Szakdolgozat

Béres Beáta

Debrecen
2009.

Debreceni Egyetem

Matematikai Intézet

Galois élete és munkássága

Témavezető:
Dr. Bessenyei Mihály
Egyetemi Adjunktus

Készítette:
Béres Beáta
Matematika

Debrecen

2009.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Bessenyei Mihálynak a dolgozat megírásához nyújtott segítségéért és tanácsaiért.

1. ábra. Evariste Galois (1811-1832)

„1830-ban egy új csillag tűnt fel a tiszta matematika egén, nem sejtett ragyogással, akárcsak egy meteor, hogy hamarosan kialudjon: Evariste Galois."

Felix Klein

0.1. Bevezetés A szakdolgozat Evariste Galois[7] életét és munkásságát mutatja be három fejezeten keresztül. Az első Galois életéből négy anekdotát, a második életrajzát, a harmadik pedig a róla elnevezett Galois-elmélet egy alkalmazását tartalmazza. Az 1. fejezet, amely zsenialitását kívánja bemutatni, illetve az életrajzi rész teljes mértékben Leopold Infeld regénye alapján íródott[1]. Természetesen hiba lenne egyetlen műre építeni a szakdolgozat ezen részét, azonban Galois életéről illetve matematikai munkásságáról kevés hitelesnek számító forrás ismeretes. Infeld saját bevallása szerint több éven át foglalkozott anyaggyűjtéssel, tanulmányok vizsgálatával. A ránk maradt Galois korabeli iratokból az ő munkája nyomán idézhetünk a dolgozatban. Ezek a hitelesnek számító idézetek dőlt betűvel vannak szedve. Galois két iskolája, a Louis-le-Grand[8] és az École Normale Supérieure[9], illetve az École Politechnique, ahová sajnos soha nem nyert felvételt, ma is működő iskolák. Olyannyira, hogy az École Normale Supérieure illetve az École Politechnique Franciaország legrangosabb iskolái közé tarozik napjainkban is.

Az École Politechnique egyetemet 1794-ben alapították. Mindössze négyszáz diákot vesznek fel évente. A végzettek rendszerint főtisztviselők lesznek. Több köztársasági elnök, Joffre és Foch marsall, Gay-Lussac és Poincaré is itt végezte tanulmányait[5].

Az École Normale Supérieure-t szintén 1794-ben alapították. Tanárokat, kutatókat képez, főleg a társadalomtudományok és természettudományok terén. A felvételi vizsga olyan nehéz, hogy a diákok érettségi után két évig készülnek rá[5].

Az École Politechnique-re való többszöri sikertelen felvételi után sikeresen beiratkozott az École Normale Supérieure iskolába. Ezekről bővebben a 2.1-es fejezetben olvashatunk.

1830-ban, mint lelkes republikánus belépett a Nép Barátainak Társaságába. Politikai nézetei miatt többször is konfliktus helyzetbe került, majd emiatt 1831-ben kizárták az École Normale-ból. A kizárás körülményeiről is találunk hiteles idézetet a 2.2-es fejezetben. Ezután belépett a Nemzeti Gárda tüzérségébe. 1831-ben kétszer is börtönbe zárták[10], amely nagyon megviselte őt; először három, majd hat hónapi fogságra ítélték. Ezen idő alatt egészségügyi állapota megromlott, büntetésének utolsó hónapját már kórházban töltötte. A börtönben írt leveleiből a Francia Tudományos Akadémiának, illetve egy bajtársának leveleiből a 2.3-as fejetben olvashatók részletek. A kórházban megismerte Éva Sorel-t, akibe szerelmes lett és párbajra[11] kényszerült miatta. Ebben a párbajban –amelynek körülményei mai napig tisztázatlanok– veszítette életét a „matematika hercege". A párbaj körülményeit a 2.4-es részben, illetve az Összefoglaló részben írjuk le. A halálát okozó párbaj előtti éjszakán megírta tudományos végrendeletét, amelyből a szakdolgozat 2.5 fejezetében idézünk is. Galois sírjának pontos helyét nem tudjuk, egy síremléket állítottak a tiszteletére[12]. Tudományos munkássága felbecsülhetetlen értékű. A róla elnevezett Galois-elméletről és annak egy alkalmazásáról a geometriai szerkeszthetőség területén a 3.fejezetben olvashatunk[2],[3],[4] alapján. Ebben a részben található ábrákat a GeoGebra matematikai szerkesztőprogrammal készítettem.

1. A kis zseni

„Az egyetlen diák, aki rossz feleleteket adott; nem tud semmit. Előzőleg azt mondták róla, hogy matematikai tehetség: nagyon csodálkozom ezen. Vizsgaeredményei után ítélve gyenge észbeli tehetségnek látszik, vagy olyan jól eltitkolja intelligenciáját, hogy nem sikerült felfedeznem azt.”

Monsieur Péclet(fizikatanár), 1830

Evariste Galois még 21 éves sem volt, amikor meghalt. Soha nem tudjuk meg, hogy mit vitt volna végbe ha életben marad, hiszen korának legnagyobb matematikusa volt. Bár Galois összes munkája elférne egy mai szakköri füzet 60 lapján, de ez a 60 lap könyvtárakat teremtett, tartalmának kifejtése tudósok ezreit foglalkoztatta. A halálát okozó párbaj előtti éjszakán ez a páratlan lelkierejű, a matematikát szenvedélyesen szerető ifjú nem magával törődött, hanem arra volt gondja, hogy felfedezéseit ne vigye a sírba. Megérezte, hogy nem éli túl a párbajt. Egyetlen éjszaka sietősen leírta felfedezéseit, megírta tudományos végrendeletét, melyet barátjának és korábbi iskolatársának Auguste Chevalier-nak címzett. Ezen írása lefektette a modern algebra alapgondolatait, végleges feleletet adva ezzel az algebrai egyenletek több száz éves problémájára. Neki köszönhető, hogy a holtpontra jutott algebrában új virágzás indult, hatalmasabb, mint azelőtt. Ma már ez tény, sajnos a saját korában nem ismerték el, matematikusként teljesen ismeretlen maradt. Nem értették, nem értékelték őt „zavaros, átláthatatlan, logikátlan” írásai miatt. Középszerű tanárai alig értették meg az ifjú lángész eredeti gondolatmeneteit, és igyekeztek a sablonos útra terelgetni őt. Viszont nem biztos, hogy teljes mértékben csak a tanárai tehettek arról, hogy nem ismerték fel zsenialitását. A forradalom, a császárság idején a tanárokat cserélgették, és gyakran nem a hozzáértés, hanem csupán a politikai megbízhatóság volt a kinevezés alapja. Az a néhány ember, aki Galois előtt elzárta az érvényesülés útját, minden valószínűség szerint mérhetetlenül sokat ártott az emberiségnek.

Most pedig nézzünk néhány anekdotát, hogy jobban megismerhessük jellemét, milyen is volt Evariste Galois. Íme nagyságának néhány példája:

Amikor monsieur Vernier először feleltette Evariste-ot, szokatlan csönd volt. Egyes iskolatársai, akiknek feltűntek Evariste különös című olvasmányai, azt lesték, hogy fog zavarba hozni egy diák egy unalmas tanárt. Mások, akiket sértettek Evariste rövid, vagy pökhendi válaszai, azt várták, hogy most megérdemelt megaláztatásban lesz része. A csönd megzavarta a jó Vernier-t. Evariste-nak ellenére volt, hogy az osztály elé lépjen és ostoba kérdésekre feleljen.

Vernier hangja nagyon barátságos volt, amikor az első kérdést feltette:
„Mutassa meg, hogyan kell egy szöget két egyenlő részre osztani.”

Evariste sértésnek érezte ezt a gyerekesen egyszerű kérdést. A szégyentől vörösen rajzolt egy szöget, a fakörzővel gyorsan megrajzolta az íveket, megjelölte betűkkel az ábrát és anélkül, hogy egy szót szólt volna, aláírta:

$$ACE\angle = BCE\angle$$

„Nagyon jól van.” Vernier az osztály felé fordult:
„Sokan maguk közül egy félévvel régebben vannak ezen a tanfolyamon, mint Galois, de a kérdésemre félig olyan jól sem tudtak volna megfelelni”

Evariste arca e szavakra még szenvedőbb kifejezést öltött.

Vernier megkérdezte:

„Meg tudja magyarázni, miért egyenlőek ezek a szögek?”

A *miért* szónak azzal adott nyomatékot, hogy jobb mutatóujját az orráig emelte. Galois nem felelt.

Vernier türelmesen és barátságosan magyarázta:

„A geometriában mindig meg kell mutatni, hogy valami miért igaz. Mindig kell lenni egy módszerünknek, egy jó módszerünkenk, hogy a dolgokat bebizonyíthassuk. Próbálja most megmagyarázni nekem, miért egyenlőek ezek a szögek.”

Barátságos hangja jelezte, hogy nem venné rossz néven, ha Galois nem tudna felelni a kérdésre; meg volt elégedve tanítványa teljesítményével, s elég lenne, ha Galois elkezdené a magyarázatot, a tanár ezután szívesen továbbsegítené.

Varnier megismételte:

„Miért egyenlőek?”

Az osztály feszülten várta a választ. Csak hosszú szünet után szólt.

„Ez nem nyilvánvaló?”

Az osztály nevetésbe tört ki. Az egyik tapsolni kezdett. Egy másik így kiáltott:

„Galois-nak nyilvánvaló a geometria!”

Egy harmadik ezt ordította:

„Galois nyilvánvalóan lángész!”

„Nyugalom! Nyugalom!”

Varnier megpróbálta osztályát elcsendesíteni.

„Maguk nagyon rosszindulatúak társukkal. Nincs itt semmi nevetnivaló. Ahelyett, hogy segítenének neki, mulatnak a társukon.”

Galois megsajnálta Varniert. Barátságos volt, megvédte diákjait és szegény észre sem vette, hogy a nevetés ellene is irányul.

Evariste a tábla felé fordult, kiegészítette a rajzot két háromszögre, alájuk írta, hogy egybevágóak, megjegyezte az egybevágóság okát is és levezette ebből, hogy a két szögnek is egyenlőnek kell lennie.

Vernier megelégedetten tekintett a táblára.

„Ez már jobb! Sokkal jobb! Ez már igazán nagyon jó. Próbáljon módszeresebben dolgozni. Csak egy kicsivel több módszeresség és maga lesz az osztály egyik legjobb tanulója. De ne felejtse el: figyelmesen és rendszeresen dolgozni!”

(1827)

Ekkor Galois a Louis le Grand tanulója volt. Még 16 éves sem volt, hogy elolvasta Legendre geometriáját, és már elkezdte megfogalmazni saját problémáit. Eleinte úgy gondolta, hogy kell egy olyan módszernek lennie, amelynek segítségével minden algebrai egyenlet megoldható gyökvonások és a négy alapművelet segítségével. Hogy ez a módszer a gyakorlatban könnyen alkalmazható-e vagy sem, azt mellékesnek tartotta. Azonban megtalálni annak a bizonyítását, hogy ez lehetséges, hogy ilyen megoldás mindig létezik –ezt tartotta az algebra központi problémájának. Akinek 15 évesen ilyen gondolatok járnak a fejében, az tényleg sértésnek érezhette, hogy a szögfelezés primitív problémáját kell megoldania.

„Soha nem hittem volna, hogy egy olyan embert, akire néhány hónappal ezelőtt még felnéztem, úgy meg fogok vetni, mint ahogy most vizsgáztatómat, monsieur Lefèbvre-t megvetem. Gyenge matematikus, a feje olyan, mint egy halálfej, amelyre ráncos sárga bőrt húztak. Már első pillantásra visszataszítónak és embertelennek tűnt nekem. Álmaim iskolájának ez a vizsgáztatója sziszegte felém ostoba kérdéseit. Hangján és tekintetén észrevettem, hogy számára a hallgató csak levegő. Biztosan jezsuita. Amit ez a sárgafej akart, nem volt más, mint képletek értelmetlen levezetése. Mindennek pontosan ugyanazt a magyarázatát akarta hallani, mint az ostoba tankönyvekben van. Ő előtte bűn, ha valakinek saját gondolatai, saját bizonyítási módszerei vannak.

Amikor sorra kerültem, rámpillantott, és kis szemét még jobban összehúzta, hogy csak a lehető legkevesebbet lássa belőlem. Azután feltette az első kérdést:

„Miért jött erre a vizsgára anélkül, hogy a különleges matematikai tanfolyamot elvégezte volna?"

Azt válaszoltam: „Magam tanultam."

„Oh" –mondta ő. Hallanod kellett volna ezt az „Oh"-t! Azután azt kérdezte, hogyan kell megoldani egy másodfokú egyenletet. Fel merte nekem tenni ezt a nevetséges kérdést, nekem, aki többet tudok az algebrai egyenletekről, mint a Politechnikai Főiskola valamennyi tanára együttvéve. És méghozzá helytelenül fogalmazta meg a kérdést. Amikor figyelmeztettem, hogy a kérdés helytelenül volt megkérdezve, összehúzta a bőrt sárga koponyáján, ez gúnyos mosolyt akart jelenteni. Azután azt mondta, hogy nincsen ideje vitákra, különben sem ő a vizsgázó. Majd egészen gyerekes kérdéseket tett föl. Összeszorult a torkom és egy hangot sem voltam képes kiejteni. Végül hozzámfordult ez a halálfej és azt mondta:

„Látom, hogy Ön egyedül tanult, de nem tanult eleget. Próbálja meg jövőre újból."

(1828)

Galois kétszer jelentkezett a Politechnikai Főiskolára. Először 17 évesen, 1828-ban. (Egyes lexikonok szerint 1827) Mint a történetből kiderül, sajnos sikertelen volt a felvételije.

Monsieur Richard lediktálta a heti feladatot. A legtöbben nehéznek találták; még a jó tanulóknak is sok idő kellett a megoldáshoz és csak ritkán sikerült megbírkózni az összes feladattal.

A tanulók pontosan beírták füzetükbe:

„1. feladat: Határozd meg egy körbe írt négyszög x és y átlóit, négy oldala a, b, c és d segítségével."

Ezután gondosan leírták a második és a harmadik feladatot is. Evariste csak meghallgatta és amikor vége volt a diktálásnak, világosan maga előtt látta minden egyes feladat pontos megoldását. Monsieur Richard most hozzákezdett előadásához.

Evariste kitépett egy lapot füzetéből, a felső sarkába odaírta „Galois" és alá „Feladatok". Megfogalmazta az elsőt és leírta megoldását egyenletekkel és azokkal a magyarázatokkal, amelyek az egyenleteket összekapcsolták. Egy szó törlése, vagy javítása nélkül, a legegyszerűbb módon jutott el az eredményekhez, azáltal, hogy $x \cdot y$ és $x : y$ értékeit kifejezte. Azután a következő oldalon ugyanolyan gondosan megadta a másik két feladat pontos megoldását is, világos rajzokkal kiegészítve. Mindehhez tizenöt percre volt szüksége. Ezután csak fél figyelemmel hallgatta az előadást, inkább azzal volt elfoglalva, hogy bátorságot gyűjtsön az óra befejezésének pillanatára.

Amikor monsieur Richard elhagyta az osztályt, maga mögött egy hangot hallott:

„Bocsásson meg Uram."

„Tessék?"

A tanár megfordult és egyik tanítványát látta maga előtt –aki korához képest alacsony és sovány volt– kezében egy lap papírral, amint elvörösödve a földet bámulja.

Richard karját Evariste vállára téve megkérdezte:

„Mi baj van?"

Evariste, anélkül hogy felpillantott volna, átnyútotta tanárjának a lapot:

„Itt a megoldás."

Richard ránézett az első oldalra, gyorsan átfutotta és látta, hogy a feladat olyan módon van megoldva, amely a legjobb tankönyvhöz is méltó volna. Megfordította a lapot, rápillantott a másik oldalára, azután a diákra, azután megint a papírra és megint Galois-ra. Azután elolvasta az első olalon a nevet.

„Galois. És a keresztneve?"

„Evariste"

„Úgy."

Hosszan nézte Evariste-ot, anélkül, hogy egy szót is szólt volna. Evariste szégyellte magát és már megbánta, amit tett. Nevetségessé tette volna magát? Monsieur Richard is gúnyosan fog mosolyogni rá, mint ahogy a sárga halálfejű tette?

Monsieur Richard azonban ezt mondta:

„Meglátogatna ma engem vacsora után a szobámban? Meg fogom kérni a tanárját, hogy ne rója meg, ha valamivel később ér majd a hálóterembe. Rendben van?"

„Igen, Uram!"

„Jó."

Galois égett az izgalomtól. (...)

„Szeretném, ha mesélne valamit magáról. Min dolgozik?"

Richard tanári sikerének titka nagyon egyszerű volt: a diákokkal úgy bánt, mint egyenrangú partnerekkel.

Evariste csodálkozott, hogy nem kell Richardot meggyőznie arról, hogy ő matematikus. Úgy tűnt, mintha valami különös módon Richard tudna erről. Mióta Louis-le-Grand-ban volt, először érezte Evariste magát félénknek és alázatosnak.

„Algebrai egyenletekkel foglalkozom. Egy évvel ezelőtt azt gondoltam, hogy az ötödfokú egyenletek is megoldhatóak gyökmennyiségekkel, mint a harmad és negyed fokú egyenletek. Ma azt hiszem, hogy az általános ötödfokú egyenlet nem oldható meg gyökmennyiségekkel."

Galois elnémult. Monsieur Richard csodálkozva nézett a vele szemben ülő diákra, de csak ennyit mondott:

„Hm! Ez nagyon érdekes. Nagyon érdekes."

„Az a probléma, amellyel foglalkozom, tulajdonképpen sokkal általánosabb. Keresem a szükséges és elegendő feltételeit annak, hogy egy algebrai egyenlet gyökmennyiségekkel megoldható legyen. Tetszőleges fokú algebrai egyenletre gondolok. Azt hiszem... sőt biztos vagyok benne, hogy kell ilyen kritériumoknak lenniök. Azt hiszem Uram, hogy az utóbbi időben közelebb jutottam ennek a problémának a megoldásához." ...

„Egyébként hány éves?"

„1811. október 25-én születtem."

„Tizenhét évvel ezelőtt. Tizenhét éves tehát. Én majdnem kétszer annyi idős vagyok, mint maga. Meséljen többet magáról. Hogy csinálta, hogy ilyen öreg lett és még mindig nem oldotta meg az algebra alapproblémáját?" –nevetett hangosan.

(1828)

Monsieur Richard volt a Louis-le-Grand egyetlen tanára, akiről azt gondolta Galois, hogy tőle talán még tanulhat is valamit. Evariste arra a következtetésre jutott, hogy M. Richard olyan ember, akivel érdemes megismerkedni és talán még a képességeit is feltárhatja előtte. Így is tett. A későbbi tanulmányai során is szívesen gondolt vissza erre az emberre, mint egyetlen tanárra, aki támogatta őt, és felismerte matematikai nagyságát.

Az iskolaszolga letörölte a táblát a szivaccsal, mialatt Dinet ujjaival az íróasztalon dobolva és ásítását elnyomva így szólt:

„Kérem a következő jelöltet."

Majd megkérdezte anélkül, hogy a fejét felemelte volna:

„Neve?"

„Evariste Galois."

„Mondja meg, mit tud a logaritmus elméletéről."

Dinet behunyta a szemét. Tudta, mi jön most. Azt fogja hallani, hogy $b = \log_a c$, ha $a^b = c$. Euler ezeket a betűket használta algebrakönyvében és azóta minden tanuló ezt idézi, ha logaritmusról beszél. Ezután azt fogja hallani, hogy a szorzat logaritmusa egyenlő a logaritmusok összegével.

„Szörnyű! Borzasztó! Oh, végtelen unalom! Még húsz perc és készen vagyok ennek a – hogy is hívják– vizsgájával és azután jön még két masik. Akkor azután bebújhatok a papucsomba – nos, hallgassuk meg őt."

De nem volt mit hallgatnia. Valami másképpen történt, mint máskor. Dinet felélénkült – ez talán új tapasztalat lesz. Talán egy süketnéma tanuló próbálja letenni a felvételi vizsgát. Érdekes volna. Írni legalábbis tudott a tanuló – hallani lehetett a kréta csikorgásáta táblán. Dinet-nek oda kellene nézni. Fölemelte fáradt fejét. A táblára ezt írták föl:

$$\begin{array}{ccccc} 1, & a, & a^2, & a^3, & \dots \\ 0, & 1, & 2, & 3, & \dots \end{array}$$

Dinet álmossága alábbhagyott. Ez valami új volt.

„Talán szíveskedne megmagyarázni, hogy mi az, amit oda fölírt."

Egy tompa hang apatikusan szavalta:

„Ez két sorozat: egy geometriai és egy számtani sorozat. A számtani sorozat tagjai a mértani sorozat megfelelő tagjainak logaritmusai és a az alap."

„Nagyon jó" – mondta Dinet.

Arra várt, hogy a hang tovább beszél. De a bátorító „nagyon jó" egyáltalán nem élénkítette meg a tanuló szóáradatát. Csak annyit tett hozzá:

„... és így tovább" – és ezzel lerontotta a jó benyomást.

Dinet türelmetlenül kérdezte:

„Mit ért Ön azon, hogy -és így tovább-? Mi a következő lépés?"

Várt egy kicsit.

„Fiatalember, én nem húzhatom ki Önből erőszakkal a feleleteket. Vagy akar felelni, vagy nem."

Galois ugyanazt érezte, mint amit már gyakran érzett: dühe egyre nőtt, bőre égni kezdett, s kínlódva vett erőt magán, hogy dühét elnyomja. Arca vörös lett, hangja elcsuklott a torkában, de azért felelete nyugodtan és szenvtelenül hangzott:

„A mértani sorozat bármely két tagja közé $(n-1)$ számot lehet iktatni és éppúgy a számtani sorozat két tagja közé is. A számtani sorozat tagjai ekkor a mértani sorozat megfelelő tagjainak logaritmusai."

„Fejezze ki magát világosabban. Milyen számokat iktatunk közbe?"

Galois megvető pillantást vetett a tanárra. Nehezen lehetett elviselni azt a gondolatot, hogy van valaki a világon, aki megítélheti, hogy ő, Galois, eleget tud-e a Politechnikai Főiskolához. De az a gondolat, hogy éppen monsieur Dinet az, még elviselhetetlenebb vot.

„Világos az egész. Ha $(n-1)$ számot iktatunk közbe, hogy az illető sorozatok mértani vagy számtani sorozatok maradjanak, amint világosan feltettem, akkor ez mindent egyértelműen meghatároz és semmit sem kell hozzátennem."

„Lehet, hogy Önnek világos, de nekem esetleg nem világos. Kérem, írja föl ezt a megállapítást, máskülönben meg kell szakítani társalgásunkat."

Anélkül, hogy egy szót szólt volna, Galois ezt írta a táblára:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & a^{\frac{1}{n}}, & a^{\frac{2}{n}}, & \ldots, & a^{\frac{n-1}{n}}, & a \\ 0, & \frac{1}{n}, & \frac{2}{n}, & \ldots, & \frac{n-1}{n}, & 1 \end{array}$$

Dinet fölnézett és megkönnyebbülten sóhajtott föl. Azt gondolta:

„Micsoda modor! Milyen modoruk van manapság a fiatalembereknek! Ki nem állhatom. Le fogom szoktatni az öntelt arckifejezésről még akkor is, ha ez lesz az utolsó, amit ma csinálok."

Azután megkérdezte:

„Lehet-e az egyik közbe $(n-1)$ számot, a másik közbe pedig $(m-1)$ számot közbeiktatni, ha n és m különbözők?"

„Mindenesetre, uram." – mondta Galois.

„Változhat tehát a tagok száma közről-közre?"

„Mondtam már: mindenesetre, uram."

„Meg tudja magyarázni, miért?"

„Hát nem egészen világos, uram?"

Dinet izgatottan hadonászott a kezével.

„Tegyük fel, uram, hogy nem világos. Tegye föl, hogy én szeretném Öntől a magyarázatot hallani. Ezenkívül tegye föl, hogyha nem tudja összehozni, s ezt a jelentéktelen ügyet nem tudja nekem megmagyarázni, akkor meg fog bukni a vizsgán. Mi lenne akkor az Ön felelete a kérdésemre, jelölt úr?"

Evariste monsieur Dinet szemébe nézett. Jobb kezében tartotta a táblatörlő szivacsot, amelyet gépiesen szorongatott. Már ott tartott, hogy feltörő dühét semmiképpen nem tudja megszelidíteni: erősebb lett nálánál. Még a látási képességét is befolyásolta: Dinet arca furcsán eltorzult előtte. Dinet hirtelen pont úgy nézett ki, mint a bourg-la-reine-i plébános. Igen, a pap volt: vonásai egyre élesebbek és ijesztőbbek lettek. A pap volt, akire követ dobtak azok, akik a polgármestert szerették. Fojtogató köd terjengett a szobában. Ha ez a köd eloszlik, láthatóvá válnak az emberek, akik követ dobatk a papra, aki most egykedvűen ül az asztalnál.

Éles hang hasított át a ködön.

„Ismétlem; mi lenne az Ön válasza kérdésemre?"

Galois fölemelte a szivacsot és Dinet fejéhez vágta. Éppen odatalált, ahová célzott.

Galois vidáman fölkiáltott, mintha élete legnehezebb terhétől szabadult volna meg.

„Ez volna a feleletem az Ön kérdésére, uram."

Aztán kiment, anélkül, hogy megfordult volna és becsukta maga mögött az ajtót. Tudta, hogy örökre becsukta.

(1829)

Valóban a professzor fejéhez vágta Galois a szivacsot? A hagyomány ezt állítja. Infeld szerint –akinek a regényét a szakdolgozatom alapjául vettem– beleillik ez a történet Galois jellemének összképébe. Ez volt a második próbálkozása a Politechnikai Főiskolára. Szintén eredménytelenül. Ezután soha többé nem próbálkozott. 1830. februárjában felvették az előkészítő iskolába, az École Normale-ba. Az életrajzi részből kiderül majd, hogy ettől kezdve nem a matematika volt fő tevékenységi területe.

2. Evariste Galois élete

„Akit az istenek szeretnek,az fiatalon hal meg.”

Menander

2.1. A Louis-le Grand diákjaként Evariste Galois 1811. október 25-én a Párizs melletti Bourg-la-Rein-ben született és 1832. május 31-én halt meg 20 évesen Párizsban.

Édesapja, Nicolas-Gabriel Galois Evariste szülővárosának polgármestere volt Napóleon „száznapos” uralma alatt 1815-ben.

Édesanyja, Adelaïde-Marie Demante kiváló jogászok családjából származott. Galois tőle tanult 1823-ig, majd a Collège Royal de Lous-le-Grand-ban folytatta tanulmányait.

2. ábra. Louis le Grand

Itt unalmas, középszerű tanárai inkább hátráltatták mint segítették volna a tanulásban. Szerencsére matematikai tehetségére igen korán fény derült. Alig volt 15 éves, amikor megnyílvánultak rendkívüli matematikai képességei. Ezek annyira nagyszabásúak voltak, hogy a tankönyvek nem elégítették ki érdeklődését, inkább elmerült a matematika akkor ismert klasszikusainak írásaiban. Hihetetlenül rövid idő alatt elsajátította Adrien-Marie Legendre geometriai és Joseph Lous Lagrange algebrai műveit.

Láttuk, hogy kollégiumi évei alatt, Louis Richard tanítványaként kezdtek Galois-ban körvonalazódni a később róla elnevezett elmélet alapjai. Cardano és kortársai óta a matematikusok jól ismerték a harmad- és negyed fokú egyenletek gyökképletét. Az ennél magasabb fokú egyenletekre azonban hasonló gyökképletek nem voltak ismeretesek; sőt az sem volt világos, hogy ez a hiány a matematikusok ügyetlenségében keresendő, vagy pedig nem is léteznek ilyen formulák. Az első és harmadik anekdotát olvasva világosan kitűnik, miképp vélekedett Galois az ötöd- vagy ennél magasabb fokú egyenletek gyökképlettel való megoldhatóságáról. Galois kortársa, Niels Henrik Abel norvég matematikus lényegében hibátlanul bebizonyította, hogy az ötödfokú egyenlet gyökei általában nem fejezhetők ki az együtthatókból kiindulva a négy alapművelet és gyökvonások segítségével. Galois Abel eredményéről csak később szerzett tudomást. Persze ez előnyére vált, mert így végül sokkal nagyobb feladatra vállalkozott.

Érdemes megjegyeznünk, hogy mindkét fiatal tudós korának egyik legismertebb matematikusához, Augustin-Louis Cauchy-hoz fordult támogatásért – sajnos eredménytelenül. Abel utolsó összekuporgatott pénzén Párizsba utazott 1826-ban, ám zárt ajtókra talált: Cauchy nem fogadta. Galois 1829-ben benyújtott kéziratát pedig Cauchy elvesztette. (E kézirat címét és témáját illetően a rendelkezésünkre álló források ellentmondásos adatokat közölnek.)

Egy ilyen tudású fiatal természetesnek veszi, hogy tanulmányait a francia matematika legszínvonalasabb iskolájában az École Polytechnique-ben folytassa. Kétszer is jelentkezett a felvételi vizsgára, egyszer 17 évesen 1828-ban, másodszor 18 évesen 1829-ben. Mindkét alkalommal megbukott a szóbeli vizsgán, mert megtagadta az általa nevetségesnek és feleslegesnek tartott kérdésekre a választ. Ezen két próbálkozása olvasható a 2. és 4. anekdotában.

2.2. Galois, mint lelkes republikánus Galois édesapja súlyos konfliktusba keveredett szülővárosának konzervatív lakóival és 1929-ben öngyilkos lett. Ezen év tragédiái (a két sikertelen felvételi és édesapja halála) nyílvánvalóvá tették számára, hogy pályáját nem tudja hivatásos matematikusként folytatni, ezért mélyen megbántva felvételizett majd felvételt nyert 1930-ban a kevésbé rangos École Préparatoire (a késsőbbi École Nornale Supérieure) tanárképző főiskolára.

3. ábra. École Normale Supérieure

A matematika-vizsgáztató tanára –Monsieur Leroy ezt írta róla: „Ez a diák néha nem tudja világosan kifejteni gondolatait, de intelligens és rendkivüli kutatószellemet árul el. Ő ismertetett meg az alkalmazott analízis néhány újabb eredményével.” Péchlet a fizika tanár ezt írta róla: „Az egyetlen diák, aki rosz feleleteket adott; nem tud semmit. Előzőleg azt mondták róla, hogy matematikai tehetség: nagyon csodálkozom ezen. Vizsgaeredményei után ítélve gyenge észbeli tehetségnek látszik, vagy olyan jól eltitkolja intelligenciáját, hogy nem sikerült felfedeznem azt. Ha ez a diák az, akinek látszik, akkor kételkedem, hogy valaha is jó tanár lehet belőle.”

Ugyanebben az évben, *1830 -ban Galois három dolgozata jelent meg a Bulletin de Férussacban*:

- áprilisban egy rövid két oldalas cikk :*Analyse d'un mémoire sur la résulution algébruque des équations.* (Egy, az algebrai egyenletek meoldásával foglalkozó dolgozat elemzése)
- júniusban szintén egy rövid cikk: *Sur la résolution des équations numeriques* (Numerikus egyenletek megoldása)
- szintén júniusban megjelent egy hosszabb, 8 oldalas cikk is: *Sur la théorie des nombres* (Számelmélet) címmel. Ehhez a következő megjegyzést fűzték: „A tanulmány Monsieur Galois a permutációk és algebrai egyenletek elméletére vonatkozó kutatásainak egy része.”

Ezek a munkák eredményeinek csak töredékeit tartalmazzák, egyeseket csak megemlített, és nem bizonyított.

Algebrai eredményeit Galois egy másik munkájában fejtett ki bővebben, amelyet 1830. februárjában az akadémia évi pályázatára nyújtott be.

E pályaműre azonban több, mint fél évvel később sem kapott bírálatot, így barátja és egykori iskolatársa, Auguste Chevalier ösztönzésére személyesen próbálta kideríteni dolgozata sorsát. Az eredmény lehangoló: szintén elveszett. Ezuttal Jean-Baptiste-Joseph Fourier „jóvoltából".

Az 1830-as év más okok miatt is mozgalmas volt Galois számára. Idáig semmi mással nem foglalkozott, csak matematikával. Egyre inkább kiterjedt figyelme az akkori francia politikai viszonyokra is. A francia uralkodó, X. Károly nem tartotta tiszteletben a korábban kivívott szabadságjogokat, korlátozta a polgári intézményrendszer működését (választójog megnyírbálása, cenzúra, parlament feloszlatása). 1830. július 25-én királyi rendelettel feloszlatta a képviselőházat. Ez tömeges megmozdulásokat és republikánus forrongást idézett elő. Az 1830. július 27-29-es párizsi felkelés eredményeként X. Károlyt elűzték, akit Lajos Fülöp követett a trónon. A Bourbon-ház helyett az Orléansi-házat nyílvánították a királyi hatalom folytatójának. Uralkodásának (1830-1848) idején fennálló rendszert polgárkirályságnak vagy júliusi monarchiának hívják. Az új királyi cím a „franciák királya" lett szemben az ancien régime-ben használatos „Franciaország királya" cím helyett. Az új uralkodó néphez való kötődését fejezte ki az államhoz való eddigi kötődés helyett. Az uralkodó új címét az 1830-as alkotmányban is rögzítették. A „júliusi monarchia" másik fontos új jelképe a francia trikolór elfogadása volt állami zászlóként, a Bourbon-restauráció fehér zászlaja helyett.

Galois 1830. augusztusában belépett a republikánus Nép Barátainak társaságába. Ez volt az akkori egyetlen aktív republikánus egyesület. Szerintük a forradalom nem érte el célját. Nem egy újabb királyt akartak a régi helyett, hanem köztársaságot. Mit nyertek ezzel azok az emberek, akik harcoltak és meghaltak a hazáért, a zászlóért? Látták, hogy a forradalom csak szaporította szenvedéseiket. Könnyebb munkát, több kenyeret reméltek, és azt, hogy gyermekeiket majd jobban táplálhatják és ruházhatják. Abban bíztak, hogy a júliusi napok majd enyhítik nyomorúságukat. Reményeikben azonban csalódniuk kellett.

A kormány a republikánusok ellen ingerelte a nép dühét azzal, hogy a sajtóban és felhívásokon százszor is elismételte ugyanazokat az érveket.

„Ti, a nép, győztetek a forradalomban. Ti vagytok Franciaország gerince. Harcoltatok és mindent elértetek, amire törekedtetek. Ne engedjétek, hogy a republikánusok rászedjenek Benneteket. Azt akarják, hogy az ő vezetésük alatt újra harcoljatok. És mi lesz, ha győznek? Végső szegénységbe fognak taszítani Benneteket. Hadat üzennek Európának. Nem fognak nyugodni addig, míg Franciaország földjét az ellenség meg nem szállja és nyomorúságotok ezerszeresére nem nő."

(részlet a felhívásból)

Mint már említettük, ebben az időben Galois nem foglalkozott matematikával. Fő feladatának azt tekintette, hogy mint lelkes republikánus, mint a Nép Barátainak Társaságának tagja, az École Normal-ban nyugtalanságot keltsen. A köztársaság iránti szeretet és az igazgató iránti bizalmatlanság növelése volt fő célja.

1830. december 3-án a Gazette des Écoles-ban (Iskolák lapja) egy cikk jelent meg, amely az iskola igazgatóját szidalmazta:

„Cikkünk legjobb kiegészítése az a levél, amely hozzánk érkezett:

Uraim! (...) Július 28-án reggel az École Normale több diákja el akarta hagyni az intézetet, hogy részt vegyen a harcokban. Monsieur Guigniault két alkalommal mondta nekik, hogy módjában volna a rendőrséget hívni az iskola rendjének a helyreállítására. A rendőrséget –július 28-án! Ugyanezen a napon Monsieur Guigniault szokásos pedantériájával így magyarázott nekünk: „Mindkét oldalon bátor emberek harcolnak. Ha katona volnék, nem tudnék választani a szabadság, vagy a királynak tett esküm között." Ez az ember másnap kitűzte kalapjára a háromszínű kokárdát. Egész lénye korlátolt nézeteit és elvtelen magatartását tükrözi. Remélem, hogy felvilágosításaim kapóra jönnek Önöknek és kitűnő lapjuk jól felhasználhatja ezeket"

(Egy idézet a cikkből)

Egyértelműen Galois-t vádolták a levél megírásával. Íme egy újabb idézet, amelyet az igazgató a közoktatási miniszternek címzett.

„Uram! Fájdalmas kötelességemnek teszek eleget, midőn olyan intézkedésemet hozom tudomására, melyért a teljes felelősséget egyedül kell vállalnom és amelynek sürgős jóváhagyását ezennel kérelmezem.

Röviddel ezelőtt kizártam Galois hallgatót az École Normale-ból és hazaküldtem anyjához. Az okokat már abban a levelemben közöltem, amelyet tegnapelőtt bátorkodtam Önhöz intézni. Ennek a hallgatónak a tevékenysége az egész Intézet felháborodását váltotta ki. Egy levélről van szó, amely a nevezett napon az ún. Gazette des Écoles-ben jelent meg és amelynek aláírása: „Az École Nolrmale egy diákja". Mindenki, aki ezt a levelet olvasta és velem beszélt erről, azon a véleményen volt, hogy ez igen súlyos támadás Intézetünk becsülete ellen, és ezért lehetetlen volt elsiklani fölötte.

Minthogy minden jel szerint Galois írta a levelet, véleményem szerint nem volt jogom tűrni, hogy egy ember bűnének árnyéka az egész Intézetet befeketítse. A tettes leleplezésének percétől kezdve ő és én nem maradhatunk egy fedél alatt, ezért saját felelősségemre kizártam őt. Megtettem; és az utolsó év folyamán már legalább hússzor voltam közel ahhoz, hogy ezt megtegyem.

Valóban, Galois az egyetlen hallgató, aki ellen mióta csak az Intézetbe lépett, a professzorok és tanárok részéről újra meg újra panaszok merültek föl. Ismertem azonban kétségtelen matematikai tehetségét és ez befolyásolt. Nem bíztam saját benyomásaimban még akkor sem, amikor okot adott arra, hogy magam is elégedetlen legyek vele. Tűrtem helytelen viselkedését, lustaságát, fegyelmezetlenségét, nem mintha reméltem volna, hogy jelleme megváltozik, hanem inkább annak reményében, hogy eljuttathatom kétéves tanulmányainak befejezéséhez, anélkül, hogy bánatot okoznék anyjának, aki tudomásom szerint számít fiának jövőjére. Minden fáradozásom csődöt mondott. Be kell látnom, hogy erre a bajra nincs orvosság, hogy ebben a fiatalemberben nem él, s talán már régóta nem él erkölcsi érzés."

Galois mint matematikus 1850-ben vált ismertté. Az igazgató akkor 56 éves volt. Sokszor kérdezgették egykori tanítványa felől:

„-Galois, már mint fiatalember, zseniális matematikai tehetséget árult el. Mi az École Normale-ban ezt mindig tudtuk, ellentétben a Politechnikai Főiskola vizsgáztatóival, akik kétszer megbuktatták.

-Befejezte az École Normale-t?

-Nem. Ha jól emlékszem, túl sokat tudott matematikából, ezért az első év után elhagyta iskolánkat."

2.3. A BÖRTÖNÉVEK Miután 1831. január 4-én kizárták az École Normale-ból, belépett a Nemzeti Gárda tüzérségének harmadik ütegébe. A Nemzeti Gárda tagjai között a republikánusok kisebbségben voltak. Ezért új jelszót találtak ki maguknak: „Lépjetek be a Nemzeti Gárdába! "

A következő hír jelent meg január elején a Gazette des Écoles-ban:

„Evariste Galois, aki röviddel ezelőttig az École Normale növendéke volt, algebra-tanfolyamot tart fiatal diákok számára, akik fölismerve az intézetben folyó algebraoktatás tökéletlenségét, alaposabb kutatásokat kívánnak végezni a matematika ezen ágában. A tanfolyam részben új elméletekkel foglalkozik, amelyek nyomtatásban még nem jelentek meg, sem nyilvános előadásra nem kerültek. Ilyen például az imaginárius számok egy új elmélete, a gyökjelekkel megoldható egyenletek elmélete, számelmélet és az elliptikus függvények elmélete tisztán algebrai alapon.

Az előadást minden csütörtökön délután egy óra tizenöt perckor tartja Caillot könyvkereskedésében, rue de Sorbonne 5. szám alatt. A tanfolyam kezdete: január 13., csütörtök."

Az első előadáson mintegy negyven hallgató jelent meg. Voltak köztük egykori École Normale diákok, megjelentek Galois republikánus barátai, akik azért jöttek, hogy megtöltsék a termet. Chevalier is ott volt; ő beszélte rá erre a tanfolyamra, abban a reményben, hogy majd eljön néhány matematikus, megértik Evariste munkáját és elterjesztik hírét. De a matematikusok nem jöttek, csak néhány diák, akik érdekes előadást vártak az iskolai algebráról.

Galois egy bevezető után rátért a szakmai részre is. Legtöbben még a bevezetést sem értették meg. Csodálkoztak, hogy egy 19 éves fiú milyen magabiztosan tud beszélni. Nem tudták eldönteni, hogy bolond-e vagy lángész. Miután semmit sem értettek abból, amit mondott, úgy gondolták hogy még maga az előadó sem tudja hogy miről beszél.

A következő előadásra csak 10 hallgató jött el, a harmadikra csak 4. Ez volt az utolsó előadása.

1831. január 16-án legjobb, és egyetlen nem republikánus barátja unszolására elküldte harmadik kéziratát is az akadémiának. E munka végre már nem veszett el.

„Egyenletek gyökmenyiségekkel való megoldhatóságának feltételei

Ez a dolgozat egy munka összefoglalása, amelyet egy évvel ezelőtt bátorkodtam az akadémiának átnyújtani. (...)

Meg fogják itt találni azt az általános feltételt, amelynek minden gyökmennyiségekkel megoldható egyenletnek eleget kell tennie, és amely megfordítva bizonyságot ad az egyenlet megoldhatóságáról. Alkalmazását csak olyan egyenletekre végeztem el, melyeknek fokszáma törzsszám. Az alábbiakban megadom azt a tételt, amelyre kutatásaim vezettek:

Ahhoz, hogy gyökmennyiségekkel meg lehessen oldani egy egyenletet, amelynek fokszáma racionális osztókkal nem rendelkező törzsszám, szükséges és elegendő, hogy az egyenlet összes gyökei racionális függvényei legyenek bármely két gyökének.

Elméletem többi alkalmazása mindmegannyi külön elmélet; egyébként szükségessé teszik még a számelmélet és egy speciális algoritmus alkalmazását. Ezt egy más alkalommal fogom ismertetni; részben elliptikus függvények modulegyenleteinek elméletére vonatkoznak és bebizonyítom, hogy ezek gyökmennyiségekkel nem oldhatók meg."

Két és fél hónap múlva érdeklődött az Akadémiánál kézirata sorsa felől. Azt a választ kapta, hogy Monsieur Lacroix és Poisson referensek tanulmányozzák. 1831. március 31-én levelet írt a Akadémia elnökének:

„Merem remélni, hogy Lacroix és Poisson urak nem fogják rossznéven venni, ha emlékeztetem őket egy, az egyenletek elméletéről szóló tanulmányra, amelyet három hónappal ezelőtt elbírálásra kaptak.

Az ebben a tanulmányban foglalt eredmény egy része annak a munkának, amelyet a múlt évben a matematikai nagydíjért folyó versenyben nyújtottam be. Ebben megadtam azokat a szabályokat, amelyek alapján minden esetben fel lehet ismerni, hogy az egyenlet megoldható-e gyökmennyiségekkel, vagy sem. Mivel ez a feladat mindeddig a matematikusok számára ha nem is lehetetlennek, de legalábbis rendkívül nehéznek tűnt, a bizottság a priori föltette, hogy nem tudhatom megoldani ezt a feladatot; elsősorban azért, mert Galois-nak hívnak és azonkívül mert diák voltam. Nekem pedig azt mondták, hogy kéziratom elveszett.

Ez a lecke elég lehetett volna. Mégis, az akadémia egy tiszteletre méltó tagjának tanácsára munkámat kivonatosan újra leírtam és Önnek benyújtottam.

Kérem, Elnök Úr, nyugtasson meg és kérdezze meg Lacroix és Poisson urakat, vajon félretették-e dolgozatomat, vagy pedig jelentést szándékoznak róla előterjeszteni az akadémiának.

Fogadja Elnök Úr hódolatom kifejezését.

Mély tisztelője Evariste Galois"

1831. április 15-én feloszlatták a Nemzeti Gárdatüzérséget. 19 tagját elfogták, és azzal vádolták őket, hogy összeesküdtek Lajos Fülöp ellen. Az államügyész vádja pedig, hogy a népnek ágyúkat szándékoznak kiadni, forradalmat akarnak szítani és a monarchiát meg akarták dönteni. A tárgyalást Galois is végignézte. 46 kérdést tettek föl az esküdteknek és mind a 46-ban ártatlannak találták őket.

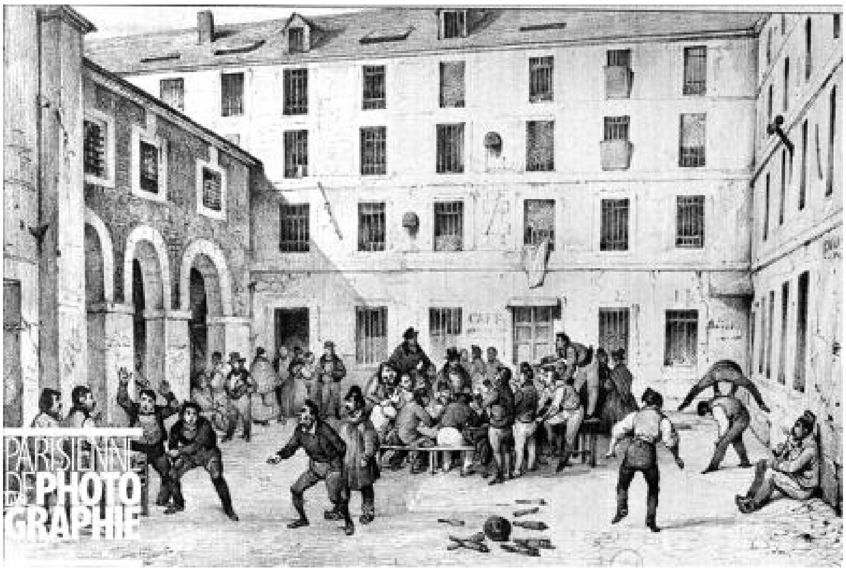
1831. május 9-én összegyűltek a felmentett 19 republikánus tiszteletére rendezett bankettben egy vendéglő éttermében. Természetesen Galois is részt vett rajta. Mindenféle lelkesítő beszéd elhangzott, és különféle vezényszavak, amelyekre mindig lehetett inni. Galois teljesen föllelkesült a mámoros hangulattól, és hírtelen, harsányan kiáltotta:

„Lajos Fülöpre!"

A társaság rögtön kijózanodott, pisszegni kezdtek. Galois másodszorra is kiáltotta „Lajos Fülöpre!". Balkezében egy pohár bort tartott szívéhez közel. Jobb kezével a pohár fölött egy tőrt fogott, melynek hegye a bor felszíne felé irányult. Mindkét keze erősen ökölbe volt szorítva. Dumas emlékiratai szerint (a Gazette des Tribunaux illetve a Gazette de France) úgy állt ott, mint egy szobor, mely csak azért kelt életre, hogy kétszer kimondja a halálos ítéletet a franciák királya fölött.

A tömeg megváltozott. Néhányan elhagyták a termet, mások fölragadták a kést az asztalról, fölemelték borospoharukat, utánozták Evariste mozdulatát és kórusban kiáltották: „Lajos Fülöpre!".

A rendőrség erről a bankettről mindent tudott. 1831. május 10-én elfogatási parancsot adtak ki Galois ellen. Másnap a rendőrségről átszállították a Sainte-Pélagie börtönbe.



4. ábra. A Sainte-Pélagie börtön udvara

A börtön három, egymástól elszigetelt részből állt. Az egyiket, amelyikbe őt vitték, a politikai foglyok részére tartották fenn. A Nép Barátainak Társasága küldött egy ügyvédet (Monsieur Dupon, ismert republikánus ügyvéd), ugyanazt, aki a „tizenkilencek perében” szereplő egyik ügyvéd volt. 1831. június 15-én volt Galois tárgyalása. A vád ellene: nyílvános helyen, egy nyílvános ünnepélyen tett kijelentésével merényletet provokált a franciák királyának élete és személye ellen, bár maga a merénylet ténylegesen nem történt meg. „Szereztek” tanúkat, akik tisztán hallották, hogy Galois azt mondja: „Lajos Fülöpre, ha árulóvá válik!”. A csel bevált. Az esküdtszék 10 percre vonult csak vissza, és meg is hozták az ítéletet: A vádlott nem bűnös!

Mindössze 1 hónap telt el, hogy kiengedték Galois-t a vizsgálati fogságból, ismét elfogatóparancsot adtak ki ellene és egy másik társa, Duchâlet ellen. Mindkettőjüket 1831. július 14-én fogták el a Nemzeti Gárda tüzéregyenruhályában. Mindegyikük töltött puskát és töltött pisztolyt hordott magával, Galois ezen kivül még egy tőrt is. Galois-t másodszor is a Sainte-Pélagie börtönbe zárták a vizsgálat idejére. Itt ismét találkozott egy barátjával, akivel az előző fogság alatt ismerkedett meg: Raspail-val. Raspail barátnőjének írt leveleiből sok mindent megtudhatunk Galois börtönben töltött időszakáról:

- olvashatjuk, hogy Galois cellájába egy golyót lőttek be 1831. július 30.-án, majd a lövés után Galois-t zárkába csukták;
- egy másik levelében megállapítja, hogy valamennyi fogoly egyetértett abban, hogy Galois-nak szánták azt a golyót;
- fel voltak háborodva, hogy Galois-t magánzárkába vetették;
- ugyanebben a levelében beszél arról, hogy Galois-val a börtönben különösen rosszul bántak, zaklatták őt.

Infeld szerint rögtön a lövés után azért került Galois magánzárkába, mert a megjelenő börtönőrök azt állították, hogy ő akarta megölni egyik cellatársát, nem pedig kivülről jött a lövés. Infeld szerint is azt a golyót eredetileg Galois-nak szánták, csak célt tévesztett.

Raspail egyik levelének ide vonatkozó része:

„Bizonyára szemtelenség azt állítani, hogy az igazgatóság azért fizeti az őröket, hogy gyűlkolják a foglyokat. De mi van, ha ez a szemtelen állítás igaz? És én tanú vagyok rá, hogy azok, akiket a büntatőzárkába vittek, semmi más szemtelenséget nem mondtak. Ez a fiatal Galois nem ordítozó, nagyon jól tudják, hideg marad, mint a matematika, amikor magukhoz beszél.

Galois büntetőzárkában! Ó, ezek a gazemberek! Gyűlölik a mi kis tudósunkat! Persze, hogy gyűlölik! Leselkednek rá, mint a kígyók. Minden elképzelhető csapdába becsalják. És felkelést akarnak előidézni."

1831. októberében Galois levelet kapott. Erre várt már több mint két éve: a levélen az Akadémia pecsétje volt. A következők álltak benne:

„Kedves monsieur Galois!

Munkáját monsieur Poisson-nak küldtük át elbírálásra. Ő visszaszármaztatta azt véleményezéssel, amelyből a következőket idézzük:

Mindnyájan sokat fáradoztunk azon, hogy megértsük Galois bizonyítását. Érvelése egyrészt nem elég világos, másrészt nem dolgozza ki kellően és így nem volt lehetőségünk arra, hogy bizonyító erejéről ítéletet alkothassunk; ebben a véleményezésben még csak fogalmat sem adhatunk róla. A szerző kijelenti, hogy az a tétel, amellyel kéziratában foglalkozik, része egy általános elméletnek, amelynek sok alkalmazási lehetősége van. Gyakran előfordul, hogy egy elmélet különböző részei kölcsönösen megvilágítják egymást és együttvéve érthetőbbek, mint külön-külön. Várni kell tehát, amíg a szerző munkájának teljes fogalmazását nyilvánosságra hozza, mielőtt végleges véleményt alakítanánk ki.

Ez okból visszaszolgáltatjuk Önnek kéziratát abban a reményben, hogy monsieur Poisson megjegyzéseit jövendő munkájához hasznosnak fogja találni."

A levelet Francois Arago, az akadémia titkára írta alá. Meg kell jegyeznünk, hogy 10 hónappal előtte küldte el az Akadémiának kéziratát. Dühösen választ is fogalmazott, amelyből egy részlet:

„A munkámban felállított általános tételt csak úgy lehet megérteni, ha figyelmesen elolvassuk azt a részt, amely ezen általános tétel egy alkalmazását tartalmazza. Ezzel nem akarom azt mondani, hogy az elmélet megelőzi az alkalmazást. Munkám befejezése után feltettem magamnak azt a kérdést, miért tűnik oly szokatlannak, oly nehéznek az olvasó számára. Azt hiszem, ennek az oka az a törekvésem, hogy elkerüljem a formalizmus és számolási sémák használatát, ezenkívül elismerem, hogy a munkámban tárgyalt témánál egy ilyen általános formalizmus kidolgozása leküzdhetetlen nehézségekkel jár.

Könnyebben érthető, hogy egy ennyire újszerű témának ilyen szokatlan úton való feldolgozásánál gyakran ütköztem nehézségekbe, amelyeken nem tudtam úrrá lenni. Ezért az olvasó ebben a két dolgozatban, különösen a másodikban helyenként azt a megjegyzést találja: „nem tudom". Tudatában vagyok annak, hogy evvel kiteszem magam a tökfejek kacajának. Sajnos, csak igen kevesen ismerik el, hogy tudományos szempontból azok a könyvek a legértékesebbek, amelyekben a szerző világosan megjelöli, amit nem tud; mert a szerzők akkor ártanak a leginkább olvasóiknak, amikor elkendőzik nehézségeiket.

Ha majd a tudományban nem uralkodik már üzleti versengés, –vagy ami ugyanaz, önzés–, ha az emberek azért tömörülnek, hogy közösen kutassanak és nem azért, hogy lepecsételt *csomagokat küldjenek az akadémiának, akkor majd igyekezni fognak jelentéktelen eredményeket is közölni, ha azok újak és hozzáteszik: „A többit nem tudom."* "

Galois-t júliusban helyezték vizsgálati fogságba, és egészen három hónapig nem volt tárgyalás. Október végén állították őket bíróság elé gárdatüzérségi ruha tiltott viselése miatt. Az ítélet: Duchâlet-nak három hónapi, Galois-nak hat hónapi fogházbüntetés. Feltehetjük a kérdést: Miért kapott Galois kétszer akkora büntetést?

Galois tehát az utolsó büntetését összesen kilenc hónapig töltötte. Nővére, öccse és Auguste Chevalier is rendszeresen látogatták a börtönben. A nővére később megtalált naplójában olvasható, hogy Galois nagyon szenvedett. Mindig fáradtnak, komornak és koravénnek látszott. Szemei beestek, mintha 50 éves lett volna.

A korabeli iratokból az is kiderül, hogy 1832. januárjában egy hétre a La Force-ba szállították, azután megint vissza a Sainte-Pélagie-be. (A La Force volt Párizs legkegyetlenebb börtöne.)

Galois rossz egészségi állapotára hivatkozva nyolc hónap letöltött fogság után a fennmaradó egy hónapot a Monsieur Faultrier egészségügyi intézetben töltötte.

2.4. A PÁRBAJ Állítólag a kórházban ismerte meg azt a kétes hírű hölgyet, aki a halálát okozta. Ez valószínűleg igaz, mert április végén szabadult a kórházból, és rá egy hónapra már, május 31-én, abban a bizonyos párbajban életét veszítette. Egy biztos: a hölgy (Éva Sorel) tényleg létezett, mert 1832. május 25-én Galois kétségbeesett levelet írt Chevalier-nak, amelyben világosan céloz boldogtalan szerelmi ügyére. Ezt a levelet Chevalier a Nécrologie-jában nyílvánosságra is hozta.

Galois szerelmes volt ebbe a nőbe. Tiszta szívéből szerette őt. Miután bevalotta a hölgynek érzéseit, válaszul közölte Galois-val, hogy szeretője valakinek, akit nagyon szeret. A szeretője elutazott egy kis időre Párizsból, és örült neki, hogy ez alatt az idő alatt van valakije. Galois válaszul gyalázkodó szavakat kiáltott oda neki, közönséges, piszkos kifejezéseket. Éva megesküdött, hogy meg fogja még bánni ezeket a szavakat.

1832. május 28-én késő este, miután hazatért Galois, két névjegyet talált a földön:

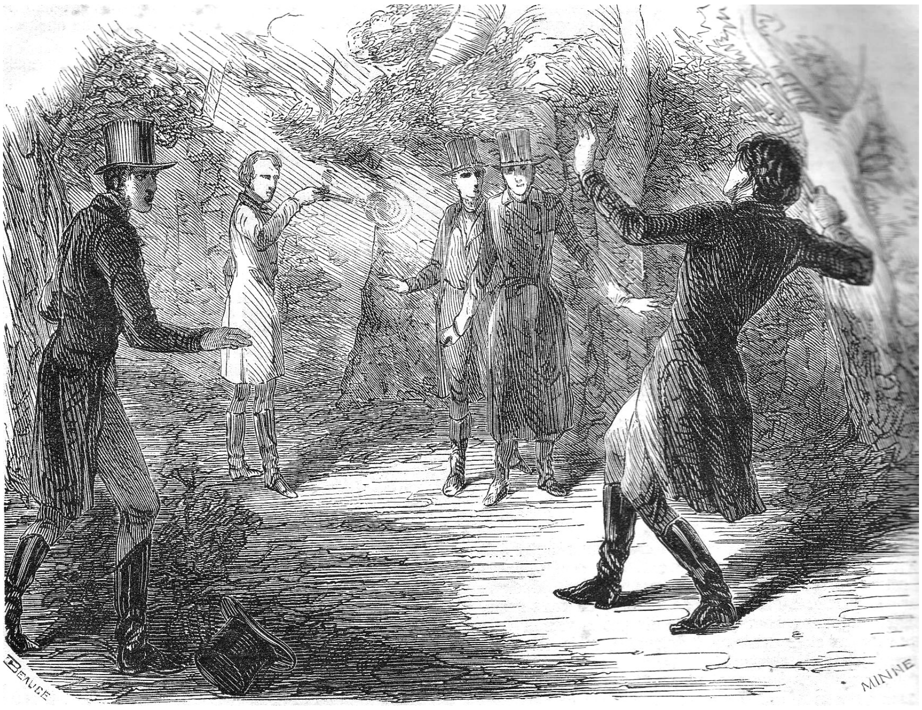
„Pécheux d'Hérbinville
holnap, 29-én reggel kilenc órakor megjelenik
monsieur Galois-nál."

„Maurice Lauvergnat
holnap, 29-én reggel kilenc órakor megjelenik
monsieur Galois-nál."

Másnap meg is érkeztek, és párbajra hívta ki Monsieur d'Hérbinville Galois-t mondván, hogy megvédje barátnője becsületét.

A kor szokásainak megfelelően 2 segédet kellett fogadni egyik illetve másik félnek is, akik majd megegyeznek a párbaj nemében, időpontjában, valamint helyszínében.

A párbajt 1832. május 30-án, reggel hat órára beszélték meg.



5. ábra.

2.5. TUDOMÁNYOS VÉGRENDELETE Galois-nak alig maradt tizenhárom órája a párbajig. Megérezte, hogy ő ezt a párbajt már nem fogja túlélni. Négy levelet fogalmazott:

Az elsőt a republikánusokhoz, a másodikat két republikánus barátjához, N.L.-hez és V.D.-hez. (Mivel csak monogrammokat írt, így csak találgatni tudunk, hogy az egyik név Duchâlet) A harmadikat, amelyik oly híressé vált, legjobb barátjának, Auguste Chevalier-nak írta. Ebben a levélben írta meg tudományos végrendeletét, amelyre a mai modern algebra épül. A dátumból láthatjuk, hogy még nem volt éjfél, amikor a levelét befejezte.

„Drága Barátom! Néhány új felfedezésem van az analízis terén.”

Ezután hét lap következik folyószöveggel és képletekkel, majd pedig ezt írja:

„Tudnod kell, drága Auguste-om, hogy nem ezek a témák az egyetlenek, amelyekben dolgoztam.” Ezután röviden megemlítette azokat a kérdéseket, amelyeken az utóbbi időben sokat gondolkodott és megmagyarázta, hogy miért nem merült el alaposabban bennük:

„Nincs időm, és ezen a területen, amely szörnyű nagy, a gondolataim még nem bontakoztak ki kellőképpen.”

Ezután leírta a zárómondatokat:

„Nyomtasd ki ezt a levelet a Revue encyclopédique-ben. Életem folyamán sokszor mertem olyan megállapításokat tenni, amelyekben nem voltam biztos; de mindaz, amit itt leírtam, már majdnem egy éve a fejemben van és nagy érdekem, hogy ne tegyem ki magamat annak a gyanúnak, hogy olyan tételeket hírdetek, amelyek nincsenek teljes mértékben bebizonyítva.

Intézz nyilvánosan kérést Jacobihoz, vagy Gauss-hoz, hogy mondjanak véleményt ezeknek a tételeknek nem az igazságukról, hanem a fontosságukról.

Akkor remélhetőleg akadnak majd olyanok, akik érdemesnek tartják ezt az egész zűrzavart kibetűzni.

Túláradó szeretettel ölellek.

E.Galois
1832. május 29.”

Végül azt a kéziratot nézte át, amelyet az akadémia visszautasított. Úgy gondolta, hogy felülvizsgálja mind a 11 oldalt, abban minden egyes bizonyítását.

A II. tétel bizonyításáról tudta, hogy az nem kielégítő. Írt néhány sort a margóra, de mégsem tetszett neki a megfogalmazás, újra kihúzta és fölé írta:

„Ennél a bizonyításnál egyet-mást ki kell egészíteni. Nincs időm.”

Hogy is lett volna ideje. Hajnal 5-kor megjelentek segédjei, hogy elvigyék őt a párbaj helyszínére. A párbaj végkimenetelét már ismerjük. Reggel egy paraszt talált rá a földön fekve. Beszállították a Cochin kórházba. Az ágya mellett síró öccséhez a következő szavakat intézte:

„Ne sírj, Alfred. Egész bátorságomra szükség van, hogy húsz éves fejjel meg tudjak halni.”

1832. május 31-én, délelőtt 10 órakor, egy csütörtöki napon meghalt Evariste Galois. 1832. június 2-án vitték Galois koporsóját barátai egy ma ismeretlen, nyílvános temetőbe. Háromezer republikánus hallgatta a beszédeket, amelyek Galois republikánus erényeit méltatták.

6. ábra. Galois síremléke

Hetvenhét évvel később, 1909. június 13-án, egy Bourg-la-Reine-i ünnepségen adóztak Galois géniuszának. A polgármester, az akadámia titkára, állami hivatalnokok, matematikusok, gyerekek, polgárok és járókelők álltak egy szegényes ház előtt, nagy tömegben. Domborművet lepleztek le, amelyen egyszerű szavakkal hirdetik, hogy e ház a nagy matematikus Evariste Galois szülőháza.

7. ábra. Galois szülőháza

3. Galois elméletének alkalmazása

Galois zseniális felfedezésének lényege, hogy rámutatott arra, bizonyos testelméleti kérdések sokkal áttekinthetőbb formában tárgyalhatók a csoportelmélet eszközeivel.

Legyen K egy tetszőleges test, amelyről a továbbiakban mindig feltesszük, hogy 0-karakterisztikájú. Ezt a K-t alaptestnek szokás nevezni. Legyen továbbá N a K-nak véges normális bővítése. Ennek részletezését a későbbiekben tesszük meg. A Galois-elmélet az ilyen N/K bővítéseket vizsgálja oly módon, hogy minden ilyen bővítéshez egy csoportot rendel hozzá.

Tekitsük az N testnek azokat az automorfizmusait, amelyek K elemeit fixen hagyják. Az ilyen automorfizmusokat relatív automorfizmusnak vagy az N/K bővítés automorfizmusainak hívjuk.

1. Tétel. *Az N/K bővítés automorfizmusai csoportot alkotnak. Ezt nevezzük az N/K bővítés Galois-csoportjának és a következő képpen jelöljük: $\Gamma(N/K)$.*

A Galois-csoport elemei automorfizmusok, mégpedig N-nek K-t fixen hagyó automorfizmusai; a csoportművelet szerepét az automorfizmusok kompozíciója tölti be.

Szokás egy $f \in K[x]$ polinom Galois-csoportjáról is beszélni, amelyen a következőt értjük. Tekintsük f-nek egy felbontási testét, N-et. Ekkor az N/K normális testbővítés. Az f polinom Galois-csoportján az N/K normális bővítés Galois csoportját értjük.

Most pedig nézzük Galois elméletének egy alkalmazását a geometriai szerkeszthetőség területén. Három híres ókori szerkesztési probléma: a kockakettőzés, a környégyszögesítés, és a szögharmadolás a matematika legrégebbi kérdései közé tartozik, több mint 2000 éven át megoldatlanok maradtak. A megoldás keresése viszont óriási fejlődést eredményezett, többek között a csoportelmélet, s ezáltal az absztrakt algebra kialakulásához vezetett.

Több ókori forrás (Plutarkhosz, Eutokiosz, Eratoszthenész) is beszámol arról a mondáról, ami a kockakettőzés problémáját –adott kockához olyan kockát szerkeszteni, amelynek térfogata duplája a megadottének– Délosz lakóihoz köti. Eszerint a délosziak Apollón Delphoiban működő jósdájához fordultak, amikor városukat a pestis megtámadta. Az orákulum szerint Apollón kocka alakú oltárát kell kétszeresére cserélni, hogy a járványtól megszabaduljanak. Ezért nevezik a kockakettőzést déloszi problémának is. A valóságban a feladat a monda keletkezését megelőzően is foglalkoztatta a tudósokat. A régészeti leletek között figyeltek fel olyan szarkofágokra, dobozokra, ládákra, amelyeknél a belső üreg térfogata a tömb térfogatának fele, alakja ahhoz hasonló. Már az ókorban számos megoldás született a kockakettőzésre.

A kör négyszögesítése –azaz adott körrel megegyező területű négyzet szerkesztése– minden bizonnyal a kör területének kiszámításából ered. A probléma, mint gyakorlati feladat, már az ókori Egyiptomban (Kr.e. 1800 előtt) felvetődött. Ezen problémára is több megoldás született, de nem euklideszi térben.

A szögharmadolás kérdésének eredetére nincsenek megbízható adatok. Egy elképzelhető motiváció a szabályos 9-szög szerkesztése, amelyhez a 60°-os szöget kellett volna tudniuk harmadolni. Az euklideszi eszközökön kívül más görbéket felhasználó megoldások a szögharmadolásra is születtek.

A három híres ókori probléma megoldása végül a XIX. században született meg. 1837-ben Wantzel bizonyította be, hogy a kockakettőzés és a szögharmadolás euklideszi szerkesztéssel nem végezhető el; a környégyszögesítésre vonatkozó hasonló eredményhez szükség volt arra, hogy a π transzcendens szám, amit Lindemannak sikerült először igazolnia 1882-ben.

Tehát a fő kérdés ezen problémákkal kapcsolatban, hogy megszerkeszthetőek-e euklideszi szerkesztéssel, vagy sem. Az euklideszi szerkesztés során a vonalzó csak két adott ponton áthaladó egyenes megrajzolására, a körző pedig csak adott középpontú és adott két pont távolságával megegyező sugarú kör megrajzolására használható. Maga a szerkesztés pedig olyan eljárás, amelynek során előre adott pontokból kiindulva körök és egyenesek metszéspontjaként újabb pontokat szerkesztünk.

Tehát a megengedett szerkesztések:

(1) két megszerkesztett egyenes metszéspontjának kijelölése;
(2) megszerkesztett kör és egyenes metszéspontjának kijelölése;
(3) két megszerkesztett kör metszéspontjának kijelölése.

Azt mondjuk, hogy egy P pont a kiindulási pontokból euklideszi szerkesztéssel megkapható, ha az alapszerkesztések egy véges sorozatát alkalmazva ezen pontot kapjuk eredményül.

Legyen adott az euklideszi síkon a $P_1, P_2, \ldots$ pontoknak egy (legalább 2 elemű) H_0 halmaza. Rajzoljuk meg az összes P_i, P_j $(i \neq j)$ pontpáron átmenő egyenest, továbbá az összes P_k pont körüli $\overline{P_iP_j}$ sugarú kört. Ezen egyenesek és körök metszéspontjainak H_1 halmaza nyilvánvalóan tartalmazza a H_0 pontjait. Azaz $H_0 \subseteq H_1$.

Az is nyilvánvaló, hogy H_1-nek H_0-on kívüli pontjait alapszerkesztéssel kaptuk. Vegyük most már H_1 pontjait adottnak, és ismételjük meg az előbbi eljárást. Az így nyert pontok halmaza legyen H_2. Az előbbihez hasonlóan $H_1 \subseteq H_2$. Ennek megismétlésével az alábbi ponthalmazhoz jutunk:

$$H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \ldots$$

1. Definíció. *Egy P pontot a H_0 ponthalmazból megszerkeszthetőnek nevezünk, ha P benne van valamelyik H_i-ben.*

A geometriai szerkeszthetőség algebrailag jellemezhető. Ahhoz, hogy egy pontnak adott ponthalmazból való megszerkeszthetőségére feltételt kapjunk, a geometriai problémát algebrai problémává fogjuk átfogalmazni. Ezáltal a körzővel és vonalzóval való szerkeszthetőség problémája tárgyalhatóvá válik majd Galois-elmélet segítségével. Az átfogalmazás egyik kézenfekvő módja, hogy felveszünk egy Descartes-féle koordinátarendszert úgy, hogy az x-tengelyt két adott vagy megszerkeszthető ponton át fektetjük és kezdőpontjának az egyik, egységpontnak a másik pontot választjuk. Tehát az $O(0, 0)$ az origó és $E(1, 0)$ az egységpont.

Ezen koordinátarendszerben a pontokat koordinátáikkal, az egyeneseket tengelymetszeteikkel, a köröket pedig középpontjuk koordinátáival és sugaruk hosszával jellemezhetjük. A szerkesztés kiindulási adatai (pontok, egyenesek, körök) ilyen módon számadatokkal jellemezhetők. Ezek a számadatok generálnak egy testet. Jelöljük K_0-lal azt a legszűkebb számtestet, amely az adott ponthalmaz pontjainak koordinátáit tartalmazza. Ezt a K_0-at a H_0 ponthalmazhoz tartozó alapszámtestnek nevezzük. Maga a K_0 számtest függ attól, hogy melyik pontot választottuk a koordinátarendszer kezdő-, illetve egységpontjának.

2. Tétel. *Legyen K_0 a szerkesztési feladat adatait tartalmazó legszűkebb test, és $x_1, \ldots, x_n$ legyenek a megszerkeszthető alakzatok adatai. A szerkesztés (a fenti értelemben) csak akkor végezhető el, ha létezik K_0-nak olyan N normális bővítése, amely $x_1, \ldots, x_n$ mindegyikét tartalmazza, és N/K_0 foka 2-nek hatványa. Speciálisan: mindegyik x_i algebrai K_0 felett.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy K_0 az a legszükebb számtest, amely az adott ponthalmaz pontjainak koordinátáit tartalmazza. Nyilvánvalóan $\mathbb{Q} \subseteq K_0 \subseteq \mathbb{R}$. Ha a már említett megengedett szerkesztéseket megvizsgáljuk, akkor látható, hogy

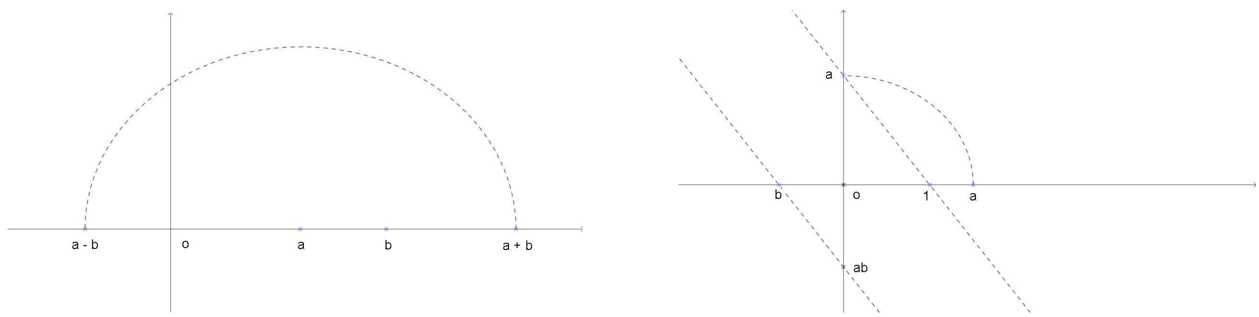
(1) K_0-beli számokkal jellemzett két egyenes metszéspontjának meghatározása esetén a metszéspont koordinátáit az előző adatokból a 4 alapművelet segítségével meg tudjuk határozni; ezek a koordináták szintén benne lesznek K_0-ban, mivel lineáris egyenletrendszer megoldásai az együtthatókat tartalmazó számtest elemei;

(2) K_0-beli számokkal jellemzett egyenes és kör metszéspontjainak koordinátáit másodfokú egyenlet megoldása révén kaphatjuk meg; ezek a gyökök, ha nincsenek K_0-ban, akkor benne vannak egy K_0-beli pozitív a elem négyzetgyökének adjunkciójával alőállt testben:
$$K_1 = K_0(\sqrt{a});$$

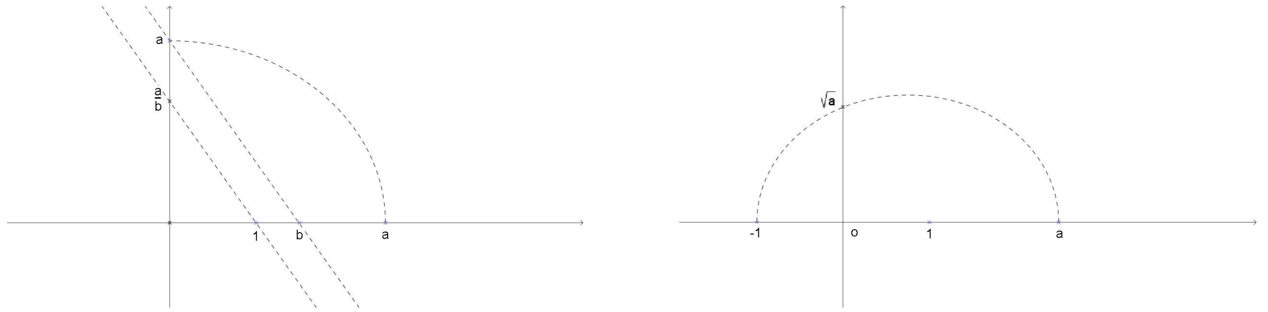
(3) K_0-beli számokkal jellemzett körök metszéspontjainak koordinátáira ugyanaz igaz, mint a kettes pontban egyenes és kör metszéspontjainak koordinátáira.

Mindezek alapján látható, hogy valamely pont akkor és csak akkor szerkeszthető meg, ha koordinátái olyan K_j testnek elemei, amely K_0-ból véges lépésben előáll a következőképpen:
$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n =: L.$$
Itt
$$K_{j+1} := K_j(\sqrt{a_j}) \qquad (a_j \in K_j;\ j = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$
Tehát minden egyes szerkesztési lépésnél az adott és megszerkesztett adatok által generált test vagy változatlan marad, vagy egy elemének négyzetgyökét kell hozzá adjungálni. Ha tehát egy megoldandó szerkesztési feladatot minden lépésnél nyomon követünk a meglévő adatok által generált testtel, akkor olyan testsorozatot kapunk, ahol K_0 az alaptest, mindegyik K_j a megelőző K_{j-1}-nek legfeljebb másodfokú bővítése, és L a megszerkesztendő adatokat már tartalmazza. Mivel minden bővítés fokszáma 1 vagy 2, az L/K_0 bővítés foka 2-hatvány. A normalitás biztosítása céljából minden lépésnél $\sqrt{a}$ adjunkciója esetén $\sqrt{a'}$-t is adjungáljuk, ahol a' ugyanazon K_0 feletti irreducibilis polinom gyöke, mint a. Ez ismét 2-odfokú bővítés, tehát végül olyan N/K_0 normális bővítéshez jutunk, amelynek fokszáma 2-nek valamely hatványa.

Megfordítva, a 8. illetve 9. ábrából látható, hogy adott $a, b \in K_j$ értékekből az
$$a + b,\ a - b,\ ab,\ \frac{a}{b}\ (b \neq 0),\ \sqrt{a}\ (a > 0)$$
értékek is mindig megszerkeszthetők. Minthogy $K_{j+1} = K_j(\sqrt{a_j})$ minden eleme
$$b_j + c_j\sqrt{a_j} \quad (a_j, b_j, c_j \in K_j)$$
alakú, azért ha K_j elemei megszerkeszthetők, akkor K_{j+1} $(j = 0, 1. \ldots, n-1)$ elemi is. Ennélfogva minden olyan pont megszerkeszthető, amelynek koordinátái ilyen K_j-ből valók.



8. ábra.



9. ábra.

□

A Galois-elmélet felhasználásával a szerkeszthetőség kritériuma a következőképpen is megadható:

3. Tétel. *Legyen adott a legalább 2 elemű H_0 ponthalmaz, és legyen K_0 a H_0-hoz tartozó (legszűkebb) számtest. Egy x_i valós szám akkor és csak akkor szerkeszthető meg a H_0-ból, ha x_i zérushelye egy olyan $f(x) \in T[x]$ polinomnak, amely K_0 fölött irreducibilis, és amelynek Galois-csoportja $2^k (k \geq 0)$ rendű.*

Mivel ezt az észrevételt az egyes szerkeszthetőségi problémáknál csak $K = \mathbb{Q}$ esetre fogjuk alkalmazni, ezért elegendő csupán azt eldönteni valamely egész együtthatós polinomról, hogy rendelkezik-e racionális gyökkel. Ilyen elegendő feltételt biztosít az alábbi

1. Állítás. *(Rolle-tétel) Ha az $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$ relatív prímek) racionális szám az $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ polinom gyöke, akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.*

4. Tétel. (KOCKAKETTŐZÉS) *Euklideszi szerkesztéssel nem oldható meg adott kockához olyan kockát szerkeszteni, amelynek térfogata duplája a megadotténak.*

Bizonyítás. A tengelyeket vegyük fel úgy, hogy a megadott él két végpontja 0, illetve 1 legyen. Mint már említettük, maga a számtest függ attól, hogy melyik pontot választottuk a koordinátarendszer kezdő-, illetve egységpontjának. Ebben az esetben a kiindulásul megadott pontoknak megfelelő számok által generált számtest a $\mathbb{Q}$. Tehát az eredeti kocka élhossza ezáltal 1. Ha a megszerkesztendő él hosszát x-szel jelöljük, akkor nyilván

$$x^3 = 2.$$

Az alaptest tehát $K_0 = \mathbb{Q}$, továbbá legyen N az $f(x) = x^3 - 2$ polinom felbontási teste. A Rolle-tétel alapján f racionális gyöke csak a $\{\pm 1, \pm 2\}$ halmaz elemei lehetnek. Könnyen ellenőrizhető azonban, hogy e halmaz elemeiben f nem tűnik el. Vagyis, f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Ezért f a $\sqrt[3]{2}$ minimálpolinomja, tehát N bővítésének a foka 3, ami azonban nem 2 hatvány. A korábbi tétel szerint ezért $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető meg K_0-ból. □

5. Tétel. (A KÖR NÉGYSZÖGESÍTÉSE) *Euklideszi módon nem oldható meg adott körrel megegyező területű négyzet szerkesztése.*

Bizonyítás. A kört a középpontjával és egy pontjával tekintjük adottnak. A tengelyeket vegyük úgy fel, hogy a kör középpontja a 0, az adott pontja pedig az 1 legyen. Másszóval, egységnek választva a kör sugarát, feladatunk megszerkeszteni a π területü négyzetet. Az alaptest most is a racionális számtest: $K_0 = \mathbb{Q}$. A megszerkesztendő $\sqrt{\pi}$ oldalhossz a $K_0(\sqrt{\pi})$ testben van. Mint ismeretes, a π nem algebrai szám, azaz π nem gyöke egyetlen egy racionális együtthatós (nem nulla) polinomnak sem. A $K_0(\sqrt{\pi}) \mid K_0$ bővítés tehát transzcendens, így a kör négyszögesítése körzővel és vonalzóval nem oldható meg. □

6. Tétel. (Szögharmadolás) *Adott szög három egyenlő részre osztása euklideszi szerkesztéssel nem megoldható.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $\varphi = \frac{\pi}{3}$ szög nem harmadolható euklideszi módon. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy az $u := 2\cos\frac{\pi}{9}$ hossz nem szerkeszthető euklideszi módon. A trigonometrikus szabályok alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

Innen az $x = \frac{\pi}{9}$ helyettesítéssel és egyszerű algebrai átalakítással adódik, hogy u eleget tesz az $u^3 - 3u - 1 = 0$ egyenletnek. A Rolle-tétel alapján, ha ennek az egyenletnek van racionális gyöke, akkor az szükségképpen eleme a $\{\pm 1\}$ halmaznak. Azonban $f(1) = -3$ és $f(-1) = 1$, tehát f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Ez azt jelenti, hogy u definiáló polinomja harmadfokú, ami nem 2-hatvány. A korábbi tétel szerint ezért $2\cos\frac{\pi}{9}$ nem szerkeszthető meg K_0-ból. □

4. Összefoglalás

Galois életrajza némi kiegészítést igényel. A halálának körülményei nem olyan egyértelműek, ahogyan azt bemutattuk. A párbaj előzményei sosem váltak teljes mértékben ismertté. Egyesek azt állították, hogy tényleg a nevezett hölgy miatti összetűzés eredménye volt a párbaj, míg mások szerint királypártiak hívták ki republikánus nézetei miatt. A börtönbeli események is alátámaszthatják ez utóbbi föltevést. Sőt még az is felmerült, hogy maguk a republikánusok akarták holtan látni, hogy temetését fegyveres felkelés kirobbantására használják föl. Legyen holttest, amellyel fellázíthatják a népet.

Alexandre Dumas 1863-65-ben kiadott önéletrajzában (Mes Mémoirs) azt írja, hogy Pécheux d'Herbinville lőtte le Galois-t. A gyilkos egyetlen ismert formában sincs nevesítve, viszont olyan iratot sem ismernek, amely ennek ellentmondana. Arra nem utal semmi, hogy rendőrspicli lett volna, viszont azt tudjuk, hogy republikánus volt, a 19-ek perében ő is ott volt a felmentettek között.

Két független forrásból azt is tudjuk, hogy a republikánusok 1832. júniusára forradalmat terveztek, és csak a kedvező időpontra vártak.

Monsieur Gisquet, az akkori rendőrfőnök Galois halálának körülményeiről szóló tudósítását így kezdte: „Monsieur Galois-t, egy fanatikus republikánust, egyik barátja párbajban megölte."

Alfrèd Galois, Evariste öccse, látta őt halála előtt a kórházban. Alfrèd egész életében azt állította, hogy Galois-t a király rendőrsége ölte meg. Miközben azzal próbálkozott, hogy a matematikusok figyelmét Galois munkáira irányítsa, sok emberrel találkozott és bátyja haláláról vallott nézeteit így széles körökkel megismertette.

1849-ben, a Nouvelles annales de mathématique-ban Galois-ról egy cikk jelent meg, amely a következő mondattal kezdődött: „Galois-t 1832. május 31-én egy úgynevezett becsületbeli ügyben meggyilkolták.", utalva arra, hogy nem egy szerencsétlen kimenetelű párbaj áldozataként vesztette életét.

Infeld írásában megállapítja, hogy Galois-t meggyilkolták.

Galois levelét, amelyet a párbaj előtti éjszakán Chevalier-hoz írt, 1832-ben a Revue encyclopédique-ben hozták nyilvánosságra. Arról nem tudunk, hogy ekkor bárki is elolvasta vagy megértette volna.

Galois kéziratai eljutottak Joseph Liouville-hez, aki végre komoly erőfeszítéseket tett Galois munkásságának megértése érdekében. A legfontosabb eredményeket 1846-ban közölte a Journal de mathématiques pures et appliquées-ben.

1870-ben, majdnem negyven évvel Galois halála után Camille Jordan egy könyvet írt a szubsztitúciók elméletéről. Az előszóban azt írja, hogy műve csak kommentár Galois munkáihoz. Ez a könyv volt az első, amely a matematikus-világ figyelmét Galois életművére irányította.

Sophus Lie 1894-ben megjelent „A matematika fejlődése" című tanulmányában a XIX. század négy legjelentősebb matematikusa közé sorolja Galois-t, Gauss, Cauchy és Abel mellé.

1906-ban és 1907-ben Jules Tannery közzétett Galois kézirataiból. Tudományos szempontból ezek jelentősége kisebb volt, mint azoké, amelyeket Liouville hozott nyílvánosságra.

Tragikus életéről Infeld írt regényt „Akit az Istenek szeretnek" címmel, utalva ezzel arra a régi görög mondásra, hogy akit az istenek szeretnek, korán hal meg.

Ezekkel a művekkel váltak hozzáférhetővé Galois felfedezései, és így került méltó helyére a matematika történetében. Rövid munkássága olyan nagy hatással volt a matematika hatalmas területére, hogy ezért őt szokás a „matematika hercegének" nevezni. Megmutatta, hogy melyek azok az egyenlettípusok, amelyeket algebrailag, tehát csupán a négy alapművelettel és gyökvonással megoldhatunk. Ezzel végleges feleletet adott az algebrai egyenletek több száz éves problémájára. 1832-ben Evariste Galois munkásságával elkezdődik az absztrakt algebra első fejezete, a Galois-elmélet. Mint már láttuk, az elmélet kapcsolatot nyújt a matematikai testelmélet és a matematikai csoportelmélet között. A Galois által megteremtett csoportelmélet áttörte a matematika határait. Nagy szerepet játszik olyan tudományokban, mint a kémia, geológia és elméleti fizika. Az előbbi kettőben a kristályszerkezetek leírására, az utóbbiban pedig a részecske- és kvantumfizikában föllépő transzformációk szimmetriacsoportjainak vizsgálatában alkalmazzák.

Hivatkozások

[1] Leopold Infeld, *Akit az istenek szeretnek*, Művelt Nép Tudományos és Ismeretterjesztő Kiadó, Budapest, 1955.
[2] Szendrei Ágnes, *A geometriai szerkeszthetőség algebrai elmélete*, Poligon **3**(1), 1993.
[3] Szendrei János, *Algebra és számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.
[4] Fuchs László, *Algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
[5] http://www.osztrak.sulinet.hu/nyito/operenc/06dec/francia.html
[6] http://hu.wikipedia.org/wiki
[7] http://jonathan.touboul.free.fr/article.php3?id_article=63
[8] http://www.louis-le-grand.org
[9] http://editions.campusfrance.org/etabs/par_fiche/en/ge_ensparis_en.pdf
[10] http://www.parisenimages.fr/fr/galerie-des-collections.html
[11] http://fr.wikipedia.org/wiki/Duel_(combat)
[12] http://www.white-rabbit.jp/Column/essay6.html

Tartalom