Some Problems in Discrete Time Financial Market Models

Random Field Forward Interest Rate Structures, Limiting Connections to Continuous Time Markets, Stochastic Dominance in Optimal Portfolios

Outline of the PhD Thesis

József Gáll

University of Debrecen

Doctoral Committee of Natural Sciences

Doctoral School of Mathematics and Computer Sciences

Debrecen, 2006

Some Problems in Discrete Time Financial Market Models

Random Field Forward Interest Rate Structures, Limiting Connections to Continuous Time Markets, Stochastic Dominance in Optimal Portfolios

Outline of the PhD Thesis

József Gáll

University of Debrecen

Doctoral Committee of Natural Sciences

Doctoral School of Mathematics and Computer Sciences

Debrecen, 2006

1 Introduction

Most of my research activity in the past years was focused on certain financial problems which are related with discrete time financial markets. In my PhD thesis I showed the main results I obtained on these fields. The present work is an outline of the thesis at issue. The basic research problems were the following: construction of arbitrage free Heath-Jarrow-Morton type random field interest rate models in discrete time case, that is, models where the forward rate curves are driven by a random field; estimation of the parameters of random field forward rate models and the properties of the estimators; limit behaviour of some discrete time markets, in particular, the case of multinomial tree models and the case of random field forward rate models; comparison of the proportions of financial assets in optimal portfolios, the case of dependent assets, and the relationship between the demand of the assets and stochastic dominance of the assets. For further results of the author on other topics see the list of publications (page 25).

The results summarised in the thesis are based on [7], [8], [9], [10], [11], [12]. Except for [7], these papers of mine are joint works with my co-authors, Prof. G. Pap (University of Debrecen, Hungary) and Prof M. van Zuijlen (Radboud University, The Netherlands).

It is of course not possible to present all results of the thesis, especially not in a detailed way, in such an short outline. Hence, I summarise the results of the research topics in a short way and I only give a few main results in a more precise mathematical form as an example in case of each main topic. In this work, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}_+$ will denote the sets of real numbers, integers, positive integers and nonnegative integers, respectively.

2 Discrete time forward rate models

First we deal with problems related with forward interest rate models (and their construction), which was a main field of our research interest in the past years. We proposed (see [11]), discrete time Heath-Jarrow-Morton type forward rate curve models where the forward rates corresponding to different time to maturity values are driven by a random field.

The main notions and assets of such a model can be summarised as follows. Let $f_{k,\ell}$ denote the forward interest rate at time k with time to maturity date

ℓ $(k, \ell \in \mathbb{Z}_+)$. Thus, this forward interest rate is supposed to hold for the time period $[k+\ell, k+\ell+1)$. Based on this we can define the bond price structure of the market in the following way (using continuous compounding convention). At time k the price of a zero coupon bond having maturity date ℓ is defined recursively by

$$P_{k,\ell} = \exp\left\{ - \sum_{j=0}^{\ell-k-1} f_{k,j} \right\}, \qquad 0 \leq k \leq \ell,$$

where $P_{k,k} := 1$. The proposed models we study in the thesis are equipped with forward rate dynamics of the form

$$f_{k+1,j} = f_{k,j} + \alpha_{k,j} + \beta_{k,j} \left(S_{k+1,j} - S_{k,j} \right),$$

where $\{S_{k,j}\}_{k,j\in\mathbb{Z}_+}$ is a random field and $\{S_{k,j},\ \alpha_{k,j},\ \beta_{k,j}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ is adapted to a certain filtration, say, $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ for all $j \in \mathbb{Z}_+$. The key feature in our proposed model is that the forward rates corresponding to different time to maturity values can be driven by different discrete time processes, that is, the forward rates are driven by a random field. Hence, different market 'shocks' may impact at the different forward rate processes.

In the literature one can find several approaches to the formulation of interest rate structures and based on them one can derive prices of bonds and other interest rate dependent financial assets. An overview on this subject is given e.g. in [23].

Our approach is based on the idea of Heath, Jarrow and Morton [18]. They constructed a continuous time model for the forward interest rate structures and derived the bond prices from this structure. Later on many authors studied similar models. We note that there are different parametrisations of these models. We follow the so-called Musiela parametrisation (see [22] and [3] for more). It is natural to generalise the HJM model by introducing a random driving field instead of a single driving process so that the forward rates with different time to maturity values can be driven by different processes. Such generalisation of the continuous time HJM model has been proposed by Kennedy [21]. Later, Goldstein [15] and Santa-Clara and Sornette [27] studied such models. Such a general model (driven by a random field) will be called *'random field' model* in contrast to the earlier, in the above sense more simple (not random field) models of the literature, which we will call *classical*.

A major task in defining such a model is to find appropriate driving processes or driving fields for the forward rates. Although in the classical models, Brownian motion is the most commonly used driving process (see e.g. [18]), more general models are also known in the literature. Schmidt [26] proposed for instance a natural alternative of the Brownian motion, namely, the Ornstein-Uhlenbeck process, which can be considered as the natural analogue of an AR(1) process of discrete time. Sometimes, some further considerations can be taken into account —especially in the random field case—, which help us to find appropriate and more realistic candidates. Typically, the covariance structure of the driving field can be restricted by further assumptions, as described e.g. in [15] and [27]. Knowing the classical models, it is not surprising to notice that Brownian sheets and also integrated Brownian sheets and Ornstein-Uhlenbeck sheets are quite often used in the random field case. See Kennedy [21], Goldstein [15] or Santa-Clara and Sornette [27]. Note that in [27] some further examples are also studied.

The HJM model in [18] as well as the models studied in [21], [15] and [27] are continuous time models. One can find several works on the discrete versions of the classical HJM models. Here we mention [17], [19] and [24]. Like in the classical case, it is reasonable and sensible to model and investigate possible *discrete time counterparts* of the continuous time *random field models.*

Having in mind the above historical remarks our motivation was based on the following ideas. This way one can build up more general and hence more flexible interest rate models than in the case of classical models (which are driven by a single process). On the other hand, one has the chance of finding an appropriate structure to describe interest rate behaviour such that the models are fitted well in a statistical sense and not necessarily overparametrised or overfitted as in many cases of financial applications. This leads to many statistical problems, some of them (e.g. asymptotic properties of maximum likelihood estimators) are studied in Chapter 3. That was the motivation for dealing with some statistical issues. Last but not least, the idea of random field models occurred in the literature of continuous time interest rate models, however, certain difficulties with financial calculus suggest that one could benefit from a discrete time approach, which may help later the development of continuous time models as well.

First (in Chapter 2) we turned to the introduction of discrete time random field forward rate models at issue. After the definition of necessary fundamental notions the main aim was to derive sufficient conditions under what arbitrage opportunities are excluded in the market. Such conditions are often called drift conditions (or no-arbitrage conditions) in the literature of forward rate models, since one can interpret them as an extra condition for the form of the drift term, more precisely, under such a condition the drift term can be determined by the rest of the model features. In this chapter drift conditions are derived for a general forward rate structure and drift conditions are also given in the interesting case of Gaussian driving fields. For this the existence of a general stochastic (market) discount factor, say $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, which contains market price of risk parameters, is assumed, namely: put $M_0 := 1$ and

$$M_{k+1} = M_k \frac{\exp\left\{-r_k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}\right\}}{\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}\right\} \big| \mathcal{F}_k\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

where the market price of risk factor $\phi_{k,j}$ is an $\mathcal{F}_k$-measurable random variable for $k, j \geq 0$, $\Delta_1 S_{k,j} = S_{k+1,j} - S_{k,j}$ and $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}$ is assumed to converge in probability. The role of this factor is to describe how the market sets up the prices, more precisely, it describes how the market adjusts the prices by taking into account certain risk preferences.

Following this one can find two examples for the random field structure which the statistical studies of the following chapter are based on. Here we mention a spatial autoregression random field, where $S_{k,\ell} := \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell} \rho^{\ell-j}\eta_{i,j}$ for $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$, where the $\eta_{i,j}$'s are i.i.d. r.v.'s. with mean 0 and variance 1. That is we have $\Delta_1 S_{k,\ell+1} = \rho\Delta_1 S_{k,\ell} + \eta_{k+1,\ell+1}$.

In Chapter 2 one can also get a comparison of the random field and the classical structures, since first a simple structure (called classical model) is considered, where the forward rates corresponding to different time to maturity values are driven by the same stochastic process.

Finally we note that the approach we have chosen is not the only possible way in order to obtain flexible general forward rate structures in discrete time. (Here we refer to two recent works by Filipović and Zabczyk [6] and by Akahori, Aoki and Nagata [1].)

3 Maximum likelihood estimation in random field forward rate models

In Chapter 3 some specific cases of the models introduced in Chapter 2 are considered: the forward rates are driven by a spatial autoregressive type of Gaussian random field described above, where the word Gaussian refers to the fact that it is generated here by i.i.d. standard normal r.v.'s, furthermore, it is supposed that the volatilities of the model are deterministic and they do not depend on time and time to maturity, i.e. $\beta_{k,\ell} = \beta \in \mathbb{R}$, $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$. Assuming the no-arbitrage conditions (derived in the previous chapter) the maximum likelihood estimation of the parameters is studied in such models. Throughout this part the estimations will always be based on a sample of forward rates $f_{k,\ell}$, $1 \le k \le K_n$ and $0 \le \ell \le L_n$, that is on a sample of size $K_n \times L_n$. It is also supposed that $K_n = nK + o(n)$ and $L_n = nL + o(n)$ as $n \to \infty$ with some $K > 0$ and $L > 0$.

3.1 Estimation of volatility

First only the estimator of the volatility is considered in various cases (see Section 3.1). For this, the likelihood function is derived and an explicit form of the estimator is given, where the remaining parameters are known.

Afterwards, a sequence of discrete time forward interest rate curve models at issue, say, $\{f_{k,\ell}^{(n)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$ is considered with initial values $\{f_{0,\ell}^{(n)} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$, with volatilities $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n \ne 0$, and with a Gaussian spatial autoregressive driving process $\{S_{k,\ell}^{(n)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ (described in page 4) equipped with parameter ϱ_n. Depending on the asymptotic behaviour of the autoregression parameter of the driving field the asymptotic normality of the estimator of the square of the volatility is shown both in the so-called stable case, where the autoregression parameter lies in $(-1, 1)$, and in a nearly unit root case, where the sequence of the autoregression parameters (of a sequence of forward rate models) tends to 1. Though asymptotic normality is proven, the two cases are fairly different: among others one needs to emphasise that the norming factors in the asymptotic results have different rates in the two cases.

Such results are first given in the so-called martingale models, where market price of risk factors do not occur. Here we only summarise these two martingale cases for the sake of simplicity.

Theorem. *Assume that* $\varrho_n = 1 + \gamma/n + o(n^{-1})$ *as* $n \to \infty$*, where* $\gamma \in \mathbb{R}$*, and* $\liminf_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| > 0$*. Then*

$$n^2 \beta_n^{-1} \left(\widehat{\beta}_{K_n,L_n} - \beta_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, 4\sigma^2\right),$$

where[1]

$$\frac{1}{\sigma^2} := K \int_0^L \left(\int_0^{2t} \mathsf{e}^{\gamma v} \, \mathsf{d}v \right)^2 \mathsf{d}t + \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_0^s \int_0^{2L+2u} \mathsf{e}^{\gamma v} \, \mathsf{d}v \, \mathsf{d}u \right)^2 \mathsf{d}s.$$

Theorem. *Assume that $\varrho_n \to \varrho$, where $\varrho \in (-1, 1)$ and $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$ as $n \to \infty$. Then*

$$n \left(\widehat{\beta}_{K_n, L_n} - \beta_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(0, \frac{2\beta^4}{2\beta^2 \lambda + KL} \right),$$

where

$$\lambda := \frac{K(2L+K)}{8\,(1-\varrho)^2}.$$

Afterwards, some more general cases involving market price of risk factors are the object of study as well, which provides a more natural setup. It is shown that using the tools applied in the previous results one can obtain similar results again. In certain cases depending on the behaviour of the autoregression parameter and the market price of risk parameters the asymptotic normality of the volatility estimator is proven again.

3.2 A joint estimation of the parameters

For practical applications it is more important to study the joint estimation of all parameters of forward rate models. In Section 3.2 such a problem is studied. For this, a vector of market price of risk parameters is involved in the stochastic discount factor: $\phi_{k,\ell} = b_{0,\ell} \in \mathbb{R}$ for $k \in \mathbb{Z}_+$ and $0 \leq \ell \leq J$ and $\phi_{k,\ell} = 0$ for $\ell > J$, where J is a known positive integer. Furthermore, the model contains the volatility and the autoregression parameter. In such a situation an explicit form of the estimators cannot be given due to the complexity of the likelihood function (here we note that the likelihood function is a high degree polynomial of the autoregression parameter). We also mention that the estimations are based on samples consisting of not independent and not identically distributed random variables, which causes further difficulties. However, first strong consistency of the parameter estimators has been proven and using this result the asymptotic

[1] Here $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ denotes convergence in distribution, whereas $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ denotes the normal law with mean μ and variance σ^2.

normality of the joint estimator has also been shown. Hence, numerical procedures are suggested to find the maximum likelihood estimators which show good asymptotic properties according to our results. Numerical (empirical) studies are out of the scope of this work, but we mention that we have started to deal with such problems (see [13] and [14].

The main results can be summarised as follows.

Theorem. *Let $H \subset \mathbb{R}^{J+3}$ be a compact set such that for all $(\beta, \varrho, \mathbf{b}) \in H$ we have $\beta > 0$, $\varrho \in (-1, 1)$. Let $(\beta_0,\ \varrho_0,\ \mathbf{b}_0)$ denote the true parameters, where we write $\mathbf{b}_0 = (b_{0,0},\ b_{0,1},\dots,\ b_{0,J})$ and we assume that $(\beta_0,\ \varrho_0,\ \mathbf{b}_0)$ lies in the interior of H. For each $n \in \mathbb{N}$ let $(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n)$ denote a maximum likelihood estimator of $(\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0)$ (maximising the likelihood function over H), where we write $\widehat{\mathbf{b}}_n = (\widehat{b}_{n,0}, \widehat{b}_{n,1}, \dots, \widehat{b}_{n,J})$.*

Then the maximum likelihood estimators $(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n)$ of $(\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0)$ are strongly consistent, i.e.,

$$(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n) \to (\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0) \qquad \text{a.s.} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Furthermore,

$$\begin{bmatrix} n(\widehat{\beta}_n - \beta_0) \\ n(\widehat{\varrho}_n - \varrho_0) \\ \sqrt{n}(\widehat{\mathbf{b}}_n - \mathbf{b}_0) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Lambda), \qquad \text{as } n \to \infty,$$

such that Λ is of the form

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

where

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}^2\right)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{2,2} & -\sigma_{1,2} \\ -\sigma_{1,2} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix}$$

with

$$\sigma_{1,1} = \frac{2KL}{\beta_0^2} + \frac{K(K+2L)}{2\left(1-\varrho_0\right)^2}, \qquad \sigma_{2,2} = \frac{KL}{1-\varrho_0^2} + \frac{K(K+2L)\beta_0^2}{2\left(1-\varrho_0\right)^4},$$

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = \frac{K(K+2L)\beta_0}{2\left(1-\varrho_0\right)^3},$$

furthermore, Λ_2 *of size* $(J+1)\times(J+1)$ *has the form*

$$\Lambda_2 = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\varrho_0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We emphasise that in this chapter only a few specific models have been investigated. One can, of course, choose different model features regarding to the volatility structure, the structure of the driving field or to the market price of risk structure. We hope that the methodology (applied in Subsection 3.2.2 and Subsection 3.2.4) and some general lemmas (derived in Subsection 3.2.5) we used can help to obtain similar results for various models. For the specification of further forward rate models we refer to Cont [5], where one can find many useful practical and theoretical issues (e.g. suggested model features) for this purpose.

4 Limiting results for discrete time markets

In Chapter 4 the limit behaviour of sequences of certain type of discrete time financial models is studied.

4.1 Limiting behaviour of some stock price trees

First, some tree models for stock prices are considered, that is, generalisations of the well-known binary (e.g. binomial) tree models. The main question was to describe the possible limit laws of the stock price at the terminal date. Note that in the special case of binary trees such results are given in [25].

For this, let $N > 1$ be a fixed integer, $S_0 > 0$ be a constant representing the initial value of the stock price at time 0, $T > 0$ be a terminal date. The trading times, when the new prices are announced, will be $t_k^n = kT/n$ for $k = 0, \dots, n$ and $n \in \mathbb{N}$. The trading time t_k^n is meant to be the kth one in the nth market. The value of the stock price process in the nth market at time t_k^n is defined by

$$S_k^n = S_0(1+\rho^{n,1})(1+\rho^{n,2})\dots(1+\rho^{n,k})$$

for $n \in \mathbb{N}$ and $k = 1, \dots, n$, where $\rho^{n,k}$'s are row-wise independent triangular system of random variables with $\mathbb{P}(\rho^{n,k} = a_i^{n,k}) = p_i^{n,k}$, $i = 1, \dots, N$, such that $\sum_{i=1}^N p_i^{n,k} = 1$ and $a_N^{n,k} > a_{N-1}^{n,k} > \cdots > a_1^{n,k} > -1$. The term $\rho^{n,k}$ is the (random) rate of return on the stock over the time interval $[t_{k-1}^n, t_k^n]$. Furthermore, we shall use notations $X_{n,k} := \ln(1 + \rho^{n,k})$, where the $X_{n,k}$'s are called logreturns and we denote their possible values by $b_i^{n,k} := \ln(1 + a_i^{n,k})$, $i = 1, \dots, N$.

Different cases depending on the asymptotic behaviour of the possible rates of returns of the stock price were investigated where we derived limit theorems for the stock price. First we have shown that the logreturns of the stock price can only be asymptotically normal provided that the possible logreturns vanish uniformly, furthermore, necessary and sufficient condition is given for the existence of the limit. In other words, in this case the limit is a Black-Scholes type model (see [4]). We omit to give the precise statement here and we turn to a more general (mixed) case. We only show here the main result of this case, in which a convolution of normal and Poisson distributions may occur for the logreturns and a necessary and sufficient condition is given for the existence of a limit in this case as well.

Theorem. *Consider price processes with the following features. Let us assume that there exist constants λ_i, $i = 1, \dots, N$, such that*

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} b_i^{n,k} = \lim_{n\to\infty} \min_{1\le k\le n} b_i^{n,k}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

and $\lambda_N \ge \lambda_{N-1} \ge \ldots \ge \lambda_{j_2+1} > \lambda_{j_2} = \lambda_{j_2-1} = \ldots = \lambda_{j_1} = 0 > \lambda_{j_1-1} \ge \ldots \ge \lambda_1$, where $1 \le j_1 \le j_2 \le N$. Write $I := \{1, \dots, j_1 - 1, j_2 + 1, \dots, N\}$ and assume, furthermore, that $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \sum_{i\in I} p_i^{n,k} = 0$. Let $z_{n,k} := \sum_{i=j_1}^{j_2} b_i^{n,k} p_i^{n,k}$.

Then $\ln(S_n/S_0)$ is weakly convergent if and only if the following limits exist:

$$d_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n p_i^{n,k}, \qquad i \in I,$$

$$b := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=j_1}^{j_2} \sum_{k=1}^n p_i^{n,k} \left(b_i^{n,k} + \frac{b_i^{n,k} - z_{n,k}}{1 + \left(b_i^{n,k} - z_{n,k}\right)^2} \right),$$

and

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \sum_{i=j_1}^{j_2} \frac{\left(b_i^{n,k} - z_{n,k}\right)^2}{1 + \left(b_i^{n,k} - z_{n,k}\right)^2}\, p_i^{n,k}.$$

In case of convergence the limit distribution of $\ln(S_n/S_0)$ *has the form*

$$\lambda_1\mathcal{P}(d_1) * \ldots * \lambda_{j_1-1}\mathcal{P}(d_{j_1-1}) * \mathcal{N}(b,\sigma^2) * \lambda_{j_2+1}\mathcal{P}(d_{j_2+1}) * \ldots * \lambda_N\mathcal{P}(d_N),$$

where $*$ *denotes convolution*[2].

Some special cases and examples are also given and some consequences of the limit results are also studied in the final remarks of the section in which sufficient conditions are given for the convergence of payoff values and other functions of the stock price.

4.2 Limiting results for some discrete time forward rate models

In the second part of Chapter 4 (in Section 4.2) the general framework of forward rates in discrete time settings (introduced previously) are recalled. Given a sequence $\{f^{(n)}_{k,\ell} : k,\ell \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$, of such models with deterministic volatilities a functional limit theorem is derived to describe the asymptotic behaviour of the sequence, i.e., sufficient conditions are given under what it is shown that for the random step functions $\widetilde{f}_n(s,t) := \frac{1}{n} f^{(n)}_{\lfloor ns\rfloor,\lfloor nt\rfloor}$, $s,t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, we have $\widetilde{f}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \widetilde{f}$ in the appropriate Skorokhod space $D([0,1]^2)$ (see [2] for more on the metric of the space), where $\widetilde{f}$ is a continuous time forward rate model driven by a random field. As an example, a nearly unit root autoregression case is studied as well, where it is supposed that the driving fields are of the same autoregression form as in the previous chapter (see also page 2): in this case the limit model is driven by an Ornstein-Uhlenbeck sheet. We omit to give the detailed statements here.

5 Proportions of financial assets in optimal portfolios: a case of dependent distributions

Finally, (in Chapter 5) we dealt with a classical problem of portfolio management (which can also be considered, in fact, as a microeconomic problem of optimal choice under uncertainty). The main question is the following: what properties of the individual utility function and of the distribution of the stock prices of

[2]If a random variable ξ has Poisson distribution with parameter d then we denote here the law of $\lambda\xi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) by $\lambda\mathcal{P}(d)$.

the market can imply that an individual invests more in a financial asset then in another one.

We considered a simple one–step financial market of n securities, where the securities are represented by their rate of returns $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ corresponding to a future time point, say, T, where r_i is a random variable with $\mathbb{P}(-1 \leq r_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, and denote the initial capital by X_0. Then a portfolio is denoted by $\pi = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, where β_i is the amount of money invested in asset i, and the value of π at T is $X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1 + r_i)$. Given a utility function U, we consider portfolios which are optimised by maximising their expected utility, that is, the portfolio $\pi_U^* = (\beta_{1,U}^*, \beta_{2,U}^*, \ldots, \beta_{n,U}^*)$ is said to be optimal if $\mathbb{E}\ U(X_T^{\pi_U^*}) = \sup_{\pi \in C_{X_0}} \mathbb{E}\ U(X_T^\pi)$, where the set of possible portfolios is $C_{X_0} = \{\ \pi \mid \pi = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n \beta_i = X_0\}$.

In order to answer the above question we introduced some new notions of stochastic dominance, which we called strong first order stochastic dominance (SFSD) and strong second order stochastic dominance (SSSD), as well as a conditional form of them for the case of multi-securities market. Here we give only the definition of SFSD.

Definition. *The random variable ξ is said to display strong first order stochastic dominance (SFSD) over the random variable η, which is denoted by $\xi \succcurlyeq_{SFSD} \eta$, if $F_{\xi|\eta}(x|y) \leq F_\eta(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$ and $\mathbb{P}_\eta$-a.e. $y \in \mathbb{R}$, where F_η is the distribution function of η and $F_{\xi|\eta}$ is a regular conditional distribution function of ξ given η.*

First, some basic properties of these notions are described in the thesis, we omit the details here. These properties are natural analogues of the well-known basic properties of the notions of first and second order stochastic dominance (discussed e.g. in [20]).

Based on SFSD or SSSD or their conditional forms some generalisations of the results of Hadar and Seo [16] are derived for the case of not necessarily independent returns of stocks. Here we give only one result for a two-securities market.

Theorem. *Let $U : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ be differentiable, concave and nondecreasing. Then the following statements are equivalent:*

(1) *$\beta_1^* \geq \beta_2^*$ in any two-securities market $\{r_1, r_2\}$ with $r_1 \succcurlyeq_{SFSD} r_2$, and $\mathbb{E} r_i < \infty$ for $i = 1, 2$,*

(2) *the function $x \mapsto xU'(x)$ is nondecreasing.*

Examples are also given for markets where SFSD or SSSD are fulfilled. Furthermore, another notion of stochastic dominance, called preferred stocks, is introduced and similar results are discussed for this case as well in the thesis.

1 Bevezetés

Az elmúlt években kutatási tevékenységem olyan pénzügyi problémákra koncentrálódott, melyek diszkrét idejű pénzpiacokkal kapcsolatosak. Az ezeken a területeken kapott eredményeket mutattam be a PhD disszertációmban. Ezen tézisek a disszertáció legfőbb eredményeinek összefoglalója. Az alapvető kutatási problémák az alábbiak voltak: arbitrázsmentes Heath-Jarrow-Morton típusú véletlen mezős kamatlábmodellek konstrukciója diszkrét idejű esetben, azaz olyan modellek konstrukciója, ahol a forward ráták görbéit egy véletlen mező hajtja meg; véletlen mezős kamatlábmodellek paramétereinek becslése és a becslések aszimptotikus tulajdonságainak vizsgálata; diszkrét idejű piacok konvergenciája, nevezetesen, multinomiális famodellek és véletlen mezős kamatlábmodellek esetének vizsgálata; pénzügyi eszközök részarányának összehasonlítása optimális portfóliókban, függő eszközárak esetén, az eszközök keresletének és az eszközök sztochasztikus dominanciájának kapcsolata. Az egyéb területeken írt publikációimat a publikációs lista tartalmazza (25. oldal).

Az ebben a doktori értekezésben található eredmények alapját a [7], [8], [9], [10], [11], [12] munkáim jelentik. Ezek, a [7] munka kivételével, közös publikációk szerzőtársaimmal, Pap Gyula (Debreceni Egyetem) és Martien van Zuijlen (Radboud Egyetem, Hollandia) professzorokkal.

Természetesen nem lehetséges a disszertáció minden eredményének az ismertetése, különösen nem lehetséges a részletes ismertetés egy ilyen rövid összefoglalóban. Ennélfogva összefoglalom az egyes kutatási területeken kapott eredményeket röviden és a főbb területek esetén csak néhány eredményt ismertetek matematikailag precízebb formában (példaként). Ebben a munkában $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}_+$ rendre a valós, az egész, a pozitív egész illetve a nemnegatív egész számok halmazát jelöli.

2 Diszkrét idejű forward kamatlábmodellek

Először forward kamatlábmodellekkel (és azok konstrukciójával) kapcsolatos kérdéseket tárgyalunk, amelyek kutatásunk egyik fő területét jelentették az utóbbi években. Olyan diszkrét idejű Heath-Jarror-Morton típusú forward kamatlábmodelleket javasoltunk (ld. [11]), amelyekben a különböző lejáratig hátralevő idő különböző értékeihez tartozó forward kamatlábakat egy véletlen mező hajtja meg.

Az alábbiakban összefoglaljuk egy ilyen modellhez szükséges legfontosabb fogalmakat és eszközöket. Jelölje a k időpontban az ℓ lejáratig hátralevő időhöz ($k, \ell \in \mathbb{Z}_+$) tartozó forward kamatlábat $f_{k,\ell}$. Ez a forward kamatláb tehát a $[k+\ell, k+\ell+1)$ időintervallum alatt érvényes a feltevések szerint. Ennek segítségével definiálhatjuk a piac kötvényeinek árstruktúráját (a folytonos kamatozási konvenciót használva). A k időpontban egy ℓ időpontban lejáró kuponszelvény nélküli kötvény ára a

$$P_{k,\ell} = \exp\left\{ - \sum_{j=0}^{\ell-k-1} f_{k,j} \right\}, \qquad 0 \le k \le \ell,$$

rekurzióval adható meg, ahol $P_{k,k} := 1$. A javasolt modellek, amelyekkel a disszertációban foglalkozunk, az

$$f_{k+1,j} = f_{k,j} + \alpha_{k,j} + \beta_{k,j} \left(S_{k+1,j} - S_{k,j} \right)$$

dinamikát követik, ahol $\{S_{k,j}\}_{k,j \in \mathbb{Z}_+}$ egy véletlen mező és $\{S_{k,j},\, \alpha_{k,j},\, \beta_{k,j}\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ adaptált egy adott $\{\mathcal{F}_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ filtrációhoz minden $j \in \mathbb{Z}_+$ esetén. A javasolt modell legfőbb tulajdonsága az, hogy a különböző lejárati időhöz tartozó forward kamatlábak különböző diszkrét idejű folyamatokkal lehetnek meghajtva, azaz a forward rátákat egy véletlen mező hajtja meg. Ennélfogva különböző piaci változások lehetnek hatással a különböző forward kamatlábak folyamatára.

Kamatlábstruktúrák kialakítására számos megközelítést találhatunk a szakirodalomban és ezeket alapul véve kötvények és egyéb kamatlábfüggő derivatívák árait is lehet így származtatni. Többek között Pelsser [23] ad egy áttekintést ezekről.

Az általunk alkalmazott megközelítés Heath, Jarrow és Morton [18] ötletén alapszik. Ők egy folytonos idejű modellt adtak a forward kamatlábak leírására és ezekből származtatták a kötvények árait. Később számos szerző foglalkozott hasonló modellekkel. Jegyezzük meg, hogy egy ilyen modell esetén különböző parametrizálások ismertek, mi az ún. Musiela-féle parametrizálást követjük (ld. [22] és [3]). Természetesen adódik a HJM modell egy olyan általánosítása, amelyben a meghajtó folyamat szerepét egy véletlen mező veszi át, hogy így a különböző lejáratig hátralevő időhöz tartozó forward kamatlábakhoz különböző meghajtó folyamat tartozzon. A folytonos idejű HJM modell egy ilyen általánosítását javasolta Kennedy [21]. Később Goldstein [15], továbbá Santa-Clara és Sornette [27] is ilyen modelleket vizsgáltak. Egy ilyen (véletlen mező által hajtott) általánosított modellt *véletlen mezős modellnek* fogunk nevezni szemben a szakirodalom korábbi, a fenti értelemben egyszerűbb (nem véletlen mezős) modelljeivel, amelyeket *klasszikusnak* fogunk nevezni.

Egy ilyen modell felépítése során fontos feladat a forward ráták egy megfelelő meghajtó folyamatának vagy meghajtó mezőjének megadása. Bár a leggyakrabban alkalmazott meghajtó folyamat a klasszikus modellek esetén a Brown-mozgás (ld. pl. [18]), ennél általánosabb modellek is ismertek az szakirodalomban. Schmidt [26] például a Brown-mozgás egy természetes alternatíváját, nevezetesen az Ornstein-Uhlenbeck folyamatot javasolta, amelyet úgy is tekinthetünk, mint a diszkrét idejű AR(1) folyamat analógja. Néhol további szempontokat is figyelembe vesznek —különösen véletlen mezős esetben—, amelyek segíthetnek alkalmas és realisztikusabb folyamatok/mezők megtalálásában. Tipikusan a véletlen mezők kovariancia struktúrájára vonatkozóan szokás további feltevéseket tenni, ahogy ezt megtalálhatjuk például Goldstein [15], Santa-Clara és Sornette[27] munkáiban. A klasszikus modellekből kiindulva nem meglepő, hogy Brown lepedők, integrált Brown lepedők és Ornstein-Uhlenbeck lepedők igen gyakran használatosak a véletlen mezős esetben. Ehhez ld. Kennedy [21], Goldstein [15] vagy Santa-Clara és Sornette [27] munkáit. Jegyezzük meg, hogy Santa-Clara és Sornette [27] további példákat is tárgyal.

A [18]-ban tárgyalt HJM modell folytonos idejű modell, mint ahogy a [21], [15] és [27] munkákban használt modellek is azok. Több munkát is találhatunk, amelyek a klasszikus HJM modellek diszkrét idejű változatával foglalkoznak. Például említsük meg a [17], [19] és [24] munkákat. A klasszikus eset mintájára *véletlen mezős modellek* esetén is észszerűnek és hasznosnak tűnik a folytonos idejű modellek *diszkrét idejű megfelelőinek* a vizsgálata.

A fenti történeti megjegyzéseket figyelembe véve a következő megfontolások jelentettek motivációt számunkra. Ezen az úton általánosabb és így rugalmasabb kamatlábmodellek alkothatóak, mint a klasszikus modellek esetén (amelyeket egyetlen folyamat hajt meg). Másrészt így lehetővé válhat, hogy a kamatlábak leírására alkalmas modelleket találjunk úgy, hogy azok statisztikai értelemben jól illeszkedjenek és ne legyenek túlparaméterezve vagy túlillesztve, ahogy az számos pénzügyi alkalmazás esetében tapasztalható. Ez számos statisztikai kérdést vet fel, ebből tárgyalunk néhányat (pl. maximum likelihood becslések aszimptotikus tulajdonságait) a 3. fejezetben. Végül, de nem utolsó sorban megemlítjük, hogy a véletlen mezős kamatlábmodellek ötlete a folytonos idejű kamatlábmodellek irodalmában merült először fel, azonban az ezekhez tartozó pénzügyi kalkulussal kapcsolatban jelentkező bizonyos problémák azt sugallják, hogy a diszkrét idejű megközelítés ezen problémákban is segíthet és így akár a folytonos idejű modellek fejlődéséhez is hozzájárulhat.

Először a szóbanforgó diszkrét idejű véletlen mezős kamatlábmodellek bevezetését tettük meg (a 2. fejezetben). A szükséges alapvető fogalmak definiálása után a fő cél olyan elégséges feltételek levezetése volt ezen modellekhez, amelyek mellett a piacok kizárják az arbitrázs lehetőségeket. Ezeket a feltételeket gyakran drift (vagy arbitrázsmentességi) feltételeknek is nevezik a kamatlábmodellek irodalmában, hiszen azokat úgy is értelmezhetjük, hogy egy további feltételt adnak a drift tag alakjára vonatkozóan, pontosabban, ilyen feltételek mellett a drift tag meghatározható a modell egyéb tulajdonságai által. Ebben a fejezetben egy általános forward kamatlábstruktúra esetében adunk drift feltételt, továbbá egy érdekes esetben, Gauss meghajtó mezők esetére is adtunk drift feltételt. Ezen modellekben feltételezzük egy $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ általános sztochasztikus piaci diszkont faktor folyamat létezését, amely ún. piaci kockázati felár (market price of risk) paramétereket is tartalmaz, nevezetesen: legyen $M_0 := 1$ és

$$M_{k+1} = M_k \frac{\exp\left\{-r_k + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}\right\}}{\mathbb{E}\left(\exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}\right\} \big| \mathcal{F}_k\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

ahol a $\phi_{k,j}$ piaci kockázati felár egy $\mathcal{F}_k$-mérhető valószínűségi változó minden $k, j \geq 0$ esetén, $\Delta_1 S_{k,j} = S_{k+1,j} - S_{k,j}$ és $\sum_{j=0}^{\infty} \phi_{k,j}\Delta_1 S_{k,j}$ sztochasztikusan konvergens. Ezen faktor szerepe az, hogy leírja, hogy a piac hogyan hozza létre az árakat, pontosabban: hogyan korrigálódnak az árak adott kockázati preferenciák figyelembevételével.

Ezt követően két példát adtunk véletlen meghajtó mezőkre, amelyeket a statisztikai vizsgálatok során is alkalmaztunk. Itt csak egy ún. térbeli autoregressziós véletlen mezőt mutatjuk be, ahol $S_{k,\ell} := \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{\ell} \rho^{\ell-j}\eta_{i,j}$ minden $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$ esetén, ahol az $\eta_{i,j}$-k független azonos eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással. Azaz $\Delta_1 S_{k,\ell+1} = \rho\Delta_1 S_{k,\ell} + \eta_{k+1,\ell+1}$.

A 2. fejezetben egyben lehetőség nyílik a klasszikus és a véletlen mezős struktúrák egy összehasonlítására, hiszen először egy egyszerű struktúrát vizsgáltunk, melyet klasszikus modellnek nevezünk és amelyben a lejáratig hátralevő idő különböző értékeihez tartozó kamatlábgörbéket ugyanazon sztochasztikus folyamat hajtja meg.

Végül jegyezzük meg, hogy az általunk választott módszer nem az egyetlen, amelynek segítségével rugalmasabb, általános forward kamatlábmodelleket kaphatunk diszkrét idejű esetben. (Itt említhetjük Filipović és Zabczyk [6], Akahori, Aoki és Nagata [1] munkáit az elmúlt évekből.)

3 Maximum likelihood becslések véletlen mezős forward kamatlábmodellekben

A 3. fejezetben a 2. fejezetben bevezetett modell néhány speciális esetét vizsgáltuk: a forward kamatlábakat egy, a fentiekben leírt térbeli autoregressziós típusú Gauss véletlen mező hajtja meg, ahol a Gauss jelző arra utal, hogy esetünkben standard normális valószínűségi változók generálják a mezőt, továbbá feltesszük, hogy a volatilitás determinisztikus és sem az időtől, sem a lejáratig hátralevő i-dőtől nem függ, azaz $\beta_{k,\ell} = \beta \in \mathbb{R}$, $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$. Ezekben a modellekben, az (előző fejezetben levezetett) arbitrázsmentességi feltételek mellett a paraméterek maximum likelihood becslését vizsgáltuk. Ebben a részben a becsléseinket egy $f_{k,\ell}$, $1 \le k \le K_n$ és $0 \le \ell \le L_n$, forward rátákat tartalmazó mintából számítjuk, azaz a minta mérete $K_n \times L_n$. Azt is feltesszük, hogy $n \to \infty$ esetén $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ahol $K > 0$ és $L > 0$.

3.1 A volatilitás becslése

Először a volatilitás becslését tanulmányoztuk különböző esetekben (ld. 3.1. alfejezet): meghatároztuk a likelihood függvényt és a volatilitás becslésének egy explicit alakját, ahol a többi paraméter értéke ismert.

Majd tekintünk a szóbanforgó diszkrét idejű forward kamatlábmodelleknek egy $\{f_{k,\ell}^{(n)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$, sorozatát, amelyek kezdőértékei $\{f_{0,\ell}^{(n)} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$, volatilitásai $\beta_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n \neq 0$, és amelyeket rendre egy (a 2. oldalon leírt) ϱ_n paraméterű $\{S_{k,\ell}^{(n)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ térbeli autoregressziós Gauss mező hajt meg. A meghajtó mező autoregressziós paraméterének aszimptotikus viselkedésétől függően bebizonyítottuk a volatilitás-paraméter négyzetének aszimptotikus normalitását mind az ún. stabilis esetben, ahol az autoregressziós paraméter a $(-1, 1)$ intervallumban van, mind egy közel egységgyök esetben, ahol az autoregressziós paraméterek sorozata (mely forward kamatlábmodellek egy alkalmas sorozatához tartozik) tart 1-hez. Bár az aszimptotikus normalitást mindkét esetben megmutattuk, a két eset meglehetősen különböző: többek között kiemelendő, hogy a két esetben különböző normáló tényezők mellett bizonyíthatóak az aszimptotikus eredmények.

Először ún. martingál modellekben vezetünk le ilyen eredményeket, ahol nem jelennek meg a piaci felár paraméterei. Az egyszerűség kedvéért itt csak a két martingál esetet ismertetjük.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $n \to \infty$ esetén $\varrho_n = 1 + \gamma/n + o(n^{-1})$, ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ és $\liminf_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| > 0$. Ekkor*

$$n^2 \beta_n^{-1} \left(\widehat{\beta}_{K_n,L_n} - \beta_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, 4\sigma^2\right),$$

ahol[3]

$$\frac{1}{\sigma^2} := K \int_0^L \left(\int_0^{2t} \mathrm{e}^{\gamma v} \,\mathrm{d}v \right)^2 \mathrm{d}t + \int_0^K \frac{1}{s} \left(\int_0^s \int_0^{2L+2u} \mathrm{e}^{\gamma v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}s.$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy $\varrho_n \to \varrho$, ahol $\varrho \in (-1,1)$ és $n \to \infty$ esetén $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$n \left(\widehat{\beta}_{K_n,L_n} - \beta_n^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{2\beta^4}{2\beta^2\lambda + KL}\right),$$

ahol

$$\lambda := \frac{K(2L+K)}{8\,(1-\varrho)^2}.$$

Ezt követően néhány ennél általánosabb, piaci felár paramétereket is tartalmazó esetben is levezetünk hasonló eredményeket, ahol látható, hogy a korábbi esetekben kifejlesztett eszközök itt is alkalmasak hasonló eredmények levezetésére. Az autoregressziós paraméter és a piaci felár paraméterek viselkedése alapján több esetet is tárgyaltunk ebben a részben.

3.2 Egy együttes paraméterbecslés

A gyakorlati alkalmazások szempontjából sokkal fontosabb a forward kamatlábmodellek összes paraméterének együttes becslését vizsgálni. A 3.2. alfejezetben egy ilyen kérdést vizsgáltunk. Ebben az esetben a piaci felárak paramétereinek adott egy vektora, mely megjelenik a piaci sztochasztikus diszkonttényezőben: $\phi_{k,\ell} = b_{0,\ell} \in \mathbb{R}$ minden $k \in \mathbb{Z}_+$ és $0 \le \ell \le J$ esetén, továbbá $\phi_{k,\ell} = 0$ ha $\ell > J$, ahol J egy ismert pozitív egész. Továbbá a vizsgált modell a volatilitás és az autoregressziós paramétereket tartalmazza még. A likelihood függvény bonyolultságának

[3] Itt $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ az eloszlásban való konvergenciát, míg $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ a normális eloszlást jelöli μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel.

következtében ebben az esetben a becslésekre explicit alakot nem lehet meghatározni (ehhez megemlítjük, hogy a likelihood függvény az autoregressziós paraméter egy magas fokú polinomja). Mindemellett jegyezzük meg, hogy a becsléseket olyan mintákból kell nyerni, amelyek nem független és nem azonos eloszlású valószínűségi változókból állnak, ami további nehézségeket okoz. Ennek ellenére először bizonyítottuk a becslések erős konzisztenciáját majd ezen eredmény alapján az együttes becslések aszimptotikus normalitását is. Ennélfogva numerikus eljárásokat használva ajánlott a maximum likelihood becslések meghatározása, amelyek jó aszimptotikus tulajdonságait garantálják a bizonyított eredmények. Ennek a munkának nem tartozik a kérdéskörébe numerikus (empirikus) problémák tárgyalása, ám megemlítjük, hogy elkezdtünk ilyen irányú vizsgálatokat (ld. [13] és [14]).

A fő eredményeket az alábbi módon foglalhatjuk össze.

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^{J+3}$ egy kompakt halmaz úgy, hogy minden $(\beta, \varrho, \mathbf{b}) \in H$ esetén $\beta > 0$, $\varrho \in (-1, 1)$. Jelölje $(\beta_0,\ \varrho_0,\ \mathbf{b}_0)$ a valódi paramétereket és legyen $\mathbf{b}_0 = (b_{0,0},\ b_{0,1}, \ldots,\ b_{0,J})$, továbbá feltesszük, hogy $(\beta_0,\ \varrho_0,\ \mathbf{b}_0)$ a H belső pontja. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n)$ a $(\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0)$ vektor maximum likelihood becslését (amely a likelihood függvényt maximalizálja a H halmazon), ahol $\widehat{\mathbf{b}}_n = (\widehat{b}_{n,0}, \widehat{b}_{n,1}, \ldots, \widehat{b}_{n,J})$.*

Ekkor a $(\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0)$ vektor $(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n)$ maximum likelihood becslései erősen konzisztensek, azaz

$$(\widehat{\beta}_n, \widehat{\varrho}_n, \widehat{\mathbf{b}}_n) \to (\beta_0, \varrho_0, \mathbf{b}_0) \qquad \textit{m.b. ha } n \to \infty.$$

Továbbá,

$$\begin{bmatrix} n(\widehat{\beta}_n - \beta_0) \\ n(\widehat{\varrho}_n - \varrho_0) \\ \sqrt{n}(\widehat{\mathbf{b}}_n - \mathbf{b}_0) \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Lambda), \qquad n \to \infty \textit{ esetén,}$$

úgy, hogy Λ az alábbi alakú:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

ahol

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\sigma_{1,1}\sigma_{2,2} - \sigma_{1,2}^2\right)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_{2,2} & -\sigma_{1,2} \\ -\sigma_{1,2} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix}$$

és

$$\sigma_{1,1} = \frac{2KL}{\beta_0^2} + \frac{K(K+2L)}{2\left(1-\varrho_0\right)^2}, \qquad \sigma_{2,2} = \frac{KL}{1-\varrho_0^2} + \frac{K(K+2L)\beta_0^2}{2\left(1-\varrho_0\right)^4},$$

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = \frac{K(K+2L)\beta_0}{2\left(1-\varrho_0\right)^3},$$

továbbá a $(J+1)\times(J+1)$ *méretű* Λ_2 *felírható*

$$\Lambda_2 = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\varrho_0 & 1+\varrho_0^2 & -\varrho_0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\varrho_0 & 1 \end{bmatrix}$$

alakban.

Hangsúlyozandó, hogy ebben a fejezetben csak néhány speciális modellt vizsgáltunk. Természetesen a volatilitás, a meghajtó mező és a piaci felár struktúráit illetően más tulajdonságú modelleket is választhatnánk. Remélhető, hogy a technikai módszertan (melyet a 3.2.2. és 3.2.4. részekben alkalmaztunk) és néhány általános segédtétel (melyeket a 3.2.5. részben vezettünk le) alkalmas arra, hogy számos hasonló modellben hasonló eredmények legyenek bizonyíthatóak. További forward kamatlábmodellek specifikálásához megemlítjük, hogy számos hasznos gyakorlati és elméleti kérdést (pl. ilyen modellek javasolt tulajdonságait) tárgyal Cont [5].

4 Diszkrét idejű piacok konvergenciája

A 4. fejezetben bizonyos típusú diszkrét idejű pénzügyi modellek konvergenciáját vizsgáltuk.

4.1 Részvényfák konvergenciája

Először részvényárak famodelljeit tekintettük, azaz olyan modelleket, amelyek a jól ismert bináris (például binomiális) famodellek általánosításai. Ehhez különböző eseteket vizsgáltunk az alapján, hogy a részvényár lehetséges hozamrátáinak milyen az aszimptotikus viselkedése. Itt megjegyezzük, hogy speciálisan bináris részvényfák esetére [25] tartalmaz ilyen eredményeket.

Ehhez legyen $N > 1$ egy rögzített egész, $S_0 > 0$ egy konstans, amely a részvényár 0 időpontbeli kezdőértékét jelöli, $T > 0$ a vizsgált időszak vége. A kereskedési időket, amikor az új árak ismertté válnak, $t_k^n = kT/n$ fogja jelölni, ahol $k = 0, \dots, n$ és $n \in \mathbb{N}$. Tehát t_k^n a k-adik kereskedési idő az n-edik piacon. A részvényárfolyamat értéke a t_k^n időpontban az n-edik piacon

$$S_k^n = S_0(1 + \rho^{n,1})(1 + \rho^{n,2}) \dots (1 + \rho^{n,k})$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $k = 1, \dots, n$, ahol $\rho^{n,k}$ valószínűségi változók soronként független háromszögrendszert alkotnak úgy, hogy $\mathbb{P}(\rho^{n,k} = a_i^{n,k}) = p_i^{n,k}$, $i = 1, \dots, N$, $\sum_{i=1}^{N} p_i^{n,k} = 1$ és $a_N^{n,k} > a_{N-1}^{n,k} > \cdots > a_1^{n,k} > -1$. A részvény $[t_{k-1}^n, t_k^n]$ időszakhoz tartozó (véletlen) hozamrátája tehát $\rho^{n,k}$. Továbbá az alábbi jelöléseket használjuk: $X_{n,k} := \ln(1 + \rho^{n,k})$, ahol $X_{n,k}$-t loghozamnak nevezzük, lehetséges értékeit pedig $b_i^{n,k} := \ln(1 + a_i^{n,k})$ jelöli, $i = 1, \dots, N$.

A hozamráták aszimptotikus viselkedése alapján különböző eseteket vizsgáltunk, ahol határeloszlás tételeket vezettünk le a részvényárakra vonatkozóan. Először megmutattuk, hogy ha a lehetséges loghozamok egyenletesen eltűnnek, akkor a részvényár loghozama csak normális eloszlású lehet aszimptotikusan, továbbá szükséges és elégséges feltételt adtunk a határérték létezésére. Más szóval, ebben az esetben a határmodell egy Black-Scholes típusú modell (ld. [4]). A pontos állítás ismertetésétől itt eltekintünk és egy általánosabb (kevert) esetet mutatunk most be. Csak a fő eredményt mutatjuk meg ebben az esetben, amely szerint normális és Poisson eloszlások konvolúciója jelenik meg a loghozam eloszlásában aszimptotikusan, továbbá ebben az esetben is adtunk szükséges és elégséges feltételt a határérték létezésére.

Tétel. *Tekintsünk részvényárfolyamatokat az alábbi tulajdonságokkal. Tegyük fel, hogy léteznek λ_i, $i = 1, \dots, N$, konstansok úgy, hogy*

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} b_i^{n,k} = \lim_{n\to\infty} \min_{1\le k\le n} b_i^{n,k}, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

és $\lambda_N \ge \lambda_{N-1} \ge \ldots \ge \lambda_{j_2+1} > \lambda_{j_2} = \lambda_{j_2-1} = \ldots = \lambda_{j_1} = 0 > \lambda_{j_1-1} \ge \ldots \ge \lambda_1$, ahol $1 \le j_1 \le j_2 \le N$. Legyen $I := \{1, \dots, j_1 - 1, j_2 + 1, \dots, N\}$ és tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} \sum_{i\in I} p_i^{n,k} = 0$. Legyen $z_{n,k} := \sum_{i=j_1}^{j_2} b_i^{n,k} p_i^{n,k}$.

Ekkor $\ln(S_n/S_0)$ pontosan akkor konvergál gyengén, ha az alábbi határértékek *léteznek:*

$$d_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_i^{n,k}, \qquad i \in I,$$

$$b := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=j_1}^{j_2} \sum_{k=1}^{n} p_i^{n,k} \left(b_i^{n,k} + \frac{b_i^{n,k} - z_{n,k}}{1 + \left(b_i^{n,k} - z_{n,k} \right)^2} \right),$$

és

$$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=j_1}^{j_2} \frac{\left(b_i^{n,k} - z_{n,k} \right)^2}{1 + \left(b_i^{n,k} - z_{n,k} \right)^2} \, p_i^{n,k}.$$

Amennyiben teljesül a konvergencia, akkor $\ln(S_n/S_0)$ *határeloszlása az*

$$\lambda_1 \mathcal{P}(d_1) * \ldots * \lambda_{j_1-1} \mathcal{P}(d_{j_1-1}) * \mathcal{N}(b, \sigma^2) * \lambda_{j_2+1} \mathcal{P}(d_{j_2+1}) * \ldots * \lambda_N \mathcal{P}(d_N)$$

alakban írható fel, ahol $*$ *konvolúciót jelöl*[4]

Néhány speciális esetet és példákat is bemutattunk ebben a részben, végül a fejezet záró megjegyzéseiben néhány következményét tárgyaljuk a fenti határeloszlás-eredményeknek, amelyekben elégséges feltételeket adtunk a részvényár kifizetési és egyéb függvényeinek konvergenciájára.

4.2 Diszkrét idejű forward kamatlábmodellek konvergenciája

A 4. fejezet második részében (a 4.2. alfejezetben) ismét diszkrét idejű forward kamatlábmodellek (korábbiakban tárgyalt) általános modelljét vizsgáltuk. Ilyen modellek egy $\{f_{k,\ell}^{(n)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$, $n \in \mathbb{N}$, sorozata esetén –melyekre determinisztikus volatilitást feltételezünk– egy funkcionális határeloszlás-tételt bizonyítottunk, amely leírja a modellsorozat aszimptotikus viselkedését, azaz elégséges feltételeket adtunk, amelyek mellett beláttuk, hogy az $\widetilde{f}_n(s,t) := \frac{1}{n} f_{\lfloor ns \rfloor, \lfloor nt \rfloor}^{(n)}$, $s, t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, lépcsős véletlen függvényekre $\widetilde{f}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \widetilde{f}$ teljesül az alkalmas $D([0,1]^2)$ Skorokhod térben (a megfelelő metrikáról ld. [2]), ahol $\widetilde{f}$ egy véletlen mező által hajtott folytonos idejű forward kamatlábmodell. Példaként egy közel egységgyök

[4] Ha egy ξ valószínűségi változó Poisson eloszlású d paraméterrel, akkor itt $\lambda \mathcal{P}(d)$ a $\lambda \xi$ eloszlását ($\lambda \in \mathbb{R}$) jelöli.

típusú autoregressziós esetet is vizsgáltunk, ahol feltételek szerint a meghajtó mező ugyanolyan autoregressziós formájú, mint az előző fejezetben (ld. még 2. o.): ebben az esetben a határmodellt, amely egy folytonos idejű forward kamatlábmodell, egy Ornstein-Uhlenbeck mező hajtja meg. Az állítások részletes ismertetésétől itt eltekintünk.

5 Pénzügyi eszközök részaránya optimális portfóliókban: egy függő eset

Végül (az 5. fejezetben) a portfólió-menedzsment egy klasszikus problémájával foglalkoztunk (amelyre egyben tekinthetünk úgy is, mint egy bizonytalan körülmények közötti választási problémára a mikroökonómia tárgyköréből). Az alapkérdés a következő volt: az egyéni hasznosságfüggvénynek és a piaci részvényárak eloszlásának melyek azok a tulajdonságai, amelyek következtében az egyén többet fektet be egy pénzügyi eszközbe, mint egy másikba.

Egyszerű egylépéses, n értékpapírt tartalmazó pénzügyi piacokat tekintettünk, ahol az értékpapírokat az $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ hozamokkal adjuk meg, amelyek egy jövőbeli T időponthoz tartoznak, ahol r_i egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(-1 \leq r_i) = 1$, $i = 1, \ldots, n$, továbbá X_0 jelölje a kezdeti tőkét. Ekkor egy portfóliót $\pi = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ fog jelölni, $\beta_i \in \mathbb{R}$, ahol β_i azt mutatja, hogy mennyi pénzt fektettünk az i-edik értékpapírba, továbbá a π portfólió értéke a T időpontban $X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i)$ lesz. Ha adott egy U hasznosságfüggvény, akkor olyan portfóliókat fogunk vizsgálni, melyek optimálisak abban az értelemben, hogy várható hasznosságuk maximális, azaz a $\pi_U^* = (\beta_{1,U}^*, \beta_{2,U}^*, \ldots, \beta_{n,U}^*)$ portfóliót optimálisnak nevezzük, ha $\mathbb{E}\ U(X_T^{\pi_U^*}) = \sup_{\pi \in C_{X_0}} \mathbb{E}\ U(X_T^\pi)$, ahol a lehetséges portfóliók halmaza $C_{X_0} = \{\ \pi \mid \pi = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^n \beta_i = X_0\}$.

Annak érdekében, hogy a fenti kérdésre válaszoljunk, sztochasztikus dominancia új fogalmait vezettünk be, amelyeket erős elsőrendű sztochasztikus dominanciának (SFSD) és erős másodrendű sztochasztikus dominanciának (SSSD) neveztünk, továbbá ezen fogalmak egy feltételes változatát is tárgyaltuk több értékpapírt tartalmazó piacok esetére. Itt most csak az SFSD definícióját ismertetjük.

Definíció. *Azt mondjuk, hogy egy ξ valószínűségi változó erős elsőrendű sztochasztikus dominancia értelmében dominál egy η valószínűségi változót (jelölés: $\xi \succcurlyeq_{SFSD} \eta$), ha $F_{\xi|\eta}(x|y) \leq F_\eta(x)$ minden $x \in \mathbb{R}$ és $\mathbb{P}_\eta$-m.m. $y \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_η az η eloszlásfüggvénye és $F_{\xi|\eta}$ a ξ reguláris feltételes eloszlásfüggvénye*

η-ra vonatkozóan.

Először ezen fogalmak néhány alaptulajdonságát mutattuk meg a disszertációban, amelyeket itt most nem részletezünk. Ezek a tulajdonságok természetes megfelelői az elsőrendű és a másodrendű sztochasztikus dominancia jól ismert alapfogalmainak (ld. pl. [20]).

Az SFSD, SSSD ill. azok feltételes alakjai segítségével Hadar és Seo [16] eredményeinek általánosításait vezettük le nem szükségképpen független részvényhozamok esetére. Itt csak egy eredményt mutatunk be egy két értékpapírt tartalmazó piac esetére.

Tétel. *Legyen $U : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható, konkáv és növekvő. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(1) *$\beta_1^* \geq \beta_2^*$ minden $\{r_1, r_2\}$ két értékpapírt tartalmazó piac esetén, ahol $r_1 \succcurlyeq_{SFSD} r_2$, és $\mathbb{E}r_i < \infty$ for $i = 1, 2$,*

(2) *az $x \mapsto xU'(x)$ függvény növekvő.*

Példákat is ismertettünk olyan piacokra, ahol az SFSD és SSSD tulajdonságok teljesülnek. Egy további sztochasztikus dominancia fogalmat is bevezettünk, melynek teljesülése esetén a részvényeket preferáltnak neveztük. A disszertációban ezen fogalom esetére is a fentiekhez hasonló eredményeket vezettünk le.

List of publications of the author / A szerző publikációs listája

Research papers / Tudományos közlemények

(i) Gáll, J. (2003): "Some possible stock price distributions under incompleteness of the market", *Mathematical and Computer Modelling*, **38(7-9)**, 829–838.

(ii) Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2003): "Limiting connection between discrete and continuous time forward interest rate curve models", *Acta Applicandae Mathematicae*, **78(1-3)**, 137–144.

(iii) Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2004): "Maximum likelihood estimator of the volatility of forward rates driven by geometric spatial AR sheet", *Journal of Applied Mathematics*, **2004(4)**, 293–309.

(iv) Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2005): "Note on the proportions of financial assets with dependent distributions in optimal portfolios", *Proceedings of the 6th International Conference on Applied Informatics (Eger, 2004)*, vol. II, 339–349, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft.

(v) Holb, I. J., B. Heijne, J. C. M. Withagen, J. Gáll and M. J. Jeger (2005): "Analysis of summer epidemic progress of apple scab at different apple production systems in the Netherlands and Hungary", *Phytopathology*, **95(9)**, 1001–1020.

(vi) Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2006): 'Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields", *Computers & Mathematics with Applications*, **51(3-4)**, 387–396.

(vii) Baran, S., J. Gáll, M. Ispány, and G. Pap (2006): "Prediction of Hungarian mortality rates using Lee-Carter method", *Acta Oeconomica*, accepted.

(viii) Gáll, J., G. Pap and W. Peeters (2005): "Random field forward interest rate models, market price of risk and their statistics", *Analli dell'Universita di Ferrara*, accepted.

(ix) GÁLL, J., G. PAP and M. V. ZUIJLEN (2006): "Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model", submitted to *Econometrica*.

Book chapters and lecture notes / Könyvfejezetek, jegyzetek

(i) "The Financial Toolbox" (A Financial Toolbox) (2005), in Hungarian, in Gisbert, S. (ed), *Matlab, updated edition, Numerical methods, graphics, statistics, toolboxes (Matlab, frissített kiadás, Numerikus módszerek, grafika, statisztika, eszköztárak)"*, 335–359, Typotex, Budapest.

(ii) GÁLL, J., G. PAP and M. V. ZUIJLEN (2005): "An introduction to portfolio management",
http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=51,
Hungarian version (2005): "Hasznosságalapú portfólió-menedzsment",
http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=50.

(iii) GÁLL, J. and G. PAP (2005): "Information Theory" (Információelmélet), in Hungarian,
http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=49.

(iv) GÁLL, J., G. PAP and M. V. ZUIJLEN (2003): "Option Theory",
http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=53,
Hungarian version (2003): "Opcióelmélet",
http://iam035.inf.unideb.hu/mobidiak/listdocument.mobi?id=52.

Review papers / Recenziók

(i) GÁLL, J. and L. JANKOVICS (2004): "Jaksity György: A pénz természete", in Hungarian, *BUKSZ (Budapesti Könyvszemle)*, **4**, 385–389.

Conference talks / Konferencia előadások

(i) "On contingent claim pricing in some incomplete models", *11th European Young Statisticians Meeting*, Marly-le-Roi, France, 24–28 August 1999.

(ii) "On incomplete securities market models", *4th International Conference on Applied Informatics*, Eger-Noszvaj, Hungary, 30 August – 3 September 1999.

(iii) "The convergence of financial asset prices", *Fourth Meeting of Austrian, Slovenian, Italian and Hungarian Young Statisticians*, Pécs, Hungary, 8–10 October 1999.

(iv) "On the optimal portfolio choice and the riskiness of securities", *Fifth Meeting of Austrian, Slovenian, Italian and Hungarian Young Statisticians*, Udine, Italy, October, 2000.

(v) "A note on the proportion of assets in optimal portfolios", *XXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Eger, Hungary, 28 January – 3 February 2001.

(vi) "Discrete time HJM type forward interest rate models", *The 8th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, Vilnius, Lithuania, 23–29 June 2002.

(vii) "Some problems in forward interest rate models", *6th International Conference on Applied Informatics*, Eger, Hungary, 27–31 January 2004.

(viii) "Modeling Bonds and Pricing Interest Rate Derivatives Based on Discrete Forward Rate Curves Driven by Random Fields", *IXth Spring Meeting of Young Economists*, Warsaw, Poland, 23–25 April 2004.

(ix) "The application of the Lee-Carter method for Hungarian mortality data", *Annual Meeting of the Hungarian Actuarial Society*, Balatonvilágos, Hungary, 26–28 April 2005.

(x) "Random field forward interest rate models and market price of risk", *Fourth Conference on Applied Mathematics and Scientific Computing*, Brijuni, Croatia, 19–24 June 2005.

(xi) "Joint ML estimation of volatility, AR and market price of risk parameters of an HJM interest rate model", *Numerical Methods in Finance, An Amamef Conference*, Inria-Rocquencourt, le Chesnay, France, 1–3 February 2006.

(xii) "Statistical problems in discrete time HJM type interest rate models", *XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Sovata-Bai, Romania, 27 August – 2 September, 2006.

Rerefences / Hivatkozások

[1] Akahori, J., H. Aoki and Y. Nagata (2004): "A general framework for finite-factor discrete-time interest rate models", working paper, www.econ.kyoto-u.ac.jp/daiwa/workshops/2004papers/Daiwa-Akahori-General.pdf

[2] Bickel, P. J. and M. J. Wichura (1971): "Convergence criteria for multiparameter stochastic processes and some applications", *The Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 1656–1670.

[3] Björk, T. (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford & New York.

[4] Black, F. and M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities" *Journal of Political Economy*, **81**, 637–659.

[5] Cont, R. (2005): "Modeling term structure dynamics: an infinite dimensional approach", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **8(3)**, 357–380.

[6] Filipović, D. and J. Zabczyk (2002): "Markovian term structure models in discrete time", *The Annals of Applied Probability*, **12(2)**, 710–729.

[7] Gáll, J. (2003): "Some possible stock price distributions under incompleteness of the market", *Mathematical and Computer Modelling.*, **38(7-9)**, 829–838.

[8] Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2003): "Limiting connection between discrete and continuous time forward interest rate curve models", *Acta Applicandae Mathematicae*, **78(1-3)**, 137–144.

[9] Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2004): "Maximum likelihood estimator of the volatility of forward rates driven by geometric spatial AR sheet", *Journal of Applied Mathematics*, **2004(4)**, 293–309.

[10] Gáll, J., G. Pap and M. v. Zuijlen (2005): "Note on the proportions of financial assets with dependent distributions in optimal portfolios", *Proceedings of the 6th International Conference on Applied Informatics (Eger, 2004)*, vol. II, 339–349.

[11] GÁLL, J., G. PAP and M. V. ZUIJLEN (2006): "Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields", *Computers & Mathematics with Applications*, **51(3-4)**, 387–396.

[12] GÁLL, J., G. PAP and M. V. ZUIJLEN (2006): "Joint ML estimation of all parameters in a discrete time random field HJM type interest rate model", submitted to *Econometrica*.

[13] GÁLL, J., G. PAP and W. PEETERS (2006): "Random field forward interest rate models, market price of risk and their statistics", accepted by *Analli dell'Universita di Ferrara*.

[14] GÁLL, J. and W. PEETERS (2006): "Fitting problems in some discrete time forward rate models", working paper, Radboud University, Nijmegen, The Netherlands.

[15] GOLDSTEIN, R. S. (2000): "The term Structure of Interest Rates as a Random Field", *The Review of Financial Studies*, **13(2)**, 365–384.

[16] HADAR, J. and T. K. SEO (1988): "Asset Proportions in Optimal Portfolios", *Review of Economic Studies*, **LV**, 459–468.

[17] HEATH, D., R. A. JARROW and A. MORTON (1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **25**, 419–440.

[18] HEATH, D., R. A. JARROW and A. MORTON (1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, **60**, 77–105.

[19] JARROW, R. A. (1996): *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

[20] KAAS, R., A. E. V. HEERWARDEN and M. J. GOOVAERTS (1994): *Ordering of Actuarial Risk*, CAIRE Series, Ceuterick, B-3000, Leuven.

[21] KENNEDY, D. P. (1994): "The Term Structure of Interest Rates as a Gaussian Random Field", *Mathematical Finance*, **4**, 247–258.

[22] MUSIELA, M. and M. RUTKOWSKI (1997): *Martingale Methods in Financial Modeling*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

[23] Pelsser, A. (2000): *Efficient Methods for Valuing Interest Rate Derivatives*, Springer-Verlag, London.

[24] Pliska, S. R. (1997): *Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models*, Blackwell Publishers Inc., Massachusetts.

[25] Rachev, S. T. and L. Rüschendorf (1994): "Models for option prices", *Theory of Probability and its Applications*, **39**, 120–152.

[26] Schmidt, W. M. (1997): "On a general class of one-factor models for the term structure of interest rates", *Finance and Stochastics*, **1**, 3–24.

[27] Santa-Clara, P. and D. Sornette (2001): "The Dynamics of the Forward Interest Rate Curve with Stochastic String Shocks", *The Review of Financial Studies*, **14(1)**, 149–185.