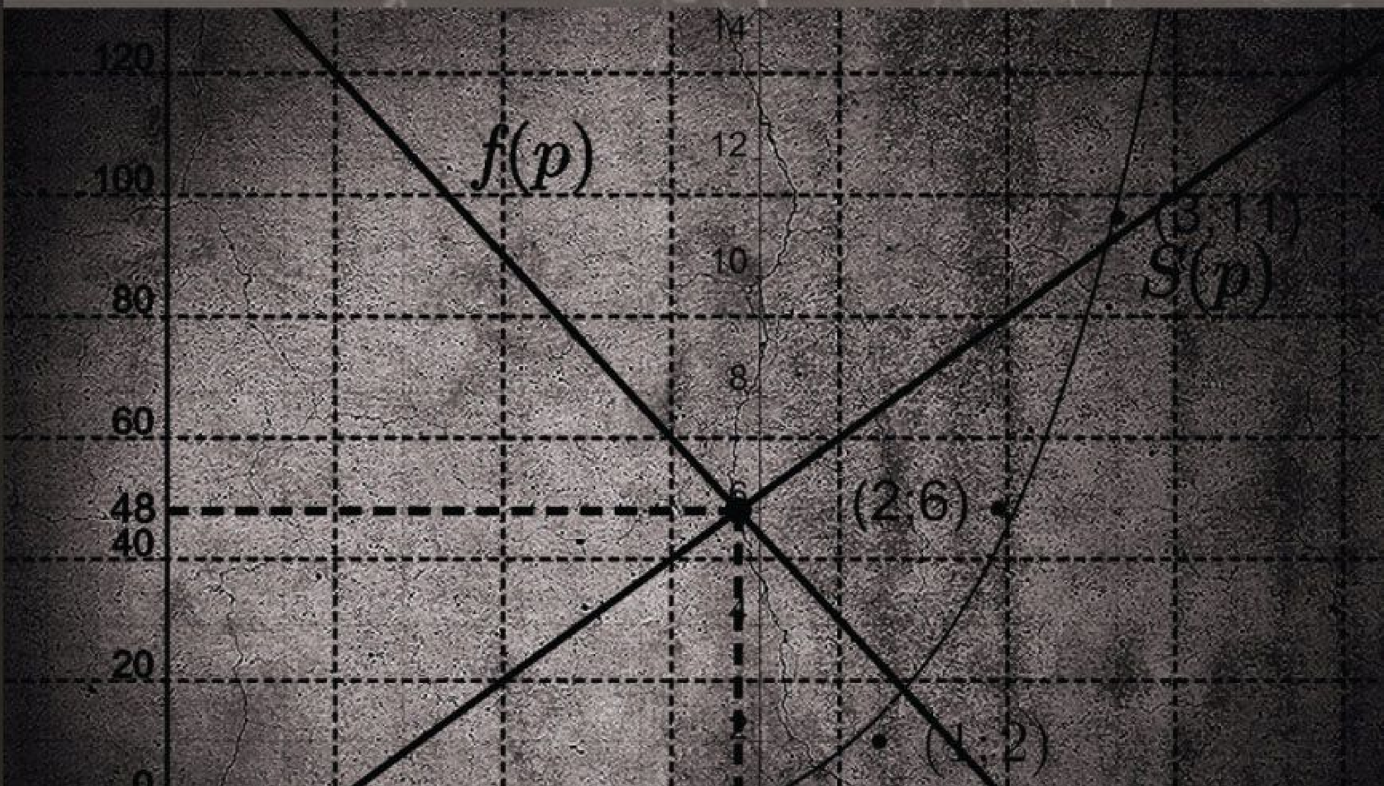
Dr. Kézi Csaba Gábor

Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek gazdasági és mérnöki alkalmazásokkal



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR

Dr. Kézi Csaba Gábor

MÁTRIXOK ÉS LINEÁRIS EGYENLET-RENDSZEREK GAZDASÁGI ÉS MÉRNÖKI ALKALMAZÁSOKKAL

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2018

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

Tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Nagy Gergő

Egyetemi adjunktus, Debreceni Egyetem TTK Analízis Tanszék

ISBN 978 963 318 033 4

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2018-ban.
www.dupress.hu

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban a Debreceni Egyetem Műszaki Karának Matematika I. tantárgyához készült oktatási segédanyagként. A jegyzet a precíz matematikai felépítésen túl számos, a műszaki és gazdasági életben felmerülő probléma megoldására alkalmazható módszert is bemutat.

A jegyzethez szorosan kapcsolódik mind tematikájában, mind felépítésében, mind jelölésrendszerében egy feladatgyűjtemény, amely részletesen kidolgozott feladatokat tartalmaz az egyszerűbb típusfeladatoktól, a bonyolultabb versenyszintű feladatokig.

A jegyzetet egyetemünk szinte minden magasabb szintű matematikát tanuló hallgatója használhatja, ugyanis a precíz matematikai felépítés mellett nagy hangsúlyt kapnak az alkalmazott matematikai feladatok.

A jegyzetben a lineáris algebra alapjaitól építkezünk, azt a célt szem előtt tartva, hogy minél több olyan témát dolgozzunk fel, amelyet a matematikán kívül egyéb tudományokban is alkalmaznak. Bizonyos esetekben a felvetett probléma nem feltétlenül matematikai megfogalmazású, de a megoldásban matematikai eszközöket kell felhasználni.

Minden fejezet végén „ellenőrző kérdések” találhatóak, melyek alkalmasak arra, hogy felmérjék, hogy az olvasó mennyire sikeresen sajátította el az adott fejezet tartalmát. Az utolsó fejezetben megtalálhatóak az ellenőrző kérdések megoldásai.

A jegyzet elkészüléséért köszönettel tartozom a jegyzet lektorainak, Dr. Kocsis Imre főiskolai tanárnak, a Műszaki Alaptárgyi Tanszék vezetőjének, valamint Dr. Nagy Gergő egyetemi adjunktusnak, akik hasznos információkkal láttak el a jegyzet megírása során, a jegyzet gondos átolvasásával és értékes megjegyzéssel segítették a tananyag elkészülését.

Köszönettel tartozom Dr. Szíki Gusztáv Áron főiskolai tanárnak, aki a fizikai megfogalmazású témakörökben segítette munkámat.

Köszönöm továbbá Kedvesemnek, Józsa Bettina Csillának és Édesanyámnak, akik mindenben mellettem álltak és támogattak a jegyzet megírása során.

2018. január 10.

1. Alapműveletek mátrixokkal

1.1. **Definíció.** Legyenek m és n pozitív egész számok és $a_{ij} \in \mathbb{R}$ vagy $a_{ij} \in \mathbb{C}$ minden $i \in \{1\,; 2;\, \ldots;\, m\}$ és minden $j \in \{1;\, 2;\, \ldots;\, n\}$ esetén. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot $m \times n$*-es* vagy $(m; n)$*-típusú mátrix*nak nevezzük. A mátrixokat latin nagybetűkkel, míg a mátrix elemeit két indexű latin kisbetűkkel jelöljük. Az első index az úgynevezett *sorindex*, a második index az *oszlopindex*. Az $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$-el jelöljük.

1.2. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

táblázat egy 2×3-as mátrix, mert 2 sora és 3 oszlopa van. Például az A mátrix a_{12} eleme: $a_{12} = 5$.

1.3. **Megjegyzés.** Azt a tényt, hogy az $m \times n$ típusú A mátrix az a_{ij} elemekből áll, úgy is jelöljük, hogy $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ha egyértelmű (vagy nem lényeges) a mátrix sorainak és oszlopainak a száma, akkor az $A = (a_{ij})$ jelölést is alkalmazzuk.

1.4. **Definíció.** Legyenek m és n pozitív egész számok, és tegyük fel, hogy $m \leq n$. Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix *főátlójának* vagy más szóval *fődiagonálisának* nevezzük az

$$(a_{11};\, a_{22};\, \ldots;\, a_{mm})$$

rendezett szám n-est. Az

$$a_{11};\, a_{22};\, \ldots;\, a_{mm}$$

elemeket *főátlóbeli elemek*nek mondjuk.
Az

$$\left(a_{m1};\ a_{(m-1);2};\ \ldots;\ a_{1m}\right)$$

rendezett szám n-est *mellékátló*nak hívjuk. Az

$$a_{m1};\ a_{(m-1);2};\ \ldots;\ a_{1m}$$

elemeket *mellékátlóbeli elemek*nek nevezzük.

1.5. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix főátlója az $(1;\ 5)$ vektor, mellékátlója a $(2;\ 4)$ vektor.

1.6. **Példa.** A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix főátlója az $(1;\ 4)$ vektor, mellékátlója a $(2;\ 3)$ vektor.

1.7. **Példa.** A

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix főátlója az $(1;\ 3;\ 6;\ 9)$ vektor, mellékátlója a $(4;\ 5;\ 6;\ 7)$ vektor.

1.8. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *négyzetes* vagy *kvadratikus*, ha a sorainak és oszlopainak a száma megegyezik. Az $n \times n$-es négyzetes mátrixok halmazát $\mathcal{M}_n$-el jelöljük. Egy négyzetes mátrix sorainak (oszlopainak a számát) mátrix *rend*jének is nevezzük.

1.9. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix egy 2×2-es négyzetes mátrix.

1.10. **Definíció.** Egy $1 \times n$-es mátrixot *sorvektor*nak vagy *sormátrix*nak, míg egy $n \times 1$-es mátrixot *oszlopvektor*nak vagy *oszlopmátrix*nak nevezzük.

1.11. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix egy sorvektor, a

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mátrix egy oszlopvektor.

1.12. **Definíció.** *Zérusmátrix*nak nevezzük az olyan mátrixokat, melynek minden eleme nulla.

1.13. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix 2×3-as zérusmátrix.

1.14. **Definíció.** Az olyan $n \times n$ típusú mátrixot, melynek főátlóbeli elemei egyesek, az összes többi eleme nulla *n-edrendű egységmátrix*nak nevezzük. Jele: E_n.

1.15. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy ha az egységmátrix rendje egyértelmű, akkor az E_n jelölés helyett egyszerűen az E jelölést használjuk.

1.16. **Példa.** A másodrendű egységmátrix:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.17. **Példa.** A harmadrendű egységmátrix:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.18. **Definíció.** *Diagonális mátrix*nak vagy *diagonálmátrix*nak nevezzük az olyan négyzetes mátrixot, amelynek főtálóján kívül minden eleme nulla.

1.19. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix egy 3×3-as diagonális mátrix.

1.20. **Megjegyzés.** Az egységmátrix olyan diagonális mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme 1-es.

1.21. **Definíció.** Két mátrixot *azonos típusú*nak nevezünk, ha mindkettő $m \times n$ típusú, azaz ha mindkét mátrixnak m darab sora és n darab oszlopa van.

1.22. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrixok azonos típusúak.

1.23. **Definíció.** Két mátrix *egyenlő*, ha a megfelelő helyen lévő elemeik megegyeznek, azaz

$$A_{m \times n} = B_{m \times n},$$

ha

$$(a_{ij}) = (b_{ij})$$

minden $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$ esetén.

1.24. **Definíció.** Két azonos típusú mátrix *összeg*én azt a mátrixot értjük, melynek elemei a mátrixok megfelelő helyen lévő elemeinek összege.
Tehát az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ és a $B = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix összege az

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

mátrix.

1.25. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

mátrixok összege

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 10 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

1.26. **Megjegyzés.** Összeadni csak azonos típusú mátrixokat lehet.

1.27. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrixokat nem lehet összeadni.

1.28. **Tétel.** (az összeadás tulajdonságai)

Legyenek A, B és C $m \times n$-es mátrixok. Ekkor

(1) $A + B = B + A$, azaz az összeadás kommutatív művelet;

(2) $(A + B) + C = A + (B + C)$, azaz az összeadás asszociatív művelet;

(3) $A + 0_{m\times n} = A$, ahol $0_{m\times n}$ az $m \times n$-es zérusmátrixot jelöli;

(4) minden mátrixnak létezik additív inverze, azaz létezik olyan B mátrix, melyre $A + B = 0$, ahol $B = (-a_{ij})$.

Bizonyítás: Legyen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, ahol a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} valós vagy komplex számok minden $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$ esetén.

(1) A valós, illetve komplex számok kommutativitását felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A.$$

(2) A valós, illetve komplex számok asszociativitását felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= \big((a_{ij}) + (b_{ij})\big) + (c_{ij}) = \\ &= (a_{ij}) + \big((b_{ij}) + (c_{ij})\big) = A + (B + C).\end{aligned}$$

(3) Jelölje $0_{m\times n}$ az egy $m \times n$-es zérusmátrixot. Ekkor

$$A + 0_{m\times n} = (a_{ij}) + (0_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

(4) Ha $B = (-a_{ij})$, akkor

$$A + B = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = 0_{m\times n}.$$

Ezzel az állításokat igazoltuk. ■

1.29. **Definíció.** Egy mátrix *számszoros*án (*skalárszoros*án) azt a mátrixot értjük, melyet úgy kapunk meg, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, azaz ha $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az A mátrix λ-szorosán a

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \qquad (i = 1, \dots, m; \text{ és } j = 1, \dots, n)$$

mátrixot értjük.

1.30. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ mátrix 2-szerese a

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

mátrix.

1.31. **Tétel.** (a számmal való szorzás tulajdonságai)
Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, továbbá $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ekkor

(1) $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$;
(2) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;
(3) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
(4) $1 \cdot A = A$.

Bizonyítás: Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ekkor

(1) A valós számok asszociativitása miatt

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot \mu) \cdot (a_{ij}) = \lambda \cdot (\mu \cdot a_{ij}) = (\lambda \cdot \mu \cdot a_{ij}) = \\ = (\lambda \cdot \mu) \cdot (a_{ij}) = \lambda(\mu \cdot a_{ij}) = \lambda(\mu \cdot A).\end{aligned}$$

(2) A valós számok disztributivitása miatt

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot A &= (\lambda + \mu) \cdot (a_{ij}) = \big((\lambda + \mu) \cdot (a_{ij})\big) = \\ &= \big(\lambda \cdot (a_{ij})\big) + \big(\mu \cdot (a_{ij})\big) = \\ &= (\lambda \cdot a_{ij}) + \big(\mu \cdot a_{ij}\big) = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.\end{aligned}$$

(3) A valós számok disztributivitása miatt

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot \big((a_{ij}) + (b_{ij})\big) = \\ &= \lambda \cdot \big((a_{ij})\big) + \lambda \cdot \big((b_{ij})\big) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B.\end{aligned}$$

(4) Mivel $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$, ezért

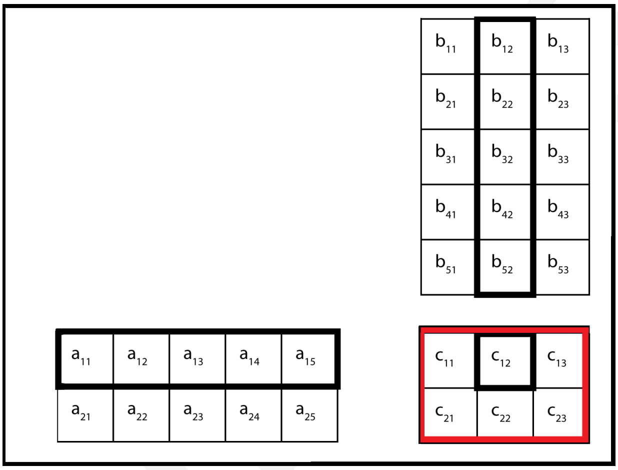
$$1 \cdot A = 1 \cdot (a_{ij}) = (1 \cdot a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

1.32. **Definíció.** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ és a $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ mátrixok *szorzat*án azt a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrixot értjük, amelynek $(i; j)$ indexű elemére teljesül, hogy

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

1.33. **Megjegyzés.** Két mátrix szorzásakor, a szorzatmátrix $(i; j)$-indexű elemét úgy kapjuk meg, hogy az első mátrix i-edik sorát a második mátrix j-edik oszlopával szorozzuk össze úgy, hogy a „megfelelő” elemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk.



$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} + a_{15} \cdot b_{51}\\
c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + a_{14} \cdot b_{42} + a_{15} \cdot b_{52}\\
c_{13} &= a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} + a_{14} \cdot b_{43} + a_{15} \cdot b_{53}\\
c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} + a_{25} \cdot b_{51}\\
c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} + a_{24} \cdot b_{42} + a_{25} \cdot b_{52}\\
c_{23} &= a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53}
\end{aligned}$$

Az itt látható módszert Falk-sémának is nevezik. Vegyük észre, hogy a szorzatmátrix c_{ij} eleme az A mátrix i-edik sorának (mint sorvektornak) és a B mátrix j-edik oszlopának (mint oszlopvektornak) a skaláris szorzata.

1.34. **Megjegyzés.** Két mátrix pontosan akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával.

Azaz összeszorozni $m \times k$-as mátrixot csak $k \times n$-es mátrixal lehet, és ekkor az eredménymátrix $m \times n$-es lesz.

1.35. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrixok szorzata

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}.$$

1.36. **Megjegyzés.** A mátrixszorzás nem-kommutatív művelet. Elegendő arra gondolnunk, hogy például ha az A mátrix 2×3-as, a B mátrix 3×4-es, akkor az $A \cdot B$ mátrix létezik, míg a $B \cdot A$ mátrix már nem.

1.37. **Megjegyzés.** Általános esetben, ha A és B olyan mátrixok, hogy $A \cdot B$ is létezik és $B \cdot A$ is létezik, akkor sem biztos, hogy $A \cdot = B \cdot A$.

1.38. **Példa.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Ekkor egyrészt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

másrészt

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.39. **Tétel.** (a mátrixszorzás tulajdonságai)
Legyen $A \in \mathcal{M}_{m \times k}$, továbbá $B, C \in \mathcal{M}_{k \times n}$, valamint $D \in \mathcal{M}_{n \times t}$. Ekkor

(1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

(2) $(A \cdot B) \cdot D = A(B \cdot D)$;

(3) $E_n \cdot A = A$.

Bizonyítás:

(1) A mátrixszorzás és -összeadás definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A \cdot (B + C) = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot (b_{sj} + c_{sj}) = \sum_{s=1}^{k} (a_{is} \cdot b_{sj} + a_{is} c_{sj}) =$$
$$= \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj} + \sum_{s=1}^{k} a_{is} c_{sj} = A \cdot B + A \cdot C.$$

(2) A mátrixszorzás definícióját felhasználva

$$(A \cdot B) \cdot D = \left(\sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj} \right) \cdot D = \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj} \right) \cdot c_{jt} =$$
$$= \left(\sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot \left(\sum_{j=1}^{t} a_{is} \cdot b_{sj} \right) \cdot c_{jt} \right) = A \cdot (B \cdot D).$$

(3) A mátrixszorzás definíciójából azonnal adódik.

Ezzel valamennyi állítást igazoltuk. ■

1.40. **Megjegyzés.** A valós számok körében teljesül, hogy ha $a \cdot b = 0$, akkor $a = 0$ vagy $b = 0$. A mátrixok szorzására ez a tulajdonság nem igaz, azaz léteznek olyan nem zérusmátrixok, melyek szorzata a zérusmátrix. Ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

akkor

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.41. **Definíció.** Egy mátrix *transzponált*ján a sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrixot értjük, azaz ha $A = (a_{ij})$, akkor a transzponáltja az $A^T = (a_{ji})$ mátrix.

1.42. **Megjegyzés.** Egy $m \times n$-es mátrix transzponáltja $n \times m$-es mátrix.

1.43. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltja az

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix.

1.44. **Tétel.** (a transzponálás tulajdonságai)
Legyenek A és B olyan mátrixok, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetőek. Ekkor

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
(2) $(A^T)^T = A$;
(3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Bizonyítás: Valamennyi állítás azonnal adódik a mátrixműveletek definíciója és a transzponálás definíciója alapján. ■

1.45. **Definíció.** Egy $n \times n$-es mátrixot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha $A = A^T$, azaz ha minden $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ esetén az A mátrix i-edik sora és az i-edik oszlopa megegyezik .

1.46. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix szimmetrikus, mert

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

így $A = A^T$.

1.47. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix nem szimmetrikus, mert

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

, így $A \neq A^T$.

1.48. **Definíció.** Egy négyzetes mátrix *ferdén szimmetrikus*, ha $A^T = -A$.

1.49. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix ferdén szimmetrikus, mert

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

1.50. **Tétel.** Ferdén szimmetrikus mátrix minden főátlóbeli eleme zérus.

Bizonyítás: Tekintsük az $n \times n$ típusú $A = (a_{ij})$ ferdén szimmetrikus mátrixot. Ekkor definíció szerint $A^T = -A$. Mivel

$$A^T = (a_{ji}),$$

ezért

$$(a_{ji}) = -(a_{ij}).$$

A főátlóbeli elemek azok az elemek, amelyekre $i = j$, így az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy minden $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ esetén

$$a_{ii} = -a_{ii} \qquad \Rightarrow \qquad 2a_{ii} = 0,$$

így $a_{ii} = 0$, tehát az A mátrix minden főátlóbeli eleme zérus. ∎

1.51. **Tétel.** Minden négyzetes mátrix felírható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.

Bizonyítás: Legyen A egy tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor

$$A = \frac{1}{2} \cdot (A + A^T) + \frac{1}{2} \cdot (A - A^T).$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $A + A^T$ szimmetrikus és $A - A^T$ ferdén szimmetrikus mátrixok. Mivel

$$(A + A^T)^T = (A^T)^T + A^T = A + A^T,$$

ezért $A + A^T$ szimmetrikus mátrix.
Mivel

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T),$$

ezért $A - A^T$ ferdén szimmetrikus mátrix.
Azt kaptuk tehát, hogy az A mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, amivel igazoltuk az állítást. ∎

1.52. **Megjegyzés.** Az előbbi tétel bizonyítás megmondja azt is, hogy hogyan állítható elő egy négyzetes mátrix egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.

1.53. **Példa.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ekkor

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $A + A^T$ mátrix:

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot (A + A^T) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Az $A - A^T$ mátrix:

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot (A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva a kapott eredményeket azt kapjuk, hogy az A mátrix előáll

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

alakban.

1.54. **Definíció.** Ha egy négyzetes mátrix főátló alatti elemei nullák, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *felső háromszög alakú* vagy *felső trianguláris*. Egy mátrix *alsó háromszög alakú* vagy *alsó trianguláris*, ha a főátló feletti elemei nullák.

1.55. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix felső háromszög alakú, a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrix alsó háromszög alakú.

1.56. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *trapéz alakú* vagy *lépcsős alakú*, ha a főátló alatti elemi nullák.

1.57. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix trapéz alakú.

1.58. **Definíció.** Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ négyzetes mátrixot *invertálható*nak nevezzük, ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ négyzetes mátrix, melyre $AB = BA = E_n$ teljesül, ahol E_n az n-edrendű egységmátrix. Ilyenkor a B mátrixot az A mátrix *inverz*ének nevezzük. Jelölése: A^{-1}.

1.59. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverze $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, ugyanis

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.60. **Tétel.** Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás: Indirekt tegyük föl, hogy az A négyzetes mátrix invertálható, és B és C is inverze A-nak. Mivel B és C az A inverzei, ezért $A \cdot C = E_n$ és $B \cdot A = E_n$. Ekkor a mátrixszorzás asszociatív tulajdonságát felhasználva

$$B = B \cdot E_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E_n \cdot C = C$$

adódik, amivel igazoltuk az állítást. ■

1.61. **Megjegyzés.** (2×2-es mátrix inverzének meghatározása definíció szerint) Meghatározzuk az

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét. Keressük azt az A^{-1} mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = E_2$. Legyen az A^{-1} mátrix az alábbi alakú:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrixnak a másodrendű egységmátrixal kell egyenlőnek lennie, azaz

$$\begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A két mátrix pontosan akkor lesz egyenlő, ha teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\begin{aligned} a \cdot e + b \cdot g &= 1 \\ a \cdot f + b \cdot h &= 0 \\ c \cdot e + d \cdot g &= 0 \\ d \cdot f + d \cdot h &= 1. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldjuk az e, f, g, h ismeretlenekre. A harmadik egyenletből kifejezzük az e ismeretlent, amit visszahelyettesítünk az első e-gyenletbe:

$$(*)\ e = -\frac{d \cdot g}{c} \qquad \Rightarrow \qquad -a \cdot \frac{d \cdot g}{c} + b \cdot g = 1.$$

A kapott egyenletet c-vel szorozzuk, majd g-t kiemeljük, végül annak együtthatójával osztunk, így kifejezzük g-t:

$$\begin{aligned} -a \cdot d \cdot g + b \cdot g \cdot c &= 1 \\ g \cdot (b \cdot c - a \cdot d) &= c \\ \frac{-c}{a \cdot d - b \cdot c} &= g. \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve a $(*)$ egyenletbe

$$e = -\frac{d \cdot g}{c} = -\frac{d\frac{-c}{a \cdot d - b \cdot c}}{c} = \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c}$$

adódik. Hasonlóan kapjuk meg az f és a h értékeket is:

$$f = \frac{-b}{a \cdot d - b \cdot c}, \quad h = \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c}.$$

Tehát az inverzmátrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{-b}{a \cdot d - b \cdot c} \\ \dfrac{-c}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

ha $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Azt kaptuk tehát, hogy egy 2×2-es mátrix inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a főtálóbeli elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóbeli elemek szorzatát, az így kapott értéknek vesszük a reciprokát, majd ezt megszorozzuk azzal a mátrixal, amit az eredeti mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak főtálóbeli elemeit felcseréljük, a mellékátlóbeli elemeinek vesszük a -1-szeresét.

1.62. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix *ortogonális*, ha teljesül, hogy

$$A^{-1} = A^T.$$

1.63. **Példa.** Minden α valós szám esetén az

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

mátrix ortogonális, ugyanis

$$A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

így

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha \\ -\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk, hogy

$$A \cdot A^T = E_2,$$

így $A^T = A^{-1}$, tehát A valóban ortogonális.

Ellenőrző kérdések

1. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix típusa: ....
2. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix típusa: ....
3. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix a_{33} eleme: ....
4. Az $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix a_{12} eleme: ....
5. Két mátrix csak akkor adható össze, ha ....
6. Egy $m \times n$ típusú mátrix csak .... mátrixszal adható össze.
7. Egy mátrix transzponáltja: ....
8. Egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja .... típusú.
9. Egy $4 \times k$ és egy $k \times 6$ típusú mátrix szorzata .... típusú.
10. A mátrixok összeadása kommutatív-e? ....
11. A mátrixok szorzása kommutatív-e? ....
12. A 2×2 típusú egységmátrix: ....
13. A 3×2 típusú egységmátrix: ....
14. A 2×4 típusú zérusmátrix: ....
15. Ha az $m \times n$ típusú A mátrix kvadratikus, akkor ....
16. Igaz-e, hogy egy mátrix és a transzponáltja mindig összeszorozható? ....
17. Ha A tetszőleges $m \times n$-es mátrix, akkor milyen nevezetes tulajdonsággal rendelkezik az $A \cdot A^T$ mátrix? ....
18. Ha A és B olyan mátrixok, hogy $A \cdot B$ létezik, akkor $(A \cdot B)^T =$ ....
19. Ha A és B olyan mátrixok, hogy $A + B$ létezik, akkor $(A + B)^T =$ ....
20. Egy mátrix transzponáltjának a transzponáltja: ....
21. A B mátrix az A mátrix inverze, ha teljesül, hogy ....

22. Az A mátrix szimmetrikus, ha ....
23. Az A mátrix ferdén szimmetrikus, ha ....
24. Az A mátrix ortogonális, ha ....

2. Mátrixok alapműveleteinek gazdasági alkalmazásai

2.1. **Megjegyzés.** A gazdasági problémák megoldásánál sokszor nagy mennyiségű adattal dolgozunk. Ilyenkor érdemes ezeket feldolgozás céljából csoportosítani (rendezni). Ennek céljából az adatokat táblázatokba foglaljuk, így ilyen esetekben az adatokat mátrixokkal reprezentáljuk, az adatokkal végzett műveleteket mátrixműveletekként írjuk fel.

2.2. **Definíció.** Az úgynevezett *szállítási mátrix*ot olyan esetekben készítik el, ha több raktárban tárolnak termékeket és ezeket több rendeltetési helyre kell kiszállítani. A mátrixban a fajlagos költségeket tűntetik fel azaz azt, hogy az áru egy egységének elszállítása mennyibe kerül.

2.3. **Példa.** Tekintsük azt az esetet, amikor három raktárból ($R1$, $R2$, $R3$) két helyre ($S1$, $S2$) kell szállítani. A raktárok olyanok, hogy mindegyikben csak egyféle termék van, de mindegyikben más-más termék. A fajlagos költségeket az alábbi táblázat tartalmazza:

	S1	**S2**
R1	10	20
R2	30	20
R3	20	15

Foglaljuk az adatokat mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 20 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}.$$

Például az első sor második eleme azt jelenti, hogy az első raktárból a második szállítási helyre való szállítás költsége 20 Ft. Legyen továbbá az egyes termékek termelési költsége rendre 40, 50 és 60 Ft. Ebből képezzük a

$$B = \begin{pmatrix} 40 & 40 \\ 50 & 50 \\ 60 & 60 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A fajlagos termelési és a szállítási költségek összegéből álló összköltségmátrixot az A és B mátrixot összege adja, azaz az összköltség:

$$A + B = \begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 80 & 70 \\ 80 & 75 \end{pmatrix}.$$

2.4. **Definíció.** Tekintsünk egy üzemet, amely különböző termékeket állít elő, és a termékek alőállításához különféle nyersanyagok szükségesek. Ha ezeket az adatokat táblázatba fogalaljuk, akkor az így kapott mátrixot *technológiai mátrix*nak nevezzük.

2.5. **Példa.** Tegyük fel, hogy 4-féle termék előállításához 3 különböző alapanyag szükséges. Az egyes termékek előállításához szükséges alapanyag mennyiségeket a következő táblázat mutatja:

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
A1	1	2	5	4
A2	3	6	2	7
A3	2	4	3	5

Tegyük fel, hogy az egyes termékekből rendre $10, 20, 30, 20$ egységet kell előállítanunk, és a rendelkezésre álló alapanyag mennyiségek rendre $300, 400, 300$ egység. Mátrixműveletekkel válaszoljunk az alábbi kérdésekre: Elegendő-e a rendelkezésre álló alapanyag mennyiség a gyártás végrehajtásához?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280 \\ 350 \\ 290 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \leq 300 \\ \leq 400 \\ \leq 300 \end{pmatrix}.$$

Tehát elegendő a rendelkezésre álló alapanyag.
A megmaradt alapanyag mennyiség:

$$\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 280 \\ 350 \\ 290 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2.6. **Feladat.** Egy étteremben háromféle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	gulyásleves	**zöldségleves**	**gyümölcsleves**
hétfő	10	5	5
kedd	20	10	5
szerda	10	10	10
csütörtök	5	20	10
péntek	30	10	20
egységár (Ft/db)	400	200	300

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Hány adag leves fogyott el az egyes levesekből az öt nap alatt összesen?
b) Mennyi az egyes levesfélékből származó bevétel az öt nap alatt összesen?
c) Mennyi a levesekből származó összbevétel az öt nap alatt?
d) Hány adag leves fogyott összesen az egyes napokon?

Megoldás:

a) A gulyáslevesből

$$10 + 20 + 10 + 5 + 30 = 75,$$

a zöldséglevesből

$$5 + 10 + 10 + 20 + 10 = 55,$$

a gyümölcslevesből

$$5 + 5 + 10 + 10 + 20 = 50$$

adag fogyott összesen az öt nap alatt.
Tömörebb formában mátrixokkal is felírhatjuk az eredményt. Ha egy mátrixot balról szorzunk egy olyan sormátrixszal, amelynek minden eleme 1, akkor a szorzás eredménye egy olyan sormátrix, amelynek elemei az eredeti mátrix egy oszlopában lévő elemeinek az összege. Tehát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 50 \end{pmatrix}.$$

b) A hétfői napon a bevétel:

$$10 \cdot 400 + 5 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 6\,500.$$

A keddi napon a bevétel:

$$20 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 11\,500.$$

A szerdai napon a bevétel:

$$10 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 10 \cdot 300 = 9\,000.$$

A csütörtöki napon a bevétel:

$$5 \cdot 400 + 20 \cdot 200 + 10 \cdot 300 = 9\,000.$$

A pénteki napon a bevétel:

$$30 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 20 \cdot 300 = 20\,000.$$

A számolást tömöröbb formában, mátrixműveletekkel felírva azt kapjuk, hogy az eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}.$$

Tehát a levesekből származó bevétel hétfőn 6 500 forint, kedden 11 500 forint, szerdán és csütörtökön 9 000 forint és pénteken 20 000 forint volt.

c) A levesekből származó bevétel az öt nap alatt

$$6\,500 + 11\,500 + 9\,000 + 9\,000 + 20\,000 = 56\,000\,\mathrm{Ft}.$$

Az eredményt mátrixművelettel is felírhatjuk. Ha a napi bevételből képzett oszlopmátrixot balról szorozzuk egy olyan mátrixszal, amelynek minden eleme 1, akkor eredményül az oszlopmátrix elemeinek az összegét kapjuk:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\,500 + 11\,500 + 9\,000 + 9\,000 + 20\,000 = 56\,000,$$

ezért a levesekből származó összbevétel az 5 nap alatt 56 000 forint.

d) Hétfőn $10 + 5 + 5 = 20$ adag leves fogyott.
Kedden $20 + 10 + 5 = 35$ adag leves fogyott.
Szerdán $10 + 10 + 10 = 30$ adag leves fogyott.
Csütörtökön $5 + 20 + 10 = 35$ adag leves fogyott.
Pénteken $30 + 10 + 20 = 60$ adag leves fogyott.
Az eredményt tömörebb formában egy mátrixszorzásként is felírhatjuk. A mátrix egy sorában lévő számait szeretnénk összeadni, amit megvalósíthatunk úgy, hogy a mátrixot jobbról szorozzuk egy olyan oszlopmátrixszal, amelynek minden eleme 1-es. Tehát:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 30 \\ 35 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Összefoglalva tehát elmondhatjuk, hogy a mátrixműveletek segítségével tömörebb, átláthatóbb formába írhatjuk fel az eredményeket, a számolások lényegesen leegyszerűsödnek, különösen nagy adathalmaz esetén.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk szállítási mátrixnak? ....
2. Mit nevezünk technológiai mátrixnak? ....

3. Mátrixok determinánsa és inverze

3.1. **Megjegyzés.** Ebben a fejezetben bevezetjük a determináns fogalmát, amelyben minden négyzetes mátrixhoz alkalmas módon hozzárendelünk egy számot. Ezt a számot a mátrix determinánsának fogunk nevezni. A definíciót rekurzióval adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy először 1×1-es, majd 2×2-es mátrix determinánsát értelmezzük. Ezután megmondjuk azt, hogy ha egy $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát már ismerjük, akkor hogyan értelmezzük az $n \times n$-es mátrix determinánsát.

3.2. **Definíció.** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó *minormátrix*án azt az $(m-1) \times (n-1)$-es A_{ij}-vel jelölt mátrixot értjük, melyet az a_{ij} elem sorának és oszlopának elhagyásával kapunk.

3.3. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén például A_{12} minormátrix azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk meg, hogy elhagyjuk az A mátrix első sorát és második oszlopát:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.4. **Megjegyzés.** A minormátrix fogalma nem csak négyzetes mátrixokra érvényes.

3.5. **Definíció.** Definíció szerint legyen egy 1×1-es mátrix determinánsa maga a szám.
Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrix *determinánsa* definíció szerint

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Tegyük fel hogy tetszőleges $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát már értelmeztük. Ekkor az $n \times n$-es A mátrix *determináns*át az „első sor szerinti kifejtéssel” úgy definiáljuk, hogy

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} +$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \det A_{1n}.$$

Egy $n \times n$-es mátrix determinánsát n-*edrendű determinánsnak* is nevezzük. A $\det A_{1k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ determinánsokat az a_{1k} elemekhez tartozó *aldeterminánsokként* is említjük. Az előjellel is ellátott $(-1)^{1+k} \det A_{1k}$ determinánsokat *előjeles aldeterminánsoknak* is nevezzük.

3.6. **Megjegyzés.** Mátrixok determinánsát csak négyzetes mátrixok esetén definiáltuk.

3.7. **Megjegyzés.** Az előző definícióban az első sor elemihez tartozó aldeterminánsok seítségével adtuk meg a mátrix deteminánsát. Ezt neveztük első sor szerinti kifejtésnek. Ehelyett azonban a gyakorlati feladatokban tetszőleges sor szerinti „kifejtést” is választhatunk.

3.8. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

3.9. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (45 - 48) - 2 \cdot (36 - 42) + 3 \cdot (32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0.$$

3.10. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot (2-3) = -4.$$

3.11. **Tétel.** Egy $n \times n$ típusú $A = (a_{ij})$ mátrix determinánsa:

$$\det A = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n},$$

ahol az összegzés az $1, 2, \ldots, n$ számok összes permutációjára történik, továbbá $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ az $1, 2, \ldots, n$ permutációban lévő inverziók számát jelöli. Az inverziók száma azt jelenti, hogy az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ permutációban minimálisan hányszor kell az egymás melletti elemeket megcserélni ahhoz, hogy előállítsuk az $1, 2, \ldots, n$ „természetes” sorrendet.

3.12. **Megjegyzés.** Az előbb tétel inkább csak elméleti jelentőségű, a gyakorlati feladatokban való számolás meglehetősen hosszadalmas lenne ezen tétellel. A következőkben szemléltetjük a tétel állítását másodrendű és harmadrendű determinánsok esetén.

3.13. **Megjegyzés.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ekkor:

szorzat	indexek	cserék	inverziók száma
$a_{11} \cdot a_{22}$	$1; 2$	$-$	0
$a_{12} \cdot a_{21}$	$2; 1$	$1; 2$	1

A determináns tehát:

$$\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

3.14. **Megjegyzés.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

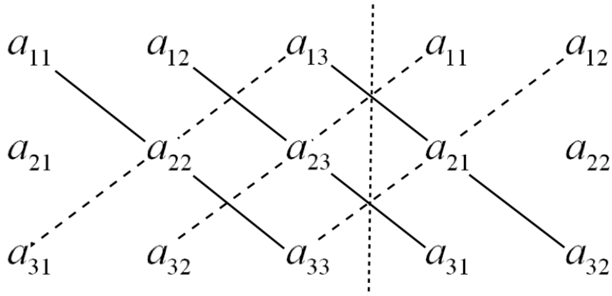
mátrixot. Ekkor:

szorzat	indexek	cserék	inverziók száma
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	$1; 2; 3$	–	0
$a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$	$1; 3; 2$	$1; 2; 3$	1
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$	$2; 1; 3$	$1; 2; 3$	1
$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	$2; 3; 1$	$2; 1; 3$	
		$1; 2; 3$	2
$a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	$3; 1; 2$	$1; 3; 2$	
		$1; 2; 3$	2
$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$	$3; 2; 1$	$3; 1; 2$	
		$1; 3; 2$	
		$1; 2; 3$	3

A determináns tehát:

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + (-1)^1 \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + \\
&= (-1)^1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + (-1)^2 \cdot a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\
&= (-1)^2 \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + (-1)^3 \cdot a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + \\
&+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\
&= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\
&- \big(a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}\big).
\end{aligned}$$

3.15. **Megjegyzés.** Harmadrendű mátrix determinánsát kiszámolhatjuk az úgynevezett Sarrus-szabály alkalmazásával is. A determináns első két oszlopát a determináns jobb oldalához hozzáírjuk, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, ezen szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátlóban és vele párhuzamosan tőle jobbra lévő két másik átló elemeit összeszorozzuk, ezen szorzatokat kivonjuk az előző összegből.



Tehát

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - \left(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}\right).$$

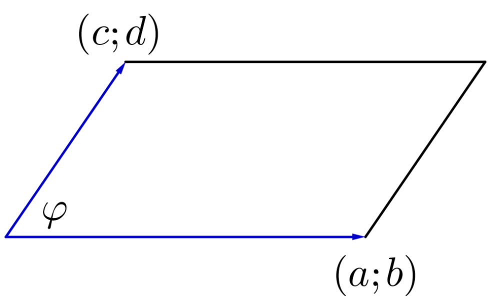
Fontos megjegyezni azt, hogy a Sarrus-szabály csak 3×3-as mátrix determinánsának kiszámítására alkalmazható. Hasonló számolási szabály magasabb rendű determinánsokra nem létezik.

3.16. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *reguláris*, ha a determinánsa nem zérus.

3.17. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *szinguláris*, ha nem reguláris, azaz ha a determinánsa nulla.

3.18. **Tétel.** (2×2-es mátrix determinánsának geometriai interpretációja)
2×2-es mátrix determinánsának geometriai jelentése a mátrix sorvektorai (oszlopvektorai) által kifeszített paralelogramma előjeles területe, ezalatt azt értve, hogy ha az eredmény negatív, akkor a szóbanforgó paralelogramma területe a kapott érték -1-szerese.

Bizonyítás: Tekintsük az $(a; b)$ és $(c; d)$ vektorok által kifeszített paralelogrammát.



Ismert, hogy az $(a;b)$ és $(c;d)$ vektorok által bezárt szög koszinusza a két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hossza szorzatának hányadosa:

$$\cos\varphi = \frac{a\cdot c + b\cdot d}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}.$$

A paralelogramma területe:

$$T = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\sin\varphi.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \\ &= \sqrt{1-\frac{(a\cdot c+b\cdot d)^2}{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}}\end{aligned}$$

Ha közös nevezőre hozunk, akkor

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)-(a\cdot c+b\cdot d)^2}{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}}$$

adódik. Elvégezve a zárójelek felbontását és az összevonást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)-(a^2\cdot c^2+b^2\cdot d^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d)}{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2\cdot c^2+a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d}{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b\cdot c-a\cdot d)^2}{(a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)}}.\end{aligned}$$

Felhasználva a kapott eredményt

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\sin\varphi = \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}\cdot\sqrt{\frac{(b\cdot c-a\cdot d)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}} = \\ &= \sqrt{(b\cdot c-a\cdot d)^2} = |b\cdot c-a\cdot d|\end{aligned}$$

adódik. Másrészt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c,$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

3.19. **Tétel.** (3×3-as mátrix determinánsának geometriai interpretációja)
3×3-es mátrix determinánsának geometriai jelentése a mátrix sorai (oszlopai) által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata, ezalatt azt értve, hogy ha az eredmény negatív, akkor a szóbanforgó test térfogata a kapott érték -1-szerese.

3.20. **Megjegyzés.** A paralelepipedon olyan hat lap által határolt térbeli geometriai alakzat, amelynek minden oldallapja paralelogramma.

3.21. **Megjegyzés.** Egy magasabbrendű mátrix determinánsának a kiszámolása a definíció alapján elég körülményes. Gondoljunk például arra, hogy például egy negyedrendű mátrix esetén négy harmadrendű (azaz 12 másodrendű) mátrix determinánsát kell meghatározni. A következőkben felsorolunk olyan állításokat, amelyek sok esetben megkönnyítik egy mátrix determinánsának kiszámítását.

3.22. **Tétel.** Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a determinánsának értéke a -1-szeresére változik.

3.23. **Példa.** Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa -2, míg a

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa 2, ami összhangban van az előbbi tétel állításával:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2.$$

3.24. **Tétel.** Ha egy mátrix egyik sorának minden elemét megszorozzuk a λ számmal, akkor a determinánsa értéke λ-szorosára változik.

Bizonyítás: A definíció alapján nyilvánvaló. ■

3.25. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix első sorának minden elemét 5-tel szorozva a determináns értéke az eredeti mátrix determinánsának 5-szörösére változik:

$$\det\begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 5\cdot(4-6) = -10.$$

3.26. **Tétel.** Ha egy mátrix egy sorának minden eleme nulla, akkor a determináns értéke 0.

Bizonyítás: Sorcserével elérhető, hogy a csupa nulla elemeket tartalmazó sor az első sor legyen. Ekkor a definíciót alkalmazva adódik az állítás. ■

3.27. **Példa.** Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix második sorának minden eleme zérus, így

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0.$$

3.28. **Tétel.** Ha egy mátrix egy sorának valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorához, akkor a determinánsának értéke nem változik.

3.29. **Példa.** A mátrix első sorának -4-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4+(-4)\cdot 1 & 5+(-4)\cdot 2 & 6+(-4)\cdot 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \\ = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.30. **Tétel.** Ha egy mátrix két sora megegyezik, akkor a determinánsa 0.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye, ugyanis, ha a két megegyező sor közül az egyik -1-szeresét hozzáadjuk a másikhoz, akkor a mátrixnak lesz egy csupa nulla elemeket tartalmazó sora, így az előző tétel szerint a determinánsa nulla. ■

3.31. **Tétel.** Felső háromszög alakú, mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, azaz

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

3.32. **Példa.**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4\cdot 6 = 24.$$

3.33. **Tétel.** Alsó háromszög alakú, mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, azaz

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

3.34. **Példa.**

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6 = 48.$$

3.35. **Tétel.** Egy mátrixnak és a transzponáltjának a determinánsa megegyezik.

3.36. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

és az

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrixok determinánsa egyenlő.

3.37. **Megjegyzés.** Az előző tétel miatt a determinánsokra korábban megfogalmazott tulajdonságok sorok helyett oszlopokra is érvényesek.

3.38. **Tétel.** (determinánsok szorzástétele)
Két mátrix szorzatának determinánsa megegyezik a tényezők determinánsainak szorzatával.

3.39. **Tétel.** Ortogonális mátrix determinánsa -1 vagy 1.

Bizonyítás: Legyen A egy $n \times n$-es ortogonális mátrix. Ekkor $A^{-1} = A^T$. Mivel

$$A \cdot A^{-1} = E_n,$$

és $\det(E_n) = 1$, ezért

$$\det(A \cdot A^{-1}) = 1$$

A determinánsok szorzástétele miatt:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1.$$

Felhasználva, hogy $A^{-1} = A^T$ azt kapjuk, hogy

$$\det A \cdot \det A^T = 1.$$

Egy mátrixnak és a transzponáltjának a determinánsa egyenlő, így

$$\det(A^T) = \det A,$$

amit felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(\det A)^2 = 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\det A = \pm 1$. ■

3.40. **Tétel.** Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

3.41. **Tétel.** Ha az A mátrix invertálható, akkor

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Bizonyítás: Ha az A mátrix invertálható, és az inverze A^{-1}, akkor felhasználva, hogy az egységmátrix determinánsa 1, valamint a determinánsok szorzástételét, azt kapjuk, hogy

$$1 = \det E_n = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}.$$

Mivel A invertálható, ezért $\det A \neq 0$, így

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

3.42. **Megjegyzés.** Egy $n \times n$-es mátrix determinánsát leghatékonyabban úgy számolhatjuk ki, hogy az első sor számszorosát hozzáadjuk az alatta lévő sorokhoz úgy, hogy ezen sorok első elemei nullák legyenek, majd az első oszlop szerinti kifejtést alkalmazzuk, így egy darab $(n-1) \times (n-1)$-es determinánst kell kiszámolnunk. A kapott determinánsra alkalmazzuk az előbbi eljárást, és így tovább.

3.43. **Példa.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát! Ehhez először adjuk hozzá az első sor -2-szeresét a második sorhoz, az első sor -3-szorosát a harmadik sorhoz, és az első sor -4-szeresét a negyedik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop szerinti kifejtést alkalmazva azt kapjuk, hogy a determináns értéke:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 \\ -4 & -8 & -11 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix}.$$

A kapott 3×3-as mátrixban a könnyebb számolás kedvéért az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Szintén a számolás egyszerűsítése miatt cseréljük meg az első és a harmadik sort:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ -3 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Az előbbi két technikai lépés után folytathatjuk az algoritmust. A mátrix első sorát adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop szerinti kifejtést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\det A = -1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -10 & -10 \end{pmatrix} = -1 \cdot (60 - 50) = -10.$$

Tehát az A mátrix determinánsa -10.
Megjegyezzük, hogy a 3×3-as mátrix determinánsát számolhatjuk például Sarrus-szabállyal is:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -7 \\ -4 & -8 & -11 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} = -360 - 220 - 280+$$
$$+ 280 + 330 + 240 = -10.$$

Tehát:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} = -10.$$

3.44. **Tétel.** (mátrix inverzének meghatározása determinánsokkal)
Egy mátrix inverzét meghatározhatjuk úgy, hogy a mátrix determinánsának reciprokával megszorozzuk azt a mátrixot, melyet úgy kapunk meg, hogy képezzük az eredeti mátrix elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltját. Ha az A mátrix invertálható, az inverzének b_{ij} eleme úgy számolható ki, hogy

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot A_{ji}}{\det A},$$

ahol A_{ji} a minormátrix, azaz az a mátrix, amelyet az A mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak j-edik sorát és i-edik oszlopát töröljük.

3.45. **Példa.** Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét!

A mátrix felsőháromszög alakú, ezért a determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, így

$$\det A = 1 \cdot (-2) \cdot 4 = -8,$$

ami nem nulla, tehát a mátrixnak létezik inverze. A b_{11}-es elem:

$$b_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1.$$

A b_{12}-es elem:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{8}{-8} = 1.$$

A b_{13}-es elem:

$$b_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \det A_{31}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}.$$

A b_{21}-es elem:

$$b_{21} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det A_{12}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$

A b_{22}-es elem:

$$b_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det A_{22}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}.$$

A b_{23}-es elem:

$$b_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det A_{32}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{-8} = -\frac{3}{-8} = \frac{3}{8}.$$

A b_{31}-es elem:

$$b_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot \det A_{13}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$

A b_{32}-es elem:

$$b_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot \det A_{23}}{\det A} = (-1) \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$

A b_{33}-es elem:

$$b_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot \det A_{33}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}.$$

Tehát:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3.46. **Definíció.** Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok és $n \in \mathbb{N}$. A

$$V(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

mátrixot *Vandermonde-mátrix*nak nevezzük.

3.47. **Tétel.** Az előbbi tételben szereplő Vandermonde-mátrix determinánsa:

$$V(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \prod_{i<j} (x_j - x_i),$$

azaz olyan $x_j - x_i$ alakú különbségek szorzata, ahol $i < j$.

3.48. **Példa.** Legyenek x és y valós számok. Ekkor

$$V(x; y) = \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = (y - x).$$

3.49. **Példa.** Legyenek x, y és z valós számok. Ekkor

$$V(x; y; z) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = (y - x) \cdot (z - x) \cdot (z - y).$$

Ellenőrző kérdések

1. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa: ....
2. Az $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa: ....
3. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverze: ....
4. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze: ....
5. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverzének b_{12} eleme: ....
6. Az $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének b_{21} eleme: ....
7. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa ....
8. Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a determinánsa ....
9. Ha egy mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determinánsa ....
10. Felső háromszög alakú mátrix determinánsa ....
11. Alsó háromszög alakú mátrix determinánsa ....
12. Diagonális mátrix determinánsa ....
13. Az n-edrendű egységmátrix determinánsa ....
14. Az $n \times n$ típusú zérusmátrix determinánsa ....
15. Két mátrix szorzatának a determinánsa megegyezik ....
16. Ha az A mátrix invertálható, akkor $\det(A^{-1}) =$ ....
17. Ha az A mátrix kvadratikus, akkor $\det(A^T) =$ ....
18. Egy mátrix reguláris, ha ....
19. Egy mátrix szinguláris, ha ....
20. Ha az A mátrix invertálható, akkor $\det A \cdot \det(A^{-1}) =$ ....
21. Ha A és B olyan mátrix, amelyekre $A \cdot B$ létezik, továbbá $\det A = 5$ és $\det B = 3$, akkor $\det(A \cdot B) =$ ....

22. Ortogonális mátrix determinánsa: ....
23. A 2×2-es Vandermonde-mátrix és determinánsa: ....
24. A 3×3-es Vandermonde-mátrix és determinánsa: ....

4. Titkosírás mátrixokkal

4.1. **Megjegyzés.** A titkosírás (kriptográfia) mára külön tudományággá nőtte ki magát. Ebben a fejezetben ezen tudományág alapjaival ismerkedünk meg úgy, hogy a mátrixműveleteket használjuk fel a titkosítás végrehajtásához.
Természetesen nagyon sok módja van annak, hogy egy adott szöveget kódolt szöveggé alakísunk. Mi most kifejezetten csak a mátrixokkal való kódolást mutatjuk be, annak is csak a legalapvetőbb esetét. Számos szakirodalom foglalkozik azzal, hogy hogyan lehet a különböző matematikai eszközöket kódolásra alkalmazni, azonben ezek már túlmutatnak ezen jegyzet tematikáján.
Ahhoz, hogy egy kódolt (titkosított) üzenetet készítsünk, majd a kapott kódot „visszafejtsük” matematikai eszközként alkalmazhatunk mátrixokat, felhasználva a közöttük értelmezett műveleteket.

4.2. **Definíció.** A titkosítandó szöveget vagy üzenetet *nyílt szöveg*nek nevezzük. Maga a titkosító eljárás egy algoritmus, amely a nyílt szöveget egy másik szöveggé alakítja. Az utóbbi szöveget nevezzük *titkosított szöveg*nek. Az algoritmus alkalmazása a nyílt szövegre a *kódolás* vagy *rejtjelezés*. A nyílt szöveget tekinthetjük számsorozatnak, a titkosított szöveget hasonlóképp, ilyen felfogásban a titkosító algoritmus egy matematikai függvény. Erről fel kell tennünk, hogy injektív, mivel a címzettnek vagy fogadónak képesnek kell lennie arra, hogy egyértelműen visszanyerje a nyílt szöveget a titkosított szövegből. Utóbbi folyamat, azaz a visszanyerés a *dekódolás* vagy *visszafejtés*.

4.3. **Eljárás.** Tekintsük azt a legegyszerűbb esetet, amikor a magyar ábécé betűihez rendeljük hozzá azt a számot, ahanyadik helyen található a szóbanforgó betű az ábécében. A „kettős” mássalhangzókat és a hármas mássalhangzót kihagyjuk ebből a felsorolásból, hiszen például a „cs” betűt egy „c” és „s” karakter egymás mellé írásával fogjuk előállítani. A „szóközhöz” a 0 számot rendeljük hozzá, a mondatközi és mondat végi írásjelektől jelen esetben eltekintünk. Az alábbiakban összefoglaljuk, hogy melyik betűhöz, melyik számot rendeljük:

$\text{a} \to 1$	$\text{é} \to 7$	$\text{j} \to 13$	$\text{ó} \to 19$
$\text{á} \to 2$	$\text{f} \to 8$	$\text{k} \to 14$	$\text{ö} \to 20$
$\text{b} \to 3$	$\text{g} \to 9$	$\text{l} \to 15$	$\text{ő} \to 21$
$\text{c} \to 4$	$\text{h} \to 10$	$\text{m} \to 16$	$\text{p} \to 22$
$\text{d} \to 5$	$\text{i} \to 11$	$\text{n} \to 17$	$\text{q} \to 23$
$\text{e} \to 6$	$\text{í} \to 12$	$\text{o} \to 18$	$\text{r} \to 24$

s $\to 25$	ü $\to 29$	x $\to 33$
t $\to 26$	ű $\to 30$	y $\to 34$
u $\to 27$	v $\to 31$	z $\to 35$
ú $\to 28$	w $\to 32$	szóköz $\to 0$

Az A mátrix tartalmazza annak a szónak a karaktersorozatát, amit az előbbi módon készítünk el.
Ha egy szó például 8 betűből áll, azt szabadon eldönthetjük, hogy abból 8×1-es, 4×2-es, 2×4-es vagy 8×1-es mátrixot készítünk-e. A dekódolás (illetve kódolás során is) sorfolytonosan, balról jobbra haladunk. Az elkészített mátrixot ezután megszorozzuk egy úgynevezett *kódoló* mátrixszal (jelöljük ezt B-vel), amelyet a „kódfejtő" tudomására kell hozni. Ezen mátrixról megköveteljük, hogy invertálható legyen. Ezt követően elkészítjük az

$$X = A \cdot B$$

mátrixot, és azt továbbítjuk a célszemélynek. A kódfejtő a rendelkezésre álló X és B mátrixok segítségével az A mátrixot az

$$A = X \cdot B^{-1}$$

összefüggés segítségével számolhatja ki.

4.4. **Példa.** A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

kódoló mátrix segítségével kódolt szöveget az

$$X = \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix}$$

mátrix tartalmazza. Dekódoljuk az üzenetet!

Megoldás:

A B mátrix inverze:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A „dekódolt" A mátrix

$$A = X \cdot B^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 34 & 56 \\ 63 & 90 \\ 30 & 50 \\ 77 & 104 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 9 & 18 \\ 15 & 5 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}.$$

Az elméleti összefoglalóban található kulcs alapján a keresett szó: „megoldás”.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk titkosított szövegnek? ....
2. Mit nevezünk kódolásnak? ....
3. Mit nevezünk dekódolásnak? ....

5. Leontief-féle modell

5.1. **Definíció.** Tegyük fel, hogy egy gazdaság n különböző ágazatra bontható fel. *Ráfordítási mátrix*nak nevezzük azt a mátrixot, melynek a_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i-edik ágazat termelt értékéből mennyi szükséges a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez.

5.2. **Modell.** Tegyük fel, hogy az adott elérni kívánt nettó kibocsátási vektor d és az x pedig a teljes kibocsátás vektora, ami jelen esetben ismeretlen. Ekkor ennek legyártása során a ráfordítási mátrix definíciója szerint $A \cdot x$ inputra van szükségünk az egyes ágazatokból. Közgazdaságtani szempontból az a fontos, hogy még nettóban maradjon plusz d, tehát az

$$A \cdot x + d = x$$

mátrixegyenlethez jutunk. Ezt átrendezve

$$x - A \cdot x = d$$

adódik, amiből x-et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (E - A) = d.$$

Ebből x-et kifejezve

$$x = (E - A)^{-1} \cdot d$$

adódik. Az így keletkezett $(E - A)^{-1}$ mátrixot *Leontief-inverz*nek nevezzük. Ha a Leontief-inverz valamelyik eleme nulla, akkor a megfelelő ágazat teljesen független a másik ágazattól. Ha a Leontief-inverznek létezik negatív eleme, akkor a gazdaság nem működőképes, ugyanis többe kerül a működés, mint a termelés.

Egy gazdaság akkor és csak akkor produktív, ha létezik a Leontief-inverz és annak minden eleme nemnegatív.

5.3. **Példa.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

Megoldás:

Az $E_2 - A$ mátrix:

$$E_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,5 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Az $E_2 - A$ mátrix determinánsa:

$$\det(E_2 - A) = 0,56 - 0,2 = 0,36.$$

Az $E_2 - A$ mátrix inverze:

$$\frac{1}{0,36} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,5 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{18} & \frac{10}{9} \\ \frac{25}{18} & \frac{20}{9} \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix minden eleme nem-negatív, ezért a gazdaság produktív.

5.4. **Példa.** Egy gazdaság ráfordítási mátrixa $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix}$.

a) Produktív-e (működőképes-e) a gazdaság?

b) Mennyi legyen a teljes kibocsátás ahhoz, hogy a $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó termelést elérjük?

c) Mely termékek előállítása nyereséges, ha árrendszerünk a $v = (1; 2)$ vektorral adható meg?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az $E - A$ mátrix inverzének az elemeit kell megvizsgálnunk, ahol E a megfelelő (jelen esetben 2×2-es) egységmátrix. Az

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,4 & 0,9 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,48} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,875 & 0,833 \\ 1,250 & 1,667 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Leontief-inverz minden tagja nemnegatív, ezért a gazdaság működőképes.

b) A teljes kibocsátás

$$(E - A)^{-1} \cdot d = \begin{pmatrix} 1,875 & 0,833 \\ 1,250 & 1,667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,07 \\ 8,9 \end{pmatrix},$$

tehát 7 darabot kell az első, 9 darabot kell a második termékből előállítani, ahhoz hogy a megadott nettó termelést elérjük.

c) Mivel
$$v \cdot A = (1\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,4 & 0,1 \end{pmatrix} = (1; 0,8),$$
ezért az első termék előállítása 1 egységbe kerül (így az nem is nyereséges, és nem is veszteséges), a második termék előállítása $0,8$ egységbe kerül (tehát ezen a terméken $1,2$ egység a nyereség).

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk ráfordítási mátrixnak? ....
2. Mit nevezünk Leontief-inverznek? ....
3. Mi produktivitás feltétele? ....

6. Vektorterek, mátrix rangja

6.1. **Definíció.** Egy X halmazt *lineáris tér*nek vagy más szóval *vektortér*nek nevezünk, ha adva van rajta két művelet, nevezetesen egy összeadás és egy skalárral való szorzás, melyek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- az összeadás kommutatív, azaz minden $x, y \in X$ esetén
$$x + y = y + x;$$
- az összeadás asszociatív, azaz minden $x, y, z \in X$ esetén
$$(x + y) + z = x + (y + z);$$
- létezik zéruselem, azaz létezik $0 \in X$ úgy, hogy $x + 0 = x$ minden $x \in X$ esetén;
- minden elemnek létezik additív inverze, azaz minden $x \in X$ esetén létezik $-x \in X$ úgy, hogy $x + (-x) = 0$;
- minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$;
- minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, minden $x \in X$ esetén
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x);$$
- minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, minden $x \in X$ esetén
$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x;$$
- minden $\lambda \in \mathbb{R}$, minden $x, y \in X$ esetén
$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

Egy linerás tér elemeit *vektor*oknak nevezzük.

6.2. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy az előbbi definícióban a skalárral való szorzást műveletnek neveztük, amely azonban nem precíz, ugyanis műveleten olyan leképezést értettünk, amely egy halmaz önmagával vett Descartes-szorzatából a halmazba képez. A skalárral való szorzat esetében azonban egy halmazbeli elem és egy valós szám által képzett párhoz rendelünk hozzá egy halmazbeli elemet. Az ilyen leképezéseket nevezhetjük „félműveletnek”.

6.3. **Példa.** Az
$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1; x_2) \,|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
halmaz az
$$x + y = (x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$$

módon definiált összeadással és a

$$\lambda \cdot x = \lambda(x_1; x_2) = (\lambda x_1; \lambda x_2)$$

előírással definiált skalárral való szorzással lineáris teret (más szóval vektorteret) alkot.

6.4. **Példa.** Az

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1; x_2; x_3) \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

halmaz az

$$x + y = (x_1; x_2; x_3) + (y_1; y_2; y_3) = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$$

módon definiált összeadással és a

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot (x_1; x_2; x_3) = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot x_2; \lambda \cdot x_3)$$

előírással definiált skalárral való szorzással vektorteret alkot.

6.5. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ koordinátatér elemeit általánosan oszlopvektoroknak tekintjük. Bizonyos esetkben azonban a könnyebb áttekinthetőség és a kevesebb helyigény miatt az oszlopvektoros írásmód helyett sorvektort írunk.

6.6. **Példa.** Az $m \times n$-es mátrixok halmaza a mátrixok halmazán definiált összeadással és skalárral való szorzással vektorteret alkot.

6.7. **Példa.** Az összes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ függvények halmaza nem alkot vektorteret, ugyanis ha λ tetszőleges valós szám, akkor $\lambda \cdot f$ nem feltétlenül egész értékű függvény.

6.8. **Példa.** A legfeljebb n-edfokú polinomok vektorteret alkotnak a valós számok halmaza fölött a polinomok halmazán értelmezett összeadással és skalárral való szorzással.

6.9. **Példa.** A valós számok halmazán értelmezett valós értékű függvények vektorteret alkotnak a függvények halmazán értelmezett összeadással és skalárral való szorzással.

6.10. **Példa.** A valós számsorozatok vektorteret alkotnak a valós számok halmaza fölött a tagonkénti összeadással és a számmal való szorzással.

6.11. **Definíció.** Az X vektortér elemeinek egy

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

halmazát *vektorrendszer*nek nevezzük.

6.12. **Példa.** Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektorteret és legyenek adottak az $a_1 = (2; 1)$, $a_2 = (1; 2)$ és $a_3 = (0; -1)$ vektorok. Ekkor az $\{a_1; a_2; a_3\}$ halmaz egy vektorrendszer $\mathbb{R}^2$-ben.

6.13. **Definíció.** Az X vektortér $a_1; a_2; \ldots; a_n$ vektorainak $x_1; x_2; \ldots; x_n$ skalárokkal (valós számokkal) képzett *lineáris kombináció*ján az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n$$

vektort értjük.

6.14. **Példa.** Az $a_1; a_2; a_3$ vektorok egy lineáris kombinációja például

$$2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 - a_3.$$

6.15. **Definíció.** Legyen X egy vektortér. Azt mondjuk, hogy a $b \in X$ vektor *lineárisan kifejezhető* az $a_1; a_2; \ldots; a_n \in X$ vektorok segítségével, ha léteznek olyan $x_1; x_2; \ldots; x_n$ valós számok, melyekre

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n.$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy b *előállítható* az $a_1; a_2; \ldots; a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

6.16. **Példa.** Írjuk fel a $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ vektort az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

és

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris kombinációjaként!
Keressük tehát azokat az x_1 és x_2 valós számokat, melyekre

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = b$$

teljesül. Felhasználva a vektorok összeadására és skalárral való szorzására vonatkozó definíciókat az

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

összefüggéshez jutunk. Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlőek, így az előbbi egyenlőség ekvivalens az

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 11 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszerrel. Az első egyenlet háromszorosából kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy $x_2 = 1$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe

$$x_1 + 2 = 4$$

adódik, amiből $x_1 = 2$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$b = 2 \cdot a_1 + a_2.$$

6.17. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \subset X$$

vektorrendszer *lineárisan független*, ha a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő, azaz ha az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = 0$$

egyenlőségből következik, hogy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Ha egy vektorrendszer nem lineárisan független, akkor azt mondjuk, hogy *lineárisan függő*.

6.18. **Megjegyzés.** A gyakorlatban a lineáris függetlenség vizsgálata egy lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti. Ha a megfelelő egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy minden ismeretlen zérus, akkor a megfelelő vektorok lineárisan függetlenek, ellenkező esetben lineárisan függőek.

6.19. **Példa.** Az $a_1 = (1; 2)$ és az $a_2 = (2; 3)$ vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak, ugyanis az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

egyenletrendszert részletesen felírva

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

adódik. Az első egyenlet kétszereséből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy $x_2 = 0$, amit például az első egyenletbe visszahelyettesítve $x_1 = 0$

adódik, tehát az a_1 és a_2 vektorok a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő.

6.20. **Példa.** Az $a_1 = (1; 2)$ és az $a_2 = (2; 4)$ vektorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, ugyanis az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

egyenletrendszert részletesebben felírva

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

adódik. Látható, hogy a második egyenlet kétszerese az elsőnek, így a két egyenlet „ugyanazt mondja”. Az egyik egyenlet tehát el is hagyható, mert nem tartalmaz „új információt” az első egyenlethez képest. Tehát az egyenletrendszernek minden olyan $(x_1; x_2)$ számpár megoldása, amelyre

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

teljesül, így például $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ is megoldás, tehát az $\{a_1; a_2\}$ vektorok nem csak triviális lineáris kombinációval állítják elő a zérusvektort, így a vektorok lineárisan függők.

6.21. **Megjegyzés.** A síkon két vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha egyik a másiknak számszorosa.

6.22. **Megjegyzés.** A koordinátasíkon két vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem esnek egy egyenesre, azaz ha egyik sem skalárszorosa a másiknak.

6.23. **Megjegyzés.** Lineárisan független vektorrendszer minden részrendszere is lineárisan független.

6.24. **Megjegyzés.** Egyetlen lineárisan független vektorrendszer sem tartalmazhatja a zérusvekort.

6.25. **Megjegyzés.** Egy n dimenziós vektortérben minden, legalább $n+1$ elemszámú vektorrendszer lineáris függő.

6.26. **Tétel.** Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha van olyan vektora, amely előáll a többi vektorának lineáris kombinációjaként.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az X vektortérben az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor léteznek olyan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

nem mind nulla skalárok, hogy

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = 0.$$

Tegyük fel, hogy $x_i \neq 0$ valamely $i \in \{1; 2; \ldots, n\}$ esetén. Ekkor

$$a_i = -\frac{x_1}{x_i} \cdot a_1 - \frac{x_2}{x_i} \cdot a_2 - \ldots - \frac{x_{i-1}}{x_i} \cdot a_{i-1} - \frac{x_{i+1}}{x_i} \cdot a_{i+1} - \ldots - \frac{x_n}{x_i} \cdot a_n,$$

tehát a_i előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Tehát, ha egy vektorrendszer lineárisan függő, akkor van olyan vektora, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.
Tegyük fel, hogy az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

vektorrendszer nem lineárisan függő, azaz lineárisan független. Ekkor az a_i $\big(i = 1, 2, \ldots, n\big)$ vektor nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, ugyanis ha léteznének olyan

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ x_n$$

valós számok, hogy

$$a_i = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_{i-1} \cdot a_{i-1} + x_{i+1} \cdot a_{i+1} \ldots + x_n \cdot a_n,$$

akkor

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_{i-1} \cdot a_i - a_i + x_{i+1} \cdot a_{i+1} \ldots + x_n \cdot a_n = 0,$$

ami a zérusvektor egy nem triviális lineáris kombinációja, így a vektorrendszer nem lineárisan független. Indirekt feltevésből ellentmondásra jutottunk, amivel igazoltuk azt, hogy ha egy vektorrendszer egy vektora előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer lineárisan függő. ■

6.27. **Következmény.** Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha egyetlen vektora sem áll elő a többi vektorának lineáris kombinációjaként.

6.28. **Definíció.** Egy vektortér *bázis*án maximális tagszámú lineárisan független vektorrendszert értünk. A maximális tagszám alatt azt értjük, hogy ha hozzáveszünk egy vektort a vektorrendszer tagjaihoz, akkor az már lineárisan függővé válik. Egy bázisban lévő vektorok számát a vektortér *dimenzió*jának mondjuk.

6.29. **Példa.** Az $\mathbb{R}^2$ koordinátasík 2 dimenziós, mert egy bázisa $\{(1;0),(0;1)\}$, ugyanis egyrészt a vektorok lineárisan függetlenek, mert az

$$x_1 \cdot (1;0) + x_2 \cdot (0;1) = (0;0)$$

egyenletrendszerből következik, hogy $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$.
Másrészt ha $(x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges, akkor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis a vektortér minden eleme előáll $(1;0)$ és $(0;1)$ lineáris kombinációjaként.

6.30. **Példa.** Az $\mathbb{R}^3$ koordinátatér 3 dimenziós, mert egy bázisa

$$\{(1;0;0);(0;1;0);(0;0;1)\}.$$

Ezen vektorokra szokás az

$$\begin{aligned} i &= (1;0;0); \\ j &= (0;1;0); \\ k &= (0;0;1) \end{aligned}$$

jelölést használni.

6.31. **Definíció.** Az $\mathbb{R}^n$ vektortér n-dimenziós, ugyanis egy bázisa az

$$\begin{aligned} e_1 &= (1;0;0;\ldots;0); \\ e_2 &= (0;1;0;\ldots;0); \\ &\vdots \\ e_n &= (0;0;0;\ldots;1). \end{aligned}$$

Ezt a bázist *természetes bázis*nak vagy *kanonikus bázis*nak nevezzük.

6.32. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az Y halmaz az X vektortér *altere*, ha Y maga is vektortér az X-beli műveletekkel.

6.33. **Megjegyzés.** A $\{0\}$ és az X alterei az X vektortérnek, melyeket *triviális alterek*nek nevezünk. Az ezektől különböző altereket *valódi alterek*nek mondjuk.

6.34. **Megjegyzés.** Az Y részhalmaz pontosan akkor *altere* az X vektortérnek, ha zárt az összeadásra és a skalárral valós szorzásra nézve, azaz ha

- minden $a, b \in Y$ esetén $a + b \in Y$;

- minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \cdot a \in Y$

teljesül.

6.35. **Példa.** Az origón átmenő síkok és egyenesek alteret alkotnak az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

6.36. **Tétel.** Egy vektortérben egy vektorrendszer tagjai összes lineáris kombinációinak halmaza alteret alkot.

6.37. **Definíció.** Az előbbi alteret az adott vektorrendszer által *generált altér*nek nevezzük.

6.38. **Példa.** Ha X egy vektortér és

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in X,$$

akkor minden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós szám esetén

$$x_1 \cdot a_1 + x_1 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n \in X,$$

ami valójában éppen az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

vektorok által generált altért. Ezt úgy is jelöljük, hogy

$$\mathcal{L}\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}.$$

6.39. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok az X vektortér *generátorrendszer*ét alkotják, ha az általuk generált altér X.

6.40. **Megjegyzés.** Az, hogy egy vektorrendszer generátorrendszer, azt jelenti, hogy a vektortér tetszőleges vektora előáll a generátorrendszer tagjainak lineáris kombinációjaként.

6.41. **Példa.** Az $\{1; x\}$ halmaz generátorrendszere a legfeljebb elsőfokú polinomok (kétdimenziós) vektorterének, ugyanis tetszőleges legfeljebb elsőfokú polinom előáll

$$\alpha + \beta \cdot x$$

alakban, ahol α, β valós számok.

6.42. **Példa.** A $a_1 = (2; -3)$ és az $a_2 = (1; 1)$ vektorokból álló vektorrendszer generátorrendszere az $\mathbb{R}^2$ vektortérnek.
Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{R}^2$-beli vektor előáll az a_1 és a_2 vektorok lineáris kombinációjaként. Legyen $(x; y)$ az $\mathbb{R}^2$ tér egy tetszőleges vektora. Ha a vektorrendszer generátorrendszer, akkor léteznek olyan λ_1 és λ_2 valós számok, hogy

$$(x; y) = \lambda_1 \cdot (2; -3) + \lambda_2 \cdot (1; 1).$$

Elvégezve a skalárral való szorzást és az összeadást

$$(x; y) = (2\lambda_1 + \lambda_2; -3\lambda_1 + \lambda_2).$$

adódik. Ekkor az

$$x = 2\lambda_1 + \lambda_2$$

és az

$$y = -3\lambda_1 + \lambda_2$$

egyenletekhez jutunk. Az első egyenletből kivonva a másodikat azt kapjuk, hogy

$$x - y = 5\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{x-y}{5}$$

adódik. Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x = 2 \cdot \frac{x-y}{5} + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3x+2y}{5}.$$

Tehát

$$(x; y) = \frac{x-y}{5} \cdot (2; -3) + \frac{3x+2y}{5} \cdot (1; 1).$$

6.43. **Tétel.** Egy vektortér vektorrendszere pontosan akkor bázis, ha lineárisan független generátorrendszer.

6.44. **Tétel.** Ha a $\mathcal{B}$ vektorrendszer bázisa a V vektortérnek, akkor a vektortér minden vektora egyértelműen előáll a bázisbeli vektorok lineáris kombinációjaként. Az itt fellépő együtthatókat a vektor adott bázisra vonatkozó *koordinátá*inak mondjuk. Tehát ha

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

az X vektortér egy bázisa, akkor tetszőleges $b \in X$ vektor esetén egyértelműen léteznek olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számok, hogy

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n.$$

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok a b vektor

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

bázisra vonatkozó koordinátái.

Bizonyítás: Mivel $\mathcal{B}$ bázis, ezért generátorrendszer, így léteznek olyan

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

valós számok, hogy

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n.$$

Tegyük fel, hogy léteznek valamilyen $y_1, y_1, \ldots, y_n$ skalárok is úgy, hogy

$$b = y_1 \cdot a_1 + y_2 \cdot a_2 + \ldots + y_n \cdot a_n.$$

Ekkor a két egyenlet különbségét véve

$$\begin{aligned} &x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n - \\ &- (y_1 \cdot a_1 + y_2 \cdot a_2 + \ldots + y_n \cdot a_n) = 0 \end{aligned}$$

adódik. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(x_1 - y_1) \cdot a_1 + (x_2 - y_2) \cdot a_2 + \ldots + (x_n - y_n) \cdot a_n = 0.$$

A vektorrendszer bázis, így speciálisan lineárisan független, tehát

$$\begin{array}{ccc} x_1 - y_1 = 0 & \Rightarrow & x_1 = y_1 \\ x_2 - y_2 = 0 & \Rightarrow & x_2 = y_2 \\ \vdots & & \\ x_n - y_n = 0 & \Rightarrow & x_n = y_n, \end{array}$$

tehát az előállítás egyértelmű. ■

6.45. **Definíció.** Egy vektorrendszer *rang*ja a maximális tagszámú lineárisan független részrendszerének tagszáma.

6.46. **Definíció.** Egy mátrix *rang*ja a mátrix oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer rangja.

6.47. **Tétel.** Egy mátrixnak és a transzponáltjának a rangja megegyezik.

6.48. **Következmény.** Egy mátrix rangja megegyezik a mátrix sorvektoraiból képzett vektorrendszer rangjával.

6.49. **Tétel.** Egy n-edrenű kvadratikus mátrix rangja pontosan akkor n, ha a mátrix determinánsa nem nulla.

6.50. **Tétel.** Egy n-dimenziós téren egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nulla.

Bizonyítás: Legyen X egy n dimenziós vektortér, amelyen az

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$$

vektorok lineárisan függők és legyen az A mátrix olyan $n \times n$ típusú mátrix, melynek oszlopai rendre $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$. Mivel a vektorok lineárisan függők, ezért léteznek

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$$

nem mind nulla skalárok úgy, hogy

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = 0.$$

Feltehető például, hogy $x_1 \neq 0$. Ekkor az A mátrix első oszlopát szorozzuk x_1-gyel, majd adjuk hozzá az i-edik oszlop x_i-szeresét minden $i \neq 1$-re. Ekkor az első oszlop minden eleme zérus lesz, így a mátrix determinánsa nulla.
Megfordítva, ha a mátrix determinánsa 0, akkor olyan átalakításokkal, amely során a determináns értéke nem változik, elérhető, hogy a mátrixnak legyen olyan oszlopa, amelynek minden eleme zérus. Ez az oszlop a többi oszlop lineáris kombinációja, tehát az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineárisan függők. ■

6.51. **Következmény.** Egy n-dimenziós téren egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

6.52. **Következmény.** Egy n-dimenziós téren egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

6.53. **Következmény.** Egy n-dimenziós téren egy n-tagú vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

6.54. **Példa.** Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az

$$a_1 = (1; 2; -1),\ a_2 = (1; 1; 2),\ a_3 = (2; -1; 1)$$

vektorok?
Mivel az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 1 + 1 + 8 + 2 + 2 - 2 = 12 \neq 0,$$

ezért a vektorrendszer lineárisan független. Mivel az $\mathbb{R}^3$ téren maximális tagszámú (ugyanis minden legalább 4-tagú vektorrendszer már lineárisan függő lenne), ezért bázis.

6.55. **Tétel.** Egy mátrix rangja nem változik, ha

- két sorát felcseréljük;
- egy sorát nullától különbzöző számmal szorozzuk;
- egy sorához hozzáadjuk egy másik sorának valahányszorosát.

6.56. **Példa.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix rangját!
Első lépésben az első sor -1-szeresét hozzádjuk a második sorhoz és az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alkalmazott eljárás után kapott mátrixban két olyan vektor van, amely lineárisan független, ezért a rangja 2.

6.57. **Példa.** Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix rangját!
Első lépésben az első sor -2-szeresét hozzádjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

A második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -3-szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alkalmazott eljárás után kapott mátrixban két olyan vektor van, amely lineárisan független, ezért a rangja 2.

6.58. **Definíció.** Ha az

$$\{f_1; f_2; \ldots; f_n\}$$

vektorrendszer tagjai $n-1$-szer folytonosan differenciálható függvények, akkor a

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

determinánst *Wronski-determinánsnak* nevezzük.

6.59. **Tétel.** Ha az

$$\{f_1; f_2; \ldots; f_n\}$$

vektorrendszer tagjai $n-1$-szer folytonosan differenciálható függvények és a vektorrendszer lineárisan függő, akkor $W(x) = 0$.

6.60. **Tétel.** Ha az

$$\{f_1; f_2; \ldots; f_n\}$$

vektorrendszer tagjai $n-1$-szer folytonosan differenciálható függvények és a belőlük képzett $W(x)$ Wronski determináns sehol sem zétus, akkor a vektorrendszer lineárisan független.

6.61. **Példa.** Tekintsük az $\{1, x, x^2\}$ függvényeket. Ekkor a Wronski-determináns:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \neq 0,$$

így a vektorrendszer lineárisan független.

6.62. **Példa.** Tekintsük az $\{1, \sin x, \cos x\}$ függvényeket. Ekkor a Wronski-determináns:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} = -\cos^2 x - \sin^2 x = -1 \neq 0,$$

így a vektorrendszer lineárisan független.

6.63. **Példa.** Tekintsük a $\{3x, 5x\}$ függvényeket. Ekkor a Wronski-determináns:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} 3x & 5x \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 15x - 15x = 0,$$

ilyenkor az előbbi tétel nem mond semmit a vektorrendszer függetlenségéről. Megjegyezzük, hogy egyébként a vektorrendszer lineárisan függő, mert a zérusvektort, azaz az azonosan zéró polinomot nem csak triviális lineáris kombinációval állítja elő, mert

$$5 \cdot 3x + (-3) \cdot 5x = 0.$$

Ellenőrző kérdések

1. Azt mondjuk, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_n vektorok lineárisan függetlenek, ha ....
2. Az a_1 és a_2 vektorok lineárisan függetlenek, ha ....
3. Az $\mathbb{R}^2$ vektortér természetes bázisvektorai: ....
4. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér természetes bázisvektorai: ....
5. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: ....
6. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: ....
7. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: ....
8. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: ....
9. Állítsuk elő az $(a; b)$ vektort az $\mathbb{R}^2$ vektortér természetes bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!
10. Állítsuk elő az $(a; b; c)$ vektort az $\mathbb{R}^3$ vektortér természetes bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!
11. Egy n-edrendű kvadratikus mátrix rangja pontosan akkor n, ha ....
12. Lineárisan függetlenek-e az $a_1 = (1; 3)$ és $a_2 = (2; 6)$ vektorok?
13. Lineárisan függetlenek-e az $a_1 = (1; 2)$ és $a_2 = (2; -3)$ vektorok?
14. Lehet-e bázisa az $\mathbb{R}^2$ koordinátasíknak az
$$a_1 = (1; 2),\ a_2 = (3; 4),\ a_3 = (0; 1)$$
vektorrendszer?
15. Egy 3 dimenziós vektortérben egy 4 elemű vektorrendszer lineárisan ....
16. Egy 2 dimenziós vektortérben egy 3 elemű vektorrendszer lineárisan ....

17. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha a sorvektorai lineárisan .... vektorok.
18. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan .... vektorok.
19. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha a sorvektorai lineárisan .... vektorok.
20. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan .... vektorok.

7. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

7.1. **Definíció.** Legyenek a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ és $b_1, \ldots, b_m$ adott valós számok. Ekkor az

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert *lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük. Az a_{ij} valós számokat az egyenletrendszer *együtthatói*nak, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az egyenletrendszer *ismeretlen*einek hívjuk. Ha az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő minden szám 0 (azaz $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), akkor azt mondjuk, hogy az egyenletrendszer *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*. Ha létezik megoldása az egyenletrendszernek, akkor azt mondjuk, hogy *megoldható*, ellenkező esetben azt, hogy *ellentmondásos*. Ha a megoldás egyértelmű, akkor az egyenletrendszer *határozott*, ellenkező esetben *határozatlan*. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer *alapmátrixa*ként említjük, míg az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer *kibővített mátrixának* nevezzük.

7.2. **Definíció.** Egy lineáris egyenletrendszer olyan megoldását, melyben minden ismeretlen értéke zérus, *triviális megoldás*nak nevezzük.

7.3. **Példa.** Az

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek x_1, x_2, x_3.
Az egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

7.4. **Definíció.** Ha a 7.1 definícióban felírt lineáris egyenletrendszer esetén bevezetjük az

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \ldots; a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

és a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

jelölést, akkor az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = b$$

alakot a lineáris egyenletrendszer *vektori alak*jának mondjuk.

7.5. **Példa.** A 7.3 példában szereplő egyenletrendszer esetén beveztve az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix};\ a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

és a

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

jelölést, akkor az egyenletrendszer vektori alakja:

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b.$$

7.6. **Definíció.** Ha a 7.1 definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer esetén az ismeretleneket az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektor, a jobb oldalt a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oszlovektor jelöli, akkor az egyenletrendszer az

$$A \cdot x = b$$

úgynevezett *mátrixos alak*ra írható át, ahol A a lineáris egyenletrendszer alapmátrixa.

7.7. **Tétel.** (Kronecker-Capelli)
Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha az alapmátrixának és kibővített mátrixának a rangja megegyezik.

Bizonyítás: Tekintsük az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszert, amelynek a vektori alakja

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = b.$$

Ez azt jelenti, hogy a b vektor az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorok lineáris kombinációja. Tegyük fel, hogy az alapmátrix és kibővített mátrix rangja egyaránt $r \leq n$. Ekkor az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

vektorrendszernek van r darab lineárisan független vektora, feltehető, hogy ezek

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_r\}.$$

Azonban mivel az A mátrix rangja r, ezért minden $r + 1$ tagú vektorrendszer lineárisan függő, azaz

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_r; b\}$$

lineárisan függő vektorrendszer. Ez csak úgy lehetséges, hogy a b vektor előállítható az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_r\}$$

vektorok lineáris kombinációjaként, azaz léteznek $x_1, x_2, \dots, x_r$ valós számok úgy, hogy
$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_r \cdot a_r = b.$$
Legyen $x_{r+1} = \dots = \dots = x_n = 0$, azaz a többi vektort nulla együtthatóval szerepeltetjük. Ekkor
$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = b,$$
amivel igazoltuk, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldható.
Megfordítva, ha a lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor léteznek
$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$
valós számok, hogy
$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = b.$$
Tegyük fel, hogy $\operatorname{rang}(A) = r$. Ekkor A-nak van r darab lineárisan független oszlopvektora. Megmutatjuk, hogy az $(A|b)$ kibővített mátrix minden $r+1$ elemű vektorrendszere már lineárisan függő.

- Ha a kivásztott $r+1$ tag között b nem szerepel, akkor
$$\operatorname{rang}(A|b) = \operatorname{rang}(A) = r.$$
- Ha a kiválasztott $r+1$ oszlop közül az r darab A-beli lineárisan függő, akkor $(A|b)$ is lineárisan függő, mert minden lineárisan függő vektorrendszer bővítése is lineárisan függő.
- Ha a kiválasztott $r+1$ oszlop közül az r darab A-beli lineárisan független, (legyenek ezek például $a_1, a_2, \dots, a_r$), akkor bármely a_j, ahol $(r+1 \leq j \leq n)$ előáll az $a_1, a_2, \dots, a_r$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ezeket behelyettesítve a
$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_n \cdot a_n = b.$$
összefüggésbe, azt kapjuk, hogy b előáll az $a_1, a_2, \dots, a_r$ lineáris kombinációjaként, így $a_1, a_2, \dots, a_r, b$ is lineárisan függő.

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

7.8. **Tétel.** Egy (megoldható) lineáris egyenletrendszer megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha az alapmátrix (és így a kibővített mátrix) rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

7.9. **Tétel.** Ha egy lineáris egyenletrendszer határozatlan, akkor a szabad paraméterek száma az ismeretlenek számának és az alapmátrix rangjának a különbsége.

7.10. **Tétel.** Egy lineáris egyenletrendszer megoldása nem változik, ha

- két egyenletet felcserélünk;
- egy egyenletet 0-tól különböző számmal szorzunk;
- egy egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet valahányszorosát.

7.11. **Definíció.** Az előbbi tulajdonságok felhasználásával tetszőleges lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa trapéz alakú mátrixá alakítható. A trapéz alakra hozás algoritmusát *Gauss eliminációnak* nevezzük.

7.12. **Eljárás.** (Gauss-elimináció)
Legyenek a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ és $b_1, \ldots, b_m$ adott valós számok. Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. (Ha $a_{11} = 0$ lenne a kiindulási egyenletrendszer kibővített mátrixában, akkor először cseréljünk fel két sort úgy, hogy a csere után $a_{11} \neq 0$ teljesüljön.) Ekkor az első sor skalárszorosát adjuk hozzá a többi sorhoz úgy, hogy a kibővített mátrixban az a_{11} alatt valamennyi elem nullává váljon. Ezután tekintsük az a_{22} elemet az átalakított mátrixban. Ha $a_{22} \neq 0$, akkor a második sor skalárszorosát a többi (alatt lévő) sorhoz hozzáadva elérjük, hogy a mátrixban az a_{22} elem alatt valamennyi elem nullává váljon. Ha az első lépés után az átalakított mátrixban $a_{22} = 0$, akkor a második egyenletet cseréljük meg valamelyik alatta lévő egyenlettel úgy, hogy a csere után $a_{22} \neq 0$ teljesüljön. (Ha nincs mód ilyen cserére, azaz a második oszlopban az a_{22} elem alatt is csupa nulla áll, akkor második sorban egyet jobbra lépve, az ott lévő elemmel nullázzuk ki az alatta lévőket.) Folytassuk tovább az eljárást, míg a főátló alatti elemek mindegyike nullává nem válik.

7.13. **Példa.** Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y \;\; - z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! Írjuk fel az alapmátrixát, a kibővített mátrixát. Határozzuk meg az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját. Ennek felhasználásával

döntsük el, hogy megoldható-e a lineáris egyenletrendszer! Ha megoldható, akkor osztályozzuk a megoldások száma szerint és adjuk meg a megoldást!
A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Első lépésben első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Következő lépésben a második sor -4-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right).$$

Gauss elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla sorok száma. Így az alapmátrix rangja 2, a kibővített mátrix rangja 3. Mivel az alapmátrix és a kibővített mátrix rangja nem egyezik meg, ezért az egyenletrendszer ellentmondásos.

7.14. **Tétel.** (Cramer-szabály)
Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem nulla, az egyenletrendszer k-adik ismeretlene:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A},$$

ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, A_k pedig az a mátrix, amelyet az alapmátrixból úgy kapunk meg, hogy annak k-adik oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő számokból képzett oszlopvektorra cseréljük ki.

7.15. **Példa.** Oldjuk meg Cramer-szabállyal az

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 9 \\ 2x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!
Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 4 = -19.$$

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként áll elő az x. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -27 - (-8) = -19,$$

ezért

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-19}{-19} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk y-t. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 18 = -38,$$

ezért

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-38}{-19} = 2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer megoldása: $x = 1$, $y = 2$.

7.16. **Tétel.** (inverzmátrix-módszer)
Ha az A mátrix olyan kvadratikus mátrix, melynek a determinánsa nem nulla, akkor az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

7.17. **Példa.** Oldjuk meg inverzmátrix módszerrel az

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 11 \\ 5x - 6y &= -13 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!
Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = -12 - 15 = -27 \neq 0,$$

így alkalmazható a módszer. Az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

így az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -27 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $x = 1$, $y = 3$.

7.18. **Megjegyzés.** Az inverzmátrix módszer egyik fontos előnye, hogy ha ismerjük az alapmátrix inverzét, akkor az

$$A \cdot x = b$$

lineáris egyenletrendszer megoldása bármely b esetén megadható egy mátrixszorzással.

Ellenőrző kérdések

1. Az
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszer alapmátrixa: ....

2. Az
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$
lineáris egyeneletrendszer kibővített mátrixa: ....

3. Az
$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja: ....

4. Ha egy lineáris egyenletrendszer határozott, akkor a megoldásainak száma ....

5. Ha egy lineáris egyenletrendszer határozatlan, akkor a megoldásainak száma ....

6. Ha az
$$\begin{aligned} x + y &= b_1 \\ x - y &= b_2 \end{aligned}$$
lineáris egyenletrendszer homogén, akkor: $b_1 =$ .... és $b_2 =$ ....

7. A Cramer-szabály akkor alkalmazható, ha a lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa ....

8. Az inverzmátrix módszer akkor alkalmazható, ha a lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa ....

9. Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának és kibővített mátrixának rangja 3 és az ismeretlenek száma 5, akkor a szabad paraméterek száma: ....

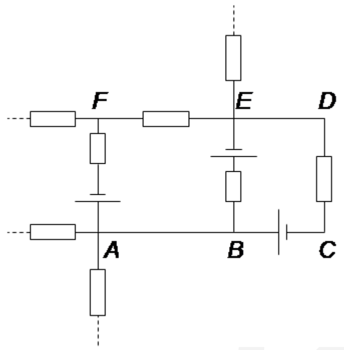
10. Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának és kibővített mátrixának rangja 10 és az ismeretlenek száma 15, akkor a szabad paraméterek száma: ....

11. Ha egy 5 egyenletből álló 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldható, és a megoldása egyértelmű, akkor az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa ....

12. Ha egy 5 egyenletből álló 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldható, és a megoldása egyértelmű, akkor az egyenletrendszer oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer lineárisan ....

8. Számítások egyenáramú hálózatokban

8.1. **Elméleti összefoglaló.** Egyenáramú áramforrásokat és fogyasztókat (ohmos ellenállásokat) elektromos vezetőkkel összekötve *egyenáramú hálózat*ot kapunk. Egy ilyen egyenáramú hálózatot szemléltet az alábbi ábra:



A *csomópont* a hálózat olyan pontja, amelybe legalább három vezeték fut be (A, B, E, F pontok).

Az *ág* két csomópontot összekötő vezetékszakasz, amely végpontjain kívül nem tartalmaz csomópontot ($B - C - D - E$; $A - B$; $E - F$; $A - F$; $E - B$ vezetékszakaszok).

A *hurok* olyan vezetékszakasz, amelynek két végpontja ugyanaz a pont. Például a

$$B - C - D - E - B$$

vagy az

$$A - B - C - D - E - F - A$$

vezetékszakaszok.

Egy áramforrás *belső feszültség*én (U_b) a nyitott kapcsain mérhető feszültséget értjük. Ha a kapcsokat vezetővel összekötjük, akkor a forráson keresztül áram folyik. Minden áramforrásnak van *belső ellenállás*a (R_b), amelyen az áram hatására feszültség esik.

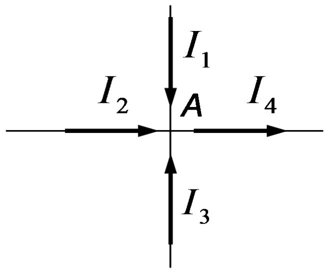
A kapcsokon mérhető U_k kapocsfeszültség zárt esetben eltér az U_b belső feszültség értékétől és függvénye az áramerősségnek. Ebből adódóan a kapocsfeszültség helyett mindig a belső feszültség és ellenállás értékét adjuk meg, amelyeket rajzban külön jelöljük.

Az egyenáramú hálózatokra vonatkozó feladatok megoldása Kirchhoff két törvényén alapszik. Ezeket ismertetjük az alábbiakban.

Kirchhoff I. törvénye:

Bármely csomópont esetén a befolyó és elfolyó áramok előjeles összege zérus. Előjelszabály: a befolyó áramokat pozitívan, az elfolyókat negatívan előjelezzük.

Tekintsük az alábbi ábrát:



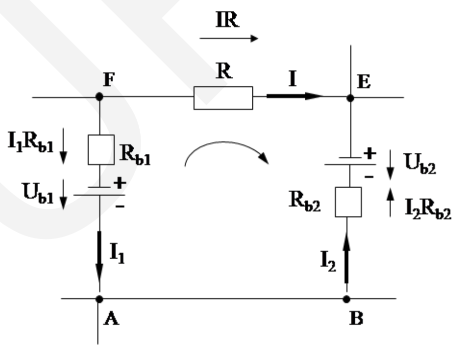
Az ábra jelöléseivel Kirchhoff első törvényét alkalmazva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Kirchhoff II. törvénye:

Bármely hurok mentén körbehaladva, a feszültségesések előjeles összege zérus. Előjelszabály: a hálózat minden hurkához önkényesen hozzárendelünk egy körüljárási irányt és minden ágához egy áramirányt.

8.2. **Példa.** Tekintsük az alábbi ábrát:



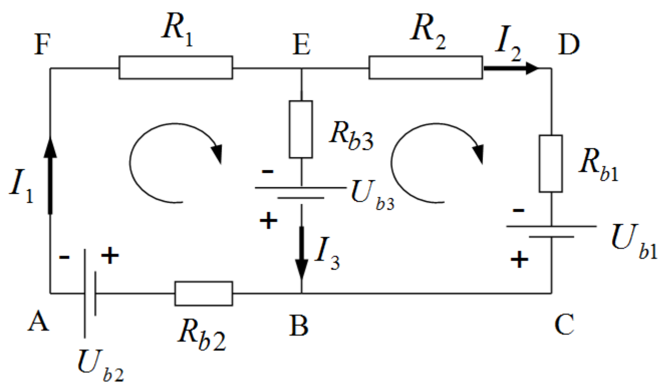
A fenti ábra jelöléseivel Kirchhoff második törvényét alkalmazva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$-U_{b1} - I_1 \cdot R_{b1} + I \cdot R + U_{b2} - I_2 \cdot R_{b2} = 0.$$

8.3. **Megjegyzés.** Az egyenáramú hálózatokkal kapcsolatos feladatok megoldásának lépései az alábbiak:

1) Mivel az áramirány nem ismert, ezért felveszünk egy (feltételezett) áramirányt.
2) A hálózat csomópontjaira felírjuk Kirchhoff I., hurkaira Kirchhoff II. törvényét. Eredményül mindig lineáris egyenletrendszert kapunk.
3) Az egyenletrendszert rendezzük, majd valamelyik ismert módszerrel (például Gauss elimináció, bázistranszformáció, Cramer-szabály, inverzmátrix módszer) megoldjuk. Eredményül megkapjuk az ismeretlen áramerősségeket, ellenállásokat, feszültségeket.
4) Ha egy áramerősségre negatív értéket kapunk, az annyit jelent, hogy a feltételezett áramiránnyal a (technikai) áramirány ellentétes.

8.4. **Példa.** Tekintsük az alábbi egyenáramú hálózatot!



Az adatok az alábbiak:

$U_{b1} = 20\,[V]$; $U_{b2} = 10\,[V]$; $U_{b3} = 5\,[V]$; $R_1 = 2\,[\Omega]$; $R_2 = 4\,[\Omega]$; $R_{b1} = 7\,[\Omega]$; $R_{b2} = 6\,[\Omega]$; $R_{b3} = 4\,[\Omega]$.

a) Írjuk fel Kirchhoff első törvényét a B csomópontra!
b) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét az $A-B-E-F-A$ hurokra!
c) Írjuk fel Kirchhoff második törvényét a $B-C-D-E-B$ hurokra!
d) Adjuk meg a kapott egyenletrendszer alapmátrixát és kibővített mátrixát!
e) Határozzuk meg az ismeretlen áramerősségeket Cramer-szabállyal!
f) Adjuk meg a valódi áramirányokat!

Megoldás:

a) Kirchhoff első törvénye szerint egy csomópontba befolyó és onnan elfolyó áramok algebrai összege zérus, így az $A - F - E - B - A$ hurokra azt kapjuk, hogy
$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0.$$

b) Kirchhoff második törvénye szerint bármely hurokban körbehaladva és a feszültségeket előjelesen összegezve zérust kapunk, így az $A-B-E-F-A$ hurokra alkalmazva a törvényt azt kapjuk, hogy
$$I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_{b3} - U_{b3} + I_1 \cdot R_{b2} + U_{b2} = 0.$$

c) Kirchhoff második törvényét felírva a $B - E - D - C - B$ hurokra:
$$U_{b3} - I_3 \cdot R_{b3} + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot R_{b1} - U_{b1} = 0.$$

d) Az adatokat behelyettesítve a megoldandó egyenletrendszer
$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + \ \ I_3 &= \ \ 0 \\ 8I_1 \qquad + 4I_3 &= -5 \\ 11I_2 - 4I_3 &= 15 \end{aligned}$$
A fenti lineáris egyenletrendszer alapmátrixa
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
kibővített mátrixa
$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & 15 \\ 8 & 0 & 4 & -5 \end{array}\right).$$

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa (például Sarrus-szabálylyal számolva):
$$D = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -4 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -44 - 32 - 88 = -164.$$
Mivel ezen determináns értéke nem zérus, ezért az egyenletrendszer megoldására alkalmazhatjuk például a Cramer-szabályt.
Az egyenletrendszerben szereplő I_1 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg,

hogy az alapmátrix első oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül az első ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 15 & 11 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 20 + 55 - 60 = 15,$$

ezért

$$I_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{15}{164} \approx -0,09\,[\mathrm{A}].$$

Az egyenletrendszerben szereplő I_2 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a második ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -4 \\ 8 & -5 & 4 \end{pmatrix} = -60 - 120 + 20 = -160,$$

ezért

$$I_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{160}{164} \approx 0,98\,[\mathrm{A}].$$

Az egyenletrendszerben szereplő I_3 ismeretlen értékét úgy kaphatjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra írjuk, kiszámoljuk az így kapott mátrix determinánsát, végül a harmadik ismeretlent a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosként kapjuk. Mivel

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 15 \\ 8 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 55 + 120 = 175,$$

ezért

$$I_3 = \frac{D_3}{D} = -\frac{175}{164} \approx -1,07\,[\mathrm{A}].$$

f) Az I_1 és az I_3 áramerősségek értékére negatív számot kaptunk, ami azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó technikai áramirányok ellentétesek a feltételezettel.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk csomópontnak? ....
2. Mit nevezünk ágnak? ....
3. Mit nevezünk huroknak? ....
4. Mit mond ki Kirchhoff első törvénye? ....
5. Mit mond ki Kirchhoff második törvénye? ....

9. Kémiai reakcióegyenletek

9.1. **Elméleti összefoglaló.** A kémiai reakciókban módosul a kiindulási anyagok kémiai összetétele, mivel az eredeti kémiai kötések felbomlanak és új kötések, más összetételű molekulák vagy ionok jönnek létre.

A kémiai reakciókat általában fizikai változások is kísérik. A reakcióegyenletben (kémiai sztöchiometriai egyenlet) a kémiai folyamatokat kémiai képletekkel írjuk le, amelyekben a reagáló és a keletkezett anyagok anyagmennyiségeinek arányait is feltüntetjük.

A kémiai reakciókra mindig érvényes a *tömegmegmaradás törvénye*, mely szerint a kémiai egyenletek két oldalán az egyes elemek elemi vagy kötött állapotban lévő atomjainak száma és így a két oldal tömege is megegyezik.

A kémiai reakciókban az elemek atomjai nem alakulhatnak át másik elem atomjává. A tömegmegmaradás törvénye értelmében a kémiai egyenletek jobb oldalán és bal oldalán az atomok száma is megegyezik (atommegmaradás törvénye).

Az előbbi törvényen alapszik a kémiai egyenletek rendezése.

A kémiai reakcióegyenletben szereplő (molekulaszámokat kifejező) együtthatókat a kérdéses kémiai komponensek adott reakcióra vonatkozó *sztöchiometriai együttható*inak nevezzük.

Az egyértelműség érdekében a sztöchiometriai együtthatóknak a lehető legkisebb abszolút értékű egész számokat választjuk.

9.2. **Példa.** A kalcium-klorid és nátrium-foszfát reakcióját az alábbi kémiai egyenlet írja le:

$$a \cdot CaCl_2 + b \cdot Na_3PO_4 \;\rightarrow\; c \cdot Ca_3(PO_4)_2 + d \cdot NaCl.$$

Határozzuk meg az egyenletben szereplő ismeretlen együtthatók értékét úgy, hogy azok mindegyike a lehető legkisebb pozitív egész szám legyen, majd írjuk fel a helyes reakció egyenletet!

Az egyensúlyi feltételeknek megfelelő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a &= 3c \\ 2a &= d \\ 3b &= d \\ b &= 2c \\ 4b &= 8c. \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy az utolsó egyenlet következmény egyenlete az utolsó előttinek, így az elhagyható az egyenletrendszer egyenletei közül. A fenti egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a második és negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A második sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

A harmadik sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Az alapmátrix és kibővített mátrix rangja is 3, így az egyenletrendszer megoldható. Az alapmátrix rangja 1-gyel kevesebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyenletrendszer határozatlan, azaz végtelen sok megoldása van. A fenti mátrixból felírva a Gauss-elimináció után kapott egyenleteket az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a - 3c &= 0 \\ b - 2c &= 0 \\ 6c - d &= 0. \end{aligned}$$

Legyen $c = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ekkor $a = 3t$, $b = 2t$, $d = 6t$. Mivel az egyenletrendszer legkisebb pozitív egész megoldását keressük, ezért az alábbi megoldásokat kapjuk: $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 6$. A kapott eredményeket felhasználva a reakcióegyenlet:

$$3 \cdot CaCl_2 + 2 \cdot Na_3PO_4 \ \rightarrow \ Ca_3(PO_4)_2 + 6 \cdot NaCl.$$

Ellenőrző kérdések

1. Mit mond a tömegmegmaradás törvénye? ....
2. Írja fel a $x_1 \cdot H_2 + x_2 \cdot O_2 \rightarrow x_3 \cdot H_2O$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert! ....

10. Lineáris egyenletrendszerek további alkalmazásai

10.1. **Motiváció.** A lineáris egyenletrendszerek fontos szerepet töltenek be a matematikában. Ezen kívül számos olyan alkalmazásuk van, amelyek a közgazdaságtanban, a fizikában, a mechanikában, a biológiában és egyéb területeken is megjelennek. Ebben a fejezetben bemutatunk néhány olyan egyszerűbb példát, amelyekben lineáris egyenletrendszer megoldását kell alkalmaznunk.

10.2. **Példa.** (Geometria)
Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, amelyben két-két oldal összege rendre 26, 32 és 34 [cm].

Megoldás:

Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel. Ekkor a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a+b&=26\\ a+c&=32\\ b+c&=34. \end{aligned}$$

Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd Gauss-eliminációval megoldjuk az egyenletrendszert. Első lépésben a kibővített mátrix az első sorának -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26\\ 1 & 0 & 1 & 32\\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26\\ 0 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right)$$

Második lépésben adjuk össze a második és a harmadik sort:

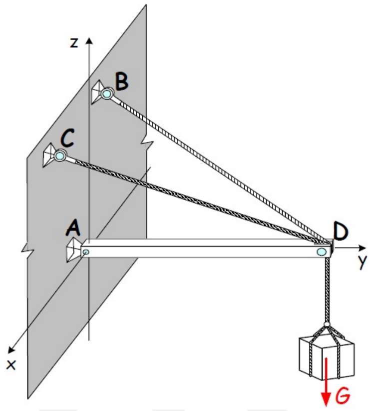
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26\\ 0 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 26\\ 0 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2 & 40 \end{array}\right).$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 20$, a második egyenletből $b = 14$, az elsőből $a = 12$. A háromszög oldalai tehát $12\,[\mathrm{cm}]$, $14\,[\mathrm{cm}]$ és $20\,[\mathrm{cm}]$.

10.3. **Példa.** (Statika)
Az alábbi szerkezet AD gerendája a B, illetve C pontoknál rögzített kötelek segítségével egy $m = 960\,[\mathrm{kg}]$ tömegű terhet tart. A teher súlyát a súlypontjához kötött

$$G = m \cdot g = 960 \cdot 10 = 9600\,[\mathrm{N}] = 9,6\,[\mathrm{kN}]$$

nagyságú erőként vesszük figyelembe, amely az alkalmasan megválasztott koordináta-rendszerben $G = (0; 0; -9,6)$ [kN] erővektor lesz. (A g értékét az egyszerűség kedvéért 10-nek vettük.)
Feltételezzük, hogy a teher súlya mellett a gerenda súlya elhanyagolható, így a gerendát egy súlytalan rúddal modellezhetjük. A feladat egyszerűsített ábráját elkészítjük, ahol a berajzolt egyenes szakaszok egyben az ébredő belső erők.
Az adott koordináta-rendszerben a vonatkozó pontok helye:
$A = (0; 0; 0)$, $B = (-1; 0; 4)$, $C = (3; 0; 4)$ és $D = (0; 0; 6)$.



Tegyük fel, hogy a szerkezet tartós nyugalomban van. Határozzuk meg az ismeretlen kötélerőket!

Megoldás:

Az adott koordinátarendszerben a pontok helye

$$r_A = (0; 0; 0), \quad r_B = (-1; 0; 4), \quad r_C = (3; 0; 4), \quad r_D = (0; 6; 0).$$

A tartós egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője zérus legyen. Az ismeretlen kötélerőket F_i-vel jelölve $(i = 1, 2, 3)$, az egyensúly feltételére az

$$F_1 + F_2 + F_3 + G = 0$$

egyenlet adódik. A megoldást a továbbiakban az

$$F_i = \lambda_i \cdot a_i$$

alakban keressük, ahol a_i az erő irányát kijelölő irányvektor, λ_i pedig a vonatkozó skalárszorzó lesz. Ennek megfelelően

$$a_1 = \overrightarrow{AD} = (0; 6; 0), \quad a_2 = \overrightarrow{BD} = (1; 6; -4), \quad a_3 = \overrightarrow{CD} = (-3; 6; -4).$$

Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = -G.$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat az

$$\begin{aligned} \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 6\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 9,6. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Felírjuk a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, majd Gauss-eliminációval megoldjuk az egyenletrendszert. Első lépésben megcseréljük az első és második sort, majd az új első sort osztjuk 6-tal, a harmadik sort osztjuk -4-gyel:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 9,6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2,4 \end{array}\right)$$

Végül a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2,4 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer megoldása $\lambda_3 = -0,6$, $\lambda_2 = -1,8$, $\lambda_1 = 2,4$. Ezek ismeretében

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda_1 \cdot a_1 = (0; 14,4; 0)\ [\mathrm{kN}] \\ F_2 &= \lambda_2 \cdot a_2 = (-1,8; -10,8; 7,2)\ [\mathrm{kN}] \\ F_3 &= \lambda_3 \cdot a_3 = (1,8; -3,6; 2,4)\ [\mathrm{kN}]. \end{aligned}$$

10.4. **Példa.** (Közgazdaságtan)
Egy vállalkozó háromféle terméket állít elő. Az alábbi táblázat mutatja, hogy az egyes termékek előállításához mennyi alapanyagra van szükség:

	T1	**T2**	**T3**	**Kapacitás**
A1	2	1	3	130
A2	1	2	1	80
A3	3	0	2	90

Mennyit gyártson az egyes termékekből ahhoz, hogy a rendelkezésre álló kapacitást teljes egészében felhasználja?

Megoldás:

Jelöljük a T_1, T_2, T_3 termékből előállított mennyiségeket rendre x, y, z-vel. Ekkor felírható az alábbi lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 130 \\ x + 2y + z &= 80 \\ 3x + 2z &= 90. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 130 \\ 1 & 2 & 1 & 80 \\ 3 & 0 & 2 & 90 \end{array}\right).$$

Cseréljük fel az első és a második sort:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 80 \\ 2 & 1 & 3 & 130 \\ 3 & 0 & 2 & 90 \end{array}\right).$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 80 \\ 0 & -3 & 1 & -30 \\ 0 & -6 & -1 & -150 \end{array}\right).$$

A második sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 80 \\ 0 & -3 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & -3 & -90 \end{array}\right).$$

Az utolsó sornak megfelelő egyenlet:

$$-3z = -90 \qquad \Rightarrow \qquad z = 30.$$

Ezt behelyettesítve a második sornak megfelelő egyenletbe

$$-3y + 30 = -30 \qquad \Rightarrow \qquad y = 20$$

adódik. Az első sornak megfelelő egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x + 40 + 30 = 80 \qquad \Rightarrow \qquad x = 10.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az egyes termékekből rendre 10, 20 és 30 egységet kell előállítani.

10.5. **Példa.** (Mozgástan)
Egy $100\,[\mathrm{m}]$ hosszú körpályán két test kering. Egy irányba haladva 20 másodpercenként, ellenkező irányba haladva 4 másodpercenként találkoznak. Mekkora a testek sebessége?

Megoldás:

Legyen a két test sebessége v_1 és v_2. Feltehető, hogy $v_1 > v_2$.
Azonos irányba haladva, az első találkozásig az útkülönbség a pálya hossza.
Ellenkező irányba haladva, egy találkozástól a következőig az utak összege a pálya hossza.
Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 20v_1 - 20v_2 &= 100 \\ 4v_1 + \ \ 4v_2 &= 100. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D = \det \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 80 + 80 = 160.$$

Továbbá

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 100 & -20 \\ 100 & 4 \end{pmatrix} = 400 + 2\,000 = 2\,400$$

és

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 20 & 100 \\ 4 & 100 \end{pmatrix} = 2\,000 - 400 = 1\,600.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$v_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2\,400}{160} = 15 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];$$

$$v_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1\,600}{160} = 10 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Azt kaptuk tehát, hogy a testek sebessége:

$$v_1 = 10 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad v_2 = 15 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ellenőrző kérdések

1. Soroljunk fel legalább három olyan tudományterületet, ahol alkalmazhatóak a lineáris egyenletrendszerek! ....
2. Adjuk meg olyan geometriai feladatot, amelynek megoldása lineáris egyenletrendszerre vezet! ....

11. Formula mátrix, sztöchiometriai mátrix

11.1. **Elméleti összefoglaló.** A kémia egyik legfontosabb feladata a kémiai reakciók tanulmányozása.

A *kémiai reakció*k olyan folyamatok, amelyek során kémiai komponensek (reaktánsok) alakulnak át más kémiai komponensekké (termékekké).

Azt mondjuk, hogy egy kémiai reakció *összetett*, ha van legalább egy köztes termék, *elemi*, ha nincs köztes termék.

Az összetett kémiai reakciók elemi kémiai reakciókból állnak.

Az összetett kémiai reakciót alkotó elemi reakciók a kémiai rendszer *reakciólépés*ei. A reakciólépések összessége alkotja a rendszer *kemizmus*át (kémiai mechanizmusát).

A kémiai reakciókra mindig érvényes a *tömegmegmaradás törvénye*, mely szerint a kémiai egyenletek két oldalán az egyes elemek elemi vagy kötött állapotban lévő atomjainak száma és így a két oldal tömege is megegyezik.

Az előbbi állítás következményeként a kémiai reakciókban az elemek atomjai nem alakulhatnak át másik elem atomjává. A tömegmegmaradás törvénye értelmében a kémiai egyenletek jobb oldalán és bal oldalán az atomok száma is megegyezik (atommegmaradás törvénye).

A kémiai reakcióegyenletben szereplő (molekulaszámokat kifejező) együtthatókat a kérdéses kémiai komponensek adott reakcióra vonatkozó *sztöchiometriai együttható*inak nevezzük.

Az egyértelműség érdekében a sztöchiometriai együtthatóknak a lehető legkisebb abszolút értékű egész számokat választjuk.

Ha egy kémiai reakció összetett, azaz több elemi reakcióból áll, akkor előállíthatjuk az úgynevezett *formula mátrix*ot úgy, hogy a mátrix sorai (az utolsó kivételével) az egyes kémiai elemeknek felelnek meg, míg a mátrix utolsó sora a töltéseket mutatja. A mátrix egyes oszlopai az egyes vegyületeknek felelnek meg.

A formula mátrix rangja megegyezik a független kémiai reakciók számával.

Ha ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot az úgynevezett *sztöchiometriai mátrix* segítségével írhatjuk le. Ennek oszlopai a reakciókhoz, sorai pedig a reakciókban szereplő vegyületekhez tartoznak. Az i-edik sorban, j-edik oszlopban álló szám a j-edik reakció 0-ra rendezett egyenletében az i-edik vegyület mennyisége.

11.2. **Tétel.** A formula mátrix és a sztöchiometriai mátrix rangja megegyezik.

11.3. **Példa.** A szénsav disszociációját két egyenlet írja le:

$$H_2CO_3 \rightleftharpoons HCO_3^- + H^+$$
$$HCO_3^- \rightleftharpoons CO_3^{2-} + H^+.$$

a) Írjuk fel a formula mátrixot!
b) Adjuk meg a formula mátrix rangját!
c) Adjuk meg a sztöchiometriai mátrixot!
d) Adjuk meg a sztöchiometriai mátrix rangját!
e) Adjuk meg a lineárisan független reakciók számát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A formula mátrixot úgy állítjuk elő, hogy a mátrix sorai (az utolsó kivételével) az egyes kémiai elemeknek felelnek meg, míg a mátrix utolsó sora a töltéseket mutatja. A mátrix egyes oszlopai az egyes vegyületeknek felelnek meg. A feladatban megadott folyamathoz az alábbi formula mátrix írható föl, ahol az első sor a H, a második a C, a harmadik az O molekulának megfelelő sor. Az első oszlop a H_2CO_3, a második oszlop a HCO_3^-, a harmadik oszlop a H^+ és a negyedik oszlop a CO_3^{2-} vegyületet jelenti:

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & H_2CO_3 & HCO_3^- & H^+ & CO_3^{2-} \\ \hline H & 2 & 1 & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & 0 & 1 \\ O & 3 & 3 & 0 & 3 \\ q & 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

b) A formula mátrix rangjának meghatározásához első lépésben cseréljük meg a mátrix első és második sorát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, az első sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A mátrix rangja: 2.

c) Ha már ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot a sztöchiometriai mátrix segítségével írhatjuk le. Ennek oszlopai a reakciókhoz, sorai pedig a reakciókban szereplő vegyületekhez tartoznak. Az i-edik sorban, j-edik oszlopban álló szám a j-edik reakció 0-ra rendezett egyenletében az i-edik vegyület mennyisége. A sztöchiometriai mátrix tehát jelen esetben:

$$B = \begin{array}{c} H_2CO_3 \\ HCO_3^- \\ H^+ \\ CO_3^{2-} \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop a feladatban szereplő első, a második oszlop a feladatban szereplő második reakciónak felel meg. Az egyes sorokban a vegyületek rendre: H_2CO_3, HCO_3^-, H^+ és CO_3^{2-}.

d) A B mátrix első sorát adjuk hozzá a második sorhoz és a harmadik sorhoz, majd a keletkezett mátrix második sortát adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a negyedik sorhoz::

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix rangja: 2.

e) A lineárisan független reakciók száma: 2.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk elemi kémiai reakciónak? ....
2. Mit nevezünk összetett kémiai reakciónak? ....
3. Mit nevezünk formulamátrixnak? ....
4. Mit nevezünk sztöchimetriai mátrixnak? ....
5. Milyen kapcsolat van a formula mátrix rangja és a független kémiai reakciók száma között?
6. Milyen kapcsolat van a sztöchiometriai mátrix rangja és a független kémiai reakciók száma között?

12. Parciális törtekre bontás

12.1. **Tétel.** Minden racionális törtfüggvény felbontható egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegére, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma.

12.2. **Példa.** Tekintsük az

$$\frac{x-5}{x+3}$$

törtet. Ekkor

$$\frac{x-5}{x+3} = \frac{x+3-8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}.$$

12.3. **Megjegyzés.** A tételben szereplő felbontást általánosan polinomosztás segítségével lehet elvégezni. Elvégezve a

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

polinomosztást legyen $M(x)$ a maradék, $H(x)$ az osztás hányadosa. Ekkor

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{M(x)}{Q(x)}.$$

12.4. **Példa.** Tekintsük az

$$\frac{x^4+7x^2+5x+1}{x^2-4}$$

törtet. A polinomosztást alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&(x^4 + 7x^2 + 5x + 1) : (x^2 - 4) = x^2 + 11,\\
-&(x^4 - 4x^2)\\
&\quad 11x^2 + 5x + 1\\
&\;-(11x^2 - 44x)\\
&\qquad 49x + 1
\end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$\frac{x^4+7x^2+5x+1}{x^2-4} = x^2 + 11 + \frac{49x+1}{x^2-4}$$

adódik.

12.5. **Definíció.** Legyenek A, B és C valós számok, $n \in \mathbb{N}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$. Az

$$\frac{A}{(x - x_0)^n}$$

és a

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n}$$

alakú törteket, ahol $p^2 - 4q < 0$ (azaz az $x^2 + px + q$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) *parciális tört*nek nevezzük.

12.6. **Példa.** Az

$$\frac{5}{(x-3)^4}$$

tört parciális tört.

12.7. **Példa.** Az

$$\frac{x+3}{(x + x + 2)^3}$$

tört parciális tört.

12.8. **Tétel.** Minden olyan racionális törtfüggvény, amelyben a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, felbontható parciális törtek összegére.

12.9. **Példa.** Bontsuk fel parciális törtek összegére a

$$\frac{x-5}{x^2 + 5x + 4}$$

algebrai törtet!

Megoldás:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

egyenlet megoldását:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

azaz $x_1 = -4$, illetve $x_2 = -1$. Ezt felhasználva a gyöktényezős alak:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 4) \cdot (x + 1).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{x-5}{x^2 + 5x + 4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+1}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$x - 5 = A \cdot (x + 1) + B \cdot (x + 4).$$

Felbontva a zárójeleket

$$x - 5 = Ax + A + Bx + 4B$$

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$x - 5 = (A + B) \cdot x + A + 4B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A + 4B &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Továbbá

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = 4 + 5 = 9$$

és

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = -5 - 1 = -6.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{3} = 3;$$

$$B = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a keresett felbontás:

$$\frac{x - 5}{x^2 + 5x + 4} = \frac{3}{x + 4} - \frac{2}{x + 1}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Milyen alakú törteket nevezünk parciális törteknek? ....
2. Parciális tört-e a $\dfrac{3}{x^2-4}$ tört? ....
3. Parciális tört-e a $\dfrac{3}{x^2+4}$ tört? ....
4. Parciális tört-e a $\dfrac{x+1}{x^2-9}$ tört? ....
5. Parciális tört-e a $\dfrac{x+1}{x^2+9}$ tört? ....
6. Parciális tört-e a $\dfrac{x^2+1}{x^2+9}$ tört? ....

13. Mátrixok alkalmazása a koordinátageomatriában

13.1. **Tétel.** Az $A = (x_1; y_1)$ és $B = (x_2; y_2)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Bizonyítás: A determinánst az első sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$x \cdot \det \begin{pmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{pmatrix} - y \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$$

A másodrendű determinánsok kiszámolása után azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (y_1 - y_2) - y \cdot (x_1 - x_2) + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0.$$

Mivel az egyenes egy irányvektora:

$$v = (x_1 - x_2; y_1 - y_2),$$

ezért az előbbi egyenlet a

$$v_2 \cdot x - v_1 \cdot y = v_2 \cdot x_1 - v_1 \cdot y_1$$

alakra írható át, ami éppen az egyenes irányvektoros egyenlete. ■

13.2. **Példa.** Az $A = (1; 2)$ és a $B = (2; 3)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

A deteriminást az első sora szerint kifejtve

$$x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

adódik. A megfelelő determinánsok kiszámolása után azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (2 - 3) - y \cdot (1 - 2) + 1 \cdot (3 - 4) = 0,$$

így az egyenes egyenlete:

$$-x + y - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = x + 1.$$

13.3. **Tétel.** Az $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ és $C = (x_3; y_3)$ csúcsokkal rendelkező háromszög területe az

$$\frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

érték abszolútértéke.

13.4. **Példa.** Az $A = (1; 2)$, $B = (2; 3)$ és $C = (1; 3)$ csúcsokkal rendelkező háromszög területe az

$$\frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

determináns abszolútértéke. A determinánst az első sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

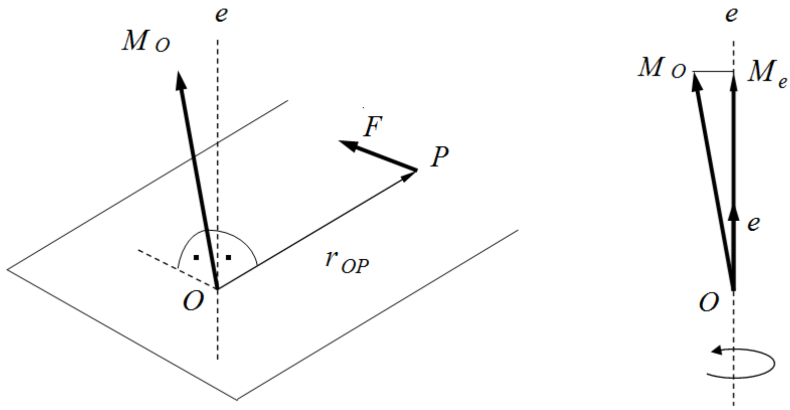
$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 - 2 \cdot (2 - 1) + 6 - 3 = 1,$$

így a keresett terület $T = \frac{1}{2}$ egység.

13.5. **Definíció.** Egy erő forgató hatását a *forgatónyomaték*kal jellemezzük. A forgatónyomatékot megadhatjuk egy pontra vagy egy tengelyre vonatkozóan. A *pontra vonatkozó forgatónyomaték* vektormennyiség. Definíciója az O pontra vonatkozóan:

$$\underset{O}{M} = r_{OP} \times F,$$

ahol r_{OP} az O vonatkoztatási pontból az erő P támadáspontjába mutató helyvektor.



Az e *tengelyre vonatkozó forgatónyomaték* előjeles skalármennyiség, amelyet az alábbi egyenlőség definiál:

$$M_e = \underset{O}{M} \bullet e,$$

ahol $\bullet$ a skaláris szorzatot jelenti.

13.6. **Megjegyzés.** A skaláris szorzat definícióját felhasználva

$$M_e = \underset{O}{M} \bullet e = |\underset{O}{M}| \cdot |e| \cdot \cos\alpha = |\underset{O}{M}| \cdot \cos\alpha.$$

Azaz M_e az M vektor e tengelyre eső előjeles merőleges vetülete.

13.7. **Definíció.** (Merev test egyensúlyának definíciója):
Egy merev test egyensúlyban van, ha az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:

1. A testre ható eredő erő zérus:

$$F = \sum_i F_i = 0.$$

2. A testre ható eredő forgatónyomaték a tér egy tetszőleges O pontjára vonatkozóan zérus:

$$\underset{O}{M} = \sum_i \underset{O}{M_i} = 0.$$

Ellenőrző kérdések

1. Hogyan adhatjuk meg determnánssal két ponton áthaladó síkbeli egyenes egyenletét? ....
2. Hogyan adhatjuk meg determnánssal egy síkbeli háromszög területét, ha ismerjük a háromszög három csúcsát? ....
3. Egy erő forgató hatását annak .... jellemezzük. A forgatónyomatékot megadhatjuk egy .... vagy egy .... vonatkozóan.
4. Mit nevezünk pontra vonatkozó forgatónyomatéknak? ....
5. Mit nevezünk tengelyre vonatkozó forgatónyomatéknak? ....
6. Merev test egyensúlyának feltételei: ....

14. Lagrange interpoláció

14.1. **Definíció.** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és a_0, a_1, $\ldots$, a_n olyan valós számok, hogy $a_n \neq 0$. Ekkor a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

függvényt n*-edfokú polinomfüggvény*nek nevezzük.

14.2. **Motiváció.** Bizonyos műszaki feladatok esetében a probléma megoldása során olyan függvények adódhatnak, amelyek meglehetősen bonyolultak, nehéz velük a számolás. Ezek helyett dolgozhatunk polinommal, melyet a függvény bizonyos helyeken vett helyettesítési értékeinek kiszámolásával határozhatunk meg.
Ha a mérési eredmények csak bizonyos időpillanatokban állnak rendelkezésre, de más időpillanatban is szükség van az értékre, akkor a polinom segítségével közelítő értéket számolhatunk.

14.3. **Tétel.** Legyenek $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2, \ldots, (x_n; y_n)$ adott pontok. Ekkor egyértelműen létezik olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, melynek grafikonja illeszkedik az adott pontokra.

14.4. **Definíció.** Az előbbi tételben szereplő egyértelműen meghatározott polinomot *Lagrange-féle interpolációs polinom*nak nevezzük. Az x_1, x_2, $\ldots$, x_n értékeket *alappontok*nak hívjuk.

14.5. **Példa.** Határozzuk meg azt a legfeljebb másodfokú polinomot, amely az $(1; -2)$, $(4; 1)$, $(5; 6)$ mérési eredményekre illeszkedik, továbbá a kapott polinom segítségével számoljuk ki, hogy az $x = 3$ időpillanatban milyen mérési eredményt kaptunk volna?
Legfeljebb másodfokú polinomot keresünk, melynek általános alakja

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

így a feladatunk az a, b és c együtthatók meghatározása. Azt szeretnénk, hogy a keresett polinom illeszkedjen a mért adatokra, így teljesülnie kell a

$$P(1) = -2; \quad P(4) = 1; \quad P(5) = 6$$

feltételeknek. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} -2 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 1 &= a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c, \\ 6 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{aligned}$$

adódik, így a feladatunk a

$$\begin{aligned} a+\ \ b+c &= -2\\ 16a+4b+c &= \ \ 1\\ 25a+5b+c &= \ \ 6 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása. Az egyenletrednszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 16 & 4 & 1 & 1\\ 25 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right).$$

Első lépésben első sor -16-szorosát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -25-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 16 & 4 & 1 & 1\\ 25 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -12 & -15 & 33\\ 0 & -20 & -24 & 56 \end{array}\right)$$

Ezután a harmadik sort szorozzuk 3-mal, majd a második sor -5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -12 & -15 & 33\\ 0 & -60 & -72 & 168 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -12 & -15 & 33\\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Az utolsó mátrixból felírva a lineáris egyneletrendszert

$$\begin{aligned} a+\quad b+\quad c &= -2\\ -\,12b-15c &= 33\\ 3c &= 3 \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $c = 1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

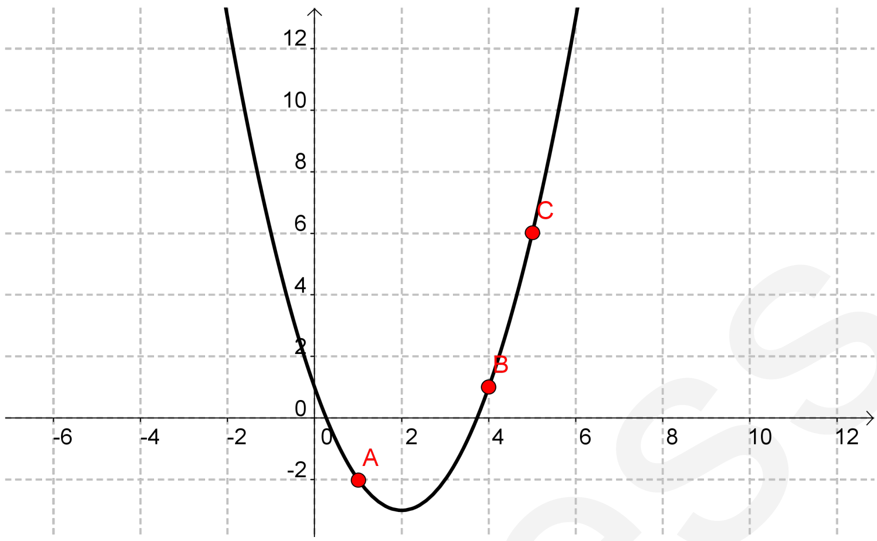
$$-12b - 15 = 33 \qquad \Rightarrow \qquad b = -4$$

adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a - 4 + 1 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1.$$

Tehát a keresett másodfokú polinom:

$$P(x) = x^2 - 4x + 1.$$



Az $x = 3$ időpillanatban a függvényérték:

$$P(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2.$$

14.6. **Megjegyzés.** Az előbbiekben ismertetett módszer meglehetősen egyszerű, azonban sok pont esetén időigényes, ugyanis n darab pont esetén egy $n-1$ egyenletből álló $n-1$ ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszert kell megoldanunk, ami nagy n-ek esetén meglehetősen hosszadalmas. Léteznek más eljárások is (például az osztott differenciák módszere), amely „sok" alappont esetén lényegesen hatékonyabb, mint az előbbiekben bemutatott módszer.

14.7. **Megjegyzés.** A Lagrange-interpolációs feladat megoldása során keletkező lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa Vandermonde-determináns.

Ellenőrző kérdések

1. Mit nevezünk n-edfokú polinomfüggvénynek? ....
2. Mit nevezünk Lagrange-interpolációs polinomnak? ....
3. Az $(1; 2)$ és $(2; 4)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinom: ....
4. Az $(1; 4)$ és $(-2; 3)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinom: ....

15. Legkisebb négyzetek módszere

15.1. **Motiváció.** A legkisebb négyzetek módszerét széles körben alkalmazzák mennyiségek közötti függvénykapcsolat megadására. A felhasznált modellfüggvény általában valamilyen, a konkrét feladathoz kapcsolódó elméleti megfontolásból ismert. A cél az. hogy a függvény ismeretlen paramétereit határozzuk meg egy jól-definiált hibafüggvény szerint.

15.2. **Modell.** Adottak az $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ pontok. Legyenek adottak a $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$ függvények és definiáljuk az $g(x)$ függvényt az alábbi módon:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot \varphi_i(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \ldots + c_m \cdot \varphi_m(x).$$

A feladat a $c_1, c_2, \ldots, c_m$ paraméterek meghatározása úgy, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \big(g(x_i) - y_i\big)^2$$

úgynevezett négyzetes hibafüggvény minimális legyen. (Ezt szabatosan úgy is mondhatjuk, hogy úgy szeretnénk meghatározni az ismeretlen paramétereket, hogy az $g(x)$ függvény grafikonja a lehető „legközelebb” legyen a megadott pontokhoz.)

15.3. **Tétel.** Tekintsük az előbbiekben leírt modellt. Definiáljuk az A mátrixot az alábbi módon:

$$A = (a_{ij}) = \varphi_j(x_i),$$

amit részletesebben kiírva úgy is írhatunk, hogy

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Vezessük be továbbá az

$$f = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

és az

$$x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor a fent leírt modellben meghatározandó c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ számokat az

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f$$

lineáris egyenletrendszer megoldása adja.

15.4. **Definíció.** Az előbbi tételben szereplő

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f$$

egyenletrendszert *Gauss-féle normál egyenletrendszer*nek nevezzük.

15.5. **Tétel.** Ha a φ_1, φ_2, …, φ_m függvények lineárisan függetlenek, akkor a Gauss-féle normál egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

15.6. **Megjegyzés.** A lineáris függetlenséget ellenőrizhetjük a Wronski-determinánsa segítségével. Korábban ugyanis már láttuk, hogy ha a Wronski-determináns értéke nem zérus, akkor a függvények lineárisan függetlenek.

15.7. **Megjegyzés.** Különösen fontos szerepe van annak a modellnek, amikor a közelítést elsőfokú polinommal végezzük, azaz úgynevezett *lineáris regressziót* alkalmazunk. A következőkben megvizsgáljuk, hogy ebben az esetben hogyan néz ki az a megoldandó egyenletrendszer.

15.8. **Példa.** Tekintsük azt a speciális esetet, amikor $\varphi_1(x) = a$ és $\varphi_2(x) = b$, tehát

$$g(x) = a + b \cdot x,$$

azaz egy elsőfokú függvény ismeretlen paraméterit keressük úgy, hogy az $g(x)$ függvény grafikonja a négyzetes hibafüggvény szerint a lehető „legközelebb" legyen az $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$,…, $(x_n; y_n)$ pontokhoz. Ebben az esetben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix},$$

így

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}.$$

Elvégezve az $A^T \cdot A$ szorzást azt kapjuk, hogy

$$A^T \cdot A = \left(\begin{array}{cc} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array} \right).$$

Továbbá az f vektor:

$$f = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right),$$

így

$$A^T \cdot f = \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{array} \right)$$

és az x vektor:

$$x = \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right).$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\left(\begin{array}{cc} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{array} \right).$$

Ellenőrző kérdések

1. Mire alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere? ....
2. Mit nevezünk Gauss-féle normál egyenletrendszernek? ....
3. Lineáris regresszión azt értjük, amikor: ....
4. Lineáris regresszió esetén a megoldandó lineáris egyenletrendszer alapmátrixa: ....

16. Lineáris leképezések

16.1. **Megjegyzés.** Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, akkor X, Y és Z vektortereket jelölnek.

16.2. **Definíció.** Legyenek X és Y vektorterek a valós számok fölött. Az $f\colon X \to Y$ függvényt *lineáris leképezés*nek nevezzük, ha additív és homogén, azaz ha

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in X);$$
$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \qquad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Amennyiben $X = Y$, úgy *lineáris transzformáció*ról beszélünk. A bijektív lineáris leképezéseket *izomorfizmus*oknak, a bijektív lineáris transzformációkat *automorfizmus*oknak nevezzük.

16.3. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ leképezés lineáris.

16.4. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ leképezés nem lineáris, mert nem additív, ugyanis

$$(x_1 + x_2)^2 \neq x_1^2 + x_2^2.$$

16.5. **Tétel.** Ha az $f\colon X \to Y$ leképezés lineáris, akkor $f(0) = 0$, azaz minden lineáris leképezés a zérusvektorhoz a zérusvektort rendeli hozzá.

Bizonyítás: Ha f lineáris, akkor additív, így minden $x, y \in X$ esetén

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Legyen $x = y = 0$. Ekkor

$$f(0+0) = f(0) + f(0),$$

azaz

$$f(0) = 2f(0),$$

így $f(0) = 0$. ∎

16.6. **Definíció.** Az $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés *magter*e vagy más szóval *nullter*e a

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\},$$

*képter*e az

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

16.7. **Definíció.** A magtér dimenzióját a leképezés *defektus*ának, a képtér dimenzióját a leképzés *rang*jának mondjuk.

16.8. **Tétel.** (Nullitás és rang tétel.)
Ha $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés, akkor

$$\dim X = \operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f).$$

A defektust $\operatorname{def}(f)$ jelöli.

16.9. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2)$$

leképezés nullterét az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása adja. A két egyenletet összeadva $2x_1 = 0$, azaz $x_1 = 0$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe megkapjuk az x_2 értékét, így

$$0 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = 0.$$

Tehát a nulltér:

$$\operatorname{Ker}(f) = \{(0; 0)\}.$$

A nullteret tehát egyetlen pont alkotja, így a dimenziója 0, tehát $\operatorname{def}(f) = 0$. A nullitás és rang tétel szerint

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f) = \dim \mathbb{R}^2.$$

Mivel jelen esetben $\operatorname{def}(f) = 0$ és $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, ezért a leképzés rangja: 2.

16.10. **Megjegyzés.** Egy lineáris leképezés nullterének meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti.

16.11. **Definíció.** Egy lineáris leképezés *természetes bázisra vonatkozó mátrix*án azt a mátrixot értjük, melyet úgy kapunk meg, hogy kiszámoljuk a leképezés természetes bázisvektorokon felvett függvényértékeit, majd az így kapott vektorokból, mint oszlopvektorokból mátrixot képezünk.

16.12. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1; x_2) = (x_1 - x_2; x_2; -x_1)$$

leképezés esetén

$$\begin{aligned} f(1; 0) &= (1 - 0; 0; -1) = (1; 0; -1) \\ f(0; 1) &= (0 - 1; 1; 0) = (-1; 1; 0), \end{aligned}$$

így a keresett mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.13. **Tétel.** Ha az $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés mátrixa A és a $g\colon X \to Y$ lineáris leképezés mátrixa B, akkor az $f+g$ leképezés mátrixa $A+B$.

16.14. **Tétel.** Ha az $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés mátrixa A és $c \in \mathbb{R}$, akkor a $c \cdot f$ lineáris leképezés mátrixa $c \cdot A$.

16.15. **Tétel.** Ha az $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés mátrixa A és a $g\colon Y \to Z$ lineáris leképezés mátrixa B, akkor az $f \circ g$ leképezés mátrixa $A \cdot B$.

16.16. **Tétel.** Ha $f\colon X \to X$ invertálható lineáris transzformáció és az f mátrixa A, akkor f^{-1} mátrixa A^{-1}.

16.17. **Definíció.** Az $f\colon X \to X$ lineáris transzformációt *szimmetrikus*nak nevezzük, ha a mátrixa szimmetrikus mátrix.

16.18. **Példa.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (x_1 + x_2; x_1 - x_2)$$

és a $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x_1; x_2) = (x_2; -x_1)$$

lineáris transzformációkat!
Az f leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának felírásához először kiszámoljuk a természetes bázisvektorokon a függvényértékeket:

$$f(1;0) = (1+0; 1-0) = (1;1)$$
$$f(0;1) = (0+1; 0-1) = (1;-1).$$

Ezt felhasználva f mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A g leképezés természetes bázisra vonatkozó mátrixának felírásához először kiszámoljuk a természetes bázisvektorokon a függvényértékeket:

$$g(1;0) = (0;-1)$$
$$g(0;1) = (1;0).$$

Ezt felhasználva g mátrixa:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $f + g$ leképezés mátrixa:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az $f - g$ leképezés mátrixa:

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A $2f$ mátrixa:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Az $f \circ g$ leképezés mátrixa:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot B,$$

ezért $A \cdot B$ szimmetrikus mátrix, így $f \circ g$ szimmetrikus leképezés.

16.19. **Tétel.** Minden lineáris leképezés a mátrixával való balról szorzásként hat, azaz ha A az f lineáris leképezés mátrixa, akkor

$$f(x) = A \cdot x,$$

ahol x-et oszlopvektorként írjuk.

16.20. **Megjegyzés.** Az előbbi tétel közvetlen következménye, hogy minden mátrxinak megfeleltethető egy lineáris leképezés, ugyanis ha A egy tetszőleges mátrix $m \times n$ típusú mátrix, akkor az

$$f(x) = A \cdot x$$

módon definiált leképzés lineáris leképezés, melyet az *A mátrixhoz tartozó lineáris leképezés*nek nevezünk.

16.21. **Tétel.** A síkon az origó körüli pozitív (azaz óramutató járásával ellentétes) irányú α szöggel való forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

16.22. **Példa.** A síkon az origó körüli pozitív (azaz óramutató járásával ellentétes) irányú 30°-kal való forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

16.23. **Következmény.** A síkon az origó körüli pozitív irányú α szöggel való forgatás 1 determinánsú ortogonális transzformáció.

Bizonyítás: Mivel

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2,$$

ezért $A^T = A^{-1}$, így a leképezés ortogonális. A determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

16.24. **Tétel.** A térben az origó körüli pozitív irányú α szöggel való x-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

16.25. **Tétel.** A térben az origó körüli pozitív irányú α szöggel való y-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

16.26. **Tétel.** A térben az origó körüli pozitív irányú α szöggel való z-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

16.27. **Következmény.** A térben az origó körüli pozitív irányú α szöggel való forgatás 1 determinánsú ortogonális transzformáció.

16.28. **Tétel.** A síkon az origón átmenő, az x-tengely pozitív felével α szöget bezáró egyenesre való tükrözés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

16.29. **Következmény.** A síkon az origón átmenő, az x-tengely pozitív felével α szöget bezáró egyenesre való tükrözés -1 determinánsú ortogonális transzformáció.

Bizonyítás: Mivel

$$\begin{aligned} A^T \cdot A &= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin\alpha & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \sin^2(2\alpha) = \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2, \end{aligned}$$

ezért $A^T = A^{-1}$, így a leképezés ortogonális. A determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} = -\cos^2(2\alpha) - \sin^2(2\alpha) = -1,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

16.30. **Tétel.** A térben az yz-síkra való tükrözés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.31. **Tétel.** A térben az x-tengelyre való tükrözés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

16.32. **Tétel.** A térben az origóra való tükrözés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

16.33. **Példa.** Tekintsük a síkon azt a lineáris transzformációt, amely minden vektort először a kétszeresére nyújt, majd az y-tengelyre tükröz, végül az origó körül $+30°$-kal forgat. A mátrix segítségével számoljuk ki a $(2;0)$ vektor képét!

Annak a transzformációnak a mátrixa, amely minden vektort az origó körül $+30°$-kal forgat:

$$A = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Annak a transzformációnak a mátrixa, amely minden vektort az y-tengelyre tükröz:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Annak a transzformációnak a mátrixa, amely minden vektort a kétszeresére nyújt:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A három transzformáció egymás utáni végrehajtásával kapott transzformáció mátrixa:

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

A $(2;0)$ vektor képe:

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

16.34. **Definíció.** A $v \neq 0$ vektort az $f\colon X \to X$ lineáris transzformáció *sajátvektor*ának nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = \lambda \cdot x.$$

Ilyenkor λ-t a v *sajátérték*nek hívjuk, és azt mondjuk, hogy v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

16.35. **Megjegyzés.** Egy mátrix sajátértékén, illetve sajátvektorán a mátrixhoz tartozó lineáris transzformáció sajátértékét, illetve sajátvektorát értjük.

16.36. **Következmény.** Legyen az A mátrix az $f\colon X \to X$ lineáris transzformáció mátrixa és $v \neq 0$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor:

$$A \cdot x = \lambda \cdot x.$$

16.37. **Tétel.** Szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós szám.

Bizonyítás: Legyen A egy valós szimmetrikus mátrix és λ egy sajátértéke az A-nak és x a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Ekkor

$$A \cdot x = \lambda \cdot x.$$

Vegyük mindkét oldal transzponáltját:

$$(A \cdot x)^T = (\lambda \cdot x)^T.$$

A transzponálás tulajdonságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x^T \cdot A^T = \lambda \cdot x^T.$$

Vegyük mindkét oldal konjugáltját:

$$x^T \cdot A^T = \overline{\lambda} \cdot x^T.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozzuk jobbról x-el:

$$x^T \cdot A^T \cdot x = \overline{\lambda} \cdot x^T \cdot x.$$

Az

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

egyenlet mindkét oldalát szorozzuk balról x^T-tal:

$$x^T \cdot A \cdot x = x^T \cdot \lambda \cdot x.$$

Ezt az egyenletet úgy is írhatjuk, hogy

$$x^T \cdot A \cdot x = \lambda \cdot x^T \cdot x.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\overline{\lambda} \cdot x^T \cdot x = \lambda \cdot x^T \cdot x.$$

Az egyenletet nullára rendezve

$$\overline{\lambda} \cdot x^T \cdot x - \lambda \cdot x^T \cdot x = 0$$

adódik. Jobbról kiemelve $x^T \cdot x$-et azt kapjuk, hogy

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \cdot x^T \cdot x = 0.$$

Mivel $x \neq 0$, hiszen sajátvektor, így

$$\overline{\lambda} - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\lambda} = \lambda,$$

ami azt jelenti, hogy λ valós szám. ■

16.38. **Tétel.** Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a nulla nem sajátértéke.

16.39. **Definíció.** Legyen az A mátrix az $f\colon X \to X$ lineáris transzformáció mátrixa. Ekkor az

$$f(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_n)$$

polinomot az f *karakterisztikus polinom*jának nevezzük. A

$$\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

egyenletet *karakterisztikus egyenlet*nek mondjuk.

16.40. **Tétel.** A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei. A sajátvektorok az

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0$$

homoglén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Mivel ezen egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa definíció szerint 0, ezért végtelen sok megoldása van, így egy sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, továbbá az ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektorok párhuzamosak.

16.41. **Megjegyzés.** Ha az $f\colon X \to X$ lineáris transzformációnak λ sajátértéke és $v \neq 0$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, továbbá az f transzformáció mátrixa A, akkor az

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot x = 0$$

egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, hiszen az alapmátrixának a determinánsa definíció szerint 0, ezért, így egy sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik, továbbá az ugyanazon sajátértékhez tartozó sajátvektorok párhuzamosak.

16.42. **Példa.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x_1; x_2) = (2x_1 + 2x_2; 2x_1 + 5x_2)$$

lineáris leképezést! A természetes bázisra vonatkozó mátrixát úgy írhatjuk föl, hogy megnézzük a természetes bázis tagjain felvett értékeket, majd ezekből, mint oszlopvektorokból képezünk egy mátrixot:

$$f(1;0) = (2;2), \quad f(0;1) = (2;5).$$

A lineáris leképzés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Minden lineáris leképzés a mátrixával balról szorzásként hat, így például a

$$v = (3;-1)$$

vektor képe:

$$f(v) = A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégzve a zárójelfelbontásokat a

$$(2-\lambda)(5-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

polinomot kapjuk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

így $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 6$. A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot x = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Így az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor kétszerese, így az elhagyható, mivel az egyenletrendszer homogén. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$x_1 + 2x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.
Legyen például $x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $x_1 = -2t$. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (amit sajátaltérnek is nevezünk):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Meghatározzuk a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ehhez első lépésben tekintsük az

$$A - 6 \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrxiot. Ezután a

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első sora a második sor -2-szerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2x_1 - x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.
Legyen például $x_1 = t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ekkor $x_2 = 2t$. Tehát a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

16.43. **Tétel.** (Cayley-Hamilton)
Minden négyzetes mátrix gyöke a saját karakterisztikus egyenletének.

16.44. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$(3 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) = 0.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0.$$

A Cayley-Hamilton tétel szerint teljesülnie kell az

$$A^2 - 7A + 12 = 0$$

egyenletenek. Ellenőrizzük, hogy valóban teljesül az egyenlet. Mivel

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

és

$$7A = \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 0 & 28 \end{pmatrix},$$

ezért

$$A^2 - 7A + 12 = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 0 & 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

így valóban teljesül a Cayley-Hamilton tétel.

16.45. **Definíció.** Az A és B négyzetes márixok *hasonlóak*, ha létezik olyan S invertálható mátrix, hogy

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = B.$$

16.46. **Tétel.** Hasonló mátrixok determinánsa megegyezik.

Bizonyítás: Ha az A és a B mátrixok hasonlóak, akkor létezik olyan S invertálható mátrix, hogy

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = B.$$

Vegyük mindkét oldal determinánsát:

$$\det(S^{-1} \cdot A \cdot S) = \det(B).$$

A determinánsok szorzástétele alapján:

$$\det\left(S^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(B).$$

Egy mátrix inverzének a determinánsa a mátrix determinánsának reciproka, így

$$\frac{1}{\det(S)} \cdot \det(A) \cdot \det(S) = \det(B),$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\det(A) = \det(B),$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

16.47. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},$$

mátrixok nem hasonlóak, mert a determinánsuk nem egyenlő.

16.48. **Definíció.** Az $n \times n$-es A mátrix *diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan S invertálható mátrix, hogy

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D$$

diagonális mátrix. Ilyenkor az S mátrixot *diagonalizáló mátrix*nak nevezzük.

16.49. **Tétel.** Az $n \times n$-es A mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n darab lineárisan független sajátvektora. Ekkor a D diagonális mátrix az A sajátértékeiből áll, míg az S diagonalizáló mátrix az A sajátvektorait tartalmazza.

16.50. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a λ sajátérték k-szoros *algebrai multiplicitású* sajátértéke az f lineáris transzformációnak, ha λ a karakterisztikus egyenletnek k-szoros gyöke.

16.51. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a λ sajátérték k-szoros *geometriai multiplicitású* sajátértéke az f lineáris transzformációnak, ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója k.

16.52. **Tétel.** Egy lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

16.53. **Tétel.** (Szimmetrikus mátrixok spektráltétele)
Minden szimmetrikus mátrix ortogonális mátrixszal diagonalizálható.

Ellenőrző kérdések

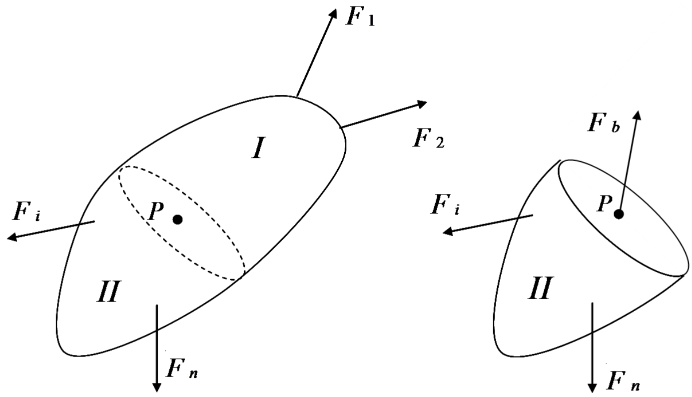
1. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris, ha ....
2. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés additív, ha ....
3. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés homogén, ha ....
4. Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris, akkor $f(0) =$ ....
5. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció esetén v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha ....
6. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha ....
7. A síkon az origó körüli pozitív irányú 90°-os szöggel való forgatás mátrixa: ....
8. A síkon az origó körüli pozitív irányú 30°-os szöggel való forgatás mátrixa: ....
9. A síkon az origó körüli pozitív irányú 45°-os szöggel való forgatás mátrixa: ....
10. A síkon az origó körüli pozitív irányú 60°-os szöggel való forgatás mátrixa: ....
11. A síkon az x-tengelyre való tükrözés mátrixa: ....
12. A síkon az y-tengelyre való tükrözés mátrixa: ....
13. Az A és a B mátrixok hasonlóak, ha ....
14. Ha az $f\colon X \to Y$ lineáris leképzés lineáris transzformáció, akkor ....
15. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f+g$ mátrixa: ....
16. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f-g$ mátrixa: ....
17. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f \circ g$ mátrixa: ....
18. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A, akkor $2f$ mátrixa: ....
19. A térben az x-tengelyre való tükrözés mátrixa: ....

20. Ha $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés, akkor

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f) = \text{................}$$

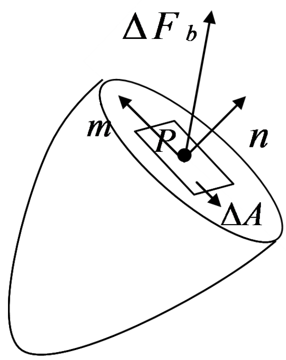
17. Feszültségi mátrix

17.1. **Elméleti összefoglaló.** Az alábbi ábra egy szilárd testet szemléltet, amelyet külső erőkkel terhelünk. A test nyugalomban van. Legyen P a test egy tetszőleges pontja. Vágjuk gondolatban két részre a testet egy síklappal úgy, hogy a metsző sík tartalmazza a P pontot. Mivel a test nyugalomban van, az I és II jelzésű darabjai is nyugalomban vannak.



Az I-es részt gondolatban eltávolítva látható, hogy a II-es rész egyensúlyát a ráható külső erők és a metsző felületen megoszló belső erőrendszer együttesen biztosítja. A külső erők és belső erőrendszer eredőjét F_{II}-vel és F_b-vel jelölve felírható az alábbi összefüggés:

$$F_{II} + F_b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_b = -F_{II}.$$



Az előző modellt tekintve vegyünk fel a metsző síkban egy, a P pontot tartalmazó ΔA nagyságú területelemet és jelöljük n-el annak normálisát (síkra merőleges egységvektorát). A P pontban az n normálishoz tartozó *feszültségen* a

$$\rho_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_b}{\Delta A}$$

vektort értjük, ahol ΔF_b a ΔA területelemen megoszló belső erőrendszer eredője.

A ρ_n feszültségvektor mindig felírható egy normális irányú és egy rá merőleges komponens összegeként:

$$\rho_n = \sigma_n \cdot n + \tau_n \cdot m,$$

ahol

$$|n| = |m| = 1,$$

azaz n és m egységvektorok.

Az előző tételben a $\sigma_n \cdot n$, illetve a $\tau_n \cdot m$ feszültségkomponenseket *normál-, illetve csúsztatófeszültségek*nek nevezzük.

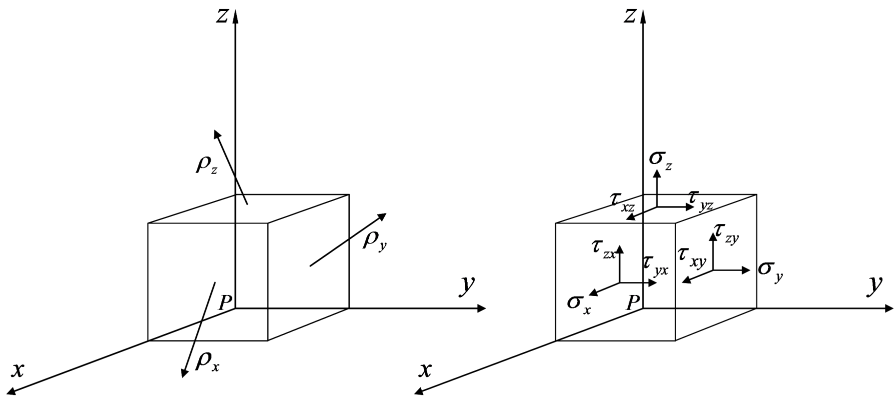
Egy test P pontján át végtelen sok P pontra illeszkedő síklap vehető fel. Minden egyes metsző síkhoz más n egységvektor tartozik, az egyes vektorokhoz pedig különböző feszültségvektorok tartoznak. A P ponthoz tartozó *feszültségi állapot*on az egyes n irányhoz tartozó ρ_n feszültségvektorok összességét értjük.

A $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *feszültségi tenzor* egy lineáris függvény, amely az n normálisokhoz a ρ_n feszültségvektorokat rendeli, azaz amelyet az alábbi összefüggés definiál:

$$T(n) = \rho_n.$$

A *feszültségi mátrix* a feszültségi tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa.

Rögzítsünk a P pontban egy Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, és vegyünk fel benne egy kicsiny, kocka alakú térfogatelemet az ábra szerint:



Jelölje az egyes oldallapok normálisaihoz (azaz az i, j és k bázisvektorokhoz) tartozó P pontbeli feszültségeket ρ_x, ρ_y és ρ_z. Az egyes feszültségvektorokat x, y és z irányú komponensekre bonthatjuk. A ρ_x feszültségvektor koordinátái például: σ_x, τ_{yx} és τ_{zx}. Az első index az adott komponensnek, a második a felület normálisának az irányára utal (σ_x, σ_y, σ_z esetén a két irány egybeesik). Tehát a feszültségvektorok, mint oszlopvektorok, az alábbi alakúak lesznek:

$$\rho_x = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}; \quad \rho_y = \begin{pmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{pmatrix}; \quad \rho_z = \begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{pmatrix}.$$

A feszültségvektorokból összeállítható a P ponthoz tartozó T feszültségi mátrix:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

A feszültségi mátrix szimmetrikus, tehát teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

A feszültségi mátrix ismeretében a P pontbeli, n normálishoz tartozó feszültséget az alábbi összefüggéssel számolhatjuk ki:

$$\rho_n = T \cdot n.$$

A feszültségi mátrix ismeretében a P pont feszültségállapota ismert. A feszültségi mátrixot tehát három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó feszültségvektor meghatározza. A fentiekből adódik, hogy a feszültségállapot megadásához elegendő három, egymásra páronként merőleges irányhoz tartozó feszültségvektort megadni.

Egy P pont feszültségállapotát vizsgálva mindig találhatunk olyan n irányokat, amelyekhez tartozó ρ_n feszültségvektorok normális irányúak, azaz felírható az alábbi egyenlet:

$$\rho_n = T \cdot n = \sigma_n \cdot n \qquad |n| = 1.$$

A fenti tulajdonságú n irányokat a feszültségi állapot *főirány*ainak, a hozzájuk tartozó σ_n feszültségeket pedig *főfeszültség*eknek nevezzük.

A feszültségi főirányok egymásra páronként merőlegesek.

A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, a főirányok pedig egységnyi hosszúságú sajátvektorai.

Mivel a feszültségi mátrix szimmetrikus, ezért a karakterisztikus egyenletének mindig három különböző valós gyöke van. Ebből adódóan a főfeszültségek száma három.

Ha egy test valamely pontjában egyetlen olyan metszet sem létezik, amelyre működő feszültségvektor zérus, akkor azt mondjuk, hogy a pont *térbeli feszültségi állapot*ban van.

Térbeli feszültségi állapotban a feszültségi mátrix mindhárom sorának legalább az egyik eleme zérustól különböző.

Ha egy adott pontban létezik olyan metszet, amelyhez tartozó feszültségvekor zérus, akkor azt mondjuk, hogy a pont *síkbeli feszültségi állapot*ban van.

Síkbeli feszültségi állapotban a feszültségi mátrix σ_z, τ_{zx} és τ_{zy} eleme zérus.

Síkbeli feszültségi állapotban az előző tétel és a feszültségi mátrix szimmetria tulajdonsága miatt a feszültségi mátrix τ_{xz} és τ_{yz} eleme is zérus.

Síkbeli feszültségi állapotban a feszültségi mátrix:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amit a

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrixszal is reprezentálhatunk.

17.2. **Megjegyzés.** A feszültségi mátrix szimmetrikus mátrix, így a sajátértékei valós számok, és a sajátvektorok páronként egymásra ortogonális vektorok.

17.3. **Példa.** Tekintsük a

$$T = \begin{pmatrix} 20 & 0 & -20 \\ 0 & 10 & 0 \\ -20 & 0 & 50 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

feszültségi mátrixot! Ekkor a főfeszültségek a

$$\det(T - \sigma \cdot E) = 0$$

egyenlet megoldásai. A $T - \sigma \cdot E$ mátrix:

$$T - \sigma \cdot E = \begin{pmatrix} 20-\sigma & 0 & -20 \\ 0 & 10-\sigma & 0 \\ -20 & 0 & 50-\sigma \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsát a második sor szerinti kifejtéssel számoljuk:

$$(10-\sigma) \cdot \det \begin{pmatrix} 20-\sigma & -20 \\ -20 & 50-\sigma \end{pmatrix} = (10-\sigma) \cdot \big((20-\sigma) \cdot (50-\sigma) - 400\big).$$

Tehát a

$$(10-\sigma) \cdot \big((20-\sigma) \cdot (50-\sigma) - 400\big) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amit

$$(10-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 70\sigma + 600) = 0$$

alakban is felírhatunk. Egy szorzat pontosan akkor zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így az egyik főfeszültség értéke $\sigma_1 = 10\,[\mathrm{MPa}]$. A

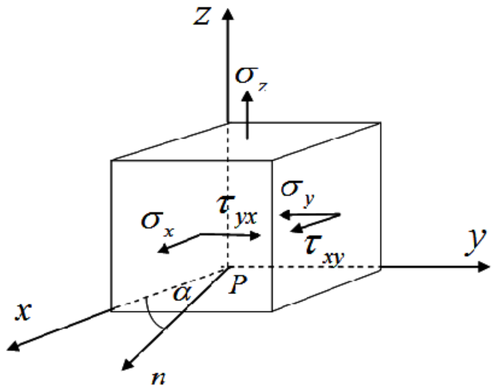
$$\sigma^2 - 70\sigma + 600 = 0$$

egyenlet megdoldása:

$$\sigma_{1,2} = \frac{70 \pm \sqrt{4\,900 - 2\,400}}{2} = \frac{70 \pm 50}{2},$$

a másik két főfeszültség: $\sigma_2 = 60\,\mathrm{MPa}$, illetve $\sigma_3 = 10\,[\mathrm{MPa}]$.

17.4. **Feladat.** Egy szerkezet valamely P pontjához tartozó feszültségállapotot az alábbi ábrán látható elemi hasábon bejelölt feszültségi adatok jellemzik:



Az ábrán szereplő adatok az alábbiak:

$$\sigma_x = 50\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_y = -30\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_z = 25\,[\mathrm{MPa}];$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30\,[\mathrm{MPa}];\ \alpha = 30^\circ.$$

a) Adjuk meg az x tengelyhez α szöggel hajló, xz-síkban fekvő n normális egységvektor koordinátáit!

b) Adjuk meg a feszültségi mátrixot a P pontban!

c) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektort!

d) Határozzuk meg az n vektor által irányított felületelemhez tartozó normálfeszültség értékét!

e) Számoljuk ki a csúsztatófeszültség nagyságát!

f) Határozzuk meg a főfeszültségek nagyságát!

g) Adjuk meg a feszültségi főirányokat!

Megoldás:

a) A normális egységvektor koordinátái:

$$n_x = \cos\alpha = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$n_z = -\sin\alpha = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Nyilván $n_y = 0$, így a keresett normális egységvektor:

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

b) A feszültségi mátrix a P pontban:

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

c) Az n vektor által irányított felületelemhez tartozó ρ_n feszültségvektor:

$$\rho_n = T \cdot n = \begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 25 \cdot \sqrt{3} \\ 15 \cdot \sqrt{3} \\ 25 \cdot (-0,5) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} [\mathrm{MPa}].$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|\rho_n| = \sqrt{(43,3)^2 + (25,98)^2 + (-12,5)^2} \approx 52,02\,[\mathrm{MPa}].$$

d) Mivel $\sigma_n = n \bullet \rho_n$, ezért

$$\sigma_n \approx \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 43,3 \\ 25,98 \\ -12,5 \end{pmatrix} \approx 43,75\,[\mathrm{MPa}].$$

A normálfeszültség tehát $43,75$ [MPa].

e) Mivel

$$|\rho_n| = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2},$$

ezért a csúsztatófeszültség:

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} \approx 28,14\,[\mathrm{MPa}].$$

f) A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei, amiket a karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. Tehát meg kell oldanunk a

$$\det(T - \sigma \cdot E) = 0$$

egyenletet. Behelyettesítve a T mátrixot és az E egységmátrixot azt kapjuk, hogy

$$|T - \sigma \cdot E| = \det\left[\begin{pmatrix} 50 & 30 & 0 \\ 30 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \det\begin{pmatrix} 50-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 25-\sigma \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst kiszámolhatjuk például a harmadik sor szerinti kifejtéssel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$|T - \sigma \cdot E| = (25-\sigma) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \big[(50-\sigma) \cdot (-30-\sigma) - 900\big] =$$
$$= (25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400).$$

A főfeszültségek tehát a

$$(25-\sigma) \cdot (\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400) = 0$$

egyenlet megoldásai. Egy szorzat úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így $\sigma = 25\,[\mathrm{MPa}]$ vagy

$$\sigma^2 - 20 \cdot \sigma - 2.400 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$\sigma_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 9.600}}{2} = \frac{20 \pm 100}{2},$$

így $\sigma = 60\,[\mathrm{MPa}]$, illetve $\sigma = -40\,[\mathrm{MPa}]$. Indexezzük az alábbi módon a főfeszültségeket:

$$\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}];\ \sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}].$$

g) Az egyes főfeszültségekhez tartozó főirányokat a

$$(T - \sigma \cdot E) \cdot n = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. Behelyettesítve a $\sigma_1 = 60\,[\mathrm{MPa}]$ értéket az

$$\begin{pmatrix} -10 & 30 & 0 \\ 30 & -90 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -10n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 90n_y &= 0 \\ -35n_z &= 0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_x = 3n_y$ kapcsolatokat kapjuk. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért legyen például $n_y = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ekkor $n_x = 3t$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_1 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_2 = 25\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 25 & 30 & 0 \\ 30 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 25n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x - 55n_y &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $n_z = t$ adódik, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Továbbá $n_x = 0$ és $n_y = 0$. Az n vektornak egységvektornak kell lenni, így teljesülnie kell, hogy

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

azaz $t = 1$. Tehát a σ_2 főfeszültséghez tartozó főirány:

$$n_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\sigma_3 = -40\,[\mathrm{MPa}]$ értékű főfeszültség esetén az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{pmatrix} 90 & 30 & 0 \\ 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenleteket részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 90n_x + 30n_y &= 0 \\ 30n_x + 10n_y &= 0 \\ 65n_z &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $n_z = 0$ adódik. Az első és második egyenletek ekvivalensek egymással, így közülük az egyik egyenlet elhagyható. Az n_x és n_y ismeretlenek között az $n_y = -3n_x$ összefüggést kapjuk. A könynyebb áttekinthetőség miatt legyen például $n_x = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tetszőleges. Ezt az első vagy második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $n_y = -3t$. Annak is teljesülni kell továbbá, hogy az n vektornak egységvektornak kell lenni, így fenn áll a

$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1,$$

összefüggés, azaz

$$\sqrt{9t^2 + t^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{10} \cdot t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tehát a σ_3 főfeszültséghez tartozó főirány:

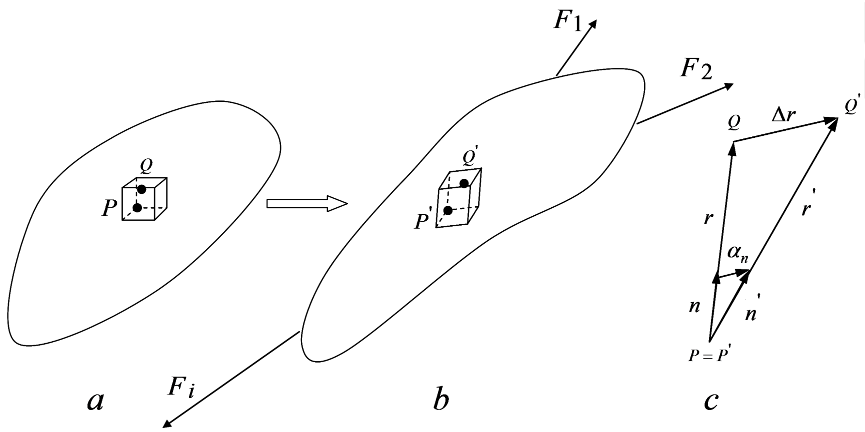
$$n_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Feszültségi tenzor ....
2. Feszültségi mátrix ....
3. A főfeszültségek a feszültségi mátrix ....
4. A főirányok a feszültségi mátrix ....

18. Alakváltozási mátrix

18.1. **Elméleti összefoglaló.** Vegyünk egy szilárd testet és biztosítsuk annak stabil egyensúlyi helyzetét megfelelő kényszerekkel. A kényszerek megakadályozzák a test merev mozgásait (elmozdulás, elfordulás), de lehetővé teszik annak alakváltozását. Az alábbi ábra a testet szemlélteti terheletlen, és külső erőkkel terhelt állapotában.



Válasszuk ki a test egy tetszőleges P pontját, majd terheletlen állapotban vegyük fel a hozzá tartozó kicsiny, kocka alakú térfogatelemet és benne egy P-re nem illeszkedő Q pontot. A belső feszültségek hatására a P pont a P', míg a Q pont a Q' pontba mozdul el, a térfogatelem alakja pedig paralelepipedonná torzul. Az ábra c) részén feltüntettük a Q pontnak a P ponthoz viszonyított Δr relatív elmozdulását. Az ábra alapján, egy aránypár segítségével értelmezhetjük az n irányhoz tartozó α_n alakváltozási vektort:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_n}{|n|} = \frac{\Delta r}{|r|}; \qquad |n| = 1.$$

Az α_n vektort a PQ szakasz hosszával megszorozva megkapjuk a Q pont elmozdulását:

$$\Delta r = \alpha_n \cdot |r|.$$

Azaz az α_n vektor ismeretében bármely, az n irányú egyenesre illeszkedő pont elmozdulása meghatározható.

Egy test P pontjából a tér minden irányába indíthatók n egységvektorok. Az egyes vektorokhoz különböző alakváltozási vektorok tartoznak.

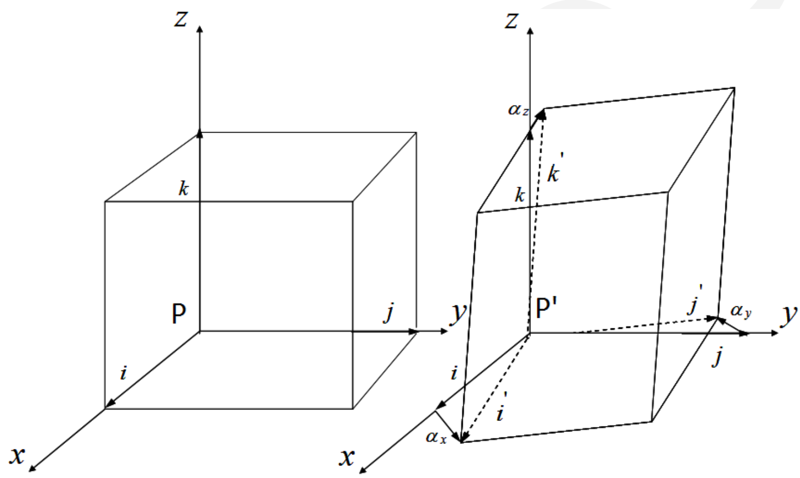
A P ponthoz tartozó *alakváltozási állapot* alatt az egyes n irányhoz tartozó α_n alakváltozási vektorok összességét értjük.

Az $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *alakváltozási tenzor* egy lineáris függvény, amely az n irányokhoz az α_n alakváltozási vektorokat rendeli:

$$A(n) = \alpha_n.$$

Az *alakváltozási mátrix* az alakváltozási tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa.

Rögzítsünk a P és P' pontokban két azonos tengelyállású, Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, majd a P ponthoz tartozóban vegyünk fel egy egységnyi oldalhosszúságú kockát:



Jelölje α_x, α_y és α_z az i, j és k irányokhoz tartozó alakváltozási vektorokat deformált állapotban. Az egyes alakváltozási vektorokat x, y és z irányú összetevőkre bonthatjuk. A α_x alakváltozási vektor koordinátái például: α_{xx}, α_{yx} és α_{zx}. Az első index az adott komponensnek az irányára, a második az i irányra utal. Tehát az alakváltozási vektorok, mint oszlopvektorok, az alábbi alakot öltik:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{yx} \\ \alpha_{zx} \end{pmatrix}; \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} \alpha_{xy} \\ \alpha_{yy} \\ \alpha_{zy} \end{pmatrix}; \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} \alpha_{xz} \\ \alpha_{yz} \\ \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

A alakváltozási vektorokból összeállítható a P ponthoz tartozó A alakváltozási mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix függ a koordinátarendszer megválasztásától. Különböző koordinátarendszerek esetén általában különböző alakváltozási mátrixokat kapunk.

Az alakváltozási mátrix elemeinek szemléletes geometriai jelentést adhatunk, ha ábrázoljuk például a j és k vektorok által kifeszített paralelogramma yz síkra eső merőleges vetületét. Ekkor teljesül, hogy

$$\alpha_{zz} = \frac{\left(1+\alpha_{zz}\right)-1}{1} = \varepsilon_z$$
$$\alpha_{yy} = \frac{\left(1+\alpha_{yy}\right)-1}{1} = \varepsilon_y,$$

továbbá kis deformációk esetén jó közelítéssel

$$\alpha_{yz} \approx 1 \cdot \varphi_{yz} = \varphi_{yz}$$
$$\alpha_{zy} \approx 1 \cdot \varphi_{zy} = \varphi_{zy}.$$

adódik. Az összefüggésekben ε_y és ε_z az y és z irányú fajlagos nyúlás, φ_{zy} és φ_{yz} pedig az y tengelynek a z tengely irányába, és a z tengelynek az y irányába történő elfordulása. A fenti egyenletekből adódik, hogy φ_{zy} és φ_{yz} értéke pozitív, ha az y tengely z felé, illetve a z tengely y felé fordul el; ε_y és ε_z előjelét pedig a koordinátatengelyek irányításához igazítjuk, azaz az ábrán adott esetben ε_y negatív, ε_z pozitív. Mindig teljesül továbbá az alábbi szimmetria tulajdonság:

$$\varphi_{zy} = \varphi_{yz} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy},$$

ahol γ_{zy} az yz-síkbeli szögelfordulás. Ezek alapján az alakváltozási mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Az alakváltozási mátrix szimmetrikus.

Az alakváltozási mátrix ismeretében a P pontbeli, n irányhoz tartozó alakváltozási vektort az alábbi összefüggéssel számíthatjuk:

$$\alpha_n = A \cdot n,$$

ahol $|n| = 1$.

A alakváltozási mátrix segítségével bármely tetszőleges n irányban létrejövő fajlagos ε_n nyúlás, illetve két egymásra merőleges n és m tengely egymás felé fordulásának

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{mn} = \frac{1}{2} \cdot \gamma_{nm}$$

szöge az alábbi módon határozható meg:

$$\varepsilon_n = n \bullet \alpha_n = n \cdot A \cdot n$$

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{mn} = m \bullet \alpha_n = m \cdot A \cdot n$$

$$\frac{1}{2} \cdot \gamma_{nm} = n \bullet \alpha_m = n \cdot A \cdot m.$$

Egy P pont alakváltozási állapotát vizsgálva mindig találhatunk olyan n irányokat, amelyekhez tartozó α_n alakváltozási vektorok párhuzamosak az n iránnyal, azaz felírható az alábbi egyenlet:

$$\alpha_n = A \cdot n = \varepsilon_n \cdot n,$$

ahol $|n| = 1$.

Az előbbi tételben szereplő n irányokat az alakváltozási állapot *főirány*ainak, a hozzájuk tartozó ε_n fajlagos nyúlásokat *főnyúlás*oknak nevezzük.

Az alakváltozási főirányok egymásra páronként merőlegesek.

A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei, az alakváltozási főirányok pedig egységnyi hosszúságú sajátvektorai.

Terheljük az egységnyi oldalhosszúságú kocka két szemközti oldalát σ nagyságú, normálirányú feszültséggel. A tapasztalatok szerint a kocka a feszültség irányában megnyúlik, a feszültség irányára merőleges keresztmetszete pedig csökken.

Jelölje ε a feszültségirányú, ε_{ker} az arra merőleges (keresztirányú) fajlagos nyúlást. Tapasztalat szerint, kicsiny deformációk esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\sigma = Y \cdot \varepsilon; \quad \varepsilon_{ker} = -\nu \cdot \varepsilon.$$

Az előbbi tételben szereplő Y és ν számok az anyagi minőségre jellemző állandók elnevezése *Young-modulus* és *Poisson-tényező*.

Kicsiny deformációk esetén a τ csúsztatófeszültség arányos a γ szögtorzulással:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

Az előbbi tételben szereplő G arányossági tényezőt *csúsztató rugalmassági modulus*nak hívjuk.

A három anyagi állandó között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$G = \frac{Y}{2 \cdot (1 + \nu)}.$$

A feszültségi és alakváltozási állapot kapcsolatára felírhatóak az alábbi összefüggések:

$$A = \frac{1}{2G} \cdot \left(T - \frac{\nu}{1+\nu} \cdot F_I \cdot E \right)$$
$$T = 2G \cdot \left(A + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot A_I \cdot E \right),$$

ahol

$$F_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Az előző tételben szereplő összefüggéseket *általános Hooke-törvény*nek nevezzük.

18.2. **Példa.** Egy test alakváltozási mátrixa a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Ekkor a főnyúlások nagyságát a

$$\det(A - \varepsilon \cdot E) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásai adják. Az $A - \varepsilon$ mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 10-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 6-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -3-\varepsilon \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

A mátrix diagonális, így determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, így a megoldandó egyenlet:

$$(10 - \varepsilon) \cdot (6 - \varepsilon) \cdot (-3 - \varepsilon) = 0.$$

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így a főnyúlások értékei

$$\varepsilon_1 = -3;\ \varepsilon_6;\ \varepsilon = 10.$$

18.3. **Példa.** Egy test alakváltozási mátrixa a P pontban:

$$A = \begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix}.$$

Azt is tudjuk, hogy Young-modulus $Y = 2 \cdot 10^{11}$ és Poisson-tényező $\nu = 0,3$. Meghatározzuk a főnyúlásokat és a csúsztató rugalmassági modulus értékét!

A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei, amelyeket a

$$\det(A - \varepsilon \cdot E) = 0$$

karakterisztikus egyenlet megoldásával kapunk meg. A karakterisztikus polinom:

$$\begin{aligned} &\det(A - \varepsilon \cdot E) = \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 2,58 & 1,95 & 0 \\ 1,95 & -2,62 & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \end{pmatrix} \cdot 10^{-4} - \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}\right] = \\ &= \det\begin{pmatrix} 2,58 \cdot 10^{-4} - \varepsilon & 1,95 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 1,95 \cdot 10^{-4} & -2,62 \cdot 10^{-4} - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A kapott determinánst például a harmadik sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$(-0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 0,04 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon - 10,56 \cdot 10^{-8}).$$

A megoldandó egyenlet tehát:

$$(-0,95 \cdot 10^{-4} - \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 0,04 \cdot 10^{-4} \cdot \varepsilon - 10,56 \cdot 10^{-8}) = 0.$$

Egy szorzat csak akkor lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így a sajátértékek

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx 3,23 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 &\approx -0,95 \cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_3 &\approx -3,27 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

A csúsztató rugalmassági modulus értéke:

$$G = \frac{Y}{2 \cdot (1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2,6} \approx 0,77 \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}.$$

Ellenőrző kérdések

1. Alakváltozási tenzor: ....
2. Alakváltozási mátrix: ....
3. A főnyúlások az alakváltozási mátrix ....
4. Az alakváltozási főirányok az alakváltozási mátrix ....

19. Kvadratikus függvények

19.1. **Definíció.** Legyen $x = (x_1; x_2; , \ldots , x_n) \in \mathbb{R}^n$ és legyen A egy $n \times n$ típusú szimmetrikus mátrix. A $Q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$$

leképezési szabállyal definiált függvényeket *kvadratikus függvény*eknek, *kvadratikus formá*knak vagy *kvadratikus alak*oknak nevezzük. Az A mátrixot a *kvadratikus függvény mátrixá*nak hívjuk.

19.2. **Példa.** A

$$Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2.$$

19.3. **Definíció.** A $Q \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény

- *pozitív definit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) > 0$;
- *negatív definit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) < 0$;
- *pozitív szemidefinit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) \geq 0$ és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$;
- *negatív szemidefinit*, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) \leq 0$ és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$;
- *indefinit*, ha $Q(x)$ pozitív és negatív értéket is felvesz.

19.4. **Példa.** A $Q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

kvadratikus függvény pozitív szemidefinit, mert

$$Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

és például $(x_1; x_2) = (1; -1)$ esetén

$$Q(1; -1) = (1 - 1)^2 = 0.$$

19.5. **Definíció.** Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

egy tetszőleges $n \times n$ típusú mátrix. A

$$\begin{aligned} D_1 &= \det a_{11}; \\ D_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \\ D_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \\ &\vdots \\ D_n &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

determinánsokat *bal felső sarok minor determinánsok*nak nevezzük.

19.6. **Tétel.** Legyen a $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény mátrixa A. A Q kvadratikus függvény pontosan akkor pozitív definit, ha az A mátrix minden bal felső sarok minor determinánsa pozitív.

19.7. **Tétel.** Legyen $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény mátrixa A. A Q kvadratikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha az A mátrix első bal felső sarok minor determinánsa negatív és a bal felső sarok minor determinánsok váltakozó előjelűek.

19.8. **Tétel.** Legyen $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény mátrixa A. A Q kvadratikus függvény pontosan akkor indefinit, ha az A mátrix első bal felső sarok minor determinánsai között negatív és pozitív előjelű is van.

19.9. **Példa.** A $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x_1; x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(2) = 2.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

így a kvadratikus függvény pozitív definit.

19.10. **Definíció.** Minden $n \times n$ típusú szimmetrikus mátrixhoz hozzárendelhetünk egy kvadratikus függvényt az

$$x^T \cdot A \cdot x$$

előírással, ahol $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$. Ezt a kvadratikus függvényt a *mátrixhoz tartozó kvadratikus függvény*nek nevezünk.

19.11. **Megjegyzés.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix pozitív definit, negatív definit, pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit, illetve indefinit ha a hozzá tartozó kvadratikus függvény pozitív definit, negatív definit, pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit, illetve indefinit.

19.12. **Tétel.** Egy kvadartikus függvény pontosan akkor pozitív definit, ha a mátrixának minden sajátértéke pozitív.

19.13. **Tétel.** Egy kvadartikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha a mátrixának minden sajátértéke pozitív.

19.14. **Tétel.** Egy kvadartikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha a mátrixának van pozitív és negatív sajátértéke is.

19.15. **Példa.** A $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 4 = 0.$$

A zárójelek felbontása és az összevonás után

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Tehát a sajátértékek:

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 0$$

és

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 0,$$

így az A mátrixnak pozitív és negatív sajátértéke is van, ezért a kvadratikus függvény indefinit.

19.16. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény *kanonikus alakú*, ha a mátrixa diagonális.

19.17. **Megjegyzés.** Ha a $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus forma kanonikus alakú, akkor

$$Q(x_1; x_2; \ldots; x_n) = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 + \ldots + c_n \cdot x_n^2,$$

ahol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ a kvadratikus forma diagonális mátrixának főátlóbeli elemei.

19.18. **Megjegyzés.** Egy kvadratikus függvény kanonikus alakra hozása a különböző alkalmazások szempontjából meglehetősen fontos. A kanonikus alakra hozás algoritmusát mutatjuk be az alábbiakban:
Legyen A egy $n \times n$ típusú szimmetrikus mátrix. Tegyük fel, hogy A diagonalizálható, ortogonális mátrix. Ekkor létezik olyan S ortogonális mátrix, melyre

$$S^T \cdot A \cdot S = D$$

diagonális mátrix és D az A mátrix sajátértékeit tartalmazza. Tekintsük a

$$Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$$

kvdaratikus függvényt. Ekkor az $y = S \cdot y$ transzformáció után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x^T \cdot A \cdot x &= (S \cdot y)^T \cdot A \cdot S \cdot y = \\
&= y^T \cdot S^T \cdot A \cdot S \cdot y = y^T \cdot D \cdot y = \\
&= (y_1; y_2; \ldots; y_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \\
&= \lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2 + \ldots + \lambda_n \cdot y_n^2,
\end{aligned}$$

ami már kanonikus alak.

19.19. **Megjegyzés.** Egy kvadratikus függvénynek többféle kanonikus alakja létezik. Azonban ezek az alakok nem teljesen függetlenek egymástól. Erre vonatkozó a következő tétel.

19.20. **Tétel.** (Sylvester-féle tehetetlenségi tétel.)
Egy kvadratikis függvény kanonikus alakjában szereplő poizitív, nulla és negatív együtthatók száma egyértelműen meghatározott.

Ellenőrző kérdések

1. Kvadratikus függvénynek nevezzük a .... leképezési szabállyal definiált függvényt.
2. A $Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2$ kvadratikus függvény mátrixa: ....
3. A $Q(x)$ kvadratikus függvény pozitív definit, ha ....
4. A $Q(x)$ kvadratikus függvény negatív definit, ha ....
5. A $Q(x)$ kvadratikus függvény pozitív szemidefinit, ha ....
6. A $Q(x)$ kvadratikus függvény negatív szemidefinit, ha ....
7. A $Q(x)$ kvadratikus függvény indefinit, ha ....
8. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix bal felső sarok minor determinánsai: ....
9. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix .... definit.
10. Ha egy kvadratikus függvény kanonikus alakú, akkor az alakja az alábbi: ....
11. Az $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix .... definit.

20. Másodrendű görbék

20.1. **Definíció.** Legyenek a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 és f_1 tetszőleges, egyszerre nem mind zérus valós számok. Ekkor az

$$a_1 \cdot x_1^2 + b_1 \cdot x_1 x_2 + c_1 \cdot x_2^2 + d_1 \cdot x_1 + e_1 \cdot x_2 + f_1 = 0$$

egyenletű alakzatokat *másodrendű görbé*knek nevezzük.

20.2. **Megjegyzés.** Ha az előbbi egyenletet osztjuk a $-f_1 \neq 0$ valós számmal, akkor az egyenlet

$$-\frac{a_1}{f_1} \cdot x_1^2 - \frac{b_1}{f_1} \cdot x_1 x_2 - \frac{c_1}{f_1} \cdot x_2^2 - \frac{d_1}{f_1} \cdot x_1 - \frac{e_1}{f_1} \cdot x_2 = 1$$

alakra hozható. Vezessük be az

$$a = -\frac{a_1}{f_1};\ b = -\frac{b_1}{f_1};\ c = -\frac{c_1}{f_1};\ d = -\frac{d_1}{f_1};\ e = -\frac{e_1}{f_1}$$

jelöléseket. Ekkor a másodrendű görbe egyenlete az

$$a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 x_2 + c \cdot x_2^2 + d \cdot x_1 + e \cdot x_2 = 1$$

alakra hozható.

20.3. **Megjegyzés.** Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix};\ K = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

jelöléseket. Ekkor a másodrendű görbe egyenlete

$$x^T \cdot A \cdot x + K^T \cdot x = 1$$

alakban írható fel.

20.4. **Definíció.** Az előbbi felírásban szereplő A mátrixot a *másodrendű görbe mátrixá*nak nevezzük.

20.5. **Tétel.** Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa

- pozitív, akkor a másodrendű görbe ellipszis;
- negatív, akkor a másodrendű görbe hiperbola;
- zérus, akkor a másodrendű görbe parabola.

20.6. **Megjegyzés.** A másodrendű görbék úgynevezett elfajuló esetben pontok, párhuzamos egyenespárok vagy metsző egyenespárok is lehetnek.

20.7. **Tétel.** Az ellipszis egyenlete alkalmas k és l valós számokkal az

$$\frac{x_1^2}{k^2}+\frac{x_2^2}{l^2}=1$$

úgynevezett kanonikus alakra írható át.

20.8. **Tétel.** A hiperbola egyenlete alkalmas k és l valós számokkal az

$$\frac{x_1^2}{k^2}-\frac{x_2^2}{l^2}=1$$

úgynevezett kanonikus alakra írható át.

20.9. **Tétel.** A parabola egyenlete alkalmas k valós számmal az

$$x_2^2=4k\cdot x_1^2$$

úgynevezett kanonikus alakra írható át.

20.10. **Példa.** Tekintsük a

$$3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2=1$$

egyenletű másodrendű görbét!
A

$$Q(x_1;x_2)=3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2$$

kvadratikus függvény mátrixa:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mivel az A mátrix determinánsa

$$\det A=\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=9-4=5>0,$$

ezért a görbe ellipszis lesz.
Vezessük be az

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=3x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2.$$

Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(3-\lambda)^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (3-\lambda)^2 = 4,$$

amiből $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 5$ adódik.
A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sor -1-szeresével, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda E_2$ mátrixot:

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora megegyezik az első sorral, így az elhagyható, mert nincs új információtartalma. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-2x_1 - 2x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 + x_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor a sajátvektor zérusvektor lenne, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik. A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az S mátrix ortogonális, mert

$$S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

így

$$S^T \cdot S = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

A kvadratikus forma kanonikus alakja az

$$x = S \cdot y$$

transzformáció után:

$$y^T \cdot D \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 + 5y_2^2.$$

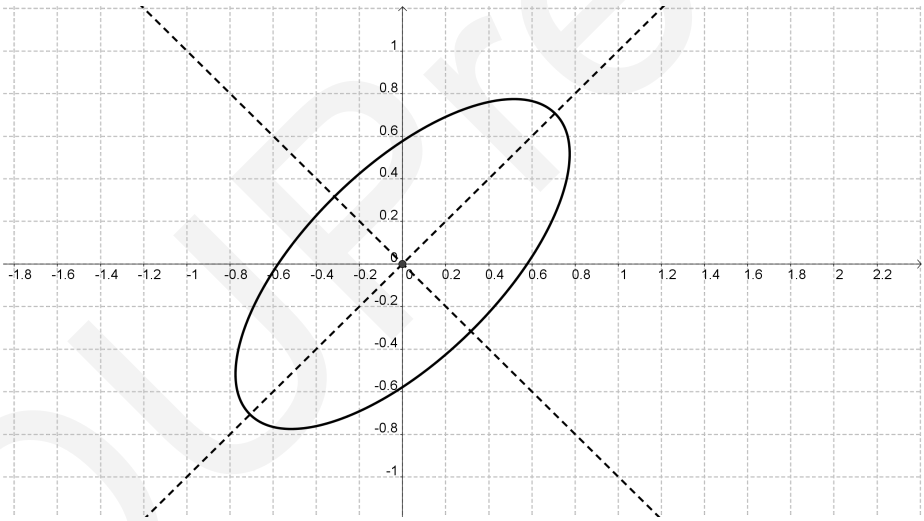
Tehát a másodrendű görbe kanonikus alakja

$$y_1^2 + 5y_2^2 = 1.$$

Átalakítva azt kapjuk, hogy

$$y_1^2 + \frac{y_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az ellipszis kis féltengelyének hossza $\frac{1}{\sqrt{5}}$, a nagy féltengelyének hossza 1. Az ellipszis középpontja az origó és a tengelyeinek irányvektorai a sajátvektorokból olvashatók le, így $(1;1)$ és $(-1;1)$. Tehát az ellipszis:



Ellenőrző kérdések

1. Egy másodrendű görbe általános alakja:
   ....
2. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa pozitív, akkor a másodrendű görbe ....
3. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa negatív, akkor a másodrendű görbe ....
4. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa zérus, akkor a másodrendű görbe ....

21. Rekurzív sorozatok mátrixokkal

21.1. **Eljárás.** Legyenek k, m, x, y adott valós számok. Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_0 &= x; \\ a_1 &= y; \\ a_n &= k \cdot a_{n-2} + m \cdot a_{n-1} \ (n > 1) \end{aligned}$$

rekurzív sorozatot! Mivel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ k \cdot a_0 + m \cdot a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

ezért az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & m \end{pmatrix}$$

jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Amennyiben az A mátrix diagonalizálható, akkor felírhatjuk $S^{-1} \cdot D \cdot S$ alakban, ahol D diagonális mátrix és S a diagonalizáló mátrix. Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} A^n &= \left(S \cdot D \cdot S^{-1}\right)^n = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \ldots \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = \\ &= S \cdot D^n \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

el tudjuk végezni az A mátrix hatványozását, majd elvégezve az

$$A^n \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

szorzást fel tudjuk írni a rekurzív sorozatot zárt alakban.

21.2. **Példa.** Adjuk meg a Fibonacci-sorozat általános tagját zárt alakban!
A Fibonacci-sorozatra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_1 &= 1; \\ a_n &= a_{n-2} + a_{n-1} \ (n > 1). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 + a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix},$$

ezért az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jelölést bevezetve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

A következőkben diagonalizáljuk az A mátrixot.
Az A mátrix sajátértékei a karakterisztikus egyenletének gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(-\lambda) \cdot (1-\lambda) - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

amiből a másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Legyen

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

és

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Az előbbi másodfokú egyenlet megoldásaira vonatkozóan most megjegyzünk néhány olyan számolási szabályt, amelyet a későbbiekben használni szeretnénk. A Viéte-formulák alapján azt kapjuk, hogy egyrészt

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

másrészt

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

Teljesül továbbá az is, hogy

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}.$$

A λ_1 sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda_1 \cdot E_2$ mátrixot:

$$A - \lambda_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva, hogy $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ a sajátvektorokat a

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának a determinánsa nulla, ezért a sorvektorai lineárisan függők, és a rangja 1, így az egyik sor elhagyható. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$-\lambda_1 \cdot x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \lambda_1 \cdot x_1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor x_2 és x_1 is zérus lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a λ_1 sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \lambda_1 \cdot t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

A λ_2 sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározásához első lépésben felírjuk az $A - \lambda_2 \cdot E_2$ mátrixot:

$$A - \lambda_2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Felhasználva, hogy $1 - \lambda_2 = \lambda_1$, a sajátértékeket a

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának a determinánsa nulla, ezért a sorvektorai lineárisan függők, és a rangja 1, így az egyik sor elhagyható. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$-\lambda_2 \cdot x_1 + x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \lambda_2 \cdot x_1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk. Legyen

$$x_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A $t = 0$ értéket azért zárjuk ki a megoldások közül, mert akkor x_2 és x_1 is zérus lenne, ami azt jelentené, hogy a sajátvektor zérusvektor, amit definíció szerint nem engedünk meg. Tehát a λ_2 sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza, azaz a sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \lambda_2 \cdot t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Az A mátrix diagonalizálható, mert minden sajátértéknek az algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.
A diagonálmátrix:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

a diagonalizáló mátrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = D,$$

ezért

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

Ezt felhasználva

$$A^n = \left(S \cdot D \cdot S^{-1}\right)^n = S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} \cdot \ldots \cdot S \cdot D \cdot S^{-1} = \\ = S \cdot D^n \cdot S^{-1}$$

adódik. Az S mátrix determinánsa

$$\det S = \lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{5},$$

így az S mátrix inverze

$$S^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A^n = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonális mátrix hatványa olyan diagonális mátrix, melynek főátlóbeli elemei a mátrix főátlóbeli elemeinek hatványai, így

$$A^n = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha elvégezzük az első két mátrix szorzatát, akkor azt kapjuk, hogy

$$A^n = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & {\lambda_2}^n \\ {\lambda_1}^{n+1} & {\lambda_2}^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elvégezzük a mátrixok szorzását:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot {\lambda_2}^n & -{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n \\ {\lambda_1}^{n+1} \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot {\lambda_2}^{n+1} & -{\lambda_1}^{n+1} + {\lambda_2}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

A kapott eredményt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot {\lambda_2}^n & -{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n \\ {\lambda_1}^{n+1} \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot {\lambda_2}^{n+1} & -{\lambda_1}^{n+1} + {\lambda_2}^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -{\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n \\ -{\lambda_1}^{n+1} + {\lambda_2}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n\right).$$

Felhasználva, hogy

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

és

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

21.3. **Megjegyzés.** Mivel

$$\left| \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0,$$

így nagy n értékekre ez a tag elhanyagolhatóan kicsi lesz.

21.4. **Megjegyzés.** A Fibonacci-sorozat első 4 tagja:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1;\ a_3 = 2;\ a_4 = 3.$$

Ezeket a tagokat kiszámoljuk az

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

formula segítségével is.
Az első tag:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = 1.$$

A második tag:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5} = 1.$$

A harmadik tag:

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-1+3\frac{5}{-}15+5\sqrt{5}}{8} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{16\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2\sqrt{5} = 2.$$

A negyedik tag:

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^4 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^4 \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+4\sqrt{5}+30+20\sqrt{5}+25-1+4\sqrt{5}-30+20\sqrt{5}-25}{16} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{48\sqrt{5}}{16} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 3\sqrt{5} = 3.
\end{aligned}
$$

Ezzel az első négy tagra ellenőriztük a formula helyességét. A rekurzív képlettel szemben a formula egyik nagy előnye, hogy egy tetszőleges tag kiszámolásához nem kell ismernünk az előtte lévő tagokat.

Ellenőrző kérdések

1. Írjuk fel mátrixszorzatos alakban az
$$a_0 = 4;$$
$$a_1 = 6;$$
$$a_n = 2a_{n-2} + 4a_{n-1}\ (n > 1)$$
rekurziót!
2. Írjuk fel mátrixszorzatos alakban az
$$a_0 = 2;$$
$$a_1 = 6;$$
$$a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-1}\ (n > 1)$$
rekurziót!

22. Polinomok stabilitása

22.1. **Definíció.** Legyenek a_0, a_1, …, a_n adott valós számok. Azt mondjuk, hogy a

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

polinom stabil, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ a polinom gyökei.

22.2. **Példa.** A

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

polinom gyökeit a

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

egyenlet megoldásai adják. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

így $\lambda_1 = -3$, valamint $\lambda_2 = -2$. Mivel a sajátértékek valósak és negatívak, ezért az előbbi definíció szerint ezért a polinom stabil.

22.3. **Tétel.** (Routh-Hurwitz kritérium)
Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adott valós számok. A

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

polinom pontosan akkor stabil, ha

$$\frac{a_0}{a_n} > 0; \quad \frac{a_1}{a_n} > 0; \ldots; \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0;$$

és a polinom együtthatóiból képzett

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_4 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

úgynevezett Hurwitz-mátrix pozitív definit.

22.4. **Megjegyzés.** A

$$P(\lambda) = a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

másodfokú polinom együthatóiból képzett Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

22.5. **Példa.** A

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

polinom együtthatóiból képzett Hurwitz mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(5) = 5.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 - 0 = 5.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Következésképpen teljesül a Routh-Hurwitz kritérium, tehát a polinom stabil.

22.6. **Példa.** Tekintsük a

$$P(\lambda) = 5\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

polinomot! A Harmadfokú polinom együtthatóiból képzett Hurwitz-mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(2) = 2.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 6 - 5 = 1.$$

A harmadik bal felső sarok minor determináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden bal felső sarok minor determináns pozitív, tehát a mátrix pozitív definit. Mivel az is teljesül, hogy a polinom minden együtthatója pozitív, ezért a polinom stabil.

Ellenőrző kérdések

1. A
$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$
polinom stabil, ha ....
2. A
$$P(\lambda) = a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$
polinom együtthatóiból képzett Hurwitz mátrix: ....
3. A
$$P(\lambda) = a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$
polinom együtthatóiból képzett Hurwitz mátrix: ....
4. Routh-Hurwitz kritérium: ....

23. Sztochasztikus- és átmenetmátrixok

23.1. **Megjegyzés.** A valószínűségi változó időbeli változásával találkozhatunk gazdasági, műszaki számításokban. Például, megvizsgálhatjuk, hogy egy részvény ára vagy egy cég piaci részesedése hogyan alakul az idő múlásával.

23.2. **Definíció.** Az időben véletlenszerűen változó folyamatokat *sztochasztikus folyamatok*nak nevezzük.

23.3. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat *diszkrét idejű*, ha a vizsgált időpillanatok száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

23.4. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat *folytonos idejű*, ha a folyamat állapota nemcsak diszkrét időpillanatokban, hanem tetszőleges időpillanatban megfigyelhető.

23.5. **Definíció.** *Markov-lánc*nak nevezünk egy olyan diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot, amely Markov-tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeni állapota nem függ a múltbeliektől.

23.6. **Megjegyzés.** A Markov-tulajdonság azt jelenti, hogy a jelen leírása teljesen magába foglalja az összes olyan információt, ami befolyásolhatja a folyamat jövőbeli helyzetét.

23.7. **Megjegyzés.** Egy Markov-lánc időbeli viselkedését csak akkor tudjuk vizsgálni, ha ismerjük a folyamat eloszlását a 0 időpillanatban.

23.8. **Definíció.** Egy Markov-lánc $t = 0$ időpillanatbeli eloszlását *kezdeti valószínűségeloszlás*nak vagy egyszerűen *kezdeti eloszlás*nak nevezzük.

23.9. **Definíció.** Ha egy rendszer egy időperiódus alatt az i állapotból átlép a j állapotba, akkor azt mondjuk, hogy végbement egy *átmenet* az i állapotból a j állapotba. Az i állaptból a j állapotba való átmenet valószínűségét *átmeneti valószínűségnek* vagy *átmenetvalószínűség*nek nevezzük és p_{ij}-vel jelöljük.

23.10. **Definíció.** Ha egy rendszer összes átmeneteinek valószínűségeiből előállítjuk a

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrixot, akkor az így kapott mátrixot *átmenetvalószínűség mátrix*nak nevezzük.

23.11. **Példa.** A 0 időpillanatban 2 dollárom van. Az $1, 2, \ldots$ időpillanatokban 1 dollár értékű fogadásokat kötök. A fogadást p valószínűséggel megnyerem és $1-p$ valószínűséggel elveszítem, ahol $p \in [0; 1]$. A célom az, hogy a tőkémet 4 dollárra növeljem. Amint ez teljesül, a játékot befejezem. A játéknak akkor is vége, ha a tőkem 0 dollárra redukálódik. Az átmenetvalószínűségek mátrixa az alábbi lesz:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ha az állapot 0 dollár vagy 4 dollár, akkor nem játszuk tovább a játékot, így ezekből az állapotokból a rendszer már nem léphet ki, így $p_{00} = 1$, illetve $p_{44} = 1$. Minden más állapotban p valószínűséggel a következő időpillanatbeli állapothoz tartozó érték eggyel meghaladja a jelenlegi értéket, illetve $1-p$ valószínűséggel eggyel kisebb lesz a jelenlegi értéknél.

23.12. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix *sztochasztikus*, ha minden eleme nem-negatív és minden oszlopában az elemek összege 1.

23.13. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,4 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,7 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

mátrix sztochasztikus mátrix, mert minden eleme nem-negatív és az egy oszlopban lévő elemek összege 1.

23.14. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix *duplán sztochasztikus*, ha minden eleme nem-negatív és minden oszlopában és minden sorában az elemek összege 1.

23.15. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

mátrix duplán sztochasztikus mátrix.

23.16. **Tétel.** Ha egy Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixa P, akkor annak a valószínűsége, hogy az n-edik időpillanatban az i állapot a j állapotba kerül a P^n mátrix $(i; j)$ indexű eleme.

23.17. **Definíció.** Az i állapotból a j állapotba vezető *út*on olyan átmenetek sorozatát értjük, amelyek az i-ből indulnak és a j-be érkeznek és a köztes átmenetek során minden átmenetvalószínűség pozitív.

23.18. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a j állapot az i állapotból *elérhető*, ha megadható olyan út, amely az i-ből indul és a j-be érkezik.

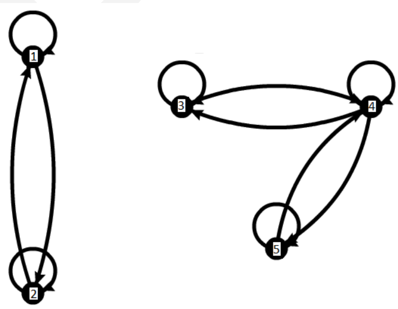
23.19. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az i és a j állapotok *kommunikálnak* egymással, ha a j állapot elérhető az i-ből és az i állapot elérhető a j-ből.

23.20. **Definíció.** Markov-lánc állapotainak egy S halmaza *zárt*, ha az S halmazon kívül egyetlen állapot sem érhető el az S halmazból.

23.21. **Példa.** Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűségi mátrixszal rendelkező Markov-láncot:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért felrajzolhatjuk az átmenetvalószínűségeket az alábbi módon:



Az 5 állapot elérhető a 3 állapotból, például a $3-4-5$ úton keresztül. A 3 és a 4 állapotok kommunikálnak, mert 3-ból 4-be is vezet út és 4-ből 3-ba is vezet út. Az

$$S_1 = \{1; 2\}$$

és az

$$S_2 = \{3; 4; 5\}$$

halmazok zártak.

23.22. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az i állapot *elnyelő*, ha $p_{ii} = 1$.

23.23. **Definíció.** Az i állapotot *tranziens*nek nevezzük, ha létezik olyan j állapot, amely elérhető i-ből, de az i állapot nem érhető el j-ből. Ha egy állapot nem tranziens, akkor *visszatérőnek* nevezzük.

23.24. **Megjegyzés.** Az i állapot tranziens, ha ki lehet olyan módon lépni az i-ből, hogy oda soha nem térünk vissza.

23.25. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az i állapot *periodikus* és a *periódus*a $k > 1$, ha k az a legkisebb pozitív egész szám, melyre az i-ből kilépő lánc visszatérési idejének hossza a k egész számú többszöröse.

23.26. **Megjegyzés.** Meg kell jegyezni, hogy attól függetlenül, hogy egy állapot periódusa k, nem jelenti azt, hogy belőle kiindulva k lépésben újra el tudjuk érni azt. Például, ha egy állapotba vissza tudunk térni 6, 8, és 10 lépésben is, akkor annak periódusa 2 lesz, annak ellenére, hogy a 2-es szám nincs a listában.

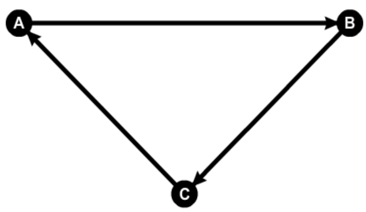
23.27. **Megjegyzés.** Az i állapot periodikus k periódussal, ha $k > 1$ a legkisebb olyan pozitív egész szám, melyre a P^k mátrix i-edik sorában minden elem 0, kivéve a p_{ii}, melynek az értéke 1.

23.28. **Definíció.** A nem periodikus állapotokat *aperiodikus*nak mondjuk.

23.29. **Példa.** Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűség mátrixszal rendelkező Markov-láncot:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A Markov-láncot szemléltető ábra:



Az összes állapot periódusa 3. Ha az A állapotból indulunk ki, akkor az A állapotba való visszatérés egyedüli útja az $A - B - C - A$ (illetve ennek bármilyen többszöröse).

23.30. **Definíció.** Ha egy Markov-láncban az összes állapot visszatérő, aperiodikus és az állapotok kommunikálnak egymással, akkor a láncot *ergodikus*nak mondjuk.

23.31. **Példa.** A

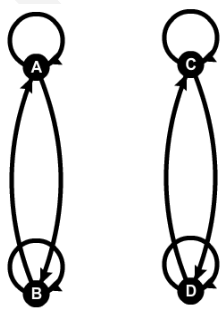
$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}.$$

átmenetvalószínűségi mátrixszal rendelkező Markov-lánc ergodikus.

23.32. **Példa.** A

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \end{array}.$$

átmenetvalószínűségi mátrixszal rendelkező Markov-lánc nem ergodikus, mivel két zárt részhalmazzal rendelkezik. Ezek az $S_1 = \{1; 2\}$ és a $S_2 = \{3; 4\}$ és a különböző osztályokban lévő állapotok nem kommunikálnak egymással. A Markov-láncot az alábbi ábra szemlélteti:



23.33. **Tétel.** (Perron-Frobenius)
Ha P az s darab állapotból álló ergodikus Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixa, akkor létezik olyan

$$\pi = (\pi_1; \pi_2; \ldots; \pi_s)$$

vektor, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{pmatrix}.$$

23.34. **Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy az előbbi tétel lényegében azt mondja, hogy hosszú idő elteltével egy Markov-lánc viselkedése „kiegyenlítődik”, és annak a valószínűsége, hogy a rendszer valamely i állapotból a j állapotba kerül, független az i kezdeti állapotától. Másképpen fogalmazva: ahogy telik az idő, a Markov-lánc elfelejti, hogy honnan indult (azaz a kezdeti eloszlását), és konvergál egy olyan mátrixhoz, melynek minden sora azonos.

23.35. **Definíció.** Az előbbi tételben szereplő π vektort *stacionárius eloszlás*nak vagy *egyensúlyi eloszlás*nak hívjuk.

23.36. **Megjegyzés.** A stacionárius eloszlást a

$$\begin{aligned} \pi &= \pi \cdot P \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

23.37. **Példa.** Egy üzemben két fajta kólát gyártanak. Ha valamely személy az A típusú kólát vette, akkor 90% valószínűséggel legközelebb is A típusút fog venni. Ha valaki B típusú kólát vett, akkor 80% valószínűséggel legközelebb is B típusú kólát fog venni. Az átmenetvalószínűség mátrix:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & \;\;B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

A stacionárius eloszlást a

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

és a $\pi_1 + \pi_2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja. Elvégezve a mátrixszorzásokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,9\pi_1 + 0,2\pi_2 &= \pi_1 \\ 0,1\pi_1 + 0,8\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenleteket átrendezve a

$$\begin{aligned} -0,1\pi_1 + 0,2\pi_2 &= 0 \\ 0,1\pi_1 - 0,2\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Vegyük észre, hogy az első és a második egyenlet ugyanaz, így közülük az egyik elhagyható. Tehát az

$$\begin{aligned} 0,1\pi_1 - 0,2\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 2\pi_2.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$3\pi_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_2 = \frac{1}{3}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

A stacionárius eloszlás tehát

$$\pi = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Ennek megfelelően hosszú idő elteltével $\frac{2}{3}$ lesz annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen választott személy az A típusú kólát fogja vásárolni és $\frac{1}{3}$ lesz annak a valószínűsége, hogy a B típusú kólát fogja vásárolni.

23.38. **Definíció.** Egy ergodikus Markov-lánc esetén jelölje m_{ij} azt a számot, hogy a folyamat az i állapotból indulva hány lépésben éri el a j állapotot. Ezt a számot a j állapot i állapotból való *átlagos elérési idejé*nek nevezzük. Speciálisan, ha $j = i$, akkor *átlagos visszatérési idő*ről beszélünk.

23.39. **Tétel.** Tekintsünk egy ergodikus Markov-láncot. Tegyük fel, hogy az i állapotban vagyunk és p_{ij} annak a valószínűsége, hogy az i állapotból átlépünk a j állapotba. Ha $k \neq j$, akkor p_{ik} valószínűséggel lépünk át a k állapotba. Ilyenkor átlagosan $1 + m_{kj}$ lépés szükséges ahhoz, hogy az i állapotból a j állapotba érjünk. Megmutatható az is, hogy

$$m_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \cdot p_{kj},$$

továbbá

$$m_{ii} = \frac{1}{\pi_i},$$

ahol π_i a Markov-lánc stacionárius eloszlásának i-edik koordinátája.

23.40. **Példa.** Egy üzemben két fajta sampont gyártanak. Ha valamely személy az A típusú sampont vette, akkor 80% valószínűséggel legközelebb is A típusút fog venni. Ha valaki B típusú sampont vett, akkor 75% valószínűséggel legközelebb is B típusú sampont fog venni. Modellezzük Markov-láncként a leírt folyamatot! Ekkor az átmenetvalószínűségi mátrix:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Az A és B állapotok visszatérőek, kommunikálnak egymással és aperiodikusak, így a Markov-lánc ergodikus.
A stacionárius eloszlást a

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

és a $\pi_1 + \pi_2 = 1$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása adja. Elvégezve a mátrixszorzásokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0,8\pi_1 + 0,3\pi_2 &= \pi_1 \\ 0,2\pi_1 + 0,7\pi_2 &= \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

Az egyenleteket átrendezve a

$$\begin{aligned} -0,2\pi_1 + 0,3\pi_2 &= 0 \\ 0,2\pi_1 - 0,3\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Vegyük észre, hogy az első és a második egyenlet ugyanaz, így közülük az egyik elhagyható. Tehát az

$$\begin{aligned} 0,2\pi_1 - 0,3\pi_2 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1. \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 1,5\pi_2.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$2,5\pi_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_2 = 0,4$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\pi_1 = 1,5 \cdot 0,4 = 0,6.$$

A stacionárius eloszlás tehát

$$\pi = (0,6; 0,4)\,,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P^n = (0,6; 0,4).$$

Hosszú távon tehát azt kapjuk, hogy az A terméket a vásárlók 60%-a, a B terméket a vásárlók 50%-a fogja választani.
Az átlagos visszatérési idők:

$$m_{11} = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{3} \approx 3,3;$$
$$m_{22} = \frac{1}{0,4} = \frac{10}{4} = 2,5.$$

Az átlagos elérési időket az

$$m_{12} = 1 + p_{11} \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + p_{22} \cdot m_{21}.$$

egyenletrendszer megoldása adja. Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 1 + 0,8 \cdot m_{12}$$
$$m_{21} = 1 + 0,7 \cdot m_{21}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$m_{12} = 5,$$

míg a második egyenletből

$$m_{21} = \frac{10}{3}$$

adódik. A kapott eredmény azt jelent, hogy egy olyan személy, aki először az A típusú sampont vásárolta, átlagosan 5 doboz ilyen sampont fog megvenni, mielőtt a B típusú sampon vásárlására térne át.

Ellenőrző kérdések

1. Az időben véletlenszerűen változó folyamatokat .... folyamatoknak nevezzük.
2. Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat ...., ha a vizsgált időpillanatok száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
3. Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat ...., ha a folyamat állapota nemcsak diszkrét időpillanatokban, hanem tetszőleges időpillanatban megfigyelhető.
4. ....nak nevezünk egy olyan diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot, amely esetén adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeni állapota nem függ a múltbeliektől.
5. Az i állaptból a j állapotba való átmenet valószínűségét ....nek nevezzük.
6. Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix ...., ha minden eleme nemnegatív és minden oszlopában az elemek összege 1.
7. Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix ...., ha minden eleme nemnegatív és minden oszlopában és minden sorában az elemek összege 1.
8. Azt mondjuk, hogy a j állapot az i állapotból ...., ha megadható olyan út, amely az i-ből indul és a j-be érkezik.
9. Azt mondjuk, hogy az i és a j állapotok ...., ha a j állapot elérhető az i-ből és az i állapot elérhető a j-ből.
10. Markov-lánc állapotainak egy S halmaza ...., ha az S halmazon kívül egyetlen állapot sem érhető el az S halmazból.
11. Azt mmondjuk, hogy az i állapot .... és a .... k, ha ahhoz, hogy i állapotból az i állapotba visszatérjünk, k-nak valamely többszörös darabszámú lépésre van szükség.
12. Ha egy Markov-láncban az összes állapot visszatérő, aperiodikus és az állapotok kommunikálnak egymással, akkor a láncot ....nak mondjuk.
13. Egy ergodikus Markov-lánc esetén azt a számot, hogy a folyamat az i állapotból indulva hány lépésben éri el a j állapotot ....nek nevezzük. Speciálisan, ha $j = i$, akkor ....ről beszélünk.

24. Populációk modellezése Leslie-mátrixokkal

24.1. **Elméleti összefoglaló.** Egy populációt korcsoportokra osztunk és a populáció nőstényekből álló részhalmazát vizsgáljuk.

A populáció egyedeinek számát szeretnénk meghatározni az idő függvényében. Ehhez elsőként rögzíteni kell a korcsoportok számát. A szaporodásról, valamint az elhalálozásról feltételezzük, hogy korcsoport függő és lineáris függvénye az egyedszámnak.

*Szaporodási rátá*nak (b_i) nevezzük az utódszám és a korcsoportbeli egyedek számának hányadosát az i-edik korcsoportban.

*Túlélési rátá*nak (p_i) nevezzük a túlélt egyedek számának és a korcsoportbeli egyedek számának hányadosát az i-edik korcsoportban.

Az egyes korcsoportokat jelölje $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Az ezen koordinátákkal rendelkező

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

vektort *korcsoport vektor*nak nevezzük.

Az egyedszám változását (az idő függvényében) modellünk szerint az alábbi lineáris egyenletrendszer írja le:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= b_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot x_2(t) + \ldots + b_n \cdot x_n(t) \\ x_2(t+1) &= p_1 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= p_2 \cdot x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n(t+1) &= p_{n-1} \cdot x_{n-1}(t). \end{aligned}$$

A kapott lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

amelyet *Leslie-mátrix*nak nevezünk. Ezen mátrix bevezetésével az előbbi lineáris egyenletrendszer az

$$x(t+1) = L \cdot x(t)$$

tömörebb formában írható fel.

A k-adik év után a populáció korcsoporteloszlása

$$x(t+k) = L^k \cdot x(t).$$

A populációt *stabil korcsoporteloszlású*nak nevezzük, ha valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$x(t+1) = \lambda \cdot x(t),$$

vagyis az egyes korcsoportbeli egyedek számának aránya az időben nem változik. Ekkor az egyedszám egy generációnyi idő alatt λ-szorosára változik, tehát λ a populáción növekedési rátája. Ebben az esetben

$$L \cdot x(t) = x(t+1) = \lambda \cdot x(t),$$

Tehát

$$L \cdot x(t) = \lambda \cdot x(t),$$

ami azt jelenti, hogy λ az L mátrixszal reprezentált lineáris transzformáció sajátértéke és $x(t)$ egy, a λ-hoz tartozó sajátvektor.

Ha minden sajátérték abszolútértékben azonos értékű, akkor a populáció hosszú távú korcsoporteloszlásáról nem rendelkezünk infoemációval a modellünk alapján. Amennyiben valamelyik sajátérték abszolútértékben nagyobb, mint a többi, úgy az abszolútértékben legnagyobb sajátérték segítségével becsülhetjük a populáció (távoli) jövőbeli korcsoporteloszlását.

A stabil kor(csoport)eloszlású populáció $\lambda > 1$ esetén nő, $\lambda < 1$ esetén csökken az idő függvényében. *Egyensúlyi populáció*ról beszélünk, ha a korcsoportvektor az időben változatlan. Ez stabil korcsoport eloszlást jelent $\lambda = 1$ növekedési rátával.

24.2. **Megjegyzés.** Három korcsoport esetén a korcsoportvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

A matematikai modell:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= b_1 \cdot x_1(t) + b_2 \cdot x_2(t) + b_3 \cdot x_3(3) \\ x_2(t+1) &= p_1 \cdot x_1(t) \\ x_3(t+1) &= p_2 \cdot x_2(t). \end{aligned}$$

A Leslie-mátrix:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

24.3. **Példa.** Egy adott halfajta egyedei legfeljebb 3 évig élnek és 3 korcsoportba osztjuk őket. Egy nőstény hal átlagosan 500 olyan ikrát rak, amely megéli az első életévét. Az egyéves halak 5%-a éli meg a második életévét. A kétéves halak 10%-a éli meg a harmadik életévet. A vizsgált halfajták az első két évben még nem szaporodóképesek.

A populáció Leslie-mátrixa:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 500 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha kezdetben minden korcsoportban 100 nőstény volt, akkor 1 év múlva a korcsoporteloszlás

$$L \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 500 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

A korcsoporteloszlás 2 év múlva:

$$L \cdot \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 500 \\ 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50\,000 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,000 \\ 2\,500 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

24.4. **Tétel.** A korábbi jelölések felhasználásával, három korcsoport esetén a Leslie-féle modellben, ha csak az utolsó korcsoport egyedei szaporodóképesek, akkor a Leslie-mátrix egyetlen sajátértéke:

$$\lambda = \sqrt[3]{b_3 \cdot p_1 \cdot p_2}.$$

Bizonyítás: Három korcsoport esetén a Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ha csak az utolsó korcsoport egyedei szaporodóképesek, akkor $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$, így a Leslie-mátrix:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A sajátértékek a

$$\det(L - \lambda \cdot E) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. A karakterisztikus polinom:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ p_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & p_2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + b_1 \cdot p_1 \cdot p_2.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$-\lambda^3 + b_1 \cdot p_1 \cdot p_2 = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \sqrt[3]{b_1 \cdot p_1 \cdot p_2} = 0,$$

amivel bizonyítottuk az állítást. ■

Ellenőrző kérdések

1. Egy n darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa: ....
2. Két darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa: ....
3. Három darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa: ....

25. Az ellenőrző kérdések megoldása

Alapműveletek mátrixokkal

1. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix típusa: 2×3 .

2. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix típusa: 3×3.

3. Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix a_{33} eleme: 0.

4. Az $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix a_{12} eleme: 3.

5. Két mátrix csak akkor adható össze, ha azonos típusúak.

6. Egy $m \times n$ típusú mátrix csak $m \times n$ típusú mátrixszal adható össze.

7. Egy mátrix transzponáltja: a mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrix.

8. Egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja $n \times m$ típusú.

9. Egy $4 \times k$ és egy $k \times 6$ típusú mátrix szorzata 4×6 típusú.

10. A mátrixok összeadása kommutatív-e?
    Igen kommutatív, azaz $A + B = B + A$.

11. A mátrixok szorzása kommutatív-e?
    Nem kommutatív, azaz $A \cdot B \neq B \cdot A$.

12. A 2×2 típusú egységmátrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. A 3×2 típusú egységmátrix:
    nem létezik, mert egységmátrix csak négyzetes mátrix lehet.

14. A 2×4 típusú zérusmátrix: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. Ha az $m \times n$ típusú A mátrix kvadratikus, akkor $m = n$.

16. Igaz-e, hogy egy mátrix és a transzponáltja mindig összeszorozható? Igen, mert ilyenkor az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával.
17. Ha A tetszőleges $m \times n$-es mátrix, akkor milyen nevezetes tulajdonsággal rendelkezik az $A \cdot A^T$ mátrix? Szimmetrikus mátrix.
18. Ha A és B olyan mátrixok, hogy $A \cdot B$ létezik, akkor $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
19. Ha A és B olyan mátrixok, hogy $A + B$ létezik, akkor $(A + B)^T = A^T + B^T$.
20. Egy mátrix transzponáltjának a transzponáltja: az eredeti mátrix
21. A B mátrix az A mátrix inverze, ha teljesül, hogy $A \cdot B = B \cdot A = E_n$, ahol E_n az n-edrendű egységmátrix.
22. Az A mátrix szimmetrikus, ha $A^T = A$.
23. Az A mátrix ferdén szimmetrikus, ha $A^T = -A$.
24. Az A mátrix ortogonális, ha $A^T = A^{-1}$.

Mátrixok alapműveleteinek gazdasági alkalmazásai

1. Mit nevezünk szállítási mátrixnak? A szállítási mátrixot olyan esetekben készítik el, ha több raktárban tárolnak termékeket és ezeket több rendeltetési helyre kell kiszállítani. A mátrixban a fajlagos költségeket tűntetik fel azaz azt, hogy az áru egy egységének elszállítása mennyibe kerül.
2. Mit nevezünk technológiai mátrixnak? Tekintsünk egy üzemet, amely különböző termékeket állít elő, és a termékek előállításához különféle nyersanyagok szükségesek. Ha ezeket az adatokat táblázatba fogalaljuk, akkor az így kapott mátrixot technológiai mátrixnak nevezzük.

Mátrixok determinánsa és inverze

1. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa: $a \cdot d - b \cdot c$.
2. Az $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsa: $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$.

3. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverze: $\dfrac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

4. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverze: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix inverzének b_{12} eleme: $\dfrac{-b}{a \cdot d - b \cdot c}$.

6. Az $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzének b_{21} eleme: $\dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$.

7. Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem zérus.

8. Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a determinánsa előjelet vált, azaz a -1-szeresére változik.

9. Ha egy mátrix két oszlopát felcseréljük, akkor a determinánsa előjelet vált, azaz a -1-szeresére változik.

10. Felső háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

11. Alsó háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

12. Diagonális mátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

13. Az n-edrendű egységmátrix determinánsa 1.

14. Az $n \times n$ típusú zérusmátrix determinánsa 0.

15. Két mátrix szorzatának a determinánsa megegyezik a tényezők determinánsainak szorzatával.

16. Ha az A mátrix invertálható, akkor $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

17. Ha az A mátrix kvadratikus, akkor $\det(A^T) = \det A$.

18. Egy mátrix reguláris, ha a determinánsa nem zérus.

19. Egy mátrix szinguláris, ha a determinánsa zérus.

20. Ha az A mátrix invertálható, akkor $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$.

21. Ha A és B olyan mátrix, amelyekre $A \cdot B$ létezik, továbbá $\det A = 5$ és $\det B = 3$, akkor $\det(A \cdot B) = 5 \cdot 3 = 15$.

22. Ortogonális mátrix determinánsa: $+1$ vagy -1.

23. A 2×2-es Vandermonde-mátrix és determinánsa:

$$V(x;y) = \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = (y-x).$$

24. A 3×3-es Vandermonde-mátrix és determinánsa:

$$V(x;y;z) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} = (y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y).$$

Titkosírás mátrixokkal

1. Mit nevezünk titkosított szövegnek? A titkosítandó szöveget vagy üzenetet nyílt szövegnek nevezzük. Maga a titkosító eljárás egy algoritmus, amely a nyílt szöveget egy másik szöveggé alakítja. Az utóbbi szöveget nevezzük titkosított szövegnek.
2. Mit nevezünk kódolásnak? Az algoritmus alkalmazása a nyílt szövegre a kódolás vagy rejtjelezés.
3. Mit nevezünk dekódolásnak? Azt az eljárást, amelynek során visszanyerjük a nyílt szöveget a kódolt szövegből, dekódolásnak nevezzük.

Leontief-féle modell

1. Mit nevezünk ráfordítási mátrixnak? Ráfordítási mátrixnak nevezzük azt a mátrixot, melynek a_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i-edik ágazat termelt értékéből mennyi szükséges a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez.
2. Mit nevezünk Leontief-inverznek? Ha A egy ráfordítási mátrix, akkor az $(E-A)^{-1}$ mátrixot Leontief-inverznek nevezzük.
3. Mi produktivitás feltétele? Egy gazdaság akkor és csak akkor produktív, ha létezik a Leontief-inverz és annak minden eleme nemnegatív.

Vektorterek, mátrix rangja

1. Azt mondjuk, hogy az a_1, a_2, $\ldots$, a_n vektorok lineárisan függetlenek, ha a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítja elő.
2. Az a_1 és a_2 vektorok lineárisan függetlenek, ha nem egy egyenesre illeszkednek.

3. Az $\mathbb{R}^2$ vektortér természetes bázisvektorai: $i = (1; 0)$ és $j = (0; 1)$.

4. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér természetes bázisvektorai: $i = (1; 0; 0)$, $j = (0; 1; 0)$ és $k = (0; 0; 1)$.

5. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: 2.

6. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: 3.

7. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: 1.

8. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix rangja: 2.

9. Állítsuk elő az $(a; b)$ vektort az $\mathbb{R}^2$ vektortér természetes bázisvektorainak lineáris kombinációjaként! Az előállítás: $a \cdot i + b \cdot j$.

10. Állítsuk elő az $(a; b; c)$ vektort az $\mathbb{R}^3$ vektortér természetes bázisvektorainak lineáris kombinációjaként! Az előállítás: $a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k$.

11. Egy n-edrendű kvadratikus mátrix rangja pontosan akkor n, ha a determinánsa nem zérus.

12. Lineárisan függetlenek-e az $a_1 = (1; 3)$ és $a_2 = (2; 6)$ vektorok? Nem, mert egy egyenesre illeszkednek.

13. Lineárisan függetlenek-e az $a_1 = (1; 2)$ és $a_2 = (2; -3)$ vektorok? Igen, mert nem egy egyenesre illeszkednek.

14. Lehet-e bázisa az $\mathbb{R}^2$ koordinátasíknak az
$$a_1 = (1; 2),\ a_2 = (3; 4),\ a_3 = (0; 1)$$
vektorrendszer? Nem lehet, mert a két dimenziós vektortérben 3 vektor mindig lineárisan függő.

15. Egy 3 dimenzós vektortérben egy 4 elemű vektorrendszer lineárisan függő.

16. Egy 2 dimenzós vektortérben egy 3 elemű vektorrendszer lineárisan függő.

17. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha a sorvektorai lineárisan függő vektorok.

18. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan függő vektorok.

19. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha a sorvektorai lineárisan független vektorok.

20. Egy n-edrendű mátrix determinánsa pontosan akkor nem nulla, ha az oszlopvektorai lineárisan független vektorok.

Lineáris egyenletrendszerek megoldása

1. Az

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

lineáris egyenelterendszer alapmátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Az

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

lineáris egyenelterendszer kibővített mátrixa: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$.

3. Az

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

lineáris egyenelterendszer mátrixos alakja:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. Ha egy lineáris egyenletrendszer határozott, akkor a megoldásainak száma 1, azaz a megoldás egyértelmű.

5. Ha egy lineáris egyenletrendszer határozatlan, akkor a megoldásainak száma végtelen.

6. Ha az

$$x + y = b_1$$
$$x - y = b_2$$

lineáris egyenelterendszer homogén, akkor: $b_1 = 0$ és $b_2 = 0$

7. A Cramer-szabály akkor alkalmazható, ha a lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem zérus.

8. Az inverzmátrix módszer akkor alkalmazható, ha a lineáris egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem zérus.
9. Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának és kibővített mátrixának rangja 3 és az ismeretlenek száma 5, akkor a szabad paraméterek száma: 2.

10. Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixának és kibővített mátrixának rangja 10 és az ismeretlenek száma 15, akkor a szabad paraméterek száma: 5.

11. Ha egy 5 egyenletből álló 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldható, és a megoldása egyértelmű, akkor az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem zérus.

12. Ha egy 5 egyenletből álló 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldható, és a megoldása egyértelmű, akkor az egyenletrendszer oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer lineárisan független.

Számítások egyenáramú hálózatokban

1. Mit nevezünk csomópontnak? A csomópont a hálózat olyan pontja, amelybe legalább három vezeték fut be.

2. Mit nevezünk ágnak? Az ág két csomópontot összekötő vezetékszakasz, amely végpontjain kívül nem tartalmaz csomópontot.

3. Mit nevezünk huroknak? A hurok olyan vezetékszakasz, amelynek mindkét végpontja ugyanaz a pont.

4. Mit mond ki Kirchhoff első törvénye? Bármely csomópont esetén a befolyó és elfolyó áramok előjeles összege zérus. Előjelszabály: a befolyó áramokat pozitívan, a elfolyókat negatívan előjelezzük.

5. Mit mond ki Kirchhoff második törvénye? Bármely hurok mentén körbehaladva, a feszültségesések előjeles összege zérus. Előjelszabály: a hálózat minden hurkához önkényesen hozzárendelünk egy körüljárási irányt és minden ágához egy áramirányt.

Kémiai reakcióegyenletek

1. Mit mond a tömegmegmaradás törvénye? A kémiai egyenletek két oldalán az egyes elemek elemi vagy kötött állapotban lévő atomjainak száma és így a két oldal tömege is megegyezik.
2. Írja fel a $x_1 \cdot H_2 + x_2 \cdot O_2 \rightarrow x_3 \cdot H_2O$ egyenletnek megfelelő lineáris egyenletrendszert! $x_1 = x_3$; $2x_2 = x_3$

Lineáris egyenletrendszerek további alkalmazásai

1. Soroljunk fel legalább három olyan tudományterületet, ahol alkalmazhatóak a lineáris egyenletrendszerek! Fizika, kémia, biológia, közgazdaságtan.
2. Adjuk meg olyan geometriai feladatot, amelynek megoldása lineáris egyenletrendszerre vezet! Mekkorák annak a háromszögnek az oldalai, amelyben két-két oldal összege rendre 26, 32 és 34 cm.

Formula mátrix, sztöchiometriai mátrix

1. Mit nevezünk elemi kémiai reakciónak? Ha a reakció során nincs köztes termék.
2. Mit nevezünk összetett kémiai reakciónak? Ha a reakció során van legalább egy köztes termék.
3. Mit nevezünk formulamátrixnak? Ha egy kémiai reakció összetett, azaz több elemi reakcióból áll, akkor előállíthatjuk az formula mátrixot úgy, hogy a mátrix sorai (az utolsó kivételével) az egyes kémiai elemeknek felelnek meg, míg a mátrix utolsó sora a töltéseket mutatja. A mátrix egyes oszlopai az egyes vegyületeknek felelnek meg.
4. Mit nevezünk sztöchimetriai mátrixnak? Ha ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot sztöchiometriai mátrix segítségével írhatjuk le. Ennek oszlopai a reakciókhoz, sorai pedig a reakciókban szereplő vegyületekhez tartoznak. Az i-edik sorban, j-edik oszlopban álló szám a j-edik reakció 0-ra rendezett egyenletében az i-edik vegyület mennyisége.

5. Milyen kapcsolat van a formula mátrix rangja és a független kémiai reakciók száma között? A formula mátrix rangja megegyezik a független kémiai reakciók számával.

6. Milyen kapcsolat van a sztöchiometriai mátrix rangja és a független kémiai reakciók száma között? A sztöchiometriai mátrix rangja megegyezik a független kémiai reakciók számával.

Parciális törtekre bontás

1. Milyen alakú törteket nevezünk parciális törteknek? Legyenek A, B és C valós számok, $n \in \mathbb{N}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$. Az $\frac{A}{(x-x)^n}$ és a $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ alakú törteket, ahol $p^2-4q<0$ (azaz az x^2+px+q másodfokú polinomnak nincs valós gyöke) parciális törteknek nevezzük.

2. Parciális tört-e a $\frac{3}{x^2-4}$ tört?
   Nem, mert $\frac{3}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$.

3. Parciális tört-e a $\frac{3}{x^2+4}$ tört? Igen, mert az x^2+4 nem bontható fel elsőfokú polinomok szorzatára.

4. Parciális tört-e a $\frac{x+1}{x^2-9}$ tört? Nem, mert $\frac{x+1}{x^2-9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$.

5. Parciális tört-e a $\frac{x+1}{x^2+9}$ tört? Igen, mert az x^2+9 nem bontható fel elsőfokú polinomok szorzatára.

6. Parciális tört-e a $\frac{x^2+1}{x^2+9}$ tört? Nem, mert a nevező nem kisebb fokszámú, mint a számláló.

Mátrixok alkalmazása a koordinátageomatriában

1. Hogyan adhatjuk meg determinánssal két ponton áthaladó síkbeli egyenes egyenletét?
   Az $A=(x_1;y_1)$ és $B=(x_2;y_2)$ pontokon áthaladó egyenes egyenlete:
   $$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

2. Hogyan adhatjuk meg determinánssal egy síkbeli háromszög területét, ha ismerjük a háromszög három csúcsát?
   Az $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$ és $C = (x_3; y_3)$ csúcsokkal rendelkező háromszög területe az $\frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$ érték abszolútértéke.
3. Egy erő forgató hatását annak forgatónyomatékával jellemezzük. A forgatónyomatékot megadhatjuk egy pontra vagy egy tengelyre vonatkozóan.

4. Mit nevezünk pontra vonatkozó forgatónyomatéknak?
   $\underset{O}{M} = r_{OP} \times F$, ahol r_{OP} az O vonatkoztatási pontból az erő P támadáspontjába mutató helyvektor.
5. Mit nevezünk tengelyre vonatkozó forgatónyomatéknak?
   $M_e = \underset{O}{M} \bullet e$
6. Merev test egyensúlyának feltételei: A testre ható eredő erő zérus és a testre ható eredő forgatónyomaték a tér egy tetszőleges O pontjára vonatkozóan zérus.

Lagrange interpoláció

1. Mit nevezünk n-edfokú polinomfüggvénynek?
   Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n$ olyan valós számok, hogy $a_n \neq 0$. Ekkor a
   $$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$
   függvényt n-edfokú polinomfüggvénynek nevezzük.
2. Mit nevezünk Lagrange-interpolációs polinomnak?
   Legyenek $(x_1; y_1), (x_2; y_2, \ldots, (x_n; y_n)$ koordinátarendszerbeli pontok. Ekkor egyértelműen létezik olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, melynek grafikonja illeszkedik az adott pontokra. Ezt a polinomot Lagrange-féle interpolációs polinomnak nevezzük
3. Az $(1; 2)$ és $(2; 4)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinom:
   $y = 2x$.
4. Az $(1; 4)$ és $(-2; 3)$ pontokra illeszkedő Lagrange-interpolációs polinom:
   $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

Legkisebb négyzetek módszere

1. Mire alkalmazható a legkisebb négyzetek módszere?
A legkisebb négyzetek módszerét széles körben alkalmazzák mérési adatokból álló pontsorozatok közelítésére.
2. Mit nevezünk Gauss-féle normál egyenletrendszernek? $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot f$
3. Lineáris regresszión azt értjük, amikor: a közelítést elsőfokú polinommal végezzük.
4. Lineáris regresszió esetén a megoldandó lineáris egyenletrendszer alapmátrixa:
$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$$
.

Lineáris leképezések

1. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris, ha additív és homogén.
2. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés additív, ha $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
3. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés homogén, ha $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.
4. Ha az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés lineáris, akkor $f(0) = 0$.
5. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció esetén v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha
$A \cdot v = \lambda \cdot v$.
6. Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha létezik a sajátvektorokból álló bázis.
7. A síkon az origó körüli pozitív irányú 90°-os szöggel való forgatás mátrixa:
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
8. A síkon az origó körüli pozitív irányú 30°-os szöggel való forgatás mátrixa:
$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

9. A síkon az origó körüli pozitív irányú $45°$-os szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

10. A síkon az origó körüli pozitív irányú $60°$-os szöggel való forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

11. A síkon az x-tengelyre való tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

12. A síkon az y-tengelyre való tükrözés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Az A és a B mátrixok hasonlóak, ha
létezik olyan S invertálható mátrix, hogy $S^{-1} \cdot A \cdot S = B$.

14. Ha az $f\colon X \to Y$ lineáris leképzés lineáris transzformáció, akkor
$X = Y$.

15. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f + g$ mátrixa: $A + B$.

16. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f - g$ mátrixa: $A - B$.

17. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A és a g lineáris leképezés mátrixa B, akkor $f \circ g$ mátrixa: $A \cdot B$.

18. Ha az f lineáris leképezés mátrixa A, akkor $2f$ mátrixa: $2 \cdot A$.

19. A térben az x-tengelyre való tükrözés mátrixa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

20. Ha $f\colon X \to Y$ lineáris leképezés, akkor
$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rang}(f) = \dim X.$$

Feszültségi mátrix

1. Feszültségi tenzor egy $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris függvény, amely az n normálisokhoz a ρ_n feszültségvektorokat rendeli, azaz amelyet az $T(n) = \rho_n$ összefüggés definiál.
2. Feszültségi mátrix a feszültségi tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa.
3. A főfeszültségek a feszültségi mátrix sajátértékei.
4. A főirányok a feszültségi mátrix sajátvektorai.

Alakváltozási mátrix

1. Alakváltozási tenzor: egy $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris függvény, amely az n irányokhoz az α_n alakváltozási vektorokat rendeli.
2. Alakváltozási mátrix: az alakváltozási tenzornak valamely konkrét koordinátarendszerre (bázisra) vonatkozó mátrixa.
3. A főnyúlások az alakváltozási mátrix sajátértékei.
4. Az alakváltozási főirányok az alakváltozási mátrix sajátvektorai.

Kvadratikus függvények

1. Kvadratikus függvénynek nevezzük az $x^T \cdot A \cdot x$ leképezési szabállyal definiált függvényt.
2. A $Q(x_1; x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2$ kvadratikus függvény mátrixa:
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. A $Q(x)$ kvadratikus függvény pozitív definit, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) > 0$.
4. A $Q(x)$ kvadratikus függvény negatív definit, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) < 0$.
5. A $Q(x)$ kvadratikus függvény pozitív szemidefinit, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) \geq 0$ és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$.
6. A $Q(x)$ kvadratikus függvény negatív szemidefinit, ha minden $x \neq 0$ esetén $Q(x) \leq 0$ és van olyan $x \neq 0$, hogy $Q(x) = 0$.
7. A $Q(x)$ kvadratikus függvény indefinit, ha $Q(x)$ pozitív és negatív értéket is felvesz.
8. Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix bal felső sarok minor determinánsai: $D_1 = 1$ és $D_2 = 4 - 9 = -5$.
9. Az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit.
10. Ha egy kvadratikus függvény kanonikus alakú, akkor az alakja az alábbi:
$$Q(x_1; x_2; \ldots; x_n) = c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 + \ldots + c_n \cdot x_n^2$$
11. Az $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix negatív definit.

Másodrendű görbék

1. Egy másodrendű görbe általános alakja:
$$a_1 \cdot x_1^2 + b_1 \cdot x_1 x_2 + c_1 \cdot x_2^2 + d_1 \cdot x_1 + e_1 \cdot x_2 + f_1 = 0.$$
2. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa pozitív, akkor a másodrendű görbe ellipszis.
3. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa negatív, akkor a másodrendű görbe hiperbola.
4. Ha egy másodrendű görbe mátrixának determinánsa zérus, akkor a másodrendű görbe parabola.

Rekurzív sorozatok

1. Írjuk fel mátrixszorzatos alakban az

$$a_0 = 4;$$
$$a_1 = 6;$$
$$a_n = 2a_{n-2} + 4a_{n-1} \; (n > 1)$$

rekurziót!

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

2. Írjuk fel mátrixszorzatos alakban az

$$a_0 = 2;$$
$$a_1 = 6;$$
$$a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-1} \; (n > 1)$$

rekurziót!

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Polinomok stabilitása

1. A

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

polinom stabil, ha $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$, ahol $\lambda_i \; (i = 1, \ldots, n)$ a polinom gyökei.

2. A

$$P(\lambda) = a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

polinom együtthatóiból képzett Hurwitz mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$$

.

3. A
$$P(\lambda) = a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$
polinom együtthatóiból képzett Hurwitz mátrix:
$$\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

4. Routh-Hurwitz kritérium: A
$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$$
polinom pontosan akkor stabil, ha az
$$\frac{a_0}{a_n} > 0; \quad \frac{a_1}{a_n} > 0; \ldots; \frac{a_{n-1}}{a_n} > 0;$$
és a polinom együtthatóiból képzett Hurwitz-mátrix pozitív definit.

Sztochasztikus- és átmenetmátrixok

1. Az időben véletlenszerűen változó folyamatokat sztochasztikus folyamatoknak nevezzük.
2. Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat diszkrét, ha a vizsgált időpillanatok száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen.
3. Azt mondjuk, hogy egy sztochasztikus folyamat folytonos, ha a folyamat állapota nemcsak diszkrét időpillanatokban, hanem tetszőleges időpillanatban megfigyelhető.
4. Markov-láncnak nevezünk egy olyan diszkrét idejű sztochasztikus folyamatot, amely esetén adott jelenbeli állapot mellett, a rendszer jövőbeni állapota nem függ a múltbeliektől.
5. Az i állaptból a j állapotba való átmenet valószínűségét átmenetvalószínűségnek nevezzük.
6. Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix sztochasztikus, ha minden eleme nem-negatív és minden oszlopában az elemek összege 1.
7. Azt mondjuk, hogy egy négyzetes mátrix duplán sztochasztikus, ha minden eleme nem-negatív és minden oszlopában és minden sorában az elemek összege 1.

8. Azt mondjuk, hogy a j állapot az i állapotból elérhető, ha megadható olyan út, amely az i-ből indul és a j-be érkezik.
9. Azt mondjuk, hogy az i és a j állapotok kommunikálnak egymással, ha a j állapot elérhető az i-ből és az i állapot elérhető a j-ből.
10. Markov-lánc állapotainak egy S halmaza zárt, ha az S halmazon kívül egyetlen állapot sem érhető el az S halmazból.
11. Azt mmondjuk, hogy az i állapot periodikus és a periódusa k, ha ahhoz, hogy i állapotból az i állapotba visszatérjünk, k-nak valamely többszörös darabszámú lépésre van szükség.
12. Ha egy Markov-láncban az összes állapot visszatérő, aperiodikus és az állapotok kommunikálnak egymással, akkor a láncot ergodikusnak mondjuk.
13. Egy ergodikus Markov-lánc esetén azt a számot, hogy a folyamat az i állapotból indulva hány lépésben éri el a j állapotot átlagos elérési idejének nevezzük. Speciálisan, ha $j = i$, akkor átlagos visszatérési időről beszélünk.

Populációk modellezése Leslie-mátrixokkal

1. Egy n darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa:
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Két darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa:
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Három darab korcsoportból álló populáció Leslie-mátrixa:
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Irodalomjegyzék

[1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[2] Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten (feladatgyűjtemény)*, Műszaki Kiadó, 2006.

[3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Bárczy Barnabás, *Differenciálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1994.

[5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[6] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.

[7] Bogya Norbert: Leontief-féle input-output modell, Szegedi Egyetem, http://www.math.u-szeged.hu/ nbogya/linalgk1011II/leontief.pdf

[8] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[9] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[10] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.

[11] Farkas István, *Differenciálszámítás gyakorlati jegyzet*, Debreceni Egyetem, 2005.

[12] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2014.

[13] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.

[14] Gáspár Csaba, *Lineáris algebra és többváltozós függvények*, Széchenyi István Egyetem, 2012.

[15] Dr. Gerőcs László – Juhász István – Orosz Gyula – Paróczay József – Számadó László – Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[16] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.

[17] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[18] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*,
http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[19] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[20] Kalinszky Sánor – Kuruczné Kovács Márta – Szilágyi György, *Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2000.
[21] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2016.
[22] Kézi Csaba Gábor, *Differenciálszámítás és alkalmazásai feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2016.
[23] Kézi Csaba Gábor, *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.
[24] Kézi Csaba Gábor, *Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba feladatgyűjtemény*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.
[25] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf, 2011.
[26] Kozák Imre – Szeidl György, *Fejezetek a szilárdságtanból*, elektronikus jegyzet, $http : //www.mech.uni - miskolc.hu/\ bertoti/docs/FSz.pdf$, 2012.
[27] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005
[28] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.
[29] Kossa Attila, *Főfeszültségek számítása*, BME, Műszaki Mechanika Tanszék, elektronikus oktatásai segédanyag, 2012.
[30] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
[31] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei, 11 – 12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.
[32] Kupán Pál, *Lineáris algebra jegyzet*, elektronikus jegyzet, 2017.
[33] Leitold Adrien, *Lineáris algebra példatár mérnök informatikusoknak*, Typotex, 2011.
[34] Lengyel Csilla Mária, *Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei*, ELTE, szakdolgozat, 2012.
[35] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
[36] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
[37] Nagy Tamás, *Vektorok és mátrixok*, Miskolci Egyetem, elektronikus jegyzet, 2012.
[38] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv, *The experience of teaching engineering mathematics*, Economica **4**, 19-23, 2011.
[39] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv, *Engineering applications in the teaching of mathematics II.*, Debreceni műszaki közlemények, 57-60, 2013.
[40] Nándori Frigyes – Szirbik Sándor, *Statika oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére*, Mechanikai Tanszék, Miskolc-Egyetemváros, 2008.
[41] Obádovics J. Gyula, *Lineáris algebra példákkal*, Scolar Kiadó, 2001.
[42] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán, *Felsőbb matematika*, Scolar Kiadó, 1999.
[43] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.
[44] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
[45] Salamon Júlia, *Markov-láncok*, elektronikus segédanyag, http://www.emte.siculorum.ro/ salamonjulia/, 2017.
[46] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.

[47] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.

[48] Jude Thaddeus Socrates, *A portrait of linear algebra*, Kendall Hunt Publishing Company, 2016.

[49] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[50] Székely Károly, *Romániai matematikai érettségi mintafeladatok*, elektronikus tananyag, $http : //szekelykaroly.ro/fileok/d_m t2_s ii_0 05_l m.pdf$, 2009.

[51] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[52] Szíki Gusztáv Áron – Nagyné Kondor Rita – Kézi Csaba Gábor, *Matematikai eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2017.

[53] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.

[54] Tasi Gyula, *Matematikai kémia*, JATEPress, 2017.

[55] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

[56] Vincze Szilvia, *Gazdasági matematika II.*, elektronikus segédanyag, http://docs.wixstatic.com, 2017.

[57] Vincze Szilvia, *Matematika II.*, elektronikus segédanyag, http://docs.wixstatic.com, 2017.

[58] Wayne L. Winstone, *Operációkutatás*, Aula Kiadó, 2003

[59] Wettl Ferenc, *Lineáris algebra*, elektronikus segédanyag, http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/14.pdf, 2011.

[60] Wettl Ferenc, *A lineáris algebra alkalmazásai*, elektronikus segédanyag, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0064.html, 2014.

Tartalomjegyzék