	8
-3	0	-6	7
5	2	3	4
0	2	6	7

-4	1	-7	8
-3	0	-6	7
-1	-2	3	4
0	2	6	7

-4	5	-7	8
-3	0	-6	7
5	5	6	7
4	5	6	7

32. ábra Mátrixjátékok.

Az első játék jellemzésében segít ez a feladatlap. Hasonló módon jellemezze a másik két játékot. A három játék összehasonlításában újra segít a feladatlap.

A megoldás lépései:

1. lépés: Megkeressük a mátrixjáték összes tiszta nyeregpontját.

A nyeregponthoz kiválasztjuk a sorok szerinti minimumok maximumát, majd az oszlopok szerinti maximumok minimumát. A kereszteződésük a nyeregpont.

-4	1	-7	8	-7
3	0	-6	7	-6
5	2	3	4	2
0	2	6	7	0

-4	1	-7	8
3	0	-6	7
5	2	3	4
0	2	6	7
5	2	6	8

-4	1	-7	8	-7
3	0	-6	7	-6
5	2	3	4	2
0	2	6	7	0
5	2	6	8	

Összehasonlítjuk a sorminimumok maximumát és az oszlopmaximumok minimumát.

Ebben az esetben mindegyik 2, tehát a $(3; 2)$ tiszta nyeregpont.

Egyetlen nyeregpont van.

2. lépés: Eldöntjük, hogy van-e optimális stratégiapár.

A tiszta nyeregpont koordinátái adják az optimális stratégiapárt.

A nyeregpont a (3;2), az első játékosnak a 3., a második játékosnak a 2. stratégiát érdemes választania.

3. lépés: Eldöntjük, hogy igazságos-e a játék?

$K(3; 2) = 2$, a K kifizetőfüggvény értéke a nyeregpontban 2. A játék nem igazságos, mert $K > 0$. A játék az első játékosnak kedvez, 2 Ft-ot nyer, ha az optimális stratégia szerint játszik.

4. lépés: Megvizsgáljuk, hogy mire vezet, ha az első, a második, illetve mindkét játékos eltér az optimális stratégiától.

Ha csak az első játékos tér el a nyeregponti stratégiától, akkor 1, 0 vagy 2 a nyeresége, tehát nem tud nagyobb nyereséget elérni, mint az optimális stratégiával.

Ha csak a második játékos tér el a nyeregponti stratégiától, akkor a játék eredménye -5, -3 vagy -4, ami nagyobb veszteség a nyeregponti stratégiához tartozó -2-nél.

Az optimális stratégiától való eltérés esetén veszteségek, illetve nagyobb veszteségek is előfordulhatnak. Az optimális stratégia éppen a veszteséget minimalizálja.

5. lépés:

Összehasonlítjuk az első feladatban megadott három mátrixjátékot.

	1. játék	2. játék	3. játék
tiszta nyeregpont	$(3;2)$	$(4;1)$	$(3;1)$ és $(3;2)$
igazságosság	$K(3;2) = 2 > 0$	$K(4;1) = 0$	$K(3;1) =$ $K(3;2) = 5 > 0$
Mindhárom játék rendelkezik tiszta nyeregponttal, a harmadiknak két nyeregpontja van. Az első és a harmadik játék az első játékosnak kedvez, a második játék igazságos.			

2. feladat: Jellemezze és hasonlítsa össze az alábbi $2x2$-es mátrixjátékokat!

1	2
4	-2

1	3
2	-4

Az első játék jellemzésében segít ez a feladatlap. Hasonló módon jellemezze a második játékot. A két játék összehasonlításában újra segít a feladatlap.

A megoldás lépései:

1. lépés: Tiszta nyeregpontot keresünk.

Nincs nyeregpont, mert a sorminimumok maximuma (1) nem egyenlő az oszlopmaximumok minimumával (2).

2. lépés: Mivel nincs tiszta nyeregpont kiszámítjuk, hogy mekkora valószínűséggel érdemes az első, illetve második játékosnak az egyes stratégiákat választania.

Az első játékosnak az első stratégiát

$$\frac{\mathrm{d}-\mathrm{c}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}-\mathrm{b}-\mathrm{c}} = \frac{-2-4}{1+(-2)-2-4} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

valószínűséggel érdemes választania.

Az első játékos második stratégiájához tartozó valószínűséget ugyanígy kiszámolhatnánk, de tudjuk, hogy a két valószínűség összege 1, ezért a valószínűség $1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$.

A második játékosnak az első stratégiát

$$\frac{\mathrm{d}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}-\mathrm{b}-\mathrm{c}} = \frac{-2-2}{1+(-2)-2-4} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

valószínűséggel érdemes választania, míg a második stratégiát $1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ valószínűséggel.

3. lépés: Meghatározzuk a várható nyereséget mindkét játékos szemszögéből.

Optimális stratégiapár választása esetén a játék (várható) értéke az első játékos számára

$$v=\frac{ad-bc}{a+d-b-c}=\frac{1\cdot(-2)-2\cdot 4}{1+(-2)-2-4}=\frac{-10}{-7}=\frac{10}{7}.$$

A második játékos számára a várható nyereség

$$v=\frac{bc-ad}{a+d-b-c}=\frac{2\cdot 4-1\cdot(-2)}{1+(-2)-2-4}=\frac{10}{-7}=-\frac{10}{7}.$$

Nullösszegű játékról van szó, a második játékos annyit veszít, amennyit az első játékos nyer. Az első játékos $\frac{10}{7}$ -et nyer, a második $\frac{10}{7}$ -et veszít, azaz $-\frac{10}{7}$ -et nyer.

4. lépés: Összehasonlítjuk a 10. ábrán megadott két mátrixjátékot.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">1. játék</td><td colspan="3">2. játék</td></tr>
<tr><td>tiszta nyeregpont</td><td colspan="3">nincs</td><td colspan="3">nincs</td></tr>
<tr><td rowspan="3">optimális választási valószínűségek</td><td></td><td>1. strat.</td><td>2. strat.</td><td></td><td>1. strat.</td><td>2. strat.</td></tr>
<tr><td>1. játé-kos</td><td>$\frac{6}{7}$</td><td>$\frac{1}{7}$</td><td>1. játé-kos</td><td>$\frac{3}{4}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
<tr><td>2. játé-kos</td><td>$\frac{4}{7}$</td><td>$\frac{3}{7}$</td><td>2. játé-kos</td><td>$\frac{7}{8}$</td><td>$\frac{1}{8}$</td></tr>
<tr><td>a játék értéke</td><td colspan="3">$\frac{10}{7}$</td><td colspan="3">$\frac{5}{4}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Egyik játék sem rendelkezik tiszta nyeregponttal.</td></tr>
</table>

3. feladat: Jellemezze és hasonlítsa össze az alábbi bimátrixjátékokat!

Első játék

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

Második játék

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

Az első játék jellemzésében segít ez a feladatlap. Hasonló módon jellemezze a második játékot. A két játék összehasonlításában újra segít a feladatlap.

A megoldás lépései:

1. lépés: Tiszta nyeregpontot keresünk.

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-4 & 4 & 4\\ 1 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}1 & \;\;4 & \;\;4\end{matrix}\end{array}\qquad B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -4 & 1 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix} & \begin{matrix}5\\ 2\\ 2\end{matrix}\end{array}\qquad C=\begin{bmatrix} & 1 & 1;2\\ 1 & & 2\\ & 2 & \end{bmatrix}$$

Az „A” mátrix oszlopaiban megkeressük a maximumot.

A „B” mátrix minden sorában megkeressük a maximumot.

A „C” eredménymátrixban jelezzük, hogy melyik játékosnak tartozik ahhoz a cellához optimális stratégia. A c12, c13, c21 az 1., a c13, c23, c32 a 2. játékos szempontjából van megjelölve.

A tiszta nyeregpontban mindkettő számára optimális a stratégia, c13-ban az 1. és a 2. játékos is szerepel, tehát a nyeregpont koordinátái $(1;3)$.

2. lépés: Megadjuk a tiszta nyeregponthoz tartozó optimális stratégiapárt.

A tiszta nyeregpont (1;3) koordinátái adják az optimális stratégiapárt, az első játékosnak az 1., a második játékosnak a 3. stratégia szerint érdemes játszani.

3. lépés: Meghatározzuk a nyeregpontban várható nyereséget mindkét játékos szemszögéből.

A KA kifizetőfüggvény értéke az $(1;3)$ nyeregpontban $K_A(1;3) = 4$, az első játékos 4 Ft-ot nyer.

A KB kifizetőfüggvény értéke az $(1;3)$ nyeregpontban $K_B(1;3) = 5$, a második játékos 5 Ft-ot nyer.

4. lépés: Ellenőrizzük, hogy ha a játékosok valamelyike eltér a nyeregponti stratégiától, mialatt a másik tartja a nyeregponti stratégiát, akkor az egyensúlyi stratégiától eltérő játékos nem tudja megnövelni nyereményét.

Az első játékos nem tud nagyobb nyereséget elérni, mint a nyeregponti stratégiához tartozó 4, mert a többi stratégiához 3 vagy 0 tartozik.

A második játékos sem tud nagyobb nyereséget elérni, mint a nyeregponti stratégiához tartozó 5, a nyeresége 3 vagy 1 lenne.

5. lépés: Összehasonlítjuk a 11. ábrán megadott két bimátrixjátékot.

	1. játék	2. játék
az egyes játékok tiszta nyeregpontja	(1;3)	(2;1)
első játékos nyeresége	$K_A(1;3) = 4$	$K_A(2;1) = 2$
második játékos nyeresége	$K_B(1;3) = 5$	$K_B(2;1) = 4$

4. feladat

Fogalmazzon meg olyan gyakorlati problémát, amely bimátrixszal írható le!

a) Írjon le egy-két mondatban egy koordinált játékot és adja meg a játék bimátrixát a 0 és 1 számjegyek felhasználásával!
b) Írjon példát egy-két mondatban klasszikus fogolydilemmára és adja meg a bimátrixát a 0, 1, 2 és 3 számjegyek felhasználásával!
c) Írjon le egy-két mondatban egy többszemélyes fogolydilemmát!
d) Írjon le egy-két mondatban egy többlépéses fogolydilemmát!

a) megoldása:

Az egyik cégnek arról kell döntenie, hogy X vagy Y típusú csatlakozót fejleszt ki a mobiltelefonjához, a másik cég arról dönt, hogy X vagy Y típusú csatlakozóhoz való transzformátort fejleszt ki mobiltelefonokhoz.

A koordinált játék bimátrixa:

A=

1	0
0	1

B=

1	0
0	1

b) megoldása:

Amikor a megrendelt termék kiszállítása (vagy elvégzett munka) és az érte való fizetés nem egyszerre történik.

A klasszikus fogolydilemma bimátrixa:

A

	szállít (koop)	nem szállít
fizetek (koop)	2	0
nem fizetek	3	1

B

	szállít (koop)	nem szállít
fizetek (koop)	2	3
nem fizetek	0	1

c) megoldása:

A fogolydilemma többszemélyes, ha a másik „játékos” egy közösség. Például: bliccelés, adócsalás, közjavak túlhasználása.

d) megoldása:

A fogolydilemma többlépéses, ha több menet van. Például: Axelrod versenyei.

11. melléklet: Vizsgaminta – a feladatlap

A feladatlap bemutatásakor a megoldásra szánt üres helyeket „ …”-tal jelzem.

Műszaki- gazdasági matematika nappali és levelező tagozat
VIZSGAMINTA 2018.
(a pontszámok: 3+22 + 5+4+16 + 8+9+8 + 6+12+7 = 100 pont)
Ez a vizsgaminta 100 pont értékű feladatot tartalmaz. A valódi vizsgákon kevesebb, 75 pont értékű feladat lesz. A végeredmények a dokumentum második, a részletes megoldások pedig a harmadik részében találhatók.

1. feladat: Egy játékgyárban egy babához 50 dkg műanyagot és 20 dkg textilt használnak fel. Egy cicához 10 dkg műanyag, 40 dkg textil és 10 dkg fém szükséges. Egy katona pedig 10 dkg műagyagot, 30 dkg textilt és 60 dkg fémet igényel. A cégnek 300 dkg műanyag, 300 dkg textil és 250 dkg fém áll rendelkezésére. Egy babán 1000 Ft, egy cicán 200 Ft, egy katonán 700 Ft haszon van.

Írja fel a probléma kiinduló szimplex táblázatát!

…

2. feladat: Végezzen egy teljes báziscserét! Részletezze a lépéseket!

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	1	2	1	0	18
z_2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0

…

Az első báziscsere után elértük-e az optimális megoldást? Miért?

…

A mostani állásban mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!)

…

Mennyi a célfüggvény értéke most?

…

3. feladat: Egy társadalomban négy munkaterület van: tanár, orvos, jogász és termelő. 1 Ft értékű tanár képzéséhez 0,4 Ft értékű tanár, 0,05 Ft értékű orvos és 0,3 Ft értékű termelő szükséges. 1Ft értékű orvoshoz 0,3 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,05 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű jogászhoz 0,2 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,2 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű termelőhöz 0,05 Ft tanár, 0,3 orvos, 0,05 jogász és 0,2 termelő szükséges. Ezen kívül kell még 10ezer Ft értékű tanár, 15ezer Ft értékű orvos, 5ezer Ft értékű jogász és 5ezer Ft értékű termelő.
Írja fel a fogyasztási mátrixot és az igény mátrixot!

…

Hány forint értékű orvost képezzenek, ha a megoldáshoz szükséges inverz mátrix közelítőleg:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

…

4. feladat:

Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Euler vonalát kell meghatározni!

…

Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Hamilton vonalát kell meghatározni!

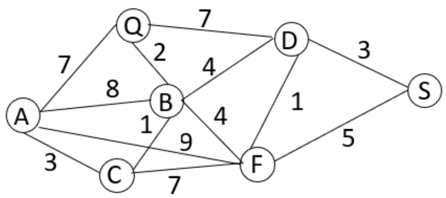
…

5. feladat:

Adja meg az alábbi gráf minimális feszítőfájának az élsorozatát és a súlyát!

…

Határozza meg az alábbi gráfban az A csúcsból az S csúcsba vezető legrövidebb utat!



…

6. feladat: Adott egy mátrixjáték mátrixa:

1	4	0	3
-3	0	-2	7
1	0	2	0
3	5	4	7

Határozza meg a kibővített mátrix módszerével a nyeregpontokhoz tartozó stratégiapárokat!

…

Adja meg az összes optimális stratégiapárt és a kifizetőfüggvény hozzájuk tartozó értékét!

…

Kedvez-e a játék valakinek? Miért?

…

Mennyi lenne az első játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától?

…

7. feladat: Adott egy 2x2-es mátrixjáték mátrixa:

2	0
-1	1

Van-e az tiszta nyeregpont? Miért?

…

Mekkora valószínűséggel érdemes a második játékosnak az első stratégiát választania?

…
Mekkora a játék értéke a második játékos számára a nyeregponti stratégiapár esetén?
…
8. feladat: Adott a bimátrixjáték mátrixa:

A=

3	2	-1
0	-2	3
-3	1	0

B=

1	5	2
-4	1	0
1	3	-4

Határozza meg a tiszta nyeregpontokat!
…
Adja meg a tiszta nyeregpontokhoz tartozó optimális stratégiapárt!
…
Mennyi lenne a második játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától?
…
Mennyi az első játékos nyeresége a nyeregpontokban?
…
9. feladat: Oldja meg szétválasztható változójúként az $(1 + x^3)y' - x^2y = 0$ differenciálegyenletet!
…
10. feladat: Oldja meg az $y' - \frac{y}{x} = x^3$ elsőrendű, inhomogén differenciálegyenletet pozitív x értékekre!
…
11. feladat: Oldja meg az $y'' + y' - 2y = 20e^{3x}$ másodrendű inhomogén differenciálegyenletet az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 3$ kezdetiérték feltételekkel!
…

12. melléklet: Vizsgaminta II. rész – végeredmények

Műszaki- gazdasági matematika nappali és levelező tagozat
VIZSGAMINTA 2018. VÉGEREDMÉNYEI
A részletes megoldások a következő részben találhatók.

1. feladat: Egy játékgyárban egy babához 50 dkg műanyagot és 20 dkg textilt használnak fel. Egy cicához 10 dkg műanyag, 40 dkg textil és 10 dkg fém szükséges. Egy katona pedig 10 dkg mű-agyagot, 30 dkg textilt és 60 dkg fémet igényel. A cégnek 300 dkg műanyag, 300 dkg textil és 250 dkg fém áll rendelkezésére. Egy babán 1000 Ft, egy cicán 200 Ft, egy katonán 700 Ft haszon van.

Írja fel a probléma kiinduló szimplex táblázatát!

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3	b
z_1	50	10	10	1	0	0	300
z_2	20	40	30	0	1	0	300
z_3	0	10	60	0	0	1	250
c	1000	200	700	0	0	0	0

2. feladat: Végezzen egy teljes báziscserét! Részletezze a lépéseket!

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	1	2	1	0	18
z_2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0

	x_1	x_2	z_1	z_2	b	
z_1	1	2	1	0	18	$18/1$
z_2	1	-1	0	1	6	$6/1$
c	5	4	0	0	0	$6/1 < 18/1$, z_2 helyett x_1 kerül be a bázisba
z_1	0	3	1	-1	12	a régi 1. sorból kivonva az új 2. sort (I' = I - II')
x_1	1	-1	0	1	6	ez a sor marad (II' = II)
c	0	9	0	-5	-30	a régi c mínusz az új 2. sor 5-szöröse (c' = c - 5·II')

Az első báziscsere után elértük-e az optimális megoldást? Miért?
Nem. A célfüggvény sorában van még pozitív szám.
A mostani állásban mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!) $(6; 0; 12; 0)$
Mennyi a célfüggvény értéke most? -30
3. feladat: Egy társadalomban négy munkaterület van: tanár, orvos, jogász és termelő. 1 Ft értékű tanár képzéséhez 0,4 Ft értékű tanár, 0,05 Ft értékű orvos és 0,3 Ft értékű termelő szükséges. 1Ft értékű orvoshoz 0,3 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,05 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű jogászhoz 0,2 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,2 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű termelőhöz 0,05 Ft tanár, 0,3 orvos, 0,05 jogász és 0,2 termelő szükséges. Ezen kívül kell még 10ezer Ft értékű tanár, 15ezer Ft értékű orvos, 5ezer Ft értékű jogász és 5ezer Ft értékű termelő.
Írja fel a fogyasztási mátrixot és az igény mátrixot!

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 10000 \\ 15000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Hány forint értékű orvost képezzenek, ha a megoldáshoz szükséges inverz mátrix közelítőleg:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

$$(0{,}5 \quad 1{,}6 \quad 0{,}6 \quad 0{,}7) \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 15000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix} = 35\,500$$

4. feladat: Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Euler vonalát kell meghatározni!

Útellenőrzés, ahol az összes útszakaszon végig kell menni anélkül, hogy ugyanazon az útszakaszon kétszer haladnánk végig.

Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Hamilton vonalát kell meghatározni!

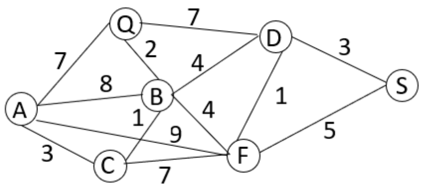
Postás útvonala: minden házba be kell térnie anélkül, hogy ugyanannál a háznál kétszer elhaladna.

5. feladat: Adja meg az alábbi gráf minimális feszítőfájának az élsorozatát és a súlyát!

AC, CB, BQ, pl. BD, DF, DS

A súly: 14

Határozza meg az alábbi gráfban az A csúcsból az S csúcsba vezető legrövidebb utat!



	A	C	B	Q	D	F
A	-	-	-	-	-	-
B	8	4	-	-	-	-
C	3	-	-	-	-	-
D	∞	∞	8	8	-	-
F	9	9	8	8	8	-
Q	7	7	6	-	-	-
S	∞	∞	∞	∞	11	11

A legrövidebb út: A – C – B – D – S

6. feladat: Adott egy mátrixjáték mátrixa:

1	4	0	3
-3	0	-2	7
1	0	2	0
3	5	4	7

Határozza meg a kibővített mátrix módszerével a nyeregpontokhoz tartozó stratégiapárokat!

1	4	0	3	0
-3	0	-2	7	-3
1	0	2	0	0
$\boxed{3}$	5	4	7	$\boxed{3}$
$\boxed{3}$	5	4	7	

Az első játékos negyedik stratégiájához tartozik a soronként vett minimumok közül a maximális (3) és a második játékos első stratégiájához tartozik az oszloponként vett maximumok közül a minimális (3). Mivel a két érték megegyezik, tiszta nyeregpontról van szó.

Adja meg az összes optimális stratégiapárt és a kifizetőfüggvény hozzájuk tartozó értékét! A nyeregponthoz tartozó optimális stratégiapár $(4; 1)$, $K(4; 1) = 3$.

Kedvez-e a játék valakinek? Miért? A játék az első játékosnak kedvez, hiszen a kifizetőfüggvény nyeregponti értéke a nyeregpontban pozitív.

Mennyi lenne az első játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától? Az első oszlop alapján az első játékos nyeresége 1 vagy -3. Mindegyik kevesebb, mint a nyeregponti 3.

7. feladat: Adott egy 2x2-es mátrixjáték mátrixa:

2	0
-1	1

Van-e az tiszta nyeregpont? Miért? Nincs, mert a sorminimumok maximuma (0) nem egyenlő az oszlopmaximumok minimumával (1).

Mekkora valószínűséggel érdemes a második játékosnak az első stratégiát választania? $q_1 = \frac{1}{4}$

Mekkora a játék értéke a második játékos számára a nyeregponti stratégiapár esetén? A játék értéke várhatóan $-\frac{1}{2}$.

8. feladat: Adott egy bimátrixjáték mátrixa:

A=

3	2	-1
0	-2	3
-3	1	0

B=

1	5	2
-4	1	0
1	3	-4

Határozza meg a tiszta nyeregpontokat! Egyetlen tiszta nyeregpont van.

Adja meg a tiszta nyeregpontokhoz tartozó optimális stratégiapárt! A nyeregponti stratégiapár az $(1; 2)$.

Mennyi lenne a második játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától?
1 vagy 2

Mennyi az első játékos nyeresége a nyeregpontokban? 2

9. feladat: Oldja meg szétválasztható változójúként az $(1 + x^3)y' - x^2y = 0$ differenciálegyenletet!

$$|y| = C\sqrt[3]{|1 + x^3|},\ C > 0.$$

10. feladat: Oldja meg az $y' - \frac{y}{x} = x^3$ elsőrendű, inhomogén differenciálegyenletet pozitív x értékekre!

$$y_{iá} = \frac{x^4}{3} + konstans \cdot x.$$

11. feladat: Oldja meg az $y'' + y' - 2y = 20e^{3x}$ másodrendű inhomogén differenciálegyenletet az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 3$ kezdetiérték feltételekkel!

$$y = -e^x + e^{-2x} + 2 \cdot e^{3x}.$$

13. melléklet: Vizsgaminta III. rész – a feladatlap részletes megoldással

Műszaki- gazdasági matematika nappali és levelező tagozat
VIZSGAMINTA 2018. RÉSZLETES MEGOLDÁS

1. feladat: Egy játékgyárban egy babához 50 dkg műanyagot és 20 dkg textilt használnak fel. Egy cicához 10 dkg műanyag, 40 dkg textil és 10 dkg fém szükséges. Egy katona pedig 10 dkg műagyagot, 30 dkg textilt és 60 dkg fémet igényel. A cégnek 300 dkg műanyag, 300 dkg textil és 250 dkg fém áll rendelkezésére. Egy babán 1000 Ft, egy cicán 200 Ft, egy katonán 700 Ft haszon van.
Írja fel a probléma kiinduló szimplex táblázatát!
A termékek (baba, cica, katona) darabszámát jelölje x1, x2, x3. A hozzájuk felhasznált anyagokat a megfelelő helyre írjuk. Az utolsó sorba kerül az egyes termékekhez tartozó nyereség.

	x_1	x_2	x_3	b (készlet [dkg])
műanyag [dkg]	50	10	10	300
textil [dkg]	20	40	30	300
fém [dkg]	0	10	60	250
nyereség [Ft] (c)	1000	200	700	

Kibővítjük a táblázatot a z1, z2, z3 bázisvektorokkal (egységnyi anyagmennyiséget felhasználó „kvázitermékek”).

	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3	b (készlet [dkg])
műanyag [dkg]	50	10	10	1	0	0	300
textil [dkg]	20	40	30	0	1	0	300
fém [dkg]	0	10	60	0	0	1	250
c (nyereség [Ft])	1000	200	700	0	0	0	0

2. feladat: Végezzen egy teljes báziscserét! Részletezze a lépéseket!

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	1	2	1	0	18
z_2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0

Megoldás:

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	1	2	1	0	18
z_2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0

x_1-hez tartozik a (leg)nagyobb nyereség (5), ezért x_1-et hozzuk be. Mivel a z_2-höz és z_1-hez tartozó sorokban 6/1 < 18/1, ezért z_2-t átnevezem x_1-nek. Az új z_1 sort pedig úgy kapom, hogy $z_1$régi sorából kivonom x_1 sorát. (I' = I − II')

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	0	3	1	-1	12
x_1	1	-1	0	1	6

Az új c sort úgy kapom, hogy az eredetiből kivonom az x_1 sor 5-szörösét. (c' = c−5· x1)

	x_1	x_2	z_1	z_2	b
z_1	0	3	1	-1	12
x_1	1	-1	0	1	6
c	0	9	0	-5	-30

Az első báziscsere után elértük-e az optimális megoldást? Miért?

Az első csere után nem értem el az optimális megoldást, mert a c sorában van még pozitív szám.

A mostani állásban mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!)

A változók értékét a b oszlopból olvasom le, amelyik hiányzik, az nulla: $(6; 0; 12; 0)$.

Mennyi a célfüggvény értéke most? A célfüggvény értéke -30.

3. feladat: Egy társadalomban négy munkaterület van: tanár, orvos, jogász és termelő. 1 Ft értékű tanár képzéséhez 0,4 Ft értékű tanár, 0,05 Ft értékű orvos és 0,3 Ft értékű termelő szükséges. 1Ft értékű orvoshoz 0,3 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,05 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű jogászhoz 0,2 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,2 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű termelőhöz 0,05 Ft tanár, 0,3 orvos, 0,05 jogász és 0,2 termelő szükséges. Ezen kívül kell még 10ezer Ft értékű tanár, 15ezer Ft értékű orvos, 5ezer Ft értékű jogász és 5ezer Ft értékű termelő.

Írja fel a fogyasztási mátrixot és az igény mátrixot!

A fogyasztási mátrix oszlopaiba az egyes foglalkozások képviselőitől igényelt szolgáltatás kerül. A sorokba a képzendők kerülnek.

	tanár	orvos	jogász	termelő	fogyasztási mátrix
tanár	0,4	0,3	0,2	0,05	$C = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$
orvos	0,05	0,1	0,1	0,3	
jogász	0	0,05	0,2	0,05	
termelő	0,3	0,4	0,4	0,2	

A külső igények költségei a $d = \begin{pmatrix} 10000 \\ 15000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$ vektorban fejezhetők ki.

Hány forint értékű orvost képezzenek, ha a megoldáshoz szükséges inverz mátrix közelítőleg:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

Az orvosképzés költségeinek meghatározásához kiolvassuk az orvos sorvektort az $(E - C)^{-1}$ inverz mátrixból és megszorozzuk a d oszlopvektorral:

$$(0{,}5 \quad 1{,}6 \quad 0{,}6 \quad 0{,}7) \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 15000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix} = 35500.$$

4. feladat:

Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Euler vonalát kell meghatározni!

Útellenőrzés, ahol az összes útszakaszon végig kell menni anélkül, hogy ugyanazon az útszakaszon kétszer végigmennénk.

Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Hamilton vonalát kell meghatározni!

Postás útvonala: minden házba be kell térnie anélkül, hogy ugyanannál aháznál kétszer elhaladna.

Megjegyzés: Nem ezeket a példákat kell a vizsgán megismételni, hanem keressenek a saját tapasztalatukból példát.

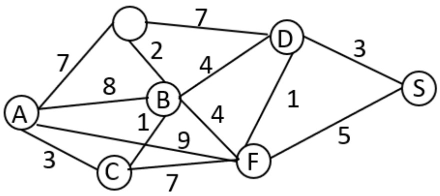
5. feladat:

Adja meg az alábbi gráf minimális feszítőfájának az élsorozatát és a súlyát!

Például az A csúcsból kiindulva a legrövidebb az AC, C-ből a CB, B-ből a BQ. Q helyett B-ből érdemes továbbmenni, vagy D-be vagy F-be (BDF és BFD ugyanolyan hosszú). S-be D-ből érdemes menni: AC, CB, BQ, BD, DF, DS.

A minimális súly a minimális feszítőfa éleinek összege: 14.

Határozza meg az alábbi gráfban az A csúcsból az S csúcsba vezető legrövidebb utat!



A legrövidebb út A – C – B – D – S. Ennek megkereséséhez nyitunk egy táblázatot, amelynek első oszlopában felsoroljuk a csúcsokat. A második oszlopba az egyes csúcsok A-tól való távolsága kerül és az A sorát kihúzzuk. Ha két csúcs nincs összekötve, akkor végtelen a távolságuk. Az A-hoz legközelebbi csúcs határozza meg a harmadik oszlopot, és egyben kihúzzuk az illető csúcs sorát. A megfelelő sor cellájába az oszlopot meghatározó ponton át vezető, illetve a közvetlen út hossza közül a rövidebb kerül. Egyenlőség esetén bármelyiket választhatjuk. Így töltjük ki az oszlopot. A legkisebb számot tartalmazó cella sorában levő csúcs határozza meg a következő oszlopot és kihúzzuk a sor további celláit. A megfelelő sor cellájába az oszlopot meghatározó ponton át vezető utak, illetve a közvetlen út hossza közül a legrövidebb kerül. Tovább folytatva elfogynak a csúcsok és a táblázatból leolvasható az A csúcsból bármelyik csúcsba vezető legrövidebb út.

	A	C	B	Q	D	F
A	-	-	-	-	-	-
B	8	4	-	-	-	-
C	3	-	-	-	-	-
D	∞	∞	8	8	-	-
F	9	9	8	8	8	-
Q	7	7	6	-	-	-
S	∞	∞	∞	∞	11	11

6. feladat: Adott egy mátrixjáték mátrixa:

1	4	0	3
-3	0	-2	7
1	0	2	0
3	5	4	7

Határozza meg a kibővített mátrix módszerével a nyeregpontokhoz tartozó stratégiapárokat!

Kibővítjük a mátrixot, és

1	4	0	3	0
-3	0	-2	7	-3
1	0	2	0	0
$\boxed{3}$	5	4	7	$\boxed{3}$
$\boxed{3}$	5	4	7	

- ebben az első játékos szemszögéből a sorminimumokkal és megkeressük ezek maximumát (4. sor 5. elem),
- ebben a második játékos szemszögéből az oszlopmaximumokkal és megkeressük ezek minimumát (5. sor 1. elem).

A sorminimumok maximuma és az oszlopmaximumok minimuma egyenlő, ez a nyeregpont.

Adja meg az összes optimális stratégiapárt és a kifizetőfüggvény hozzájuk tartozó értékét!

A nyeregponthoz tartozó optimális stratégiapár $(4; 1)$, $K(4; 1) = 3$.

Kedvez-e a játék valakinek? Miért?

A játék az első játékosnak kedvez, hiszen a kifizetőfüggvény nyeregponti értéke a nyeregpontban pozitív.

Mennyi lenne az első játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától?

Az első oszlop alapján az első játékos nyeresége 1 vagy -3. Mindegyik kevesebb, mint a nyeregponti 3.

7. feladat: Adott egy 2x2-es mátrixjáték mátrixa:

2	0
-1	1

Van-e az tiszta nyeregpont? Miért?

Nincs, mert a sorminimumok maximuma (0) és az oszlopmaximumok minimuma (1) nem egyenlő.

Mekkora valószínűséggel érdemes a második játékosnak az első stratégiát választania?

A $q = \frac{d-b}{a+d-b-c} = \frac{1-0}{2+1-0-(-1)} = \frac{1}{4}$ valószínűség mellett érhető el a második játékos számára a legkedvezőbb értékű játék.

Mekkora a játék értéke a második játékos számára a nyeregponti stratégiapár esetén?

A játék értéke az első játékos szemszögéből várhatóan $v = \frac{ad-bc}{a+d-b-c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

A második játékos szemszögéből $(-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

8. feladat: Adott egy bimátrixjáték mátrixa:

A=

3	2	-1
0	-2	3
-3	1	0

B=

1	5	2
-4	1	0
1	3	-4

Határozza meg az összes tiszta nyeregpontot!

Az A mátrix minden oszlopában és a B mátrix minden sorában megkeresem a legnagyobb elemet. Egy C mátrixban jelet teszek abba a cellába, amelynek helyén legnagyobb elem van. Az első sor második cellájába két jel került, ez a nyeregpont.

A=

3	2	-1
0	-2	3
-3	1	0

B=

1	5	2
-4	1	0
1	3	-4

C=

1	12	
	2	1
	2	

Adja meg az összes tiszta nyeregponthoz tartozó összes optimális stratégiapárt!

A nyeregponthoz tartozó optimális stratégiapár az első játékos 1-es, a második játékos 2-es stratégiája.

Mennyi lenne a második játékos nyeresége, ha egyoldalúan eltérne a nyeregponti stratégiától?

A B mátrixból látható, hogy a második játékos nyeresége 5 helyett 1 vagy 2 lenne, ha egyoldalúan eltérne a 2-es (nyeregponti) stratégiától.

Mennyi az első játékos nyeresége a nyeregpontokban?

Az A mátrixból látható, hogy az első játékos nyeresége 2.

9. feladat: Oldja meg szétválasztható változójúként az $(1+x^3)y' - x^2y = 0$ differenciálegyenletet!

Ekvivalens átalakítás után $(1+x^3)y' = x^2y.$

$x = -1$ esetén $y(-1) = 0.$

Az $x \neq -1$ értékekre szétválaszthatjuk a változókat

$$y' = \frac{x^2}{1+x^3}y, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+x^3}y.$$

Az $y \equiv 0$ megoldás.

Ha $y \not\equiv 0$, és $y \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{y}dy = \frac{x^2}{1+x^3}dx.$$

Mivel

$$\int \frac{1}{y}dy = ln\,|y| + C_1 \qquad \text{és} \qquad \int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}ln\ |1+x^3| + C_2,$$

mindkét oldal határozatlan integrálját véve

$$ln\,|y| = \frac{1}{3}ln\ |1+x^3| + ln\,|C|.$$

A logaritmus azonosságai alapján

$$ln\,|y| = ln\left(|C|\sqrt[3]{|1+x^3|}\right).$$

Mivel az e alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növő, az argumentumokra is igaz

$$|y| = |C|\sqrt[3]{|1+x^3|}.$$

10. feladat: Oldja meg az $y' - \frac{y}{x} = x^3$ elsőrendű, inhomogén differenciálegyenletet pozitív x értékekre!

y együtthatója $\left(-\frac{1}{x}\right)$, aminek az x szerinti integrálja $\int -\frac{1}{x}dx = -\ln x + \text{konstans}$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_{há} = C \cdot e^{-(-lnx)} = C \cdot e^{lnx} = C \cdot x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásában a C konstans helyett egy $C(x)$ függvényt keresünk, amelyre teljesül, hogy

$$y_p = C(x) \cdot x \quad és \quad C'(x) = x^2,$$

amiből

$$C(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + konstans,$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y_{iá} = \left(\frac{x^3}{3} + konstans\right) \cdot x = \frac{x^4}{3} + konstans \cdot x.$$

11. feladat: Oldja meg az $y'' + y' - 2y = 20e^{3x}$ másodrendű inhomogén differenciálegyenletet az $y(0) = 2$ és $y'(0) = 3$ kezdetiérték feltételekkel!

Az $y'' + y' - 2y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása $y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}$ alakú, ahol C_1, C_2 tetszőleges valós paraméterek, $y(0) = 2$ és $y'(0) = 3$.

A partikuláris megoldást $y_p = A \cdot e^{3x}$ alakban keressük, ennek deriváltjai

$$y_p' = 3A \cdot e^{3x} \text{ és } y_p'' = 9Ae^{3x}.$$

Az inhomogén egyenletbe beírva adódik, hogy

$$(9Ae^{3x}) + (3Ae^{3x}) - 2(Ae^{3x}) = 20e^{3x},$$
$$\text{azaz} \quad 10Ae^{3x} = 20e^{3x}.$$

Az egyenlet megoldása $A = 2$, tehát $y_p = 2 \cdot e^{3x}$ egy partikuláris megoldás.

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_{iá} = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x} + 2 \cdot e^{3x}.$$

Az $y_{iá}$ deriváltja

$$y_{iá}' = C_1 \cdot e^{x} - 2 \cdot C_2 \cdot e^{-2x} + 6 \cdot e^{3x}.$$

Az $y(0) = 2$ kezdetiérték feltétel alapján $C_1 \cdot e^0 + C_2 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0 = 2$, $C_1 + C_2 = 0$.

Az $y'(0) = 3$ kezdetiérték feltétel alapján $C_1 \cdot e^0 - 2C_2 \cdot e^0 + 6 \cdot e^0 = 3$, $C_1 - 2C_2 = -3$.

A $C_1 + C_2 = 0$, $C_1 - 2C_2 = -3$ egyenletrendszer megoldása: $C_1 = -1$ és $C_2 = 1$. Ezeket $y_{iá}$-ba beírva

$$y = -e^{x} + e^{-2x} + 2 \cdot e^{3x}.$$

Megjegyzések:

A vizsgadolgozatban az időkorlátra való tekintettel a 9-10-11-es feladatoknak egy-egy részlete volt kitűzve. A módszert meg lehet mutatni a leszűkített alaphalmazon is. Volt olyan vizsgadolgozat, amelyben például a 9. feladat követelményei közül a szétválasztott formában megadott differenciálegyenlet megoldását, valamilyen alaphalmazra megszorított változatát; a 10. feladatból a kezdetiérték feltétel érvényesítését, illetve a 11. feladat helyett csak a másodrendű homogén differenciálegyenlet megoldására vonatkozó részt kértem számon.

14. melléklet: Előhívó kérdéssorok

Előhívó kérdéssor 1/1

1) Összeszorozható-e egy 2x3-as mátrix egy 2x3-as mátrixszal? Ha igen, mekkora lesz a szorzatmátrix mérete?

2) Írja fel, hogy a Leontief-féle nyílt modellben (input-output modell) milyen egyenlőség áll fenn a C fogyasztási (consumption) mátrix, a D igény (demand) vektor és az X termelés vektor között!

3) Tekintsük az alábbi mátrixjátékot!

1	0	-3
2	1	1
-2	2	1

a) Ha az első játékos a harmadik stratégiát és a második játékos az első stratégiát választaná, akkor ki nyerne és mennyit?

b) A játék nyeregponti megoldása az, hogy az első játékos a második stratégiát választja, a második játékos pedig a harmadik stratégiát választja. Igazságos-e a játék? igen vagy nem

Előhívó kérdéssor 1/2

1) Ha egy 2x2-es mátrixjátéknak nincs tiszta nyeregpontja és a játék megoldásában az adódik, hogy $q = \frac{3}{5}$, akkor ez mit jelent?

2) $y' + y^2x = y'''$

a) Hányadrendű a fenti differenciálegyenlet? elsőrendű vagy másodrendű vagy harmadrendű

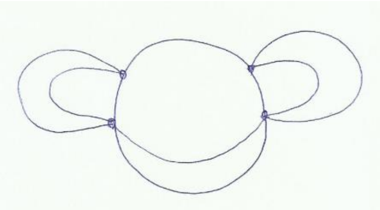
b) Lineáris-e a fenti differenciálegyenlet? igen vagy nem

c) Homogén-e a fenti differenciálegyenlet? igen vagy nem

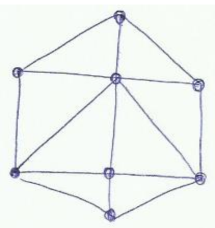
d) Egy másodrendű differenciálegyenlet általános megoldásában hány szabadon választható paraméter van? 0 vagy 1 vagy 2 vagy 3 vagy több

Előhívó kérdéssor 2/1

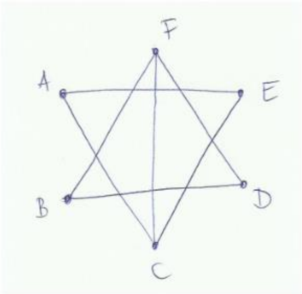
1) Létezik-e az alábbi gráfnak Euler-vonala/köre? Ha igen, számozza meg az éleket a haladás sorrendjében!

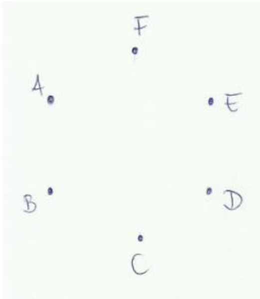


2) Létezik-e az alábbi gráfnak Hamilton-köre? Ha igen, számozza meg a csúcsokat a haladás sorrendjében!



3) Síkba rajzolható-e az alábbi gráf? Ha igen, rajzolja síkba!





4) Ha egy mártixjátékban a (3;4) és az (5;7) stratégiapár is nyeregpont, akkor adjon meg még további nyeregpontot, ha létezik!

5) Mit jelent az ekvivalencia tulajdonság mártixjáték esetén?

Előhívó kérdéssor 2/2

1) Akkor standard egy lineáris programozási feladat, ha

a) a célfüggvény

minimumát vagy maximumát vagy bármelyiket keressük

b) a feltételek úgy szólnak, hogy

legalább valamennyit legfeljebb valamennyit bármelyik

kell használni vagy lehet használni vagy lehetséges

c) minden változó nemnegatív.

2) Tudjuk, hogy $\int cos\, dx = \sin x + constans.$

Adja meg az $y' + \cos x \cdot y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását!

3) Tudjuk, hogy az $y' + \frac{1}{x^2} y = \mathrm{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$ differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet megoldása $y_h = \mathrm{C} \cdot e^{\frac{1}{x}}$. Adja meg az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását!

4) Ha az $y' = \frac{3y}{x} + 2x^4 + x^3,\ \ x\epsilon R^+$ differenciálegyenlet általános megoldása $y = Cx^3 + x^4 + x^5$, akkor adja meg azt a partikuláris megoldást, amely az $y(1) = 4$ kezdeti érték feltételt is kielégíti!

Előhívó kérdéssor 3/1

1) Mi jellemző egy fa gráfra? Karikázza be az összes helyes állítás betűjelét!

a) nincs benne kör

b) lehet benne kör

c) minden csúcspont fokszáma páros

d) minden csúcspont fokszáma legalább egy

2) Mi jellemző egy fa gráfra? Karikázza be az összes helyes állítás betűjelét!

a) van benne hurokél

b) lehet benne hurokél

c) nem lehet benne hurokél

d) összefüggő

3) Egy gráf minimális feszítőfáját szeretnénk meghatározni a tanult módszer segítségével. A kiindulási pontra vonatkoznak az állítások. Karikázza be az egyetlen helyes állítás betűjelét!

a) az A pontból kell indulni

b) olyan pontból kell indulni, ahonnan egy minimális súlyú él indul

c) akármelyik pontból lehet indulni

4) Töltse ki a táblázatot az adottak alapján!

x_1	$+3x_2$	$+z_1$			= 20
x_1			$+z_2$		= 5
$2x_1$	$+x_2$			$+z_3$	= 15

$Z(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3) = 4x_1 + 5x_2 \to max.$

	x_1	x_2	z_1	z_2	z_3	b
z_1						
z_2						
z_3						
c						

Előhívó kérdéssor 3/2

1) Igaz-e az alábbi állítás?

Egy bimátrix játékot két mátrixszal tudunk megadni. Az első mátrixban az első játékos nyereségei találhatók, a második mátrixban a második játékos nyereségei.

igaz hamis

2) Igaz-e az alábbi állítás?

Ha egy bimátrixjátéknak van nyeregpontja, akkor biztosan azt érdemes választaniuk a játékosoknak. igaz hamis

3) Az alábbi DE karakterisztikus egyenletének gyökei 6 és -2.

Melyik lehet az egyenlet általános megoldása? Karikázza be az összes helyes állítás betűjelét!

$$y'' - 4y' - 12y = 0$$

a) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x} + C_2 \cdot e^{-2x}$

b) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{-6x} + C_2 \cdot e^{2x}$

c) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{6x}$

d) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-6x}$

4) Az alábbi DE karakterisztikus egyenletének egyetlen gyöke van, a 6.

Melyik lehet az egyenlet általános megoldása? Karikázza be az összes helyes állítás betűjelét!

$$y'' - 12y' + 36y = 0$$

a) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x} + C_2 \cdot e^{6x}$

b) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x} + C_2 \cdot e^{6x} \cdot x$

c) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x}$

5) Az alábbi DE karakterisztikus egyenletének gyökei $6 \pm 2i$.

Melyik lehet az egyenlet általános megoldása? Karikázza be az összes helyes állítás betűjelét!

$$y'' - 12y' + 40y = 0$$

a) $y_{h,á} = e^{6x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$

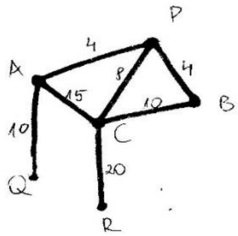
b) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x} \cdot (C_2 \cdot \cos 2x + C_3 \cdot \sin 2x)$

c) $y_{h,á} = C_1 \cdot e^{6x} \cdot \cos 2x + C_2 \cdot e^{6x} \cdot \sin 2x$

Előhívó kérdéssor 4/1

1-3) Az alábbi gráfban a legrövidebb utat keressük C-ből Q-ba. Töltse ki az alábbi táblázat hiányzó három celláját!

	C(0)	P(8)
C	–	–
A	15	
B	10	
P	8	–
Q	∞	∞
R	20	



4) Az $y'' - 7y' + 12y =$ __________________________ inhomogén DE homogén részéhez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökei 3 és 4.
Ezért $y_{há} = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{4x}$
Írjon a jobb oldalra egy zavaró függvényt úgy, hogy rezonancia legyen!
5) Az $y'' - 10y' + 25y = 3e^{5x}$ inhomogén DE homogén részéhez tartozó karakterisztikus egyenlet egyetlen gyöke 5.
Ezért $y_{há} = C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot x \cdot e^{5x}$
Milyen alakban keressük a próbafüggvényt?
Válasz: $y_p =$_____________________

Előhívó kérdéssor 4/2
1) Egy lineáris programozási feladat optimális megoldása nem lehet a következő: $(0; 2; 3; -4; 0)$ Miért?
2) Lehet-e egy lineáris programozási feladatnak más optimális megoldása, mint amit a szimplex módszerrel megkaptunk? igen nem
3) Mit jelent az „5" az alábbi bimátrixjátékban? Egészítse ki a hiányos mondatot!
Ha az első játékos a(z) ____ stratégiát választja és a második játékos a(z)____ stratégiát választja, akkor a(z) ____ játékos nyeresége 5.

2;5	1;2
3;4	3;1

4) Melyik koordinációs játék az alábbiak közül?
héja-galamb bliccelés
jobbra hajts a közlegelők tragédiája
5) Számozza meg csökkenő nyereség szerint a fogolydilemma lehetséges kimeneteleit. Az 1. legyen a legnagyobb nyereséget hozó.

Egyoldalú kooperálás: ____
Egyoldalú dezertálás: ____
Kölcsönös kooperálás: ____
Kölcsönös dezertálás: ____

15. melléklet Műszaki-gazdasági matematika dolgozat 2015

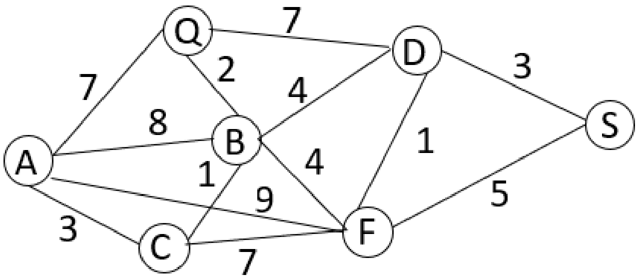
(3+5+22+4+16=50 pont)

1) Egy játékgyárban egy babához 50 dkg műanyagot és 20 dkg textilt használnak fel. Egy cicához 10 dkg műanyag, 40 dkg textil és 10 dkg fém szükséges. Egy katona pedig 10 dkg műagyagot, 30 dkg textilt és 60 dkg fémet igényel. A cégnek 300 dkg műanyag, 300 dkg textil és 250 dkg fém áll rendelkezésére. Egy babán 1000 Ft, egy cicán 200 Ft, egy katonán 700 Ft haszon van.
Írja fel a probléma kiinduló szimplex táblázatát!
…
2) Egy társadalomban négy munkaterület van: tanár, orvos, jogász és termelő. 1 Ft értékű tanár képzéséhez 0,4 Ft értékű tanár, 0,05 Ft értékű orvos és 0,3 Ft értékű termelő szükséges. 1Ft értékű orvoshoz 0,3 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,05 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű jogászhoz 0,2 Ft tanár, 0,1 orvos, 0,2 jogász és 0,4 termelő kell. 1 Ft értékű termelőhöz 0,05 Ft tanár, 0,3 orvos, 0,05 jogász és 0,2 termelő szükséges. Ezen kívül kell még 10ezer Ft értékű tanár, 15ezer Ft értékű orvos, 5ezer Ft értékű jogász és 5ezer Ft értékű termelő.
Írja fel a fogyasztási mátrixot és az igény mátrixot!
Hány forint értékű orvost képezzenek, ha a megoldáshoz szükséges inverz mátrix közelítőleg:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}6 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$
…
3) Adja meg szimplex módszerrel az egyes változók értékét és határozza meg a célfüggvény maximumát az alábbi kiindulási szimplex tábla alapján! Részletezze a lépéseket!

	x1	x2	z1	z2	b
z1	1	2	1	0	18
z2	1	-1	0	1	6
c	5	4	0	0	0

…
Mennyi a változók értéke? (A teljes vektort kérem, az eltérésváltozókkal együtt!)
…
Mennyi a célfüggvény maximális értéke?

4) a) Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Euler vonalát kell meghatározni!
…
b) Írjon egy gyakorlati problémát egy-két mondatban, ahol egy gráf Hamilton vonalát kell meghatározni!
…
5) a) Adja meg az alábbi gráf minimális feszítőfájának az élsorozatát és a súlyát!
b) Határozza meg az alábbi gráfban az A csúcsból az S csúcsba vezető legrövidebb utat!


Q
D
S
A
B
C
F
7
2
4
3
7
8
1
4
1
9
3
5
7

…