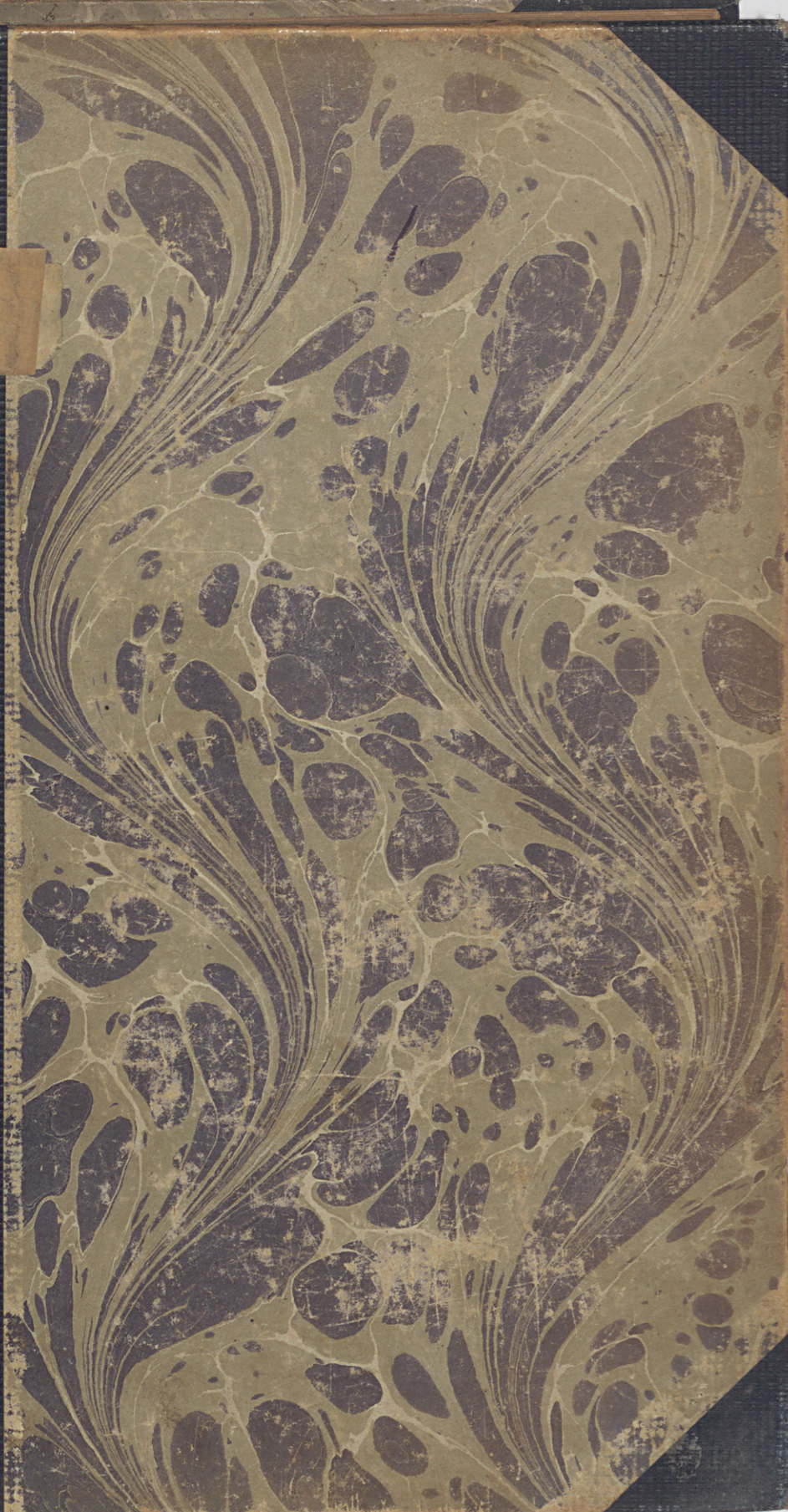


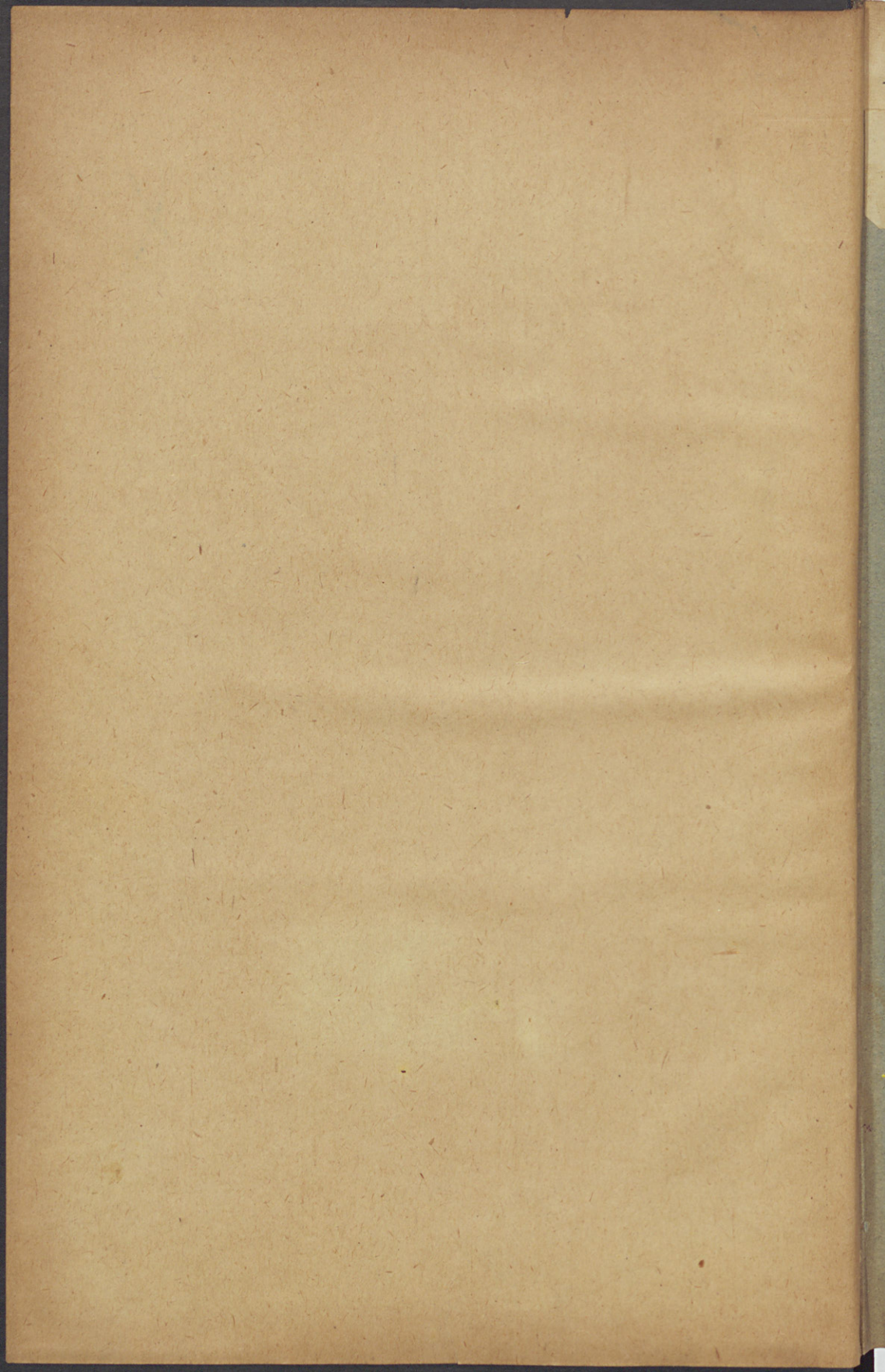
R

6100

EL
TAN



V. 420 - V 60 DEK



M

2

318 7/5
E könyv jelen 6-ik kiadásában a 90,386/1911. számú min. rendelettel középiskolák számára tankönyvül engedélyezett

MÉRTAN

A KÖZÉPISKOLÁK FELSŐBB OSZTÁLYAI
SZÁMÁRA

ÁBEL KÁROLY KÖNYVE ALAPJÁN

SZERKESZTETTÉK

DE LÉVAY EDE ÉS POLIKEIT KÁROLY

ÁLL. FŐREÁLISKOLAI IGAZGATÓ

KIR. FŐGIMNÁZIUMI IGAZGATÓ

ELSŐ RÉSZ

SÍKMÉRTAN ÉS HÁROMSZÖGMÉRTAN

AZ V. ÉS VI. OSZTÁLY TANANYAGA

6100

HATODIK KIADÁS

Ara 4 korona

KIADJA:

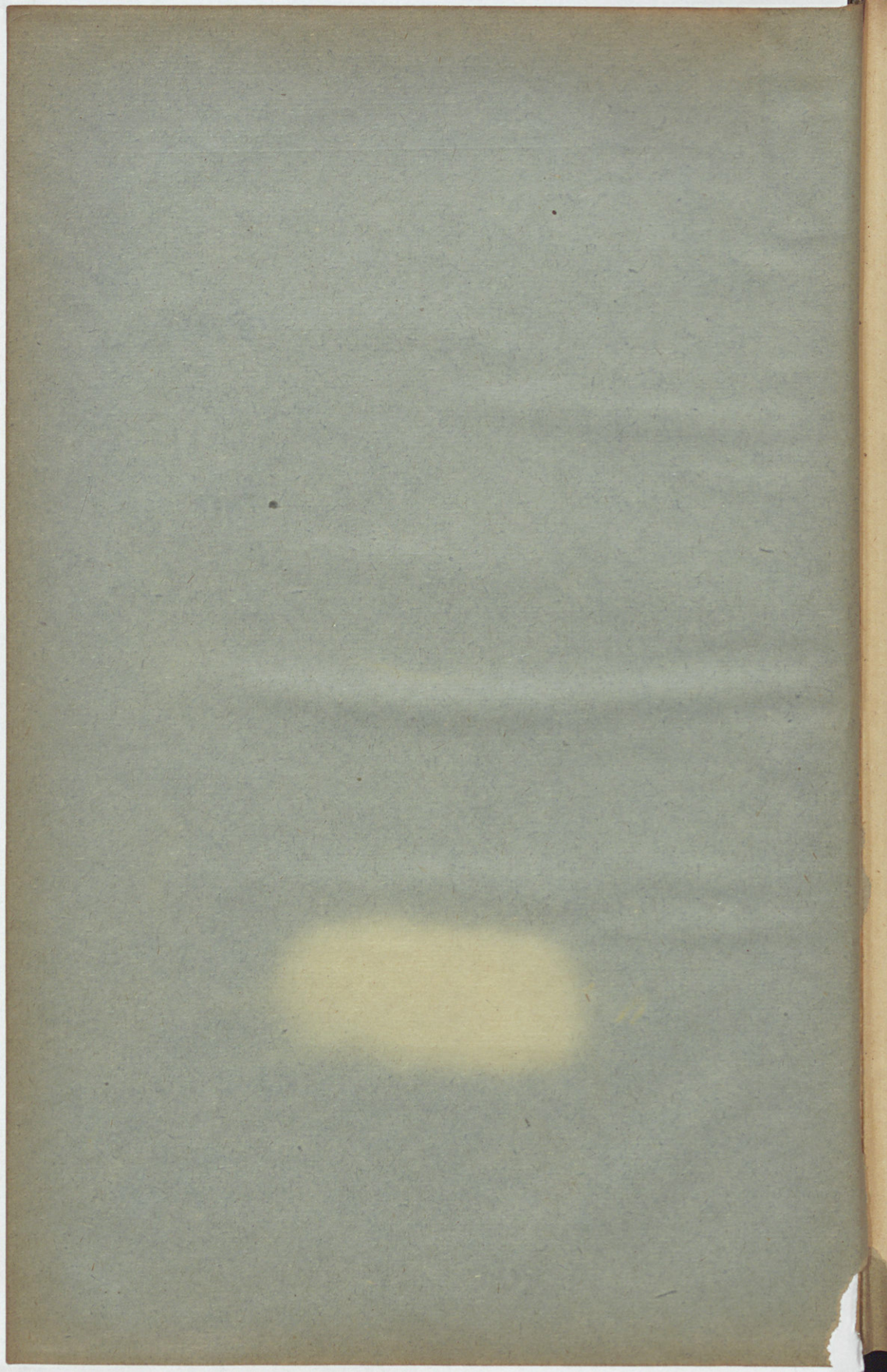
LAMPEL R. Kk. (WODIANER F. ÉS FIAI) R. T.

KÖNYVKIADÓVÁLLALATA

BUDAPEST, 1909

Ugyanezen szerzőtől kiadásunkban meg jelent:

Mértan. A középiskolák felsőbb osztályai számára. II. rész. Térmértan és analitikai síkmértan. A VII. és VIII. osztály számára. 5. kiadás. 3 kor. 30 fillér.
Eng. száma: 2544-1904.



MÉRTAN

A KÖZÉPISKOLÁK FELSŐBB OSZTÁLYAI
SZÁMÁRA

ÁBEL KÁROLY KÖNYVE ALAPJÁN

SZERKESZTETTÉK

DR. LÉVAY EDE ÉS POLIKEIT KÁROLY

ÁLL. FŐREÁLISKOLAI IGAZGATÓ

KIR. FŐGIMNÁZIUMI IGAZGATÓ

ELSŐ RÉSZ

SÍKMÉRTAN ÉS HÁROMSZÖGMÉRTAN

AZ V. ÉS VI. OSZTÁLY TANANYAGA

HATODIK KIADÁS

E könyv jelen 6-ik kiadásában a 90,386/1911. számú min. rendelettel
közéiskolák számára tankönyvül engedélyezett

KIADJA:

LAMPEL R. Kk. (WODIANER F. ÉS FIAI) R. T.
KÖNYVKIADÓVÁLLALATA

BUDAPEST, 1909

R104
TIT könyvtárából kivesetve
TUDOMÁNYI
TÁRSULAT
KÖNYVTÁRA
15480

1012

1280

BEVEZETÉS.

I. Mennyiségtani alapfogalmak.

A *mennyiségtan* a mennyiségek tulajdonságait és egymáshoz való viszonyait vizsgálja.

A mennyiségek *szám- és térmennyiségek* lehetnek; az előbbiekkal a *számтан*, az utóbiakkal a *mértan* foglalkozik.

A mennyiségtan olyan megdönthetetlen igazságokon épül fel, amelyek annyira egyszerűek, hogy okokkal be sem bizonyíthatók; ám egyszersmind annyira világosak is, hogy behozonyításra nem szorulnak. Az ilyen igazságokat *sarkigazságoknak* (axioma) nevezzük. Ilyenek a következők:

1. *Minden mennyiség egyenlő önnönmagával.* Ezt mennyiségtani jelekkel így fejezzük ki: $a = a$ (olvasd: a annyi mint a).

2. *Az egész nagyobb, mint bármelyik része.* Így, ha: $a = b + c$, akkor: $a > b$ -nél, és $a > c$ -nél.

3. *Ha két mennyiség külön-külön ugyanazon harmadikkal egyenlő, egymás közt is egyenlő, azaz, ha: $a = b$ és $a = c$, akkor: $b = c$.*

4. *Ha egyenlő mennyiségeket egyenlően változtatunk, ismét egyenlőket nyerünk.* Nevezetesen:

a) *Ha egyenlő mennyiségekhez egyenlőket adunk, vagy azokból egyenlőket kivonunk, ismét egyenlőket kapunk.* Jelökkel:

ha $a = b$, akkor $a + c = b + c$, és $a - c = b - c$.

b) *Ha egyenlő mennyiségeket ugyanazon számmal szorzunk, vagy osztunk, ismét egyenlőket kapunk; vagyis:*

ha $a = b$, akkor $a \times m = b \times m$, és $a : m = b : m$.

5. *Ha egyenlő mennyiségeket nem egyenlően változtatunk, egyenlőtlen mennyiségek származnak.* Nevezetesen:

a) *Ha két egyenlő mennyiséghez két nem egyenlőt adunk, olyan egyenlőtlen mennyiségeket kapunk, amelyek közül az lesz a nagyobb, amelyikhez a nagyobbát adtuk.* Azaz, ha: $a = b$, és $c > d$ -nél, akkor: $a + c > b + d$.

b) Ellenben, ha két egyenlő mennyiségből két nem egyenlőt kivonunk, a maradékok közül az lesz a kisebb, amelyikből a nagyobb mennyiséget vontuk ki; vagyis, ha: $a = b$ és $c > d$ -nél, akkor: $a - c < b - d$.

6. Ha nem egyenlő mennyiségeket egyenlően változtatunk, egyenlőtlenekeket kapunk olyan értelemben, hogy a nagyobb mennyiség a változtatás után is nagyobb marad, vagyis, ha: $a > b$ -nél, akkor: $a + c > b + c$ -nél, $a - c > b - c$ -nél stb.

7. Ha valamely mennyiség nagyobb egy másíknál és ez megint nagyobb valamely harmadíknál, akkor az első mennyiség is nagyobb a harmadíknál. Jelelkel, ha: $a > b$ -nél, és $b > c$ -nél, úgy még inkább $a > c$ -nél.

A mennyiségtan olyan tételeit, amelyek önmagukban nem világosak, hanem helyességüket még okokkal is kell támogatni, azaz amelyek *bebizonyításra* szorulnak, *tantételeknek* nevezzük. Minden tantétel két főrészből áll, u. m. a *főltételtől* (hypothesis) és a *következményből*, vagy *zárotételtől* (thesis).

A bizonyítás módja kétféle lehet; még pedig: 1. *egyenes*, vagy *direkt* a bizonyítás, ha a tétel helyessége magukból a felsorolt okokból tűnik ki és 2. *közvetett*, vagy *indirekt* a bizonyítás, ha azt mutatjuk meg, hogy a tétellel ellenkező minden állítás szükségképen ellenmondásra vezet, azaz vagy a tantétel feltételeivel, vagy pedig valamely elismert igazsággal ellenkezik és így helytelen.

Az olyan tételeket, amelyek más, általánosabb tételekből, mint különleges esetek önként folynak, *következményes-tételeknek* nevezzük.

A mennyiségtan egyik fontos célja, arra képesíteni bennünket, hogy *feladatokat* tudjunk megfejteni. A feladatok megfejtése abban áll, hogy adott mennyiségekből, az azok közt megállapítható kapcsolatok révén, ismeretlen értékeket határozzunk meg.

A mennyiségtanban fontos még az is, hogy az előforduló mennyiségeket szabatosan *értelmezzük*, illetőleg *meghatározzuk*. A mennyiségek fogalmát vagy úgy határozzuk meg, hogy azoknak minden lényeges tulajdonságait felsoroljuk; vagy pedig oly módon, hogy azok keletkezését ismertetjük meg. Az előbbi a *tárgyértelmezés*; az utóbbi a *származtató-értelmezés*.

A legegyszerűbb mennyiségtani fogalmakat, amelyeket más egyszerűbbekből összetenni nem lehet, *alapfogalmaknak* nevezük. Ilyen például az irány fogalma.

II. A mértan tárgya.

A mértan a *tér* fogalmán alapszik. Azt, hogy mi a tér, megmagyarázni nem lehet (alapfogalom). A tér lényeges tulajdonságai, hogy: minden irányban, folytonosan, határtalanul kiterjed és egynemű részekből áll.

A térnek minden felől határolt részét *mértani testnek* nevezzük. Ilyen test a valóságban nincs, mert a *természeti* test *anyagból* áll, amelynek különféle tulajdonságai vannak u. m. színe, keménysége, stb.; a mértani test ellenben a természetinek pusztá alakja, tehát annak csak *térbeli* tulajdonságai vannak.

Jóllehet, hogy a testek minden lehető irányban kiterjednek, mégis azokon három fő irányt, vagy méretet különböztetünk meg, u. m. hosszúságot, szélességet és magasságot (vastagságot, mélységet).

A test határai a *lapok*. Minden lapnak két irányban van kiterjedése, u. m. hosszában és széltében. A lapoknak határai: a *vonalak*, melyeknek csak egy méretük van, t. i. hosszúságuk. A vonalak határai a *pontok*, melyeknek semmi kiterjedésük sincs. A pont csak a tér bizonyos helyének kijelölésére szolgál, ezért magában véve semmiféle mértani vizsgálódásnak tárgya nem lehet.

E szerint összesen háromféle téralakzat gondolható, t. i. *test*, *lap* és *vonat*; ezeket közös néven *térmennyiségeknek* nevezzük.

Megjegyzendő, hogy valamely térmennyiség *határa* nem annyi, mint annak része; azaz a test semmiféle része sem lap, a lap legparányibb része sem vonal, és a vonal bármely csekély része sem pont; viszont az egymás mellett álló pontok sora nem alkot vonalat, az egymás mellé helyezett vonalakból nem származik lap és a lapokból nem keletkezhet test, habár minden testen számtalan lapot, minden lapon számtalan vonalat, és minden vonalon számtalan pontot gondolhatunk.

Az imént a test fogalmából indultunk ki és elértünk a pontig; lehet azonban megfordítva a pontból kiindulva a testig eljutnunk. Ugyanis a mozgó pont útja, vagy nyoma vonalat alkot; a vonal folytonos, kiterjedési irányától eltérő mozgásából *lap* származik; végre a lap folytonos, kiterjedési irányaitól eltérő mozgásából *test* keletkezik. A test folytonos mozgása ismét csak testet eredményez. Látni való tehát, hogy csak *háromféle térmennyiség* képzelhető.

A vonalak *egyenesek* és *görbék* lehetnek. Az egyenes vonal fogalma oly egyszerű, hogy azt értelmezni nem tudjuk. Amely vonalnak legkisebb része sem egyenes, azt görbének mondjuk. Több egyenes vonal összetételéből *tört vonal*, az egyenes és görbe vonalak összetételéből *vegyes vonal* keletkezik.

A lapok szintén kétfélék: *sík* és *görbe* lapok. A síklapnak, vagy síknak az a jellemző tulajdonsága, hogy azon bármely irányban egyenes vonalat húzhatunk; azaz, ha a sík akármely két pontját egyenes vonallal összekapcsoljuk, ennek minden pontja a síkba esik. Egyébként a síklap (planum) fogalma az alapfogalmak közé tartozik, tehát nem értelmezhető. Amely lapnak legkisebb része sem sík, azt *görbe lapnak* nevezzük.

A testek is kétfélék; még pedig: *szögletesek*, amelyeknek határlapjaik csupa síkok (ilyen test például a kocka), vagy *gömbölyűek*, amelyeket részben sík, részben görbe lapok, vagy kizárólag görbe lapok határolnak (pl. a gömb).

Az elősorolt térmennyiségek szabályszerű összekapcsolásából mértani *alakzatok*, *idomok* származnak. Az összekapcsolást *alakításnak*, vagy *szerkesztésnek* (constructio) mondjuk.

III. A mértan felosztása és módszerei.

Anyagát tekintve a mértannak két főrésze van: a *sík-* és a *térmértan* (planimetria és stereometria).

A síkmértan azon alakzatok tulajdonságait ismerteti, amelyek ugyanazon egy síklapban elférnek; a térmértan ellenben azon alakzatokat vizsgálja, amelyek a térnek mind a három méretét föltételezik, tehát *egy* síkban nem férnek el.

A térmennyiségek tulajdonságait két különböző mód szerint vizsgálhatjuk, u. m. az *összetevő* és az *elemző* mód szerint (synthesis, analysis).

Az *összetevő* módszer fő eszköze a szerkesztés. Ez a módszer adott elemekből és föltételekből indul ki és ezeknek *fokozatos* összekapcsolása, nemkülönben célirányos következtetések útján igazságokat fejteget. Az összetevő módszer jobbjára egyes külön esetekből indul ki és az ekkép nyert eredmények egybevetése és összehasonlítása alapján *fokonként* emelkedik föl az általános igazság magaslatára.

Az *elemző* módszer ellenben a *számítan* hathatós segítségével előbb a térmennyiségek *általános* viszonyait, törvényeit állapítja meg, és ezekből vezeti le az *egyes* esetekre vonatkozó törvényeket.

Kizárólag egyik módszer sem alkalmazható a mértanban. A nevezett két módszer között találjuk az úgynevezett *háromszögtani módszert*; ez főleg a háromszög-mértanban nyer alkalmazást és a szerkesztést a számítással egybekötve alkalmazza.

SÍKMÉRTAN.

(PLANIMETRIA.)

Első fejezet.

A vonalakról és a szögekről.

1. §. Az egyenes vonal.

Az egyenes vonal egyszerű fogalmából a következő igazságok folynak:

1. *A sík bármely adott pontján át számtalan egyenes vonal húzható.*

2. *Minden egyenes vonal határtalanul meghosszabbítható.*

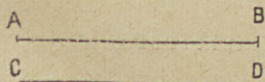
3. *Két adott ponton keresztül csak egy egyenes vonalat húzhatunk; tehát az olyan egyenesek, amelyeknek két közös pontjuk van, egész terjedelmükben együvé esnek, szóval fődik egymást.*

4. *Két adott pont közt az egyenes vonal a legrövidebb út, azaz ha két pont között akármilyen görbe vonalat húzunk, ez mindig hosszabb az eme pontokat összekapcsoló egyenesnél. Ezért az egyenes vonalat az összekapcsolt pontok távolságának (distantia) mondjuk.*

5. *Amely egyenes vonalnak két pontja közös a síkkal, az egész hosszában ezen síkban van.*

A felsorolt tételek mindegyike be nem bizonyítható sarkigazság.

1. ábra.

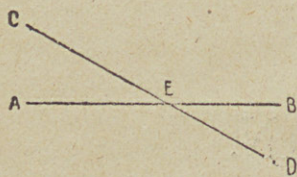


Az egyenes vonalat két betűvel jelöljük; ezeket a határolt egyenes vonalnál a végpontok mellé, a határtalannak gondolt egyenes vonalnál pedig annak tetszés szerinti két pontjához írjuk. (1. ábra.)

Ott, hol abból félreértés nem származhatik, az egyenes vonalat röviden *egyenesnek* fogjuk nevezni.

6. Két egyenes vonalnak csak egy közös pontja lehet, mert

2. ábra.



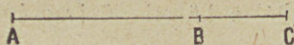
két közös pont esetében azok a 3. p. szerint tökéletesen egybeesnének. A közös pontot *metsző-pontnak* nevezzük. Így pl. AB és CD egyeneseknek (2. ábra). E a metsző-pontjuk.

Az egyenes vonalnak két lényeges jegye van t. i. iránya és hossza.

2. §. Az egyenes vonalak összeadása, kivonása, szorzása és osztása.

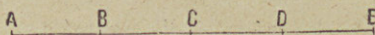
Valamely határolt egyenes vonal hossza kétféleképen változtatható meg, t. i. hosszabbítással és rövidítéssel.

3. ábra.



Ha AB egyenest (3. ábra) B végpontján túl C -ig megnyújtjuk, AC egyenest nyerjük és ezt AB és BC egyenesek összegének nevezzük, azaz: $AC = AB + BC$. Viszont AB egyenes AC és BC egyenesek különbsége gyanánt tekinthető, vagy jelekkel kifejezve: $AB = AC - BC$. Épen úgy: $BC = AC - AB$.

4. ábra.



Továbbá AB egyenest (4. ábra) valamely határtalan egyenesre ismételten rámérhetjük pl. m -szer, az ekkép származott AE vonal AB egyenes m -szerezését, azaz m számmal való szorzatát ábrázolja. AB egyenes a szorzandó, m a szorzó. A felvett esetben: $AE = 4 \cdot AB$.

Viszont ha AE egyenest m egyenlő részre osztjuk; egy ilyen AB rész nem egyéb, mint AE egyenes m -ed része, azaz: $AB = \frac{AE}{m}$. Itt AE az osztandó, m az osztó. A felvett esetben $AB = \frac{AE}{4}$.

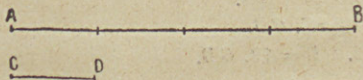
Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy: az egyenes vonalakat épen úgy, mint a számokat, összeadni, kivonni, szorozni és osztani lehet.

3. §. Az egyenes vonalak méréséről.

Hogy valamely véges egyenes vonal hosszát meghatározzassuk, azt más ismert egyenessel kell összehasonlítani, keresve, hogy hányszor vihető fel az ismert egyenes a másokra. Ezt az eljárást

mérésnek, az ismert egyenest *egységnek*, azt a számot, amely megmutatja, hogy hányszor mérhető fel az egység a megméréendő egyenesre, *mértékszámnak* nevezzük. Minden mérésnek *szám* az eredménye, amely az összehasonlított termennyiségek arányát fejezi ki. A mérésnél két eset fordulhat elő. T. i.:

1-ször. Az egységül választott CD egyenes (5. ábra) a megméréendő AB -re *maradék nélkül* felmérhető. Ekkor a mérés eredménye: *egész szám*; AB egyenest CD *többszörösének*, CD -t, pedig



AB *mértékének* nevezzük. A felvett esetben CD egység 4-szer mérhető fel AB -re tehát AB négyszerese CD -nek.

2-ször. Az egységül elfogadott CD vonal a megméréendő AB -re *nem* mérhető fel *maradék nélkül*. Ekkor:

a) vagy találunk oly harmadik egyenes vonalat, amely úgy AB -re mint CD -re *maradék nélkül* felmérhető, vagy:

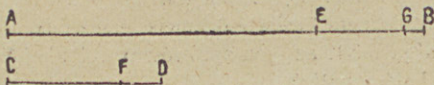
b) nem találunk olyat.

¶ Az a) esetben a harmadik egyenes vonalat AB és CD egyenesek *közös mértékének* nevezzük és az utóbbi két vonalat *összemérhetőnek* (commensurabilis) mondjuk. Ez esetben CD egységnek valamely része (nehányad része) a megméréendő AB -re *maradék nélkül* felmérhető; ennél fogva itt a mérés eredménye *vegyes szám*.

A b) esetben az egységnek semmiféle része sincs meg maradéktalanul AB -ben. Ekkor az AB csak *közéltőleg* mérhető meg a választott egységgel, illetőleg ennek valamely részével; a mérés eredménye *végszerűtlen* (irrationalis) szám: az ilyen *egyenesek össze nem mérhetők* (incommensurabilis). Hogy ilyen vonalak valóban vannak, arról későbbben meg fogunk győződni.

Midőn az egység nincs meg *maradék nélkül* a megméréendő egyenesben, az a kérdés támadhat, van-e közös mértékük, vagy nincs?

6. ábra.



Há van közös mértékük, azt oly módon keressük meg, mint két szám legnagyobb közös osztóját.

T. i. CD egységet a megméréendő AB -re (6. ábra) ismétellen felmérjük, éspedig annyiszor, ahányszor lehet; tegyük fel, hogy a jelen példában 2-szer, tehát $AE = 2 \cdot CD$. Most EB maradékot, mely öketellenül kisebb CD -nél, CD -re annyiszor mérjük fel, ahányszor lehet; a szóban forgó esetben 1-szer, tehát $CF = 1 \cdot EB$. Az új FD maradékot ismét fölmérjük az előbbi maradékra EB -re; ennek folytán $EG = 2 \cdot FD$. A most fennmaradó GB -t a megelőző FD maradékra

visszük, ezt épen 2-szer tehetjük maradék nélkül. Az *utolsó* maradék — GB — a keresett közös mérték. Mert a fentebbiek szerint:

$$AB = 2 \cdot CD + EB, \quad (1)$$

$$CD = 1 \cdot EB + FD, \quad (2)$$

$$EB = 2 \cdot FD + GB, \quad (3)$$

$$FD = 2 \cdot GB \quad (4)$$

Az értékek helyettesítése után:

$$EB = 2 \cdot (2 \cdot GB) + GB = 5 \cdot GB.$$

$$CD = 5 \cdot GB + 2 \cdot GB = 7 \cdot GB.$$

$$AB = 2 \cdot (7 \cdot GB) + 5 \cdot GB = 19 \cdot GB.$$

Azaz \overline{GB} vonal mint közös mérték, CD -ben 7-szer, AB -ben 19-szer található.

Megjegyzendő, hogy GB egyszeresmind AB és CD egyeneseknek a *legnagyobb* közös mértéke. Mert föltéve, hogy GB -n kívül van még egy, ennél *nagyobb*, közös mérték is, ez állítólagos mértéknek úgy AB -, mint CD -ben, tehát az (1) egyenletnél fogva egyszeresmind EB -ben is kellene találatnia; továbbá a (2) egyenlet szerint FD -ben, és végre a (3) egyenletnél fogva GB -ben is; ez azonban képtelenség, mert a hosszabb vonal a rövidebbre nem mérhető fel.

A fentebbiek alapján már most nem nehéz az AB és CD egyenes vonalak mértékszámainak arányát meghatározni. Ugyanis a talált közös mérték CD -nek hetedrésze, és e hetedrész AB -ben 19-szer van meg, ennél fogva

$$AB = 19 \times \frac{CD}{7} = \frac{19}{7} CD$$

tehát a mérés eredménye CD egységre vonatkozólag: $\frac{19}{7}$, vagyis $2\frac{5}{7}$, azaz egyes szám.

Megeshetik azonban, hogy a közös mérték keresésénél sohasem akadunk olyan maradékra, amely a közvetlenül megelőzőben *tökéletesen* foglaltatnék. Mert bár az új maradék mindig kisebb az előbbinél, és így a maradékok folyvást csökkennek; minthogy azonban nincs oly *véges* határ, melyen túl a maradék már nem fogyhatna; ezért gondolható oly eset is, mikor a maradékok vég nélkül folytatódnak. Ilyenkor az adott vonal a kiszabott egységgel csak *közvetlenül* mérhető meg. Kellő számú művelet után t. i. a hátralevő csekély maradékot elhagyjuk; ennek következtében a mérés eredménye nem pontos ugyan, azonban kétségtávol annál pontosabb, minél kisebb az elhagyott maradék. Ekkor tehát a mérés *végszerűtlen* (irrationalis) számot eredményez.

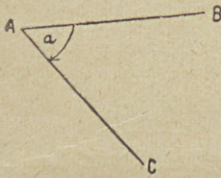
Az utóbbi eset a *gyakorlatban* nem fordul elő, mert érzékeink tökéletlensége és műszereink hiányossága miatt az igen apró részek különbségét nem vesszük észre és így meg sem határozhatjuk.

A hosszúságmérés egysége hazánkban és a legtöbb művelt államban a *méter*, vagyis a *Páris* városán áthaladó délkör negyedének 10 milliomod része.

Nagyon kicsiny, vagy felettle nagy távolságok mérésénél a méternek a tízes számrendszer törvénye szerint alkotott részeit, illetőleg többszöröseit is alkalmazzuk a hosszúságok meghatározására.

4. §. A szögek keletkezéséről.

7. ábra.



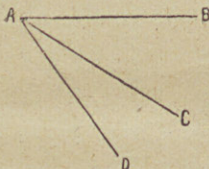
Ha AB egyenes vonalat (7. ábra) A pontja körül a siklapon körülforgatjuk, az minden képzelhető irányon áthalad. Ezen számtalan sok irány közül mindegyik, tehát AC is, az eredeti iránnyal egy-egy *szöget* alkot, amely a fordulat nagyságát mutatja. A szög AB és AC határvonalait *száraknak*, a közös A pontot *szögpontnak* nevezzük.

A szöget vagy a szögpont mellé írt betűvel szokás jelölni, ekkép: A szög; vagy, ha ebből félreértés támadhatna, akkor három betűvel jelöljük meg, így módon: BAC vagy CAB szög; itt a középső betű a szögpontot, a szélsők pedig a két szár egy-egy pontját jelölik. Szokás a szöget *egy apró* betűvel is jelölni, és ezt a két szár közé a szögpont mellé írni: Pl. α szög.

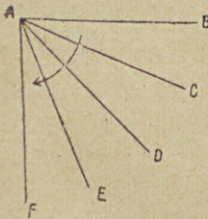
Megjegyzendő, hogy AB vonal kétféleképp juthat AC helyzetbe, t. i. először, ha a *nyíl irányában*, tehát az óramutató járásával megegyező irányban, másodsor, ha az *óramutató járásával ellenkező irányban* fordul AC -ig. Ezért minden szögnél a fordulás *irányját* is tekintetbe kell vennünk.

Mint hogy az adott magyarázat szerint *a szög nem egyéb, mint ama fordulat nagyságának a mértéke, amellyel egyik szögszár a másik helyzetébe kerülhet*, azért:

8. ábra.



9. ábra.



1. A szög nagysága nem függ a szárak hosszúságától.

2. Az ugyanakkora fordulatból származott szögek egyenlők, azaz kellően egymásra fektetve födük egymást.

3. Nagyobb fordulat után nagyobb szög keletkezik. Így ha AB -t először AC -ig (8. ábra), azután tovább AD -ig forgatjuk, az utóbb származó BAD szög nagyobb BAC -nél. Itt BAD szöget BAC és CAD szögek összegének mondjuk, azaz $BAD \sphericalangle = BAC \sphericalangle + CAD \sphericalangle$. Viszont BAC szög BAD és CAD szögek különbsége gyanánt tekinthető, azaz $BAC \sphericalangle = BAD \sphericalangle - CAD \sphericalangle$. Ha AB egyenes

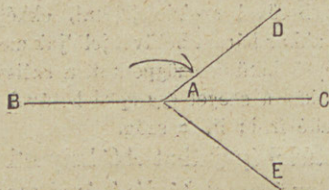
(9. ábra) ugyanazon irányban több egyenlő fordulatot végez, akkor a származó BAC , BAD , BAE , ... szögek BAC szög 1-szeresét, 2-szeresét, 3-szorosát tüntetik fel.

Viszont könnyen belátható, hogy valamely adott szöget képesek vagyunk akárhány egyenlő részre felosztani. *A szögekkel, tehát épen úgy, mint a vonalakkal, összeadást, kivonást, szorzást és osztást végezhetünk.*

5. §. A szögek nemeiről és mértékéről.

Ha AB egyenest (10. ábra) A pontja körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetével ellenkező irányba AC -be jut, BAC *nyújtott*,

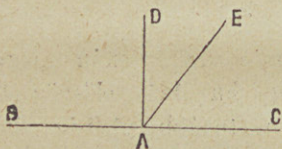
10. ábra.



vagy *egyenes* szög keletkezik. E szerint *nyújtott*, vagy *egyenes* szögen olyat értünk, amelynek szárai ugyanazon egyenes vonalba, azonban ellenkező irányba esnek. Minthogy a *nyújtott* szög nem tetszőleges, hanem szorosan meghatározott fordulat eredménye, azért a *nyújtott szögek* mind *egyenlők*. Ezt különben az is bizonyítja, hogy két *nyújtott* szög mindig egymásra illeszthető úgy, hogy szögpontjaik és száraik egybe essenek. (Miért?) A *nyújtottnál* kisebb szöget *behajlónak*, vagy *vált szögnek*, a *nyújtottnál* nagyobbat *kihajlónak*, vagy *domború* szögnek nevezzük. Így pl. a 10. ábrában BAD \sphericalangle *behajló*, ellenben BAE \sphericalangle *kihajló*.

Végül, ha AB egyenest addig forgatjuk, míg eredeti helyzetébe visszatér, *teljes* szög származik.

11. ábra.



A *nyújtott* szög felét *derékszögnek* (angulus rectus) nevezzük és R betűvel jelöljük. Így (11. ábra) BAD és CAD *derékszögek*. Minthogy a *nyújtott* szögek mind *egyenlők*, tehát felrészük, a *derékszögek* is mind *egyenlők egymással*.

A *derékszögnél* kisebb szögeket *hegyes* szögeknek, ellenben a *derékszögnél* nagyobb, ámde a *nyújtottnál* kisebb szögeket *tompaszögeknek* nevezzük. A 11. ábrában CAE \sphericalangle *hegyes*, ellenben BAE \sphericalangle *tompa*. A *hegyes* és *tompaszögeket* közös néven *ferdeszögeknek* hívjuk.

Az egymást *derékszöggé* kiegészítő *hegyes* szögeket *pótlószögeknek* nevezzük. Így CAE és DAE szögek *pótlószögek*, mert DAE \sphericalangle $+$ CAE \sphericalangle $= R$.

Amint a hosszúságok csak hosszúságokkal mérhetők, úgy a szögek mérésére is csak szög szolgálhat. A szögek mérésére legalkalmasabb egység a *derékszög*. Szöget mérünk, ha azt a derékszöggel összehasonlítjuk. Kényelmesebb összehasonlítás céljából a derékszöget 90 egyenlő részre osztjuk fel; e részeket fokoknak, a fok 60-ad részét percnak és a perc 60-ad részét másodpercnak nevezzük. A másodpercet még tizedrészekre is fel szokták osztani. A fok jele: $^{\circ}$, a percé: $'$, a másodpercé: $''$.

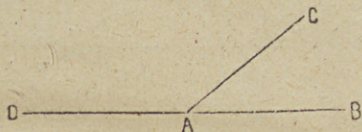
Tehát ezt: $24^{\circ} 13' 49''$ így olvassuk: 24 fok, 13 perc, 49,5 másodperc. Az elmondottak alapján:

minden nyújtott szög	=	180°
" behajló "	<	180°
" kihajló "	>	180°
" teljes "	=	360°

6. §. A mellékszögekről.

Ha BAC szög egyik pl. AB szárát (12. ábra) a szögpontra túl meghosszabbítjuk, CAD szög keletkezik és ezt BAC szög *mellékszögének* nevezzük. Minthogy viszont AB egyenes az AD szár meghosszabbítása gyanánt tekinthető, azért BAC \sphericalangle viszont DAC -nek mellékszöge.

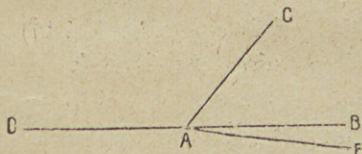
12. ábra.



E szerint mellékszögeken oly szögpárt értünk, melyek szögpontja és egyik szára közös, a másik két szár pedig ugyanazon egyenes vonalba esik. Ebből világos, hogy *két mellékszög együtt egy nyújtott, vagyis két derékszöggel egyenlő*.

E tétel megfordítva is áll, azaz, ha két szög együtt nyújtott szöget ad, ha továbbá szögpontjuk és egyik száruk közös; akkor e szögek: *mellékszögek*, azaz a két külső szár ugyanazon egyenes vonalba esik.

13. ábra.



Mert legyen BAC \sphericalangle + CAD \sphericalangle = $2R$ (13. ábra) és tegyük föl, hogy AB szárnem fekszik DA szár irányában, hanem pl. AE lenne DA -nak a meghosszabbítása; ekkor állania kellene a következő egyenletnek: CAD \sphericalangle + EAC \sphericalangle = $2R$; azonban a föltétel szerint egyszersmind CAD \sphericalangle + BAC \sphericalangle = $2R$, tehát:

$$CAD \sphericalangle + EAC \sphericalangle = CAD \sphericalangle + BAC \sphericalangle$$

és ha ez egyenlet mindkét oldalából CAD szöget kivonjuk; abból az következik, hogy:

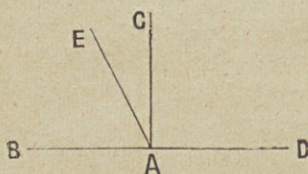
EAC \sphericalangle = BAC \sphericalangle , a mi lehetetlen. Ezen ellenmondás csak úgy szűnik meg, ha AB -szár DA irányába esik. (Indirekt bebizonyítás.)

Ha két mellékszög egyenlő egymással, akkor mind a kettő derékszög; ellenben két különböző mellékszög közül a kisebbik mindig hegyes, a nagyobbik pedig

tompaszög. Ennélfogva a derékszög a maga mellékszögével egyenlő; ellenben a hegyes-szög kisebb, a tompa pedig nagyobb a megfelelő mellékszögnél.

Ha két egyenes derékszöveget alkot egymással, azt mondjuk, hogy azok egymásra *merőlegesen* állanak.

14. ábra.



Így ha $BAC \sphericalangle = 90^\circ$ (14. ábra), ezt így is kifejezhetjük: AC merőlegesen áll BD -re és viszont; kijelölve $AC \perp AB$ -re.

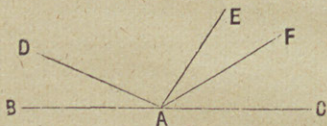
Az eddigiek alapján bebizonyíthatjuk, hogy:

1. Valamely egyenes vonal meghatározott pontján ezen egyenesre csak egy merőleges húzható. (14. ábra.)

Mert tegyük föl, hogy $AC \perp BD$. Ha ezenkívül még AE egyenes is merőlegesen állana BD -re, akkor $EAB \sphericalangle = 90^\circ = EAD \sphericalangle$ lenne; ám ez lehetetlen, mert $EAB \sphericalangle < CAB \sphericalangle$ -nél; ellenben $EAD \sphericalangle > CAD \sphericalangle$ -nél; már pedig a föltétel szerint: $CAB \sphericalangle = CAD \sphericalangle = 90^\circ$ -kal.

2. Mindazon szögek összege, amelyeknek közös szögpontjuk van és amelyek valamely egyenes vonal ugyanazon oldalára esnek, két derékszög.

15. ábra.



Azaz (15. ábra) $BAD \sphericalangle + DAE \sphericalangle + EAF \sphericalangle + FAC \sphericalangle = 2R$.

Mert az egész, vagyis az egyenes szög a részek összegével egyenlő.

3. Az ugyanazon szögpont körül fekvő szögek összege négy derékszög.

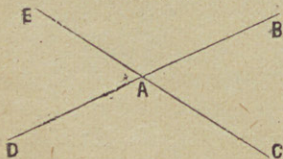
Mert ha a közös szögponton át egyenes vonalat húzunk, ennek mindegyik oldalán a szögek összege az előbbi tétel szerint két R , a két oldalon tehát összesen négy R .

4. Két egyenlő szögnek a mellékszögei is egyenlők. (Miért?)

5. Két mellékszög felező vonalai egymásra merőlegesek.

7. §. A csúcsszögekről.

16. ábra.



Ha valamely szögnek mind a két szárát a szögponton túl meghosszabbítjuk, a megnyújtott szárak új szöveget alkotnak, amelyet az eredeti szög *csúcs*-szögének nevezünk.

Így például a 16. ábrában $DAE \sphericalangle$ csúcs-

szöge BAC \sphericalangle -nek és viszont BAC \sphericalangle csúcsszöge DAE \sphericalangle -nek. Épen így: EAB \sphericalangle csúcsszöge DAC \sphericalangle -nek.

A megfelelő csúcsszögek egyenlők egymással.

Azaz: $BAC \sphericalangle = DAE \sphericalangle$;

mert $BAC + CAD = 2R$ (mellékszögek),

továbbá $CAD + DAE = 2R$; tehát:

$$BAC + CAD = DAE + CAD$$

és ha CAD szöget az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk, marad, hogy:

$$BAC \sphericalangle = DAE \sphericalangle,$$

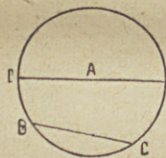
a mi bebizonyítandó volt. (Direkt bizonyítás.)

Szintügy bizonyítható be, hogy: $CAD \sphericalangle = BAE \sphericalangle$.

8. §. A körvonal.

A görbe vonalak közt legegyszerűbb és legfontosabb a *kör*. Ha az adott hosszúságú AD egyenes vonalat (17. ábra) A végpontja körül a síkban egyszer körülforgatjuk, akkor a mozgó D végpont zárt görbe vonalat ír le, melynek minden pontja a mozdulatlan A végponttól egyenlő távolságra esik; ezt a görbe vonalat *körnek* nevezük. *A kör tehát oly görbe vonal, melynek minden pontja valamely meghatározott ponttól egyenlő távolságra van.*

17. ábra.



Az egész körvonalat a *kör területének*, az így határolt síkot *kör lapnak*, a körülforduló AD egyenest a kör *sugarának* (radius) vagy *félátmérőjének*, a mozdulatlan A végpontot a kör *középpontjának* (centrum) nevezzük.

A körvonal bármely, pl. BC részét *körívnek* (arcus), a körív végpontjait összekötő egyenes vonalat *húrnak* (chorda) hívjuk. Minden húr a kört két *szeletre* (segmentum) osztja.

A kör középpontján átmenő és a terület két átellenes pontját összekapcsoló egyenes vonalat *átmérőnek* (diameter) nevezük.

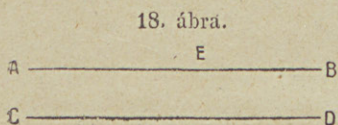
Ugyanazon körben úgy a sugarak, mint az átmérők egyenlők egymással.

Második fejezet.

A párhuzamos egyenesekről.

9. §. Két és három párhuzamos egyenes.

1. Az olyan egyenes vonalakat, amelyek bármennyire meghosszabbítva sem találkoznak egymással, *párhuzamosoknak* (parallel) nevezzük.

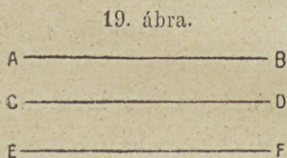


Igy pl. AB egyenes vonal (18. ábra) párhuzamos CD -vel, a mit így jelölünk: $AB \parallel CD$.

Az olyan egyenes vonalakat, amelyek kellően meghosszabbítva egy közös pontban találkoznak, *összehajlóknak* (convergens) mondjuk.

Valamely adott CD egyeneshez adott E ponton át csak egy AB párhuzamos húzható. (Sarktétele.)

2. Ha két egyenes vonal egy harmadikkal párhuzamos, egymással is párhuzamos.



Azaz, ha $AB \parallel EF$ (19. ábra); és $CD \parallel EF$; akkor: $AB \parallel CD$.

Itt azt kell bebizonyítanunk, hogy AB és CD egyenesek nem találkoznak egymással, bármennyire meghosszabbítjuk is azokat. E célból tegyük fel, hogy AB és CD egyenesek valahol G pontban metszik egymást. Minthogy a föltétel szerint úgy AB , mint CD vonal EF -fel párhuzamos, tehát e felvételnél úgy áll a dolog, mintha G ponton keresztül két egyenest húzhattunk volna, amelyek mindegyike párhuzamos EF -fel; ez azonban a megelőző sarkigazságnál fogva lehetetlen. Tehát AB nem találkozhatik CD -vel, azaz $AB \parallel CD$ -vel. (Ez indirekt bizonyítás.)

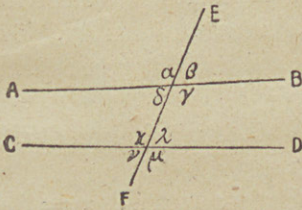
3. Ha valamely egyenes vonal két párhuzamos közül az egyiket metszi, a másikat is okvetlenül átmetszi,

Mert, ha az adott egyenes a második párhuzamost nem metszené, akkor a 2. pont szerint az elsővel sem találkozhatnék (miért nem?); ez azonban a föltétellel ellenkezik.

10. §. Két párhuzamos és egy átmetsző egyenes.

1. Ha valamely egyenes vonallal más egyenest átmetszünk, minden metsző pont körül *négy* szög keletkezik. Így ha EF egyenes

20. ábra.



(20. ábra) AB és CD egyeneseket átszeli, a két metsző pont körül összesen nyolc szög alakul. Ezeknek *páronként* külön nevük van: Ugyanis:

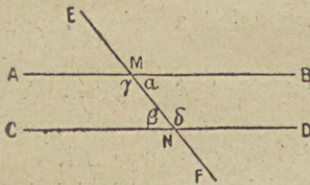
a) *Megfelelő*, vagy *ellenszögek* azok, amelyek úgy az átmetsző, mint az átmetszett vonalak ugyanazon oldalán fekszenek; ilyenek: α és λ , β és λ , δ és ν , γ és μ .

b) *Váltószögek* azok, amelyek úgy az átmetsző, mint az átmetszett egyenesek különböző oldalára esnek; ilyenek: α és μ , β és ν ; δ és λ , γ és λ ; az előbbi két párt *külső*, az utóbbi kettőt *belső* váltószögeknek nevezzük.

c) *Ugyanazon oldalon fekvő belső szögek* azok, amelyek az átmetsző egyenes vonal ugyanazon oldalán és a két átmetszett vonal között fekszenek; ilyenek: δ és λ ; γ és μ . Végül *ugyanazon oldalon fekvő külső szögek* azok, amelyek a két átmetszett egyenesen kívül és az átmetszőnek ugyanazon oldalán vannak; ilyenek: α és ν , β és μ . Két-két ilyen belső, vagy külső szöget *társzögnek* is szokás nevezni.

2. Ha két egyenes vonal valamely harmadik átmetszővel egyenlő váltószögeket zár be, úgy a két egyenes párhuzamos egymással. (21. ábra.)

21. ábra.



Legyen $\alpha = \beta$ -val, akkor egyszersmind $\gamma = \delta$ -val, mert az egyenlő szögek mellékszögei is egyenlők egymással.

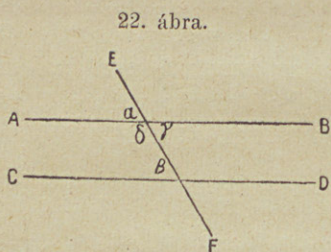
Ha az ábrát gondolatban EF átmetsző vonal hosszában ketté szeljük és a $BMND$ részt $CNMA$ -ra

illesztjük akként, hogy \overline{MN} vonal \overline{NM} -re, \overline{MB} pedig \overline{NC} -re essék, ami α és β egyenlőségénél fogva okvetetlenül lehetséges; akkor ND egyenes MA -ra kerül.

Ezt előre bocsátva, tételünket így bizonyítjuk be: Tegyük fel, hogy MA és NC egyenesek nem párhuzamosak; ez esetben azok

kellő meghosszabbítás után valahol O pontban metszik egymást; ekkor azonban egyszersmind ND és MB egyenesek is találkoznak. Most, ha az ábra $BMND$ részét eredeti helyzetébe visszatesszük, az ND és MB egyenesek szükségkép összehajlanak és EF másik oldalán bizonyos P pontban metszik egymást. E szerint AB és CD egyenes vonalnak O és P két közös pontjuk lenne, ez azonban lehetetlen, mert, ha két egyenesnek két közös pontja van, akkor azok tökéletesen egybeesnek, ami pedig AB és CD egyenesekre nézve nem áll. Következésképp nem tehetjük fel azt sem, hogy MA és NC egyenesek metszik egymást, s így $MA \parallel NC$ -vel.

3. Ha két egyenes vonal valamely átmetszővel egyenlő ellenszögeket alkot, a két egyenes párhuzamos.



Mert, ha például $\alpha = \beta$ -val (22. ábra), akkor az α -nak megfelelő csúciszög γ is egyenlő β -val; ha tehát két ellenszög egyenlő, a váltószögek is egyenlők, következésképp a 2. pont szerint az átmetszett egyenesek párhuzamosak.

4. Ha két egyenes vonalat úgy metszünk egy harmadikkal, hogy az átmetszőnek ugyanazon oldalon fekvő belső szögek összege két derékszög, akkor az átmetszett egyenesek szükségkép párhuzamosak. (22. ábra.)

Mert, ha $\beta + \delta = 2R$, akkor egyszersmind $\beta = \gamma$ -val azaz a váltószögek is egyenlők egymással.

Ugyanis γ és δ mellékszögek összege $2R$, azaz:

$$\gamma + \delta = 2R; \text{ továbbá a föltétel szerint:}$$

$$\beta + \delta = 2R, \text{ tehát:}$$

$\gamma + \delta = \beta + \delta$, és ebből: $\beta = \gamma$, tehát a második pontnál fogva $AB \parallel CD$ -vel.

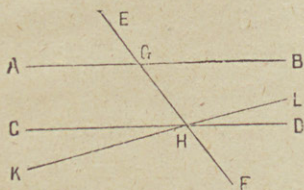
Ebből önként következik: hogy, az olyan két egyenes vonal, melyek mindegyike ugyanazon harmadikra merőlegesen áll, egymással párhuzamos. Mert ez esetben a két belső szög összege $2R$.

A 2., 3. és 4. pontban felsorolt tételek megfordításai is helyesek, azaz:

5. Ha két párhuzamos egyenest bármely harmadikkal metszünk, a keletkező váltószögek egyenlők egymással.

Legyen $AB \parallel CD$ -vel (23. ábra) és EF az átmetsző egyenes, akkor: $BGH \sphericalangle = CHG \sphericalangle$ -gel.

23. ábra.



Mert tegyük föl, hogy e szögek nem egyenlők; akkor két eset lehetséges, t. i.:

a) $BGH \sphericalangle > CHG \sphericalangle$ -nél. Ez esetben az utóbbi szög annyira megnagyobbítható, hogy $KHG \sphericalangle = BGH \sphericalangle$ -gel. E két váltószög egyenlősége folytán $KL \parallel AB$ -vel, azonban a föltétel szerint CD is párhuzamos AB -vel, e szerint tehát H ponton keresztül \overline{AB} -hez két párhuzamost húzhatnánk. Ez azonban lehetetlen és így $BGH \sphericalangle$ nem lehet $> CHG \sphericalangle$ -nél.

b) $BGH \sphericalangle < CHG \sphericalangle$ -nél; hasonló okoskodás után ebben az esetben is ellenmondásra akadunk. Tehát kell, hogy:

$$BGH \sphericalangle = CHG \sphericalangle$$

3. Ha két párhuzamos egyenest valamely harmadikkal átmetszünk, a származó ellenszögek egyenlők egymással.

Mert ha az átmetszett egyenesek párhuzamosak, úgy a megelőző pont szerint a váltószögek is egyenlők; ámde ha ez utóbbiak egyenlők, az ellenszögek is egyenlők. (3. pont.)

7. Ha két párhuzamos vonalat valamely harmadikkal metszünk, akkor az ugyanazon oldalon fekvő belső szögek összege $2R$ -rel egyenlő. (Miért? l. az 5. p.)

Ezekből egyszersmind következik, hogy.

a) Ha két egyenes vonalat egy harmadik akként szel, hogy a megfelelő szögek, vagy a váltószögek *nem* egyenlők, vagy két belső szög összege több, vagy kevesebb, mint $2R$, ezen esetekben a metszett egyenes vonalak *elégendően meghosszabbítva* metszik egymást. Mert ha párhuzamosak lennének, a föltétel nem teljesülhetne.

b) Ha két egyenes ugyanazon harmadikra merőleges, akkor azok egymással párhuzamosak.

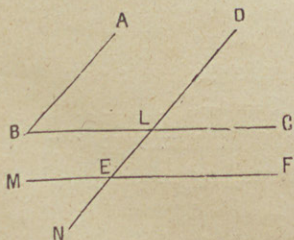
c) Valamely egyenesre kívül adott pontból csak egy merőlegest állíthatunk.

8. Ha két összehajló egyenesre egy-egy merőlegest állítunk, azok kellően meghosszabbítva szükségkép metszik egymást.

Mert ha nem metszenék egymást, párhuzamosak lennének, ámde ez esetben a rajtuk merőlegesen álló egyeneseknek is párhuzamosaknak kellene lenniök (4. p.), ez azonban ellenkezik a föltétellel.

9. Az olyan szögek, amelyeknek száraiik kölcsönösen párhuzamosak és megegyező (vagy ellenkező) irányúak, egyenlők egymással. (24. ábra.)

24. ábra.



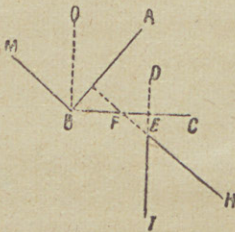
Azaz: $ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle$
 és: $MEN \sphericalangle = ABC \sphericalangle$.

Ellenben az olyan szögek, amelyeknek száraiik párhuzamosak ugyan, azonban csak az egyik pár egyező, a másik pár ellenben ellenkező irányú, egymást $2R$ -re egészítik ki. $ABC \sphericalangle + DEM \sphericalangle = 2R$.

Ezt a párhuzamos vonalak tulajdonságai alapján bizonyíthatjuk be.

10. Az olyan szögek, amelyeknek száraiik egymásra merőlegesek, vagy egyenlők, vagy 180° -ra egészítik ki egymást.

25. ábra.



Hogy e tételt hebizonyíthassuk, vegyük fel ABC szöget (25. ábra.), melynek AB és BC száraitra az E szögponntal bíró szög szárai merőlegesek. Az E pontból AB -re csakis egy — FH — egyenes húzható merőlegesen, hasonlóképen BC -re csakis DI ; ennélfogva az E szögponntal bíró szög szárai a megadott feltétel mellett csakis FH és DI lehetnek. Ezen egyene-

sek azonban E szögponnt körül négy szöget zárnak be, melyek közül kettő-kettő, mint csúcs-szög egyenlő és kettő az ABC adott szöggel egyenlő fajta, azaz: hegyes-szög; a másik kettő ellenkező fajta, azaz: tompa-szög. Ha a DI -vel párhuzamos BO , továbbá az FH -val párhuzamos BM egyeneseket szerkesztjük, akkor: $MBO \sphericalangle = DEF \sphericalangle$, mint párhuzamos és egyenlőirányú szög-szárakkal bíró szögek; ámde:

$$CBO \sphericalangle = ABM \sphericalangle, \text{ mint derékszögek;}$$

és így:

$$CBO \sphericalangle - ABO \sphericalangle = ABM \sphericalangle - ABO \sphericalangle;$$

azaz:

$$ABC \sphericalangle = MBO \sphericalangle;$$

vagy végül:

$$ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle = HEI \sphericalangle \dots \dots \dots 1)$$

Másfelől: $FEI \sphericalangle$ és $DEF \sphericalangle$ mellék-szögek, tehát:

$$DEF \sphericalangle + FEI \sphericalangle = 180^\circ;$$

vagy az 1) alatt megismert egyenlet figyelembevételével:

$$ABC \sphericalangle + FEI \sphericalangle = 180^\circ \text{ és } ABC \sphericalangle + DEH \sphericalangle = 180^\circ \dots \dots \dots 2)$$

Az 1) és 2) alatt található egyenletekből kitetszőleg: oly két szög, melyeknek száraiik merőlegesek egymásra, egyenlő egymással, ha a két szög egyenlő fajta, azaz: mind a kettő hegyes-, vagy mind a kettő tompaszög és 180° -ra egészíti ki egymást, ha a két szög különböző fajta, azaz: az egyik hegyes-, a másik pedig tompa-szög.

Harmadik fejezet.

Az idomokról általában. Egybevágó idomok.

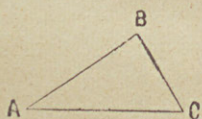
I. A háromszögről.

11. §. A háromszög belső és külső szögei.

A síklap határolt részét *idomnak* (figura) nevezzük. Az idom határai vagy egyenes, vagy görbe vonalak és eszerint egyenes- és görbevonalú síkidomokat különböztetünk meg. Az egyenesvonalú síkidomok határvonalait *oldaloknak*, az oldalak összegét az idom *kerületének* hívjuk.

Két egyenes nem alkothat idomot; erre legalább is három egyenes vonal szükséges; ennél fogva a legegyszerűbb idom az, a melynek három oldala van. Ez a *háromszög*. Az oldalak metsző pontjait a háromszög *szögpontjainak*, az oldalaktól befogott szögeket a háromszög *belsőszögeinek*, vagy röviden *szögeinek* nevezzük. Minden háromszögnek *hat* alkotórésze van, t. i. három oldala és három szöge.

26. ábra.

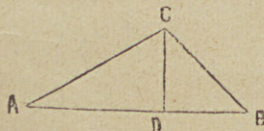


Igy a 26. ábrában ABC háromszög oldalai: $AB = c$, $BC = a$ és $AC = b$; szögei: $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$.

Mindegyik oldallal szemközt egy-egy szög van, ez az illető oldal *átellenes szöge*, így AB oldalnak C az átellenes szöge; a másik két szöget *szomszédos* szögeknek nevezzük.

Viszont, minden szöggel szemközt egy átellenes oldal van, így B szöggel AC oldal van szemközt; a másik két oldal az illető szöveget befogja, azért azokat befogó oldalaknak is nevezhetjük.

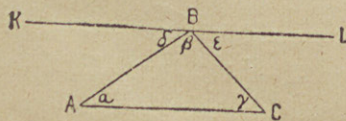
27. ábra.



A háromszög bármely oldalát, tehát pl. AB oldalt (27. ábra) *alapponálnak* hívjuk, az alappal átellenes szögpontból az alapra bocsátott CD merőleges vonalat *magasságnak* nevezzük.

1. Minden háromszög három belső szögének összege két R -rel egyenlő.

28. ábra.



Igy $ABC \triangle$ -ben (28. ábra) $\alpha + \beta + \gamma = 2R$. Ennek bebizonyítása céljából a háromszög egyik szögpontján párhuzamost húzunk az átellenes oldalhoz, tehát lesz $KL \parallel AC$

Ámde: δ és α , továbbá ε és γ mint váltószögek egyenlők, azaz: $\delta = \alpha$ és $\varepsilon = \gamma$; továbbá $\delta + \beta + \varepsilon = 2R$, ebbe most δ és ε értékeit helyettesítvén: $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.

E tételből következik, hogy:

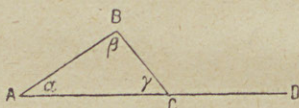
a) Ha valamely háromszög két szöge ismeretes, a harmadikat is meghatározhatjuk; t. i. a két ismeretes szög összegét $2R$ -ből, illetőleg 180° -ból kivonjuk.

b) A háromszögben csak *egy* derék-, vagy tompaszög lehet, a másik kettő szükségkép hegyesszög.

c) Ha két háromszögnek két-két szöge külön-külön egyenlő egymással, a harmadik szögnek is egyenlőnek kell lennie a megfelelő harmadikkal.

2. Ha valamely háromszög egyik oldalát meghosszabbítjuk, *külső szög keletkezik, és ez a szemközt levő két belső szög összegével egyenlő.*

29. ábra.



Így ha $ABC\triangle$ -nek (29. ábra) AC oldalát meghosszabbítjuk, BCD külsőszög $= \alpha + \beta$.

Mert az 1. pont szerint:

$\alpha + \beta + \gamma = 2R$; a mellékszögekről tanultaknál fogva pedig:

$\gamma + BCD = 2R$, tehát:

$\alpha + \beta + \gamma = \gamma + BCD$, vagy $\alpha + \beta = BCD$ \sphericalangle .

E szerint a háromszög külsőszöge mindig nagyobb bármelyik átellenes belső szögnél.

Az elmondottak alapján könnyen bebizonyíthatók a következő tételek is:

3. *Valamely egyenes vonalra bármely kívülre fekvő pontból csak egyetlenegy merőleges húzható.*

4. *A háromszög három külsőszögének összege $4R$.*

5. *Két egyenes vonal mindig azon irány felé hajlik össze, amely irányban azok egy harmadik átmetszővel $2R$ -nél kisebb belsőszögeket alkotnak.* (20. ábra).

Ezt a tételt *Euklides* az «Elemek» nagy hírvű szerzője (285 év. Kr. e.) axiómának (XI-dik) tekinti és a párhuzamosak elméletét erre alapítja.

12. §. A háromszögek nemei.

A háromszögek két különböző alapon osztályozhatók, t. i. oldalaik és szögeik tekintetéből. Az oldalakat illetőleg a háromszögek vagy *egyenlőoldalúak*, ha mind a három oldaluk egyenlő; vagy *egyenlőszárúak*, ha csak két oldaluk egyenlő; vagy *különböző oldalúak*, ha mindegyik oldaluk más-más hosszúságú.

A-szögeket tekintve a háromszögek vagy *hegyesszögűek*, ha mind a három szögük hegyes; vagy *derékszögűek*, ha egyik szögük 90° ; vagy *tompaszögűek*, ha egyik szögük tompa.

Az egyenlőszárú háromszög két egyenlő oldalát *szárnak*, a harmadik oldalt *alpnak* nevezzük.

A derékszögű háromszögben a derékszöggel átellenes oldalt *átfogónak* (hypotenusa), a másik kettőt *befogónak* (catheta) nevezzük.

A háromszög alkotórészeinek összefüggéséről. Egybevágó háromszögek.

13. §. Általános észrevételek.

Ha valamely idom minden alkotórészét és amellet e részek egymásutánját is ismerjük, akkor az idom tökéletesen *meg van határozva*.

Ebből világos, hogy valahányszor két idom oldalai és szögei ugyanazon sorban kölcsönösen egyenlők, mindannyiszor az idomok azonosak, és csak helyzetükre nézve különbözök; ha tehát kellően egymásra helyeztetnek, fedik egymást. Az ilyen idomokat *egybevágó* (congruens) idomoknak nevezzük. Az egybevágóság jele: \cong . Az egybevágó idomok megfelelő alkotórészeit *egyenlő fekvésű* részeknek is nevezzük. — A mondottak szerint az egybevágó idomok egyenlő fekvésű részei mindig egyenlők.

Az egybevágó idomoknak a mértanban igen fontos szerepük van. Minthogy minden mértani idom alkotórészei szoros kapcsolatban állanak egymással, úgy, hogy az idom *nehány* részéből a többi is föltalálható; azért az idomok meghatározásához nem szükséges azok valamennyi alkotórészét ismernünk, hanem a legtöbbször kevesebbel is beérhetjük. — Ugyanez áll az idomok egybevágóságáról. Két idom egybevágóságának megállapítására nem szükséges minden alkotórész kölcsönös megegyezését kimutatunk; mert, ha bizonyos számú alkotórész kölcsönösen megegyező, akkor a részek közt fennálló kapcsolatnál fogva a többieknek is *szükségkép* egyenlőknek *kell* lenniök. Az alkotórészek kölcsönös összefüggését fogjuk most közelebről megvizsgálni.

14. §. Hiányosan meghatározott háromszögek.

Feleljünk meg mindenekelőtt arra a kérdésre, hogy: hány és minő alkotórész szükséges valamely háromszög meghatározására?

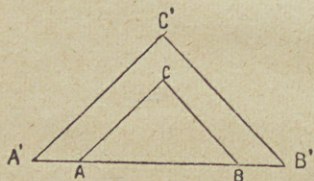
E célból tegyük föl, hogy a háromszögnek csak *egyik* alkotó része ismeretes; egy szög, vagy egy oldal.

Az első esetben az adott szög két szára között számtalan egyenes vonalat húzhatunk, és így számtalan különböző háromszög keletkezik, amelyek mindegyikében bent van az adott szög. Világos tehát, hogy *egy szög nem elegendő* a háromszög meghatározására. A második esetben, midőn t. i. a háromszög egyik oldala ismeretes, ezen oldal végpontjairól számtalan egyenest húzhatunk, amelyek egymást páronként metszvé, ugyanannyi *különböző* háromszöget alkotnak. Tehát *egy oldal* magában szintén *nem határozza meg* a háromszöget.

Ha valamely háromszögből *két* alkotórész ismeretes, ez lehet a) két szög, vagy b) két oldal, vagy c) egy oldal és egy szög.

a) Tegyük fel, hogy a háromszögnek *két* szöge ismeretes; akkor a 11. §. 1. pontja szerint a harmadik szög is meghatározható. Már most alkossunk olyan háromszöget, amely az említett szögeket

30. ábra.



magában foglalja. E végre az adott A és B két szöget egy egészen tetszőlegesen választott AB alapvonalra úgy mérjük rá, hogy mind a két szögnek egy-egy szára a fölvetett alapvonalra essék; azután a másik két szárt t. i. AC -t és BC -t a C közös metszéspontig meghosz-

szabítjuk. Minthogy AB alap hosszát tetszés szerint vettük föl, nyilvánvaló, hogy számtalan ilyen háromszöget alkothatunk.

Így például a 30. ábrában $A'C' \parallel AC$ -vel és $B'C' \parallel BC$ -vel, tehát $A' \sphericalangle = A \sphericalangle$, továbbá $B' \sphericalangle = B \sphericalangle$ és $C' \sphericalangle = C \sphericalangle$. Már pedig $A'B'C'$ háromszög lényegesen különbözik ABC háromszögtől. Ennélfogva *két* (vagy három) szög sem határozza meg a háromszöget.

b) Legyen adva a háromszögnek két oldala, AB és AC . Ha e két ismeretes oldalt a közös végponttal A -val tetszés szerinti szög alatt összeillesztjük, ezután B és C végpontokat egyenes vonallal összekötjük, ABC háromszög keletkezik, és ez az adott két oldalt valóban magában foglalja. Azonban ugyanilyen módon akárhány háromszöget alakíthatnánk. Tehát *két oldal* sem elegendő valamely háromszög meghatározására.

c) Ha a háromszögnek AB oldala és A szöge ismeretes, akkor ez utóbbi szög egyik szárára rámérjük az adott AB -t, a másik szárból pedig tetszés szerint elvágunk egy darabot pl. AC -t; ezután B pontot összekötjük C -vel. Ekkép ABC háromszög keletkezik, amely a két adott alkotórészt magában foglalja; ámde mert AC oldal hosszát tetszőlegesen szabtuk meg, világos, hogy számtalan ilyen háromszög szerkeszthető. Ennélfogva ezek az adott részek sem határozzák meg a háromszöget.

Ha az adott C szög az adott AB oldallal szemben fekszik, így okoskodhatunk. Ha C szög ismeretes, a másik két szög összege is ismeretes, mert $A \sphericalangle + B \sphericalangle = 2R - C \sphericalangle$. E két szög közül az egyiket (péld. A -t) tetszés szerint vehetjük föl [mindazonáltal úgy, hogy a fölvevett szög kisebb legyen $(2R - C)$ -nél], a másik szöveget (B -t) pedig a fentebbi egyenletből találjuk meg. Ha most e két szöveget AB oldalra illesztjük, oly háromszöget nyerünk, amelyben mind a két adott alkotórész meg van; minthogy azonban az egyik szög nagyságát tetszés szerint választhattuk meg, a háromszög az utóbbi esetben is *határozatlan*.

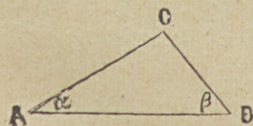
Mindezekből kitűnik, hogy a háromszög tökéletes meghatározására két alkotórész ismerete nem elegendő; hanem e célra legalább három alkotórész ismerete szükséges és e három adott alkotórész közt is legalább egy oldalnak kell lenni.

15. §. A háromszög meghatározása egy oldal és két szög alapján.

Egy oldal és a rajta fekvő két szög teljesen meghatározza a háromszöget.

Legyenek az adott alkotórészek: AB oldal, α és β szög. (31. ábra.) E három alkotórészből csak egyetlenegy háromszög alakítható. Ennek bebizonyítása végett tetszőleges hosszúságú egyenes vonalat húzunk, melyre az adott AB oldalt rámérjük. Ezután az ismeretes szögek egyikét, pl. α szöveget, AB -re helyezzük úgy, hogy a szögpontja A pontra, egyik szára AB -re jusson; a szög másik szára

31. ábra.

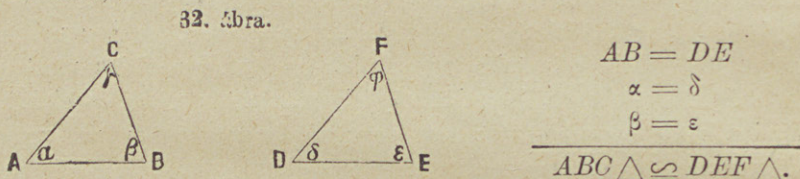


azon irányt jelöli, mely felé a háromszög AC oldala fekszik. Most β szögpontját B pontra, egyik szárát BA egyenesre illesztjük; másik szára BC oldal irányát jelöli. E két irány C közös

pontban találkozik, és ez a háromszögnek harmadik szögpontja. Minthogy pedig két egyenes vonal csak *egy* pontban találkozhatnak, tehát csak *egy* oly háromszög alakítható, mely az adott részeket magában foglalja. Ez még akkor is igaz, ha az egyik adott szög pl. γ , az adott AB oldallal *átellenben* fekszik, mert két adott szögből a harmadik is meghatározható; az *utóbbi* eset *lényegileg nem különbözik az előbbtől*.

Ebből következik, hogy:

Ha két háromszögben egy-egy megfelelő oldal és két-két megfelelő szög kölcsönösen egyenlő; akkor e háromszögek egybevágók. (32. ábra.)



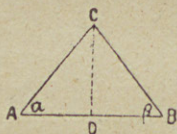
Ezen tétel *önállóan* is bebizonyítható.

E célból illesszük DEF háromszöget ABC -re úgy, hogy D pont A -ra, E pont B -re jusson; ez a föltételnél fogva lehetséges, mert $AB=DE$. A mondott helyzetben δ szögnek DF szára AC oldalra, ϵ szögnek EF szára pedig BC -re kerül, mert a föltétel szerint $\delta = \alpha$, és $\epsilon = \beta$. Ennek következtében F pontnak okvetetlenül C -re kell jutnia, mert két egyenes vonal csak egy pontban találkozhatnak egymással. Tehát a két háromszög egybevágó.

E tantételből a következő igazság folyik:

Minden háromszög, melynek két szöge egyenlő, egyenlő-szárú, vagy: A háromszög egyenlő szögeivel egyenlő oldalak vannak szemközt.

33. ábra.



Legyen $ABC \triangle$ -ben (33. ábra): $\alpha = \beta$, akkor $AC = BC$. Ennek bebizonyítására ACB szöveget felezzük. Legyen CD a felező egyenes. Ezúton két háromszög keletkezik: ACD és BCD ; ezekben az egyik oldal közös, t. i. $CD = CD$, két-két szög pedig egyenlő, mert $\alpha = \beta$ (a föltételnél fogva) és $ACD \sphericalangle = BCD \sphericalangle$ (a szerkesztésnél fogva). Ezekből kitűnik, hogy a nevezett háromszögek egybevágók, és így megfelelő alkotórészeik egyenlők; tehát: $AC = BC$.

Az olyan háromszög, amelyben mind a három szög egyenlő, egyszersmind egyenlő-oldalú is.

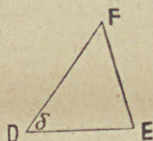
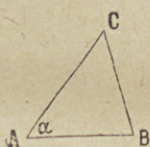
16. §. A háromszög meghatározása két oldal és a közbezárt szög alapján.

Két oldal és a két oldal közé zárt szög teljesen meghatározza a háromszöget.

Mert ez alkotórészekből csak egy háromszög alakítható. Ugyanis alkossuk meg az adott szöveget, mérjük rá ennek száraira a szög-ponttól kezdve a két adott oldalt és kössük össze a két végpontot egyenes vonallal: ekkép oly háromszög keletkezik, amely az adott három alkotórészt magában foglalja. Minthogy pedig két kijelölt ponton keresztül csak egy egyenes vonalat húzhatunk, azért az adott alkotórészekből csak ezen egy háromszög szerkeszthető. Ebből önként folyik, hogy:

Ha két háromszögben két-két megfelelő oldal és a közbezárt szög egyenlő, akkor e háromszögek egybevágók. (34. ábra.)

34. ábra.



$$AB = DE$$

$$AC = DF$$

$$\alpha = \delta$$

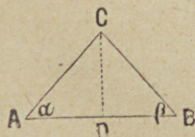
$$\frac{ABC\triangle \cong DEF\triangle.}{}$$

Ezt önállóan is be lehet bizonyítani: Fektesük DEF háromszögét ABC -re úgy, hogy δ szög α -ra, azaz DE szár AB -re, DF szár AC -re jusson; ez lehetséges, mert a föltétel szerint $\delta = \alpha$. Minthogy továbbá $AB = DE$, és $AC = DF$, tehát E pontnak szükségképp B -re, F pontnak C -re kell esnie; ennek folytán EF egyenes vonal is egybe esik BC -vel (lásd az 1. §. 3. pontját), tehát a két háromszög tökéletesen egybevágó.

Ebből a következő tantételek származnak:

1. Az egyenlőszárú háromszögben az alapon fekvő szögek egymással egyenlők, vagy: minden háromszögben az egyenlő oldalakkal átellenes szögek egymással egyenlők.

35. ábra.



Legyen $ABC\triangle$ -ben (35. ábra) $AC = BC$, ekkor $\alpha = \beta$. Mert ha az alappal átellenes ACB szöveget CD egyenes vonallal felezzük, ACD és BCD két kisebb háromszög keletkezik; ezekre nézve CD oldal közös, továbbá $AC = BC$ (a föltétel szerint), végre $ACD \sphericalangle = BCD \sphericalangle$ -gel (a szerkesztésnél fogva). Tehát a két háromszög egybevágó, mert két-két oldal és a közbezárt szög kölcsönösen egyenlő; ennek

folytán az egyenlő fekvésű alkotórészek mind egyenlők, vagyis: $\alpha = \beta$. (Ezen egyenlő szögek mindig hegyesek. Miért?)

Ebből egyszersmind kitűnik, hogy: az egyenlő oldalú háromszögben a szögek is egyenlők, tehát mindegyik szög $\frac{2}{3}R$, vagy 60° .

A megelőző tantétel alapján: valamely egyenlőszárú háromszög egyik adott szögéből a másik kettő kiszámítható.

Ugyane tétel alapján továbbá bebizonyítható, hogy: a) Azon egyenes vonal, amely az egyenlőszárú háromszög alapjával átellenes szöveget felezi, az alapra merőlegesen áll és azt felezi.

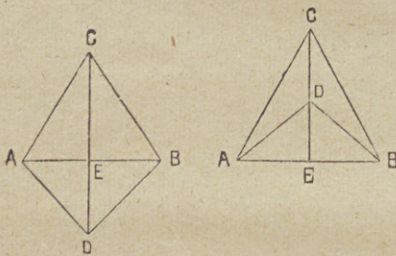
b) Az egyenlőszárú háromszög szögpontjából az alapra húzott merőleges úgy az alapot, mint a vele szemben fekvő szöveget felezi.

c) Azon egyenes vonal, amely az egyenlőszárú háromszög alapjának felező pontját az átellenes szögponttal összeköti, az alappal derékszöveget zár be és az átellenes szöveget felezi.

d) Az alapvonal felező pontjában az alapra állított merőleges az egyenlőszárú háromszögnek az alappal szemben fekvő szögpontján megy át. (6. §. 1. és az előbbi c) pont.)

e) Ha közös alapon két egyenlőszárú háromszöget alakítunk, a két átellenes szögpontot összekötő egyenes vonal a szögpont körül evő szögeket felezi és ezenkívül az alapra merőlegesen áll.

36. ábra.



Ennek bebizonyítására legyen: $AC = BC$, és $AD = BD$ (36. ábra); akkor $CAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle$ és $DAB \sphericalangle = DBA \sphericalangle$, következésképpen:

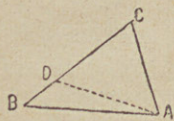
$CAB \sphericalangle \pm DAB \sphericalangle = CBA \sphericalangle \pm DBA \sphericalangle$, azaz: $CAD \sphericalangle = CBD \sphericalangle$. E szerint CAD és CBD három-

szögekben két-két oldal és a közbezárt szög egyenlő, ennek következtében: $CAD \triangle \cong CBD \triangle$; és így e háromszögek-megfelelő alkotórészei egyenlők, azaz: $ACD \sphericalangle = BCD \sphericalangle$, $ADC \sphericalangle = BDC \sphericalangle$. Már most nem nehéz kimutatni, hogy $ACE \triangle \cong BCE \triangle$; és emel-fogva $AE = BE$, és $AEC \sphericalangle = BEC \sphericalangle = 90^\circ$. (6. §.).

f) Azon egyenes vonal, mely az egyenlőszárú háromszögben az alappal átellenes szögpontnál fekvő külső szöveget felezi, az alapvonalal párhuzamos. (Miért?)

2. A háromszög nagyobbik oldalával szemközt fekvő szög mindig nagyobb, mint a kisebbik oldallal átellenes szög.

37. ábra.



Igy, ha $ABC \triangle$ -ben (37. ábra) $BC > AC$ -nél, akkor: $BAC \sphericalangle > ABC \sphericalangle$ -nél. Mert, ha a kisebb AC oldalt a nagyobbikra átvisszük úgy, hogy $CD = AC$ legyen és AD egyenest meghúzzuk, az ekkép alakult ACD háromszög egyenlőszárú lévén: $CAD \sphericalangle = CDA \sphericalangle$; ámde az utóbbi, mint ADB háromszög külső szöge, nagyobb az átellenes ABC belső szögnél (11. §. 2); tehát CAD szögnek is nagyobbának kell lennie ABC szögnél. Ámde CAD csak része BAC szögnek, tehát annál inkább $BAC \sphericalangle > ABC \sphericalangle$ -nél.

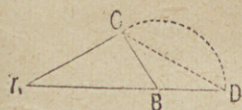
3. Viszont, a háromszög nagyobb szögével nagyobb oldal, kisebb szögével kisebb oldal van szemközt. (L. az előbbi ábrát.)

Azaz, ha $BAC \sphericalangle > ABC \sphericalangle$ -nél, akkor egyszersmind $BC > AC$ -nél. Ezt legegyszerűbben közvetve bizonyíthatjuk be. Ugyanis, ha nem lenne igaz az, hogy $BC > AC$ -nél, akkor BC vagy $= AC$ -vel, vagy pedig kisebb AC -nél. Ámde BC nem lehet $= AC$ -vel, mert akkor az 1. pont szerint $BAC \sphericalangle = ABC \sphericalangle$ lenne, ami a föltétellel ellentézik. Hasonlóképp BC kisebb sem lehet AC -nél; mert ez esetben a 2. pont értelmében a BC -vel átellenes BAC szögnek kisebbnek kellene lennie az AC -vel átellenes ABC szögnél; ez azonban a föltétellel ellentézik. E szerint csakugyan $BC > AC$ -nél.

A fentebbi tételnél fogva: a derékszögű háromszög átfogójának mindig nagyobbának kell lennie, mint bármelyik befogónak. Szintúgy a tompaszögű háromszögben a tompa szöggel átellenes oldal a legnagyobb.

4. Minden háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál. Azaz $AB + BC > AC$. (38. ábra.)

38. ábra.



Ugyanis hosszabbítsuk meg ABC háromszög AB oldalát és mérjük fel arra B -től számítva $BD = BC$ darabot; ekkor $AD = AB + BC$. Most, ha CD egyenest meghúzzuk DBC egyenlőszárú háromszög keletkezik; ennek BCD szöge $= BDC$ szöggel. Ámde BCD szög csak része ACD szögnek; tehát $ACD \sphericalangle > BDC \sphericalangle$ és ACD háromszögben a nagyobbik (ACD) szöggel szemben levő AD oldal is $>$ mint a kisebb (ADC) szöggel átellenes AC oldal (3. pont); azaz $AD > AC$ -nél, vagyis $AB + BC > AC$ -nél.

Ebből közvetlenül következik, hogy:

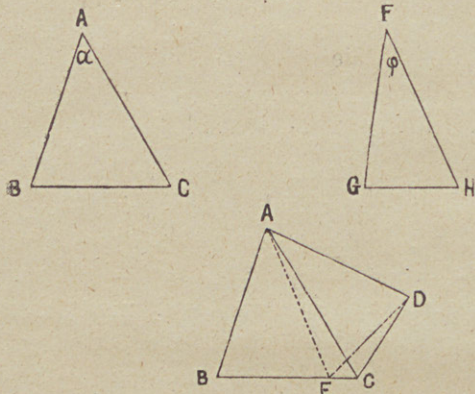
a) A háromszög bármelyik oldala nagyobb, mint a másik kettő különbsége.

Azaz: $AB > AC - BC$ nél.

b) Három meghatározott egyenes vonalból csak azon esetben alakíthatunk háromszöget, ha mindegyik vonal rövidebb a másik kettő összegénél.

5. Ha valamely háromszög két oldala egyenlő egy másik háromszög megfelelő két oldalával, ám az előbbieket által bezárt szög nagyobb az utóbbiak által bezárt szögnél: akkor az első háromszög harmadik oldala is nagyobb a második háromszög harmadik oldalánál.

39. ábra.



Tehát, ha $AB = FG$, $AC = FH$, és $\alpha > \varphi$ -nél (39. ábra); akkor $BC > GH$ -nál.

Ennek bebizonyítása céljából az FGH háromszöget ABC -höz illesztjük oly módon, amint az ábra alsó része mutatja, t. i. A ponton keresztül AD egyenes vonalat húzzuk akkép, hogy $CAD \sphericalangle =$ legyen φ -vel, ezután AD -t egyenlőnek vesszük FG -vel és D pontot összekötjük C -vel; ekkép AC oldalra oly háromszöget rajzoltunk, amely FGH -gel egybevágó. Tehát elegendő lesz kimutatnunk, hogy $BC > CD$ -nél, mert ekkor egyszersmind igaz az is, hogy $BC > GH$ -nál.

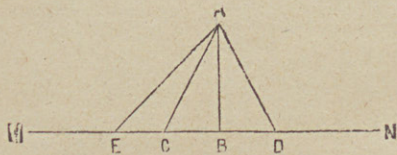
Felezzük BAD szöveget; a felező AE vonalnak szükségképen a nagyobb (α) szög szárjai közé kell esnie; végül vonjuk ED egyenest. Ezáltal két egybevágó háromszög keletkezik, t. i. $ABE \triangle \cong ADE \triangle$: mert két-két megfelelő oldaluk és a közbezárt szög egyenlő. Ennek folytán: $BE = DE$. Ám DEC háromszögben: $DE + EC > CD$ -nél, vagy, ha DE helyébe a vele egyenlő BE -t írjuk; $BE + EC > CD$, azaz: $BC > CD$ -nél.

6. Viszont, ha egy háromszögnek két oldala egyenlő egy másik háromszög két megfelelő oldalával, ám az első háromszög harmadik oldala nagyobb a másik háromszög harmadik oldalánál: akkor az egyenlő oldalak által bezárt szög az első háromszögben nagyobb, mint a másodikban.

Legyenek ABC és FGH (39. ábra) a szóban forgó háromszögek és ezekben $AB = FG$, $AC = FH$ és $BC > GH$ -nál; ekkor $BAC \sphericalangle > GFH \sphericalangle$ -nél; vagy $\alpha > \varphi$ -nél. Mert, ha $\alpha <$ lenne φ -nél, a megelőző pont szerint BC oldalnak kisebbnek kellene lennie GH nál, ámde ez a föltétellel homlokegyenest ellenkezik; hogyha pedig $\alpha = \varphi$, akkor (15. §.) $BC = GH$, ami szintén ellenkezik a föltétellel. Tehát csakugyan $\alpha > \varphi$ -nél.

7. Ha A pontból (40. ábra) MN adott egyenesre AB merőleges vonalat és több ferde egyenest húzunk, akkor:

40. ábra.



a) AB merőleges az összes egyenesek közt a legrövidebb; mert a befogó $<$ az átfogónál. Ezért AB merőleget A pont MN -től mért távolságának nevezzük.

b) Ha két ferde egyenes vonal metsző pontjai a merőleges talppontjától a két oldal felé egyenlő távolságban vannak, akkor azon egyenesek egyenlő hosszúságúak, így ha $BC = BD$; akkor $AC = AD$, mert $ABC \triangle \cong ABD \triangle$. (Miért?)

c) Két ferde egyenes közül az a hosszabbik, amelynek metszőpontja a merőleges vonal talppontjától messzebbre esik; így BE nagyobb lévén BC -nél, $AE > AC$ -nél; mert BCA szög szükségképp hegyes szög (11. §. 1. p.), tehát a mellékszöge tompa, azaz: ECA szög $>$ R -nél, de ennek folytán (16. §. 3. p.) $AE > AC$ -nél.

d) Viszont, minél hosszabb valamely ferde egyenes vonal, annál távolabb esik metsző pontja a merőleges vonal talppontjától.

Ezt b) és c) alapján közvetve bizonyíthatjuk be.

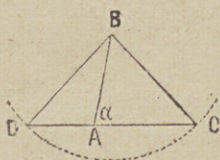
e) Adott pontból adott MN egyenest metsző három egyenlő hosszúságú ferde egyenest nem húzhatunk; mert, ha ezt tehetnők, akkor a merőleges vonal egyik oldalára két egyenlő hosszú ferde vonal jutna: ez pedig lehetetlen.

Megjegyzendő, hogy az A pontból (40. ábra) valamely adott egyenes vonalra pl. MN -re húzott merőlegesnek B talppontját A pont MN vonalon való vetületének (projekció) nevezzük. Magyarázatra nem szorul, hogy MN vonal minden pontja a maga vetületével egybeesik. Így pl. C pont ugyanezen C -nek vetülete is MN egyenes vonalon. — A vetület fogalmát vonalhosszakra is alkalmazhatjuk. Például AC vonal vetülete az MN egyenes vonalon nem egyéb, mint az utóbbinak BC szelete, melyet az A és C végpontok vetületei határolnak. AB merőleges vonalnak vetülete MN egyenesen B pont. — A vetület fogalmának segítségével a síkméтан egyik-másik tételét egyszerűbben lehet kifejezni. Még fontosabb a vetület fogalma a térméтанban, ahol arról majd bővebben szólunk.

17. §. A háromszög meghatározása két oldal és a nagyobbik oldallal átellenben fekvő szög alapján.

Két oldal és a nagyobbik oldallal szemközt fekvő szög meghatározza a háromszöget.

41. ábra.

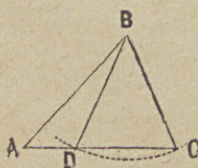


Adva van AB és BC oldal (41. ábra) és a BC nagyobbik oldallal szemközt fekvő α szög. Ismét kimutatjuk, hogy ezen alkotórészekből csak *egy* háromszög szerkeszthető.

Ugyanis az adott α szög egyik szárára A szögponttól számítva felmérjük a kisebbik AB oldalt; ezzel a háromszögnek két szögpontját megkaptuk. A harmadik szögpontról tudjuk, hogy α szögnek másik szárán fekszik és a már meglévő B ponttól BC távolságra van. Most ha B pontból, mint középpontból, BC hosszúságú félátmérővel körvonalat szerkesztünk, ez bizonyára magában foglalja mindazon pontokat, melyek B -től a kívánt távolságra vannak. Minthogy a keresett pontnak először AC száron, másodszer az említett körvonalon kell lennie, C pont nem lehet másutt, mint ott, ahol a körvonal az AC szárt metszi. Ámde a körvonal a nevezett szárt nemcsak C , hanem az AC szár meghosszabbítására eső D pontban is szeli. Tehát úgy látszik, mintha az *adott* alkotórészekből *két* különböző háromszög lenne alakítható. Ez azonban nincs így, mert ABD háromszög két oldala ugyan megegyezik ABC háromszög két oldalával ($AB = AB$ és $BC = BD$), ámde az adott α szög nincs meg ebben a \triangle -ben, hanem e helyett α -nak BAD mellékszögét találjuk ott. Ennélfogva csak *egy* oly háromszög alakítható, amely a kijelölt három alkotórészt magában foglalja.

Hogy a fent említett két metsző pont közül az egyik (C) AB szártól jobbra, a másik D pedig ugyanattól balra esik, ez onnan van, mert $BC > AB$ -nél. Most, ha C és D pontok AB -nek ugyanazon

42. ábra.

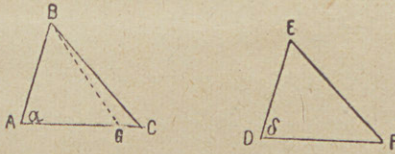


oldalára esnek (42. ábra), akkor AB -nek szükségképp nagyobbak kell lennie BC -nél. Ugyanis BDC szög, mint ABD háromszögnek külső szöge, nagyobb $BAC = \alpha$ szögnél; minthogy pedig BDC háromszög egyenlőszárú, és így $BDC \sphericalangle = BCD \sphericalangle$ -gel, tehát $BCD \sphericalangle$ is nagyobb α -nál. Azonban minden háromszögben a nagyobb szöggel nagyobb oldal van szemközt, mint a kisebb szöggel; következésképp: $AB > BC$ -nél. Ebből egyszersemind következik: hogy *két oldal és a kisebbik oldallal szemközt fekvő szög*

még nem határozza meg a háromszöget. Így pl. a 42. ábrában nemcsak ABC , hanem ABD háromszög is magában foglalja a két adott oldalt és az α szöveget. Ebben az esetben tehát két háromszög felel meg az adott föltételeknek.

Mint hogy két oldal és a nagyobbik oldallal átellenes szög a háromszöget tökéletesen meghatározza, ennélfogva: *mindazon háromszögek, melyekben két-két megfelelő oldal és a nagyobbik oldallal szemközt fekvő szög egyenlő, egybevágók.* (43. ábra.)

43. ábra.



$$\begin{aligned} AB &= DE \\ BC &= EF \\ \alpha &= \delta \\ BC &> AB \end{aligned} \quad \hline ABC \triangle \cong DEF \triangle$$

Ezt önállóan is be lehet bizonyítani.

Fektessük DEF háromszöget ABC -re úgy, hogy DE oldal a vele egyenlő AB -re, még pedig D pont A -ra. E pont B -re jusson; ekkor DF oldalnak AC irányába kell esnie, mert a föltétel szerint $\alpha = \delta$. Most az a kérdés, vajjon az F pont épen C -re fog-e esni, vagy sem? Föltéve, hogy F pont nem C -re, hanem AC oldalnak egy másik pontjára G -re jutna, ez esetben ABG háromszög azonos lévén DEF \triangle -gel, $BG = EF$; mint hogy azonban a föltétel szerint BC is $= EF$ -fel, tehát; $BG = BC$, azaz BCG \triangle egyenlőszárú, következésképp: $BCG \sphericalangle = BGC \sphericalangle$ és mind a kettő hegyes szög, tehát BCG -nek mellékszöge (BGA) okvetetlenül tompa és ennek folytán (16. §. 3.) $AB > BG$ -nél, vagyis $AB > BC$ -nél; ez azonban a föltétellel ($BC > AB$ -nél) merőben ellenkezik, tehát lehetetlen.

Hasonló ellenmondásra vezet az is, ha F pontot AC szár meghosszabbításán fekvőnek föltételezzük.

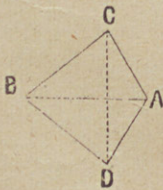
Tehát F pontnak valóban C -re kell esnie és akkor: $DEF \triangle \cong ABC \triangle$

18. §. A háromszög meghatározása három oldal alapján.

Három oldal teljesen meghatározza a háromszöget.

Legyen a három oldal: AB , BC és AC (44. ábra). MÉRJÜK rá valamely egyenesre a háromszög AB oldalát. Ezen oldal végpontjaival egybeesik a háromszög két szögpontja. A C harmadik szögpontnak A ponttól AC távolságra kell esnie; ennélfogva a kérdéses C pont azon körvonalon keresendő, mely A pontból AC sugárral szerkeszthető. Ámde C pont nemcsak az AC , hanem a BC oldalnak is határpontja; C -nek tehát bele kell esnie a B pontból BC sugárral szerkesztett körvonalba

44. ábra.



is. E szerint C pont nem lehet más, mint a két körvonal metsző pontja: ha tehát az utóbbit A és B pontokkal egyenes vonalakkal összekapcsoljuk, a kívánt háromszöget megalakítottuk.

Fentolóra kell azonban még vennünk, hogy a két kör az említett C ponton kívül még D -ben is találkozhattak. Ekkor természetesen nemcsak ABC , hanem ABD is megfelelné a kiszabott három föltételnek. Hogy megítélhessük, vajjon az utóbbi háromszög különbözik-e az elsőtől, vagy sem, C pontot összekötjük D -vel. Minthogy $AC = AD$ és $BC = BD$, CAD és CBD háromszögek egyenlőszárúak, következöleg:

$$\begin{array}{l} ACD \sphericalangle = ADC \sphericalangle \\ BCD \sphericalangle = BDC \sphericalangle \\ \hline \text{tehát: } ACB \sphericalangle = ADB \sphericalangle \end{array}$$

E szerint ABC és ABD háromszögeknek nemcsak az oldalai egyenlők, hanem még egy szögük is egyenlő; tehát a nevezett háromszögek egybevágók. Ekkép bebizonyítottuk, hogy *három oldal kétségtelenül meghatározza a háromszöget és azon háromszögek, melyeknek három megfelelő oldaluk egyenlő, egybevágók.*

A fentebbi vizsgálatok eredményét ezen mondatba foglalhatjuk össze: *három egymástól független alkotórész tökéletesen elegendő a háromszög meghatározására; kétes eset csak egy van, t. i. amikor két oldalból és a kisebbikkel szemközt fekvő szögből szerkesztendő a háromszög.*

19. §. Szerkesztési feladatok.

a) Egyszerűbb feladatok.

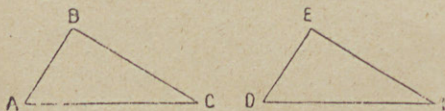
A mértani feladatokban a térmennyiségeket úgy kell összekapcsolnunk, hogy azok a feladat követelményeinek megfeleljenek. Ha ezt sikerült elérnünk, akkor a feladatot *megfejtettük*. Ámde e mellett még a megfejtés *helyes* voltát is ki kell mutatnunk. Ezt úgy érjük el, hogy szigorúan bebizonyítjuk, hogy a megfejtés a feladat minden követelményét tényleg kielégíti.

A mértani feladatok nagy részét körző és vonalzó segítségével *szerkesztések* útján fejtjük meg.

Ilyen szerkesztések a következők:

1. *Szerkesszünk adott háromszöggel egybevágó másik háromszöget.*

45. ábra.

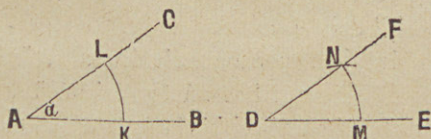


Legyen ABC (45. ábra) az adott háromszög. Húzzunk határozatlan hosszúságú egyenes vonalat és mérjük arra AC oldalt;

ekkor $DF = AC$. Ezután D pontból AB hosszúságú sugárral körívet vonunk, szintúgy F pontból BC sugárral, ez az előbbi körívet E pontban átmetszi; és ezen E a keresett háromszögek a harmadik szögpontja. Az ekkép alakított $DEF \triangle \simeq ABC \triangle$ -gel, mert oldalaik kölcsönösen egyenlők.

2. Mérvünk fel valamely egyenes vonalra egyik végpontjában adott szöget.

46. ábra.

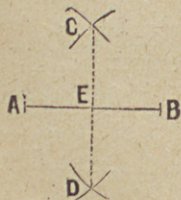


Legyen DE (46. ábra) az adott egyenes vonal, melynek D pontján keresztül egy másik olyan egyenes vonalat kell húznunk, hogy a közbefoglalt szög egyenlő legyen az adott α szöggel. Ezt a két egyenlő szöget két egybevágó háromszög megfelelő alkatórészének tekinthetjük; ha tehát α szög szárai között a tetszés szerinti KL egyenest húzzuk és az ekkép eredt AKL háromszöget, mely az α szöget magában foglalja, DE -re illesztjük, vagyis DMN háromszöget $AKL \triangle$ -gel egybevágónak rajzoljuk, úgy $EDF \sphericalangle = BAC \sphericalangle = \alpha$.

Könnyebbitésül a két háromszöget egyenlő szárúnak rajzoljuk; t. i. az adott szög szögpontjából tetszés szerint vett sugárral KL körívet vonjuk, továbbá ugyanezen sugárral D pontból is határozatlan hosszúságú körívet alakítunk, ez DE egyenest M pontban metszi; most KL nyílással M pontból körívet rajzolunk, mely az előbbi ívet N pontban átmetszi. Ha végre DN egyenest meghúzzuk, $NDM = FDE$ a kívánt szög.

3. Adott egyenes vonal felezése.

47. ábra.

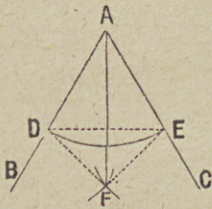


Legyen AB (47. ábra) a felezendő egyenes vonal.

Tudjuk, hogy a közös alapon álló egyenlő szárú háromszögekben a szögpontokat összekötő egyenes vonal az alapot felezi. Ha tehát az adott AB egyenest közös alapul tekintjük és végpontjaiból tetszésszerinti, azonban eleendő hosszúságú sugárral két-két körívet szerkesztünk, amelyek egymást C és D pontban metszik, akkor CD egyenes vonal AB -t E pontban felezi. (Miért)?

4. Adott szög felezése.

48. ábra.

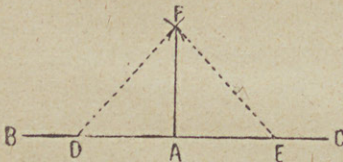


Ha az adott BAC szöget (48. ábra) úgy tekintjük, mint valamely egyenlőszárú háromszögnek az alappal szemközt fekvő szögét, és A szögpontról mind a két szárra egyenlő $AD=AE$ hosszúságot mérünk fel; továbbá D pontot összekötjük E -vel, ez úton oly egyenlőszárú háromszöget alakítottunk, amely az adott szöget magában foglalja. Ha továbbá DE alapra még egy második DEF egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, nyilvánvaló, hogy az A és F szögpontokat összekötő egyenes vonal BAC szöget felezi.

Adott szöveget tehát ekkép felezzük: a szög száraira a szögpontról két egyenlő, különben tetszés szerinti hosszúságot rámérünk, a végpontok mindegyikéből egyenlő félátmérővel köríveket rajzolunk és metsző pontjukat a szög szögpontjával összekapcsoljuk.

5. Adott egyenesre adott pontjában szerkesztünk merőleges egyenest.

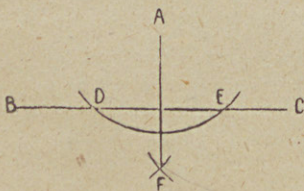
49. ábra.



Legyen BC (49. ábra) az adott egyenes vonal, amelyre A pontjában a merőleges szerkesztendő. BAC egyenes vonalat nyújtott szögnek tekinthetjük, melynek A a szögpontja. A keresett merőleges nem más, mint ezen nyújtott szög felezője, mert a derékszög fele a nyújtottnak. Ebből világos, hogy BC egyenesre A pontban merőlegest állítani annyi, mint BAC nyújtott szöveget felezni. A szögfelezés módját pedig már ismerjük.

6. Valamely adott egyenesre, kívülre adott pontból merőleges vonal bocsátandó.

50. ábra.



Legyen A az adott pont (50. ábra) és BC a kitűzött egyenes vonal. A -ból kellő hosszúságú, különben tetszés szerinti sugárral körívet vonunk, ez BC -t D és E pontban metszi. Ezáltal ADE egyenlőszárú háromszög keletkezett, melynek A a szögpontja. Ha most D és E pontokból egyenlő sugarú köríveket rajzolunk, ezek F metsző pontja nem más, mint a másik egyenlőszárú háromszög szögpontja, A két szögpontot összekötő AF a kívánt merőleges egyenes. (Miért?)

7. Kijelölt ponton keresztül valamely adott egyeneshez szerkesztünk párhuzamos egyenest.

51. ábra.

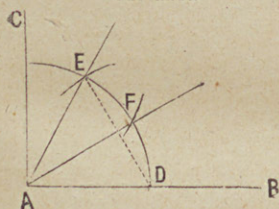


Legyen A az adott pont (51. áb.) és BC a kitűzött egyenes vonal. A párhuzamos egyenesek, mint tudjuk, bármely átmetsző egyenessel egyenlő váltószögeket alkotnak;

viszont a váltószögek egyenlőségéből az átmetszett vonalak párhuzamosságára lehet következtetni. Ezért, ha az adott A ponton keresztül tetszőleges egyenest vonunk, mely az adott BC egyenest D pontban metszi, továbbá A pontban AD egyenesre $DAE = ADC$ szöget rajzoljuk, a mondottak szerint $AE \parallel BC$ -vel. A gyakorlati megfejtésnél nem szükséges AD egyenest tényleg meghúzni; elég, ha A pontból kellő hosszúságú sugárral DE körívet, és D pontból ugyanazon sugárral AF körívet vonjuk; ezután DE -t egyenlőnek vesszük AF -fel és E pontot összekötjük A -val. E szerkesztés következtében: $EAD \sphericalangle = FDA \sphericalangle$ és így $AE \parallel BC$ -vel.

8. Osszuk a derékszöget három egyenlő részre.

52. ábra.



Legyen $BAC = 90^\circ$ (52. ábra), ennek harmadrésze 30° , kétharmada 60° . Az utóbbi szög minden egyenlőoldalú háromszögben előfordul, mert ennek mindegyik szöge 60° . Ezért ha AB szárból AD -t elvágjuk, és ez utóbbira ADE egyenlő oldalú háromszöget szerkesztjük, $EAD \sphericalangle = 60^\circ$ és $CAE \sphericalangle = 30^\circ$; ha most még EAD szöget AF egyenessel felezjük, nyilvánvaló, hogy AE és AF egyenesek a derékszöget három egyenlő részre osztják.

b) Összetettebb feladatok.

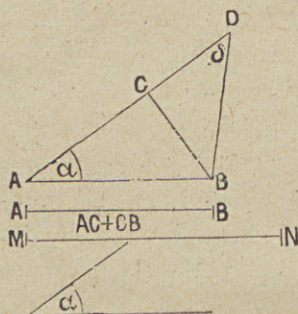
Az eddig tárgyalt feladatok oly egyszerűek voltak, hogy a megoldás helyessége már magából a követett eljárásból nyilvánvaló volt. Összetettebb feladatoknál nem ily könnyű a megoldás; mert az eredmények csakis több tantétel alkalmazásának láncolatából nyerhetők. Az ilyen összetettebb feladatok megfejtésénél azért eljárásunk is más lesz. Még pedig mindenekelőtt megoldottnak tekintjük a feladatot; azután megvizsgáljuk, milyen feltételeknek kellett teljesülniök, hogy a megoldás lehetővé váljék (elemzés); majd ezen feltételek láncolatában iparkodunk olyanokhoz eljutni, amelyeknek szerkesztése előleges ismereteink alapján már keresztülvihető (szerkesztés). A szerkesztés elvégzése után igazoljuk eljárásunk helyességét (bizonyítás)

és kimutatjuk még azt is, hogy milyen korlátok között lehetséges a feladatnak a megfejtése (korlátozás).

Ilyen feladatok a következők:

9. Szerkesszünk háromszöget, ha az alapvonal (AB), a másik két oldal összege (MN) és az alapvonalon fekvő egyik szög (α) ismeretes.

53. ábra.



a) *Elemzés.* Tegyük föl, hogy ABC a keresett háromszög (53. ábra). Ha AC oldalt C szögpontra túl annyira meghosszabbítjuk, hogy $CD = BC$ legyen, akkor AD a két oldal adott összegét ábrázolja. Meghúzával BD -t, BDC egyenlőszárú \triangle keletkezik, melyben $CBD \sphericalangle = \delta \sphericalangle$. Ámde $ABD \triangle$ könnyen megszerkeszthető, mert két oldala: AB és $AD = MN$, meg a közbezárt szög α adva vannak. $ABD \triangle$ -ről pedig ugyanazon az úton jutunk $ABC \triangle$ -hez, amelyen az imént $ABC \triangle$ -ről $ABD \triangle$ -hez jutottunk.

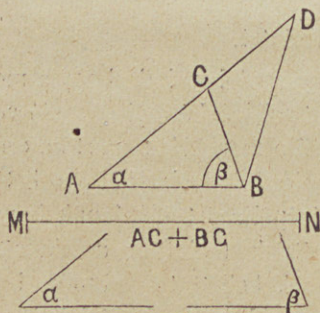
b) *Szerkesztés.* A mondottak szerint szerkesszük meg tehát AB alapvonalból, a rajta fekvő α szögből és a másik két oldal megadott $MN = AD$ összegéből $ABD \triangle$ -et, ezután B ponthoz BD oldalra szerkesszük meg $CBD = \delta$ szöget, ennek BC másik szára AD -t C pontban metszi és ez a kívánt \triangle -nek a harmadik szögpontja.

c) *Bizonyítás.* Eljárásunk helyes volt, mert $ABD \triangle$ -ben $AB =$ az adott alapvonalal, $\alpha =$ az adott szöggel; és $CB = CD$ (mert $CBD \sphericalangle = \delta$), tehát $AC + CB = AC + CD = AD = MN$ (a szerkesztésnél fogva).

d) *Korlátozás.* A feladat csak úgy fejtethető meg, ha $MN > AB$ -nél.

10. Szerkesszünk háromszöget, ha az AB alapon fekvő α és β két szög és a szemközt levő két oldal összege MN ismeretes.

54. ábra.



Legyen ABC a keresett háromszög (54. ábra). Ha AC oldalt ismét annyira meghosszabbítom, hogy $CD = CB$ legyen, akkor AD az adott összeget ábrázolná, és ha most BD -t meghúzó, BCD egyenlőszárú \triangle keletkezik, ebben $D \sphericalangle = \frac{1}{2} ACB \sphericalangle$ (mert ACB mint külső szög $= D + D = 2D$), $D \sphericalangle$ tehát ismeretes szögnek tekinthető, mert a kétakkora $ACB \sphericalangle$ az α és β adott szögekkel együttesen $2R$ -t ad. Így tehát $ADB \triangle$ -et az adott $AD = MN$ oldalból és a rajta fekvő α és D szögekből megalakíthatom.

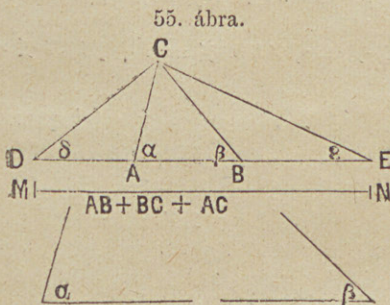
$ABD \triangle$ -ről azután $ABC \triangle$ -re juthatok épen úgy, amint az utóbbiról az előbbire következtettem volt.

Szerkesszük meg tehát az adott MN összegből, α szögből és a szintén ismeretes ACB szög feléből azaz D -ből $ADB \triangle$ -et. Ezután B szögpontra

Keresztül húzzuk BC -t akkép, hogy $DBC \sphericalangle = D \sphericalangle$ legyen; ezen BC és AD nek C metsző pontja a háromszög harmadik szögpontja.

Eljárásunk helyes volt, mert a szerkesztésnél fogva $BCD \triangle$ egyenlőszárú, azaz $CB = CD$, következőleg $AC + BC = AC + CD = AD = MN$, továbbá $BAC \sphericalangle = \alpha$, és $ACB \sphericalangle = 2D$, tehát egyszersmind $ABC \sphericalangle = \beta$. A megoldás csak akkor lehetséges, ha: $\alpha + \beta < 180^\circ$.

11. Szerkesszünk háromszöget, ha α és β két szöge és három oldalának összege (kerülete) MN ismeretes.



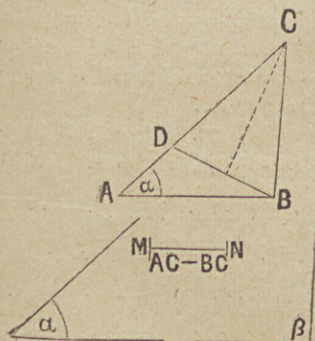
Legyen ABC a keresett \triangle (55. ábra). Ha AB oldalát A szögpon-
tpon túl annyira megnyújtánám,
hogy AD akkora legyen, mint a szomszédos AC oldal, szintúgy B szögpon-
ton túl is, úgy, hogy $BE = BC$ legyen :
akkor DE vonal az adott MN összeget
ábrázolná. Ha továbbá DC és EC
vonalakat meghúzom, ACD és BCE
egyenlőszárú háromszögekben az
alapon fekvő δ és ϵ szögek az A és
 B szögpontok mellett fekvő α és β

külső szögeknek felével egyenlők; tehát adott szögektől tekinthetők. E szerint $DEC \triangle$ -et az adott DE vagyis MN oldalból és a rajta fekvő δ vagyis $\frac{1}{2}\alpha$ és $\epsilon = \frac{1}{2}\beta$ szögekből megalakíthatjuk. Ámde $DEC \triangle$ -ből könnyen előállíthatjuk $ABC \triangle$ -et, épen úgy, amint az $ABC \triangle$ -ből megkaptuk DEC -t.

Ezek alapján szerkesszük meg $MN = DE$ oldalból és az adott szögek fele részeiből, azaz $\delta = \frac{1}{2}\alpha$ és $\epsilon = \frac{1}{2}\beta$ szögekből $DEC \triangle$ -et. Az ekkép megtalált C pont a keresett \triangle egyik szögpontja. Ezen C ponthoz, és pedig CD és CE oldalakhoz, hozzáillesztjük δ illetve ϵ szögeket, ezeknek CA és CB szára DE -t A és B pontokban, azaz a keresett háromszög másik két szögpontjában metszik.

Eljárásunk helyes volt, mert $ACD \triangle$ a szerkesztés következtében egyenlőszárú, tehát $AC = AD$; továbbá $BAC \sphericalangle = 2\delta = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. Hasonlókép $BCE \triangle$ is egyenlőszárú, tehát $BC = BE$; ezenkívül $ABC \sphericalangle = 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2}\beta = \beta$. Végül mert $AC = AD$, $BC = BE$ és $AB = AB$, tehát: $AB + BC + AC = AB + BE + AD = DE = MN$. (Mikor nem fejthető meg a feladat?)

56. ábra.



12. Szerkesszünk háromszöget, ha az alapon fekvő α és β két szög és az átellenes oldalak MN különbsége ismeretes.

Legyen ABC a kívánt \triangle . (56. ábra.) Ha a hosszabb AC oldalból CB -vel egyenlő nagyságú, CD darabot elvágunk, AD az adott különbséget ábrázolja. Húzzuk meg DB -t, ekkor ADB szög mint a DBC egyenlőszárú \triangle

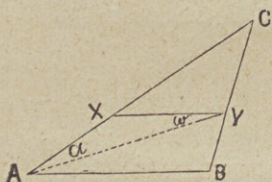
alapján fekvő külső szög = $R + \frac{1}{2} ACB$ \sphericalangle . Következésképp $ABD \triangle$ az adott MN oldalból és a rajta fekvő α és ADB vagyis $R + \frac{1}{2} \gamma$ ismeretes szögből megalakítható. $ABD \triangle$ -ről azután ép oly könnyen lehet ABC -t megszerkeszteni, mint az imént az utóbbiból az előbbit.

Ugyanis szerkesszük meg a két oldal adott különbségéből (MN) a rajta fekvő α szögből, és a szintén meghatározott $R + \frac{1}{2} \gamma$ szögből $ABD \triangle$ -et. Az ekkép talált A és B pontok a keresett \triangle szögpontjai. Hosszabbítsuk meg az AD -t D ponton túl és egészítsük ki $BDC \triangle$ -et az által, hogy DBC szöveget egyenlőnek rajzoljuk CDB -vel. Ezen egyenlő szárú \triangle szögpontja egyszersmind a keresett háromszög harmadik szögpontja lesz.

Eljárásunk helyes volt, mert $CAB \sphericalangle = \alpha$, $ADB \sphericalangle = R + \frac{1}{2} ACB \sphericalangle = R + \frac{\gamma}{2}$ stb. (Korlátozás.)

13. *ABC* adott háromszögben *AB* alapvonalal párhuzamos vonandó, amely *AC* és *BC* oldalakat *X* illetőleg *Y* pontban akképp metszi, hogy $XY = AX$ legyen.

57. ábra.



Tegyük fel, hogy XY a keresett párhuzamos. (57. ábra.) Ha AY egyenest meghúzzuk, AXY egyenlő szárú \triangle keletkezik, melynek szögpontja X , alapja AY : következésképp $\alpha = \omega$; másrészt $\omega = BAY$ (váltószögek); tehát $\alpha = BAY$ azaz AY felezi BAC szöveget.

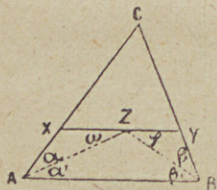
E szerint a szerkesztés is igen egyszerű. Felezzük BAC szöveget, a felező vonal az átellenes BC oldalt Y pontban metszi: ezen

keresztül húzzuk XY -t párhuzamosan AB -vel.

E szerkesztés helyes, mert $\alpha = BAY$ (a szerk. fogva) és $BAY = \omega$ (váltószögek), tehát $\alpha = \omega$ és $AX = XY$. A feladat mindig megfejthető.

14. *Az előbbi feladat ama módosítással, hogy az AB alappal párhuzamos XY vonal = AX + BY legyen.*

58. ábra.



Tegyük fel, hogy XY a keresett párhuzamos vonal. (58. ábra.) Ha erre AX hosszúságot átvisszük, úgy, hogy $XZ = AX$, akkor a fennmaradó ZY szelet = BY -nal: következésképp, ha még AZ -t és BZ -t meghúzzuk, úgy AZX , mint $BZY \triangle$ egyenlőszárú, tehát $\alpha = \omega$, és $\beta = \varphi$. De másrészt $\omega = \alpha'$ és $\varphi = \beta'$ (váltószögek), következésképp $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$, azaz AZ és BZ vonalak az AB alapon fekvő BAC és ABC szöveget felezik.

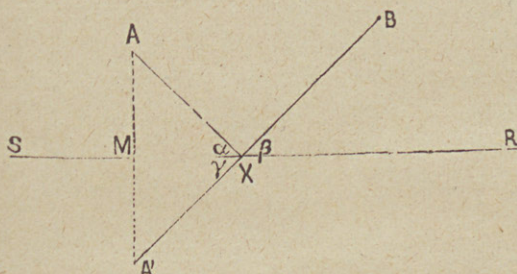
A föladat megfejtése tehát ez. Felezzük A és B szöveget, és a felező vonalak Z metsző pontján keresztül párhuzamosot húzunk AB alaphoz.

Ezen szerkesztés következtében $\alpha = \alpha'$ és $\alpha' = \omega$, tehát $\alpha = \omega$ és $AX = XZ$. Hasonlóképp: $\beta = \beta'$ és $\beta' = \varphi$, tehát $\beta = \varphi$ és $BY = ZY$. Végül $AX + BY = XZ + ZY = XY$, amint lennie kell.

15. *Adva van RS egyenes vonal és kívülre A és B pont. Jelöljük ki RS vonalon X pontot akképp, hogy AX és BX összekötő egyene-*

sek az adott vonal két ellentétes irányával egyenlő szögeket alkossanak, azaz $\angle AXS = \angle BXR$.

59. ábra.



a megnyújtott BX -et A' pontban metszi, két egybevágó háromszög keletkezik, t. i.: $AMX \triangle \cong A'MX \triangle$, tehát $AM = A'M$.

E szerint az X pontot egyszerűen úgy találjuk meg, hogy A -ból RS -re AM merőlegest bocsátjuk és ezt RS vonalon alul ugyanannyival meghosszabbítjuk oly módon, hogy $MA' = MA$. Ezután A' pontot összekötjük B -vel, $A'B$ és RS metsző pontja a keresett X pont.

Ez így helyes, mert a szerkesztéskor fogva $A'MX \triangle \cong AMX \triangle$, tehát $\alpha = \gamma$, ezenkívül $\gamma = \beta$ (csúcsszögek), következésképp $\alpha = \beta$. Magától értetődik, hogy RS -re a merőlegest B pontból is húzhattuk volna.

2-szor. A és B pontok RS egyenestől két különböző oldalra esnek.

Ezen esetben A pontot összekapcsoljuk B -vel; a hol e kapcsoló vonal az RS -et metszi, ott van az X pont.

II. A négyszögről.

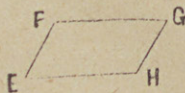
20. §. A négyszögek nemei.

Négyszögnek a síklap oly részét nevezzük, amelyet négy egyenes vonal határol. A négyszögnek négy oldala, négy szöge és négy szögpontja van. Minden szögnek megvan az átellenes szögpárja, szintúgy minden oldalnak az átellenes oldalpárja. Így $ABCD$

60. ábra.



61. ábra.



$ABCD$ négyszögben (60. ábra) A szögnek átellenes szöge: C , AB oldalnak átellenes oldala: CD . A négyszög két átellenes szögpontját összekötő egyenes vonal (pl. AC) a négyszög *átlója*. A négyszögnek két átlója van.

A négyszög lehet:

1. *Parallelogramma*, ennek átellenes oldalai párhuzamosak. Ilyen $EFGH$ (61. ábra), amelyben $EF \parallel GH$ és $FG \parallel EH$.

62. ábra.



idom $KLMN$ (62. ábra), amelyben csak $LM \parallel KN$ -nel.

Az olyan trapézot, amelynek két szára egyenlő, *egyenlő-szárú*, vagy *szimmetrikus-trapéznak* mondjuk.

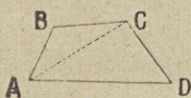
3. *Trapezoid*, amelyben az átellenes oldalak egyik párja sem párhuzamos.

2. *Trapéz*, amelynek csak két átellenes oldala párhuzamos, a másik kettő ellenben összehajló. Az előbbieket *alpvonaloknak*, az utóbbiakat *száraknak* is nevezzük. Ilyen

21. §. A négyszög belső és külső szögei.

1. Minden négyszögben a szögek összege $4R$.

63. ábra.



Hogy ezt belássuk, húzzuk meg AC átlót (63. ábra); ez $ABCD$ négyszöget két háromszögre bontja.

$ABC\triangle$ -ben; $BAC \sphericalangle + B \sphericalangle + BCA \sphericalangle = 2R$.

$ADC\triangle$ -ben; $CAD \sphericalangle + D \sphericalangle + ACD \sphericalangle = 2R$.

Ezen két egyenletet összeadva: $A \sphericalangle + B \sphericalangle + C \sphericalangle + D \sphericalangle = 4R$.

Következőleg:

a) Ha valamely négyszögnek *három* szöge ismeretes, a negyedik is meg van határozva.

b) Amely négyszögben három szög hegyes, abban a negyedik szükségszerűen tompa; ha pedig három szög tompa, akkor a negyedik hegyes.

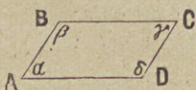
c) A négyszögben mind a négy szög csak úgy lehet egyenlő, ha mindegyik *derék* szög.

2. A négyszög oldalainak meghosszabbítása révén keletkező négy külső szög összesen $4R$. (Miért?)

22. §. A paralelogramma tulajdonságai.

1. A paralelogramma átellenes szögei egyenlők.

64. ábra.



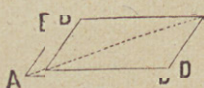
Ha $AB \parallel CD$ és $AD \parallel BC$ -vel (64. ábra), akkor $\alpha = \gamma$ és $\beta = \delta$. Mert AD és BC vonalak párhuzamossága következtében $\alpha + \beta = 2R$; hasonlóképp AB és CD párhuzamossága következtében $\beta + \gamma = 2R$. Tehát $\alpha + \beta = \beta + \gamma$,

vagy $\alpha = \gamma$. Ép így mutatjuk meg, hogy $\beta = \delta$.

Ha tehát valamely paralelogrammának egyik szöge ismeretes, a többi is meghatározható.

2. A paralelogramma átellenes oldalai egyenlők.

65. ábra.



Azaz $ABCD$ -ben (65. ábra) $AB = CD$; $AD = BC$. Mert vonjuk meg AC átlót. ABC és CDA háromszögekben AC oldal közös, továbbá $BAC \sphericalangle = ACD \sphericalangle$, mint váltószögek és $BCA \sphericalangle = CAD \sphericalangle$ ugyanazon okból; tehát $ABC \triangle \cong CAD \triangle$; következésképp $AB = CD$ és $BC = DA$.

E szerint a párhuzamos egyenesek közé foglalt párhuzamosak egyenlő hosszúságúak.

3. Az olyan négyszög, amelynek átellenes szögei egyenlők, paralelogramma.

Mert ha $ABCD$ négyszögben (64. ábra) $\alpha = \gamma$ és $\beta = \delta$, akkor egyzersmind $\alpha + \beta = \gamma + \delta$; minthogy azonban $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$, tehát $\alpha + \beta = 2R$, és $\gamma + \delta = 2R$, következésképp (10. §. 4.) $AD \parallel BC$ -vel. Hasonló oknál fogva $AB \parallel CD$ -vel.

A 3. tétel az 1-nek megfordította, azaz ami amott föltétel, az emitt következmény és viszont. A tételek ilyen megfordítása azonban nem mindig lehetséges.

4. Amely négyszögnek átellenes oldalai egyenlők, az szükségképp paralelogramma. (A 2. tétel megfordítása.)

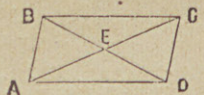
5. Oly négyszög, melynek két átellenes oldala egyenlő és párhuzamos, szintén paralelogramma.

6. Oly négyszög, melynek két átellenes szöge egyenlő és két átellenes oldala párhuzamos, szükségképpen paralelogramma.

Az utóbbi három megfordított tétel hebizonyítása végett átlót húzunk és megmutatjuk, hogy a két háromszög egybevágó.

7. A paralelogramma átlói felezik egymást.

66. ábra.



Mert $ABCD$ (66. ábra) két átlójának metsző pontját E -vel jelölve: $AED \triangle \cong CEB \triangle$ (miért?), következésképp: $AE = CE$ és $BE = DE$.

8. Viszont, mindazon négyszögek, amelyeknek átlói egymást felezik, szükségképpen paralelogrammák. (66. ábra.)

Mert ekkor is $AED \triangle \cong CEB \triangle$ (miért?).

23. §. A paralelogrammák nemei.

Szögeiket illetőleg a paralelogrammák vagy egyenlő, vagy különböző szögűek, azaz derék-, vagy ferde-szögűek; oldalait tekintve egyenlő, vagy különböző oldalúak.

A derékszögű paralelogrammát *derékszögű négyszögnek* (rectangulum), a ferdeszögüt *romboidnak* is nevezzük. Az egyenlő oldalú paralelogramma neve: *dülény* (rombus). A derékszögű és egyenlő oldalú paralelogramma neve: *négyzet* (quadratum).

1. A derékszögű négyszög állói egyenlők.

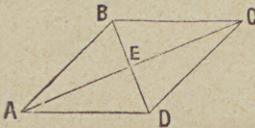
67. ábra.



Igy $ABCD$ derékszögű négyszögben (67. ábra):
 $AC = BD$; mert ADC és BCD háromszögekben
 $AD = BC$, $CD = CD$ és $ADC \sphericalangle = BCD \sphericalangle = 90^\circ$,
 tehát $ADC \triangle \cong BCD \triangle$ és $AC = BD$.

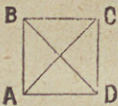
2. A rombus állói merőlegesen állanak egymásra és a négyszöget négy egybevágó háromszögre bontják.

68. ábra.



Legyen $AB = AD$, $CD \parallel AB$ -vel és
 $BC \parallel AD$. (68. ábra.) $ABCD$ dülényben
 $AC \perp BD$ -re, mert $BEC \triangle \cong DEC \triangle$,
 tehát $BEC \sphericalangle = DEC \sphericalangle = 90^\circ$.

69. ábra.



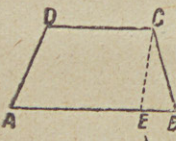
3. A négyzet állói egyenlők és merőlegesen metszik egymást.

Igy $ABCD$ négyzetben (69. ábra): $AC = BD$
 és $AC \perp BD$. Ez közvetlen folyománya az 1.
 és 2. pontnak.

24. §. A trapéz tulajdonságai.

1. Az egyenlőszárú trapézban a párhuzamos oldalakon fekvő két szög egyenlő egymással. E tétel bebizonyítására legyen $ABCD$

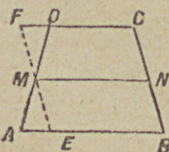
70. ábra.



trapézban (70. ábra). $AD = BC$. Ha $CE \parallel AD$
 egyenest szerkesztjük, akkor $CE = AD = BC$,
 tehát $BCE \triangle$ -ben $B \sphericalangle = E \sphericalangle$; ámde $E \sphericalangle = A \sphericalangle$;
 tehát: $A \sphericalangle = B \sphericalangle$. Minthogy továbbá: $A \sphericalangle + D \sphericalangle$
 $= 180^\circ$ és $B \sphericalangle + C \sphericalangle = 180^\circ$; ennél fogva: $A \sphericalangle$
 $+ D \sphericalangle = B \sphericalangle + C \sphericalangle$ és: $D \sphericalangle = C \sphericalangle$.

2. Az egyenlőszárú trapézok állói egyenlők. E tétel a háromszögek egybevágóságára vonatkozó II. tétel (16. §.) és a fentebb meg-

71. ábra.



ismert tétel segítségével bizonyítható be.

Az általános trapézban mind a négy oldal különböző nagyságú.

3. A trapéz egyik nem párhuzamos oldalát felező és az egyenlőközű oldalakkal párhuzamos egyenes felezi a másik nem párhuzamos oldalt is.

Legyen $ABCD$ trapézben (71. ábra) $AM = DM$ és $MN \parallel AB \parallel CD$; akkor: $BN = NC$. E tétel igazolására szerkesszük M ponton át az $EF \parallel BC$ egyenest és hosszabbítsuk meg CD oldalt F pontig, akkor: $AEM \triangle \cong DFM \triangle$ s így $EM = MF$. Ámde EM és BN , továbbá MF és NC , mint párhuzamosak közt fekvő párhuzamosak egyenlők és így: $BN = NC$. — MN vonalat a trapéz középvonalának nevezzük.

Indirekt úton könnyen beigazolható e tétel megfordítottja is, melyszerint: a trapéz két nem párhuzamos oldalának felező egyenese az egyenlőközű oldalakkal párhuzamos.

4. A trapéz középvonala a párhuzamos oldalak félösszegével egyenlő. Az előbbi ábrában: $MN = BE$ és $MN = CF$. Összeadva e két egyenletet: $2MN = BE + CF = AB - AE + CD + DF$. Ámde AE és DF egyenlők; ennél fogva: $2MN = AB + CD$; a honnan: $MN = \frac{AB + CD}{2}$.

25. §. A négyszögek meghatározásáról.

Mint hogy a négyszög átlóval két háromszögre bontható, a háromszög meghatározására pedig három alkotórész szükséges: azért úgy látszik, mintha a négyszög meghatározására $2 \times 3 = 6$ alkotórész kívántatnék. Ámde tekintve, hogy az átló mind a két háromszögnek közös oldala, azaz két alkotórész képviselője, nyilvánvaló, hogy a négyszöget már öt alkotórész meghatározza.

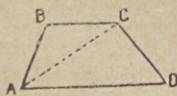
Némely négyszög meghatározására azonban kevesebb alkotórész is elegendő. Így a trapéz már négy alkotórészszel meghatározható. Ugyanis $ABCD$ trapézt (72. ábra) AC átlóval két háromszögre bonthatjuk. $ABC \triangle$ meghatározására három alkotórész szükséges; azonban $DAC \triangle$ -re nézve már csak egy, mert AC átló és CAD szög már az előbbi háromszögből ismeretes; ennél fogva a trapéz meghatározására négy alkotórész tükéletesen elégséges.

A parallelogramma meghatározására, ismeretes tulajdonságainál fogva csak három alkotórész szükséges. (Milyen alkotórészek?)

A derékszögű négyszöget két szomszédos oldal már meghatározza.

A rombus meghatározására két alkotórész; a négyzet meghatározására egy oldal, vagy egy álló elégséges.

72. ábra.



III. A sokszögekről

26. §. A sokszögek nemei.

Minden *egyenes* vonalú idomot közös néven *sokszögnek* (polygon) nevezünk. A sokszög *belső* szögeit röviden a sokszög szögeinek hívjuk. A sokszög két nem szomszédos szögpontját összekötő egyenesnek *átló* a neve. Könnyű belátni, hogy minden olyan sokszögben, melynek szögei egyenkint kisebbek $2R$ -nél, az *átlók* a sokszög területén *belül* vannak.

Az olyan sokszöget, amelynek oldalai egyenlők, *egyenlő oldalúnak*, az olyat, amelynek szögei egyenlők, *egyenlő szögűnek* és végre az olyan sokszöget, amelynek oldalai és szögei egyenlők, *szabályosnak* nevezzük.

27. §. A sokszögek általános tulajdonságai.

1. Minden sokszögben *annyi a szög, ahány az oldal.*

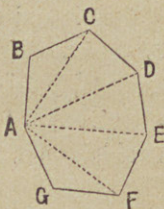
Mert mindegyik oldal a következővel egy-egy szöveget alkot; nevezetesen az első oldal a másodikkal, ez a harmadikkal stb., végre az utolsó oldal az elsővel. Ezért az n -oldalú sokszöget röviden n -szögnek szoktuk nevezni.

2. Az n -oldalú sokszögben az *átlók száma*: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Mert az n -oldalú idom mindegyik szögpontjából a többihez $n-1$ egyenest vonhatunk; ám ezek közül az a kettő, amely a szomszédos szögpontokhoz járul, tulajdonképpen a sokszögnek két oldala; ezért *egy* szögpontból csak $(n-1)-2$, vagyis $n-3$ átló húzható, tehát az összes n szögpontból n -szer annyi, azaz $n(n-3)$. Így azonban minden átlót *kétszer* számítunk, t. i. az egyik és a másik szögpontból is; ezért az összes átlók száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Az n -oldalú sokszöget *átlókkal* $(n-2)$ *háromszögre bonthatjuk.*

73. ábra.



Mert bármelyik szögpontból, pl. A -ból (73. ábra), $(n-3)$ átlót vonhatunk; ezek közül mindegyik *egy-egy* háromszöget vág el a sokszögből, ámde az utolsó átló két háromszöget szolgáltat.

4. A sokszög *belső szögeinek összege* $4R$ *hiján annyiszor* $2R$, *ahány oldala van a sokszögnek* tehát az n -szögben a *szögek összege* $n \cdot 2R - 4R$, vagy: $(n-2) \cdot 2R$.

Az előbbi pont szerint az n -oldalú sokszög $n-2$ háromszögre bontható. Minthogy a háromszögek szögpontjai a sokszög szögpontjaival azonosak, világos, hogy a sokszög szögeinek összege egyenlő az $(n-2)$ háromszögben található szögek összegével; ámde minden háromszögben a szögek összege $2R$, tehát a sokszög valamennyi szögének összege $(n-2) \cdot 2R$ azaz: $2nR - 4R$.

Eszerint minden négyszögben a belső szögek összege $4R$, az ötszögben $6R$, a hatszögben $8R$, stb. Továbbá a szabályos n -szög minden szöge:

$$\omega = \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n}.$$

Tehát a szabályos négyszög egy-egy szöge: 90°

„ ötszög „ „ „ 108°

„ hatszög „ „ „ 120° stb.

Az ω értékéből látnivaló, hogy minél nagyobb az oldalak száma (n), annál kevésbé különböznek a szabályos idom szögei az egyenes szögtől; mert

annál kisebb a kivonandó $\left[\frac{4R}{n} \right]$ -nek értéke. De másrészt azt is látjuk, hogy minden szabályos sokszögben az egyes szögek kisebbek $2R$ -nél.

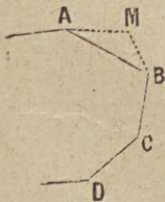
5. Az olyan sokszögben, amelynek belső szögei egyenként kisebbek $2R$ -nél, az oldalak meghosszabbítása következtében keletkező külső szögek összege $4R$.

A hebizonyítás a mellékszögek sajátságán és a 4. ponton alapszik.

28. §. A sokszögek meghatározásáról.

A négyszögek meghatározása körül követett eljárást az ötszögekre, hatszögekre, és így fokozatosan a többiekre is kiterjeszthetjük; hamarabb érünk azonban célra, ha a kérdést általánosan fejtjük meg, azaz keressük: hány alkotórész szükséges és elégséges az n -oldalú sokszög meghatározására?

74. ábra.



Legyen $ABCD \dots$ (74. ábra) valamely n -oldalú sokszög. Alakítsunk AB oldalra tetszés szerint egy háromszöget, pl. AMB -t, amelynek AM és BM oldalairól mindazonáltal föltesszük, hogy nem esnek az eredeti sokszög szomszédos oldalainak meghosszabbításaiba. E toldás következtében a sokszög oldalainak száma *eggyel* növekedett. A hozzátoldott háromszög meghatározására három alkotórész szükséges; minthogy azonban AB oldal már a sokszögből ismeretes, AMB háromszög meghatározására *két* alkotórész elegendő. Ha tehát vala-

mely sokszög oldalainak száma *eggyel* szaporodik, a sokszög meghatározására szükséges és elégséges alkotórészek száma *kettővel* növekedik.

Mint hogy a háromszöget *három* alkotórész határozza meg, tehát :

a négyszög meghatározására $5 = 2 \times 4 - 3$ alkotórész

az ötszög " $7 = 2 \times 5 - 3$ "

a hatszög " $9 = 2 \times 6 - 3$ "

az n -szög meghatározására $2n - 3$ alkotórész szükséges.

Következésképp, ha két n -oldalú sokszögben $(2n - 3)$ megfelelő alkotórész egyenlő és ezen alkotórészek ugyanazon sorrendben következnek egymásra, akkor a két sokszög egybevágó.

Vannak azonban itt is olyan esetek, mikor kevesebb alkotórész is elegendő, amint azt a négyszögnél már láttuk. Így például a szabályos sokszögekben a szögek már eleve ismertek, az oldalak meg egyenlők; ezért a szabályos sokszög meghatározására egy alkotórész elegendő.

IV. A körről.

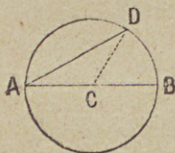
29. §. A kör meghatározása.

Mint hogy adott sugárral csak egyetlen-egy kör alakítható, ennélfogva a kört már a sugara meghatározza és így az egyenlő sugarú körök egybevágók: azaz, ha középpontjuk egybeesik, kerületeik is fődik egymást.

30. §. A kör húrjainak tulajdonságairól.

1. Az átmérő a kör leghosszabb húrja.

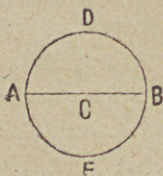
75. ábra.



AB átmérő $> AD$ húrnál (75. ábra), mert ha AD húr végpontjához CD sugarat húzzuk, ACD háromszög keletkezik, és ebben $AD < AC + CD$, vagy $AD < AB$ -nél. Ugyancz minden más húrról is bebizonyítható.

2. Az átmérő felezi a kört.

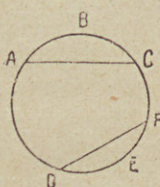
76. ábra.



Mert ha AB átmérőt (76. ábra) közös alapul tekintve, a körnek AEB részét ADB -re illesztjük, AEB görbe vonalnak szüségképen ADB -re kell jutnia, különben a két vonal közül az egyiknek oly pontjai lennének, melyek a középponttól különböző távolságban állanának, ez azonban a kör fogalmával ellenkezik.

3. Ugyanazon körben (vagy egyenlő sugarú körökben) egyenlő íveknek egyenlő húrok és viszont, egyenlő húroknak egyenlő ívek felelnek meg.

77. ábra.



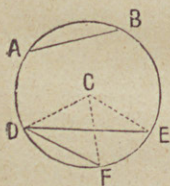
Ha ABC ív (77. ábra) egyenlő DEF ívvel, akkor egyik a másikra illeszthető, úgy, hogy végpontjaik egybeessenek, tehát D pont A -ra, F pont C -re; ámde ekkor a nevezett pontokat összekapcsoló egyenes vonalak is fedik egymást és $AC = DF$.

Viszont, ha a húrok egyenlők, akkor azok úgy illeszthetők egymásra, hogy végpontjaik egybeessenek; ámde ez esetben a húroknak megfelelő körívek is fedik egymást, mert különben nem lehetnének ugyanazon körnek ívei.

Ép oly könnyű e tételt két egyenlő körre nézve bebizonyítani.

4. A körben nagyobb ívnek nagyobb húr felel meg; viszont, a kör nagyobb húrjához nagyobb ív tartozik; föltéve, hogy az ívek kisebbek a félkörnél.

78. ábra.



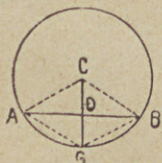
Legyen $\widehat{DE} > \widehat{AB}$ -nél (78. ábra); ha a nagyobbik ívből az AB ívvel egyenlő nagyságú DF részt elvágjuk, az ehhez tartozó DF húr egyenlő AB húrral (3. p.): most CD , CE és CF sugarakat húzván CDE és CDF háromszögekben $CD = CF$, és $CE = CE$, ám $\angle DCE > \angle DCF$ -nél, tehát (16. §. 5. p.) \widehat{DE} oldal $>$ \widehat{DF} -nél, vagy $DE > AB$ -nél.

Viszont, ha DE húr $>$ AB -nél, akkor az imént mondottak szerint AB ív nem lehet nagyobb DE ívnél, sem pedig $= DE$ ívvel, (miért nem?) tehát $\widehat{DE} > \widehat{AB}$ -nél.

E tantétel egyenlő körök húrjaira nézve is érvényes.

5. A kör húrjára merőleges sugár úgy a hűrt, mint az ahhoz tartozó körívet felezi.

79. ábra.



szerint $\widehat{AG} = \widehat{BG}$.

Legyen CG sugár \perp AB húrra (79. ábra). CA és CB sugarakat húzván: ACD és BCD háromszögek egybevágók (miért?) s így $AD = BD$. Most AG és BG húrokat húzzuk meg és akkor $ADG \triangle \cong BGD \triangle$, következésképp $AG = BG$; tehát a 3. pont

Látnivaló, hogy CG egyenes 1. a kör középpontján, 2. a húr felező pontján, 3. a megfelelő ív közepén megy keresztül és ezen

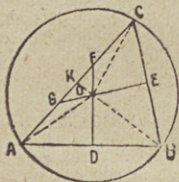
kívül még 4. merőleges a húrra. Ámde ezen négy föltétel közül már kettő is tökéletesen meghatározza CG egyenes fekvését; oly egyenes vonal tehát, mely az elősorolt föltételek közül kettőnek megfelel, a másik kettőnek is megfelel. E szerint:

a) *Azon egyenes vonal, mely a húr felező pontját a kör középpontjával összeköti, merőlegesen áll az említett húrra és egyszersmind felezi az ahhoz tartozó körívet.*

b) *A húr középre állított merőleges egyenes a kör középpontján megy keresztül stb.*

6. *A kör helyzete három pontja által teljesen meg van határozva, azaz három nem egy egyenesen fekvő ponton keresztül csak egy kört lehet szerkeszteni.*

80. ábra.



Legyen A, B, C a három adott pont (80. ábra). AB és BC egyeneseket meghúzva, felező pontjukban, DF és EG merőlegeseket szerkesztjük. Ez utóbbiak szükségképen találkoznak (10. §. 8.) és O pont ennél fogva közös szögpontja AOB és BOC egyenlőszárú háromszögeknek, következésképpen mind a három adott ponttól egyenlő távolságra van. Az O pontból OB sugárral rajzolt kör tehát A, B , és C pontokon megy át. Sőt e három ponton keresztül csak ezen egy kör húzható, mert az A, B és C pontokon átvonuló kör középpontjának úgy a DF , mint az EG merőleges vonalba, tehát e két vonal közös pontjaiba kell esnie (5. p. b.); ámde két egyenes vonal csak egy pontban találkozhatik, következésképpen csak *egy* oly kör szerkeszthető, amely a kijelölt három ponton átmegy.

Ennél fogva: *három pont a kör helyzetét és nagyságát tökéletesen meghatározza, azaz amely köröknek három közös pontjuk van, azok egybevágók.*

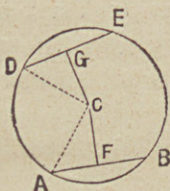
Ha még AC egyenest és ennek K felező pontján KO merőleget is meghúzzuk, az utóbbinak szintén O ponton kell átmennie, mert ez úgy A , mint C végponttól egyenlő távolságra van (16. §. 1. d.); azaz:

A háromszög oldalainak felező pontjaiban emelt merőlegesek egyugyanazon pontban találkoznak.

A megelőző tétel alapján egyszersmind bebizonyíthatjuk, hogy *a háromszög három magassági vonala egyugyanazon közös pontban találkozik.* (A háromszög mindegyik szögpontján keresztül az átellenes oldalhoz párhuzamost vonunk és a négy egybevágó háromszögből álló nagy háromszögre az előbbi tételt alkalmazzuk.)

7. Egyenlő húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak, viszont amely húrok a kör középpontjától egyenlő távolságra esnek, azok egyenlő hosszúságúak.

81. ábra.

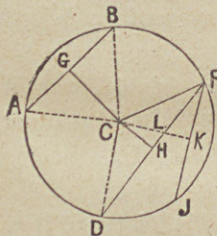


Legyen $AB = DE$ (81. ábra), továbbá $CF \perp AB$ és $CG \perp DE$; kapcsoljuk össze a két húr egy-egy végpontját a kör középpontjával; ez úton ACF és DCG háromszögek keletkeznek, melyekben $AC = DC$, $AF = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DE = DG$ és $\sphericalangle AFC = \sphericalangle DGC = 90^\circ$; tehát $\triangle ACF \cong \triangle DCG$, következésképp: $CF = CG$.

A megfordított tétel bizonyítása szintoly egyszerű.

8. Ugyanazon körben a hosszabb húr közelebb fekszik a kör középpontjához, mint a rövidebb; viszont, a középponthoz közelebb fekvő húr hosszabb, mint a távolabb fekvő.

82. ábra.



Legyen AB húr $<$ DF húrnál (82. ábra), továbbá $CG \perp AB$, és $CH \perp DF$, akkor $CG >$ CH -nál. Mert, ha az AC, BC, DC, FC sugarakat meghúzzuk, $AC = DC$ és $BC = FC$, ámde $AB <$ DF -nél; következésképpen:

$\sphericalangle ACB <$ $\sphericalangle DCF$ -nél és az 5. p.-nál fogva $\sphericalangle GCB <$ $\sphericalangle HCF$ -nél. Vágjunk el most a DF nagyobb húrnak megfelelő ívből AB

ívvvel egyenlő hosszúságú részt, azaz legyen $\widehat{JF} = \widehat{AB}$, tehát egyszersmind JF húr = AB húr; továbbá húzzuk CK -t merőlegesen JF húrra; ekkor (7. p.) $\triangle BCG \cong \triangle FCK$, és mert $\sphericalangle GCB <$ $\sphericalangle HCF$ -nél, egyszersmind $\sphericalangle KCF <$ $\sphericalangle HCF$ -nél. Ellenben $\sphericalangle CFK >$ $\sphericalangle CFH$ -nél, mert ezek az előbbieket pótlószögei. Ebből szükségképp következik, hogy CK merőleges a DF húrta H és F pontok közt L pontban szeli át. Úgyde $CK >$ CL , CL pedig $>$ CH -nál, tehát annál inkább CK , vagy a vele egyenlő $CG >$ CH -nál.

A megfordított tétel indirekt úton bizonyítható be.

31. §. A kör szelői és érintői.

Az olyan egyenes vonalat, amely a kört két pontban metszi, *körszelőnek* (secans); az oly egyenest pedig, amely a körrel csak egy pontban találkozik, a kör *érintőjének* (tangens) nevezzük. Eszerint, ha valamely körnek és egyenesnek csak egy közös pontja van, azt

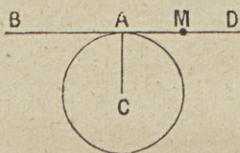
mondjuk, hogy érintik egymást. A közös pontot *érintési pontnak* hívjuk.

1. *Bármely egyenes vonal a kört legfeljebb két pontban metszheti.*

Mert, ha három pontban metszené, e három pontnak a középponttól egyenlő távolságban kellene lennie és így *egy* pontból (a centrumból) ugyanazon egyeneshez három egyenlő sugarat húzhatnánk; ez pedig lehetetlen. (16. §. 7. e.)

2. *A körsugár végpontján ugyanezen sugárra húzott merőleges a kört érinti.*

83. ábra.



Ha $\overline{BAD} \perp CA$ sugárra (83. ábra), akkor BD érintője a körnek; mert a C -ből BD -re húzott CM ferde vonal hosszabb CA merőlegesnél, azért M pont szükségképp a körön kívül fekszik; BD egyenes tehát csak A pontban találkozhatik a körrel.

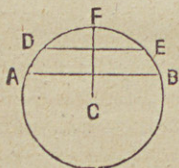
3. *Vizsont: minden érintő vonal az érintési ponthoz húzott sugárra merőlegesen áll.*

Mert BD érintő vonal minden pontja, az A érintési pontot kivéve, a körön kívül fekszik; ennél fogva CA sugár a C pontból BD egyenesre vonható egyenesek között a legrövidebb; következésképp $CA \perp BD$ -re. (16. §. 7. a.)

Látni ebből, hogy a körnek egy adott pontján át csak egy érintőt húzhatunk.

4. *A két párhuzamos szelő közé zárt körívek egyenlők.*

84. ábra.



Legyen $AB \parallel DE$. (84. ábra). A kör középpontjából AB -re CF merőlegest emelvén, ez DE -re is merőleges, tehát AB és DE húrokat és a megfelelő köríveket felezi: $\widehat{AF} = \widehat{BF}$ és $\widehat{DF} = \widehat{EF}$; ebből: $AF - DF = BF - EF$, vagy: $\widehat{AD} = \widehat{BE}$.

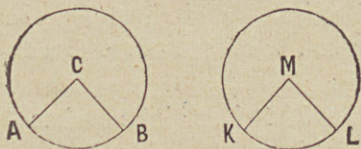
Ezen tétel még akkor is áll, ha a két párhuzamos közül az egyik esetleg a körnek érintője. (Miért?)

32. §. A középponti szögekről és a szögek mértékéről.

Középponti szögeknek oly szöget nevezünk, amelynek szögpontja a kör középpontjában van. Minden középponti szöghöz megfelelő körív tartozik, mely a szög szárai közé esik.

1. Ugyanazon körben (vagy egyenlő sugarú körökben) egyenlő középponti szögekhez egyenlő körívek és viszont, egyenlő ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak.

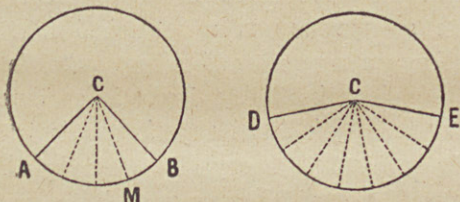
85. ábra.



Legyen $ACB \sphericalangle = KML \sphericalangle$ (85. ábra). Borítsuk KML szöget ACB -re; minthogy az egyenlő szögeknek szárai is egyenlő hosszúságúak, azért M pont C -re, K pont A -ra és L pont B -re jut, ámde ekkor AB és KL íveknek is egybe kell esniök, mert különben pontjaik nem lennének egyenlő távolságra a középponttól; tehát $\widehat{KL} = \widehat{AB}$. Hasonlóképp bizonyítható be a megfordított tétel is.

2. Az ugyanazon körben (vagy egyenlő sugarú körökben) fekvő középponti szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint a hozzájuk tartozó körívek, azaz: $ACB \sphericalangle : DCE \sphericalangle = \widehat{AB} : \widehat{DE}$.

86. ábra.



Itt két esetet kell megkülönböztetnünk.

a) AB és DE ívek (86. ábra) összemérhetők; ha a közös mérték \widehat{BM} , akkor: $\widehat{AB} = n \cdot \widehat{BM}$, és $\widehat{DE} = r \cdot \widehat{BM}$, tehát: $\widehat{AB} : \widehat{DE} = n : r$. (1.)
(a mi esetünkben $4 : 7$).

Ha a két körívnek osztó pontjaihoz sugarakat húzunk, $ACB \sphericalangle = n$ (4), $DCE \sphericalangle = r$ (7) egyenlő részre oszlik. E részek mindegyike $MCB \sphericalangle$ (1. pont), tehát:

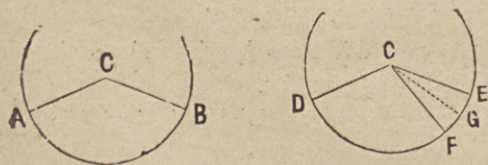
$ACB \sphericalangle = n \cdot MCB$, és $DCE \sphericalangle = r \cdot MCB$; következőleg

$ACB \sphericalangle : DCE \sphericalangle = n : r$ (azaz $4 : 7$)... (2).

Az (1) és (2) aránypárból következik, hogy: $ACB \sphericalangle : DCE \sphericalangle = \widehat{AB} : \widehat{DE}$.

b) Ez akkor is igaz, ha a két körívnek nincs közös mértéke.

87. ábra.



Mert, ha a fentebbi aránypár az utóbbi esetre *nem* lenne érvényes, akkor a szögek aránya nagyobb, vagy kisebb lenne a megfelelő ívek arányánál. Más eset nem gondolható.

Tegyük fel, hogy $\widehat{AB} : \widehat{DE} < \angle ACB \sphericalangle : \angle DCE \sphericalangle$ (87. ábra); legyen tehát $AB : DF = \angle ACB \sphericalangle : \angle DCE \sphericalangle$, ahol DF a föltétel következtében kisebb DE -nél. Kétségtelen, hogy AB ívet annyi egyenlő részre oszthatom, hogy egy ily rész kisebb EF ívnél. Ezért, ha a mondott részt, D -től kiindulva, DE ívre ismételve átviszem, legalább egy osztáspontnak (G -nek) F és E pontok közé kell esnie. E szerint AB és DG ívek összemérhetők lévén:

$\widehat{AB} : \widehat{DG} = \angle ACB \sphericalangle : \angle DCG \sphericalangle$. A föltétel szerint azonban:

$\widehat{AB} : \widehat{DF} = \angle ACB \sphericalangle : \angle DCE \sphericalangle$, tehát a két arány pár egybevetéséből: $\widehat{DF} : \widehat{DG} = \angle DCE \sphericalangle : \angle DCG \sphericalangle$, ez azonban képtelenség, mert $DF < DG$ -nél, ellenben $\angle DCE \sphericalangle > \angle DCG \sphericalangle$ -nél. Tehát az sem lehetséges, hogy $\widehat{AB} : \widehat{DE} < \angle ACB \sphericalangle : \angle DCE \sphericalangle$.

Hasonló módon $\widehat{AB} : \widehat{DE}$ nem lehet $> \angle ACB \sphericalangle : \angle DCE \sphericalangle$. (Ez esetben F és G pontok DE ívnek meghosszabításába esnek.) — A szóban forgó tantétel tehát akkor is igaz, ha a köríveket összemérni nem lehet.

A szögek méréséről. Szöget mérünk, ha annak a derékszöghöz, mint egységhez való arányát meghatároozzuk. Ámde a fentebbiek szerint a középponti szögek aránya azonos a megfelelő körívek arányával; ezért ahelyett, hogy a megméréndő szöget közvetlenül a derékszöghöz hasonlítanók (ami gyakorlatilag úgyis bajos lenne), inkább a megfelelő köríveket hasonlítjuk össze egymással. Ez összehasonlítás könnyítéseül a kör területét 360 egyenlő ívre vagyis 360 fokra, a fokot 60 percre, a percet 60 másodpercre osztjuk. E szerint a negyedkör 90, a félkör 180, az egész kör 360 fokból áll. De másrészt (az 5. §-ból) tudjuk, hogy a derékszög hasonlóképp 90, az egyenes szög 180 és a teljes szög 360 fokot foglal magában. Mindezekből kitetszik, hogy a középponti szög épen annyi fokot, percet, másodpercet tartalmaz, a mennyi fokból, percből stb.-ből a megfelelő körív áll. Ezért a középponti szöget a megfelelő körívvel mérjük.

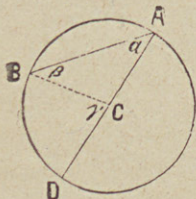
Innen magyarázható, hogy a kör- és szög-fokot ugyanazon közös névvel és jellel szokás megjelölni, t. i.: $^{\circ}$ = fok, $'$ = perc, $''$ = másodperc: noha ez elnevezés, szorosán véve, csak a szögeket illeti meg, mert a körív hossza nemcsak a fokok és percek számától, hanem a sugar hosszától is függ.

33. §. Egyéb szögek a körben.

Kerületi szögnek az olyat nevezzük, amelynek szögpontja a kör területében fekszik, és szárjai a kör húrjai.

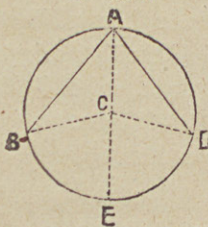
1. Minden kerületi szög az ugyanazon körívhez tartozó középponti szögnek felével egyenlő.

88. ábra.

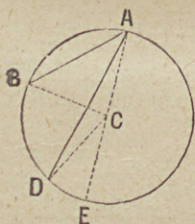


Középponti szög (γ) az ABC háromszögnek külső szöge, tehát $\gamma = \alpha + \beta$; ámde $AC = BC$, tehát $\alpha = \beta$, következésképp $\gamma = 2\alpha$ és $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$; amit bebizonyítani kellett.

89. ábra.



90. ábra.



E tétel bebizonyításánál három esetet különböztetünk meg.

A kerületi szöget mind a három esetben BAD -vel, a kör középpontját C -vel jelöljük.

Legegyszerűbb az az eset, amikor a kör középpontja (C) a kerületi szög egyik szárán fekszik (88. ábra). Itt az α szögnek megfelelő

középponti szög (γ) az ABC háromszögnek külső szöge, tehát $\gamma = \alpha + \beta$; ámde $AC = BC$, tehát $\alpha = \beta$, következésképp $\gamma = 2\alpha$ és $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$; amit bebizonyítani kellett.

Létséges azonban, hogy a kör középpontja a kerületi szög szárain *között* fekszik. Ekkor AE átmérőt húzzuk (89. ábra) és visszatérünk az előbbi esetre.

T. i. $BAE \sphericalangle = \frac{1}{2} BCE \sphericalangle$;

$DAE \sphericalangle = \frac{1}{2} DCE \sphericalangle$ tehát együtt:

$BAD \sphericalangle = \frac{1}{2} (BCE \sphericalangle + DCE \sphericalangle) \sphericalangle =$
 $= \frac{1}{2} BCD \sphericalangle$

Végre tegyük fel, hogy C középpont a kerületi szög szárain kívül van (90. ábra). Itt is meghúzzuk AE átmérőt és az első esetet alkalmazzuk:

$BAE \sphericalangle = \frac{1}{2} BCE \sphericalangle$;

$DAE \sphericalangle = \frac{1}{2} DCE \sphericalangle$ tehát:

$BAE \sphericalangle - DAE \sphericalangle = \frac{1}{2} (BCE \sphericalangle - DCE \sphericalangle)$;
azaz: $BAD \sphericalangle = \frac{1}{2} BCD \sphericalangle$

E tantételnél fogva:

a) Az ugyanazon körívhez, vagy egyenlő körívekhez tartozó kerületi szögek egyenlők. (91. ábra.)

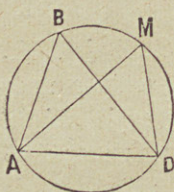
Igy: $ABD \sphericalangle = AMD \sphericalangle$.

b) Az oly kerületi szögek, melyeknek szárai valamely átmérő végpontjaira támaszkodnak, *derékszögek* (Thales tétele). Így (92. ábra) $BAD \sphericalangle = 90^\circ$, mert a megfelelő középponti szög $= 180^\circ$, ennek fele pedig derékszög.

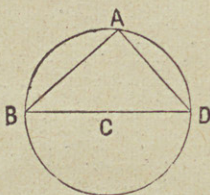
2. A kör ugyanazon pontjához húzott húrja és érintője által bezárt szög egyenlő azon kerületi szöggel, amely a mondott vonalak közé foglalt ívnek felel meg.

Legyen AB (93. ábra) a kör egyik húrja és ED az A ponthoz vont érintő. Húzzuk meg A ponton át AF átmérőt és F

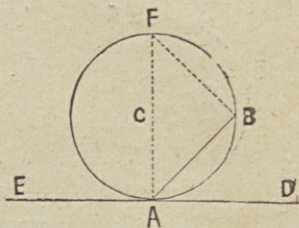
91. ábra.



92. ábra.



93. ábra.



pontot kapcsoljuk össze B ponttal: ekkor $DAB \sphericalangle + BAF \sphericalangle = 90^\circ$, és $ABF \sphericalangle = 90^\circ$, tehát $ABF \triangle$ -ben $BAF \sphericalangle + BFA \sphericalangle = 90^\circ$, következésképp: $DAB \sphericalangle + BAF \sphericalangle = BAF \sphericalangle + BFA \sphericalangle$ és $DAB \sphericalangle = BFA \sphericalangle$ -gel; ez utóbbi pedig AB ívnek felel meg. Ép oly könnyű kimutatni, hogy EAB tompa szög = a BFA ívnek megfelelő kerületi szöggel.

3. Az előbbi tétel megfordítva is érvényes, azaz, ha AB húr AD egyenessel oly szöveget alkot, mely a közbefogott AB ívhez tartozó kerületi szöggel egyenlő, úgy AD egyenes érinti a kört.

34. §. Két kör kölcsönös helyzetéről.

Két kör kölcsönös helyzetét illetőleg két esetet különböztetünk meg; t. i. vagy közös a körök középpontja, vagy nem közös.

A közös középpontból, különböző sugárral szerkesztett köröket *koncentrikus* köröknek nevezzük. Ilyeneknél a kisebb kör a nagyobbik határán belül van.

A különböző középpontú köröket *excentrikus* köröknek és azon egyenest, mely a két középpontot összekapcsolja, *centrálisnak* hívjuk.

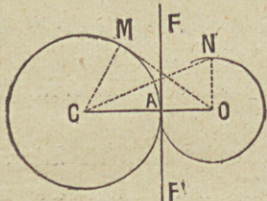
Két excentrikus körnek megint háromféle kölcsönös helyzete lehet; t. i. a körök vagy *érintkeznek* egymással, amikor t. i. csak *egy* közös pontjuk van (94. és 95. ábra), vagy *metszik* egymást, ha *két* közös pontban találkoznak (96. ábra), vagy pedig nincs közös pontjuk.

Az utóbbi esetet mellőzzük, csak annyit jegyzünk meg arról, hogy a két kör vagy kívül fekszik egymáson, vagy pedig az egyik kör a másikat bekeríti. — Az érintkező körök vagy *kívülről*, vagy *belülről* érintkeznek. Az elsőt *külső*, a másikat *belső* érintkezésnek mondjuk. A metszés szintén kétféle lehet, aszerint, amint az egymást metsző körök középpontjai a közös húr ugyanazon, vagy különböző oldalán vannak.

Két kör kölcsönös helyzete a körsugarak és a centrális vonal hosszainak arányától függ. Nevezetesen:

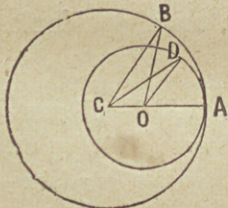
1. Ha a két kör centrálisa akkora, mint a sugarak összege, vagy különbsége, e körök szükségkép érintkeznek egymással, még pedig az első esetben kívülről, a másodikban belülről.

94. ábra.



C körnek tetszés szerint fölvevett M pontját a két középponttal összekapcsolom, $CM + OM > CO$, de $CM = CA$ és $CO = CA + OA$, tehát $CA + OM > CA + OA$, vagy $OM > OA$ -nál, azaz M pont O körön kívül fekszik. Ugyanígy kimutatható O körnek N pontjára vonatkozólag, hogy $CN > CA$, azaz, N pont C körön kívül esik. Ennélfogva a nevezett körök csakugyan *kívülről* érintkeznek.

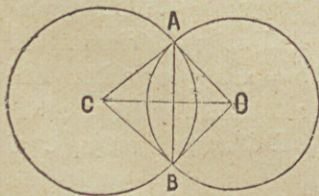
95. ábra.



$OA < OB$ -nél, azaz C körnek bármely pontja távolabb esik O középponttól, mint A pont. Ugyanígy kimutatható O körnek D pontját illetőleg, hogy: $CD < CA$, vagyis O kör pontjai közelebb esnek C középponthoz, mint A pont. Ennélfogva a két kör *belülről* érintkeznek.

2. Ha két kör centrálisa a megfelelő sugarak összegénél kisebb, azonban ugyanazok különbségénél nagyobb, a két kör metszi egymást.

96. ábra.



Mert az említett föltétel mellett CO centrális vonalra (96. ábra) az adott CA és OA sugarakkal két egybevágó háromszög szerkeszthető: CAO és CBO ; ezeknek A és B szögpontjai a két körnek közös pontjai. E kettőn kívül több

közös pontjuk nem lehet, mert ha három közös pontjuk lenne, tökéletesen egybeesnének; ez azonban a föltétellel ellenkezik.

A megelőző tételeknél fogva:

a) *Két érintkező körnek érintő pontja a centrális vonalba esik.*

Mert ha e pont a centrális vonalon kívül esnék, a két körnek még egy közös pontja lenne és ez a föltétellel ellenkezik.

b) *Két érintkező körnek az érintkezési ponton közös érintője van.* (94. ábrában FF' !)

c) *Két, egymást metsző körnek centrális vonala a közös húrra merőleges, tehát ezt felezi* (96. ábra). Mert AB húr közös alapja ABC és ABO egyenlőszárú háromszögeknek.

Az 1. és 2. tétel megfordítva is érvényes azaz:

3. *A kívül érintkező körök centrálisra egyenlő a két sugár összegével és a belül érintkezőké a két sugár különbségével.* (Miért?)

4. *Az egymást metsző körök középpontjainak egymástól való távolsága kisebb a két sugár összegénél, és nagyobb a két sugár különbségénél.* (Miért?)

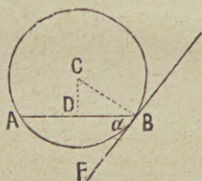
35. §. A körre vonatkozó legegyszerűbb szerkesztések.

1. *Határozzuk meg valamely adott kör középpontját.*

Az adott kör két nem párhuzamos húrára azok felező pontjain merőlegeseket állítunk; ezek metsző pontja a keresett középpont.

2. *Adott húr és a megfelelő kerületi szög alapján kör szerkesztendő.*

97. ábra.



Legyen AB (97. ábra) az adott húr és α a megfelelő kerületi szög. Az AB húrra felező pontjában emelt DC merőleges a kör középpontján megy keresztül; e pont tehát a DC vonalon keresendő. Tegyük fel, hogy C a keresett középpont. Ha CB sugarat és az erre merőleges BF egyenest meghúzzuk, utóbbi a

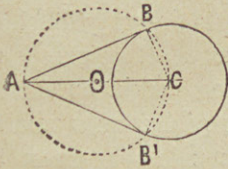
CB sugárral vont kört érinti, és így ABF szögnek (33. §. 2.) egyenlőnek kell lennie az AB húron álló α kerületi szöggel. Viszont, ha BF egyenest akképp húzzuk, hogy $ABF \sphericalangle = \alpha$ legyen, akkor BF érintője a körnek; tehát a B ponton BF -re húzott merőleges a kör középpontján halad keresztül és így BC és DC metszőpontja, C a keresett kör középpontja és CB a sugara.

3. *Szerkesszünk adott pontból a körhöz érintőt.*

Itt két esetet kell megkülönböztetnünk. Az adott pont t. i. vagy a körön, vagy azon kívül lehet.

a) Első esetben az adott pontot a kör középpontjával összekapcsoljuk, és e sugárra ugyancsak az adott pontban merőleges vonalat szerkesztünk.

98. ábra.



b) Második esetben legyen A az adott pont (98. ábra), C a kör középpontja, és AB a keresett érintő, mely az adott kört a még ismeretlen B pontban érinti. CB sugarat és AC egyenest húzva, $ABC \triangle$ -ben $\angle C = 90^\circ$. Viszont, ha AC -re mint átfogóra, oly derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek B szögpontja az adott kör kerületébe esik, \overline{AB} oldal a kört érinteni fogja. E háromszög megszerkesztése céljából AC -re, mint átmérőre oly kört rajzolunk, amely az adottat a kérdéses érintő pontban átmetszi. Minthogy e segédkör az adott kört két pontban szeli, még egy második AB' érintő vonal is van. E két érintő egyenlő hosszú, mert $ABC \triangle \cong AB'C$ -vel s így $AB = AB'$ és $\angle CAB = \angle CAB'$; ez utóbbi egyenlőségből kitűnik, hogy a kör középpontja a két érintőtől befogott szög felező vonalába esik.

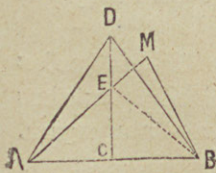
36. §. A mértani hely fogalma.

Ha valamely vonal minden pontjának a síklap többi pontjától eltérő közös tulajdonsága van, akkor ama vonalat az említett közös tulajdonságú pontok *mértani helyének* mondja.

Néhány példa érthetővé teszi a dolgot:

1. Ha valamely határolt egyenes vonal felezőpontjában az egyenes vonalra merőlegest húzunk, ennek minden pontja az adott egyenes vonal két végpontjától egyenlő távol esik.

99. ábra.



Igy ha $AC = BC$, és $CD \perp AB$ -re (99. ábra), akkor $DA = DB$. Ellenben a sík többi pontjáról ez már nem áll. Mert ha a CD -n kívül eső M pontból az MA és MB egyeneseket húzzuk, ezek közül valamelyik CD -t okvetlenül átmetszi. És ha e metszésponthoz, E -hez EB egyenest meghúzzuk, $MB <$, mint $ME + EB$, azonban $EB = EA$; tehát $MB < MA$ -nál. Ennélfogva csakis a CD egyenes pontjai lehetnek azok, amelyek az AB végpontjaitól egyenlő távolságra esnek.

Épen így a közös alapon szerkesztett egyenlőszárú háromszögek-nél az alappal átellenes szögpontoknak azon merőleges egyenes a mértani helye, amely az adott alapvonalat felezi.

Az ugyanazon húrt közösen tartalmazó körök középpontjainak azon egyenes a mértani helye, amely a közös húrra annak felező pontjában merőlegesen áll.

2. Ha valamely egyenes vonalra merőlegest állítunk, és az utóbbira adott hosszúságot meghatározott irányban (le- vagy fölfelé) mérünk, majd az így nyert végponton keresztül az adott egyeneshez párhuzamosat húzunk; akkor az utóbbinak minden pontja az adott egyenes vonaltól egyenlő távol esik. Ennélfogva e párhuzamos vonal mindazon pontoknak mértani helye, amelyek az adott egyenestől meghatározott távolságban vannak. Ugyanaz a párhuzamos vonal továbbá mértani helye mindazon körök középpontjainak, amelyek az adott egyenes vonalat érintik és adott sugarúak.

3. A két adott párhuzamos vonaltól egyenlő távol eső pontoknak azon egyenes vonal a mértani helye, amely az adott egyenesek közt adott távolságban azokkal párhuzamosan halad. Az utóbbi párhuzamos egyszersmind mindazon körök középpontjának mértani helye, amelyek a két adott párhuzamos egyenest érintik.

4. A szöget felező egyenes vonal minden pontja a szög két szárától egyenlő távol esik. (16. §.) Ennélfogva a szögfelező egyenes mértani helye mindazon pontoknak, amelyek az adott szög száraitól egyenlő távolságra vannak, nemkülönbön azon körök középpontjainak is, melyek az adott szög száraival érintkeznek.

5. A körvonal mértani helye mindazon pontoknak, amelyek egy adott ponttól adott távolságra vannak. Épen így az adott sugarú és ugyanazon meghatározott ponton átvonuló körök középpontjainak nem más a mértani helye, mint az eme pontból az adott sugárral szerkesztett körvonal.

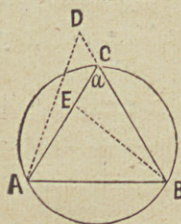
6. A közös átfogójú derékszögű háromszögek szögpontjának azon körvonal a mértani helye, amelynek az adott átfogó az átmérője.

7. Az adott r sugarú körrel (kívül, illetőleg belül) érintkező a sugarú körök középpontjainak mértani helyét az előbbivel koncentrikus ama körvonal ábrázolja, amelynek $a + r$, illetőleg $a - r$ a sugara. (34. §.)

8. Keressük azon pontok mértani helyét, amelyekből az adott (AB) egyenes vonal adott α szög alatt látszik.

A kérdéses hely ama körív, melynek húrja az adott AB egyenes vonal, kerületi szöge pedig az adott α szög (35. §. 2.);

100. ábra.



mert az ugyanazon körívhez tartozó kerületi szögek mind egyenlők. Ellenben ha a körön *kívül* eső D pontból (100. ábra) AD és BD vonalakat húzzuk, az azoktól bezárt ADB $\sphericalangle < \alpha$ -nál, ha pedig a körön belül fekvő E pontból AE és BE egyeneseket vonjuk, akkor ismét AEB $\sphericalangle > \alpha$ -nál. (Miért?)

Negyedik fejezet.

Az egyenes vonalú idomok hasonlóságáról.

Minden mértani idomnak két lényeges ismertető jegye van, mégpedig: alakja és nagysága; ez alapon az idomokat két szempontból hasonlíthatjuk össze egymással, t. i. alakjuk és nagyságuk tekintetéből. Az alakra nézve megegyező idomokat *hasonlóknak*, a nagyságra nézve megegyezőket *egyenlőknek* mondjuk. Az alakra és nagyságra nézve megegyező idomokat *egybevágó* idomoknak nevezzük. Ezekről már szólottunk. Ebben a fejezetben az idomok *hasonlóságát* tárgyaljuk; előbb azonban a vonalak arányosságáról szerzett ismereteinket bővítjük ki.

37. §. Az egyenes vonalak arányosságáról.

Két egyenes aránya tulajdonképp a megfelelő mértékszámok arányát jelenti. Így, ha AB és CD egyeneseket valamely közös mértékkel megmérjük és azt találjuk, hogy a közös mérték AB -ben 9-szer, CD -ben pedig 7-szer van meg, akkor $AB : CD$ arány nem egyéb, mint a megfelelő mértékszámok aránya: 9 : 7.

Ezen arányban AB -t elő-, CD -t utótagnak, azt a számot pedig, amely megmutatja, hogy hányszor van meg az utótag az előtagban, arány-mutatónak vagy hányadosnak nevezzük.

Azon esetre, ha az összehasonlított vonalhosszaknak közös mértékük nincs, arányuk csak közelítőleg határozható meg. (Lásd a 3. §-t.) Hogy ilyen összenem mérhető egyenesek valóban léteznek, eléggé mutatja a négyzet (quadratum), melynek átlója az oldalhossznak semmiféle részével pontosan meg nem mérhető.

Az összenemmérhető egyeneseknél a mérés eredménye *vég-szerűtlen* (irrationális), vagyis oly szám, mely sem egész, sem tört számmal pontosan ki nem fejezhető, mindamellett azonban tetszés-szerű pontossággal megközelíthető elannyira, hogy a hiba bármely kis mennyiségnél kevesebb.

Ha az AB , CD , és ab , cd két vonal-pár összehasonlításánál az aránymutatók egyenlők, az egyenlőség jelével összekötött arányokból *aránypár* (proportio) keletkezik és az egyeneseket *egyenlő arányúaknak*, röviden *arányosaknak* mondjuk.

Így ha:

$$AB : CD = 5 : 3, \text{ és } ab : cd = 10 : 6, \\ \text{akkor : } AB : CD = ab : cd.$$

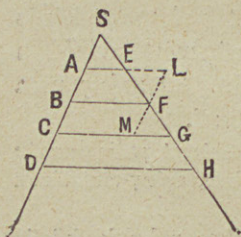
Amint ez utóbbi aránypár tulajdonkép *szám*-aránypár (mert azonos ezzel $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$), hasonlólag minden más is, amelynek tagjai vonalak, a megfelelő mértékszámokból alkotott aránypároknak tekinthetők.

38. §. A sugárrendszerről.

Az ugyanazon közös pontból húzott egyenes vonalakat *sugaraknak*, a közös kiinduló pontot *kezdőpontnak*, és a sugarak összességét *sugárrendszernek* hívjuk. Minden egyes vonalat, mely a sugárrendszer sugarait metszi, röviden *átmetszőnek* (transzverzális) nevezünk. A sugár metszőpontjának a kezdőponttól való távolságát *sugár-szeletnek* nevezzük.

1. Ha valamely sugárra bizonyos hosszúságot ismételve rámérünk és az osztópontokon keresztül párhuzamos átmetszőket vonunk, ezek a sugárrendszer többi sugarát is ugyanannyi egyenlő részre osztják.

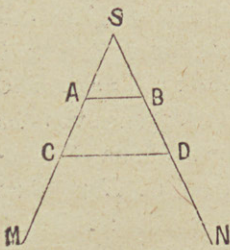
101. ábra.



Legyen $AB = BC = CD$. (101. ábra) és $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$, ekkor $EF = FG = GH$. Mert, ha például F ponton keresztül SD sugárhoz MF párhuzamosat vonjuk, amely a meghosszabbított AE -t L pontban, CG -t M pontban metszi, akkor: $EFL \triangle \cong GFM \triangle$ (mivel $FL = AB = BC = FM$, és a szögek is kölcsönösen egyenlők), tehát $EF = FG$. Ép úgy $FG = GH$ stb.

2. Két párhuzamos átmetsző a sugárrendszer valamennyi sugarát arányosan osztja, azaz: párhuzamos egyenesek által metszett sugárrendszerben az egyik sugár szeletei úgy aránylanak egymáshoz, mint a másik sugár megfelelő szeletei.

102. ábra.



Legyen SM és SN két sugár. AB és CD két párhuzamos átmetsző (102. ábra); ekkor $SA : SC = SB : SD$.

Hogy ezt igazoljuk, tegyük föl, hogy SM sugár SA és SC szeletei összemérhetők, és a közös mérték SA -ban n -szer, SC -ben r -szer találta. Ez esetben:

$$SA : SC = n : r. \quad (1)$$

Ha a közös mértéket a nevezett szeletekre felmérjük, s az osztópontokon keresztül AB -hez párhuzamosakat húzunk, ezek (az előbbi pont szerint) SB -t n , SD -t pedig r egyenlő részre osztják, vagyis:

$$SB : SD = n : r. \quad (2)$$

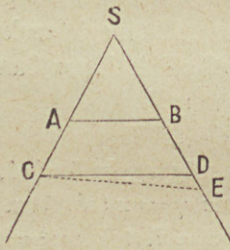
Az (1) és (2) aránypárból pedig az következik, hogy:

$$SA : SC = SB : SD. \quad (3)$$

Ez még akkor is áll, ha SA és SC sugárszeleteknek nincs közös mértékük.

3. Viszont oly két átmetsző, amely az adott sugárrendszer két sugarát arányosan osztja, egymással párhuzamos.

103. ábra.

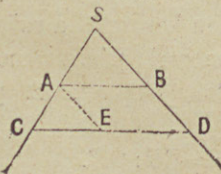


Azaz, ha $SA : SC = SB : SD$, akkor $AB \parallel CD$ (103. ábra). Mert, ha CD nem $\parallel AB$ -vel, akkor C ponton keresztül AB -hez CE párhuzamos egyenest húzhatjuk, és akkor a 2. pont szerint: $SA : SC = SB : SE$, de a föltétel értelmében: $SA : SC = SB : SD$.

E két aránypár csak úgy állhat meg egyszerre, ha $SE = SD$, ami ismét csak akkor lehetséges, ha E pont D -vel egybeesik, tehát $CD \parallel AB$ -vel.

4. A párhuzamos átmetszők két sugár közé foglalt részei úgy aránylanak egymáshoz, mint az átmetszett sugarak megfelelő szeletei.

104. ábra.



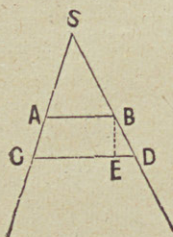
Így ha $AB \parallel CD$ -vel, akkor: $AB : CD = SA : SC$. (104. ábra.) Ennek bebizonyítására A -ponton keresztül SD -hez AE párhuzamosot vonjunk, azaz $AE \parallel SD$. C pontot kezdőpontul tekintvén: $CS : AS = CD : ED$; ámde $ED = AB$. Tehát:

$$CS : AS = CD : AB \text{ vagy:}$$

$$AB : CD = SA : SC.$$

5. Ha valamely sugár két párhuzamos átmetszőjére a megfelelő sugárszeletekkel egyenlő arányú hosszokat mérünk, az átmetszők végpontjait összekapcsoló egyenes vonal a kezdőponton megy keresztül.

105. ábra.



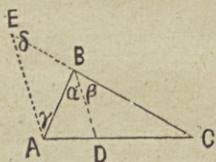
Azaz, ha $AB \parallel CD$ -vel, és $AB : CD = SA : SC$ akkor S, B, D pontok ugyanazon egyenes vonalba esnek (105. ábra). Mert, ha ez nem állana, SB sugár CD átmetszőt nem D , hanem pl. E pontban szelné; ámde ekkor a 4. pont szerint: $AB : CE = SA : SC$; a föltételnél fogva pedig $AB : CD = SA : SC$. E két aránypár csak úgy állhat fenn egyszerre, ha $CE = CD$, azaz, ha E -pont D -vel egybeesik, tehát SB vonal D ponton megy keresztül.

A föntebbiek alkalmazásául szolgáljon a következő két tétel:

6. a) *A háromszög egyik belső szögét felező vonal az átellenes oldalt ak'ép szeli, hogy a két szelet a háromszög szomszédos oldalával egyenlő arányú.*

b) *A háromszög valamelyik külső szögét felező vonal a meghosszabbított átellenes oldalt akkép metszi, hogy a metszőponttól mért szeletek a háromszög szomszédos oldalával egyenlő arányúak.*

106. ábra.

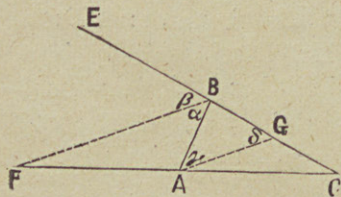


a) Legyen $ABC \triangle$ -ben (106. ábra) $\alpha = \beta$. Ha A szögponton keresztül a szög felező BD -vel párhuzamos AE -t meghúzzuk, ez a meghosszabbított BC oldalt E pontban metszi. A 2. pont szerint:

$$CD : DA = CB : BE.$$

Ámde ABE háromszög egyenlőszárú, mert AE és BD vonalak párhuzamosságánál fogva: $\gamma = \alpha$ (váltó sz.) és $\delta = \beta$. (ellensz.), m'árpedig a föltétel szerint $\alpha = \beta$, tehát $\gamma = \delta$ és $AB = BE$. Eszerint a föntebbi aránypár így írható: $CD : DA = CB : BA$, amint a tétel állítja.

107. ábra.



b) ABC háromszög ABE külsőszögét felezvén (107. ábra), $\alpha = \beta$. Ismét A szögponton keresztül a szögfelező BF egyenessel párhuzamos AG -t megvonjuk és ekkor a 2. p. szerint:

$$CF : AF = CB : GB.$$

Ámde $ABG \triangle$ egyenlőszárú, mert AG párhuzamos lévén BF -fel, $\alpha = \gamma$ (váltósz.) és $\beta = \delta$ (ellensz.); már pedig a föltétel

szerint $\alpha = \beta$, tehát $\gamma = \delta$ és $AB = GB$. Ennek alapján a fentebbi aránypár így is írható: $CF : AF = CB : AB$.

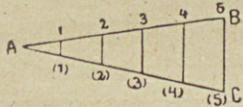
7. Viszont, ha a háromszög alapvonalát két részre osztjuk akkép, hogy ezek a szomszédos oldalpárral egyenlő arányúak, az osztó pontot az átellenes szögponttal összekötő vonal a szöveget felezi.

39. §. Az egyenes vonalak arányosságán alapuló szerkesztések.

1. Adott egyenes vonal n egyenlő részre osztandó.

Legyen AB az adott egyenes vonal, melyet n (pl. 5) egyenlő részre kell osztani. (108. ábra.) Az egyik pl. A végpontból tetszőleges irányban AC sugarat vonjuk, és erre A -tól n (5) egyenlő, különben bármekkora vonalhosszat rámérünk, ezután az n -dik (5-dik) rész végpontját összekötjük B végponttal, majd a többi osztásponton keresztül BC -hez párhuzamosakat húzunk. Ez úton AB -t n (5) egyenlő részre osztottuk (38. §. 1.) — Magától értetődik, hogy ezen eljárás szerint az adott egyenes vonal *akárhány* egyenlő részre felosztható.

108. ábra.



2. Osszuk adott egyenes vonalat meghatározott arány szerint két részre.

109. ábra.

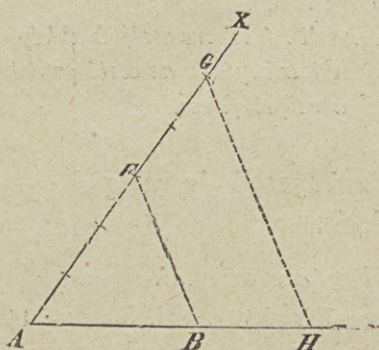
Például AB (109. ábra) két részre osztandó ezen arány szerint $3 : 2$, vagy általában $m : n$. A végponttól tetszőleges irányban AX sugarat vonunk; erre A ponttól $m + n$ (itt $3 + 2 = 5$) egyenlő részt mérünk és a végső C pontot összekötjük B -vel, ezután az m -dik (itt 3-ik) osztásponton keresztül DE párhuzamosot húzunk, azaz $DE \parallel CB$. Ezen szerkesztésnél fogva $AE : EB = m : n$ ($3 : 2$).

A megelőző feladat általánosabb alakban így hangzik:

Keressünk adott egyenes vonalon oly pontot, melynek e vonal két meghatározott pontjától való távolságai adott (pl. $m : n$) arányban állanak egymással.

Itt két megfejtésnek van helye. A kérdéses pont t. i. vagy az adott A és B pontok között, vagy pedig $A B$ -vonal meghosszabbí-

110. ábra.

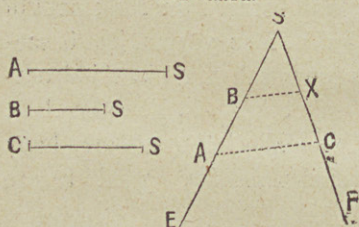


tásán kereshető. A belső pontnak meghatározását az imént láttuk. A külsőé sem nehezebb.

Ugyanis az A pontból (110. ábra) tetszőszerint húzott AX sugáron m (itt 5) egyenlő vonalhosszat kimérünk, ezután az $m-n$ -ik (5-2-ik vagyis 3-ik) F osztáspontot B ponttal összekötjük és az m -dik (5-ik) G osztásponton keresztül GH párhuzamosat vonjuk. Ekkor a szerkesztésnél fogva:
 $AH : BH = m : n = (5 : 2)$.

3. Három adott egyenes vonalhoz a negyedik arányos keresendő.

111. ábra.



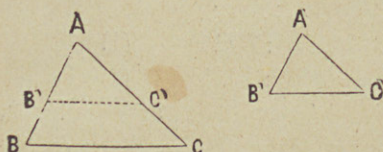
Legyen a három egyenes: AS , BS és CS . (111. ábra.) Húzzunk tetszőszerint két sugarat, SE -t és SF -et. Az egyikre pl. SE -re átvisszük, S -től mérve, SA és SB egyeneseket; a másikra SC -t. Ezután az A végpontot összekötjük C -vel, és B ponton keresztül AC -hez BX párhuzamosot húzzuk; ekkor SX a keresett negyedik arányos. Mert (38. §. 2.) $SA : SB = SC : SX$, azonban ezen arányárban az első, második és harmadik tag sor szerint a három adott egyenest jelenti, tehát a negyedik tag SX a kívánt negyedik arányos vonal.

Ép oly könnyű AS és BS egyenesek *harmadik* arányosát feltalálni; mert ez nem egyéb, mint AS , BS és BS -hez a negyedik arányost keresni.

40. §. A háromszögek hasonlósága.

Két háromszög akkor *hasonló*, ha oldalaik kölcsönös fekvése megegyező. Minthogy pedig az oldalak kölcsönös fekvése a szögektől függ; azért: *két háromszög akkor hasonló, ha megfelelő szögeik sorban egyenlők.* — Ha tehát ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (112. ábra) $A \sphericalangle = A' \sphericalangle$, $B \sphericalangle = B' \sphericalangle$ s ennek kapcsán $C \sphericalangle = C' \sphericalangle$: akkor $ABC \triangle$ hasonló $A'B'C' \triangle$ -höz, vagyis jelekkel: $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.

112. ábra.



Az egyenlő szögekkel szemközt fekvő oldalpárokat *megfelelő* oldalaknak nevezzük. Így, az előbbi példában AB és $A'B'$ megfelelő oldalak. — Annak megvizsgálása céljából, hogy a hasonló háromszögek megfelelő oldalai mily arányban állanak egymáshoz, a kisebb ($A'B'C'$) háromszöget a nagyobbikra helyezzük úgy, hogy A' szögpont A -ra, és $A'B'$ szár AB irányába jusson; ekkor a szögek egyenlőségénél fogva $A'C'$ oldal szükségképen AC irányába jut, a harmadik oldal $B'C'$ pedig párhuzamos BC -vel. Látni ebből, hogy a hasonló háromszögeket mindenkor egymásra helyezhetjük úgy, hogy az egyiknek két oldala a másik megfelelő két oldalára essék és a harmadik oldalpár párhuzamos legyen. Viszont belátható, hogy a mely háromszögeknek ez a tulajdonságuk megvan, azok egymáshoz hasonlóak, mert megfelelő szögeik egyenlők. E tulajdonság alapján most már könnyen kitalálhatjuk, miféle arány áll fenn a hasonló háromszögek megfelelő oldalai között. Ugyanis a 38. §. (2. és 4.) tantétélei szerint:

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

$$\text{és: } AB : AC = A'B' : A'C'$$

Szavakkal kifejezve: *Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak egyenlő arányúak.*

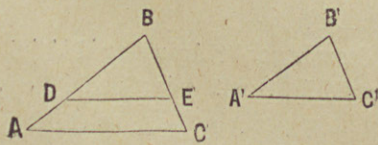
E fontos tétel megfordítva is áll, vagyis az oldalak egyenlőarányúságából viszont a háromszögek *hasonlósága* következik. Ezen jellemző, egymást kölcsönösen föltételező tulajdonságok egybevetéséből a következő *hasonlósági* esetek származnak:

1. *Ha két háromszögben két-két szög kölcsönösen egyenlő, e háromszögek hasonlóak.*

Ez már a hasonlóság fogalmából következik.

2. *Ha két háromszögben az egyik szög egyenlő és az azt befogó két-két oldal egyenlő arányú, e háromszögek hasonlóak.*

113. ábra.



Legyen $B \sphericalangle = B' \sphericalangle$ és $AB : BC = A'B' : B'C'$ (113. ábra); akkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$. Ennek bebizonyítására legyen $BD = A'B'$ -tel és legyen DE párhuzamos AC -vel. Ekkor: $DBE \triangle \sim ABC$

\triangle -höz, mert szögeik sorban egyenlők. Ennek következtében, a fentebbiek szerint :

$$AB : BC = DB : BE;$$

$$\text{vagy : } AB : BC = A'B' : BE. \quad (1)$$

$$\text{Ámde a föltétel szerint : } AB : BC = A'B' : B'C'. \quad (2)$$

Az (1) és (2) aránypárnak három-három tagja azonos lévén, a negyediknek is azonosnak kell lennie, azaz $BE = B'C'$; és így $DBE \triangle \cong A'B'C' \triangle$ (minthogy két-két oldal és a közbezárt szög kölcsönösen egyenlő). Ha tehát $DBE \triangle \sim ABC \triangle$ -höz, bizonyára $A'B'C' \triangle$ is $\sim ABC \triangle$ -höz.

3. Ha két háromszögben két-két oldal egyenlő arányú és a nagyobbik oldallal szemközt levő szög a két háromszögben egyenlő, úgy e háromszögek hasonlók.

Tegyük föl, hogy a 113. ábrában $AC > AB$ -nél és $A'C' > A'B'$, $B \sphericalangle = B' \sphericalangle$ és $AB : AC = A'B' : A'C'$, ekkor $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$ -höz. Legyen megint BD egyenlő $A'B'$ -tel, vonjuk DE -et párhuzamosan AC -vel; az ekkép támadt $DBE \triangle$ (1. pont) hasonló $ABC \triangle$ -höz, következésképp :

$$AB : AC = DB : DE, \text{ vagy :}$$

$$AB : AC = A'B' : DE.$$

Ámde a föltétel szerint : $AB : AC = A'B' : A'C'$ következésképp $DE = A'C'$. E szerint DBE és $A'B'C'$ háromszögekben két-két oldal és a nagyobbik oldallal szemközt fekvő szög kölcsönösen egyenlő, tehát $DBE \triangle \cong A'B'C' \triangle$, (17. §.) és ennek következtében $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$.

4. Ha két háromszögben a három oldalpár egyenlő arányú, a háromszögek hasonlók.

Vagyis, ha : ABC és $A'B'C'$ háromszögekben (113. ábra).

$$AB : BC = A'B' : B'C' \text{ és } AB : AC = A'B' : A'C',$$

akkor a nevezett háromszögek hasonlók egymáshoz.

Mert legyen : $BD = B'A'$, és $DE \parallel AC$ -vel; akkor $DBE \triangle$ hasonló lévén $ABC \triangle$ -höz,

$$AB : BC = DB : BE \text{ és}$$

$$AB : AC = DB : DE.$$

Vagyis :

$$AB : BC = A'B' : BE \text{ és}$$

$$AB : AC = A'B' : DE.$$

Ezen aránypárokat a föltétellel összehasonlítván azonnal látjuk, hogy $BE = B'C'$ és $DE = A'C'$, ezekből ismét következik, hogy $DBE \triangle \cong A'B'C' \triangle$ (l. a 18. §-t). Minthogy pedig $DBE \triangle \sim ABC \triangle$, tehát : $A'B'C' \triangle \sim ABC \triangle$ -höz.

Mennyiben különböznek a hasonlósági esetek az egybevágósági esetektől? Mikor hasonló két derékszögű és mikor két egyenlőszárú háromszög?

Végezzük el a következő bizonyítást:

1. Ha valamely háromszög (ABC) két oldalának (BC és CA -nak) felező pontját (D -t és E -t) az átellenes szögek szögpontjával összekötjük, a középvonalak állandó arány szerint metszik egymást, úgy hogy mindegyiknek a szögpont felé eső szelete kétszer akkora, mint a másik. Azaz, ha a metsző pontot O -val jelöljük $AO : DO = 2 : 1$ és $BO : EO = 2 : 1$.

Mert ha DE egyenest meghúzzuk, ez párhuzamos AB -vel (miért?), ennek következtében két hasonló háromszög származik stb.

2. A háromszög három középvonala ugyanazon közös pontban *t. i.* a háromszög súlypontjában találkozik. A középvonalakat súlyvonalaknak is nevezzük.

41. §. Mértani középarányos vonal. Pythagoras tétele.

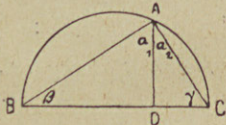
1. A megelőző tantételeket a derékszögű háromszögekre alkalmazva, azoknak következő fontos tulajdonságaikat ismerjük meg:

a) Ha a derékszögű háromszögben a derékszög szögpontjából az átfogóra merőlegest húzunk, ez a háromszöget két kisebb háromszögre bontja, amelyek az egészhez és egymáshoz hasonlók.

b) A merőleges mértani középarányos a két befogónak az átfogón való vetületei között.

c) Mindegyik befogó mértani középarányos az átfogó és az illető befogónak az átfogón való vetülete közt.

114. ábra.



E tételek bebizonyítására legyen $BAC \sphericalangle = 90^\circ$, és $AD \perp BC$ (114. ábra). Minden derékszögű háromszögben a két hegyes szög összege 90° , tehát $\alpha_1 + \beta = 90^\circ$ és $\beta + \gamma = 90^\circ$, következésképp $\alpha_1 = \gamma$, és így $DBA \triangle \sphericalsim ABC \triangle$ -höz (miért?). Szintúgy: $\alpha_2 = \beta$, tehát: $DAC \triangle \sphericalsim ABC \triangle$ -höz. Azonban, ha $DBA \triangle$ és $DAC \triangle$ ugyanazon $ABC \triangle$ -höz hasonló, nyilvánvaló, hogy: $DBA \triangle \sphericalsim DAC \triangle$ -hez.

Míntogy $DBA \triangle \sphericalsim DAC \triangle$ -höz, tehát $BD : AD = AD : CD$, következésképp:

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}. \quad \text{I.}$$

ABC és $DBA \triangle$ -ek hasonlósága következtében $BC : AB = AB : BD$, vagyis:

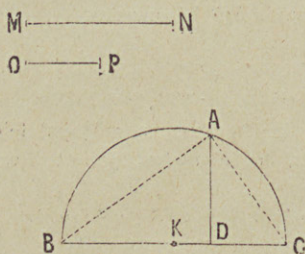
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD} \quad \text{II.}$$

Végre ABC és $DAC \triangle$ -ek hasonlóságánál fogva $BC : AC = AC : CD$, tehát:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{CD}. \quad \text{(II.)}$$

E tételek alapján két adott egyenes vonal (MN és OP) mértani középarányosát könnyen meghatározhatjuk.

115. ábra.



keletkezik, amelynek BAC szöge 90° -nyi, tehát: $BD : AD = AD : DC$ azaz: $MN : AD = AD : OP$.

2. A megelőző 3-ik tantétel igen fontos igazságra vezet. Ugyanis, ha valamely derékszögű háromszög oldalait a hosszegységgel megmérjük, és a két befogó mérték számait b és c -vel, az átfogót a -val, a két szeletét m és n -nel jelöljük, vagyis a 114. ábrára vonatkozólag: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = m$ és $CD = n$, akkor a fentebbiek szerint:

$$b^2 = a \cdot n \text{ és } c^2 = a \cdot m$$

összeadva e két egyenletet, lesz: $b^2 + c^2 = am + an$.

Ámde $am + an = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2$, tehát:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

vagyis: az átfogó mérték számának négyzete egyenlő a két befogó hosszát kifejező számok négyzeteinek összegével.

Ezt rövidebben, bár kevésbé szabatosan, így is mondják:

Az átfogó négyzete egyenlő a két befogó négyzetének összegével.
(Pythagoras tétele, Magister matheseos.)

Ezen fontos tételt a közvélemény *Pythagoras* görög bölcsnek tulajdonítja, a ki 580 évvel Kr. e. Samos szigelen született és Kroton városában híres böleselői iskolát alapított.

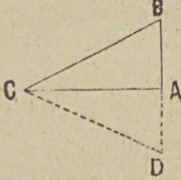
A Pythagoras-féle tétel segítségével a derékszögű háromszög két ismeretes oldalából a harmadikat könnyen *kiszámíthatjuk*. Mert, ha a két befogó (b és c) ismeretes, az átfogó: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$; ha pedig az átfogó (a) és az egyik befogó (b) ismeretes, akkor $c^2 = a^2 - b^2$, tehát $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$.

Az olyan derékszögű háromszögeket, amelyekben az oldalak mérték számai *egész* számok, *Pythagoras-féle háromszögek*-nek nevezzük. Ezekben a két kisebb szám négyzetének összege tökéletes másodhatványt ad. Ilyen számok a következők: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 9, 12, 15; 7, 24, 25 stb.

Ha Pythagoras tételét az egyenlőszárú derékszögű háromszögre alkalmazzuk, lesz: $a^2 = b^2 + b^2$, tehát: $a = b\sqrt{2}$, következésképp a és b összemérhetetlen egyenesek.

3. A Pythagoras-féle tétel megfordítva is igaz, azaz: *ha valamely háromszög legnagyobbik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével (mind a három oldalt ugyanazon egységgel mérve), akkor az első oldallal szemközt fekvő szög 90° -nyi.*

116. ábra.



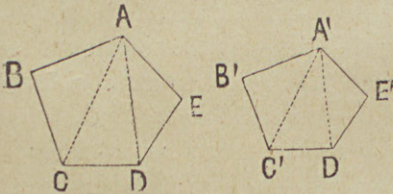
Legyen ennek igazolására $ABC \triangle$ -ben (116. ábra): $\overline{BC^2} = \overline{AB^2} + \overline{AC^2}$. Szerkesszük meg A ponton AC oldalra AD merőleget, húzzuk meg $AD = AB$ és CD egyenest; akkor: $CAD \triangle$ -ben Pythagoras tantétele szerint: $\overline{CD^2} = \overline{AD^2} + \overline{AC^2}$, vagy $\overline{CD^2} = \overline{AB^2} + \overline{AC^2}$; ámde a föltételnél fogva; $\overline{BC^2} = \overline{AB^2} + \overline{AC^2}$; tehát $\overline{CD^2} = \overline{BC^2}$, és $CD = BC$, következésképp $ABC \triangle \cong ADC$ és ennél fogva $BAC \sphericalangle = DAC \sphericalangle = 90^\circ$.

E szerint az oly háromszögek, melyeknek oldalai $3m, 4m, 5m$ hosszúságúak, szükségképp derékszögűek.

42. §. A sokszögek hasonlósága.

1. *Ha két sokszöget megfelelő átlókkal hasonló háromszögekre lehet szétbontani, akkor e sokszögek hasonlók.* E szerint két sokszög akkor hasonló, ha alkotó háromszögeik hasonlók és e részek oly módon következnek egymásra, hogy mind a két sokszögben két-két szomszédos háromszögnek egy-egy közös oldala van. Így például $ABCDE$ ötszög (117. ábra) hasonló $A'B'C'D'E'$ -hez, mert az első idom ABC, ACD és ADE , a másik $A'B'C', A'C'D'$ és $A'D'E'$ háromszögekből áll, és ezek ugyanazon sorban egymáshoz hasonlók.

117. ábra.



T. i. $ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle$,
 $ACD \triangle \sim A'C'D' \triangle$,
 $ADE \triangle \sim A'D'E' \triangle$.

Ezen értelmezés alapján:

$$\begin{array}{l|l} BCA \sphericalangle = B'C'A' \sphericalangle & CDA \sphericalangle = C'D'A' \sphericalangle \\ ACD \sphericalangle = A'C'D' \sphericalangle & ADE \sphericalangle = A'D'E' \sphericalangle \text{ stb.} \end{array}$$

két-két egyenletet összeadva lesz:

$$BCD \sphericalangle = B'C'D \sphericalangle; CDE \sphericalangle = C'D'E' \sphericalangle \text{ stb.}, \text{ azaz:}$$

Hasonló sokszögekben a megfelelő szögek egyenlők.

Minthogy a hasonló háromszögek megfelelő oldalai egyenlő arányúak, azért ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlóságánál fogva:

$$AB : BC = A'B' : B'C' \quad (1)$$

$$AB : AC = A'B' : A'C' \quad (2)$$

ACD és $A'C'D'$ háromszögek hasonlósága következtében:

$$AC : CD = A'C' : C'D' \quad (3)$$

$$CD : AD = C'D' : A'D' \quad (4)$$

A (2) és (3) aránypár szorzása után:

$$AB : CD = A'B' : C'D' \quad (5)$$

ADE és $A'D'E'$ háromszögek hasonlósága következtében:

$$AD : DE = A'D' : D'E' \quad (6)$$

A (4) és (6) aránypárt szorozva lesz:

$$CD : DE = C'D' : D'E' \quad (7)$$

Végre az (5) és (7) aránypár összevetéséből:

$$AB : DE = A'B' : D'E' \quad (8)$$

Tehát: *a hasonló sokszögeknek megfelelő oldalai egyenlő arányúak.*

2. Viszont: *ha két sokszögben a szögek sorban egyenlők és az oldalak kölcsönösen egyenlő arányúak, az idomok hasonlók.*

Mert, ha a két sokszöget hasonló fekvésű átlókkal háromszögekre bontjuk, ezek sorban hasonló egymáshoz, tehát maguk a sokszögek is hasonlóak.

Megjegyzendő, hogy két sokszög hasonlóságának megállapítására nem szükséges az alkotórészeknek elősorolt összefüggéseit egytől-egyig megvizsgálnunk, hanem kevesebb is beérhetjük. Így láttuk, hogy két *háromszög* hasonlóságához *két* adat kívántatik. Ennek következtében két *négyszög* hasonlóságára *négy* adat kell, mert minden négyszög két háromszögre bontható. Két *ötszög* hasonlóságához *hat* adat kívántatik stb., általában *két n-szög hasonlóságára 2n-4* adat szükséges, amelyek vagy a szögekre, vagy az oldalak közt fennálló arányokra, vagy részben az előbbiekre, részben az utóbbiakra vonatkozhatnak. E szerint: *két sokszög hasonlóságához egy adattal kevesebb kívántatik, mint egybevágóságukhoz*, és a hasonló idomok egybevágókká válnak, mihelyt az említett $2n-4$ egyenlethez még két megfelelő oldálnak, vagy átlónak egyenlősége hozzájárul (28. §.).

Mikor hasonló két négyzet, két rombus, két derékszögű négyszög, két rombold?

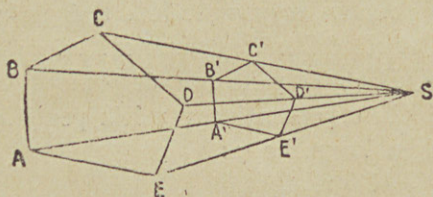
3. A fentebbiek alapján bizonyítsuk be a következő tételket:

a) *Ha két hasonló sokszögnek olyan fekvése van, hogy két megfelelő oldala párhuzamos: akkor többi megfelelő oldalai is párhuzamosok.*

mosak. (Lásd a 10. §. 9. pontját és a hasonló sokszögek tulajdonságait.)

b) Ha két hasonló sokszögnek olyan a kölcsönös fekvése, hogy megfelelő oldalaiik párhuzamosak, akkor a hasonló fekvésű szögpontokat összekötő egyenes vonalak ugyanazon közös pontban találkoznak.

118. ábra.



Azaz legyen $ABCDE$ ötszög $\sim A'B'C'D'E'$ -höz (118. ábra) ezenkívül $AB \parallel A'B'$ -tel; $BC \parallel B'C'$ -vel, $CD \parallel C'D'$ -vel stb.: ez esetben AA' , BB' , CC' , DD' stb. egyenes vonalak ugyanazon S pontban találkoznak.

A bebizonyítás a vonalak arányosságán (38. §. 5. pont) alapszik.

Az utóbbi tétel még így is kifejezhető:

Hasonló idomok akkép helyezhetők valamely sugárrendszerbe, hogy ennek sugarait a sokszögek kerületei arányosan metszik.

S pontot a két sokszög hasonlósági pontjának nevezzük.

Az S pontból néző szem a két ábrát egybevágónak látja; ezért az idomok hasonlósága távolattani egybevágóságnak mondható.

A hasonló sokszögek utóbbi tulajdonsága könnyű módot szolgáltat arra, miként lehet valamely adott sokszöghöz hasonló idomot szerkeszteni, melynek oldalai amazéival meghatározott arányban vannak.

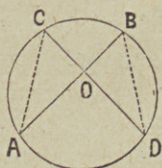
Legyen $ABCDE$ az adott sokszög (118. ábra), vegyük föl tetszés szerint S pontot, ezután húzzuk SA , SB , SC , SD , SE sugarakat és osszuk el az egyik sugarat pl. SA -t a megadott arány szerint ($m:n$). A' osztóponton keresztül $A'B'$ egyenest AB -vel, párhuzamosan meghúzzuk; továbbá, ha $B'C'$ -t $\parallel BC$ -vel, $C'D'$ -t $\parallel CD$ -vel stb.; akkor $A'B'C'D'E'$ a kerestett sokszög. (Miért?)

43. §. A háromszögek hasonlóságának alkalmazása a körhöz tartozó egyenes vonalakra.

1. Az egymást átmetsző húrok szeletei fordított arányúak, vagyis az egyik húr szeleteinek szorzata egyenlő a másik húr szeleteinek szorzatával.

Így, ha AB és CD húrok (119. ábra) O pontban metszik egymást, akkor AC és BD húrokat húzván; a származó AOC és DOB háromszögekben $A \sphericalangle = D \sphericalangle$; $C \sphericalangle = B \sphericalangle$, mert ugyanazon kör-

119. ábra.



ívhez tartoznak; ennél fogva a nevezett háromszögek hasonlóak; tehát hasonló fekvésű oldalaik arányosak, azaz:

$$AO : DO = CO : BO,$$

$$\text{vagy: } AO \times BO = CO \times DO.$$

Viszont, ha AB és CD egyenesek akként metszik egymást O pontban, hogy a fentebbi aránypár helyes, úgy $A, B, C,$ és D pontok okvetetlenül ugyanazon kör kerületébe tartoznak. Mert ha az $A, B,$ és C pontokon átvonuló kör D pontot nem érné, kétségkívül CD egyenesnek egy másik pontján pl. D' -n vonulna át; de ekkor igaz lenne, hogy:

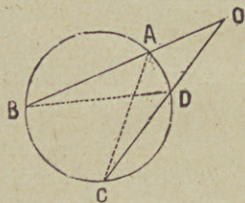
$$AO : D'O = CO : BO,$$

és a föltétel szerint: $AO : DO = CO : BO$, ám ez egyszerre csak úgy állhat meg, ha $D'O = DO$, azaz D' pont D -vel azonos.

E szerint négy adott ponton keresztül csak azon esetben lehet körvonalat húzni, ha a fentebbi aránypár érvényes.

2. A külső pontból húzott körszelők szeletei fordított arányúak, vagyis az egyik átmetsző szeleteinek szorzata annyi, mint a másik átmetsző szeleteinek szorzata.

120. ábra.



Legyen OAB és OCD a két szelő. (120. ábra.) Húzzuk meg AC és BD húrokat, ekkor $OAC \triangle \sim ODB \triangle$ -höz mert $O \sphericalangle$ közös, és $C \sphericalangle = B \sphericalangle$ (33. §. 1.) tehát:

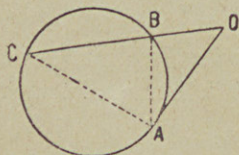
$$OA : OD = OC : OB,$$

$$\text{vagy: } OA \times OB = OC \times OD.$$

Viszont, ha A, B, C, D pontoknak OAB és OCD egyeneseken oly fekvésük van, hogy a fentebbi aránypár igaz, akkor a nevezett pontok ugyanazon kör kerületébe esnek.

3. Ha egy külső pontból érintőt és szelőt vonunk a körhöz, az érintő vonal mértani középárányos a szelőnek két szelete közt.

121. ábra.



Legyen OA az érintő (121. ábra) OBC a szelő. AB és AC húrokat vonván, OBA és OAC háromszögekben $O \sphericalangle$ közös, és $BAO \sphericalangle = ACO \sphericalangle$ -gel (33. §. 2. p.); tehát a két háromszög hasonló, következésképp:

$$OB : OA = OA : OC,$$

$$\overline{OA}^2 = OB \times OC.$$

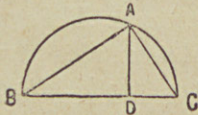
vagy:

Viszont, ha OBC körszelőnek OB és OC szeletei és OA egyenes közt a fentebbi aránypár áll fenn, akkor OA szükségképp érinti

az A , B és C pontokon átvonuló kört. Mert a föltételezett arány-párnál és O szög közösségénél fogva $OBA \triangle \sphericalight OAC \triangle$ (40. §. 2. p.); tehát $BAO \sphericalight = ACO \sphericalight$ -gel, következöleg (33. §. 3. p.) OA a körnek érintő-vonala.

4. Ha a kör valamely pontjából bármely átmérőnek végpont-jaihoz a két összekötő húrt és az átmérőre a merőlegest meghúzzuk: a) mindegyik húr középarányos az egész átmérő és a húr mellé eső szelet közt, b) a merőleges vonal középarányos az átmérő két szelete közt.

122. ábra.

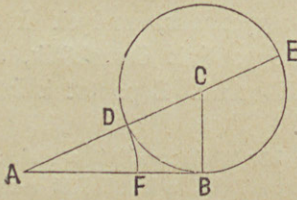


Legyen A a körnek adott pontja (122. ábra), BC egyik átmérője és $AD \perp BC$ -n; ekkor a derékszögű BAC háromszögben: $\overline{AB^2} = BC \times BD$, $\overline{AC^2} = BC \times CD$ és $\overline{AD^2} = BD \times DC$.

Miképp bizonyítható be e tétel az 1. pont alapján?

(Az arány-metszés.) A 3. tétel módot nyújt a következő föl-
adat megfejtésére: *hogyan lehet adott egyenes vonalat folytonos aránypár szerint osztani*, azaz úgy ketté szelni, hogy a nagyobbik szelet mértani középarányos legyen az egész vonal és a kisebbik szelet közt.

123. ábra.



Legyen AB az adott egyenes vonal (123. ábra), melyet folytonos arány szerint kell osztanunk. B végpontján BC merőlegest szerkesztjük és $BC = \frac{1}{2} AB$ sugárral kört alakítunk, mely az AB egyenest B pontban érinti; ezután a középponton átmenő és a kört D és E pontokban szelő AC egyenest húzván, a 3. pont szerint: $AE : AB = AB : AD$, ámde $AB = DE$, tehát $AE : DE = DE : AD$

azaz AE szelő D pontban folytonos arány szerint van osztva.

Az utóbbi aránypárból következik; hogy:

$$(AE - DE) : DE = (DE - AD) : AD,$$

azaz: $AD : AB = (AB - AD) : AD,$

vagy: $(AB - AD) : AD = AD : AB.$

Most, ha AF -et egyenlőnek vesszük AD -vel, úgy:

$$(AB - AF) : AF = AF : AB,$$

azaz: $BF : AF = AF : AB,$

tehát AB is folytonos arány szerint van két részre osztva.

E szerint AB -t folytonos arány szerint úgy osztjuk, hogy B végponton BC merőlegest szerkesztjük, és ezt egyenlőnek tévén $\frac{1}{2} AB$ -vel, C -t összekötjük A végponttal; az ekkép talált AC -ből elvágjuk CD -t $= CB$ -t és A ponttól az AD -t átvisszük AB -re, úgy, hogy: $AF = AD$.

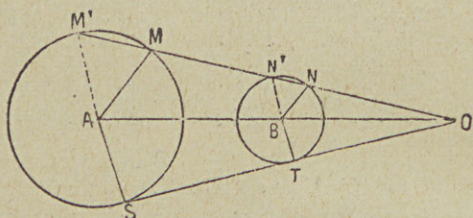
F a keresett osztó pont.

44. §. Két kör hasonlósági pontjairól.

Ha két körben több párhuzamos sugárpárt vonunk és a megfelelő sugarak végpontjait egyenes vonalakkal összekapcsoljuk, ezek mind a centrális vonal ugyanazon pontjában találkoznak.

Itt két esetet kell megkülönböztetnünk t. i. a szóban forgó párhuzamos sugárpárok vagy megegyező, vagy ellenkező irányúak.

124. ábra.



a) Legyen $AM \parallel BN$ -nel (124. ábra), és mind a két sugár egyfelé irányzott. Nevezzük MN egyenes és AB centrális távolság metsző pontját C -nek.

AMC és BNC \triangle -ek hasonlóságánál fogva:

$$AC : BC = AM : BN \quad (1)$$

és ebből: $(AC - BC) : (AM - BN) = BC : BN$, vagy:

$$AB : (AM - BN) = BC : BN.$$

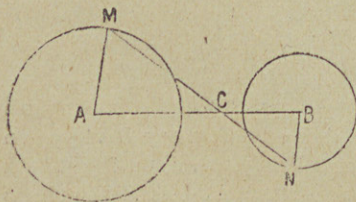
Ámde ez utóbbi aránypárban AB , $AM - BN$ és BN tagok állandó mennyiségek, melyek a két kör bármelyik sugárpárjára nézve ugyanazon értékűek; ennél fogva az aránypár BC tagja is változatlan értékű; következésképp, mindazon egyenesek, melyek két párhuzamos és megegyező irányú sugár végpontjait összekötik, a centrális vonal ugyanazon pontjában találkoznak. E pontot a két kör *külső hasonlósági pontjának* nevezzük.

Ha e pontnak CA távolságát a nagyobbik kör középpontjától x -szel, a centrális vonal hosszát d -vel, a nagyobbik kör sugarát R -, a kisebbikét r -rel jelöljük, a fentebbi (1) aránypár szerint:

$$x : (x - d) = R : r, \text{ következésképp:}$$

$$x = \frac{dR}{R - r}. \quad (1)$$

125. ábra.



b) Legyen AM és BN (125. ábra) két párhuzamos, ellenkező irányú sugár. Kössük össze M pontot N -nel; MN és AB metsző pontját nevezzük ismét C -nek.

AMC és BNC háromszögek hasonlóságánál fogva:

$$AC : BC = AM : BN \quad (2)$$

Mínt hogy a jobb oldali arány értéke a sugárpár irányától épenséggel nem függ, a bal oldalnak is állandó értékűnek kell lennie; következképp AB vonal C pontja is *állandó*, mert adott egyenest adott arány szerint csak egyféleképp oszthatunk. Ez utóbbi pontot a két kör *belső hasonlósági pontjának* nevezzük.

Ha e pontnak távolságát a nagyobbik kör középpontjától y -nal, a centrális vonal hosszát d -vel, a sugarakat R - és r -rel jelöljük, a (2) egyenlet szerint:

$$y : (d - y) = R : r, \text{ következésképp:}$$

$$y = \frac{d \cdot R}{R + r}. \quad (\text{II})$$

Az egymásnak megfelelő sugarak végpontjait *hasonló fekvésű* pontoknak szokás nevezni.

A fentebbi tételből következő igazságok erednek:

a) *Két kör közös külső érintő vonalai a külső hasonlósági ponton mennek keresztül; hasonlóképp a belső közös érintők a belső hasonlósági pontban találkoznak.*

b) *A kívül érintkező körök érintőpontja egyszersmind belső hasonlósági pontjuk is.*

c) *Az egymást átmetsző köröknél a belső hasonlósági pont a két kör közös részébe esik.*

d) *A belülről érintkező köröknél az érintkezés pontja egyszersmind a külső hasonlósági pont.*

e) *Ha a kisebbik kör a nagyobbik határán belül van, mind a két hasonlósági pontot a kisebbik körön belül találjuk.*

f) *Két egyenlő körré nézve a belső hasonlósági pont a centrális vonal felező pontjában, a külső hasonlósági pont végtelen távolban van.*

g) *Két hasonló fekvésű pontnak az illető hasonlósági ponttól való távolságai állandó arányban vannak. Ezen arány t. i. mindig egyenlő a körsugarak arányával.*

A fentebbi tétel megfordítva is áll, azaz: *ha két kör külső, vagy belső hasonlósági pontjából szelőt vonunk, ez a két kört két pár hasonló fekvésű pontban metszi (azaz oly pontokban, melyeknek megfelelő sugarai párhuzamosak).* Ezt az előbbi pont alapján *indirekt úton* bizonyítjuk be.

Ötödik fejezet.

Az egyenes vonalú idomok területe.

I. Az egyenes vonalú idomok egyenlőségéről.

45. §. Az egyenlőterületűség fogalma.

A megelőző fejezetben az idomokat *alak* tekintetében hasonlítottuk össze egymással, most a *nagyságra* fordítjuk figyelmünket. Valamely zárt idom területét csak úgy lehet meghatározni, ha azt egy *ismeretes* idommal, a *területegységgel* összehasonlítjuk. Területegységül rendesen oly négyzet szolgál, amelynek mindegyik oldala a hosszegységgel egyenlő. Eszerint az idom *területén* az idom és a területegység közt alkotható szám-*arányt* értjük.

Magától értetődik, hogy az *egybevágó* idomok *egyenlő* területűek is. Azonban viszont nem állíthatjuk, hogy az egyenlő területű idomok szükségképen egybevágók, mert két idom gyakran egyenlő területű, anélkül hogy egybevágó, sőt hasonló lenne. Így pl. valamely háromszögnek ép akkora lehet a területe, mint egy négyszögnek stb. Az egyenlő területű idomokat röviden *egyenlőknek* is nevezik; ezért az egyenlő területűség jele olyan, mint az egyenlőségé.

Lássuk most a föltételeket, mikor *egyenlő területű két sokszög*? Ebbeli vizsgálatainkat a következő kétségtelen igazságra alapítjuk: «Az olyan idomok, amelyek egybevágó idomok összeadásából, vagy kivonásából származtak, egyenlő területűek.»

Vizsgálatainkat a parallelogrammákkal kezdjük meg; és mert a háromszög valamely parallelogramma felével egyenlő, azért e két idomot egyszerre tárgyaljuk.

46. §. A parallelogrammák és a háromszögek területének összehasonlítása.

Területek összehasonlításánál a parallelogramma egyik oldalát *alap*-nak, az átellenes oldal valamelyik pontjából az alapra bocsáttott merőlegest *magasságnak* nevezzük.

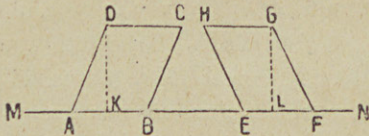
Igy pl. ha $ABCD$ (126. ábra) parallelogramma AB oldalát alapnak tekintjük, az AB és CD párhuzamos oldalak között húzott DK merőleges a magasság.

Szintúgy a háromszögnél is az egyik oldalt *alap*nak, és az átellenes szögpontból az alapra bocsátott merőleges egyenest a háromszög *magasságának* nevezzük.

1. Az egyenlő alapú és magasságú paralelogrammák területe egyenlő.

Legyen $ABCD$ és $EFGH$ a két paralelogramma, és ezekben $AB = EF$ (126. ábra) az alap, $DK = GL$ a magasság. E két

126. ábra.



idomot MN egyenes vonalra helyezzük; ekkor az átellenes CD és GH oldalaknak ugyanazon egyenes vonalba kell esniök, mert a két idom magassága egyenlő; márpedig valamely egyeneshez meghatározott távolságban csak egy párhuzamost vonhatunk. Továbbá $AEHD$ és $BFGC$ trapézok kellően egymásra illetve elfödik egymást, azaz: $AEHD \cong BFGC$ (miért?). Mindegyikből $BCHE$ trapézt elvéve az elsőből $ABCD$, a másodikból $EFGH$ paralelogramma marad meg: és e maradékok egyenlők egymással, azaz: $ABCD \square = EFGH \square$.

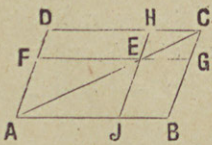
Ebből kitűnik, hogy a rombold területe a vele egyenlő alapú és magasságú derékszögű négyszög területével egyenlő.

Tekintetbe véve továbbá, hogy minden háromszög valamely paralelogramma felével egyenlő és az egyenlő mennyiségek fele részei is egyenlők, világos, hogy:

2. Az egyenlő alapú és magasságú háromszögek egyenlő területűek, és a háromszög területe fele az olyan paralelogramma területének, amelynek alapja és magassága a háromszögével egyenlő.

3. Ha valamely paralelogrammában az átló bármely pontján keresztül az oldalakkal párhuzamos egyeneseket húzunk, az átló két oldalán alakult paralelogrammák egyenlő területűek.

127. ábra.



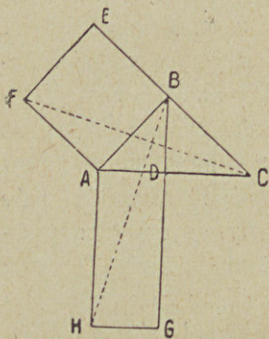
Ha $ABCD$ paralelogrammában FEG egyenes $\parallel AB$ oldallal, HEJ egyenes $\parallel BC$ oldallal (127-ik ábra); akkor $ABC \triangle \cong ADC \triangle$; $AJE \cong AFE \triangle$; és $EGC \triangle \cong EHC \triangle$ (miért?), tehát: $ABC \triangle - AJE \triangle - EGC \triangle = ADC \triangle - AFE \triangle - EHC \triangle$, vagyis: $EJBG \square = EFDH \square$.

4. A derékszögű háromszög egyik befogóján alakított négyzet egyenlő területű azon derékszögű négyszöggel, melynek hosszabbik-

oldala az egész átfogó, rövidebbik oldala a befogónak az átfogón való vetülete.

$ABC \triangle$ -ben (128. ábra) $B \sphericalangle = 90^\circ$ és $BD \perp AC$. Ha AB befogóra $ABEF$ négyzetet szerkesztjük és AD vetületre oly derékszögű négy-

128. ábra.



szöget rajzolunk, amelynek magassága $AH = AC$ átfogóval; akkor AE négyzet = AG derékszögű négyszöggel. Ennek bebizonyítása végett CF és BH segédvonalakat húzzuk. Az ekkép támadt $ACF \triangle$ a vele egyenlő alapú és magasságú $ABEF$ négyzetnek a felével egyenlő. Szintúgy $ADBH$ háromszög is fele a vele egyenlő alapú és magasságú $ADGH$ paralelogrammának, úgyde a nevezett háromszögek egybevágók, mert $AC = AH$, $AF = AB$, és $CAF \sphericalangle = BAH \sphericalangle$ (t. i. mindakettő = $BAC \sphericalangle + 90^\circ$), tehát

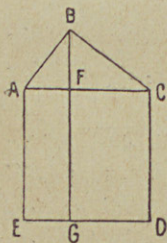
csakugyan $ACF \triangle \cong ABH \triangle$, következöleg a kétakkora paralelogrammák egyenlők, vagyis:

$$ABEF = ADGH$$

5. A megelőző tantétel a Pythagoras-féle nevezetes tételre vezet, mely szerint:

A derékszögű háromszög átfogójára rajzolt négyzet egyenlő területű a két befogóra rajzolt négyzetek területének összegével, vagy rövidebben: az átfogó négyzete annyi, mint a befogók négyzetének összege.

129. ábra.

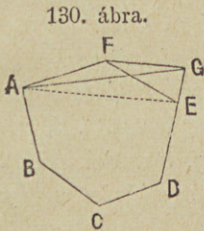


Mert, ha ABC háromszög (129. ábra) B szöge = 90° , és az AC átfogóra $ACDE$ négyzetet szerkesztjük és BG merőleget húzzuk, ez a négyzetet két derékszögű négyszögre osztja; ezek közül $AFGE$ a megelőző tantétel alapján egyenlő területű az AB -re rajzolt négyzettel, $CFGD$ pedig = a BC befogón alakított négyzettel. Minthogy a nevezett paralelogrammák összesen az átfogó négyzetét adják, tehát az átfogó négyzete = a befogók négyzeteinek összegével.

6. *Viszont, ha valamely háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével, a háromszög derékszögű.*

47. §. Sokszögek átalakítása egyenlő területű parallelogrammákká és négyzetekké.

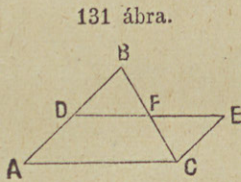
Minden n -oldalú sokszög $n-1$ oldalú egyenlő területű sokszöggé alakítható. Például $ABCDEF$ idomban (130. ábra), vágjuk el AE átlóval AFE háromszöget; majd húzzunk F ponton keresztül az átlóhoz párhuzamost; továbbá hosszabítsuk meg a szomszédos DE oldalt, míg G pontban a párhuzamossal találkozik; végül húzzuk meg AG egyenest. Ekkor $AGE \triangle$ keletkezik, melynek területe = AFE háromszögével (miért?). Ha most a hátramaradt $ABCDE$ sokszöghöz AGE háromszöget hozzáadjuk, ez uton az elvett AFE háromszöget más



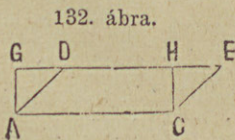
egyenlő területű háromszöggel pótoljuk, tehát az adott sokszög területe nem változik. Azonban az új $ABCDEG$ sokszögben az oldalak száma eggyel kevesebb, mint az eredetiben volt, mert AF és FE helyett csak egy oldal AC maradt meg.

Látnivaló, hogy ha ezt az eljárást többször ismételjük, az oldalak száma folyton-folyvást kevesbedik; e szerint bármely sokszöget egyenlő területű háromszöggé változtathatunk át.

A háromszöget továbbá egyenlő területű parallelogrammává alakíthatjuk át. Legyen ABC (131. ábra) az átalakítandó háromszög.



Felezzük valamelyik oldalát, pl. AB -t és a felező D pontból húzzunk AC -vel párhuzamost, szintúgy C -ből AB oldalhoz párhuzamost. Ezen párhuzamosok $ACED$ parallelogrammát alkotják, mely az $ABC \triangle$ -gel egyenlő területű, mert a szerkesztésnél fogva: $CE = AD = BD$, továbbá $CFE \sphericalangle = BFD \sphericalangle$ és $FCE \sphericalangle = FBD \sphericalangle$; tehát $EFC \triangle \cong DFB \triangle$; ennélfogva ABC és $ACED$ területe egyenlő. Mert, ha ABC háromszögből $DFB \triangle$ -et kihalasztjuk, és pótlásul az épen akkora $EFC \triangle$ -et hozzá adjuk, nyilvánvaló, hogy $ACED$ parallelogramma ABC háromszöggel egyenlő területű lesz.

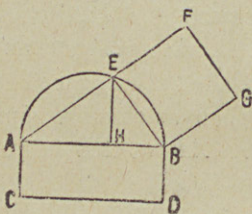


Ha AC -re (132. ábra) AG és CH merőlegeseket vonjunk, $ACHG$ derékszögű négyszög keletkezik, mely $ACED$ parallelogrammával területre nézve megegyezik. (Miért?)

Ezekből kitűnik, hogy: *minden sokszöget egyenlő területű derékszögű négyszöggé alakíthatunk át.*

A derékszögű négyszögek közt legegyszerűbb a *négyszet*; kérdés nem lehetne-e a derékszögű négyszöget *egyenlő területű négyszetté* átalakítani? Az előbbieket szerint a derékszögű háromszög egyik befogójára rajzolt négyzet egyenlő területű azon derékszögű négyszöggel, mely az egész átfogóból, és az említett befogónak vetületéből alakult. Ennek értelmében tehát oly derékszögű háromszöget kell alakítanunk, melynek átfogója akkora, mint az adott derékszögű négyszög hosszabbik oldala, az átfogó egyik szelete pedig = annak kisebb oldalával. Ezt pedig ily módon érjük el. Legyen $ABCD$ (133. ábra) az

133. ábra.



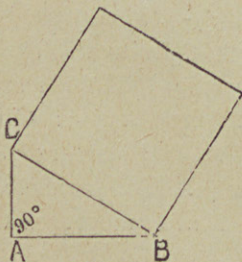
adott derékszögű négyszög. Felezzük AB oldalt és szerkesszünk oly félkört, melynek AB az átmérője. Továbbá legyen BH egyenlő BD -vel és emeljük H pontban AB -re HE merőlegest; ez a kört E pontban éri. Ha E -t A és B végpontokkal összekapcsoljuk, AEB derékszögű háromszög keletkezik és ha ennek az EB befogójára négyzetet rajzolunk, az az adott derékszögű négyszöggel egyenlő területű. Azaz $EBGF$ $\square = ABCD$ derékszögű négyszöggel, tehát $EBGF$ a kívánt négyzet.

Az elmondottak után nyilvánvaló, hogy: *Minden sokszög egyenlő területű négyszetté alakítható át.*

48. §. Sokszögek összeadása, kivonása, szorzása és osztása.

Minthogy a sokszögek egyenlő területű négyzetekké alakíthatók, azért két sokszög összeadása azonos értelmű két négyzet összegezésével. Erre nézve pedig a Pythagoras-féle tantétel nyújt egyszerű módot.

134. ábra.



Ha t. i. AB (134. ábra) az egyik, AC a másik négyzet oldala; akkor a vonalokból mint befogókból derékszögű háromszöget alakítunk; az átfogóra szerkesztett négyzet a keresett négyzetet ábrázolja; mert ennek területe akkora, mint az adott két négyzet területének összege. Magától érthető, hogy ily

módon akárhány négyzetet összeadhatunk. Tekintve tehát az előbbi §-ban mondottakat: *akárhány adott sokszöget oly négyzetté egyesíthetünk, melynek területe a sokszögek területének összegével egyenlő.*

Az előbb követett eljárás a sokszögek *kivonására* is alkalmazható, föltéve, hogy az adott sokszögeket előbb négyzetekké átalakítottuk. Ugyanis bármelyik befogónak négyzete annyi, mint az átfogó és a másik befogó négyzetének különbsége. Ha tehát két négyzetet egymásból ki akarunk vonni, oly derékszögű háromszöget alakítunk, melynek átfogója a nagyobbik négyzet oldalával, egyik befogója a kisebbik négyzet oldalával egyenlő hosszúságú; ekkor a másik befogó ama négyzet oldalát ábrázolja, melynek területe az adott négyzetek területének különbségével egyenlő.

Szintoly könnyű a négyzetek *szorzása* számokkal, vagyis oly négyzet szerkesztése, melynek területe valamely adott négyzet többszörösével, pl. n -szeresével egyenlő. Állítsuk e célból az adott négyzetet valamely alapvonalra és rajzoljuk le n ízben közvetlenül egymás mellé. Ez úton oly derékszögű négyszög keletkezik, melynek területe az adott négyzet n -szeresével egyenlő. Ha ezt a paralelogrammát négyzetté átalakítjuk, megvan a keresett idom.

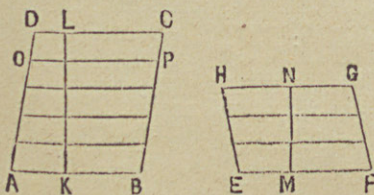
Végül a négyzeteknek számokkal való osztását illetőleg, oly négyzet szerkesztésére, melynek területe az adott négyzet n -ed részével egyenlő, osszuk el a négyzet egyik oldalát n egyenlő részre és húzzunk az osztópontokon keresztül merőleges vonalakat. Ez úton n egybevágó derékszögű négyszög keletkezik; melyek mindegyike a négyzet n -ed részével egyenlő. Ha egy ily részt négyzetté átalakítunk, a keresett négyzetet megtaláltuk.

II. Az egyenes vonalú idomok területmérése.

49. §. Az egyenes vonalú idomok területeinek összehasonlítása.

1. *Az egyenlő alapú paralelogrammák területei úgy aránylanak egymáshoz, mint megfelelő magasságaik.*

135. ábra.



Legyen $ABCD$ és $EFGH$ (135. ábra) a két összehasonlítandó paralelogramma és $AB = EF$. Ez esetben $ABCD \square : EFGH \square = KL : MN$. E tétel bebizonyításánál tegyük fel, hogy a magasságok közös $m^{\text{án}}$

téke KL -re n -szer (pl. 5-ször), MN -re r -szer (pl. 3-szor) mérhető fel. E szerint:

$$KL : MN = n : r. \quad (1)$$

Ha most a közös mértéket KL -re és MN -re tényleg rámérjük és az osztópontokon keresztül az alappal párhuzamosakat húzunk, mindegyik idom épen annyi kisebb parallelogrammára oszlik, ahány részből az illető magasság áll; azaz $ABCD$ idom n , $EFGH$ pedig r kis parallelogrammára. E kisebb idomok területre nézve egyenlők, mert alapjuk és magasságuk egyenlő. Ha tehát ezek közül egyet (pl. $CDOP$ -t) közös mértéknek veszünk, ez az $ABCD$ -ben n -szer, $EFGH$ -ban r -szer találhatik, következőleg:

$$ABCD \square : EFGH \square = n : r \dots (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből közvetlenül következik, hogy:

$$ABCD \square : EFGH \square = KL : MN.$$

2. Az egyenlő magasságú parallelogrammák területei úgy aránylanak egymáshoz, mint megfelelő alapjaik.

A bebizonyítás menete azonos az előbbivel.

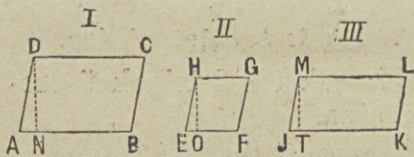
3. Minthogy minden háromszög a vele egyenlő alapú és magasságú parallelogramma felével egyenlő, a felerészek pedig úgy aránylanak egymáshoz mint a megfelelő egészek; azért:

Az egyenlő alapú háromszögek területei úgy aránylanak, mint megfelelő magasságaik, és:

Az egyenlő magasságú háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő alapok.

4. Az 1. és 2. tétel együttes alkalmazása a különböző alapú és magasságú parallelogrammák területi arányát is meghatározza.

136. ábra.



Legyen $ABCD$ és $EFGH$ (136. ábra) a két összehasonlítandó idom. Kétségtől áll oly harmadik parallelogrammát alakítani, melynek alapja az első alap-

jával, magassága a második magasságával megegyezik. Ilyen parallelogramma: $JKLM$; ebben: $JK = AB$, és $MT = HO$.

Már most az I-söt a III-kal, összehasonlítva, az 1. pont szerint

$$ABCD \square : JKLM \square = DN : MT, \quad (1)$$

$$\text{vagy: } ABCD \square : JKLM \square = DN : HO. \quad (2)$$

A II-ikat összehasonlítva a III-kal, a 2. pont szerint

$$JKLM \square : EFGH \square = JK : EF; \quad (3)$$

$$\text{vagy: } JKLM \square : EFGH \square = AB : EF. \quad (4)$$

A (2) és (4) aránypárból szorzás útján következő új aránypár származik:

$ABCD \square : EFGH \square = AB \times DN : EF \times HO$ azaz: *a két paralelogramma területe úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő alapok és magasságok szorzatai.*

Abban az esetben, ha az összehasonlított paralelogrammák szögei kölcsönösen egyenlők, a fentebbi aránypárt más alakban is írhatjuk; ekkor t. i. a magasságok arányát az oldalak arányával pótolhatjuk. Mert föltéve, hogy a fentebbi ábrában az I és II idomok szögei kölcsönösen egyenlők és a III idomot is ezekkel egyenlő szögűnek szerkesztettük, ADN és JMT háromszögek hasonlósága következtében:

$$DN : MT = AD : JM;$$

vagy: $DN : MT' = AD : EH$ (mivel $JM = EH$).

Tehát az (1) számú aránypárt a jelen esetben így írhatjuk:

$$ABCD \square : JKLM \square = AD : EH.$$

Továbbá a fentebbiek szerint:

$$JKLM \square : EFGH \square = AB : EF.$$

Ebből szorzás útján:

$$ABCD \square : EFGH \square = (AB \times AD) : (EF \times EH)$$

azaz: *két egyenlő szögű paralelogramma területe úgy aránylik egymáshoz, mint két-két szomszédos oldaluk szorzata.*

5. Ezekből következik, hogy:

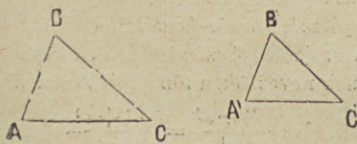
a) *Két háromszög területe úgy aránylik egymáshoz, mint alapjaiknak magasságaikkal való szorzatai, és:*

b) *Ha két háromszögben egyik szög közös, vagy egyenlő, területeik úgy aránylanak egymáshoz, mint a közös szöveget befoglaló két-két oldal szorzatai.*

Valahányszor tehát két háromszögnek egy-egy szöge és a területe egyenlő, az egyenlő szöveget befogó két-két oldal szorzatának is egyenlőnek kell lennie. Továbbá:

6. *Két hasonló háromszög területe úgy aránylik egymáshoz, mint két megfelelő oldalnak négyzetei.*

137. ábra.



Mert legyen ABC és $A'B'C'$ (137. ábra) két hasonló háromszög, melyekben $A \sphericalangle = A' \sphericalangle$, $B \sphericalangle = B' \sphericalangle$; a megelőző pont szerint:

$$ABC \triangle : A'B'C' \triangle = AB \times AC : A'B' \times A'C' \dots (1)$$

Ámde a háromszögek hasonlósága következtében még a következő aránypárok is helyesek:

$$AB : A'B' = BC : B'C';$$

$$AC : A'C' = BC : B'C';$$

ezeket egymással szorozva, lesz:

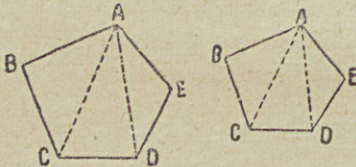
$$(AB \times AC) : (A'B' \times A'C') = \overline{BC^2} : \overline{B'C'^2} \dots (2)$$

vagy az utolsó aránypárt az (1)-vel összevetvén, következik, hogy:

$$ABC \triangle : A'B'C \triangle = \overline{BC^2} : \overline{B'C'^2}.$$

7. Ezen tantétel a hasonló sokszögekre is érvényes, azaz: két hasonló sokszög területe úgy aránylik egymáshoz, mint két megfelelő oldaluk négyzetei.

138. ábra.



Legyen $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.
(138. ábra.) A hasonló sokszögeket megfelelő átlókkal hasonló háromszögekre bonthatjuk fel, azaz:

$$ABC \triangle \sim A'B'C' \triangle,$$

$$ACD \triangle \sim A'C'D' \triangle \text{ stb.}$$

ezekre nézve az előbbi pont szerint a következő aránypárok állanak:

$$ABC \triangle : A'B'C' \triangle = \overline{AB^2} : \overline{A'B'^2}$$

$$ACD \triangle : A'C'D' \triangle = \overline{CD^2} : \overline{C'D'^2}$$

$$ADE \triangle : A'D'E' \triangle = \overline{DE^2} : \overline{D'E'^2}.$$

Ámde a két sokszög hasonlósága következtében:

$$AB : A'B' = CD : C'D' = DE : D'E' \text{ stb.};$$

vagy: $\overline{AB^2} : \overline{A'B'^2} = \overline{CD^2} : \overline{C'D'^2} = \overline{DE^2} : \overline{D'E'^2}$ stb.

$$\text{tehát: } \frac{ABC \triangle}{A'B'C' \triangle} = \frac{ACD \triangle}{A'C'D' \triangle} = \frac{ADE \triangle}{A'D'E' \triangle} = \dots = \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2;$$

$$\frac{ABC \triangle + ACD \triangle + ADE \triangle + \dots}{A'B'C' \triangle + A'C'D' \triangle + A'D'E' \triangle + \dots} = \left(\frac{AB}{A'B'} \right)^2;$$

azaz: $ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB^2} : \overline{A'B'^2}.$

Az utóbbi tételt a Pythagoraséval egybevetve érdekes igazságra jutunk. Ugyanis, ha valamely derékszögű háromszög három oldalára ugyanannyi hasonló sokszöget alakítunk oly módon, hogy a háromszög oldalai a sokszögek megfelelő oldalai gyanánt szolgálnak; továbbá az átfogó mértékszámát a -val, a befogók mértékszámait b - és c -vel jelöljük; az átfogóra rajzolt sokszög területét A -nak, a befogókhoz tartozó idomok területét B - és C -nek nevezzük, a fentebbiek szerint:

$$\frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2} \text{ és } \frac{C}{A} = \frac{c^2}{a^2}, \text{ tehát összeadva } \frac{B+C}{A} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$$

Ámde Pythagoras tétele szerint: $a^2 = b^2 + c^2$, tehát a jobb oldalon levő hányados $= 1$, következésképp:

$$A = B + C.$$

Azaz: ha valamely derékszögű háromszög három oldalára ugyanannyi hasonló sokszöget szerkesztünk oly módon, hogy a háromszög oldalai a sokszögek megfelelő oldalával egyenlők, akkor: az átfogóra rajzolt sokszög területe egyenlő a befogókra szerkesztett két sokszög területének összegével.

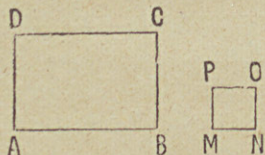
50. §. Az egyenes vonalú idomok területének kiszámítása.

Terület-mérés. Valamint az egyenes vonalat megmérni annyi, mint hosszának az egységhez való arányát megállapítani; úgy az idom területének mérése nem egyéb, mint megállapítása annak az aránynak, mely az idom terjedelme és a területegység között van. *Területegységül* olyan négyzet szolgál, melynek mindegyik oldala a hosszegységgel egyenlő. Minthogy a hosszegység különböző, a megfelelő területegység is többféle.

A négyzettel közvetlenül csak a derékszögű négyzöget mérhetjük meg, *számítás útján* azonban más idomok területét is meghatározhatjuk, amint ezt látni fogjuk.

1. *A paralelogramma területének kiszámítása.* Kezdjük meg a derékszögű négyzöggel. Keressük $ABCD$ derékszögű négyzög területét (139. ábra), összehasonlítva az $MNOP$ négyzettel, vagyis a területegységgel.

139. ábra.



Az előbbi §. 4. pontja szerint:

$$ABCD : MNOP = AB \times AD : MN \times MP,$$

vagy:

$$\frac{ABCD}{MNOP} = \frac{AB \cdot AD}{MN \cdot MP}$$

Minthogy $MN = MP =$ a hosszegységgel, a bal oldalon álló hányados nem egyéb, mint $ABCD$ területének t mértékszámával; a jobb oldalon levő $AB : MN$ hányados $= AB$ alapnak a és $AD : MP = AD$ magasságnak m mértékszámával. E szerint *valamely derékszögű négyzög területszáma (t) annyi, mint az alapvonal és a magasság mértékszámának a szorzata.* Jelekkel kifejezve: $t = a \cdot m$.

140. ábra.



Pl. Ha $ABCD$ (140. ábra) alapvonalja 5 m., magassága 3 m., akkor területe $= 5 \times 3 = 15 \square$ m. Ezt szemléltetővé is tehetjük. Ugyanis mérjük fel a hosszegységet AB -re 5-ször, AD -re 3-szor; az osztó

pontokon keresztül az oldalakkal párhuzamosakat húzva, a keletkező apró négyzetek a területegységgel azonosak. Ezek száma tehát a derékszögű négyszög területszámát fejezi ki. Az első fekvő sor 5 ily négyzetet foglal magában; és mert 3 fekvő sor van, a négyzetek összes száma $3 \times 5 = 15$, amint a képlet is bizonyítja.

A négyzet oly derékszögű négyszög, melynek oldalai *egyenlők*; ennél fogva: *a négyzet terület-száma annyi, mint valamelyik oldala mértékszámának önmagával való szorzata.*

A négyzet oldalhosszát a -val, területszámát t -vel jelölván, a mondottak szerint: $t = a^2$, és ebből: $a = \sqrt{t}$.

Minthogy a *ferdeszögű* paralelogramma területe az ugyanakkora alapú és magasságú derékszögűével egyenlő; ennél fogva: *bármely paralelogramma területszáma (t) annyi, mint az alap (a) és magasság (m) mértékszámának szorzata.*

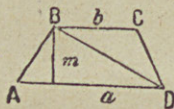
Jelekkel kifejezve $t = a \cdot m$.

2. *A háromszög területe.* A háromszög a vele egyenlő alapú és magasságú paralelogramma területének a felével egyenlő, tehát: *A háromszög területszáma annyi, mint alapjának és magasságának fél szorzata.*

Jelekkel kifejezve: $t \triangle = \frac{a \cdot m}{2}$.

3. *A trapéz területe.* A trapézt bármelyik átlója két háromszögre osztja; ezekben a párhuzamos oldalak alapvonalakul, az alapok kölcsönös távolsága közös magasságul tekinthetők.

141. ábra.



Nevezzük $ABCD$ trapézben (141. ábra) a párhuzamos oldalak mértékszámait a - és b -nek, a közös magasságot m -nek, akkor:

$$ABD \triangle = \frac{a \cdot m}{2}, \text{ és } BCD \triangle = \frac{b \cdot m}{2},$$

tehát a trapéz területe: $t = \frac{a + b}{2} m$

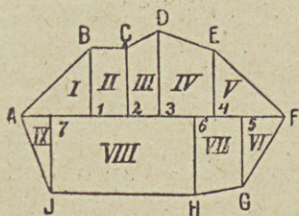
azaz: *a trapéz területét úgy találjuk meg, hogy a párhuzamos oldalak fél összegét a magassággal megszorozzuk.*

4. *A sokszögek területe.* A sokszögek területét kétféleképen határozhatjuk meg.

a) A sokszöget átlókkal háromszögekre bontjuk, és ezek területét egyenként kiszámítván, összeadjuk.

b) A sokszögben alkalmas átlót, vagy valamely átmetszőt húzunk és erre minden szögpontból egy-egy merőlegest bocsátunk; a sokszög ekkép háromszögekre és trapézekre oszlik, melyek területének összege, illetőleg különbsége a sokszög területét adja.

142. ábra



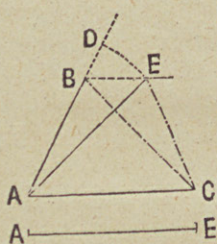
szög területével egyenlő. Ha tehát a merőlegesek és az átló szeletei ismeretesek, a sokszög területe könnyen kiszámítható.

Így például ha $ABC\dots HJ$ sokszög (142. ábra) területét kellene kiszámítanunk, AF átlót meghúzzuk, erre minden szög-pontból (kivéve A -t és F -et), merőlegest húzunk, és a talppontokat 1, 2, 3, 4, számokkal jelöljük. Ekkép az egész sokszöget négy háromszögre (I, V, VI és IX) és öt trapézre (II, III, IV és VII, VIII) osztottuk fel és ezeknek terület-összege a sok-

51. §. Területek átalakítása.

1. Alakítsuk át ABC háromszöget (143. ábra) más, vele egyenlő háromszöggé, úgy, hogy egyik oldala meghatározott hosszúságú legyen és az eredeti háromszög AC oldala változatlan maradjon.

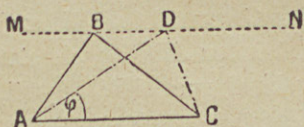
143. ábra.



A feladatot megfejtettnek tekintve, legyen AEC a keresett háromszög. Minthogy $ABC \triangle = AE'C \triangle$ és AC alap közös, tehát a két \triangle magasságának is egyenlőnek kell lennie (miért?); következőképp $BE' \parallel AC$ -vel. Másrészt E' pontnak A -tól való távolsága AE is ismeretes. A feladatot tehát így fejtjük meg: Meghúzzuk B pontból a megtartandó AC oldallal párhuzamos BE' egyenest és ezt A pontból a megadott AE sugarú körrel E' pontban átmetszük. Az ekkép keletkező $A'E'C \triangle = ABC \triangle$ -gel. (Miért?)

2. Alakítsuk át $ABC \triangle$ -et (144. ábra) akképp, hogy az új háromszög az adott φ szöget és ezenkívül az eredeti háromszögnek egyik pl. AC oldalát magában foglalja.

144. ábra.

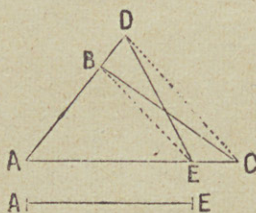


Minthogy a háromszög AC alapvonala itt is változatlan marad, a magasság sem változhatik meg. Ezért ha ADC a keresett \triangle , BD szükségképpen $\parallel AC$ -vel. Másrészt CAD szögnek egyenlőnek kell lennie φ -vel. A szerkesztés tehát ekkép történik: A megmaradó AC oldalra az adott φ szöget ráérjük és B ponton keresztül AC -vel párhuzamosan MN egyenest húzunk; ahol ez a φ szög másik (AD) szárát metszi, ott van a keresett háromszög harmadik szögpontja D .

Eszerint igen könnyen lehet bármely ferdeszögű háromszöget derékszögűvé, vagy egyenlőszárúvá átalakítani.

3. Alakítsuk át az adott $ABC \triangle$ -et (145. ábra) úgy, hogy az új háromszög az adott AE oldalt és az eredeti háromszögnek egyik, pl. A szögét tartalmazza.

145. ábra.



Tegyük föl, hogy ADE a keresett háromszög.

Világos, hogy AD -nek hosszabbnak kell lennie AB -nél, mert különben $ADE \triangle$ kisebb lenne $ABC \triangle$ -nél; márpedig a követelés szerint:

$$ADE \triangle = ABC \triangle.$$

Minthogy továbbá ezen háromszögeknek A szögük közös, tehát (49. §. 5. b.)

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE,$$

következéleg:

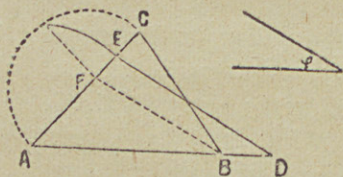
$$AB : AD = AE : AC,$$

azaz BE és DC egyeneseknek párhuzamosoknak kell lenniök (miért?). Úgyde E pont fekvése ismeretes, tehát a föladatot így fejthetjük meg: B pontot összekötjük E -vel, ezután a nyert egyeneshez C ponton keresztül CD párhuzamost húzzuk és meghosszabbítjuk AB oldalt, míg CD -t D pontban metszi; végre D pontot összekötjük E -vel és ekkor ADE a keresett háromszög.

Az új oldal természetesen nagyobb is lehet az eredeti háromszög megfelelő oldalánál; ekkor a fentebbi ábrában (145. ábra) ADE háromszöget az adott és ABC háromszöget a keresett háromszögnek tekinthetjük.

4. Alakítsuk át ABC háromszöget (146. ábra) úgy, hogy az adott φ szöget és az eredeti háromszögnek egyik pl. A szögét magában foglalja.

146. ábra.



Legyen ADE a keresett háromszög és $ADE \sphericalangle = \varphi$ -vel.

Világos, hogy DE a BC oldalt B és C pontok között szeli át, máskülönben $ADE \triangle$ okvetetlenül nagyobb lenne $ABC \triangle$ -nél, ami a föladat követelésével nem fér össze. Minthogy ABC és ADE háromszögekben A szög közös a

49. §. 5 b. pontjánál fogva:

$$ABC \triangle : ADE \triangle = AB \cdot AC : AD \cdot AE,$$

ámde föltesszük, hogy $ABC \triangle = ADE \triangle$, tehát $AB \cdot AC = AD \cdot AE$,

vagy:

$$AB : AD = AE : AC \dots (1)$$

Másrészt, ha B ponton keresztül DE -hez BF párhuzamost húzzuk, a háromszögek hasonlósága miatt:

$$AB : AD = AF : AE \dots (2)$$

Az (1) és (2) aránypárból:

$$AF : AE = AE : AC.$$

Azonban AF ismeretes, minthogy $ABF \sphericalangle = ADE \sphericalangle = \varphi$; ennél fogva az E pontot is megtalálhatom; evégből t. i. AC és AF egyenesek középarányosát (AE -t) kereselem meg. Meglevén E pont, ezen keresztül BF -hez párhuzamost húzván, ez úton ADE -t, azaz a keresett háromszöget megkapom, mert kimutathatom, hogy:

$$ADE \triangle = ABC \triangle.$$

Ez alapon oly háromszöget is alakíthatunk, mely területre nézve ABC háromszöggel, alakra nézve pedig egy másik $A'B'C'$ háromszöggel megegyező, azaz $= ABC \triangle$ -gel és $\sim A'B'C' \triangle$ -höz. Ugyanis az ABC háromszöget átalakítjuk akkép, hogy A szöveget egyelőre megtartva, második szögül B' -t vesszük, ezután az új háromszöget ismét átváltoztatjuk úgy, hogy a már meglévő B' szög mellé még a C' szöveget is magában foglalja. Az ekkép keletkező háromszögben a B' és C' szögek mellett A' is bent van, azaz a háromszög hasonló $A'B'C' \triangle$ -höz és azonkívül még egyenlő $ABC \triangle$ -gel is.

Végül az előadottak alapján bármely háromszög egyenlőoldalúvá alakítható át. (Mikép?)

5. Adott paralelogramma új alapú, egyenlő területű paralelogrammává alakítandó át.

E föladat megfejtése a 46. §. 3. pontján alapúl. Ha t. i. az oda való ábrában $ABGF$ -t az adott paralelogrammának és AJ -t az új alapnak tekintjük, $AJHD$ a kívánt paralelogramma. (Miért?) Miképen fejtendő meg a föladat?

Hatodik fejezet.

A beírt és körülírt idomokról.

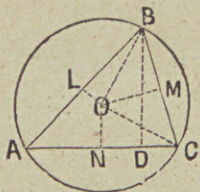
52. §. A beírt és körülírt háromszögekről.

Az olyan sokszögeket, amelyeknek oldalaik valamely kör húrjai, körbe írt, vagy röviden beírt idomoknak; azokat pedig, amelyeknek oldalaik egy és ugyanazon kör érintői, körülírt idomoknak nevezzük. A beírt sokszögeket a kör körül fogja, a körülírtaknál ellenben a kör van az idomba beleírva.

A beírt és körülírt idomok közül legfontosabbak a háromszögek, négyszögek és a szabályos sokszögek.

1. *A beírt háromszögekről.* Minden egyenes vonalú háromszög körbeírt háromszögnek tekinthető, mert minden háromszög köré kört alakíthatunk. (30. §. 6. pont.)

147. ábra.



Legyen ABC az adott háromszög. (147. ábra.) Három oldalának L, M, N felező pontjában az illető oldalakra merőlegeseket állítunk; ezek közös metszéspontja (O) mind a három szögponttól egyenlő távolságra van és ennél fogva a körülírt körnek a középpontja. (Miért?)

Hogy a sugár hosszát meghatározhassuk, húzzuk OB és OC sugarakat és B pontból AC -re BD merőlegest. Ezáltal ADB és OMB két hasonló háromszög keletkezik; mert $ADB \sphericalangle = BMO \sphericalangle = R$ és BAD kerületi szög $= \frac{1}{2} BOC \sphericalangle = BOM \sphericalangle$. Ennek folytán:

$$AB : BD = BO : BM.$$

Most, ha a háromszög oldalainak mértékszámait a, b, c -vel, a sugár hosszát r -rel, DB magasságot m -mel jelöljük, az utóbbi aránypárt így írhatjuk:

$$c : m = r : \frac{a}{2}; \text{ következésképp } r = \frac{ac}{2m}.$$

Tekintetbe véve, hogy a háromszög területe:

$$t = \frac{bm}{2}; \text{ tehát } m = \frac{2t}{b};$$

r -nek értéke így alakul:

$$r = \frac{abc}{4t}. \quad (I)$$

1212: a háromszög köré írt kör sugarát úgy számítjuk ki, hogy oldalhosszainak szorzatát a négyszeres területszámmal elosztjuk.

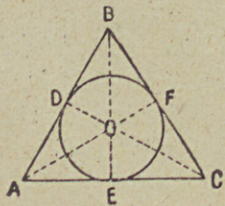
A 261. feladat szerint:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

miképpen alakul tehát az I. képlet 1. az egyenlőoldalú, 2. az egyenlőszárú, 3. a különböző oldalú háromszögre nézve?

2. *A körülírt háromszögekről.* Minden háromszögbe oly kört írhatunk, mely annak oldalait érinti.

148. ábra.



Mert, ha az adott ABC háromszögnek (148. ábra) A és C két szögét felezzük, AO és CO felező egyenesek O metszéspontja mind a három oldaltól egyenlő távolságra esik. Ugyanis, ha O pontból mind a három oldalra merőlegeseket vonunk, azaz $OD \perp AB$, $OE \perp AC$ és $OF \perp BC$ -re; ekkor $ADO \triangle \cong AEO \triangle$ (miért?), tehát $OD = OE$; továbbá

$CEO \triangle \cong CFO \triangle$, következésképpen: $OE = OF$ és ennélfogva $OD = OE = OF$, vagyis az O pontból OD sugárral alakított kör a háromszög oldalait érinti. Végre O -ból a harmadik szögponthoz vont OB a harmadik B szöget is felezi, mert BDO és BFO háromszögek egybevágók, tehát $OBD \sphericalangle = OBF \sphericalangle$. Eszerint: *a három szögfelező vonal ugyanazon közös pontban találkozik és e pont a háromszögbe írt kör középpontja.*

Nevezzük a kör sugarát ρ -nak, továbbá legyen $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ és ABC háromszögnek területszáma $= t$. Minthogy $ABC \triangle$ -nek területe $BOC \triangle$ és AOC és AOB háromszögek területeinek összegéből áll, világos, hogy:

$$t = \frac{1}{2} a\rho + \frac{1}{2} b\rho + \frac{1}{2} c\rho, \text{ vagy } t = \frac{(a+b+c)\rho}{2}$$

és ebből:

$$\rho = \frac{2t}{a+b+c} = \frac{t}{s} \quad (\text{II})$$

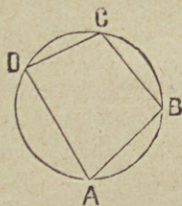
Azaz, *a háromszögbe írt kör sugarát úgy találjuk meg, hogy a háromszög területét ugyanannak fél kerületével elosztjuk.*

53. §. Beírt és körülírt négyszögek.

1. *A körbe írt négyszögben két átellenes szög összege 180° .*

Igy $ABCD$ négyszögben (149. ábra):

149. ábra.



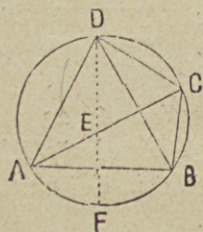
$A \sphericalangle + C \sphericalangle = 2R$ és $B \sphericalangle + D \sphericalangle = 2R$. Mert, ha két kerületiszög ívei együtt teljes kört alkotnak, a szögek összege $2R$.

Ebből kitűnik, hogy a körbe írt paralelogrammák szükségképpen derékszögűek.

2. *Viszont oly négyszög, melynek két átellenes szöge összesen 180° , körbe írt négyszögnek tekinthető.*

Itt csak azt kell kimutatnunk, hogy az említett négyszög három szögpontja által meghatározott körvonal a negyedik szögponthoz is átvonul; ezt pedig az előbbi tétel alapján közvetve lehet lebizonyítani. (Miképp?)

150. ábra.



3. *A körbe írt négyszögben az átlók szorzata egyenlő az átellenes oldalak szorzatának összegével.*

Mert, ha a körbe írt $ABCD$ (150. ábra) négyszögben AC és BD átlókat és D pontból DEF vonalat húzzuk, akképp, hogy $AF = \widehat{BC}$, következőleg $ADE \sphericalangle = CDB \sphericalangle$, két pár hasonló háromszög keletkezik. Ugyanis:

1. $ADE \triangle \sim BDC \triangle$, mert $CAD \sphericalangle = CBD \sphericalangle$ (mint ugyanazon ívhez tartozó kerületiszögek) és $ADE \sphericalangle = CDB \sphericalangle$.

2. $ECD \triangle \sim ABD \triangle$, mert $ACD \sphericalangle = ABD \sphericalangle$, (ugyanazon ívhez tartozó kerületiszögek) és $EDC \sphericalangle = ADB \sphericalangle$, (mert ha két egyenlő szöghöz ugyanazt az EDB szöveget hozzáadjuk, ismét egyenlő szögek keletkeznek).

Az 1. alatt kimutatott hasonlóságnál fogva:

$$AE : AD = BC : BD,$$

$$\text{vagy: } AE \cdot BD = AD \cdot BC. \quad (1)$$

A 2. alatt kimutatott hasonlóságnál fogva:

$$EC : CD = AB : BD,$$

$$\text{vagy: } EC \cdot BD = AB \cdot CD. \quad (2)$$

(1) és (2) egyenletet összeadva:

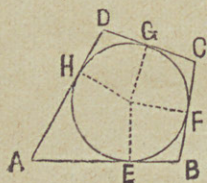
$$(AE + EC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

$$\text{vagy: } AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Ezen tétel, melyet föltalálója emlékére *Ptolemaeus*-féle tantételnek neveznek, a Pythagorasét is magában foglalja, mert ha a fentebbi egyenletet a derékszögű négyszögre alkalmazzuk, egyrészt az átellenes oldalak és másrészt az átlók egyenlősége következtében Pythagoras tételéhez jutunk.

4. *A körülírt négyszögben két átellenes oldal összege egyenlő a másik két átellenes oldal összegével.*

151. ábra.



Legyen $ABCD$ a körülírt négyszög (151. ábra), melynek oldalai a kört E, F, G, H pontokban érintik. A 35. §. 3. p. szerint: $AE = AH$, $BE = BF$, $CG = CF$, $DG = DH$. E négy egyenletet összeadva, lesz:

$$AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH;$$

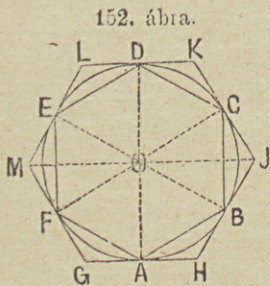
$$\text{azaz: } AB + CD = AD + BC.$$

Ebből önként foly, hogy csakis *oly parallelogrammába* lehet kört írni, melynek oldalai egyenlők, tehát csakis a négyzetbe és a rombuszba.

5. *Viszont: amely négyszögben két-két átellenes oldal összege egyenlő, abba oly kört írhatunk, mely a négyszög oldalait érinti.*

54. §. Szabályos sokszögek.

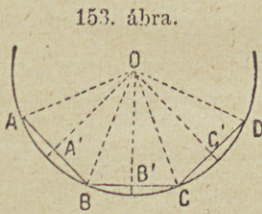
1. *Ha a kör területét n egyenlő részre osztjuk és az osztó pontokat sorban húrokkal összekötjük, beírt szabályos sokszög keletkezik; ha pedig az említett osztópontokon keresztül érintőket vonunk a körhöz, körülírt szabályos sokszög keletkezik.*



Legyen $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$ (152. ábra); ekkor a megfelelő húrok is egyenlők, tehát AB oldal $= BC = CD = \dots = FA$ oldallal; továbbá az egyenlő ívekhez tartozó kerületiszögek is egyenlők, azaz $\angle ABC = \angle BCD = \dots = \angle FAB$; következésképp $ABCDEF$ szabályos sokszög.

Ha pedig A, B, C, \dots osztáspontokon keresztül érintőket vonunk a körhöz, az ekkép támadt ABH, BCJ, CDK stb. háromszögek mind egybevágók, mert $AB = BC = CD = \dots$ és a szomszédos szögek BAH, ABH, CBJ, BCJ stb. szintén egyenlők. (33. §.) Ennek következtében $\angle AHB = \angle BJC = \angle CKD = \dots$; továbbá $AH = HB = BJ = JC = CK = \dots$ következésképp $HJ = JK = \dots$, vagyis a körülírt $GHJKLM$ sokszög is szabályos.

2. Minden szabályos sokszög beírt és egyszersmind körülírt sokszögnek tekinthető, azaz: minden szabályos sokszögbe és sokszög köré kört írhatunk.



Legyen $ABCD \dots$ (153. ábra) valamely szabályos sokszög kerületének egyik része. Ha ennek három szomszédos szögpontján, például, $A, B,$ és C pontokon keresztül kört vonunk (30. §. 6.), ez a sokszög többi szögpontján is átmegy. Mert ha az A, B és C pontok által meghatározott körnek AO, BO, CO sugarait meghúzzuk, $\triangle AOB \cong \triangle BOC$, tehát $\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2} \angle ABC$. Másrészt a sokszög szabályosságánál fogva $\angle ABC = \angle BCD$, tehát $\angle OCB = \frac{1}{2} \angle BCD$, és $\angle OCB = \angle OCD$; ezenkívül $BC = CD$ és $OC = OC$, következésképp $\triangle BOC \cong \triangle COD$, és $OC = OD$, vagyis az $A, B,$ és C pontok által meghatározott kör a negyedik (D) szögpontban is keresztül megy. Ugyanez igazolható a szabályos sokszög többi szögpontjára nézve is; szóval, az említett kör a sokszög valamennyi szögpontján átvonul.

Látni ebből, hogy a szabályos sokszög oldalai valamely kör egyenlő húrjai gyanánt tekinthetők. Úgyde az egyenlő húrok ugyanazon körben a középponttól egyenlő távolságra vannak, tehát az O -ból a sokszög oldalaira bocsátott merőlegesek egyenlők, azaz: $OA' = OB' = OC'$ stb.

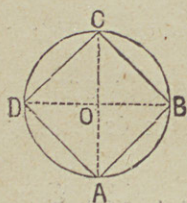
Ennélfogva ugyanebből az O pontból még egy másik kör is alakítható, mely a sokszög valamennyi oldalát érinti.

A beírt és körülírt körnek eme közös középpontját a szabályos sokszög középpontjának nevezzük. Az AOB , BOC , COD stb. szögeket melyek mind egyenlők, a szabályos sokszög középponti szögeinek mondjuk.

Az n -oldalú szabályos sokszögben minden középponti szög nyi, mint $\frac{360^\circ}{n}$. Eszerint a középponti szög könnyen kiszámítható.

3. A körbe írt szabályos négyszög. A körbe írt négyzetnek középponti szöge: $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$; szerkesztése tehát igen egyszerű.

154. ábra.



T. i. meghúzzuk az adott körben AC (154. ábra), majd erre merőlegesen BD átmérőt; akkor $ABCD$ a kívánt négyzet. Ebben Pythagoras tantétele szerint:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 = 2\overline{AO}^2$$

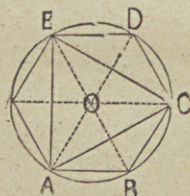
$$\text{tehát } AB = AO \cdot \sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2}$$

azaz: a beírt négyzet oldalhosszát úgy találjuk meg, hogy a körsugár hosszát $\sqrt{2}$ -vel megszorozzuk.

A beírt szabályos négyszög középponti szögeinek felezése által szabályos nyolcz-szöget, ebből a jelzett szög ismételt felezése által szabályos 16-, 32- ... szöget szerkeszthetünk.

4. A beírt szabályos hatszög és háromszög. Legyen AB (155. ábra) az adott körbe írt szabályos hatszög egyik oldala. Végpontjait a kör középpontjával összekötvén, AOB háromszög keletkezik; ebben AOB szög, mint a szabályos hatszög középponti szöge, $\frac{360^\circ}{6}$ vagyis

155. ábra.



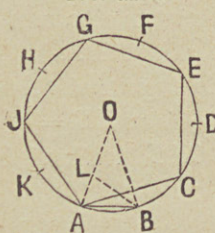
60° ; következőleg a másik két szög összege 120 foknyi; minthogy azonban $AO = BO$, azért mindegyik szög 60° -nyi, azaz AOB háromszög egyenlőoldalú, következőleg a beírt szabályos hatszög

oldala éppen akkora, mint a kör sugara. Ha tehát a kör sugarát a területre hatszor felmérjük, szabályos hatszög származik.

A szabályos hatszögből szabályos háromszöget alakíthatunk, ha az előbbinek páros (vagy páratlan) számú szögpontjait mellözve, a többi hármat összekapcsoljuk (pl. ACE \triangle). A szabályos hatszög középponti szögeinek ismételt felezése révén szabályos 12-szöget, 24-szöget stb., alakíthatunk.

5. A körbe írt szabályos tízszög és ötszög. A szabályos tízszög középponti szöge: $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$. Legyen $AOB \sphericalangle = 36^\circ$ (156. ábra), tehát AB a beírt szabályos tízszög egyik oldala. AOB háromszög egyenlő szárú lévén $OAB \sphericalangle = OBA \sphericalangle = \frac{1}{2} (180^\circ - 36^\circ) = \frac{1}{2} \cdot 144^\circ = 72^\circ$.

156. ábra.



Felezzük OBA szöget, ekkor $OBL \sphericalangle = LBA \sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot 72^\circ = 36^\circ$, következésképp OLB háromszög is egyenlőszárú, (mert $LOB = OBL$ szög 36 foknyi) és $OL = BL$. Szintúgy ABL háromszög is egyenlőszárú, mert LBA szög 36° -nyi, OAB szög 72° -nyi lévén, a harmadik \sphericalangle -nek szükségképpen 72° -nyinak kell lennie; ennek következtében $AB = BL = LO$.

A mondottaknál fogva: $AOB \triangle \sim ABL \triangle$ -höz, tehát:

$$BO : AB = AB : AL,$$

vagy:

$$AO : LO = LO : AL$$

azaz AO sugár L pontban folytonos arány szerint van osztva, és a nagyobbik szelet LO akkora, mint a beírt szabályos tízszög oldala. Ha tehát az adott kör sugarát folytonos arány szerint osztjuk (43. §.), a nagyobbik szelet a körbe írt szabályos tízszög oldalát adja.

A fentebbi aránypár alapján a szabályos tízszög oldalhossza is kiszámítható. Rövidség okáért legyen $AB = LO = x$; a sugár hossza $= r$, ekkor:

$$r : x = x : (r - x), \text{ tehát: } x^2 = r(r - x) \text{ és:}$$

$$x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2}$$

Mint hogy itt a kettős előjelből csak a $+$ -nak van helye, tehát

$$x = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

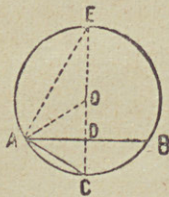
A szabályos tízszöggel az ötszög is meg van határozva, mert, ha az előbbinek páros szögpontjait elhagyjuk és a páratlanokat összekötjük, szabályos ötszög keletkezik.

A középponti szögek felezése révén a szabályos tízszögből 20-, 40-, 80- stb. oldalú szabályos sokszöget alakíthatunk.

A szabályos hatszög középponti szöge a kerület $\frac{1}{6}$ részének, a tízszögé pedig a kerület $\frac{1}{10}$ részének felel meg; úgyde $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$; e szerint a szabályos tizenötszög is könnyen megalakítható; t. i. a hatszög középponti szögéből a tízszögét kivonjuk. A tizenötszög segítségével a 30-szög, 60-szög stb. is megszerkeszthető.

6. Az adott körbe írt szabályos n szög oldalhosszából az ugyanazon körbe írt $2n$ -szög oldala is kiszámítható és viszont.

157. ábra.



Legyen AB (157. ábra) a körbe írt szabályos n -szög egyik oldala; ha erre O középpontból OC merőlegest bocsátjuk, ez úgy a hűrt mint a megfelelő körívet felezi; AC tehát a beírt $2n$ -szög egyik oldala. Húzzuk meg AO sugarat és AE hűrt, továbbá legyen rövideg okáért $AB = l_n$, $AC = l_{2n}$, $AO = CO = r$. — CAE derékszögű háromszögben:

$$\overline{AC^2} = CD \cdot CE, \text{ vagy } l_{2n}^2 = 2r \cdot CD.$$

Azonban $CD = OC - OD = r - OD$. Továbbá AOD derékszögű háromszögben:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2};$$

tehát: $CD = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2},$

következésképpen: $l_{2n}^2 = 2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} \right),$

vagy: $l_{2n}^2 = r^2 \left(2 - \sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}} \right);$

tehát: $l_{2n} = r \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}} \quad (1)$

Visszont, a beírt $2n$ -szög oldalhosszából a szabályos n -szög oldala is kiszámítható. Ugyanis ADC derékszögű háromszögben:

$$\overline{AD^2} = \overline{AC^2} - \overline{CD^2}, \text{ vagy:}$$

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = l_{2n}^2 - \overline{CD^2}.$$

Ámde $\overline{AC^2} = CD \cdot CE$; következésképpen:

$$CD = \frac{\overline{AC^2}}{CE} = \frac{l_{2n}^2}{2r};$$

ezen értéket helyettesítve, lesz:

$$\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = l_{2n}^2 - \left(\frac{l_{2n}^2}{2r}\right)^2 = l_{2n}^2 - \frac{l_{2n}^4}{4r^2}$$

vagy: $\frac{l_n^2}{4} = \frac{l_{2n}^2}{4} \left(4 - \frac{l_{2n}^2}{r^2} \right);$

következőleg :
$$l_n = l_{2n} \sqrt{4 - \frac{l_{2n}^2}{r^2}} \quad (2)$$

Lássuk ezen képletek alkalmazását néhány esetben.

A körbe írt szabályos négyszög oldalhossza : $l_4 = r\sqrt{2}$; tehát az ugyanazon körbe írt szabályos nyolcszög oldalhossza (l_8) az (1) képlet szerint :

$$l_8 = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \text{ továbbá } l_{16} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}};$$

$$l_{32} = r \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}; \text{ stb.}$$

A körbe írt szabályos hatszög oldalhossza : $l_6 = r$, tehát a beírt háromszög oldala a (2) képlet szerint : $l_3 = r\sqrt{3}$.

A körbe írt szabályos tízszög oldalhossza : $l_{10} = \frac{r}{2} (\sqrt{5}-1)$, tehát a (2) képlet alapján :

$$l_5 = \frac{r}{2} \left(\sqrt{5}-1 \right) \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2},$$

vagy, ha $(\sqrt{5}-1)$ -t a gyökjel alá visszük és a kijelölt műveleteket végrehajtjuk, lesz :

$$l_5 = \frac{r}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

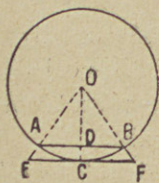
Említésre méltó, hogy ha a tízszög oldalhosszának másodhatványához a sugár négyzetét hozzáadjuk, összegül az ötszög oldalhosszának négyzetét kapjuk :

$$\text{Ugyanis } r^2 + \frac{r^2}{4} \left(\sqrt{5}-1 \right)^2 = \frac{r^2}{4} \left(10-2\sqrt{5} \right) = (l_5)^2.$$

Eszerint a körbe írt szabályos ötszög oldala egyszersmind átfogója azon derékszögű háromszögnek, melynek egyik befogója a sugár, másik befogója a tízszög oldala.

7. Az adott körbe írt szabályos sokszög oldalhosszából az ugyanannyi oldalú körülírt sokszög oldala is kiszámítható; és viszont.

158. ábra.



Legyen AB (158. ábra) a beírt szabályos n -szög egyik oldala; ha erre O középpontból OC merőleges sugarat vonjuk, és az utóbbinak C végpontján keresztül AB -hez EF párhuzamost húzzuk, mely a kellően meghosszabbított OA és OB sugarakat E , illetve F pontban metszi; akkor ezen EF a körülírt szabályos n szögnek egyik oldala, mert EF érinti a kört és ugyanazon középponti szögnek felel meg, mint az AB húr. (2. p.)

Rövidség okáért legyen $AB = l_n$, $EF = L_n$ és $AO = r$.

$AO'D$ és EOC háromszögek hasonlóságánál fogva:

$$EC' : AD = CO : DO, \text{ vagy:}$$

$$EF : AB = CO : DO, \text{ azaz:}$$

$$L_n : l_n = r : DO.$$

Azonban ADO derékszögű háromszögben:

$$DO = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2};$$

tehát:

$$L_n : l_n = r : \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}$$

következésképpen:

$$L_n = \frac{l_n \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}},$$

vagy:

$$L_n = \frac{2l_n}{\sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}} \quad (3)$$

Hasonlólag:

$$l_n = \frac{2L_n}{\sqrt{4 - \frac{L_n^2}{r^2}}} \quad (4)$$

Alkalmazzuk a (3) képletet néhány egyszerű esetben.

A háromszöget illetőleg: $l_3 = r\sqrt{3}$, $L_3 = 2r\sqrt{3} = 2l_3$.

A négyszöget illetőleg: $l_4 = r\sqrt{2}$, $L_4 = 2r$.

A hatszögre nézve: $l_6 = r$, $L_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3} = \frac{2}{3}L_3$.

8. *A beírt és körülírt szabályos sokszögek kerületének és területének kiszámítása.*

Legyen ismét (158. ábra) AB a beírt, EF a körülírt szabályos n -szögnek egy-egy oldala; az első ismét l_n , az utóbbit L_n -nel jelöljük; továbbá a beírt idom kerületét és területét k_n és t_n -nek a körülírt sokszög kerületét és területét K_n és T_n -nek nevezzük.

A szabályos sokszög kerületét megtaláljuk, ha egyik oldalának hosszát az oldalak számával megszorozzuk. Eszerint:

$$k_n = n l_n. \quad (5)$$

$$K_n = n L_n. \quad (6)$$

Vagy a (3) képlet tekintetbe vétele mellett:

$$K_n = \frac{2nl_n}{\sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}}. \quad (7)$$

Ebből egyszersmind kitűnik, hogy a *beírt szabályos n-szög területe szükségkép kisebb, mint a megfelelő körülírt szabályos n-szögé.* (Miért?)

A területet illetően a 2. pontban láttuk, hogy minden n -oldalú szabályos sokszög n egybevágó háromszögre osztható: ezért csak *egy* ilyen háromszög területét kell kiszámítanunk és azt n -szer vennünk.

A *beírt* sokszöghöz tartozó AOB háromszög területe: $t = \frac{1}{2} l_n \cdot OD$. OD -t ADO derékszögű háromszögből tudjuk meg, ugyanis:

$$OD = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} = \frac{r}{2} \sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}};$$

tehát:
$$t = \frac{rl_n}{4} \sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}};$$

következően a körbe írt *sokszög* területe:

$$T_n = \frac{nr l_n}{4} \sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}. \quad (8)$$

A *körülírt* sokszögre vonatkozólag EOF háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot L_n \cdot OC = \frac{1}{2} L_n \cdot r,$$

tehát az egész körülírt n -szög területe:

$$T_n = \frac{1}{2} nr L_n = \frac{1}{2} K_n r.$$

Azaz: *a körülírt szabályos sokszög területét megtaláljuk, ha annak területét a sugár felével megszorozzuk.*

Vagy ha L_n hosszát a *beírt* sokszög oldalhossza l_n által fejezzük ki:

$$T_n = \frac{nr l_n}{\sqrt{4 - \frac{l_n^2}{r^2}}}. \quad (9)$$

Például a háromszögre vonatkozólag: $t_3 = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}$, és $T_3 = 3r^2 \sqrt{3}$; a négyzögre nézve: $t_4 = \frac{1}{2} r^2$, és $T_4 = 4r^2$, azaz a körülírt háromszög területe 4-szer akkora, mint a *beírt* háromszögé, és a körülírt négyzet területe kétszer akkora, mint a megfelelő *beírt* négyzeté; stb.

A (8) és (9) képlet összehasonlításából kitűnik, hogy: *a beírt n-szög területe mindig kisebb, mint a megfelelő körülírt n-szögé.*

Hetedik fejezet.

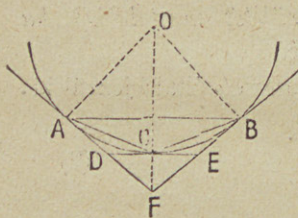
A kör kerülete és területe.

55. §. A körvonal mérése.

Minthogy a kört a sugara tökéletesen meghatározza, a körvonal *hossza* csak a sugár hosszától függhet. E szerint a kerület és sugár hossza között bizonyos meghatározott összefüggésnek kell léteznie; ennek megállapítását a körvonal *kiegyenesítésének* (rectificatio) nevezzük.

A kör mérésénél a fő nehézség abban áll, hogy *különnem* mennyiségeket kell egymással összehasonlítani, t. i. görbe vonalat egyenessel, ez pedig csak *közvetve*, a szabályos sokszögek segítségével végezhető. Ugyanis, ha valamely körbe szabályos sokszöget (pl. négyszöget) rajzolunk, és az oldalak számát ismételve megkettőztetjük: a származott sokszögek annál inkább közelednek a kör kerületéhez, minél inkább szaporodik az oldalak száma. Ugyanez áll a körülírt sokszögekről; ezek is annál közelebb simulnak a körhöz, minél inkább növekedik oldalaik száma; csak hogy a körülírt sokszögek kerülete az oldalszám szaporodtával folyton kisebbedik, a beírtak kerülete ellenben mindinkább növekszik.

159. ábra.



Szintúgy:

Ezt szorosan így bizonyítjuk be. Legyen AB a beírt szabályos n -szög egyik oldala (159. ábra), O a kör középpontja, és OC sugár $\perp AB$ -re; ekkor AC és BC egyenesek a beírt $2n$ -szög két oldalát ábrázolják. ABC háromszögben mint tudjuk $AB < AC + BC$, vagy $l_n < 2l_{2n}$ tehát $nl_n < 2nl_{2n}$, vagyis $k_n < k_{2n}$.

$$k_{2n} < k_{4n}$$

szóval: a körbeírt n oldalú szabályos sokszög kerülete mindig kisebb, mint az ugyanazon körbe írt $2n$ -szög kerülete.

Továbbá ha A , C és B pontokon keresztül a körhöz érintőket húzunk és ezeket kölcsönös átmetszésükig meghosszabbítjuk, AF

és FB egyenesek a körülírt szabályos n -szögnek egy-egy *fel*oldalával, DE pedig a körülírt $2n$ -szögnek egy *egész* oldalával egyenlők, azaz $AF = BF = \frac{1}{2}L_n$, és $DE = L_{2n}$.

Már most DEF háromszögben;

$$DE < DF + EF,$$

tehát egyszersmind;

$$AD + DE + EB < (AD + DF) + (EF + EB);$$

minthogy: $AD = DC = CE = EB$,

tehát: $4AD < AF + BF = 2AF$, vagy:

$$4 \frac{L_{2n}}{2} < 2 \cdot \frac{L_n}{2} \text{ azaz } 2L_{2n} < L_n:$$

n -nel szorozva lesz: $2n L_{2n} < nL_n$

vagyis:

$$K_{2n} < K_n.$$

Szintúgy bizonyítható be, hogy:

$$K_{4n} < K_{2n} \text{ stb.}$$

azaz: a körülírt n -oldalú szabályos sokszög kerülete mindig nagyobb a körülírt $2n$ -oldalú sokszög kerületénél.

Ennélfogva, ha úgy a beírt, mint a megfelelő körülírt sokszög oldalai számát ismételve megkettőztetjük, a beírt sokszögek kerülete folyton növekedik, a körülírtaké ellenben szakadatlanul csökken, azonban csak bizonyos határig, mert bármekkorára nőtt is az oldalak száma, a beírt idom kerülete mindig a körön belül van és ennél kisebb, a körülírt sokszögé ellenben a körön kívül esik és ennél nagyobb. (Archimédész elve.) E szerint úgy a beírt, mint a körülírt sokszög kerülete az oldalszám szaporodtával ugyanazon közös határhoz: a kör kerületéhez közeledik, és e kör mindig a beírt és körülírt sokszögek kerülete közé esik. Világos tehát, hogy a beírt és körülírt sokszögek oldalai számának kellő szaporításával a kör kerületét tetszőleges szűk határok közé szoríthatjuk.

Ezekután legközelebbi tündönk: két megfelelő szabályos sokszög kerületét kiszámítani. Erre nézve a legcélszerűbb a beírt szabályos hatszögből kiindulni, mert ennek kerülete végszerű (rationalis) szám, feltéve, hogy r végszerű. Kiszámítjuk tehát először a beírt és körülírt szabályos hatszög kerületét, ezután a beírt és körülírt szabályos tizenkétszög, továbbá a beírt és körülírt szabályos huszonnégyszög stb. kerületét.

Az eredményt a következő tábla mutatja:

n	A beírt n -szög kerülete	A körülírt n -szög kerülete
6	$2r \cdot 3$	$2r \cdot 3 \cdot 4641016$
12	$2r \cdot 3 \cdot 1058285$	$2r \cdot 3 \cdot 2153903$
24	$2r \cdot 3 \cdot 1326286$	$2r \cdot 3 \cdot 1596599$
48	$2r \cdot 3 \cdot 1393502$	$2r \cdot 3 \cdot 1460862$
96	$2r \cdot 3 \cdot 1410319$	$2r \cdot 3 \cdot 1427146$
192	$2r \cdot 3 \cdot 1414524$	$2r \cdot 3 \cdot 1418730$
384	$2r \cdot 3 \cdot 1415576$	$2r \cdot 3 \cdot 1416627$
768	$2r \cdot 3 \cdot 1415838$	$2r \cdot 3 \cdot 1416101$
1536	$2r \cdot 3 \cdot 1415904$	$2r \cdot 3 \cdot 1415970$
3072	$2r \cdot 3 \cdot 1415921$	$2r \cdot 3 \cdot 1415937$
6144	$2r \cdot 3 \cdot 1415925$	$2r \cdot 3 \cdot 1415929$
12288	$2r \cdot 3 \cdot 1415926$	$2r \cdot 3 \cdot 1415927$
stb.	stb.	stb.

A kör kerületének keresett hossza (k) e tábla második és harmadik rovatának megfelelő számai közé esik. Látni való, hogy e számok mind jobban és jobban közelednek egymáshoz és ha a számítást az előadott mód szerint folytatjuk, a kör kerületét oly pontos határértékek közé szoríthatjuk, amint akarjuk. Az utolsó sor szerint:

$$k > 2r \cdot 3 \cdot 1415926 \text{ és}$$

$$k < 2r \cdot 3 \cdot 1415927$$

tehát hat tizedesnyi pontossággal:

$$k = 2r \cdot 3 \cdot 141592.$$

A kerület és az átmérő arányát, vagyis $\frac{k}{2r}$ hányadost π -vel szokás jelölni; eszerint:

$$\frac{k}{2r} = 3 \cdot 1415926 \dots = \pi$$

következésképp:

$$k = 2r \cdot \pi \quad (1)$$

A mondottak szerint π végszerűtlen, azonban *állandó* szám, azaz minden körre nézve ugyanazon értékű. Az (1) egyenlet értelmében a kör hosszát úgy számítjuk ki, hogy az átmérőt ($2r$ -t) π -vel megszorozzuk.

π -nek értékét az egyiptomi *Almes*-féle papyruson $(16 : 9)^2 = 3 \cdot 1604$ -nek, *Archimedes*-nél (212. év körül Kr. e.) $3\frac{1}{7}$ -nek találjuk, ami a fentebbi tábla 4-dik sorának felel meg. *Metius* számítása szerint (1550. év Kr. után) $\pi = \frac{355}{113}$; ezen

érték a hatodik tizedesig szabatos, ennél fogva gyakorlati számításokra elég pontos. Még pontosabb *Ludolf* van Ceulen számítása (1596. évben), szerinte:

$$\pi = 3'14159\ 26535\ 89793\ 23816\ 26133\ 83279\ 50288\dots$$

Az ő tiszteletére π -t *Ludolf-féle számnak* is nevezik. Felsőbb mennyiség-tani uton *Vega* 140, *Dahse* 200, *Richter* 500 tizedesig határozta meg π értékét.

A fentebbi képletből továbbá következik, hogy:

$$2r = \frac{k}{\pi} \text{ és } r = \frac{k}{2\pi}. \quad (2)$$

Ha a kör sugara = a hosszegységgel, vagyis $r = 1$, ez esetben $k = 2\pi$, tehát $\pi = \frac{1}{2}k$, azaz π egyszersmind azon kör fél-kerületét fejezi ki, melynek sugara = 1.

Két különböző kört hasonlítva össze egymással, és a megfelelő sugarat R - illetve r -rel, a körök kerületét K - és k -val jelölve

$$K = 2R\pi \text{ és } k = 2r\pi;$$

tehát:

$$K : k = 2R : 2r = R : r.$$

azaz: a körök kerületei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő átmérők, vagy sugarak.

56. §. A körívek mérése.

A 32. §. szerint ugyanazon kör ívei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő középponti szögek. Ha tehát valamely kör két ívének hosszát l - és l_1 -gyel, a megfelelő két középponti szöget α - és α_1 -gyel jelöljük:

$$l : l_1 = \alpha^\circ : \alpha_1^\circ.$$

Ennek alapján az α° szöghöz tartozó ív hosszát (l -t) azonnal kiszámíthatjuk, mihelyt egy meghatározott α_1° szöghöz tartozó ív hosszát (l_1 -t) ismerjük. Ám ha $\alpha_1^\circ = 360^\circ$, a megfelelő körív ismeretes; mert ez esetben (55. §.) $l_1 = 2r\pi$. Tehát:

$$l : 2r\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$$

következésképpen:

$$l = \alpha \cdot \frac{2r\pi}{360^\circ} = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ} r. \quad (3)$$

Viszont, ha l és r ismeretes, kiszámíthatjuk α -t, t. i.

$$\alpha = \frac{l}{r} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}. \quad (4)$$

A fönnebbi egyenletekben előforduló $\frac{\pi}{180^\circ}$ és $\frac{180^\circ}{\pi}$ törtnek mér-tani jelentésük van. Ugyanis az előbbieket szerint π oly kör fél kerületével egyenlő, melynek sugara = 1; továbbá tudjuk, hogy a fél kör-

kerületnek 180° -nyi középponti szög felel meg; ezek szerint $\pi : 180^\circ$ nem egyéb, mint az 1° -nyi szöghöz tartozó körív hossza, midőn a sugár hossza $= 1$; mert ha a 180° -nyi körív hossza π , világos, hogy az 1° -nyi ív hossza $= \frac{\pi}{180^\circ}$, tehát 1° ív $= \text{arc } 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$.

Viszont $\frac{180^\circ}{\pi}$ azon középponti szög fokszámát jelenti, melynek íve 1, föltéve mindig, hogy $r = 1$. Az osztást végrehajtvá:

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44.8'' \quad (5)$$

Továbbá:

$$1' \text{ ív} = \text{arc } 1' = \frac{\pi}{180.60} \text{ és } 1'' \text{ ív} = \text{arc } 1'' = \frac{\pi}{180.60.60'}$$

föltéve ismét, hogy $r = 1$.

A számítások könnyítéseül célszerű az 1° -nyi, $1'$ -nyi és $1''$ -nyi ív hosszát egyszer s mindenkorra kiszámítani. E számítás következő eredményre vezet:

$$\left. \begin{array}{l} \text{arc } 1^\circ = 0.01745329252 \dots \\ \text{arc } 1' = 0.00029088821 \dots \\ \text{arc } 1'' = 0.00000484814 \dots \end{array} \right\} \text{ ha: } r = 1.$$

Ezen értékek alapján a $2^\circ, 3^\circ \dots 180^\circ$ ívek, továbbá a $2', 3', \dots 60'$ -nyi ívek és végül a $2'', 3'' \dots 60''$ -nyi ívek könnyen kiszámíthatók és kényelmes használat céljából táblázatosan összeállíthatók. Ilyen ívhossz-táblázat a legtöbb logaritmus-könyvben található.

Valamint a körkerületek akként aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő sugarak, úgy az egyenlő középponti szögekhez tartozó ívek *is úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő körök sugarai.*

$$\text{Mert: } l : 2r\pi = \alpha^\circ : 360^\circ,$$

továbbá egy másik körre vonatkozólag:

$$L : 2R\pi = \alpha^\circ : 360^\circ; \text{ tehát}$$

$$L : l = R : r. \quad (6)$$

57. §. A kör területe.

Az eddig előadottak után könnyű belátnunk, hogy a beírt és körülírt szabályos sokszögek *területei* is annál inkább közelednek a kör területéhez, minél inkább szaporodik az oldalak száma. Ezért a kör *területének* kiszámításánál is a szabályos sokszögekből indulunk ki.

Nyilvánvaló, hogy a beírt sokszög területe kisebb, a körülírté ellenben nagyobb a kör területénél. Ámde bármely szabályos

sokszög területszámát úgy találjuk meg, hogy *kerülete hosszát a középponti háromszögek félmagasságával megszorozzuk* (54. §. 8. p.) E szerint a *körülírt* sokszögek területe az oldalszám szaporodtával folyton *kisebbedik*; mert kerületük folyton csökken (55. §.), a középponti háromszögek magassága pedig állandóan a kör sugara. Ellenben a *beírt* sokszögek kerülete az oldalszám növekedtével mindinkább *nagyobbodik*; mert ez esetben a kerület hossza és a háromszögek magassága egyaránt növekedik. De sem a körülírt sokszögek területének kisebbedése, sem a beírtak területének nagyobbodása nem lehet határtalan; ellenkezőleg úgy a körülírt, mint a beírt sokszögek területe az oldalszám szaporodtával ugyanazon közös *határhoz, a kör területéhez* közeledik.

Minthogy a körülírt sokszög területszáma annyi, mint a kerület szorozva a fél sugárral, e kerület határa pedig a kör kerülete, melyet tetszés szerinti pontossággal kiszámíthatunk: ennél fogva a *kör területét is úgy találjuk meg, hogy a kör kerületének hosszát a fél sugárral megszorozzuk*. Azaz, ha a kör területszámát t -vel, kerületét k -val, a sugár hosszát r -rel jelöljük: $t = \frac{1}{2} rk$; mivel pedig $k = 2r\pi$; tehát:

$$t = r^2\pi; \quad (7)$$

szavakkal: *a kör területét úgy számíthatjuk ki, hogy a sugár második hatványát π -vel megszorozzuk*. Ezt egyébként az 54. §. mintája szerint szabatosabban is bebizonyíthatjuk, ha a beírt és a körülírt szabályos 6-szög, 12-szög, 24-szög stb. területét tényleg kiszámítjuk.

A fentebbiek szerint a kör területe oly háromszög területével egyenlő, melynek alapvonala a kör kerülete, magassága a kör sugara. Másrészt tudjuk, hogy minden *háromszöget* egyenlő területű négyzettel lehet átalakítani; e szerint a kört is egyenlő területű négyzettel változtathatjuk. Csakhogy a kör eme *négyyszögesítése* (quadratura circuli), mellyel úgy az ó- mint az új-kor mennyiségtudósai sokat foglalkoztak, csak *számítással végezhető*, mert a *körkerület hosszát mértani szerkesztéssel szabatosan meghatározni lehetetlen*. Ha az egyenlő területű négyzet oldalhosszát a -val jelöljük, a^2 -nek egyenlőnek kell lennie $r^2\pi$ -vel, tehát:

$$a = r \sqrt{\pi} = r \cdot 1.7724538 \dots$$

Viszont, a kör adott területéből a sugár hossza is kiszámítható, mert a fentebbi képlet szerint:

$$r = \sqrt{\frac{t}{\pi}} = 0.5641896 \dots \sqrt{t} \quad (8)$$

Végül hasonlítsuk össze két kör T és t területét, ha megfelelő sugaraik R és r . Minthogy:

$$T = R^2\pi \text{ és } t = r^2\pi;$$

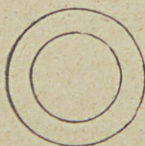
Azért:

$$T : t = R^2 : r^2,$$

azaz: két kör területe úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő sugarak másodhatványai.

58. §. A kör részeinek területe.

1. *A körgyűrű területe.* Körgyűrűnek (160. ábra) a sík azon részét nevezzük, mely két koncentrikus kör kerülete közé esik. Ha a két kör sugarát R - és r -rel jelöljük, a körgyűrű területe:



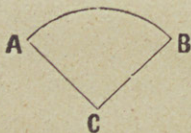
$$t = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi, \\ \text{vagy: } t = (R + r)(R - r)\pi. \quad (9)$$

Minthogy $2R\pi = K$, és $2r\pi = k$, következőleg $(R+r)\pi = \frac{1}{2}(K+k)$, tehát a fennebbi egyenletet így is írhatjuk:

$$t = \frac{K + k}{2}(R - r),$$

azaz: a körgyűrű területe oly trapéz területével egyenlő, melynek két párhuzamos oldala a körök kerületeivel, magassága a gyűrű szélességével egyenlő.

2. *A körcikk területe.* Körcikknek, vagy körsectornak a kör olyan részét nevezzük, melyet két sugár, meg egy körív határol. (161. ábra.)



A 32. §. szerint könnyű kimutatni, hogy az ugyanazon körből kihalított két cikk területe úgy aránylik egymáshoz, mint a megfelelő középponti szögek. Eszerint, ha valamely körcikk területszámát t -vel, középponti szögét α -val, sugarát r -rel jelöljük, a következő aránypárt állíthatjuk fel:

$$t : r^2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ;$$

$$t = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} r^2\pi.$$

amelyre $\alpha^\circ : 360^\circ = l : 2r\pi$, (ha l i. a körív hosszát l -vel jelöljük), ennél fogva:

$$t : r^2\pi = l : 2r\pi, \text{ és ebből}$$

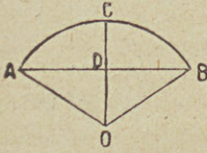
$$t = \frac{1}{2}lr,$$

(10)

tehát: a körcikk területe oly háromszög területével egyenlő, melynek alapvonala: a körcikk íve, magassága: a kör sugara.

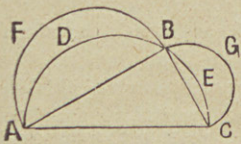
3. A körszelet (segmentum) területe. Körszelet (162. ábra) a kör része, mely egy körív és a hozzá tartozó húr közé esik. Minden körszelet egy körcikk részéül tekinthető; így ABC körszelet $AOBC$ körszelet egy része. A körszelet területét megtaláljuk, ha az illető körcikk területéből α középponti háromszög területét kivonjuk.

162. ábra.



4. Hippokratés tétel. Ha valamely derékszögű háromszög három oldalára félköröket alakítunk: a befogók fölött támadt holdacsakáknak összesen akkora területük van, mint a háromszögnek.

163. ábra.



Mert legyen ABC (163. ábra) valamely derékszögű háromszög; az 57. §-nál fogva az AC átfogóra rajzolt félkör területe $= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} AC)^2 \pi = \frac{1}{8} AC^2 \pi$; az AB befogóra rajzolt félkör területe $= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} AB)^2 \pi = \frac{1}{8} AB^2 \pi$ és a BC befogóra rajzolt félkör területe $= \frac{1}{2} (\frac{1}{2} BC)^2 \pi = \frac{1}{8} BC^2 \pi$.

Ámde Pythagoras tétele szerint:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;$$

ha ezen egyenletet $\frac{1}{8}\pi$ -vel szorozzuk:

$$\frac{1}{8} AC^2 \pi = \frac{1}{8} AB^2 \pi + \frac{1}{8} BC^2 \pi,$$

vagyis:

$$ABC \text{ félkör} = AFB \text{ félkör} + BGC \text{ félkör.}$$

Vonjuk ki ezen egyenlet mindkét oldalából az ADB és BEC -vel jelölt körszeleteket, marad:

$$ABC \triangle = AFBD \supset + BGCE \supset.$$

Feladatok a síkmértanhoz.

I. Fejezet. A szögekről.

1. Hány másodperc az $\alpha = 3^\circ 27' 10''$ szög?
2. Hány fok, perc és másodperc $1827''$?
3. $\alpha = 57^\circ 37' 18''$, $\beta = 48^\circ 10' 26''$; mennyi $\alpha + \beta$ és $\alpha - \beta$; $\frac{\alpha + \beta}{2}$ és $\frac{\alpha - \beta}{2}$?
4. Mily nagy szöget zár be a két óramutató 4 óraker, 7 óraker, 1 óra 15 percker, 3 óra 45 percker?
5. Mennyivel nagyobb 270° , mint $\alpha = 69^\circ 42' 56''$ és $\beta = 75^\circ 36' 35''$ szögek összege?

6. Három szög összege $159^{\circ} 32'$; az első szög 59° , mekkora a másik kettő, ha ezek egyenlők?

7. Mennyi α , ha $2R + \alpha = 3R - \alpha$?

8. $\alpha + \beta = 72^{\circ} 38' 18''$, $\alpha - \beta = 24^{\circ} 18' 58''$; mennyi α és β ?

9. $\alpha = 18^{\circ} 10' 12''$, $\beta = 26^{\circ} 18' 9''$; mennyi $\alpha - 3\beta$?

10. Mekkora az $59^{\circ} 36' 20''$ -nyi szögnek a pótló szöge?

11. Mekkora a $75^{\circ} 39' 45''$ -nyi szögnek a pótló szöge?

12. Mekkora két pótló szög, amelyeknek különbsége $1^{\circ} 6' 40''$?

13. Mekkora a $80^{\circ} 36' 20''$ -nyi szögnek és mekkora a $130^{\circ} 26' 48''$ -nyi szögnek a mellékszöge?

14. Mekkora két mellékszög, amelyeknek különbsége $\alpha) 18^{\circ} 50' 32''$;

$\beta) 151^{\circ} 32' 40''$?

15. Valamely szög $90^{\circ} + \alpha$; mi a mellékszöge?

16. Két mellékszög aránya $2:7$; mekkora mindegyik?

17. Két mellékszög közül az egyik kétszerese a másiknak; mily nagyok e szögek?

18. Bizonyítsuk be, hogy a mellékszögeket felező egyenesek egymásra merőlegesek.

19. Ha valamely egyenes egyik pontjából az egyenes ugyanazon oldalán két egyenlő szöget ellenkező irányban felmérünk és az egyenesre ugyanebben a pontban merőlegest állítunk, ekkor ez felezi a két szög középső szárát által bezárt szöget.

20. A két egymást metsző egyenes által alkotott négy szög közül egyik $\alpha = 38^{\circ} 28' 18''$; mily nagy a többi szög?

21. Bizonyítsuk be, hogy három egymást egy pontban metsző egyenesnél bármely három nem szomszédos szög összege 180° .

22. Bizonyítsuk be, hogy a szög szögpontjában a szöveget felező egyenesre emelt merőleges a mellékszöveget felezi.

23. Ha a derékszög két szára közt, szögpontján át egyenest húzunk, a keletkezett négy szög közül két-két átellenes szögnek a különbsége R .

24. Bizonyítsuk be, hogy valamely szög felezője annak csúcsszögét is felezi.

25. Ha valamely szög szögpontjában mindkét szárra merőlegeseket állítunk, az ezek által bezárt szög egyenlő az adott szöggel, vagy kiegészíti azt 180° -ra, aszerint, amint a merőlegesek az adott szög egyik szárának ugyanazon, vagy két különböző oldala felé haladnak.

II. Fejezet. A párhuzamos egyenesekről.

26. Ha két párhuzamos egyenest ugyanazon harmadikkal átszelünk és az egyik származott szög $102^{\circ} 30' 20''$; mekkora a többi hét?

27. Bizonyítsuk be, hogy, ha két párhuzamos egyenest egy harmadikkal átszelünk, akkor:

$a)$ a társszögek felező egyenesei merőlegesek egymásra;

$\beta)$ a váltó-, vagy a megfelelő szögek felező egyenesei egymással párhuzamosak.

28. Bizonyítsuk be, hogy a párhuzamos szárakkal bíró szögek felezői vagy párhuzamosak egymással, vagy pedig egymásra merőlegesek.

29. Ha valamely szög egyik szárának valamely pontjából az adott szög mindkét szárára merőlegeseket szerkesztünk, az ezek által bezárt szög vagy egyenlő az adott szöggel, vagy 180° -ra egészíti ki azt, aszerint, amint a merőlegesek az első szár egyik, vagy mindkét oldalán haladnak.

III. Fejezet. Az idomokról és az egybevágóságról.

I. A háromszög.

A háromszög belső és külső szögei. 30. Valamely ferdeszögű háromszögben $\alpha = \frac{\beta}{2}$, $\gamma = 51^\circ 56' 14''$; mennyi α és β ?

31. Valamely háromszögben az egyik szög a derékszögnek $\frac{5}{8}$ -od része, a másik $32^\circ 45'$; mekkora a harmadik szög?

32. Bizonyos háromszög szögeinek aránya $1:3:5$; mekkorák a szögek? Mekkorák, ha az arány $2:5:3:4:2$?

33. Valamely derékszögű háromszög egyik hegyes szöge $56^\circ 12' 6''$; mennyi a másik?

34. Valamely háromszögben két szög fél összege $58^\circ 12' 15''$, ugyanazok fél különbsége $28^\circ 10' 54''$; mekkorák a háromszög szögei?

35. Valamely háromszög egyik szöge α ; mekkora ama szög, amelyet a másik két szöget felező egyenesek alkotnak?

36. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögben az egyik szöget felező egyenes és az ugyanazon szög szögpontjából vont magasság a másik két szög fél különbségével egyenlő szöget zár be.

37. Mily nagyok a derékszögű háromszög hegyes szögei, ha az átfogónál fekvő egyik külső-szög $56^\circ 16' 23''$?

38. A háromszög egyik külső-szöge $118^\circ 26'$, a vele szemben fekvő belső-szögek egyike $82^\circ 33' 16''$. Mily nagyok a háromszög szögei?

39. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög egyik külső-szögét felező egyenes a szöggel szemben fekvő oldallal oly szöget alkot, amely a külső-szöggel szemben fekvő belső-szögek fél különbségével egyenlő.

40. Az ABC háromszög B és C szögének felező egyenesei $90^\circ + \frac{A}{2}$ nagyságú szöget zárnak be.

A háromszög átellenes alkotórészeinek összefüggése. 41. Az egyenlő szárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög $72^\circ 26' 18''$. Mily nagy a másik két szög?

42. Az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő egyik szög $53^\circ 16'$; mekkora a másik két szög?

43. Az egyenlőszárú háromszög egyik szárának meghosszabbítása folytán keletkező külső-szög $132^\circ 16' 38''$; mekkorák a háromszög szögei?

44. Valamely egyenlőszárú háromszögben az alappal szemben fekvő szög a) kétszer akkora, b) fél akkora, mint az alapon nyugvó egyik szög. Mily nagyok a háromszög szögei?

45. Az egyenlőszárú háromszög alapjánál fekvő egyik szög α ; mily nagy az átellenes szögpontnál szerkesztett külső-szög?

46. Ha a derékszögű háromszögben az egyik hegyes szög kétszer akkor mint a másik, akkor az átfogó kétszer akkora mint a kisebbik befogó. (Ugyana a háromszöget a nagyobbik befogó mellé szerkesztjük stb.!)

47. Bizonyítsuk be, hogy az egyenlőszárú háromszög egyik szárának meghosszabbítása által nyert külső-szög felező egyenese párhuzamos az alaphoz.

48. Ha az egyenlőszárú háromszögben az alappal átellenes szögpontra keresztül az alappal párhuzamost húzunk, úgy ez a külső-szöveget felezi.

49. Az a szög, melyet az egyenlőszárú háromszögben az egyik szárára bocsátott magasság az alappal befog, fele az alappal szemben fekvő szögnek.

50. Ha valamely derékszögű háromszögben az átfogót mindkét végpontján túl a szomszédos befogóval hosszabbítjuk, és a nyert két végpontot a derékszög szögpontjával összekötjük, az ezen összekötő egyenesek által befogott szög 135° .

51. Ha valamely egyenlőszárú háromszög egyik szárát az alappal szemközt fekvő szögpontra túl saját hosszával hosszabbítjuk, és a nyert végpontot az alap végpontjával összekötjük, a nyert egyenes merőleges az alapra.

52. Ha valamely háromszög két oldalát a közös szögpontra túl hosszabbítjuk, és pedig mindegyiket a másiknak a hosszával és a nyert végpontokat a harmadik oldal két végpontjával összekötjük, a nyert egyenesek egymással párhuzamosak.

53. Ha az egyenlőoldalú háromszögnek minden oldalára a végponttól kezdve egyenlő irányban egyenlő darabokat felmérünk, és a nyert pontokat a háromszög átellenes szögpontjával összekötjük, az ezen egyenesek által határolt háromszög egyenlőoldalú.

54. A derékszögű háromszögben a derékszög szögpontjából kiinduló középvonal az átfogó felével egyenlő. (Hosszabbítsuk meg a középvonalat saját hosszával és a végpontot kössük össze a befogó egyik végpontjával.)

55. A háromszög minden szögfelező egyenese az átellenes oldalt két részre osztja, melyek mindegyike kisebb, mint a szomszédos oldal. (A külső szög nagyobb az átellenében fekvő belső-szögek egyikénél!)

A háromszög két oldalának összege. 56. Vizsgáljuk meg, lehet-e a következő három távolság valamely háromszögnek három oldala?

a) 38·32 m, 35·09 m, 46·59 m. b) 130·30 m, 260·15 m, 125·15 m. c) 62·4 m, 77·6 m, 114·5 m. d) 62·4 m, 77·6 m, 110·5 m.

57. Legyen a , b és c három távolság. Ha $a = 24·2$ m, $b = 32·8$ m, mekkorának vehető c , hogy a három távolság valamely háromszög három oldala lehessen?

58. Bármely háromszög középvonala kisebb, mint a két szomszédos oldal fél összege.

59. A három középvonal összege nagyobb a háromszög fél kerületénél, azonban kisebb, mint az egész kerület. (Középvonal az az egyenes, mely a háromszög valamely oldalfelező pontját az átellenes szögpontra összeköti.)

60. A háromszögön belül fekvő ponttól a három szögponthoz szerkesztett egyenesek összege nagyobb a háromszög fél kerületénél, ámde kisebb, mint az egész kerület.

61. A háromszög bármely magassága kisebb, mint a két szomszédos oldal fél összege, és a három magasság együttvéve kisebb, mint a háromszög kerülete, azonban nagyobb mint annak fél kerülete.

62. Ha valamely háromszögben minden oldalán egy-egy pontot választunk, és e három pontot egyenesekkel összekötjük, az ezáltal keletkezett háromszög kerülete kisebb, mint az eredeti háromszög kerülete.

A háromszögek egybevágósága. 63. Az egyenlőszárú háromszög száraitra vont magasságok egymással egyenlők.

64. Az egyenlőszárú háromszögben az alap mellett fekvő két szögfelező egyenlő egymással és egyenlő darabokat vágnak le a szárákból.

65. Ha az egyenlőoldalú háromszögben a szögpontokból kiindulva minden oldalra ugyanabban a rendben egyenlő távolságokat felmérünk, és a nyert pontokat egyenesekkel összekötjük, a származó háromszög szintén egyenlőoldalú.

66. Ha az előbbi esetben az oldal harmadrészét mérjük fel, akkor az új háromszög oldalai merőlegesek az adott háromszög oldalaira.

67. Az egyenlőoldalú háromszög magasságai egyenlők.

68. Ha egy háromszögben az egyik oldalához tartozó középvonalra ezen oldal két végpontjából merőlegeseket állítunk, ezek hosszúságai egyenlők.

69. Ha két párhuzamos egyenes két pontját összekötjük és ezt az összekötő egyenest felezzük, akkor minden, a felező ponton át vont egyenesnek a párhuzamosok közt fekvő részét ezen pont felezi.

70. Két háromszög egybevágó, ha azokban egy-egy oldal és a másik két oldalra bocsátott magasságok egyenlők.

71. Két háromszög egybevágó, ha azokban két-két oldal és a harmadik oldalhoz tartozó magasságok egyenlők.

72. A háromszög három oldalát felező pontokat, összekötő egyenesek a háromszöget négy egybevágó háromszögre osztják.

73. Ha valamely háromszögben két magasság egyenlő, a háromszög egyenlőszárú.

Szerkesztési feladatok. 74. A háromszög két adott szögéhez keressük meg szerkesztés útján a harmadikat.

75. Két szög összege: α , különbsége: β ; szerkesztés útján meghatározandó, mekkora a két szög?

76. Szerkesszünk egyenlőoldalú háromszöget:

a) Az adott oldalból. — b) Az adott magasságból.

77. Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget:

a) Az alap és a mellette fekvő szögből. — b) Az alap és a szárból. —

c) Az alap és az átellenes szögből. — d) Az alap és a hozzátartozó magasságból. — e) Az alaphoz tartozó magasságból és az alappal átellenes szögből.

78. Szerkesszünk derékszögű háromszöget:

a) Az átfogó és egy befogóból. — b) Az átfogó és egy hegyes szögből. —

c) A két befogóból. — d) Egy befogó és a mellette fekvő, vagy az átellenes szögből. — e) Egy befogó és az átfogóhoz tartozó magasságból.

79. Szerkesszünk háromszöget:

a) Egy oldal, a mellette fekvő egyik szög és az oldalhoz tartozó magasságból. — b) Egy oldal, az átellenes szög és egy másik oldalhoz tartozó magasság-

ból. — c) Egy szög és a bezáró oldalakhoz tartozó két magasságból. — d) Két oldal és az egyikhez tartozó magasságból. — e) Két oldal és a harmadikhoz tartozó magasságból.

80. Adva van három pont: A , B és C ; A -n keresztül B és C között húzzunk egyenest akkép, hogy a másik két pont ezen egyenestől egyenlő távol legyen.

81. Az A szög egyik szárán adva van P pont; határozzuk meg a másik szárán X pontot úgy, hogy a) $AX = PX$, 2) $AX + PX$ adott hosszúságú legyen.

82. Olyan egyenlőszárú háromszög szerkesztendő, melynek kerülete meghatározott hosszúságú legyen.

83. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha az átfogó és a két befogó összege, vagy különbsége ismeretes.

84. Háromszög szerkesztendő, ha az alapvonal (AB), a másik két oldal különbsége (MN) és az alapvonalon fekvő kisebb szög (α) ismeretes.

II. A négyszög.

A négyszög szögei és átlói. 85. Valamely négyszögben két szög összege $118^\circ 32'$; a másik két szög egyenlő; mekkorák az utóbbi szögek?

86. A négyszög szögeinek aránya $1 : 2 : 4 : 5$; mekkorák e szögek?

87. Valamely négyszögben minden szög $1^\circ 12'$ -vel nagyobb, mint az előtte fekvő. Mennyi az első szög?

88. Mily nagyok azon négyszög szögei, melyben három szög egyenlő és mindegyik háromszor akkora mint a negyedik?

89. Minden négyszögben az egyik belső szög mellett fekvő domború szög egyenlő a többi három belső szög összegével.

90. A négyszögben a belső szögeket felező egyenesek négyszöget alkotnak, amelyben két-két átellenes szög együttvéve $2R$.

91. A négyszögben az átlók összege kisebb az oldalak összegénél, azonban nagyobb azok fél összegénél.

92. A négyszög átlóinak összege nagyobb két-két szemközt fekvő oldal összegénél.

A paralelogramma. 93. Bármely négyszögben az oldalainak felező pontjait összekötő egyenesek paralelogrammát alkotnak.

94. A derékszögű négyszög oldalainak felező-pontjait összekötő egyenesek rombuszt zárnak be.

95. A rombus oldalainak felező pontjait összekötő egyenesek derékszögű négyszöget alkotnak.

96. A paralelogramma szögfelezői derékszögű négyszöget zárnak be.

97. Az a négyszög, melyben az átlók egymást felezik, paralelogramma.

98. A paralelogramma átlóinak metszéspontján át húzott egyenest az a pont felezi.

99. Ha a paralelogramma két átellenes oldalának felező pontjait az egyik átló végpontjaival összekötjük, ezen két egyenes a másik átlót három egyenlő részre osztja.

100. Ha valamely paralelogrammában minden szögponttól minden oldalra ugyanabban a rendben egyenlő darabokat felmérünk, a nyert pontokat összekötő egyenesek paralelogrammát alkotnak.

101. Ha ugyanazt négyzetben tesszük, négyzetet kapunk.

102. Ha valamely háromszög egyik oldalának valamelyik pontjából a másik két oldalhoz párhuzamost húzunk, a származott két kisebb háromszög kerületeinek összege az eredetiével egyenlő.

103. Ha a paralelogrammában az átlók által befogott szögeket felezzük, a felező egyenesek metszési pontjai az oldalakkal egy rombusz szögpontjait adják.

104. Két paralelogramma egybevágó, ha azokban két-két átló és az azok által bezárt szög kölcsönösen egyenlő.

105. Ha valamely háromszögben egy középvonalat saját hosszával hosszabítunk és a nyert végpontot a felezett oldal két végpontjával összekötjük, paralelogrammát kapunk.

Parallelogrammák szerkesztése. 106. Szerkesszünk négyzetet, ha adva van: *a)* annak kerülete; *b)* az átlója.

107. Szerkesszünk derékszögű négyszöget, ha ismeretes: *a)* két szomszédos oldal; *b)* egy oldal és egy átló; *c)* egy átló és a két átló által bezárt szög; *d)* egy átló és az átló és a hosszabb oldal által bezárt szög.

108. Szerkesszünk rombuszt, ha ismeretes: *a)* egy oldal és egy szög; *b)* egy oldal és egy átló; *c)* a két átló; *d)* egy átló és az átló meg egy oldal által bezárt szög.

109. Szerkesszünk paralelogrammát, ha ismeretes: *a)* két oldal és az egyik átló; *b)* egy oldal, egy átló és a kettő által bezárt szög; *c)* a két átló és az azok által bezárt szög; *d)* egy szög, egy oldal és egy átló.

A trapéz. 110. Az egyenlőszárú trapézben az átlók egyenlők.

111. Az egyenlőszárú trapéz oldalainak felező pontjait összekötő egyenesek rombuszt alkotnak.

112. Két egyenlőszárú trapéz egybevágó: *a)* ha két-két szomszédos oldal és egy-egy szög kölcsönösen egyenlő; *b)* ha két-két párhuzamos oldal és egy-egy szög kölcsönösen egyenlő.

113. Szerkesszünk egyenlőszárú trapézt, ha adva van: *a)* egy párhuzamos, egy nem párhuzamos oldal és egy átló; *b)* a két párhuzamos és egy nem párhuzamos oldal; *c)* az egyik párhuzamos oldal, az egyik átló és a magasság; *d)* az alap, a rajta fekvő egyik szög és a magasság.

114. Szerkesszünk trapézt, ha ismeretes: *a)* három egymásután következő oldal s az ezek közül vett kettő által bezárt szög; *b)* az alap, egy nem párhuzamos oldal, a kettő által bezárt szög és egy átló; *c)* három oldal és a magasság; *d)* egy párhuzamos oldal, a két átló és a magasság.

115. *Négyyszög* szerkesztendő, ha ismeretes *a)* két szomszédos oldal és három szög; *b)* három oldal és a két átló; *c)* három oldal és a negyediken fekvő két szög; *d)* mind a négy oldal és az egyik átló.

III. A sokszögek.

116. Hány átlót húzhatunk a 3-, 9-, 13-, 22-, 25-szögben?

117. Hány oldala van annak a sokszögnek, melyben az átlók száma *a)* 35; *b)* 170; *c)* 275?

118. Hány oldalú az a sokszög, melyben a szögek összege *a)* 1800° ; *b)* 3240° ; *c)* 5400° .
119. Van-e olyan sokszög, melyben a szögek összege *a)* 1820° ; *b)* 2160° ; *c)* 1070° ; *d)* $100 R$?
120. Mekkora egy szög a szabályozás 5-, 6-, 8-, 10-szögben?
121. Valamely ötszög szögei úgy aránylanak, mint $4:5:6:7:8$; mekkora mindegyik szöge?
122. Hány oldalú azon szabályos sokszög, melyben egy-egy szög *a)* 150° ; *b)* 128° ; *c)* 168° ?
123. Van-e olyan szabályos sokszög és ha van hány oldalú az, melyben egy-egy szög *a)* 172° ; *b)* 170° ; *c)* 100° ?
124. Melyik szabályos sokszög az, melynek külső szöge *a)* 10° ; *b)* 15° ; *c)* 18° ?
125. Ha öt pont úgy fekszik, hogy e sorban 1, 2, 3, 4, 5, összekötve, homorúszögű ötszöget adnak, akkor ebben a sorrendben: 1—3—5—2—4—1 összekötve csillagidomú ötszöget (pentagramma) nyerünk, a melyben a szög-pontoknál fekvő szögek összege 2 R. — Ugyanaz áll, ha hét pontot e sorrendben 1—4—7—3—6—2—5—1 összekötünk.
126. Ha egy szabályos sokszög oldalainak számát 9-cel szaporítjuk, akkor a sokszög mindegyik szöge 9° -kal nő. Hány oldalú a sokszög?
127. Két sokszög összes oldalainak száma 24, átlóinak száma 109; hány oldala és hány átlója van mindegyiknek?
128. Melyik az a sokszög, melynél az átlók számát úgy kapjuk meg, hogy az oldalak számához hozzáadjuk azt a számot, amely megmutatja, hogy hány derékszög a szögek összege?

IV. A kör.

- Húrok és szögek a körben. 129. A körön belül fekvő ponton át húzott húrok közt az a legrövidebb, mely az e ponton keresztül menő sugárra merőleges.
130. Két nem a középponton átmenő húr, nem felezheti egymást.
131. Ha két egyenlő húr egymást metszi, a szeletek páronként egyenlők.
132. Párhuzamos húrok, melyek valamely átmérő két végpontján mennek át, egyenlők és végpontjaik egy átmérőn fekszenek.
133. Két egyenlő és párhuzamos húr végpontjai nem egyebek, mint valamely derékszögű négyszög szögpontjai.
134. Két párhuzamos, azonban nem egyenlő húr végpontjai nem egyebek, mint valamely egyenlőszárú trapéz szögpontjai.
135. Ha valamely hűrt három egyenlő részre osztunk és az osztási pontokon át sugarakat húzunk, akkor ezek a húrhoz tartozó ívet három részre osztják, melyek közül a belső nagyobb, mint a két egyenlő nagyságú külső rész mindegyike.
136. A két húr által befogott szög egyenlő az ezen szöghez és csúc-szögéhez tartozó íveken nyugvó kerületi szögek összegével.
137. Ha a kör két húrja egymásra merőleges, akkor a két csúcshöz közé eső íveknek az összege akkora, mint a kör fél kerülete.

A kör szelői és érintői. 138. Két egymást metsző szelő által bezárt szög, melynek szögpontja e körön kívül van, a két íven nyugvó kerületi szögek különbségével egyenlő.

139. Ha két érintő $\frac{2}{3}R$ nagyságú szöget zár be, akkor az érintők közös pontját és a kör középpontját összekötő távolság az átmérővel egyenlő.

140. A húrhoz párhuzamos érintő felezi a húrhoz tartozó ívet.

141. Az átmérők két végpontjában húzott érintők párhuzamosak.

142. Ha valamely körhöz két egymást metsző érintőt szerkesztünk és a két érintő közt fekvő körív valamely pontjában egy harmadik érintőt, akkor e három érintő oly háromszöget zár be, amelynek kerülete akkora, mint a két érintő összege.

Két kör. 143. Két kör középpontja: O_1 és O_2 , a sugarak: r_1 és r_2 ; vizsgáljuk meg a két kör kölcsönös helyzetét, ha a centrális és a sugarak mértékszámai: a) $O_1O_2 = 5.5$, $r_1 = 8.6$, $r_2 = 3.1$; b) $O_1O_2 = 11.7$, $r_1 = 8.6$, $r_2 = 3.1$; c) $O_1O_2 = 12$, $r_1 = 8.6$, $r_2 = 3.1$; d) $O_1O_2 = 10.5$, $r_1 = 10.2$, $r_2 = 8.8$; e) $O_1O_2 = 5.6$, $r_1 = 12.5$, $r_2 = 6.2$.

144. Három kör középpontja: O_1 , O_2 , O_3 ; a sugarak r_1 , r_2 , r_3 ; vizsgáljuk meg a három kör kölcsönös helyzetét, ha a centrálisok és a sugarak mértékszámai:

a) $O_1O_2 = 10$, $O_2O_3 = 10$, $O_1O_3 = 8$, $r_1 = 3.2$, $r_2 = 5.4$, $r_3 = 4.3$;

b) $O_1O_2 = 16$, $O_2O_3 = 16$, $O_1O_3 = 16$, $r_1 = 10$, $r_2 = 6$, $r_3 = 4$;

c) $O_1O_2 = 6$, $O_2O_3 = 14$, $O_1O_3 = 12$, $r_1 = 4$, $r_2 = 6$, $r_3 = 7$;

d) $O_1O_2 = 5$, $O_2O_3 = 9$, $O_1O_3 = 8$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$;

e) $O_1O_2 = 4$, $O_2O_3 = 10$, $O_1O_3 = 8$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$;

f) $O_1O_2 = 4$, $O_2O_3 = 5$, $O_1O_3 = 5$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$;

g) $O_1O_2 = 3$, $O_2O_3 = 11$, $O_1O_3 = 9$, $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$;

h) $O_1O_2 = 2$, $O_2O_3 = 4$, $O_1O_3 = 6$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 8$;

i) $O_1O_2 = 3$, $O_2O_3 = 4$, $O_1O_3 = 7$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 3$;

k) $O_1O_2 = 4$, $O_2O_3 = 3$, $O_1O_3 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 3$, $r_3 = 4$.

145. Vizsgáljuk meg az előbbi feladat utolsó három esetében a három középpont kölcsönös helyzetét és hasonlítsuk össze az előbbi esetek egyikével.

146. Egymást metsző egyenlő körök egyenlő íveket vágnak le egymásból.

147. Ha nem egyenlő körök egymást metszik, a levágott ívek nem egyenlők és a kisebb körből levágott ívhez nagyobb középponti szög tartozik.

Szerkesztések. 148. Adott körív felezendő.

149. Adott középpontból szerkesszünk oly kört, mely a) adott egyenest érint; b) adott kört érint.

150. Adott sugárral szerkesszünk kört, mely a) két adott ponton keresztül megy; b) adott ponton keresztül megy és adott egyenest érint; c) két adott egyenest érint.

151. Adott körbe szerkesszünk oly háromszöget, melynek alapja és magassága ismeretes.

152. Adott körbe írjunk egyenlőszárú trapézt, melynek párhuzamos oldalai adva vannak.

153. Az alapvonalból, a hozzátartozó magasságból és az előbbivel szemközt fekvő szögből háromszög szerkesztendő. (35. §. 2. p.)

154. Valamely adott körhöz két érintőt kell szerkeszteni akkép, hogy adott szög alatt messék egymást.

Mértani helyek. 155. Keressük ama pontok mértani helyét, melyek az r sugarú kör középpontjától meghatározott távolságban vannak.

156. Keressük azon körök középpontjainak mértani helyét, amelyek adott egyenest adott pontban érintenek.

157. Mi azon körök középpontjainak mértani helye, melyek adott kört adott pontban érintenek?

158. Azon pontok mértani helye, melyek mindegyikének két adott egyenestől való távolságaiknak összege állandó, oly derékszögű parallelogramma, amelynek állói az adott egyenesek. (Miért?)

159. Határozzuk meg mindazon húrok közepének mértani helyét, a melyek valamely körön belül fekvő ponton keresztül húzhatók.

160. Mi azon körök középpontjainak mértani helye, melyek a) két adott ponton mennek át; b) két adott párhuzamos egyenest érintenek; c) adott egyenest és adott kört érintenek?

161. Határozzuk meg azon egyenlő távolságok végpontjainak mértani helyét, melyek adott egyenest adott szög alatt metszenek.

162. Keressük azon pontok mértani helyét, melyekből, ha valamely adott körhöz az érintő párokat meghúzzuk, ezek meghatározott szögben metszik egymást.

163. Mi azon egyenlő körök középpontjainak mértani helye, melyek adott kört érintenek?

IV. Fejezet. Az idomok hasonlóságáról és a sugárrendszeréről.

Távolságok arányossága. 164. AB távolságon keressünk olyan C pontot, melyre nézve $AC:BC=5:12$.

165. AB távolság hosszabbításán keressünk olyan D pontot, melyre nézve $AD:BD=5:12$.

Az előbbi két feladatban AB távolság a belső C pont és a külső D pont által egyenlő arányban van osztva. Ilyen osztást *harmonikus* osztásnak nevezünk.

166. A háromszög egyik belső és a hozzátartozó külső szögét felező egyenesek az átellenes oldalt harmonikusan osztják.

167. Húzzunk oly egyenes vonalat, mely adott egyenesnek $\frac{m}{n}$ (pl. $\frac{2}{3}$) része.

168. Az ABC háromszögben a BC oldallal párhuzamos egyenes AC -t $2:3$ arányban osztja; mily nagyok AB oldal szeletei, ha $AB=5\cdot 25\ m$?

169. ABC \triangle -ben C szög felzöje az átellenes oldalt $5:7$ arányban osztja; mily nagy a másik két oldal, ha ezek összege $288\ m$?

170. Valamely háromszög oldalai rendre $3\ m$, $5\ m$, $6\ m$; mily nagy szeletekre bontják a szögfelezők az átellenes oldalakat?

171. Valamely háromszögben a b és c oldal felező pontjait összekötő egyenes $3\cdot 7\ m$; mennyi az a oldal?

172. Mily nagy a b és c oldalak felező pontjait összekötő egyenes, ha $a = 4m$?

173. BAC szög szárai közt fekvő M ponton keresztül átmetsző egyenest kell meghúznunk úgy, hogy a szög száraiból elvágott AX és AY szeletek adott arányban (pl. 2 : 5) legyenek.

174. BAC szög szárai közt fekvő M ponton keresztül XY átmetsző vonandó akkép, hogy MX és MY szeletei a) adott arányban (pl. 3 : 4) legyenek; b) hogy egyenlők legyenek. (M ponton keresztül húzzunk párhuzamost az egyik szárhoz stb.)

175. Ha valamely szög szárai közt több párhuzamos egyenest húzunk, és ezek mindegyikét egyenlő arányban osztjuk, az osztási pontok oly egyenesben fekszenek, amely a szög szögpontján megy át.

Háromszögek hasonlósága. 176. Valamely háromszög oldalainak mértékszámai: $a = 15.6m$; $b = 18.2m$, $c = 20m$; egy más, vele hasonló háromszögben $a' = 3.8m$; mennyi e háromszög másik két oldala b' és c' ?

177. Egy falu tornyának árnyéka $56.8m$; ugyanakkor a $2m$ hosszú függélyes rúdé $3m$. Mily magas a torony?

178. Valamely ABC háromszög oldalai: $a = 5.2m$, $b = 4.3m$, $c = 6.5m$. Mily nagy szeletekre osztja a C szög felező egyenese az átellenes oldalt?

179. A háromszög bármely két oldala az azokhoz tartozó magasságokkal fordítva arányos.

180. Két hasonló háromszög alapvonalai úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő magasságok.

181. Valamely háromszög magasságainak metszése folytán minden magasság két szeletre oszlik; ugyanezen magasságok szeleteinek szorzatai egyenlők egymással.

182. Két távolság mértani középarányosa kisebb, mint azok arithmetikai középarányosa.

183. A trapéz átlói egymást arányosan osztják.

184. Ha a derékszögű háromszög átfogóját a magasság folytonos arányban osztja, akkor minden befogó egyenlő az átfogónak nem szomszédos szeletével.

185. Ha valamely háromszög magasságainak talppontjait páronként összekötjük, az eredeti háromszög szögpontjai felé három kis háromszög keletkezik, melyek mindegyike hasonló az eredetihez. A magasságok a talppontokat összekötő háromszög szögfelezői.

186. Két háromszög hasonló, ha egy szög egyenlő és az eme szöveget bezáró oldalakhoz tartozó magasságok arányosak.

187. Két háromszög hasonló, ha egy-egy oldal aránya egyenlő a megfelelő magasságok arányával és az oldal mellett fekvő szögek egyenlők.

Középarányos. 188. A derékszögű háromszög egyik befogója geometriai középarányos az átfogó és a másik befogó összege és különbsége közt.

189. Mekkora a derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság, ha az átfogó szeletei: $7.2m$ és $16.2m$?

190. A derékszögű háromszög átfogója $72.9m$. Mily nagyok a befogók és a magasság, ha az egyik befogó projekciója az átfogón $6.4m$?

191. A derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága $12\cdot4$ m, az átfogó egyik szelete $3\cdot8$ m; mekkorák az alkotórészek?

Pythagoras tétele. 192. A derékszögű háromszögnek az átfogó mértékszámát a , a két befogót b és c ; ha e három közül kettő adva van, számítsuk ki a harmadikat;

a) $b = 1\cdot56$, $c = 0\cdot25$; $b = 7\cdot2$, $c = 7\cdot56$; $b = 5$, $c = 12$.

b) $a = 10\cdot44$, $b = 7\cdot56$; $a = 0\cdot3744$, $c = 3\cdot0144$; $a = 72$, $b = 34$.

193. A befogók rendre: $5\cdot24$ m és $7\cdot16$ m. Mekkora az átfogó és a hozzá tartozó magasság?

194. A derékszögű háromszög egyik befogója $4\cdot5$, az átfogóhoz tartozó magasság $3\cdot6$ m; mekkora a két ismeretlen oldal?

195. A derékszögű háromszög befogói: 3 m és 5 m. Keressük a három szögfelező hosszát.

196. Az egyenlőoldalú háromszög oldala a , magassága m ; a kettő egyikéből számítsuk ki a másodikat.

197. Négyzetben az oldal a , az átló b ; ha a kettő közül az egyik adva van, határozzuk meg a másikat.

198. Egyenlőszárú háromszögben az alap a , a szár b , a magasság m ; ha ezek közül kettő adva van, számítsuk ki a harmadikat.

199. Valamely ABC háromszögben $AB = 120$ m, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$. Határozzuk meg a háromszög BC és AC oldalát és a BC -hez tartozó magasságot.

200. A szemléltetőnek a szeme a Föld felületén oly távolra lát, amilyen a szemtől a Földgömbhöz vont érintő hossza; mekkora ezen távolság a , ha a szemnek a magassága a Föld felülete fölött m és a Föld sugara r ? — Legyen $m = 48$ m, $r = 858\cdot474$ földr. mérföld, 1 mérföld $= 7520\cdot44$ m.

201. Legalább is mily magasnak kell valamely hegynek lennie, hogy annak csúcsát 100 km. távolságból láthassuk?

A háromszögek hasonlósága és a kör. 202. A körön belül fekvő ponton átmenő húr két szeletének a szorzata egyenlő az ezen ponton átmenő legkisebb húr felének a négyzetével.

203. A körnek egy pontból kiinduló érintője és szelője van; a szelő külső szelete $5\cdot6$ dm, a belső $12\cdot5$ dm; mekkora az érintő?

204. Valamely kör AB húrját, melynek hossza $2\cdot6$ m, C pont $4:9$ arányban osztja. Mekkora az e ponton keresztül menő legkisebb húr?

205. Valamely pontból a körhöz húzott érintő hossza $1\cdot4$ m; mekkora ugyanazon pontból a körhöz húzott szelő, ha azt a körvonal felezi?

206. Adott külső pontból a körhöz húzott érintő és a kör középpontján át húzott szelő 45° -nyi szöget zárnak be; mekkora az érintő és a szelő, ha a kör sugara r ?

207. Adott pontból a körhöz szerkesztett érintő és szelő 60° -nyi szöget zárnak be; a szelő külső szelete a , a belső háromszor akkora; mekkora a kör sugara?

Szerkesztések. 208. Valamely szög szárai között fekvő ponton keresztül egy, a száraitól határolt oly egyenes vonandó, hogy az adott pontban adott arányban (pl. $3:4$) osztassék. (A ponton keresztül párluzamost húzunk a szög egyik szarához.)

209. Valamely szög szárai közt fekvő ponton keresztül egyenes vonandó akkép, hogy a szög szaraiból elvágott részek adott arányban (pl. 2 : 5) legyenek.

210. Rajzoljunk adott háromszöghöz hasonló háromszöget, melynek magassága adva van.

211. Rajzoljunk derékszögű háromszöget, ismerve az átfogót és a két befogó arányát. (Mindenek előtt a kívánt háromszöghöz hasonló háromszög szerkesztendő.)

212. Szerkesszünk egyenlőszárú háromszöget, ha ismerjük annak magasságát és alapjának az egyik szárhoz való arányát.

213. Szerkesszünk háromszöget a három magasságból.

214. Szerkesszünk háromszöget, ha ismerjük az alapot és az oldalak arányát.

215. Szerkesszünk két körhöz közös érintőt.

V. Fejezet. Az idomok területéről.

I. Területek egyenlősége.

Területek egyenlősége. 216. A paralelogrammák átlóinak metszési pontján átmenő minden egyenes felezi a paralelogrammák területét.

217. A paralelogramma átlójának egyik pontján át párhuzamosakat húzva az oldalakhoz, a származó négy paralelogramma közül azok, melyeket az átló nem szel át, egyenlők.

218. Bármely négyszög oldalainak felező pontjai oly paralelogramma szögpontjai, melynek területe az adott négyszög területének felével egyenlő.

219. Ha valamely négyszög négy szögpontján keresztül az átlókkal párhuzamosakat húzunk, az általuk alkotott paralelogramma kétszer akkora, mint a négyszög.

220. Mi a közös alapú és egyenlő területű háromszögek szögpontjainak mertani helye?

Területekkel való műveletek. 221. Osszuk fel adott háromszög területét egyik szögpontjából kiinduló egyenesekkel 3 : 5 : 7 arányban.

222. Adott háromszög egyik oldalával párhuzamos egyenesekkel négy egyenlő részre osztandó.

223. Egyenlőtlen oldalú háromszöget alakítsunk át egyenlő területű, egyenlőoldalúvá.

224. Szerkesszünk négyzetet, mely egyenlő területű *a)* adott derékszögű négyszöggel, *b)* adott háromszöggel, *c)* adott paralelogrammával, *d)* adott trapézzel.

225. Parallelogramma egyenlő területű rombussá átalakítandó.

226. Osszuk fel a paralelogrammát egyik szögpontjából kiinduló egyenesekkel több egyenlő részre.

227. Trapéz egyenlő, vagy arányos részekre osztandó.

228. Adott egyenesre oly paralelogramma szerkesztendő, melynek területe két más adott paralelogramma területének összegével egyenlő és melynek *a)* egyik szöge, *b)* egyik átlója meghatározott nagyságú.

229. Szerkesszünk négyzetet, mely *a)* kétszer akkora, *b)* fél akkora, mint valamely adott négyzet.

230. Szerkesszünk háromszor akkora háromszöget, mint valamely adott háromszög.

231. ABC háromszög az A szögpontból húzott egyenesekkel két részre osztandó, melyeknek területei adott arányban (pl. 2:3) vannak.

232. Felezzük ABC háromszöget BC oldallal párhuzamos egyenessel.

233. Felezzük ABC háromszöget BC oldalra merőleges egyenessel.

II. Területek mérése.

Területszámítás. 234. Valamely derékszögű négyszög egyik oldala $a = 8.6$ m és átlója $d = 164.304$ m, mekkora a területe?

235. Valamely paralelogramma alapja 624.1 m, magassága 250 m. Számítsuk ki a vele egyenlő területű négyzet oldalát.

236. A négyzet átlója a ; számítsuk ki a területét.

237. Számítsuk ki a derékszögű háromszög területét, ha az átfogója (a) és a két befogója (b) és (c) közül kettő adva van: $b = 15$, $c = 8$; $b = 5$, $c = 12$; $a = 25$, $b = 24$; $a = 15$, $c = 12$.

238. Adva van az egyenlőoldalú háromszög oldala a , mennyi a területe?

239. Ismeretes az egyenlőoldalú háromszög magassága, mekkora a területe?

240. Keressük a derékszögű háromszög területét, ha annak befogója (b) és az átfogójához tartozó magasság (m) adva van. $b = 181$ m, $m = 19$.

241. Mennyi a derékszögű háromszög területe, ha az átfogóhoz tartozó magasság azt (n) és (o) szeletekre osztja? $n = 26$ m, $o = 104$ m.

242. A derékszögű háromszög területe (t) és átfogója (a) adva van; mennyi a két befogó (b) és (c)? $t = 92.4$ m², $a = 21$ m.

243. Az egyenlőoldalú háromszög területe t , mekkora az oldala és a magassága?

244. Mennyi az egyenlőszárú háromszög területe, ha ismeretes az alap és a szár?

245. Ismerjük az egyenlőszárú háromszög t területét és a alapját; mekkora a szára? $t = 3.76$ m², $a = 2.34$ m.

246. Valamely háromszög két oldala, (a) és (b) és a harmadik oldalhoz tartozó magasság (m) ismeretes; mekkora a háromszög területe?

247. A négyzet átlójának és oldalának különbsége 2.4 m; mennyi a területe?

248. Az egyenlőoldalú háromszög oldalának és magasságának összege adva van; mennyi a területe?

249. A derékszögű háromszög befogóinak összege 2.1 m, területe 0.54 m²; mekkorák az oldalai?

250. A trapéz párhuzamos oldalai: 17.32 m, 27.65 m, magassága 3.14 m; mennyi a területe?

251. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 612 m és 417 m, egyik nem párhuzamos oldalé 376 m, s az ezen oldal és az alap által bezárt szög 45° ; mennyi a trapéz területe?

252. Az egyenlőszárú trapéz párhuzamos oldalai 5.5 m és 7 m; nem párhuzamos oldala 6 m; mily nagy azon háromszög területe, melyet a trapéz egyenlő oldalainak megnyújtása által nyerünk?

253. A trapéz területe 18.81 m^2 , párhuzamos oldalai 5.5 m és 4.4 m hosszúak; mekkora a trapéz magassága?

254. Mennyi az egyenlőszárú trapéz területe, ha az egyik párhuzamos oldal 5.2 m , a nem párhuzamos oldal 4.81 m , a magasság 4.8 m ?

255. Adva van a trapéz területe (t) , egyik párhuzamos oldala (a) és magassága (m) ; mekkora a másik párhuzamos oldal?

256. A trapéz két párhuzamos oldalából (a, b) és területéből (t) számítsuk ki a magasságot.

257. Valamely trapéz területe oly négyzet területével egyenlő, melynek egy oldala 2.6 m , a trapéz párhuzamos oldalai 1.6 m és 2.2 m ; mekkora a magassága?

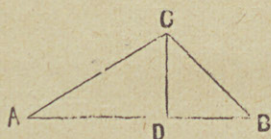
258. Mekkora azon trapéz területe, melynek középvonala 5 m , egyik nem párhuzamos oldala 3.8 m , a középvonal és az adott oldal által bezárt szög 45° ?

259. A rombus területe kiszámítandó, ha adva van: $a)$ a két átló; $b)$ az oldal és egy álló.

260. Mekkora a rombus oldala, ha magassága 12.4 m és területe 473.68 m^2 ?

261. A háromszög három adott oldalából $(a, b$ és $c)$ számítsuk ki a területet (t) .

164. ábra.



Ha $ABC \triangle$ -ben: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, és ha az $AB = c$ alaphoz tartozó magasságot azaz CD -t m -mel jelöljük:

$$t = \frac{c \cdot m}{2}$$

A magasság meghatározása végélt legyen

$BD = x$ és megfelelőleg $AD = c - x$. Pythagoras tétele szerint:

$$BCD \triangle\text{-ben: } m^2 = a^2 - x^2 \quad (1)$$

$$ACD \triangle\text{-ben: } m^2 = b^2 - (c-x)^2 \quad (2)$$

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2,$$

$$a^2 = b^2 - c^2 + 2cx, \text{ és ebből:}$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

x -nek ezen értékét az (1) egyenletben helyettesítve:

$$\begin{aligned} m^2 &= a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right)^2 \\ &= \left(a + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right) \left(a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \right), \\ &= \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2c}, \\ &= \frac{(a+c)^2 - b^2}{2c} \cdot \frac{b^2 - (a-c)^2}{2c}, \\ &= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4c^2}. \end{aligned}$$

Következésképp: $m = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$

Ha most feltesszük, hogy: $a + b + c = 2s$, akkor: $a + b - c = 2(s-c)$ stb.

$$\text{és } t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

262. Ismeretes a háromszög három magassága m_1, m_2, m_3 ; mekkora a háromszög területe?

Ha az m_1, m_2, m_3 magasságokhoz tartozó oldalakat sorban a, b és c -vel jelöljük, akkor a 180. sz. feladat szerint $b = \frac{a m_1}{m_2}$, $c = \frac{a m_1}{m_3}$; tehát a három oldal fél összege $s = \frac{a m_1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right)$ és $s - a = \frac{a m_1}{2} \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1} \right)$ stb.

Ha ezeket az értékeket az előbbi feladatra alkalmazzuk, és tekintetbe vesszük, hogy $\frac{a m_1}{2}$ a háromszög területe t , akkor

$$t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} \right) \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_2} \right) \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1} \right)}}$$

Az eredményt megvizsgálva, milyen értékűek lehetnek a magasságok?

263. Adva van ABC háromszög két oldala a és b és a harmadik oldalhoz tartozó középvonal K ; meghatározandó a háromszög területe.

Ha az adott középvonalat CD -t saját hosszával E -ig hosszabítjuk és az E pontot A -val összekötjük, úgy AEC háromszög egyenlő az adott ABC háromszöggel s így a 261. sz. feladat szerint

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + 2K)(a + b - 2K)(a - b + 2K)(-a + b + 2K)}.$$

264. ABC háromszögben adva van a három súlyvonal s_1, s_2, s_3 ; kiszámítandó a háromszög területe.

A három súlyvonal egymást O pontban metszi, akkor $ABC \triangle = 3 AOB \triangle$, és így az előbbi feladat szerint

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{(s_1 + s_2 + s_3)(s_1 + s_2 - s_3)(s_1 + s_3 - s_2)(s_2 + s_3 - s_1)}.$$

Vizsgáljuk meg az eredményt!

Bizonyítsuk be a következő tételeket:

265. Az egyenlőoldalú háromszög belsejében választott pontból az oldalakra bocsátott merőlegesek összege a magassággal egyenlő.

266. A parallelogramma belsejében felvett pontot a négy szögponttal összekötve, oly négy háromszöget nyerünk, melyek közül két átellenes területének összege a másik kettőével egyenlő.

267. Az oly négyszög területe, melyben az átlók egymásra merőlegesek, az átlók fél szorzatával egyenlő.

268. Ha a trapéz egyik nem-párhuzamos oldalának felező pontjából a másiknak végpontjaihoz egyeneseket húzunk, az ezektől meghatározott háromszög a trapéz felével egyenlő.

VI. Fejezet. A beírt és körülírt idomok.

Három- és négyszög. 269. Az egyenlőoldalú háromszög oldala a ; mekkora beírt és körülírt körének sugara?

270. Mekkora az r sugarú körben a beírt és a körülírt a) egyenlőoldalú háromszög oldala; b) négyzet oldala?

271. Az egyenlőoldalú háromszög területe t ; mekkora a beírt és a körülírt kör sugara?

272. A kör köré írt egyenlőszárú trapéz két párhuzamos oldala $4\cdot08\ m$ és $6\cdot02\ m$; mekkora a másik két oldal?

273. A kör köré írt háromszög egyik oldalát az érintési pont $2\cdot03$ és $3\cdot17\ m$ -nyi szeletekre osztja; a másik oldal egyik szelete $3\cdot05\ m$; mekkora a harmadik oldal?

274. Az r sugarú körbe oly derékszögű négyszög van írva, melynek egyik oldala a ; mekkora a négyszög területe?

275. Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszögbe rajzolt kör átmérője akkora, mint a befogók összegének és az átfogónak a különbsége.

276. Hányszor nagyobb a szabályos érintő-négyszög területe az ugyanazon körhöz tartozó szabályos húr-négyszög területénél?

Sokszögek. 277. Bizonyítsuk be, hogy *a*) a körbe írt egyenlő oldalú sokszög és *b*) a körbe írt egyenlő szögű sokszög szabályos sokszög.

278. Bizonyítsuk be, hogy két szabályos n -szög kerülete úgy aránylik egymáshoz, mint a beírt, vagy körülírt körök sugarai, területeik pedig úgy, mint ugyane sugarak négyzetei.

279. A szabályos hatszög területe t , mekkora a beírt és a körülírt kör sugara?

280. A szabályos nyolcszög területe $1200\ m^2$; mennyi a beírt és körülírt kör sugara?

281. Az egyenlőoldalú háromszög oldala $5\cdot1\ m$; mily nagy az egyenlő területű szabályos hat- és nyolcszög oldala?

282. A körbe írt szabályos hatszög területe kétszerese a beírt szabályos háromszögének.

283. Ugyanaz három-negyede a szabályos érintő-hatszög területének.

284. A körbe írt szabályos hatszög területe fele a körülírt szabályos háromszög területének.

285. Mekkora a beírt szabályos tizenkétszög területe, ha adva van a sugár?

286. Az $5\ m$ sugarú körben a szabályos n -szög oldala $3\cdot4\ m$; mily nagy ugyanazon körben a szabályos $2n$ -szög oldala?

287. Mekkora a kör sugara, ha egyik ív húrja $12\cdot64$, a felényi ívé $9\cdot49\ cm$?

288. A kör sugara r ; mekkora az ezen körbe írt szabályos 48 -szög oldala?

289. A beírt szabályos $2n$ -szög kerülete geometriai középátlós a beírt n -szög és a körülírt $2n$ -szög kerületei között.

VII. Fejezet. A kör kerülete és területe.

A kör kerülete és területe. 290. Mily nagy a kör kerülete, ha a sugara: $2\ m$, $4\cdot5\ m$, $7\cdot2\ m$, $2\cdot05\ m$?

291. Mekkora a kerülete, ha az átmérő: $8\cdot4$, $14\cdot3$, $9\cdot6$, $0\cdot36\ m$?

292. A kocsikerék átmérője $1\cdot2\ m$; ha a kerék egy perc alatt 180-szor megfordult, mekkora utat írt le a kocsis és mily sebességgel haladt?

293. Egy kör átmérője két részre van osztva és mindegyik rész fölött mint átmérő fölött kör szerkesztve; mekkora a körök kerületeinek összege?

294. Egy kör átmérője több egyenlő részre van osztva és mindegyik résszel mint átmérővel kör szerkesztve; mekkora a körök kerületeinek összege?

295. Valamely kocsi kereke $8\frac{1}{2}$ km. úton 3118 fordulatot tesz; mily nagy a kerék küllője?

296. A kör kerülete 38 m-rel nagyobb, mint átmérője; mekkora mindegyik?

297. Mily nagy a kör területe, ha sugara $8\cdot2$ m?

298. Mily nagy a kör területe, ha átmérője $d = 5\cdot2$, $0\cdot018$ m?

299. Mily nagy a kör területe, ha kerülete $K = 15\cdot705$ m?

300. Mennyi a kör sugara, ha területe $4\cdot52304$ dm²?

301. Adott kör területét koncentrikus körrel osszuk fel két egyenlő részre.

302. Végezzük az osztást $4 : 9$ arányában.

303. A kör átmérőjében válasszunk egy pontot, mely az átmérőből a sugár ötödrészét (vagy tizenharmad részét) levágja; e pontban állítsunk merőleges húr. Mekkora ezen négy húrszelet fölött, mint átmérő fölött szerkesztett körök területeinek az összege?

304. Mekkora e négy kör kerületeinek és területeinek az összege, ha a merőleges húr egy átmérő?

305. Kör szerkesztendő, amelynek *a*) kerülete, *b*) területe adott két kör kerületének illetőleg területének, az összege, vagy különbsége.

306. Valamely négyzet területe 6400 m², mennyi a beírt és körülírt köré?

307. A szabályos háromszög oldala: *a*; mekkora a beléje és köréje írt kör területe?

308. Számítsuk ki azon egyenlőoldalú háromszög oldalát (*a*), melynek területe valamely *r* sugarú körrel egyenlő.

309. Mily nagy azon kör sugara, melynek területe az $1\cdot5$ és $1\cdot2$ m. sugarú körök területének összegével egyenlő?

310. Körnegyedbe van írva egy kör, mely a körnegyed két szárát és ívét érinti; határozzuk meg ama kör területét, melynek sugara a körnegyed és a beírt kör sugarainak az összege.

311. Valamely derékszögű négyszög alapja az *r* sugarú körbe írt szabályos háromszög egyik oldala, magassága az ugyanazon kör köré írt szabályos hatszög oldala; mekkora azon kör kerülete, melynek területe egyenlő a négyszög területével?

A körív hossza. 312. Mily nagy az $\frac{1}{2}$ m. sugarú körben a 32° -os középponti szögnek az íve?

313. Mily nagy az ív, ha a sugár $4\cdot5$ m., a középponti szög 72° ?

314. Mekkora *arc* 1° , *arc* $1'$, *arc* $1''$? (A sugár az egységgel egyenlő).

315. A $8\cdot2$ m. sugarú körben számítsuk ki a $4\cdot5$ m. hosszú ívhez tartozó középponti szöveget.

316. Mily nagy a sugárral egyenlő ívhez tartozó középponti szög?

317. Azon kör sugara keresendő, melyben a $7^\circ 30'$ középponti szöghöz tartozó ív $0\cdot6283$ m.

318. Mily nagy a $86\cdot72$ m² területű körben a 72° -os középponti szöghez tartozó ív hossza?

319. Mily nagy a kör területe, ha a $150^\circ 58' 20''$ középponti szög íve 150 m.?

A kör részeinek területe. 320. Az r sugarú kör átmérőjét egy koncentrikus kör 2:3 arányban osztja; mekkora a körgyűrű területe?

321. Mily széles a 3 m. sugarú belső körnél négyszer nagyobb területű körgyűrű?

322. Mekkora oly körgyűrűnek a szélessége, amelynek területe kétszer akkora, mint az 5 cm. sugarú belső kör területe?

323. Mily arányban vannak a körgyűrűt alkotó két kör sugarai, ha a körgyűrű területe kétszer akkora, mint a kisebb kör területe?

324. Mekkora a területe azon körgyűrűnek, melynél a belső kör sugara 5 m., a külsőé pedig azon négyzet oldalával egyenlő, mely a belső kör körül van írva?

325. A szabályos hatszög területe 1 dm². Számítsuk ki az oldalát és számítsuk ki, mekkora területű a beírt és a körülírt körök által határolt körgyűrű?

326. Mekkora a területe azon körgyűrűnek, melynél a belső kör sugara r , a külsőé pedig azon szabályos négyszög oldalával egyenlő, mely a belső kör körül van írva? $r = 5$ m.

327. Mily nagy a 6 m. sugarú körben az $5\cdot6$ m. hosszú ívhez tartozó sector területe?

328. Mily nagy a sector területe, ha a sugár $3\cdot6$ m., a középponti szög $56^\circ 38'$?

329. Mekkora, ha $r = 0\cdot6$ m., $\alpha = 36^\circ 8' 16''$?

330. Mekkora a kör sugara, ha egy sector területe 1200 m², a középponti szöge $36^\circ 12'$?

331. Mekkora a körgyűrű sectorának a területe, ha a sugarak $0\cdot5$ és $0\cdot4$ és az ívekhez tartozó középponti szög 48° ?

332. Mekkora a szabályos ötszög egyik oldala által meghatározott kör-sector területe az egység-sugarú körben?

333. Mekkora $12\cdot42$ m² területű körben oly körsector íve, amelynek a területe, akkora, amekkora ama szabályos háromszög területe, amelynek oldala a kör sugarával egyenlő?

334. Három egyenlő sugarú kör kölcsönösen érinti egymást; mennyi a köztük levő rész kerülete és területe? (A sugár $r = 5\cdot6$ m.)

335. Valamely háromszög három oldala: $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. A háromszög köré kör van írva; mekkora a három segmentum összege? Mekkora a háromszögbe beírt kör sugara?

336. Mekkora a szabályos négy- és hatszög egy-egy oldalához tartozó körsegmentum területe, ha a kör sugara az egység?

337. Adott $0\cdot572$ m. sugarú körben mekkora a 60° középponti szöghez tartozó körsegmentum területe?

338. Mennyi a körbeírt 5 m. oldalú szabályos háromszög egy oldala által meghatározott körsegmentum területe?

339. Mekkora azon körsegmentumnak a területe, amelyet egy körbeírt szabályos négyszög egy oldala és a hozzátartozó ív határol, ha a négyszög területe 15.708 m^2 ?

340. Valamely távolság (a) mint húr fölött két körív van szerkesztve; a körívekhez tartozó középponti szögek 90° és 60° . Mekkora a két körív által határolt holdacska területe?

341. Mekkora két egymást metsző kör közös részének a területe, ha az egyik kör sugara r és a közös húrhoz tartozó középponti szög 60° , a másik körnek a sugara $\frac{r}{2} \sqrt{2}$?

A TÉRMÉRTAN BEVEZETŐ TÉTELEI.

Nyolcadik fejezet.

A téridomokról általában.

59. §. Az egyenes vonalak kölcsönös helyzete a térben.

A végtelen tér bármely pontján keresztül számtalan egyenes vonalat húzhatunk; *két* meghatározott ponton keresztül azonban csak *egyet*. Más szóval: az *egyenes vonal helyzetét két pont határozza meg*. (Sarktétele.)

Két egyenes vonalnak háromféle kölcsönös helyzete lehet a térben. T. i.:

1. a két egyenes vonal *párhuzamos*, ha mind a kettő ugyanazon síkban van, azonban egymással bármeddig meghosszabbítva sem találkozik;

2. a két egyenes *metszi* egymást, ha elegendőképen megnyújtva egy közös pontban találkozik;

3. a két egyenes vonal *keresztelő*, vagy *kitérő*, azaz egymás mellett halad el, *ha sem nem párhuzamos, sem nem metszi egymást*; ez esetben az egyenesek különböző síkokban vannak.

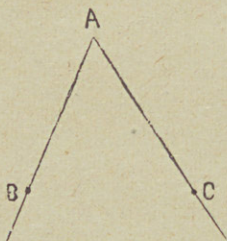
60. §. A sík helyzetének meghatározásáról.

A sík lap jellemző tulajdonsága az, hogy rajta bármely irányban egyenes vonal húzható; azaz ha a sík lap bármely két pontját egyenes vonallal összekapcsoljuk, ennek összes pontjai a síkba esnek. Könnyű átlátni, hogy a sík lap helyzetének meghatározására két pont nem elegendő; mert ha e két pontot egyenes vonallal összekapcsoljuk, ez utóbbi körül a sík lapot még forgatni lehet; minélfogva nem egy, hanem számtalan sík lap gondolható, mely az

említett két pontot magában foglalja. De ha a síklap e két pontján kívül még egy *harmadik* is adva van, akkor a síklap helyzete tökéletesen meg van határozva. A *sík helyzetét* tehát *három pont határozza meg*, azonban csak akkor, ha ezek nem esnek ugyanazon egyenes vonalba.

Két egymást metsző egyenes vonal mindig ugyanazon síkban fekszik és tökéletesen meghatározza a sík helyzetét.

165. ábra.



Legyen A pont AB és AC két egyenes metsző pontja (165. ábra). Minthogy e vonalakat A , B és C pontok teljesen meghatározzák és három ponton keresztül csak *egy* síklap fektethető, tehát a fentebbi tétel igaz.

Ebből kitűnik: 1. hogy az egyenes vonalú háromszögnek mind a három oldala ugyanazon síkba esik; 2. két párhuzamos egyenes mindig ugyanazon síklapon fekszik.

E tételnek megfelelőleg a síklap megjelölésére három betűt használunk. Ott azonban, hol kétség nem támadhat, kevesebb is beérhetjük.

61. §. Az egyenes és a sík kölcsönös helyzete.

Amely egyenes vonalnak két pontja valamely síkban van, az egész hosszában ezen síkban fekszik. (Sarkigazság.)

A síkon kívül fekvő egyenes vonalnak a síkhoz képest kétféle helyzete lehet.

1. Minden olyan egyenest, mely kellően meghosszabbítva a síkkal találkozik, ehhez képest *hajlottnak* mondunk; a találkozás pontját az egyenes vonal *talppontjának*, vagy *átdőfési pontjának* nevezzük.

2. Ellenben, ha az egyenes vonal — bármennyire meghosszabbítva — sem találkozik a végtelen síkkal, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes a síkkal és viszont, a síklap az egyenessel *párhuzamos*.

62. §. Két sík kölcsönös helyzete.

Két sík kölcsönös helyzete kétféle lehet. T. i. a síkok vagy találkoznak, vagy nem találkoznak egymással. Az első esetben a síkokat *összehajlóknak*, az utóbbiban *párhuzamosoknak* mondjuk. Két párhuzamos sík a végtelen tért három részre, két összehajló sík ellenben négy részre osztja. Az összehajló síkok metsző vonalát *élnak* nevezzük.

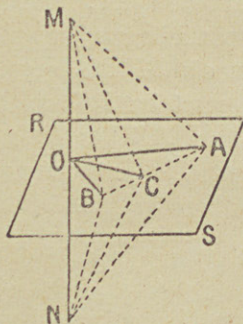
Két összehajló sík közös éle csak egyenes vonal lehet.

Mert, ha görbe vonal is lehetne, ezen kijelölhetnénk három olyan pontot, melyek nem esnek ugyanazon egyenes vonalba; azonban ekkor a két síklapnak három közös pontja lenne, tehát a 60. §-nál fogva tökéletesen egybeesnék; ez azonban a föltétellel ellenkezik, mert eredetileg két különböző síkról volt szó.

63. §. A síklapra merőlegesen álló egyenes vonalakról.

1. *Ha valamely egyenes vonal a talppontján átmenő és a síkban fekvő két egyenesre merőleges, akkor a talppontján áthaladó valamennyi egyenesre és magára a síkra is merőleges.*

166. ábra.



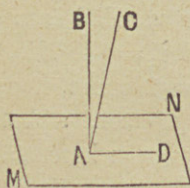
Legyen MO (166. ábra) az RS síkban húzott AO és BO egyenesekre merőleges; akkor $MO \perp OC$ -re is; mert, ha MO meghosszabbítása után $MO = NO$, akkor AB , MA , MB , NA és NB egyeneseket húzván: $AOM \triangle \cong AON \triangle$ és $BOM \triangle \cong BON \triangle$, miből: $MA = NA$; $MB = NB$ és $MAB \triangle \cong NAB \triangle$, tehát $MAB \sphericalangle = NAB \sphericalangle$. Ha még az MC és NC egyeneseket is meghúzzuk, akkor: $MAC \triangle \cong NAC \triangle$ és $MC = NC$, azaz $MNC \triangle$ egyenlőszárú s így: $MO \perp OC$.

Azonban hasonló eljárás útján beigazolható az is, hogy MO a talppontján átvonuló valamennyi egyenesre, így tehát magára a síkra is merőleges. (Cauchy bizonyítása.)

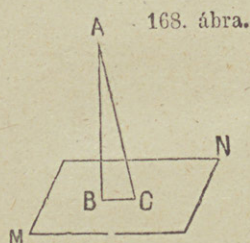
2. *Egy adott pontból valamely síkra csak egy merőleges vonalat húzhatunk.* E tétel bebizonyításánál figyelembe kell vennünk, hogy az adott A pont vagy magában a síkban, vagy ezen kívül lehet.

a) *A pont a síkban van.* Tegyük fel, hogy $\overline{AB} \perp MN$ síkra (167. ábra) és ezenkívül AC is merőlegesen áll ugyanarra a síkra. E két egyenes vonalon keresztül vezessük BAC síkot; ez az adott MN síkot

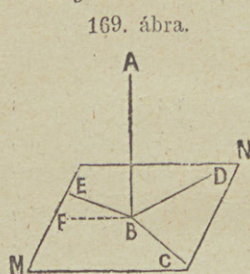
167. ábra.



AD egyenesben metszi. A föltétel következtében úgy AB -nek, mint AC -nek merőlegesen kell állania AD -n; ez azonban lehetetlen, mert ugyanazon síklapon ennek egyik pontján keresztül csak *egy* merőlegest húzhatunk valamely adott egyenesre. Ha tehát $\overline{AB} \perp MAN$ síkra, akkor \overline{AC} nem lehet az.



3. Ha valamely egyenes vonal egyik pontján három, vagy több merőleget húzunk, ezek mind ugyanazon síkban vannak.



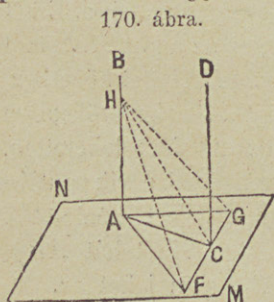
Legyen AB az adott egyenes vonal (169. ábra), melyre \overline{BC} , \overline{BD} , \overline{BE} stb. vonalak merőlegesen állanak. Ha BC és BD egyeneseken keresztül MN síkot vezetjük, akkor AB egyenes vonal az 1. p.-nál fogva \perp ezen síkra. Azonban ugyanezen sík BE stb. egyenest is magában foglalja, mert ha BE vonal a síkon kívül lenne, akkor AB - és BE -n keresztül oly síkot vezethetnénk, mely MN síkot BF egyenesben metszené. Minthogy $AB \perp MN$ síkra, tehát ABF szögnek 90° nak kell lennie; következésképp:

$$ABF \sphericalangle = ABE \sphericalangle = 90^\circ.$$

Ámde ez képtelenség. Tehát BE egyenes nem fekehetik a síkon kívül. Ugyanez áll a többi merőlegről is.

Ebből önként folyik, hogy: ha valamely derékszöveget egyik szára körül forgatunk, a másik szára síklapot ír le; ez utóbbi tehát mindazon egyenes vonalaknak a mértani helye, amelyek valamely adott egyenesre ugyanazonegy pontban merőlegesen állanak.

4. Az ugyanazon síklapra merőlegesen álló egyenes vonalak párhuzamosak egymással.



Legyen AB vonal \perp MAN síkra (170. ábra) és $CD \perp MAN$ -re; akkor $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ -vel.

Ugyanis, ha a két merőleges talppontját MN síkon AC egyenes vonallal összekapcsoljuk, $BAC \sphericalangle + DCA \sphericalangle = 180^\circ$. Most azonban még be kell bizonyítanunk, hogy a nevezett egyenesek ugyanazon síkban vannak. E célból CD talppontján keresztül MAN síklapon AC -re FCG merőleget

vonjuk; továbbá CF részt egyenlőnek vesszük CG -vel, és C, F, G pontokat AB -nek valamelyik pontjával (pl. H -val) összekapcsoljuk; végül még az AF és AG egyeneseket húzzuk. Az ekkép származott idomban:

1. $ACF \triangle \cong ACG \triangle$, tehát $AF = AG$;
2. $FAH \triangle \cong GAH \triangle$, $FH = GH$;
3. $FCH \triangle \cong GCH \triangle$, $HCF \sphericalangle = HCG \sphericalangle = 90^\circ$.

Minthogy ezenkívül a föltételnél fogva $DCF \sphericalangle = 90^\circ$ és a szerkesztés következtében $ACF \sphericalangle = 90^\circ$, tehát a 3. pont értelmében CA, CD és CH egyenesek ugyanazon síkban vannak, következésképp \overline{AB} és \overline{CD} vonalak is ugyanazon síkban vannak és így a fentebbieknél fogva $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

5. Viszont, ha két párhuzamos közül az egyik merőlegesen áll valamely síkra, a másik is merőlegesen áll ugyanazon síkra.

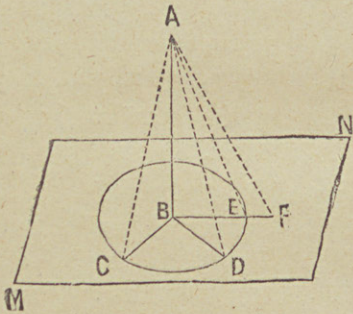
6. Ha két egyenes vonal (AB és CD) valamely harmadikkal (EF -fel) párhuzamos, egymás közt is párhuzamos.

Mert, ha EF harmadik egyenes vonalra merőleges síkot állítunk, ez a megelőző tantételnél fogva AB és CD vonalakkal is derékszöget alkot, következésképp a 4. pontnál fogva $AB \parallel CD$ -vel.

7. Ha A pontból (171. ábra) MN síkra egy merőleges és több ferde egyenest húzunk, ezek közül:

a) AB merőleges a legrövidebb.

171. ábra.



b) Ama ferde egyenesek, melyeknek átdőfési pontjuk a merőleges talppontjától egyenlő távol van, egyenlők. Így pl.:

ha: $CB = DB = EB$, akkor: $AC = AD = AE$ (miért?).

c) Ellenben, amely ferde vonalnak az átdőfési pontja a merőlegeshez közelebb van, az rövidebb.

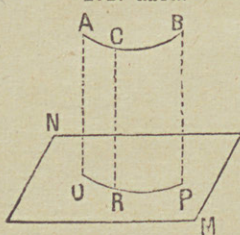
Igy ha: $\overline{BD} < \overline{BF}$ -nél \overline{AD} is $< \overline{AF}$ -nél. Ép úgy viszont. (Miért?)

64. §. Az egyenes vetülete a síkon. Az egyenes hajlásszöge.

Az A pontból (172. ábra) MN síkra bocsátott merőleges egyenes O talppontját A pont MN síkon való vetületének (projekció) nevezzük. Eszerint AB vonal MN síkon való vetületén azon OP egyenest

értjük, mely az adott vonal összes pontjainak vetületeit magában foglalja. Az adott síkot, melyre valamely pontot, vagy vonalat vetítünk, *vetületi síknak*, vagy *alapsíknak*, a merőlegeseket pedig *vetítő sugaraknak* nevez- zük.

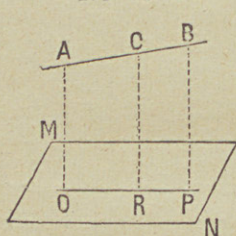
172. ábra.



A fentebbi értelmezés szerint: a) a vetületi síkban fekvő pont saját magának vetülete; b) az alapsíkra merőlegesen álló egyenesnek pont a vetülete; mégpedig a merőleges vonal talppontja.

Az egyenes vonal vetülete bármely síkon egyenes vonal.

173. ábra.



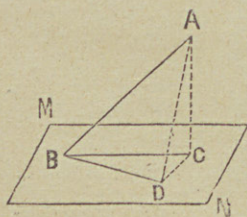
Legyen AB az adott egyenes (173. ábra), MON a vetületi sík. Ha AB egyik pl. A pontjából MN síkra AO vetítő sugarat húzzuk és e merőleges vonalon és AB -n keresztül BAO síkot vezetjük, ez a vetületi síkot OP egyenesben metszi, és OP egyszermind a keresett vetület. Mert, ha AB egyenes többi pontjaiból pl. B és C pontokból MN síkra a merőleges vetítő sugarakat meghúzzuk, ezek mind párhuzamosak AO -val, következésképp BAO síkban vannak: tehát a vetületi síkot csak az OP egyenesben metszhetik.

Ezért valamely egyenes vonal vetületét úgy határozzuk meg, hogy két pontjának a síkon való vetületét egyenes vonallal összekötjük; az összekötő egyenes lesz az adott egyenes vonal vetülete.

2. *Valamely egyenes vonal a vetületével kisebb szöget fog be, mint a vetületi sík bármely más egyenes vonalával.*

Jelöljük az MN síkhoz ferde irányú AB egyenes talppontját B -vel (174. ábra) és vonjuk A pontból AC -t a síkra merőlegesen,

174. ábra.

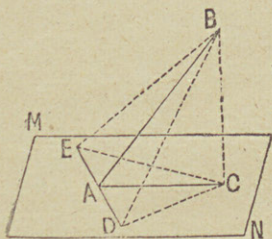


azaz: $\overline{AC} \perp MN$. A fentebbiek szerint BC egyenes AB -nek vetülete MN síkon. Ha ez utóbbi síkban B ponton keresztül egy másik, pl. BD egyenest húzunk, úgy ABC szög kisebb ABD -nél. Mert legyen BD egyenlő BC -vel, és kapcsoljuk össze D pontot A -val, akkor ABC és ABD háromszögekben AB oldal közös és $BC = BD$, ámde $AC < AD$ (lásd 5. §. 7. p.) tehát $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ABD$ -nél.

ABC szögét AB egyenes vonal és MAN sík *hajlás-szögének* nevezzük.

3. *A vetületi síkban azon egyenes, amely adott ferde vonal vetületével derékszöveget alkot, magával a ferde vonalal is derékszöveget alkot.*

175. ábra.



Legyen AB (175. ábra) ferde vonalvetülete MAN síkon AC . Legyen továbbá $AD \perp AC$ -re; akkor $BAD \sphericalangle = R$.

Mert, hosszabbítsuk meg AD egyenest DA irányban és legyen $AE = AD$ -vel, végül kapcsoljuk össze D és E pontot B és C -vel, akkor:

- (1) $CAD \triangle \cong CAE \triangle$, következésképp $CD = CE$,
- (2) $BCD \triangle \cong BCE \triangle$, „ $BD = BE$,
- (3) $BAD \triangle \cong BAE \triangle$, tehát $BAD \sphericalangle = BAE \sphericalangle = 90^\circ$.

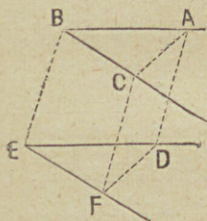
(4) Viszont, a síkban fekvő azon egyenes vonal, mely a ferde vonalal ennek talppontján derékszöveget alkot, a ferde vonalvetületével is derékszöveget alkot. (L. a 175. ábrát.)

Itt is a fentebbi 3 egyenlet érvényes, azonban megfordított rendben.

65. §. Párhuzamos egyenes vonalak és síklapok.

1. *Oly szögek, melyeknek száraiik párhuzamosak, és egy felé irányulnak, egyenlők.*

176. ábra.



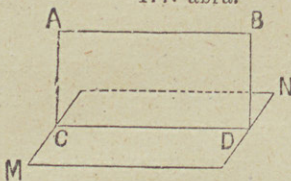
Legyen $\overline{BA} \parallel \overline{ED}$, és $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ (176. ábra); ezenkívül feltesszük, hogy a párhuzamos szárai egy felé irányulnak, más szóval, vagy mind a két szög hegyes, vagy mind a kettő tompa.

Legyen $BA = ED$, és $BC = EF$; továbbá húzzuk meg BE , CF , AD , AC és DF egyeneseket. Az ekképp alakított $ABED$ és $CBEF$ idomok parallelogrammák, mert mindegyikben két átellenes oldal párhuzamos és egyenlő. Ennek folytán $ADFC$ is parallelogramma (miért?); tehát $AC = DF$; és:

$ABC \triangle \cong DEF \triangle$, tehát $ABC \sphericalangle = DEF \sphericalangle$.

2. *Ha valamely AB egyenes vonal az MN síklapon fekvő bármely pl. CO egyenessel párhuzamos, akkor magával a síkkal is párhuzamos (177. ábra.)*

177. ábra.



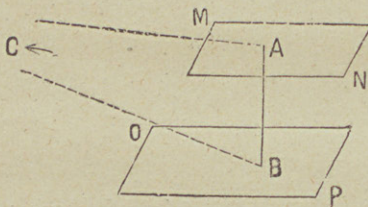
Mint hogy $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ -vel, mind a kettő a közös $ABCD$ síkba tartozik. Ha \overline{AB} vonal MN síkkal találkoznék, találkozásuk pontja a két sík közös átmetsző vonalába azaz CD -be esnék; ámde ez a föltétellel ellenkezik, mert $AB \parallel CD$ -vel. Az ellenmondás csak úgy szűnik meg, ha AB vonal MN síkkal párhuzamos.

3. Viszont ha AB egyenes MN síkkal párhuzamos és AB vonalon keresztül oly síkot vezetünk, mely az adott síkot metszi, a CD metsző vonal AB egyenessel párhuzamos.

(L. a 177. ábrát.) Ezt indirekt módon kell bebizonyítani.

4. Ha valamely AB egyenes vonal MN és OP két síklapra merőlegesen áll, e két sík párhuzamos. (178. ábra.)

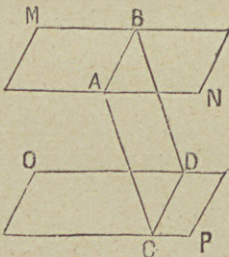
178. ábra.



Mert, ha MN sík nem lenne OP -vel, a közös él egyik pontjából pl. C -ből AB merőleges vonal talppontjához két egyenes vonalat (AC -t és BC -t) húzhatnánk és ennek folytán oly egyenes vonalú háromszög támadna, mely két derékszöveget foglalna magában; ily háromszög azonban nem alakítható; tehát MN sík OP -vel.

5. Ha két párhuzamos síkot egy harmadikkal átmetszünk, a metszés vonalai párhuzamosak. Így ha MN -et és OP -t (179. ábra) ABC metszi, úgy $AB \parallel CD$.

179. ábra.

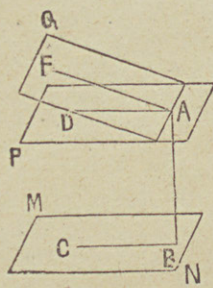


Mert, ha a metsző síkban fekvő AB és CD metsző vonalak nem lennének párhuzamosak, okvetetlenül találkoznának egymással; ámde ez esetben az adott MN és OP síkok is összeérnének, ez azonban a föltételnél fogva lehetetlen, tehát a metsző vonalak szükségszerűen párhuzamosak.

6. Ha valamely egyenes vonal két párhuzamos sík közül az egyikkel párhuzamos, a másikkal is párhuzamos.

7. Adott síkhoz valamely kívül fekvő ponton keresztül csak egy párhuzamos síkot fektethetünk.

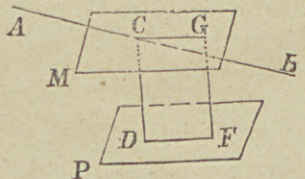
180. ábra.



Legyen MN az adott sík (180. ábra), A a külső pont és AP sík $\parallel MN$ -nel. A -ból az adott síkra AB merőlegest húzzuk. Most, ha AP síkon kívül még egy párhuzamos sík pl. AQ léteznék, AB egyenesen keresztül oly síkot fektethetnénk, mely MN , AP és AQ síkokat BC , AD és AF egyenes vonalakban metszené. Ekkor azonban AD párhuzamos lenne BC -vel és AF is \parallel lenne BC -vel, ami képtelenség. E szerint AQ sík nem lehet $\parallel MN$ síkkal, tehát a behozonyítandó tétel igaz.

8. Ha valamely egyenes vonal két párhuzamos sík közül az egyiket átdöfi, akkor kellően meghosszabbítva a másikat is találni fogja

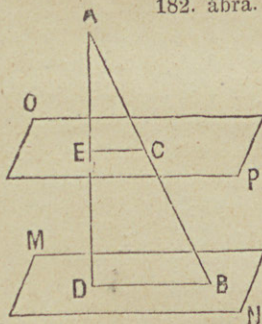
181. ábra.



Legyen M sík $\parallel P$ síkkal (181. ábra). Ha \overline{AB} az előbbi C pontban átdöfi, akkor kellően meghosszabbítva az utóbbit is találja; mert, ha ez nem következne be, \overline{AB} párhuzamos lenne P síkkal. Ámde ha most \overline{AB} vonalon és P sík valamelyik pontján pl. D -n keresztül $FDCG$ síkot vezetnők, DF -nek a 3. pontnál fogva párhuzamosnak kellene lennie AB -vel másrészt pedig ugyanaz a DF az 5. pontnál fogva egyszersmind \parallel lenne \overline{CG} -vel. E szerint $CDFG$ síklap C pontján keresztül DF -hez két párhuzamost lehetne húzni, ez pedig lehetetlen. Tehát AB nem lehet $\parallel P$ síkkal és így kellően meghosszabbítva átdöfi azt.

9. Amely egyenes két párhuzamos sík közül az egyikre merőleges, a másikra is merőleges. (Miért?)

182. ábra.



10. Ha két párhuzamos síkot ugyanazon ferde vonallal átmejszünk, ez mind a két síkkal egyenlő hajlási szöget alkot.

Legyen MN sík $\parallel OP$ -vel (182. ábra) AB ferde vonal valamelyik pontjából pl. A -ból MN síkra AD merőlegest bocsátva, ez az előbbi tantételnél fogva OP síkra is merőleges. Kössük össze B pontot D -vel és C -t E -vel. Minthogy $BD \parallel CE$ -vel, $\angle ABD \simeq \angle ACE$.

11. Ha két sík egy harmadikkal párhuzamos, egymással is párhuzamos.

Ezt a harmadik síkra merőlegesen állított vonal segítségével bizonyítjuk be.

66. §. A lapszögekről. Két sík hajlási szöge.

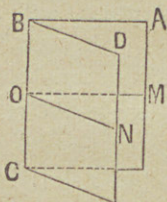
Két egymást metsző sík *lapszöget* alkot. Ezt is forgásból származottnak tekinthetjük, és így kimondhatjuk, hogy *a lapszög a síklapnak egy egyenes körül való forgásából ered*. Ha t. i. a síkot a benne fekvő egyenes vonalak valamelyike körül körülforgatjuk, a forduló síklap mindegyik helyzete az eredeti helyzettel egy-egy *lapszöget* zár be. A lapszög tehát a *sík* fordulásának nagyságát méri. A lapszöget alkotó síkokat *szárlapoknak* hívjuk.

A lapszöget négy betűvel szokás jelölni, ekkép: $A(BC)D$ (183-ik ábra). A két középső betű a síkok BC metsző vonalát, azaz a lapszög *élét*, a két szélső betű a két síklapot jelöli.

Amely lapszögek síkjai egymásba illeszthetők, azok *egyenlők*.

A lapszöget azon egyenes vonalú szöggel mérjük, melyet a közös él valamely pontján a két síkban meghúzott merőlegesek befognak; ezt a szöveget a két sík *hajlás-szögének* nevezzük.

183. ábra.



Igy ha ABC síkban (183. ábra) OM egyenes vonal $\perp BC$ -re és DBC síkban $ON \perp BC$ -re; akkor MON szög a nevezett síkok hajlási szöge és egyszersmind $A(BC)E$ lapszög mértéke.

Ha valamely lapszög egyik síkját a közös élen túl megnyújtjuk, két *melléklapszög* keletkezik. Ha a lapszög a melléklapszögével egyenlő, azt *deréklapszögnek* nevezzük. A deréklapszöget alkotó síkok *merőlegesen állanak* egymásra. A fogalmak és elnevezések hasonlóságából magyarázat nélkül is megérthető, mi a *hegyes*, mi a *tomp* lapszög mik a *csücslapszögek*? Továbbá könnyű kimutatni: hogy a *deréklapszögek mind egyenlők*, szintúgy a *megfelelő csücslapszögek is egyenlők*, továbbá, hogy *két melléklapszög együttesen két deréklapszöggel, az ugyanazon él körül fekvő lapszögek összege pedig négy deréklapszöggel egyenlő*.

E tétel bebizonyításai az egyenes vonalú szögekre vonatkozó bizonyításokkal tökéletesen megegyezők.

A hajlási szög tulajdonságai a következők:

1. *A hajlási szög az él bármely pontján egyenlő.*
2. *Az él a hajlási szög síkjára merőlegesen áll.*

3. *Egyenlő lapszögeknek egyenlő hajlás-szögek felelnek meg*, mert két egyenlő lapszöget okvetetlenül egymásba illeszthetünk akkép, hogy nemcsak síkjaik és élük, hanem a megfelelő hajlási szögek szögpontjai is egybeesnek: ekkor azonban az utóbbiak *szárai* is össze-

esnek, mert ugyanazon síkon az egyenes vonalra bizonyos pontjában csak egy merőleges vonalat lehet húzni.

4. Ebből önként folyik, hogy a deréklapszögeknek megfelelő hajlási szögek derékszögek.

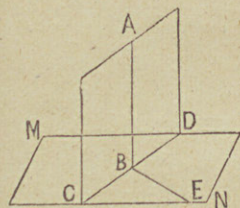
5. Két lapszög aránya mindig egyenlő a megfelelő hajlási szögek arányával. Ugyanis, a két lapszög vagy összemérhető, vagy nem. Első esetben tételünk a 3. pontnak egyszerű folyománya. Második esetben e tétel helyességét közvetve, az első eset alapján bizonyítjuk be.

A hajlási szögek eme tulajdonságaiból nyilvánvaló, hogy: ha valamely lapszöget a derék lapszög 90 dik részével, vagyis a lapszög-fokkal megmérünk, ez utóbbi egység annyiszor találatik az adott lapszögben, ahányszor a közös szögfok a megfelelő hajlási szögben. Ezért a hajlási szög méltán szolgál a lapszög mértékül.

67. §. A merőleges síkokról.

1. A síkra merőlegesen álló egyenes vonalon áthaladó második sík az előbbi síkra merőlegesen áll.

184. ábra.

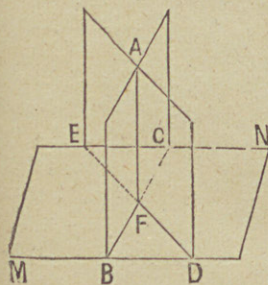


tehát ABC sík \perp MN síkra.

Legyen AB egyenes \perp MBN síkra, (184. ábra). Tegyük fel, hogy az AB -n átmenő sík az adott MN síkot CD egyenesben metszi. Húzzuk meg B talpponton keresztül MN síkban a BD -re merőleges BE egyenest. Az ekkép származó ABE szög a két sík hajlási szögét ábrázolja; minthogy pedig $ABE \sphericalangle = 90^\circ$,

2. Viszont, ha két merőleges sík egyikében a közös élre merőleges egyenest húzunk, ez a másik síkra is merőleges. Mert legyen

185. ábra.



ACD sík \perp MN síkra és \overline{AB} egyenes \perp \overline{CD} -re. Vonjuk BE -t MN síkban merőlegesen CD vonalra. Az ekkép származó $ABE \sphericalangle = 90^\circ$, mert a két sík hajlási szöge a föltételnél fogva derékszög. Eszerint $\overline{AB} \perp \overline{BE}$; ámde azonkívül $\overline{AB} \perp \overline{CD}$; tehát $AB \perp MN$ síkra.

3. E tételből önként következik, hogy: ha két merőleges sík közös élének egyik pontjában az egyik síkra merőlegest állítunk, ez a merőleges teljesen a másik síkban fekszik.

4. Ha két sík merőlegesen áll ugyanazon harmadikra, az előbbi kettőnek éle is merőlegesen áll a harmadik síkra.

Ugyanis tegyük föl, hogy ABC és ADE sík $\perp MN$ síkra (185. ábra.) Most, ha az előbbi két sík AF metsző vonalának F talppontján MN síkra merőlegest húzunk, ennek a 3. p.-nál fogva úgy ABC , mind ADE síkba kell esnie; e merőleges vonal tehát nem lehet más, mint az utóbbi síkok közös éle: AF .

68. §. A legegyszerűbb térmértani szerkesztések.

A térmértani szerkesztések annyiban lényegesen különböznek a síkmértaniaktól, amennyiben azok végrehajtására semmiféle eszközünk sem lévén, csak gondolatban fejthetők meg; ellenben a síkmértani szerkesztések vonalzó és körző segítségével valósággal végrehajthatók. Amazoknak csupán elméleti becslük van, ezek ellenben gyakorlatilag is alkalmazhatók.

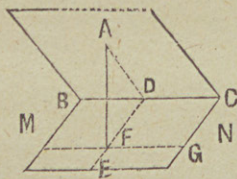
A térbeli szerkesztések következő három egyszerű alapfeladatra vezethetők vissza:

- Három ponton keresztülhaladó sík szerkesztése.
- Valamely sík- és egyenes vonal átdőfési pontjának fölkeresése.
- Két sík metszövonalának meghatározása.

Ezen követelményeken kívül a síkmértani szerkesztések ismerete is elengedhetetlenül szükséges.

1. Adott A pontból MN adott síkra merőleges vonal szerkesztendő.

186. ábra.



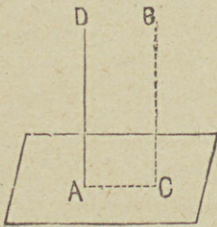
Húzzuk meg az adott síkban a tetszés szerinti BC egyenest (186. ábra) és ez utóbbin meg A ponton keresztül fektessük ABC síkot; most ebben A pontból BC -re AD merőlegest húzván, emeljük D pontban az MN síkban $DE \perp BC$ egyenest, végre ADE szög síkjában $AF \perp DE$ -et; akkor AF egyenes $\perp MN$ síkra.

Ennek bebizonyítása céljából húzzuk meg F' pontból MN síkban FG -t $\parallel BC$ -vel.

Mint hogy BC úgy AD , mint ED -vel derékszöveget alkot, azért $BC \perp ADF$ szög síkjára is; következésképp a BC -vel párhuzamos FG szintén $\perp ADF$ síkra, tehát $FG \perp AF$ -re is. Eszerint $AF \perp FG$ -re és ezenkívül $AF \perp FD$ -re, tehát: $AF \perp MN$ síkra.

2. A sík valamely adott A pontjában szerkesszünk a síkra merőleges egyenest.

187. ábra.



Húzzuk meg a síkon kívül fekvő, egyébként tetszés szerinti B pontból (187. ábra) BC merőlegest továbbá kössük össze A -t C -vel, és vezessük BCA szög szárain keresztül BCA síkot, melyben AD legyen párhuzamos BC -vel. Ezen $AD \perp$ az adott síkra.

3. Szerkesszünk a síkon kívül adott A ponton keresztül az adott síkhoz párhuzamos egyenest. (177. ábra.)

Vezessünk a kijelölt A ponton keresztül egy síkot, mely az adott MN síkot átmetszi, és húzzuk meg A pontból az új síkban a metsző vonalnak megfelelő párhuzamost; ez az adott síkkal is párhuzamos.

Minthogy az új síkot tetszés szerint vezettük A ponton keresztül, azért számtalan párhuzamos vonható azaz, a feladat határozatlan.

4. Valamely adott pontból két adott síkhoz párhuzamos egyenes szerkesztendő.

Ha a két sík egymást metszi, akkor az átmetszési egyeneshez vont párhuzamos mind a két síkkal párhuzamos. Ellenben, ha a két adott sík párhuzamos, akkor a feladat az előbbivel azonos.

5. Adott A ponton keresztül valamely adott MN síkhoz párhuzamos sík szerkesztendő. (E szerkesztést azon az alapon végezhettük, hogy a párhuzamos szárakkal bíró szögek párhuzamos síkokban fekszenek.)

6. Szerkesszünk valamely egyenes vonal meghatározott A pontján keresztül ugyane vonalra merőleges síkot.

Vezessünk az adott egyenes vonalon keresztül két síkot; húzzuk meg mindegyikben az adott A ponton keresztül a mondott egyenesre az illető merőleges vonalakat; az utóbbiak által meghatározott síklap az adott egyenes vonalra merőlegesen áll. (Lásd 63. §. 1. p.)

7. Szerkesszünk valamely meghatározott A pontból adott BC egyenesre merőleges síkot. (186. ábra.)

Az adott A ponton és BC egyenesen keresztül síkot vezetve, húzzuk ebben AD -t merőlegesen BC -re, ezután fektessünk BC -n keresztül még egy másik síkot és húzzuk ebben ismét DE -et merőlegesen BC -re; az ADE -n átmenő sík $\perp BC$ -re.

8. Valamely adott AB egyenes vonalon keresztül vezessünk oly síkot, mely egy másik MN síkra merőleges.

Ha az adott AB vonal valamely pontjából MN síkra merőlegest húzunk és ezen, meg AB -n keresztül síkot vezetünk, az utóbbi merőlegesen áll MN síkra.

9. Bizonyos ponton keresztül vezessünk oly síkot, amely adott egyenessel párhuzamos, és adott síkra merőleges.

Előbb a kijelölt ponton keresztül meghúzzuk a párhuzamost az adott egyeneshez, azután a merőlegest az adott síkra; az eme két vonal meghatározta sík a feladat mindkét kívánalmának megfelelő.

10. *Határozzuk meg két különböző síkban fekvő egyenes távolságát.*

11. *Határozzuk meg azon sík fekvését, amely négy nem ugyanazon síkban lévő adott A, B, C és D ponttól egyenlő távol van.*

12. *Valamely A ponton keresztül fektessünk oly síkot, mely két nem ugyanazon síkba tartozó BC és DE adott vonalhoz párhuzamos.*

13. *Keressük valamely adott fekvésű sík azon pontját, mely a síkon kívül fekvő három kijelölt ponttól egyenlő távolságra esik.*

Kilencedik fejezet.

A testszögekről.

69. §. A testszög fogalma. Csúcs- és sarktestszögek.

Ha egymást páronként metsző három, vagy több sík élei ugyanazon pontban összetalálkoznak, úgy e síkok a térnek egy oldalon nyitott részét fogják körül, amelyet *testszögnek* nevezünk. A szoba padozata és két fala ott, ahol összeérnek, testszöget alkotnak. Minden testszögnek megvan a párja, melyet az előbbihez képest *külső* testszögnek nevezünk. Ez épen így van az egyenes vonalú szögeknél is, melyek szintén csak párosan gondolhatók. Három *végtelen kiterjedésű*, nem párhuzamos sík, ha egy közös pontban összeér, a végtelen tért *nyolc* testszögletre osztja.

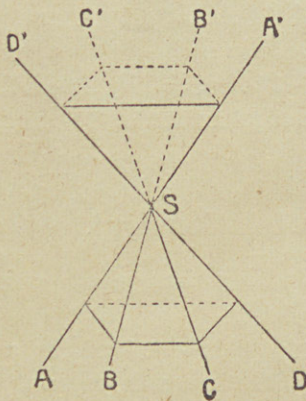
A közös pontot a testszög *csúcsának*, a találkozó síkokat *oldallapoknak*, metsző vonalaikat a testszög *éleinek*, és a két-két szomszédos él bezárta szögeket *élszögeknek* nevezzük.

Minden testszögben az élek, élszögek és lapszögek száma az oldallapok számával egyenlő. (Miért?)

A testszöget úgy szoktuk megjelölni, hogy a csúcspont melletti betű első helyre tesszük, az éleket jelző betűket pedig zárjelbe foglalva a csúcspont betűje után írjuk, ily módon: $S(ABCD)$. (188. ábra.)

Ha valamely $S(ABCD)$ testszög éleit a csúcson túl megnyújtjuk, $S(A'B'C'D')$, új testszög keletkezik, melyet az előbbihez képest *csúcs*testszögletnek nevezünk. Világos, hogy ez utóbbinak él- és lapszögei kölcsönösen egyenlők az eredeti testszög hasonnevű

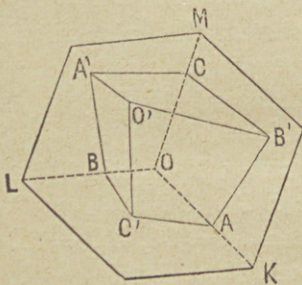
részeivel, mindamellet a két testszög még sem egybevágó, azaz egymásba helyeztetvén, nem födi egymást, mert az él- és lapszögek mindegyik testszögben más-más rendben sorakoznak. Ugyanis képzeljük $S(A'B'C'D')$ testszögnek $SA'D'$ oldalát (mely a papír síkjába esik) az eredeti testszög megfelelő SAD oldallapjára illesztve akkép, hogy mind a két testszög élei a közös síktól egyfelől essenek; már most, ha SD élől kiindulva a két testszöget körüljárjuk, az él- és lapszögek ellenkező sorrendben tűnnek szemünkbe. Az ilyen testszögeket *szimmetrikus*oknak mondjuk. Szimmetrikus testszögek tehát azok, melyeknek megfelelő él- és lapszögeik egyenlők ugyan, azonban megfordított sorrendben sorakoznak.



Az alábbiakban csak oly testszögekről szólunk, melyeknek lapszögei behajlók, azaz 180° -nál kisebbek.

Minden testszögnek megfelel egy lapszögeit két derékszöggé egészítik ki. utóbbinak élszögei az előbbinek lapszögeit két derékszöggé egészítik ki. élszögeit

189. ábra.



Ennek bebizonyítása végett $O(KLM)$ testszög belsejében (189. ábra) tetszés szerint felvesszünk egy O' pontot: ebből a nevezett testszög három oldalsíkjára OA' , OB' , OC' merőlegeseket vonjuk, és két-két merőlegesen keresztül síkot fektetünk; e három sík az eredeti testszög éleit A , B és C pontokban metszi. Lássuk már most az új $O(A'B'C')$ és az eredeti testszög között milyen vonatkozás van.

Először is nyilvánvaló, hogy az új testszög oldallapjai, u. m. $AB'O'C'$, $BC'O'A'$ és $CA'O'B'$ síkok az eredeti testszög OA , OB , OC éleire merőlegesen állanak; következőleg $B'AC'$, $C'BA'$ és $A'CB'$ szögek az eredeti síkok hajlási szögei, vagyis az $O(ABC)$ testszög lapszögei. Ámde: $B'O'C' \sphericalangle + B'AC' \sphericalangle = 2R$, $C'O'A' \sphericalangle + CBA' \sphericalangle = 2R$ és $A'O'B' \sphericalangle + A'CB' \sphericalangle = 2R$;

tehát az új testszög élszögei az eredetinek lapszögeit két derékszöggé egészítik ki.

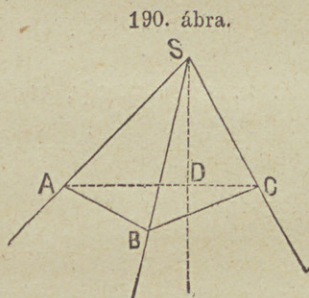
Továbbá, az $A'B$ és $A'C$ egyenesek $A'O'C'$ és $A'O'B'$ síkokban az $A'O'$ egyenesre merőlegesen állanak, tehát $BA'C$ szög a nevezett síkok hajlási szöge, amely egyszersmind az új testszög $O'A'$ élén fekvő lapszöveget ábrázol. Hasonlólag $CB'A$ és $AC'B$ szögek az új testszög másik két lapszöveget képviselik. Azonban:

$BA'C \sphericalangle + BOC \sphericalangle = 2R$, $CB'A \sphericalangle + COA \sphericalangle = 2R$, $AC'B \sphericalangle + AOB \sphericalangle = 2R$, tehát az új testszög lapszögei az eredeti testszög élszögeit két derékszöggé egészítik ki.

70. §. A testszögek általános tulajdonságai.

1. Minden háromélű testszögben két élszög összege nagyobb a harmadik élszögnél.

E tantételt csak arra az esetre szükséges bizonyítani, ha a harmadik élszög (t. i. az, melyet a másik kettővel összehasonlítunk) a legnagyobb, máskülönben a tantétel már magában világos.



Tegyük föl tehát, hogy $S(ABC)$ testszögben (190. ábra) ASC élszög a legnagyobb. Akkor:

$$ASB \sphericalangle + BSC \sphericalangle > ASC \sphericalangle\text{-nél.}$$

Ennek bizonyítása végett ASC síkban ASD szöveget egyenlőnek rajzoljuk ASB szöggel, továbbá SD -t $= SB$ -vel, D ponton keresztül tetszés szerinti ADC egyenest vonunk és ennek végpontjait összekapcsoljuk B ponttal.

Minthogy $ASD \triangle \cong ASB \triangle$, tehát $AD = AB$.

Azonban: $AC < AB + BC$; kivonva az egyik oldalon AD -t és a másikon a vele egyenlő AB -t, marad: $DC < BC$ -nél.

Minthogy CSD és CSB háromszögekben $CS = CS$, $SD = SB$ de $DC < BC$ -nél, tehát $CSD \sphericalangle < CSB \sphericalangle$ -nél.

Adjuk ehhez: $ASD \sphericalangle = ASB \sphericalangle$ -et lesz:

$$ASD \sphericalangle + CSD \sphericalangle < ASB \sphericalangle + CSB \sphericalangle, \text{ vagyis:}$$

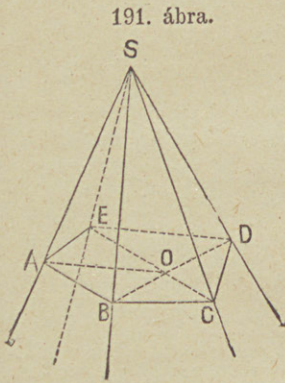
$$ASC \sphericalangle < ASB \sphericalangle + BSC \sphericalangle.$$

2. Bármely testszög élszögeinek összege kisebb négy derékszögnél.

Vezessünk az adott n élű S testszögen (191. ábra) át valamely síklapot akkép, hogy ez annak minden élét messe; a metsző pontok legyenek A, B, C, D stb.; ezután húzzunk a metsző sík egyik pl. O pontjából az élek metszéspontjaihoz egyenes vonalakat. Ez úton

úgy S , mint O pont körül n háromszög alakult. Mindegyik csoportban a szögek összege $2nR$ és így a szögek összege a két idomcsoportban *egyenlő*.

Azonban A pontban az EAO és OAB szögek együttvéve EAB szöget alkotják és ez utóbbi az 1. p. szerint kisebb BAS és SAE szögek összegénél; hasonlólag B pontban $ABC \sphericalangle < ABS \sphericalangle + SBC \sphericalangle$ -nél; ugyanez áll $ABCDE$ ábra többi szögeiről is. Ebből azt következtetjük, hogy az O pont körül lévő háromszögekben az AB, BC, CD stb. vonalakon fekvő szögek összege kisebb mint az S pont körül alkotott háromszögekben; ebből ismét szükségképpen következik, hogy az O pont körül lévő szögek összege nagyobb, mint az S pont körül levőké, mert különben a szögek összege a két háromszög-



csoportban nem lehetne egyenlő. Ámde az O pont körül található szögek összege $4R$, tehát világos, hogy az S szöget alkotó n élszög összege kisebb $4R$ -nél.

3. *Bármely n élű testszögben, melynek lapszögei egyenként kisebbek 180° -nál, a lapszögek összege kisebb $2n$ derékszögnél, azonban nagyobb $2n-4$ derékszögnél.*

Mert a testszögnek egy-egy lapszöge a sarktestszög megfelelő élszögével együtt $2R$. Ámde a sarktestszögben az élszögek összege nagyobb O -nál és kisebb $4R$ -nél (l. a 2. pontot) tehát az adott testszögben a lapszögek összege kisebb $2nR$ -nél, azonban nagyobb $2nR-4R$ -nél.

Ennek következtében: *minden háromélű testszögben a lapszögek összege nagyobb két és kisebb hat derékszögnél.*

71. §. A háromélű testszögek meghatározása.

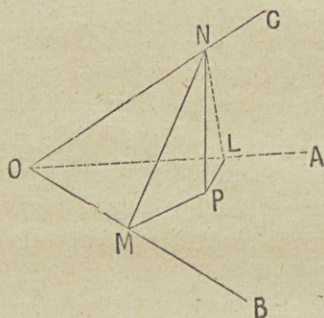
A mily fontos a háromszög a síkmértanban, oly nagy jelentőségű a háromélű testszög a térmértanban. Felvetjük most a kérdést, hogy: *hány alkotórész szükséges és elégséges a háromélű testszög meghatározására?*

Hosszas fejtegetés nélkül is átlátjuk, hogy e célra egy, vagy két alkotórész nem elég, hanem legalább is *három adott alkotó-*

rész ismerete szükséges. Mielőtt azonban a különböző eseteket tüzetesen tárgyalnók, ismétlések elkerülése végett előre bocsatjuk azon térbeli idom leírását, mely későbbi vizsgálataink alapjául szolgál.

Legyen $O(ABC)$ valamely háromélű testszög (192. ábra), melyben rövideg kedvéért az élszögeket a, b, c -vel, a lapszögeket α, β, γ -val jelöljük; azaz $BOC = a, COA = b, AOB = c$, az a -val szemközt fekvő $B(OA)C$ lapszög $= \alpha$, stb.

192. ábra.



Az OC él valamelyik N pontjából az átellenes AOB síkra NP merőlegest vonjunk, továbbá az utóbbinak P talppontjából az AO élre PL merőlegest és végül LN egyenest húzzuk. A 64. §. 3. pontjánál fogva $AO \perp LN$ vonalra, következőleg NLP szög nem más, mint AOB és AOC síkok hajlási szöge, vagyis $NLP \sphericalangle = \alpha$. Hasonlólag, ha P pontból BO élre PM merőlegest vonjunk és M pontot összekapcsoljuk N -nel, BO él nemcsak PM , hanem MN -nel is derékszöveget alkot; következőleg $NMP \sphericalangle = \beta$.

I. A háromélű testszög meghatározása három élszög alapján. (192. ábra.) A három élszög ismeretes lévén, ON hosszát tetszés szerint felvesszük és valamely síklapon ONL és ONM derékszögű háromszögeket külön-külön megalakítjuk. Ezen alakítás csak egy-egy háromszöveget eredményezhet, mert az átfogó és egy hegyes szög a derékszögű háromszöveget tökéletesen meghatározzák. Ennek folytán OL és OM egyenesek szintén ismeretesek és így azokat AOB szög száraira rámérhetjük. Ezután AOB síkban L és M pontokon keresztül OA -ra és OB -re LP és MP merőlegeseket szerkesztjük, minek következtében LP és MP vonalak hossza is meg van határozva. Végül NP vonal $\perp AOB$ síkra; tehát NPL háromszögből LN , LP oldalakat és LPN szöveget ($= 90^\circ$) ismerjük, következőleg NPL \triangle -et is megalakíthatjuk és ez úton $PLN = \alpha$ szög is meg van határozva. Hasonlólag MPN háromszög is megrajzolható, mert ebből MN és MP oldalak és MPN derékszög ismeretesek, következőleg NMP szög, azaz β is meg van határozva.

Ugyanílyen módon bármely lapszög-pár meghatározható. Ennéltozva állíthatjuk, hogy: *a sor szerint adott három élszög teljesen meghatározza a háromélű testszöveget.*

Innen egyenesen következik, hogy: *az oly háromélű testszögek, melyeknek élszögeik rendre egyenlők, vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak, aszerint, amint élszögeik ugyanazon, vagy megfordított rendben sorakoznak. Továbbá:*

1. *Amely háromélű testszögnek két élszöge egyenlő, annak átellenes lapszögei is egyenlők.* (Lásd a 192. ábrát.) Mert, ha $b = a$, akkor $OLN \triangle \cong OMN \triangle$, tehát $NL = NM$, következésképp $NPL \triangle \cong NPM \triangle$ és így: $\alpha = \beta$.

Ha valamely háromélű testszögnek mind a három élszöge egyenlő, lapszögei is mind egyenlők. Ha mind a három élszög derékszög, a három lapszög is deréklapszög. (Miért?)

2. *A háromélű testszögben a nagyobb élszöggel szemközt levő lapszög nagyobb, mint a kisebbikkel szemközt eső.* (192. ábra.)

II. *A háromélű testszög meghatározása három lapszög alapján.*

Ezen eset a sarktestszög segítségével az I-re vezethető vissza. Mert, ha valamely háromélű testszögből a lapszögek α, β, γ ismeretesekek, egyuttal a megfelelő sarktestszög élszögei a_1, b_1, c_1 is meg vannak határozva; ugyanis $a_1 = 2R - \alpha, b_1 = 2R - \beta, c_1 = 2R - \gamma$. Azonban eme sarktestszög $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ lapszögeit az I. pont alapján meghatározhatjuk; miből azután az eredeti háromoldalú testszög élszögeit is megtudjuk, minthogy $a = 2R - \alpha_1, b = 2R - \beta_1$ és $c = 2R - \gamma_1$.

Tehát: *a sor szerint adott három lapszög teljesen meghatározza a háromélű testszöget.*

Továbbá, *amely háromélű testszögekben a megfelelő lapszögek egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak* aszerint, amint a lapszögek egyenlő, vagy fordított rendben sorakoznak.

Ha *valamely háromélű testszögnek két lapszöge egyenlő, az átellenes két élszög is egyenlő.*

Ellenben, *ha a lapszögek különbözők, a nagyobbik lapszöggel nagyobb élszög van szemben, mint a kisebbikkel.*

III. *A háromélű testszög meghatározása két élszög és a közbenfekvő lapszög alapján.*

Legyenek adva b, c élszögek és a köztük fekvő α lapszög (192. ábra), — ON hosszúságot ismét tetszés szerint felvéve, AOC vagyis b szög síkjában NL merőlegest vonjunk, miáltal L pontot és NL -t megtaláljuk. Már most NLP háromszögből $NPL \sphericalangle = R$, továbbá $NLP \sphericalangle$, vagyis α és NL átfogó ismeretes, következésképp a nevezett háromszög is megalakítható, ami LP és NP

vonalak ismeretére vezet. Ezekután L ponton keresztül AOB síkban AO -ra LP merőlegest húzzuk és erre az imént talált LP hosszúságot átvisszük, P pontból pedig OB -re PM merőlegest vonjuk, miáltal PM és OM egyenesek is meg vannak határozva. Ezek folytán OMN háromszögből $OMN \sphericalangle = R$, OM befogó és ON átfogó ismeretesek lévén, MON , vagyis $BOC \sphericalangle$ (azaz a harmadik élszög) is megtudható. A három élszögből azután az I. pont alapján β és γ lapszögek is meghatározhatók. Tehát:

Bármely háromélű testszög a sor szerint adott két élszög és a közbefogott lapszög által tökéletesen meg van határozva.

Következőleg:

Ha két háromélű testszögben két megfelelő élszög és a közbenfekvő lapszög egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak aszerint, amint az említett alkotórészek egyenlő, vagy fordított sorrendben sorakoznak.

IV. *A háromélű testszög meghatározása két lapszög és a közbenfekvő élszög alapján.*

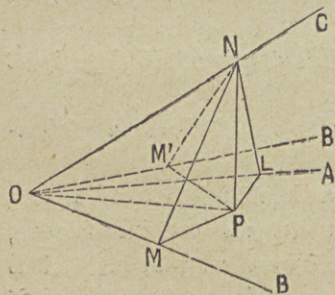
Az előbbi pontból a sarktestszög segítségével következik, hogy:

A háromélű testszöget a sor szerint adott két lapszög és a közbenfekvő élszög teljesen meghatározza. Továbbá, hogy:

Amely háromélű testszögekben két megfelelő lapszög és a közbefogott élszög egyenlők, azok vagy egybevágók, vagy szimmetrikusak, amint t. i. a mondott részek ugyanazon, vagy megfordított sorban következnek.

V. Tegyük fel most, hogy két élszög a és b és a velük átellenes lapszögek egyike α ismeretes. (193. ábra.)

193. ábra.



ON hosszát ismét tetszés szerint felvéve, először az ONL és ONM háromszöget szerkesztjük meg és ezek útján L és M pontokat, továbbá OL , NL és OM egyeneseket meghatározunk. Ezek folytán az LPN háromszögben a derékszögon kívül NL átfogó és NLP szög, vagyis α ismeretesek, következőleg a háromszög többi részét, tehát LP befogót is ismertnek tekinthetjük. Ezen LP az előbb talált OL egyenessel OPL derékszögű háromszöget is meghatározza. Végül az utóbbinak OP átfogója, továbbá OM egyenes és

$OMP \sphericalangle = 90^\circ$ segítségével OPM háromszöget is megalakíthatjuk. Itt azonban kétség forog fenn, amennyiben nem tudhatni, vajjon $OPM \triangle \overline{OP}$ egyenes innenső, vagy tulsó oldalára szerkesztendő-e? Az eddigiek ugyanis erre nézve semmi fölvilágosítást nem adnak, sőt ellenkezőleg, a mondottakon semmi csorba sem esik, ha OB' -et akként húzzuk, hogy $POB' \sphericalangle = POB \sphericalangle$; tehát $OM = OM$ és $PM = PM$. Ennélfogva két élszög és az egyikkel átellenes lapszög a háromélű testszöveget *kétesen* határozzák meg, azaz a mondott részekből *két különböző testszög alakítható*. Ebből ismét azt következtetjük, hogy *oly háromélű testszögek, melyeknek két-két megfelelő élszöge és az utóbbiak egyikének átellenes lapszöge egyenlők, nem szükségkép egybevágók, vagy szimmetrikusak.*

VI. A fentebbiek alapján a sarktestszög segítségével könnyen meggyőződhetünk a következő tételek helyességéről: *Két lapszög és az egyikkel átellenes élszög még nem határozza meg biztosan a háromélű testszöveget, mert a mondott részekből általában két különböző testszög alakítható.* Ennek megfelelőleg:

Az olyan háromélű testszögek, melyeknek két megfelelő lapszögük és az egyikkel átellenes élszögük egyenlő, nem szükségkép egybevágók, vagy szimmetrikusak.

Feladatok a térmértan bevezető részéhez.

VIII. Fejezet. A téridomokról általában.

342. Hány egyenest lehet a térben fekvő 4 ponton át húzni úgy, hogy mindegyiknek a fekvése meg legyen határozva?

343. Adva van n (7) pont a térben; ezek közül a (3) pont egy egyenes vonalba, b (2) egy másik egyenes vonalba, c (4) egy harmadik egyenesbe esik. Hány különböző egyenes vonal fekvése van az adott pontok által meghatározva?

344. Ismeretes 4 (n) egyenes és 7 (n) pont a térben. Hány síklapot fektethetünk ezeken keresztül úgy, hogy minden sík egy vonalat és egy pontot foglaljon magában?

345. Hány különböző sík fekvése van n (7) adott pont által meghatározva?

346. Hány sík van öt egyenes által meghatározva, melyek közül négy párhuzamos egymással és az ötödik két párhuzamost metsz?

347. Egy pontból n (6) egyenes indul ki; hány síkot határoznak meg ezek?

348. Adott ponton át vezessünk oly egyenest, mely egy adott egyenessel párhuzamos.

349. Hány egyenesben metszheti egymást n (5) adott sík?

350. Hány egyenes vonalban metszi egymást n adott sík, ha közülök a párhuzamos és b ugyanazon egyenes vonalon megy keresztül?

Síklapra merőleges egyenes. 351. Ha két pontból valamely síkra bocsátott merőlegesek egyenlők, akkor ezen két pont és a két merőleges két talppontja egy derékszögű négyszög négy szögpontja.

352. Mekkora valamely pontnak a távolsága adott síktól, ha a pontnak a távolsága egy a síkban fekvő ponttól a , és ezen pont távolsága a merőleges talppontjától b ? $a = 11.38$, $b = 4.62$.

353. Valamely egyenlőoldalú háromszög középpontjában a háromszög síkjára merőlegesen áll egy egyenes, melynek hossza b ; ezen merőleges felső végpontjának a távolsága a háromszög egyik szögpontjától c ; mekkora a háromszög területe?

354. Keressük azon pontoknak a mértani helyét, melyek két adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

355. Azon pontok mértani helye keresendő, melyek három adott ponttól egyenlő távolságra vannak.

356. Oly pontok mértani helye keresendő, melyeknek két adott ponttól való távolságaik négyzetei közt állandó különbség (m^2) van.

Az egyenes vetülete. 357. Valamely 12 m. hosszú rúd hajlásszöge a síkhoz 30° ; mily nagy a rúd vetületének a hossza?

358. Mily nagy a 102 m. hosszú egyenes hajlásszöge a síkhoz, ha a vetülete a) fele az egyenes hosszúságának, b) egyenlő végpontjának a síktól való távolságával?

359. Adott külső pont távolsága a síkban fekvő két másik ponttól a és b ; a két távolság vetületeinek aránya $m:n$; mekkora az első pont távolsága a síktól? $a = 143$, $b = 157$, $m:n = 11:17$.

360. Az $AO = 15.6$ m egyenes merőlegesen áll az O középponttal bíró és $r = 4.8$ m sugarú kör síkjára; mily messze van A pont a kör területének minden pontjától?

361. Két térbeli pontnak a síktól való távolsága $a = 3.7$ és $b = 5.8$ m, a pontokból a síkra vont merőlegesek talppontjainak távolsága $c = 4.2$ m; mily nagy a térbeli pontok távolsága?

362. Az ABC háromszög oldalai $AB = 40$ m, $BC = 25$ m, $AC = 25$ m; AB oldal valamely síkban fekszik, míg C szögpontjának a síktól való távolsága 7 m; mekkora a háromszög vetületének területe?

363. Valamely egyenes hajlás szöge egy síkhoz 45° ; a síkban az egyenes talppontján át egyenes van húzva, mely az egyenes vetületével szintén 45° -nyi szöget alkot. Mekkora szöget alkot az a két egyenes?

A sík és a síkkal párhuzamos egyenesek. 364. Ha két párhuzamos egyenes vonal egyike valamely síklappal párhuzamos, a másik is az.

365. Ha valamely síkra merőlegest állítunk, és erre is valamelyik pontjában merőlegest, az utóbbi párhuzamos a síkkal.

366. Ha a síklappal párhuzamos egyenes egyik pontjából merőlegest húzunk a síkra, akkor az merőleges az első egyenesre is.

367. Ha valamely egyenes vonal két összehajló síklap mindegyikével párhuzamos, akkor a síkok közös élével is párhuzamos.

368. Mi azon egyeneseknek mértani helye, amelyek adott ponton mennek át és adott síkkal párhuzamosak?

Két egymást metsző sík. 369. Két sík lapszögét és melléklapszögét felező síkok merőlegesek egymásra.

370. A lapszögét felező sík mindegyik pontja egyenlő távolságban van a lapszögét alkotó síkoktól.

371. Legyen a sík egyik pontjából egy másik síkra bocsátott merőleges fele az ugyanazon pontból a két sík metsző vonalára bocsátott merőlegesnek; mekkora a két sík hajlásszöge?

372. Határozzuk meg a két adott síklaptól egyenlő távol eső pontok mértani helyét, *a)* ha a síkok párhuzamosak, *b)* ha metszik egymást.

373. Azon pontok mértani helye keresendő, melyek két adott síklaptól *a* illetőleg *b* távolságra vannak.

374. Azon pontok mértani helye keresendő, melyeknek két adott síklaptól való távolságaik meghatározott arányban állanak egymáshoz.

Merőleges síkok. 375. A síkban fekvő egyenesen át a síkra csak egy merőleges síkot vezethetünk.

376. Ha valamely behajló lapszög élének egyik pontjában mind a két szárlapra merőlegest állítunk, úgy, hogy mind a kettőt a lapszöghöz képest vagy befelé, vagy kifelé húzzuk; az e vonalák által bezárt szög a lapszögét $2R$ -re egészíti ki.

IX. Fejezet. A testszögről.

A háromélű testszög. 377. Ha valamely háromélű testszög három lapszögét felezzük, a felező síkok ugyanazon egyenes vonalban találkoznak, és az egyenesnek mindegyik pontja a testszög három oldallapjától egyenlő távolságra esik.

378. Ha valamely háromélű testszög három élszögét felezzük és a felező vonalak mentében az illető oldallapokra merőleges síkokat állítunk, ezek azon egyenes vonalban találkoznak, melynek minden pontja a testszög három élétől egyenlő távolságra esik.

379. Minden háromélű testszögben két lapszög összege és a harmadik lapszög közt fennálló különbség kisebb mint $2R$.

380. Ha a térnek valamely pontján keresztül egy adott háromélű testszög élével párhuzamos és egyező irányú három egyenes vonalat húzunk, ezek az adottal egybevágó testszöget alkotnak.

381. Valamely egyenlőszárú háromélű testszög a csúcs testszögével egybevágó.

382. Ha valamely testszög lapjait egy síkkal átmetszük, ezután a testszög csúcsából e síkra merőleges vonalat húzunk és ezt talppontján túl annyival meghosszabbítjuk, hogy a tulsó rész egyenlő legyen az ínnensővel, és végre ha a meghosszabbított rész végpontját a testszög élének metsző pontjaival (ahol t. i. az élék ama síklappal találkoznak) összekötjük, ez összekötő vonalak az adottal szimmetrikus testszöget alkotnak.

383. Ha valamely háromélű testszög belsejében a csúcson át egyenest húzunk, akkor ezen egyenes és a három él által alkotott szögek összeg nagyobb, mint az élszögek fél összege. (70. §. 1. p.)

HÁROMSZÖG-MÉRTAN.

(TRIGONOMETRIA.)

Bevezetés. Tudjuk, hogy valahányszor valamely háromszögnek három független alkotórésze ismeretes: mindannyiszor — egy kétes eset kivételével — a háromszög úgy alakjára, mint nagyságára nézve teljesen meg van határozva, mert a hiányzó részeket *szerkesztés* (constructio) útján könnyen föllelhetjük, és hosszúság- illetőleg szög-mértékkal megmérhetjük. Minthogy azonban az ismeretlen alkotórészeknek szerkesztéssel való meghatározása érzékeink és műszereink tökéletlensége miatt igen hiányos, ez oknál fogva már az ó-kor matematikusai az ismeretlen alkotórészeket *számítás* útján iparkodtak meghatározni.

A mértan azon részét, mely a háromszög adott alkotórészeiből az ismeretlen alkotórészeknek számítás útján való meghatározására tanít bennünket, *háromszög-mértannak* (trigonometria) nevezzük.

Azt az eljárást, mikor a háromszög elégséges számú *adott* alkotórészből az *ismeretlen* alkotórészeket *kiszámítjuk*, a *háromszögek megfejtésének* nevezzük. Ez alapon mondhatjuk, hogy a *trigonometria tárgya a háromszögek megfejtése.*

Tizedik fejezet.

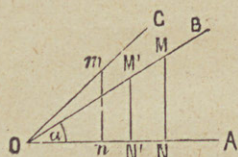
A derékszögű és az egyenlőszárú háromszögek megfejtéséről.

72. §. A szögfüggvényekről.

Minden egyenes vonalú idom oldalakból és szögekből áll; amazokat hosszúság-mértékkal, emezeket szögmértékkal mérjük. E különmeműség következtében a nevezett alkotórészeket *közvetlenül*

összehasonlítani nem lehet. E nehézséget csak úgy tudjuk elhárítani, hogy a szögeket is vonalhosszakban iparkodunk meghatározni. Ha ez sikerül, akkor azután az oldalakat és szögeket is összehasonlíthatjuk egymással és ez összehasonlítás eredményét számokkal kifejezhetjük. Lássuk tehát most, miképen lehet a szögeket egyenes vonalakkal meghatározni.

194. ábra.



E célra legyen $AOB \sphericalangle = \alpha$ valamely hegyes szög (194. ábra); húzzuk OB szárnak egyik M pontjából a másik szárra MN merőleget; ez úton MON derékszögű háromszög keletkezik, mely az α szöget magában foglalja és amelynek oldalai között állandó számarány van, amely nem változik, ha OB szárnak akármelyik pontjából húzzuk is a merőleget. Mert $M'O'N'$ háromszög hasonló MON -hez, tehát megfelelő oldalai arányosak, azaz:

$$\frac{MN}{OM} = \frac{M'N'}{OM'}, \quad \frac{ON}{OM} = \frac{ON'}{OM'} \text{ stb.}$$

Eszerint az említett háromszögekben a megfelelő oldalak aránya *állandó* és mindaddig nem változhatik, amíg a szög meg nem változik. Ellenben, ha a szóban forgó szög megváltozik, az oldalak számaránya is szükségképen megváltozik. Azaz, ha $AOC \sphericalangle > AOB \sphericalangle$ -nél, akkor nem lehet többé

$$\frac{mn}{om} = \frac{MN}{OM},$$

mert ez esetben mon és MON derékszögű háromszögek hasonlóak, következésképpen AOB és AOC szögek szükségképen egyenlők lennének; ez azonban lehetetlen, mert a föltételnél fogva: $AOC \sphericalangle > AOB \sphericalangle$ -nél.

Látni ebből, hogy α szög és az azt meghatározó $MON \triangle$ oldal-arányai közt szoros kapcsolat van; minden hegyes szögnek t. i. meghatározott arányok felelnek meg, melyek semmiféle más hegyes szögre nem vonatkozhatnak. Ilyen, az oldalak mértékszámait közt felállítható arány összesen hat van. Ugyanis a háromszög átfogóját mind a két befogóhoz és az *egyik* befogót a *másikhoz* arányíthatjuk; ez három arányt eredményez; most még e három arányt meg is fordíthatjuk, tehát összesen *hat* különböző arány gondolható. Ezen arányokat *szögmértani számoknak*, vagy *szögfüggvényeknek* (goniometriai függvények) nevezzük, mert értékük a szög mekkoraságától függ, és ehhez képest változik.

Könnyebb megkülönböztetés végett a hat szögfüggvényt külön-külön névvel látjuk el. Nevezetesen MN befogó és OM átfogó arányát α szög *sinus*-ának nevezzük, amit röviden így írunk:

$$\frac{MN}{OM} = \sin \alpha.$$

Eszerint valamely hegyes szög sinusán a szöggel átellenes befogó és az átfogó arányát értjük.

ON befogó és OM átfogó arányát α szög *cosinus*-ának mondjuk és ekkép jelöljük:

$$\frac{ON}{OM} = \cos \alpha.$$

Tehát: valamely hegyes szög cosinusán a szög mellett lévő befogónak az átfogóhoz való arányát értjük.

MN oldalnak ON -hez való arányát α szög *tangens*-ének nevezzük és így írjuk:

$$\frac{MN}{ON} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Ennélfogva valamely hegyes szög tangense nem más, mint a szöggel átellenes befogó aránya a másik befogóhoz.

Ha az elősorolt három arányt megfordítjuk, a másik három szögfüggvényt kapjuk. Névszerint: a tangens nevű oldalarány megfordításából lesz: $ON : MN$ és ennek *cotangens* a neve, amit röviden így írunk:

$$\frac{ON}{MN} = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Tehát valamely hegyes szög cotangense: a szög mellett fekvő befogónak aránya az átellenes befogóhoz.

A cosinus megfordításából lesz $OM : ON$, ez arányt *secans*-nak nevezzük. Jelelkel:

$$\frac{OM}{ON} = \operatorname{sec} \alpha.$$

Valamely hegyes szög secansa az átfogó és a szög mellett lévő befogó arányával egyenlő.

Végül a sinus nevű arány megfordításából lesz: $OM : MN$ és ennek *cosecans* a neve. Jelelkel kifejezve:

$$\frac{OM}{MN} = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Azaz valamely hegyes szög cosecansa annyi, mint az átfogó aránya a szöggel átellenben fekvő befogóhoz.

Mint hogy a derékszögű háromszög befogói egyenként kisebbek az átfogónál, azonban különben korlátlan értékűek, a fentebbi értelmezésekből egyenesen következik, hogy bármely hegyes szögre nézve:

1. A *sinus* és a *cosinus* mindig kisebbek 1-nél, tehát *valódi* törtszámok.

2. A *tangens* és a *cotangens* korlátlan értékűek.

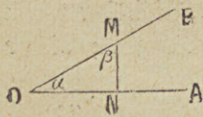
3. A *secans* és a *cosecans* mindig nagyobbak 1-nél; tehát *állörtek*.

Magától értetődik, hogy viszont, valamely *hegyesszög* bármelyik megadott függvénye alapján az illető szöget is meg lehet szerkeszteni; így például, ha $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, oly derékszögű háromszög alakítható, melynek egyik befogója = 1, átfogója = 2 egységgel; az előbbivel átellenes szög a keresett α szög.

73. §. Fő- és pótlófüggvények. A szögfüggvények változásairól.

Az elősorolt szögfüggvények közül a *sinust*, *tangenst* és *secanst* *főfüggvényeknek*, a *cosinust*, *cotangenst* és *cosecans*t pedig *pótlófüggvényeknek* nevezzük. Minden fő-függvénynek egy-egy pótló-függvény felel meg: a *sinus*nak a *cosinus*, a *tangens*nek a *cotangens* stb. A fő- és a pótló-függvények egymással sajátos kapcsolatban vannak.

195. ábra.



Ugyanis legyen $AOB \sphericalangle = \alpha$ valamely hegyes szög (195. ábra), továbbá $MN \perp OB$, és rövidség okáért $NMO \sphericalangle = \beta$; a fentebbi értelmezések szerint:

$$\frac{MN}{OM} = \sin \alpha, \quad \frac{ON}{OM} = \cos \alpha, \quad \frac{MN}{ON} = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{ON}{MN} = \operatorname{cotg} \alpha, \quad \frac{OM}{ON} = \operatorname{sec} \alpha, \quad \frac{OM}{MN} = \operatorname{cosec} \alpha;$$

hasonlóképen β szögre vonatkozólag:

$$\frac{ON}{OM} = \sin \beta, \quad \frac{MN}{OM} = \cos \beta, \quad \frac{ON}{MN} = \operatorname{tg} \beta,$$

$$\frac{MN}{ON} = \operatorname{cotg} \beta, \quad \frac{OM}{MN} = \operatorname{sec} \beta, \quad \frac{OM}{ON} = \operatorname{cosec} \beta.$$

E két rendbeli egyenleteket összehasonlítva látjuk, hogy:

$$\sin \beta = \cos \alpha, \quad \cos \beta = \sin \alpha, \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha,$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{sec} \beta = \operatorname{cosec} \alpha, \quad \operatorname{cosec} \beta = \operatorname{sec} \alpha.$$

Mint hogy $\beta = 90^\circ - \alpha$, ezen egyenleteket ily alakban írhatjuk:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha \text{ stb.}$$

Azaz, minden hegyes szög pótló-függvényei azonosak a megfelelő pótlószög fő-függvényeivel és viszont.

Innen magyarázható a három pótló-függvény elnevezése; *cosinus* t. i. annyit jelent, mint complementi *sinus* (a pótló-szög sinusa), *cotangens* = complementi *tangens* stb.

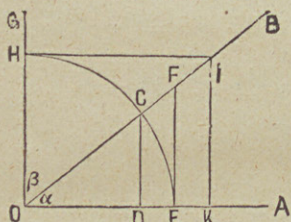
Mint hogy a derékszögű háromszögben változatlan átfogó mellett az egyik hegyes szög növekedésével az átellenes befogó is növekszik, a másik befogó ellenben fogy, világos, hogy:

1. A *sinus*, *tangens* és *secans*, egy szóval, a fő-függvények a hegyes szög nöttével növekednek, ellenben:
2. A *cosinus*, *cotangens* és *cosecans*, szóval a pótló-függvények a hegyes szög nöttével fogynak.

74. §. A szögfüggvények ábrázolása.

A szögfüggvények nevei a körbe rajzolt egyenes vonalaktól származnak. Ez utóbbiak t. i. mintegy térbeli képviselői a szögfüggvényeknek. Ennek kellő megértése végett rajzoljuk $AOB = \alpha$ hegyes szöget (196. ábra) és alakítsunk O szögpontjából kört, melynek sugara

196. ábra.



akkora, mint a hosszúság-egység. E körvonal az AO szárát E pontban, a BO szárát C pontban szeli. Az utóbbiból húzzuk meg AO szárára CD merőlegest; akkor

$$\frac{CD}{OC} = \sin \alpha \text{ és } \frac{OD}{OC} = \cos \alpha;$$

és mert az átfogó hossza = 1, azért: $CD = \sin \alpha$ és $OD = \cos \alpha$, tehát CD vonal, vagyis inkább ennek mértékszámát, α szög sinusát, OD pedig α -szög cosinusát ábrázolja, azonban csak akkor, ha $OC = r = 1$. Mint hogy továbbá a szögeket a megfelelő körívvel mérjük, ezért a *sinust*, *cosinust* és szintúgy a többi függvényeket is a megfelelő *körívre* vonatkoztathatjuk. Ha tehát α szög ívét, azaz EC -t, a -val jelöljük, akkor: $CD = \sin a$ vagyis CD egyenes a ívnek a sinusa és $OD = \cos a$, azaz OD egyenes vonal a ívnek a cosinusa.

A *tangens* és *secans* ábrázolása végett OA szárnak E pontján keresztül meghúzzuk EF merőlegest; ez a kört E pontban érinti és OB szárát F pontban metszi. OFE derékszögű háromszögben:

$$\frac{EF}{OE} = \operatorname{tg} \alpha \text{ és } \frac{OF}{OE} = \operatorname{sec} \alpha,$$

és mert: $OE = r = 1$, tehát $EF = tg \alpha$ és $OF = sec \alpha$, vagy OE ivre vonatkozólag $EF = tg a$, és $OF = sec a$, azaz \overline{EF} az a körívnek érintője (tangense), és OF az a ívnek szelője (secansa). Csakugyan az EF egyenes vonal érinti, \overline{OF} szeli a kört; innen származnak tehát a *tangens* és *secans* elnevezések.

Hátra van még a *cotangens* és *cosecans* ábrázolása. Evégből szerkesszük meg α pótlószögét β -t, azaz vonjuk O -ból OG -t $\perp OA$ -ra. A cotangens és cosecans értelmezése szerint:

$$\frac{OK}{IK} = \cotg \alpha, \text{ és } \frac{OI}{IK} = \operatorname{cosec} \alpha,$$

Itt azonban $IK = OH = r = 1$, és $OK = HI$, tehát:

$$HI = \cotg \alpha \text{ és } OI = \operatorname{cosec} \alpha,$$

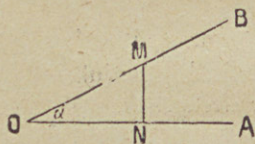
és így mind a hat szögfüggvényt egyenes vonalakkal ábrázoltuk. Ezen vonalakat *szögmérő* (goniometriai) *vonalaknak*, vagy *vonalos szögfüggvényeknek* nevezzük.

A régi matematikusok a szögfüggvényeket az imént előadott módon értelmezték.

75. §. Ugyanazon szög függvényeinek összefüggéséről.

Minthogy a hegyesszög meghatározására egyetlen egy függvény elegendő, kétségkívül lehetséges egy ily szögfüggvényből, például a sinusból, valamennyi többi függvényt leszármaztatni; más szóval egy és ugyanazon szög hat függvénye között bizonyos egyenleteknek kell állaniok. Ezeket könnyen megtalálhatjuk a következő észrevételek alapján.

197. ábra.



Az α szöget meghatározó MON háromszögben (197. ábra) összesen hat oldalarány lehetséges, azonban ezek közül *három* nem egyéb, mint a másik három megfordítása. Nevezetesen a cotangens nem egyéb, mint a tangens megfordított értéke, a secans a cosinusnak megfordítottja és a cosecans a sinusnak megfordított értéke. Azaz:

$$\cotg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}. \quad \text{I.}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad \text{II.}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}. \quad \text{III.}$$

Továbbá MON derékszögű háromszögben Pythagoras tétele szerint:

$$\overline{MN^2} + \overline{ON^2} = \overline{OM^2}, \quad (\dagger)$$

ezen egyenlet mindkét oldalát $\overline{OM^2}$ -tel osztva lesz:

$$\left(\frac{MN}{OM}\right)^2 + \left(\frac{ON}{OM}\right)^2 = 1.$$

Ámde, $MN:OM = \sin \alpha$ és $ON:OM = \cos \alpha$, tehát:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \quad \text{IV.}$$

Ezen fontos egyenletet a szögméртan (goniometria) alap-egyenletének szokták nevezni.

A (\dagger) -tel jelölt egyenletet $\overline{ON^2}$ -tel osztva lesz:

$$\left(\frac{MN}{ON}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OM}{ON}\right)^2;$$

minthogy, $MN:ON = \operatorname{tg} \alpha$, és $OM:ON = \operatorname{sec} \alpha$, tehát:

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 + 1 = (\operatorname{sec} \alpha)^2. \quad \text{V.}$$

Ha a (\dagger) jelű egyenlet mindkét oldalát $\overline{MN^2}$ -tel osztjuk, lesz:

$$1 + \left(\frac{ON}{MN}\right)^2 = \left(\frac{OM}{MN}\right)^2;$$

mivel $ON:MN = \operatorname{cotg} \alpha$, és $OM:MN = \operatorname{cosec} \alpha$, tehát

$$1 + (\operatorname{cotg} \alpha)^2 = (\operatorname{cosec} \alpha)^2. \quad \text{VI.}$$

Megjegyzendő, hogy $(\sin \alpha)^2$, $(\cos \alpha)^2$, $(\operatorname{tg} \alpha)^2$ stb. helyett röviden $\sin^2 \alpha$ -t, $\cos^2 \alpha$ -t, $\operatorname{tg}^2 \alpha$ -t stb. szoktunk írni.

Végre ha $\sin \alpha$ értékét a $\cos \alpha$ -éval osztjuk, hányadosul $\operatorname{tg} \alpha$ -t kapjuk; ugyanis:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{MN}{OM} : \frac{ON}{OM} = \frac{MN}{ON} = \operatorname{tg} \alpha,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad \text{VII.}$$

Ezen *hét* egyenlet alapján valamely hegyes szög bármelyik adott szögfüggvényéből a többi ötöt könnyen kiszámíthatjuk.

Így például, ha valamely szög *cosinusa* lenne ismeretes, a IV. egyenletből:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

helyettesítve ezen értéket a VII. egyenletbe:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha};$$

tekintelbevéve az I. egyenletet:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}};$$

továbbá a II. képlet szerint: $\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$;

végül a III. képlet szerint: $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$.

Hasonlóképen járunk el a többi esetekben is. Az idevágó föladatlok fontosabb eredményeit a következő tábla mutatja.

Adva van	M e g h a t á r o z a n d ó:			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$cotg \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha = \sin \alpha$	$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$cotg \alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\cos \alpha$	$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \cos \alpha$	$tg \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$cotg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$
$tg \alpha$	$\sin \alpha = \frac{tg \alpha}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$tg \alpha = tg \alpha$	$cotg \alpha = \frac{1}{tg \alpha}$
$cotg \alpha$	$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 \alpha}}$	$\cos \alpha = \frac{cotg \alpha}{\sqrt{1 + cotg^2 \alpha}}$	$tg \alpha = \frac{1}{cotg \alpha}$	$cotg \alpha = cotg \alpha$

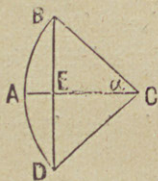
76. §. Néhány hegyes szög függvényeinek meghatározása.

Minden szöget középponti szögnek tekinthetünk oly körben, melynek sugara = 1. Ez esetben:

A hegyes szög sinusa annyi, mint a kétakkora szöghöz tartozó húr mértékszámának a fele.

Azaz, ha $ACB = \alpha$ szög szögpontjából (198. ábra), mint középpontból, oly kört alakítunk, melynek sugara $CA = CB = 1$, és B pontból AC szásra BE merőlegest húzzuk és ezt a kör D pontjáig megnyújtjuk, akkor $\angle ACD = \angle ACB = \alpha$

198. ábra.



és: $BE = ED$, tehát:

$$BE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \text{chorda} (2\alpha)$$

ámde minthogy: $BC = 1$, $BE = \sin \alpha$,
következöleg: $\sin \alpha = \frac{1}{2} \text{chorda} (2\alpha)$.

Eszerint bármely szög sinusa és ez után többi függvényei is könnyen kiszámíthatók, ha a kétakkora szöghöz tartozó húr hossza ismeretes.

Midőn a szabályos sokszögekkel foglalkoztunk, a többi között kiszámítottuk az r sugarú körbe írt *szabályos háromszög, négyszög, hatszög, tizszög* oldalhosszát (l_3, l_4, l_6, l_{10} -et). E sokszögekben az egyes középponti szögek megfelelőleg $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 36^\circ$ nagyságúak; tehát a fentebbi tétel alapján:

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \text{chorda } (120^\circ) = \frac{1}{2} l_3 = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \text{chorda } (90^\circ) = \frac{1}{2} l_4 = \frac{1}{2} \sqrt{2},$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{chorda } (60^\circ) = \frac{1}{2} l_6 = \frac{1}{2},$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{2} \text{chorda } (36^\circ) = \frac{1}{2} l_{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

következőleg:

$$\begin{array}{l|l} \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = 0.86602 \dots & \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0.70710 \dots \\ \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.50000 \dots & \sin 18^\circ = \cos 72^\circ = 0.30901 \dots \end{array}$$

A megelőző § képletei nyomán most már ugyanezen szögek többi függvényei is kiszámíthatók.

A körbe írt n -szög oldalhosszából l_n -ből az ugyanazon körbe írt $2n$ -szög oldalhossza (l_{2n}) és viszont, az utóbbiból az előbbi is kiszámítható. (54. §. 6.) Nevezetesen:

1) a körbe írt szabályos *hatszög* oldalából

a 12-szög, 24-szög, 48-szög, . . . oldalhossza, vagyis

a $30^\circ, 15^\circ, 7^\circ 30'$ -nyi . . . középponti szög húrja,

tehát a fentebbi tétel alapján

a $15^\circ, 7^\circ 30', 3^\circ 45'$ -nyi . . . szögek sinusa is kiszámítható;

2) a körbe írt szabályos *négyszögből*

a 8-szög, 16-szög, 32-szög . . . oldalhosszát, vagyis

a $45^\circ, 22^\circ 30', 11^\circ 15'$ -nyi . . . középponti szög húrját,

tehát megfelelőleg:

a $22^\circ 30', 11^\circ 15', 5^\circ 37' 30''$. . . szögek sinusát számíthatjuk ki;

3) a beírt szabályos *tizszög* oldalából

a 20-szög, 40-szög, 80-szög . . . oldalhosszát, vagyis

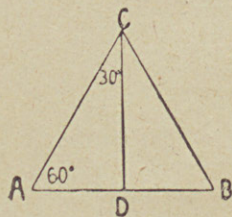
a $18^\circ, 9^\circ, 4^\circ 30'$. . . középponti szögek húrját és megfelelőleg:

a $9^\circ, 4^\circ 30', 2^\circ 15'$. . . szögek sinusát számíthatjuk ki.

Látnivaló ebből, hogy a körbe írt szabályos sokszögek oldalhosszaiból akárhány hegyes szög *sinusát* és egyúttal a hozzá tartozó pótlószög *cosinusát* kiszámíthatjuk. Ugyane szögek többi függvényeit ezután a megelőző §. szerint határozhatjuk meg.

Néhány esetben a számítást a következő egyszerű módon végezhetjük:

199. ábra.



$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - AD^2}}{AC} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

az 5-ik alapegyenlet szerint:

$$1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ = \operatorname{sec}^2 30^\circ = \frac{1}{\cos^2 30^\circ};$$

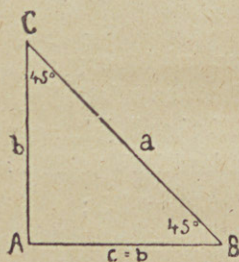
$$\operatorname{tg}^2 30^\circ = \frac{1}{\cos^2 30^\circ} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} - 1 = \frac{1}{3};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{cotg} 60^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}; \quad \operatorname{sec} 30^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \operatorname{sec} 60^\circ = 2.$$

b) Ha az ABC (200. ábra) egyenlőszárú derékszögű háromszöget vesszük szemügyre, azt találjuk, hogy annak mindegyik hegyes szöge 45° ; a befogók egyenlők és így *Pythagoras* tétele szerint:



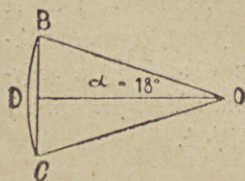
$$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}; \quad \text{és} \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1;$$

$$\operatorname{sec} 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}.$$

c) Ha BC (201. ábra) az egység-sugarú körbe rajzolt szabályos tízszög egy oldala, akkor, amint a planimetriából tudjuk:

201. ábra.



$$BC = 2 \cdot BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{és} \quad \alpha = 18^\circ.$$

Az OBD derékszögű háromszögben:

$$\begin{aligned} \overline{OD}^2 &= \overline{OB}^2 - \overline{BD}^2 = \\ &= 1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}; \end{aligned}$$

$$OD = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}};$$

$$\text{ilyformán: } \sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{BD}{OB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4};$$

$$\cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{OD}{OB} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\text{tg } 18^\circ = \text{cotg } 72^\circ = \frac{BD}{OD} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$\text{cotg } 18^\circ = \text{tg } 72^\circ = \frac{OD}{BD} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1};$$

$$\sec 18^\circ = \text{cosec } 72^\circ = \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$\text{cosec } 18^\circ = \sec 72^\circ = \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5} + 1.$$

77. §. Szögmértani táblák.

Előbb kiszámítottuk néhány hegyes szög függvényeinek az értékeit és általánosságban utaltunk arra az eljárásra, amellyel még több szög függvényeinek a meghatározására juthatunk. Most ama táblázatok rövid megismertetésére törekszünk, amelyekben az egymást természetes sorban követő szögek függvényeinek értékeit rendszeresen összeállítva megtalálhatjuk. Az ilyen táblázatokat *szögmértani tábláknak* hívjuk és ezekből egyrészt az adott nagyságú szögek egyes függvényeinek számértékeit, másrészt az adott függvény-értékből a megfelelő szöveget kikereshetjük. Előreboesátjuk, hogy a szögfüggvények nagyrésze irracionális szám. Racionálisak például:

$$\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1; \quad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.5;$$

$$\text{tg } 45^\circ = \text{cotg } 45^\circ = 1;$$

a többiek általában irracionális számok, amelyeknek való értékeit annál jobban megközelítjük, minél több tizedes jegyig fejezzük ki azokat. Minthogy azonban sok tizedes jeggyel a szorzás, osztás, hatványozás és gyökvonás felette kényelmetlen, sőt terhes feladat; azért a trigonometriai számításokban nem a szögfüggvényeket, hanem azoknak *Briggs-féle* logaritmusait használjuk. Ez az oka, hogy a *szögmértani táblákban* a szögfüggvények helyett azoknak bizonyos számú pl. 4-7 tizedes jegyig terjedő logaritmusait találjuk.

A szögmértani táblák a 0° és 90° közé eső szögek sinusainak, cosinusainak, tangenseinek és cotangenseinek a logaritmusait foglalják magukban; mégpedig oly módon, hogy a felső táblafejek a 0° -tól 45° -ig, az alsók a 45° -tól 90° -ig terjedő szöveget tüntetik fel. A percek és esetleg még a másodpercek tizedes részei is a 0° -tól 45° -ig terjedő szögeknél a tábla baloldalán felülről lefelé, a 45° -tól 90° -ig terjedő szögeknél a tábla jobb oldalán, alulról fölfelé haladó függőleges sorokban vannak feljegyezve. Az ily táblák mindegyikének bevezetésében a tábla berendezésére és használatára vonatkozó ismertetéseket és utasításokat megtaláljuk. Azért még csak a következő megjegyzést tesszük.

Mint hogy a 0° és 90° közé eső szögek sinusai és cosinusai, nemkülönben a 45° -nál kisebb szögek tangensei és a 45° -nál nagyobb szögek cotangensei valódi törtek, amelyeknek negatív karakterisztikájú logaritmusai vannak; azért (helykimélés céljából) a táblázatokban az összes szögfüggvények logaritmusainak karakterisztikájához 10 egység van adva. Használatnál tehát a szögmértani táblából kiírt logaritmusok karakterisztikájából 10 egységet minden alkalommal ki kell vonnunk.

Szögmértani táblakkal oldjuk meg a következő feladatokat:

1. Keressük valamely α szög függvényeinek a logaritmusait Pl. Mivel egyenlő $\log \sin \alpha$, $\log \cos \alpha$, $\log \operatorname{tg} \alpha$, $\log \operatorname{cotg} \alpha$, ha $\alpha = 32^\circ 18' 26''$?

$$\begin{aligned} a) \log \sin 32^\circ 18' &= 9.72783 - 10, \text{ Diff. } 1'' = 0.33 \\ + 0.33 \times 26 &= 8.58 \quad \quad \quad 9 \\ \hline \log \sin 32^\circ 18' 26'' &= 9.72792 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \log \cos 32^\circ 18' &= 9.92699 - 10 \text{ Diff. } 1'' = 0.13 \\ - 0.13 \times 26 &= 3.38 \quad \quad \quad - 3 \\ \hline \log \cos 32^\circ 18' 26'' &= 9.92696 - 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \log \operatorname{tg} 32^\circ 18' &= 9.80084 - 10 \text{ Diff. } 1'' = 0.47 \\ + 0.47 \times 26 &= 12.22 \quad \quad \quad 12 \\ \hline \log \operatorname{tg} 32^\circ 18' 26'' &= 9.80096 - 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \log \operatorname{cotg} 32^\circ 18' &= 10.19916 - 10 \\ - 0.47 \times 26 &= 12.22 \quad \quad \quad - 12 \\ \hline \log \operatorname{cotg} 32^\circ 18' 26'' &= 10.19904 - 10. \end{aligned}$$

2. Keressük valamely goniometriai függvény adott logaritmusáé bôla hozzátartozó szöget. Pl.

$$\begin{array}{r}
 a) \log \sin x = 9.72791 - 10 \\
 \underline{9.72782 - 10 = \log \sin 32^\circ 18'} \\
 9 : 0.33 = \quad \quad \quad + 26'' \\
 \hline
 x = 32^\circ 18' 26''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b) \log \cos x = 9.79106 - 10 \\
 \underline{9.79095 - 10 = \log \cos 51^\circ 50'} \\
 11 : 0.27 = \quad \quad \quad - 40'' \\
 \hline
 x = 51^\circ 49' 20''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 c) \log \operatorname{tg} x = 9.76512 - 10 \\
 \underline{9.76493 - 10 = \log \operatorname{tg} 30^\circ 12'} \\
 19 : 0.48 = \quad \quad \quad + 39'' \\
 \hline
 x = 30^\circ 12' 39''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \log \operatorname{cotg} x = 10.19625 - 10 \\
 \underline{10.19609 - 10 = \log \operatorname{cotg} 32^\circ 29'} \\
 16 : 0.47 = \quad \quad \quad - 36'' \\
 \hline
 x = 32^\circ 28' 24''
 \end{array}$$

3. Keressük valamely adott szög kijelölt függvényének a nagyságát. Pl.

$$a) \sin 32^\circ 18' 26'' = x; \log \sin 32^\circ 18' 26'' = 9.72792 - 10 = 0.72792 - 1; x = 0.5345.$$

$$b) \cos 60^\circ = x; \log \cos 60^\circ = 9.69897 - 10 = 0.69897 - 1; x = 0.5.$$

$$c) \operatorname{tg} 45^\circ = x; \log \operatorname{tg} 45^\circ = 10.00000 - 10 = 0; x = 1.$$

$$d) \operatorname{cotg} 36^\circ = x; \log \operatorname{cotg} 36^\circ = 10.13874 - 10 = 0.13874; x = 1.3764.$$

4. Keressük meg valamely adott goniometriai függvényből a hozzátartozó szöget. Pl.:

$$a) \sin x = 0.5; \log \sin x = 0.69897 - 1 = 9.69897 - 10; x = 30^\circ.$$

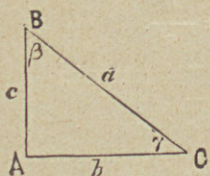
$$b) \cos x = 0.75; \log \cos x = 0.87506 - 1 = 9.87506 - 10; x = 41^\circ 24' 35''.$$

$$c) \operatorname{tg} x = 0.45; \log \operatorname{tg} x = 0.65321 - 1 = 9.65321 - 10; x = 24^\circ 13' 38''.$$

$$d) \operatorname{cotg} x = 5.6; \log \operatorname{cotg} x = 0.74819 = 10.74819 - 10; x = 10^\circ 7' 28''.$$

78. §. A derékszögű háromszögek megfejtésére szolgáló tételek.

202. ábra.



Jelöljük ABC (202. ábra) derékszögű háromszög átfogóját a -val, a két befogót b - és c -vel, a szemben fekvő szögeket megfelelőleg α -, β - és γ -val; akkor a szögfüggvények értelmezése alapján:

$$\sin \beta = \frac{b}{a} = \cos \gamma;$$

$$\cos \beta = \frac{c}{a} = \sin \gamma;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} \gamma;$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} \gamma;$$

czek ily alakban is írhatók:

$$b = a \sin \beta. \quad (1)$$

$$c = a \cos \beta \quad (2)$$

$$b = c \operatorname{tg} \beta. \quad (3)$$

$$c = b \operatorname{cotg} \beta. \quad (4)$$

Szavakba foglalva:

1. A derékszögű háromszög bármelyik befogója annyi, mint az átfogónak és a keresett befogóval szemben fekvő szög sinusának szorzata, vagy az átfogónak és a befogó mellett fekvő hegyes szög cosinusának szorzata.

2. A derékszögű háromszög egyik befogója annyi, mint a másik befogónak és a keresett befogóval szemben fekvő szög tangensének, vagy mint a másik befogónak és a keresett befogó mellett fekvő hegyes szög cotangensének szorzata.

E két tételen kívül a derékszögű háromszögek megfejtésénél felhasználjuk még *Pythagoras* tételét is, amely szerint:

3. A derékszögű háromszög átfogójának négyzete annyi, mint a két befogó négyzetének összege.

E három tétel alapján minden derékszögű egyenes vonalú háromszög megfejthető.

79. §. A derékszögű háromszögek megfejtése.

A derékszögű háromszögek megfejtésére két alkotórész ismerete szükséges. Ezek lehetnek:

I. Az átfogó (a) és az egyik befogó (b).

β szöget megtaláljuk ezen egyenletből:

$$\sin \beta = \frac{b}{a};$$

logaritmusokra térve:

$$\log \sin \beta = \log b - \log a.$$

γ szöget illetőleg:

$$\gamma = 90^\circ - \beta; \text{ vagy közvetlenül: } \cos \gamma = \frac{b}{a}.$$

A keresett befogó (c) a Pythagoras-féle tantétel szerint:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$

logaritmusokkal:

$$\log c = \frac{1}{2} [\log (a+b) + \log (a-b)].$$

Például legyen $\alpha = 90^\circ$, $a = 27.3$, $b = 20.9$ m; mekkora β , γ és c ?

$\log b$	11.32015-10*	$\log \sin \beta$	$\log \sin 49^\circ 57' 30''$
$\log a$	1.43616	β	49° 57' 30''.
$\log \sin \beta$	9.88399-10	γ	40° 2' 30''.

$$394 \dots 49^\circ 57'$$

$$5 \dots \dots \dots 30'' \quad \beta = 49^\circ 57' 30''$$

a	27.3	$\log (a+b)$	1.68305
b	20.9	$\log (a-b)$	0.80618
$a+b$	48.2		2.48923 : 2
$a-b$	6.4	$\log c$	1.24462

$$52 \dots 1756$$

$$10 \dots \dots 4; c = 17.564 \text{ m}$$

Mínt hogy a sinusok és a cosinusok lassabban változnak, mint a tangensek, illetőleg contangensek, (a sinusoknál ez különösen 90° közelében, a cosinusoknál ellenben 0° körül igen szembevető) ezért gyakran célszerűbb a keresett szöveget tangens függvényekkel meghatározni, mert az érintett oknál fogva az utóbbi meghatározás pontosabb a sinus, vagy cosinus segítségével nyert értékeknél. Alkalmazhatjuk pedig e célra jelen esetben a (3) egyenletet (78. §.), melyben c helyébe imént lelt értékét tesszük. Ugyanis:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{(a+b)(a-b)}} = \operatorname{cotg} \gamma.$$

II. A derékszögű háromszög megfejtése a b és c két befogó alapján.

β szögre nézve:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c},$$

logaritmusokra térve:

$$\log \operatorname{tg} \beta = \log b - \log c.$$

$$\gamma = 90^\circ - \beta, \text{ vagy közvetlenül } \operatorname{tg} \gamma = \frac{c}{b}.$$

Az átfogót Pythagoras tétele alapján számítjuk ki:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

* Ily esetben, midőn a kivonandó logaritmus nagyobb a kisebbítendőnél, az utóbbinak karakterisztikájához 10 egységet hozzáadunk és a teljes logaritmusból ugyanannyit kivonunk.

E képlet azonban logaritmusos számításra nem alkalmas; ha tehát a hatványozást elkerülni kívánjuk, előbb az egyik szöveget pl. γ -t számítjuk ki és ezután a -t. Ugyanis: $b = a \cos \gamma$, tehát:

$$a = \frac{b}{\cos \gamma}.$$

Példa. Valamely derékszögű háromszögben a két befogó: $b = 173\cdot5$ m és $c = 69\cdot2$ m; keressük fel β , γ és α értékét.

$$\begin{array}{r|l} \log b & 2\cdot23930 \\ \log c & 1\cdot84011 \\ \hline \log \operatorname{tg} \beta & 10\cdot39919-10 \\ \beta & 68^\circ 15' 20'' \\ \gamma & 21^\circ 44' 40'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \log b & 2\cdot23930 \\ \log \cos \gamma & 9\cdot96795-10 \\ \hline \log a & 2\cdot27135 \\ & 14\dots1867 \\ & 21\dots\dots\dots88. \\ a & = 186\cdot788 \text{ m.} \end{array}$$

III. *A derékszögű háromszög megfejtése az a átfogó és az egyik pl. β hegyes szög alapján.*

A többi alkotórészt a következő egyenletekből találjuk meg:

$$\gamma = 90^\circ - \beta.$$

$$b = a \sin \beta.$$

$$c = a \cos \beta.$$

Példa. Valamely derékszögű háromszög átfogója $a = 314\cdot56$ és egyik hegyes szöge $\beta = 32^\circ 15' 20''$, mekkora γ , b és c ?

$$\gamma = 90^\circ - 32^\circ 15' 20'' = 57^\circ 44' 50''$$

$$\begin{array}{r|l} \log a & 2\cdot49770 \\ \log \sin \beta & 9\cdot72730-10 \\ \hline \log b & 2\cdot22500 \\ & 479\dots1678 \\ & 21\dots\dots\dots8 \\ b & = 167\cdot88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \log a & 2\cdot49770 \\ \log \cos \beta & 9\cdot92720-10 \\ \hline \log c & 2\cdot42490 \\ & 88\dots2660 \\ & 2\dots\dots\dots1 \\ c & = 266\cdot01 \end{array}$$

IV. *A derékszögű háromszög megfejtése egyik pl. b befogó és egyik, pl. β hegyes szög alapján.*

Az ismeretlen részeket következő egyenletekből tudjuk meg.

$$\gamma = 90^\circ - \beta.$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \quad [78. \text{ §. (1)}] \text{ és:}$$

$$c = b \cdot \operatorname{ctg} \beta \quad [78. \text{ §. (4)},$$

vagy:

$$\log a = \log b - \log \sin \beta, \text{ és}$$

$$\log c = \log b + \log \operatorname{ctg} \beta.$$

Példa. Valamely derékszögű háromszög egyik befogója: $b = 891\cdot25$ és $\beta = 71^\circ 12' 45''$; kerestetnek γ , a és c .

$$\gamma = 90^\circ - 71^\circ 12' 45'' = 18^\circ 47' 15''$$

$$\begin{array}{r|l} \log b & 2\cdot95000 \\ \log \sin \beta & 9\cdot97622-10 \\ \hline \log a & 2\cdot97378 \\ & 77\cdot9414 \\ & 1\dots\dots\dots2 \\ a & = 941\cdot42. \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \log b & 2\cdot95000 \\ \log \operatorname{ctg} \beta & 9\cdot53172-10 \\ \hline \log c & 2\cdot41828 \\ & 59\cdot3031 \\ & 13\dots\dots\dots9 \\ c & = 303\cdot19. \end{array}$$

V. Az elősorolt négy egyszerű eseten kívül van még számtalan összetett feladat is. Ezek a derékszögű háromszög alkotórészeinek különféleképpen történő egybekapcsolásából származnak. Minden ilyen feladatnál oda kell törekednünk, hogy azt a négy fő eset valamelyikére visszavezzük, amint ezt a következő példák mutatják.

a) Valamely derékszögű háromszögből ismeretes az átfogó és az egyik befogó összege (s) és egy hegyes szög (β); keressük az oldalakat.

Itt ismeretes: $a + c = s$, és β szög. Tudjuk, hogy:

$$c = a \cos \beta, \text{ tehát:}$$

$$a + c = a + a \cos \beta = a(1 + \cos \beta),$$

vagy:

$$a(1 + \cos \beta) = s;$$

következéleg:

$$a = \frac{1}{1 + \cos \beta}$$

Most $\cos \beta$ külön kiszámítható lévén, a értékét a nyert képlet alapján meghatározhatjuk.

Ismerve a -t, kiszámíthatjuk c -t és b -t is, mert:

$$c = s - a, \text{ és } b = a \sin \beta.$$

b) Valamely derékszögű háromszögből adva van az átfogó (a) és a hozzá tartozó magasság (m); keressük a két befogót.

$$\text{Pythagoras tétele szerint: } a^2 = b^2 + c^2. \quad (1)$$

Továbbá a derékszögű háromszög három oldala és az említett merőleges vonal közt következő egyenlet áll: $am = bc$, (2)

mert mind a két szorzat a derékszögű háromszög kétszeres területét fejezi ki. Ebből a két egyenletből b és c értékét könnyen megtalálhatjuk. Ugyanis a (2) egyenletet 2 -vel megszorozva, egyszer az $1)$ egyenlethez hozzáadjuk, majd ugyanabból kivonjuk; lesz:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + 2am &= b^2 + 2bc + c^2 \\ a^2 - 2am &= b^2 - 2bc + c^2, \end{aligned} \right\}$$

vagyis:

$$\left. \begin{aligned} a(a + 2m) &= (b + c)^2 \\ a(a - 2m) &= (b - c)^2, \end{aligned} \right\}$$

tehát:

$$\left. \begin{aligned} b + c &= \sqrt{a(a + 2m)}. \\ b - c &= \sqrt{a(a - 2m)}. \end{aligned} \right\}$$

Eszerint a két befogó összege és különbsége ismeretes lévén, az egyes oldalak is kiszámíthatók.

Ha $a < 2m$ -nél, a feladat nem fejthető meg. (Miért nem?)

c) Valamely derékszögű háromszögből ismeretes: a derékszög szögpontjából az átfogóra húzott merőleges vonal hossza (m) és a háromszög kerülete (k); mekkorák az oldalak és a szögek?

Adva van: $a + b + c = k$, és m . Keressük előbb a -t.

$$b + c = k - a, \quad (1)$$

tehát: $b^2 + 2bc + c^2 = k^2 - 2ak + a^2;$ (2)

azonban Pythagoras tétele szerint: $b^2 + c^2 = a^2;$ (3)

ez utóbbi egyenletet a megelőzőből kivonva

$$2bc = k^2 - 2ak. \quad (4)$$

Másrészt a derékszögű háromszög három oldala és magassága (m) közt a b) alatt említett oknál fogva ezen egyenlet áll:

$$bc = am. \quad (5)$$

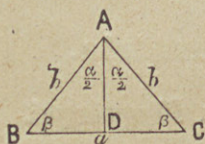
A (4) és (5) számú egyenleteket összehasonlítva lesz: $k^2 - 2ak = 2am$ és

$$a = \frac{k^2}{2(k + m)}.$$

Ismerve a -t, a (3) és (5) egyenlehből b -t és c -t is megtalálhatjuk. [Lásd a b) alatt tárgyalt föladványt].

80. §. Az egyenlőszárú háromszög megfejtése.

Ha ABC egyenlőszárú háromszög (203. ábra) A szögpontjából BC alapra AD merőlegest vonjunk, az egyenlőszárú háromszög két egybevágó derékszögű háromszögre oszlik. Ebből közvetlenül kitűnik, hogy az egyenlőszárú háromszögek a derékszögűek egyenletei szerint fejthetők meg. A megfejtésre kerülő esetek a következők lehetnek;



ismeretes: 1. az alap és az egyik szár, 2. az alap és egy szög, 3. egy szár, meg egy szög.

1. Adva vannak a és b oldalak; határozzuk meg: α és β szögeket.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}; \quad \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Pl.: $a = 504 \text{ m}; b = 277 \text{ m}.$

$$\log \sin \frac{\alpha}{2} = 9.95892 - 10; \quad \frac{\alpha}{2} = 65^\circ 28' 10''; \quad \alpha = 130^\circ 56' 20''.$$

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - 65^\circ 28' 10'' = 24^\circ 31' 50''.$$

2. Adva van a alap és α szög; határozzuk meg b oldalt és β szöget.

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{a}{2} = b \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \text{ és } b = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Pl.: $a = 57.6 \text{ m}; \alpha = 38^\circ 40' 16''.$

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 70^\circ 39' 52''.$$

$$\log b = \log a - (\log 2 + \log \sin 19^\circ 20' 8'') = 1.93943 \text{ és:}$$

$$b = 86.98 \text{ m.}$$

3. Adva van b szár és α szög; keressük: a oldalt és β szöget.

$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{a}{2} = b \sin \frac{\alpha}{2}; a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Pl.: $b = 61.2 \text{ m}; \alpha = 111^\circ 35' 20''.$

$$\beta = 90^\circ - 55^\circ 47' 40'' = 34^\circ 12' 20''.$$

$$\log a = \log 2 + \log 61.2 + \log \sin 55^\circ 47' 40'' = 2.00530 \text{ és:}$$

$$a = 101.228 \text{ m.}$$

Tizenegyedik fejezet.

Szögmértan, vagy goniometria.

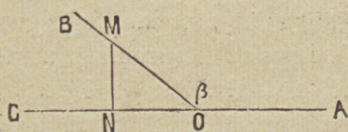
81. §. A tompa és a kihajló szögek függvényei.

Eddigélé csak a *hegyes* szögek függvényeit vizsgáltuk; ámde tudjuk, hogy a háromszög adott, vagy keresett alkotórészei között egy *tomp*a szög is előfordulhat, és a négy-, öt- stb. oldalú idomokban még 180° -ot meghaladó szögek is találkoznak; föntebbi vizsgálataink tehát még nagyon hiányosak és lényeges kiegészítésre szorulnak.

Tetszésünktől függ ugyan, hogy a 90 fokot meghaladó szögekre nézve a *sinus*, *cosinus* és egyéb függvény értelmét mikép állapítjuk meg, azonban, ha e megállapítás körül *elv. nélkül* járunk el, abba a helyzetbe jutunk, hogy valahányször a nevezett függvényeket alkalmaznunk kell, mindannyiszor kénytelenek leszünk előbb megvizsgálni, vajjon hegyes, vagy tompa-e a kérdéses szög stb. Ezen baj elhárítása végett oly értelmezésekben kell megállapodnunk, amelyek mindennemű szögre egyaránt alkalmazhatók.

Legyen $AOB = \beta$ (204. ábra) egy tompa szög; húzzuk OB szár valamelyik pl. M pontjából a másik szárra, illetőleg ennek meghosszabbítására MN merőlegest; az ekkép származott MON derékszögű

204. ábra.



háromszöget β szög meghatározó háromszögének nevezzük; mert ez β szöget csakugyan teljesen meghatározza. β t. i. MON szög mellékszöge. Látnivaló továbbá, hogy

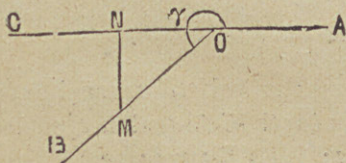
ON befogó nem egyéb, mint az egyik szár OM szeletének vetülete a másik OA száron. Ezért rövidség okáért ON -et vetületnek, MN befogót merőlegesnek és MON \triangle -et *vetületi háromszögnek* nevezhetjük. Most, ha MON háromszög fekvését a 194. ábra — szintén MON betűkkel megjelölt — háromszögével összehasonlítjuk, azt tapasztaljuk, hogy MN merőleges egyenes helyzete AO szárhoz képest nem változott, mert MN most is AO szár fölött áll, épen úgy, mint a hegyes szögnél; azonban a másik ON befogónak helyzete megváltozott, mert a hegyes szögnél (194. ábra) ON az adott szög OA szárán van, ellenben a tompa szögnél (204. ábra) OA szár meghosszabbításába esik; tehát az első esetben O szögpontról *jobbfelől*, azaz a szár irányában, a másik esetben O -tól *balfelől*, az ellenkező irányban van.

Most ha az O ponttól a száron jobbra mért hosszúságokat *pozitív*oknak tekintjük és $+$ jellel jelöljük; akkor az O -tól ellenkező irányban kimért vonalhosszúságokat *negatív*oknak kell tekintenünk és $-$ jellel jelölnünk. Az ilyen, O pontra nézve ellentétes irányú távolságok olyan viszonyban állanak egymáshoz, mint a pozitív és a negatív számok az algebraiban.

A hegyes szögnél a meghatározó (vetületi) háromszög mindkét befogóját pozitív irányúnak szokás tekinteni; ennél fogva a tompa szögnél az MN merőleges vonal pozitív, ON ellenben negatív irányú.

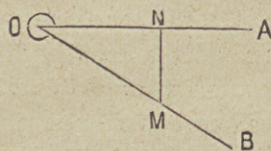
A kihajló szögeket illetőleg legyen AOB , vagyis $\gamma > 2R$ -nél, (205. ábra) azonban $< 3R$ -nél; ez esetben a meghatározó háromszögnek mind a két befogója negatív irányú, mert tekintve a hegyes szög ábráját, (194) úgy MN , mint ON helyzete ellentétes. Ugyanis MN a jelen esetben OA szár alatt, NO vetület pedig

205. ábra.



OA szár meghosszabbításán fekszik.

206. ábra.



Végül, ha AOB , vagyis $\beta > 3R$ -nél, (206. ábra) ez esetben az AO szárra vont MN merőleges *negatív*, ellenben ON vetület *pozitív* fekvésű. — Ezen észrevételek nyomán a szögfüggvényeket most már úgy értelmezhetjük, hogy az értelmezések nem-

csak a hegyes, hanem mindennemű szögre alkalmazhatók. Ugyanis, ha bármely szög egyik szárának tetszés szerint kijelölt pontjából a másik szárra (illetőleg ennek meghosszabbítására) merőlegest vonunk, az ekkép támadt derékszögű háromszögben a *kellő előjellel vett merőleges és az átfogó számarányát a szög sinusának; a vetület és az átfogó arányát a szög cosinusának nevezzük; továbbá a merőleges vonal és a vetület számarányát a szög tangensének; a vetületnek a merőlegeshez való arányát a szög cotangensének; az átfogó és a vetület számarányát a szög secansának és végül az átfogó és a merőleges arányát a szög cosecansának hívjuk.*

Tehát β tompaszögre vonatkozólag:

$$\sin \beta = \frac{+MN}{OM} = +\frac{MN}{OM}; \quad \cos \beta = \frac{-ON}{OM} = -\frac{ON}{OM};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{MN}{-ON} = -\frac{MN}{ON}; \quad \operatorname{cotg} \beta = \frac{-ON}{MN} = -\frac{ON}{MN};$$

$$\sec \beta = \frac{OM}{-ON} = -\frac{OM}{ON}; \quad \operatorname{cosec} \beta = \frac{OM}{MN} = +\frac{OM}{MN}.$$

A $2R$ -nél nagyobb, azonban $3R$ -nél kisebb γ szögre nézve:

$$\sin \gamma = \frac{-MN}{OM} = -\frac{MN}{OM}; \quad \cos \gamma = \frac{-ON}{OM} = -\frac{ON}{OM};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{-MN}{-ON} = +\frac{MN}{ON}; \quad \operatorname{cotg} \gamma = \frac{-ON}{MN} = -\frac{ON}{MN};$$

$$\sec \gamma = \frac{OM}{-ON} = -\frac{OM}{ON}; \quad \operatorname{cosec} \gamma = \frac{OM}{-MN} = -\frac{OM}{MN}.$$

Végre, a $3R$ és $4R$ közé eső δ szögre vonatkozólag:

$$\sin \delta = \frac{-MN}{OM} = -\frac{MN}{OM}; \quad \cos \delta = \frac{+ON}{OM} = +\frac{ON}{OM};$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-MN}{ON} = -\frac{MN}{ON}; \quad \operatorname{cotg} \delta = \frac{+ON}{-MN} = -\frac{ON}{MN};$$

$$\sec \delta = \frac{OM}{+ON} = +\frac{OM}{ON}; \quad \operatorname{cosec} \delta = \frac{OM}{-MN} = -\frac{OM}{MN}.$$

Láttnivaló ezekből, 1) hogy a hegyes szögek valamennyi függvénye *pozitív*, 2) a tompa szögek függvényei közül csak a *sinus* és a *cosecans* pozitív, a többi négy negatív; 3) a $3R$ -t meg nem haladó kihajló szögek függvényei közül a *tangens* és a *cotangens* pozitív, a

többi mind negatív; 4) a $3R$ -nél nagyobb, azonban $4R$ -nél kisebb szögek függvényei közül a *cosinus* és a *secans* pozitív, a többi negatív.

A fentebbi eredményeket a következő tábla mutatja:

α szög	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\alpha < 90^\circ$	+	+	+	+	+	+
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	+	-	-	-	-	+
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	-	-	+	+	-	-
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	-	+	-	-	+	-

82. §. A hegyes és a nagyobb szögek függvényeinek összefüggéséről.

Bármely 90° -nál nagyobb szög függvényeit a megfelelő hegyes szög függvényeivel fejezhetjük ki.

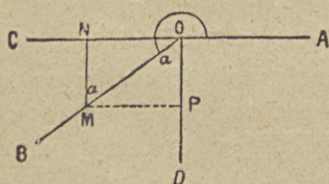
Nevezetesen, minden tompa szöghöz egy hegyes mellékszög tartozik, mely amazz két derékszöggé kiegészíti; az ilyen szögeket, melyek összege $2R$ kiegészítő szögeknek hívjuk. Ha a hegyes szöget α -val jelöljük, a tompa mellékszöget $(180^\circ - \alpha)$ alakban fejezhetjük ki. Az előadottakból és a 207. ábra megtekintéséből a tompa szögre nézve kitűnik, hogy:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= + \sin \alpha, & \cos(180^\circ - \alpha) &= - \cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= - \operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{cotg}(180^\circ - \alpha) &= - \operatorname{cotg} \alpha, \\ \operatorname{sec}(180^\circ - \alpha) &= - \operatorname{sec} \alpha, & \operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) &= + \operatorname{cosec} \alpha. \end{aligned}$$

Azaz: a kiegészítő-szögek függvényei abszolút értékre nézve egyenlők; a sinusok és cosecansok még jelre nézve is azonosak, ellenben a cosinusok, tangensek, cotangensek és secansok előjelre nézve különböznek.

Továbbá, a 180° -nál nagyobb, azonban 270° -nál kisebb szögeknek hasonlóképp megfelel egy-egy hegyes szög, mely az illető kihajló szöggel összevéve 270° -ot ad. Például AOB kihajló szög a 208. ábrában BOD hegyes szöggel együtt 270° . Az utóbbit α -val jelölvén, a kihajló szög $= (270^\circ - \alpha)$. Minthogy MON meghatározó háromszögben $NMO \sphericalangle = BOD \sphericalangle = \alpha$; a megelőző §. értelmében:

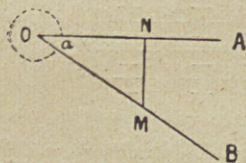
208. ábra.



$$\begin{aligned} \sin (270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha, & \cos (270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha, \\ \operatorname{tg} (270^\circ - \alpha) &= +\operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg} (270^\circ - \alpha) &= +\operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{sec} (270^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha, & \operatorname{cosec} (270^\circ - \alpha) &= -\operatorname{sec} \alpha. \end{aligned}$$

Fejezzük ki a mutatkozó összefüggést szavakban.

209. ábra.



Végre, a 270° és 360° közé eső kihajló szögeket $(360^\circ - \alpha)$ alakban fejezhetjük ki, ha α azon hegyes szöget jelenti, mely az adottat 360° -ra kiegészíti.

A 209-ik ábrából, melyben AOB kihajló szög $= 360^\circ - \alpha$, könnyen meggyőződhetünk arról, hogy:

$$\begin{aligned} \sin (360^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos (360^\circ - \alpha) &= +\cos \alpha, \\ \operatorname{tg} (360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{ctg} (360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \operatorname{sec} (360^\circ - \alpha) &= +\operatorname{sec} \alpha, & \operatorname{cosec} (360^\circ - \alpha) &= -\operatorname{cosec} \alpha. \end{aligned}$$

Szavakban?

Ha α pótlószögét β -vel jelöljük és α helyébe a fentebbi egyenletekben $(90^\circ - \beta)$ -t írunk, a következő egyenleteket nyerjük:

$$\begin{aligned} \sin (90^\circ + \beta) &= +\sin (90^\circ - \beta) = +\cos \beta, \\ \cos (90^\circ + \beta) &= -\cos (90^\circ - \beta) = -\sin \beta. \end{aligned}$$

stb.

Továbbá:

$$\begin{aligned} \sin (180^\circ + \beta) &= -\cos (90^\circ - \beta) = -\sin \beta, \\ \cos (180^\circ + \beta) &= -\sin (90^\circ - \beta) = -\cos \beta. \end{aligned}$$

stb.

Vége:

$$\begin{aligned} \sin (270^\circ + \beta) &= -\sin (90^\circ - \beta) = -\cos \beta, \\ \cos (270^\circ + \beta) &= +\cos (90^\circ - \beta) = +\sin \beta. \end{aligned}$$

Említettük már, hogy a szögfüggvényeket a szöget mérő körívre is lehet vonatkoztatni. (76. §.) Ismeretes továbbá, hogy a 90° -os szög íve $\frac{1}{2}\pi$, a 180° ív hossza π , a 270° szög íve $\frac{3}{2}\pi$, és a 360° ív hossza 2π . Eszerint, ha α, β szögek ívét a - illetve b -vel jelöljük, az imént kifejtett egyenletek így is írhatók:

$$\begin{aligned} \sin (\pi - a) &= +\sin a, & \cos (\pi - a) &= -\cos a, \text{ stb.} \\ \sin \left(\frac{3\pi}{2} - a\right) &= -\cos a, & \cos \left(\frac{3\pi}{2} - a\right) &= -\sin a, \text{ stb.} \\ \sin (2\pi - a) &= -\sin a, & \cos (2\pi - a) &= +\cos a, \text{ stb.} \end{aligned}$$

Hasonlóképen:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + b\right) = +\cos b, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\sin b, \text{ stb.}$$

A fentebbi egyenletek akkor is érvényesek, ha α , vagy β nagyobb 90° -nál. Mert, tegyük föl, hogy α tompaszög; ekkor a hozzátartozó mellékszög: ω szükségképen hegyes és annyi, mint $180^\circ - \alpha$, tehát:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \omega.$$

Azonban a fentebbiek szerint ω hegyes szögre nézve:

$$\sin(180^\circ - \omega) = \sin \omega,$$

vagy, mert $180^\circ - \omega$ nem egyéb, mint α :

$$\sin \alpha = \sin \omega;$$

következésképen: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Hasonlóképen bizonyítható be a többi *képlet általános* érvényessége is.

A nyert eredményeket a következő táblázatban tekinthetjük át:

Szög	<i>sin</i>	<i>cos</i>	<i>tang</i>	<i>cotang</i>	<i>sec</i>	<i>cosec</i>
$90^\circ \mp \alpha$	$\pm \cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\pm \cotg \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \operatorname{sec} \alpha$
$180^\circ \mp \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \cotg \alpha$	$-\operatorname{sec} \alpha$	$\pm \operatorname{cosec} \alpha$
$270^\circ \mp \alpha$	$-\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$\pm \cotg \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{sec} \alpha$
$360^\circ \mp \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \cotg \alpha$	$+\operatorname{sec} \alpha$	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$

Ha a 76. §-ban levezetett képleteket tompa és kihajló szögekre nézve akarjuk alkalmazni; akkor az egyes függvények előjelét a fentebbi táblázat értelmében kell megválasztanunk.

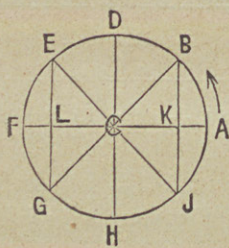
Az előadottakból végül kitűnik, hogy valamely szög meghatározására *egy* függvény csak akkor elegendő, ha tudjuk, hogy vajjon hegyes, vagy tompa stb. szög forog-e kérdésben? Mäskülönben valamely adott szögfüggvénynek mindig *két* különböző szög felel meg. Pl. ha $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, α hegyes, vagy tompa szög lehet; mert $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, azaz két mellékszög sinusa tökéletesen megegyező. Szintúgy, ha $\operatorname{tg} \alpha = 2$, α szög vagy az első, vagy a harmadik negyedbe tartozhatik, mert $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$. E kétség azonban megszűnik, ha még egy másik szögfüggvény előjelét is ismerjük, föltéve természetesen, hogy ez a másik függvény nem megfordítottja az elsőnek, mert az ilyeneknek előjelei mindig megegyezők. Pl. ha a fentebbi esetben $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, és $\cos \alpha$ negatív, α szükségkép tompa szög, tehát az adott sinus alapján könnyen megszerkeszthető.

83. §. A szögfüggvények értékváltozásairól.

Tudjuk, hogy a szög változtával a hozzátartozó függvények értéke is szükségképen megváltozik. Vizsgáljuk most meg tüzetesen, mily törvények szerint változnak a szögmértani számok értékei, ha a szög 0° -tól kezdve 360° -ig növekedik?

E vizsgálatunkban az ACB szög AC egyik szárát (210. ábra), mozdulatlanak tekintjük, a másik BC szárát pedig C szögpont körül elfordítjuk. E fordulás következtében BC szárnak minden pontja körvonalat ír le. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy BC sugár a hosszegységgel egyenlő. A szár fordulását azon helyzettől kezdve vesszük szemügyre, amidőn BC szár a mozdulatlan AC -vel egybeesik. Lássuk először a *sinus* változásait.

210. ábra.



A *sinus* változásai. Midőn BC szár AC -n nyugszik, $ACB \sphericalangle = 0^\circ$, és B pont A -val egybeesik, tehát a B -ből AC -re húzott merőleges hossza: 0 , azaz:

$$\sin 0^\circ = 0.$$

Amint BC szár a nyíl irányában tovább fordul, a *sinust* ábrázoló merőleges vonal folyton hosszabbodik, ennél fogva az első kört negyedben nagyobb szögnek nagyobb *sinus* felel meg, mint valamely kisebb szögnek. — 90° -nál, midőn a mozgó szár egy negyed fordulatot végzett, a *sinus* elérte a lehető legnagyobb értékét; ekkor t. i. B pont D -re, K pont C -re esik, úgy hogy $\sin ACD \sphericalangle = CD$, azaz:

$$\sin 90^\circ = 1.$$

Tovább forgatván BC szárát, a második negyedbe érünk, hol a *sinusok* a szög növekedtével mindinkább csökkennek, míg végre egy fél fordulat végeztével a mozgó szár végpontja F -re jut és a *sinus*-vonal elenyészik. Minthogy ekkor $ACF \sphericalangle = 180^\circ$, tehát:

$$\sin 180^\circ = 0.$$

Ugyanazon irányban tovább forgatván FC szárát, a harmadik kört negyedre érünk; itt a *sinusok* a szög növekedtével ismét növekednek, csak hogy *negatív* irányban. Ez tart 270° -ig, midőn a mozgó szár HC helyzetbe jut; itt a *sinus* elérte legnagyobb *negatív* értékét, t. i.

$$\sin 270^\circ = -1.$$

270°-n túl, a negyedik körnegyedben, a negatív sinus értéke ismét folyton csökken egész 360°-ig, midőn a mozgó szár eredeti helyzetébe visszakerült; itt a sinus ismét 0, azaz:

$$\sin 360^\circ = 0.$$

A cosinus változásai. Mikor $\angle ACB = 0^\circ$, vagyis BC szár AC -vel egybeesik, K pont A -ra jut, tehát AC sugár ábrázolja a cosinus-vonalat, azaz:

$$\cos 0^\circ = 1.$$

A szög növekedtével a cosinus az első körnegyeden végig folytonosan kisebbedik, míg végre 90°-nál matematikai ponttá lesz, azaz:

$$\cos 90^\circ = 0.$$

90°-on túl a második negyedben a cosinus megint folyton gyarapodik, csakhogy előjelére nézve negatív; 180°-nál eléri legnagyobb negatív értékét; t. i.:

$$\cos 180^\circ = -1.$$

Innen kezdve egész 270°-ig a negatív irányú cosinus ismét szakadatlanul fogy, és a -1 és 0 közt levő térközt futja át; tehát:

$$\cos 270^\circ = 0.$$

A negyedik körnegyedben a cosinus ismét pozitív jelű, és 0-tól egész $+1$ -ig növekedik, azaz:

$$\cos 360^\circ = 1.$$

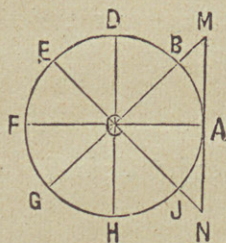
Látnivaló, hogy úgy a sinus mint a cosinus értékei $+1$ és -1 közé esnek. Viszont: minden pozitív, vagy negatív valódi törtszám valamely szög sinusa, vagy cosinusaként tekinthető.

A tangens változásai. Minthogy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, könnyű a tangens változásának szabályait kikutatni. Midőn BC szár AC irányába esik:

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0.$$

Az első körnegyedben a tangens szakadatlanul növekedik, mert a tangens képviselő tört számlálója (a sinus) a szög növekedtével mindinkább nagyobbodik, nevezője (a cosinus) pedig kisebbedik. Mint-hogy a cosinus a 0-t tetszés szerint megközelítheti, ha t. i. a mozgó szárt gondolatban 90°-hoz egyre közelebb juttatjuk; azért $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ hányados értéke bármely gondolható nagy számot meghaladhat. Ez értelemben mondjuk, hogy a 90°-nyi szög tangense *határtalan* nagy értékű. Vagyis jelekkel: $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

211. ábra.



Ez mértanilag is igazolható, mert ha a mozgó szár CD helyzetbe érkezik, AM és CD vonalak párhuzamosakká válnak, tehát csak határtalan távolságban találkoznak egymással, azaz AM érintő akkor végtelen nagy értékű.

A második körnegyedben a tangens ugyanazokat a számértékeket futja végig, mint az első negyedben, csak hogy megfordított rendben és negatív előjellel; tehát 180° -nál a tangens ismét 0 , azaz:

$$tg\ 180^\circ = 0.$$

Ellenben, ha α szöget 180° -tól kezdve egészen 90° -ig folytonosan kisebbitjük, a negatív irányú tangens 0 -tól kezdve szakadatlanul nagyobbodik, míg végre 90° -nál $-\infty$ értékű lesz. Azaz:

$$tg\ 90^\circ = +\infty, \text{ vagy } tg\ 90^\circ = -\infty.$$

aszerint, amint α szöget vagy 0° -tól 90° -ig növekvőnek, vagy ellenkezőleg 180° -tól 90° -ig fogyónak képzeljük. A 90° -nyi szög tangensének eme *kettős* előjele természetes következménye a *határ* kétés jellegének, vagyis azon körülménynek, hogy a 90° -nyi szöget hegyesnek is, tompának is tekinthetjük.

A mondottakat összefoglalva: a tangens az első negyedben 0 -tól kezdve folytonosan növekedik $+\infty$ -ig, itt átcsap $-\infty$ -re, ezután a második negyedben $-\infty$ -tól 0 -ig halad.

A harmadik és negyedik körnegyedben ugyanezen változások ismétlődnek. Azaz, a tangens a harmadik negyedben ismét 0 -tól növekedik $+\infty$ -ig, 270° -nál átugrik $-\infty$ -re, ezután a negyedik körnegyedben $-\infty$ -tól 0 -ig csökken.

A cotangens változásai. A cotangens megfordítottja lévén a tangensnek, változásai ellenkezőképp történnek. T. i. a cotangens kezdetben 0° -nál $= +\infty$; az első negyedben $+\infty$ -tól 0 -ig folytonosan kisebbedik, a második negyedben a negatív számok sorába tér át és 90° -tól kezdve szakadatlanul nő, míg végre 180° -nál $-\infty$ lesz. Amit a 90° -nyi tangensről mondottunk, ugyanaz áll a 180° -nyi cotangensre nézve is. Azaz $cotg\ 180^\circ = \mp\infty$. A harmadik körnegyedben a cotangens $+\infty$ -tól 0 -ig csökken, az utolsó negyedben pedig ismét a negatív számsoron fut végig 0 -tól $-\infty$ -ig. Végül 360° -nál $-\infty$ -ről átcsap $+\infty$ -re és így tovább.

Látni ebből, hogy amint a tangens, hasonlóképen a cotangens is úgy a pozitív, mint a negatív számok sorát végig futják; ezért bármely

algebrai (+ vagy —) számot valamely szög tangensének; vagy cotangensének tekinthetünk.

A secans változásai. A secans a cosinusnak megfordított értéke lévén, könnyű megmutatni, hogy kezdetben, 0° -nál a secans: 1, azaz:

$$\sec 0^\circ = 1.$$

Az első negyedben a secans + 1-től + ∞ -ig nő, ezután a második negyedbe érkezve + ∞ -ról átugrik — ∞ -re és negatív értelemben — 1-ig csökken, vagyis:

$$\sec 90^\circ = \pm \infty; \sec 180^\circ = -1.$$

A harmadik negyedben a negatív jelű secans — 1-től — ∞ -ig növekedik, a negyedik negyedbe érkezvén, átsap + ∞ -re és ezután szakadatlanul csökken egész + 1-ig, vagyis:

$$\sec 270^\circ = \mp \infty; \sec 360^\circ = +1.$$

A cosecans változásai. A cosecans nem egyéb, mint a sinus megfordított értéke; és mert $\sin 0^\circ = 0$, tehát:

$$\operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$$

A szög növekedtével a cosecans az első negyeden végig folytonosan csökken + 1-ig, úgy hogy:

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1,$$

A második negyedben ismét szakadatlanul nő egész + ∞ -ig, 180° -nál + ∞ -ról átugrik — ∞ -re és a harmadik negyedben a — ∞ és — 1 közé első számsort futja keresztül, tehát:

$$\operatorname{cosec} 180^\circ = \pm \infty \operatorname{cosec} 270^\circ = -1.$$

Végül az utolsó negyedben — 1-től — ∞ -ig halad és 360° -nál ismét + ∞ -re ugrik át, azaz:

$$\operatorname{cosec} 360^\circ = \mp \infty.$$

A secans és cosecans tehát két elkülönített térközben haladnak, u. m. + 1-től + ∞ -ig és — 1-től — ∞ -ig. Viszont, minden számot, mely a kijelölt határok közt fekszik, szóval minden állórtet, valamely szög *secansának*, vagy *cosecansának* tekinthetünk.

Mindezekből kitünik, hogy az egész végtelen számsor a szögfüggvényekben kétszer van képviselve, t. i. egyszer a tangensek, másszor a sinusok és secansok értékterületén.

Ha *BC* szárt 360° -on túl tovább forgatjuk, az előbbi változások szakaszonként ismétlődnek; ezért a szögmértani számokat *szakaszos* (periodikus) függvényeknek is nevezik. E tulajdonságuknál fogva a nevezett függvények számos természettani törvényben fontos szerepet játszanak.

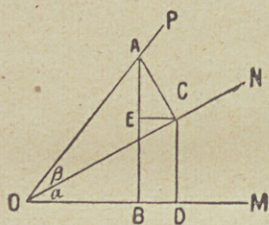
A szögfüggvények változásait a következő tábla mutatja:

	0°	90°	180°	270°	360°
<i>Sínus</i>	0	+ 1	0	- 1	0
<i>Cosínus</i>	1	0	- 1	0	+ 1
<i>Tangens</i>	0	+ ∞, - ∞	0	- ∞, + ∞	0
<i>Cotangens</i>	∞	0	- ∞, + ∞	0	+ ∞, - ∞
<i>Secans</i>	1	+ ∞, - ∞	- 1	- ∞, + ∞	+ 1
<i>Cosecans</i>	∞	+ 1	+ ∞, - ∞	- 1	- ∞, + ∞

84. §. Két szög összegének és különbségének függvényei. A negatív szögek függvényei.

Felvetjük most azt a kérdést, hogy: *miként lehet két szög adott függvényeiből a két szög összegének a függvényeit kiszámítani?*

212. ábra.



E célból legyen α és β két hegyes szög (212. ábra), melyek összege $\alpha + \beta < 90^\circ$ -nál. Húzzuk meg OP szár valamelyik A pontjából az $AB \perp OM$ egyenest, akkor:

ABO derékszögű háromszögben:

$$\frac{AB}{AO} = \sin(\alpha + \beta).$$

$$\frac{BO}{AO} = \cos(\alpha + \beta).$$

Hogy e törtszámokat α és β szögek függvényeiben kifejezhessük, húzzuk meg az $AC \perp ON$; $CD \perp OM$ és $CE \parallel MO$ egyeneseket. Ez uton AB -t két részre osztottuk, u. m. AE - és BE -re. Ennélfogva:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AE + EB}{AO} = \frac{AE}{AO} + \frac{EB}{AO} = \frac{AE}{AO} + \frac{CD}{AO}.$$

Az utóbbi két törtszám még nem képviseli közvetlenül a szóban forgó α és β szögek függvényeit; ezért mindegyik törtet két törtszám szorzatává alakítjuk át olymódon, hogy úgy a számlálót, mint a nevezőt ugyanazon számmal megszorozzuk. Ugyanis:

$$\frac{AE}{AO} = \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AC}{AO} \quad \text{és} \quad \frac{CD}{AO} = \frac{CD}{CO} \cdot \frac{CO}{AO}.$$

Mint hogy $CAE \sphericalangle = \alpha$ (10. §. 10.), tehát:

$$\frac{AE}{AC} = \cos \alpha, \quad \frac{AC}{AO} = \sin \beta, \quad \frac{CD}{CO} = \sin \alpha, \quad \frac{CO}{AO} = \cos \beta,$$

helyettesítve ezen értékeket, lesz:

$$\frac{AE}{AO} = \cos \alpha \sin \beta, \quad \text{és} \quad \frac{CD}{AO} = \sin \alpha \cos \beta,$$

következésképen:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

Ugyanígy számítjuk ki $\cos (\alpha + \beta)$ -t. Ugyanis:

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{O}{AO} = \frac{DO - DB}{AO} = \frac{DO}{AO} - \frac{DB}{AO};$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{DO}{AO} - \frac{CE}{AO};$$

Azonban: $\frac{DO}{AO} = \frac{DO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO}$ és $\frac{CE}{AO} = \frac{CE}{AC} \cdot \frac{AC}{AO}$.

Továbbá:

$$\frac{DO}{CO} = \cos \alpha, \quad \frac{CO}{AO} = \cos \beta, \quad \frac{CE}{AC} = \sin \alpha, \quad \frac{AC}{AO} = \sin \beta,$$

tehát: $\frac{DO}{AO} = \cos \alpha \cos \beta$, és $\frac{CE}{AO} = \sin \alpha \sin \beta$,

következésképpen:

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletből $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ és $\operatorname{cotg} (\alpha + \beta)$ értéke is könnyen kifejezhető. Ugyanis:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Ha az utóbbi törtnek úgy a számlálóját, mint a nevezőjét $\cos \alpha \cos \beta$ -val elosztjuk, lesz:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}},$$

vagyis:

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (3)$$

Szintűgy lesz:

$$\operatorname{cotg} (\alpha + \beta) = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Az utóbbi törtnek úgy a számlálóját, mint a nevezőjét $\sin \alpha \sin \beta$ -val elosztva lesz:

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}}$$

$$\cotg(\alpha + \beta) = \frac{\cotg \alpha \cotg \beta - 1}{\cotg \beta + \cotg \alpha}. \quad (4)$$

Az (1) és (2) számú egyenletek igen fontosak, mert ezekből erednek a szögmértan további képletei. Az idézett egyenletek nem csak azon esetre érvényesek, ha $\alpha + \beta < 90^\circ$ -nál, hanem minden más esetben is, tehát akkor is, ha pl. $\alpha < 90^\circ$, és $\beta < 90^\circ$ -nál, ámde $\alpha + \beta > 90^\circ$ -nál, vagy ha $\alpha > 90^\circ$ -nál és $\beta < 90^\circ$ -nál stb. Ezt minden egyes esetre nézve ép úgy lehet bebizonyítani, amint a föntebire nézve levezettük.

A szóban levő képletek általános érvényességét még a következő módon is bebizonyíthatjuk.

Tegyük föl, hogy úgy α mint $\beta < 90^\circ$ -nál, összegük azonban $> 90^\circ$ -nál. Jelöljük az α -hoz tartozó pótlószöveget α' -sal, a β -hoz tartozót β' -sal, ekkor:

$$\alpha = 90^\circ - \alpha' \text{ és } \beta = 90^\circ - \beta',$$

$$\text{tehát } \alpha + \beta = 180^\circ - (\alpha' + \beta') \text{ és:}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[180^\circ - (\alpha' + \beta')] = \sin(\alpha' + \beta');$$

minthogy a föltételnél fogva $\alpha' + \beta' < 90^\circ$ -nál, tehát (1) szerint:

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin \alpha' \cos \beta' + \cos \alpha' \sin \beta'.$$

Ámde: $\sin \alpha' = \cos \alpha$ és $\cos \beta' = \sin \beta$, $\cos \alpha' = \sin \alpha$ és $\sin \beta' = \cos \beta$, következésképp:

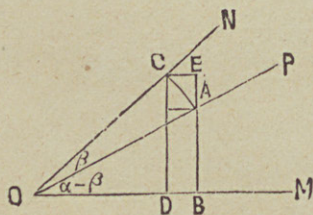
$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta;$$

tehát az (1) számú egyenlet akkor is érvényes, ha $\alpha + \beta > 90^\circ$ -nál stb.

Hasonlóképpen győződhetünk meg a (2) képlet általános érvényességéről is.

Ezekután lássuk, mikép lehet két szög *különbségének* függvényeit az egyes szögek függvényeiben kifejeznünk?

213. ábra.



Legyen $\angle MON = \alpha$ (213. ábra) és $\angle NOP = \beta$; tehát $\angle MOP = \alpha - \beta$. OP szárnak tetszés szerint vett A pontjából húzzuk meg MO -ra AB merőlegest; eszerint $AB \perp MO$, és:

$$\frac{AB}{AO} = \sin(\alpha - \beta),$$

$$\frac{BO}{AO} = \cos(\alpha - \beta).$$

Mint hogy e törteket α és β szögek függvényeiben akarjuk kifejezni, húzzuk meg $AC \perp NO$; $CD \perp MO$ és $CE \perp AB$ egyeneseket.

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BE - AE}{AO} = \frac{CD}{AO} - \frac{AE}{AO} \text{ és:}$$

$$\frac{BO}{AO} = \frac{BD + DO}{AO} = \frac{BD}{AO} + \frac{DO}{AO} = \frac{EC}{AO} + \frac{DO}{AO}.$$

A törteket szorzatokká átalakítva, lesz:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{CD}{CO} \cdot \frac{CO}{AO} - \frac{AE}{AC} \cdot \frac{AC}{AO}.$$

$$\frac{BO}{AO} = \frac{EC}{AC} \cdot \frac{AC}{AO} + \frac{DO}{CO} \cdot \frac{CO}{AO}.$$

Ámde $CAE \sphericalangle = MON \sphericalangle = \alpha$, tehát:

$$\frac{AB}{AO} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\frac{BO}{AO} = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta;$$

azaz: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (5)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \quad (6)$

Az utóbbi egyenletek (1) és (2) főképletekből is levezethetők. Ugyanis $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$; ezen egyenletre (1) és (2) képleteket alkalmazva:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta + \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta.$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha - \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha - \beta) \cdot \sin \beta.$$

E két egyenletből az ismeretlen $\sin(\alpha - \beta)$ -t és $\cos(\alpha - \beta)$ -t az algebra szabályai szerint kikeresvén, ismét az (5) és (6) egyenletekre jutunk. (Miképp?)

Ismervé $\sin(\alpha - \beta)$ és $\cos(\alpha - \beta)$ -t, a tangenst és cotangenst is kiszámíthatjuk. T. i.:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (7)$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta + 1}{\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha}. \quad (8)$$

Az utóbbi négy képlet negatív szögek függvényeire vezet, mert, ha az (5), (6), (7) és (8) egyenletekben α szöveget egyenlővé tesszük 0-val, a következő egyenletek származnak:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta, \quad \cos(-\beta) = +\cos \beta,$$

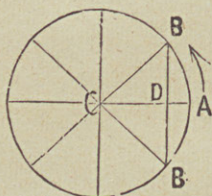
$$\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg} \beta, \quad \operatorname{cotg}(-\beta) = -\operatorname{cotg} \beta.$$

Már most az a kérdés, mit jelentenek ezek az egyenletek? mi a *negatív szög*? mit értsünk az ilyen szög függvényein?

Említettük már (4. §.), hogy a szögeknél nemcsak a nagyságot, hanem a mozgó szögcsár fordulásának az irányát is tekintetbe kell vennünk, azaz tudnunk kell, mily módon keletkezett a szög. Láttuk továbbá, hogy az ellentétes előjeleknek a mértanban ellenkező hely-

zetek, ellenkező irányok felelnek meg. E két észrevételnél fogva β szög negatív előjelét a fordulás *ellentett irányára* kell értenünk; $+\beta$ és $-\beta$ tehát egyenlő nagyságú, azonban ellenkező irányú fordulatokból származott szögeket jelentenek.

214. ábra.



Igy például 214. ábrában $ACB \sphericalR$ egyenlő $ACB' \sphericalR$ -gel, ámde az első szög leírásánál a forduló szár A -tól a nyíl irányában, vagyis az óramutató járásával ellenkező irányban mozgott B felé, a másikon ellenben a fordulás ellenkező irányban történt. Ha tehát az egyik szöveget $+\beta$ -val jelöljük, a másikat $-\beta$ -val kell jelölnünk, azaz $ACB \sphericalR = +\beta$ és $ACB' \sphericalR = -\beta$. Most már a fentebbi egyenletek értelmét is könnyen kitalálhatjuk. Ugyanis, ha $BC = B'C = 1$, $\sin ACB = BD$, és $\sin(-ACB') = -B'D$, azaz, a nevezett szögeknek egyenlő értékű, ám ellenkező irányú *sinus*aik vannak; jelekkel kifejezve:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta.$$

Továbbá $\cos ACB = \cos(-ACB') = CD$, azaz:

$$\cos(-\beta) = +\cos \beta.$$

A tangensről és cotangensről ugyanaz áll, ami a sinusról.

A fentebbi egyenletek tehát tökéletesen igazak, mégpedig azon alapelvűen fogva, melyszerint *ellentétes helyzeteket algebrailag ellenkező előjelekkel fejezünk ki*. Ezen egyenletek alapján egyszerűs mind a *negatív szögek függvényeit a pozitív szögek függvényeivel fejezhetjük ki*, mert *e függvények abszolút értékre nézve egyenlők, sőt a cosinusnak (és reciprok értékének, a secansnak) még az előjele is mindkét szögre nézve ugyanaz; a többi függvény azonban előjelre nézve különbözik*.

85. §. A kétszeres és a felényi szögek függvényei.

A megelőző §. (1)...(4) képleteiben β -t egyenlőnek tévén x -val, a következő fontos egyenletekre jutunk:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x. \quad (9)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x. \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}. \quad (11)$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}. \quad (12)$$

E képletekben valamely adott szög függvényeivel a *kétszeres szög* függvényeit fejeztük ki.

A (10) egyenletnek más alakja is van. Ha t. i. $\cos^2 \alpha$ helyébe az ismeretes alakképlet szerint $1 - \sin^2 \alpha$ -t, illetőleg $\sin^2 \alpha$ helyébe $1 - \cos^2 \alpha$ -t írunk, lesz:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ezekből továbbá:

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha; \\ 1 - \cos 2\alpha &= 2 \sin^2 \alpha; \end{aligned}$$

vagy, ha 2α helyébe ω -t, és α helyébe $\frac{\omega}{2}$ -t írunk:

$$1 + \cos \omega = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2}, \quad (13)$$

$$1 - \cos \omega = 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}. \quad (14)$$

A (9) és (10) számú egyenletben α helyébe $\frac{1}{2} \omega$ -t írva lesz:

$$\sin \omega = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}, \quad (15)$$

$$\cos \omega = \cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}. \quad (16)$$

Ezen utóbbi 4 egyenlet a szögmértan gyakrabban alkalmazott képletei közé tartozik. Ugyaninnen erednek a *felényi szögek* függvényeit kifejező képletek is. Nevezetesen a (13) egyenlethől $\cos \frac{\omega}{2}$, a (14)-ből $\sin \frac{\omega}{2}$ értékét keresve, lesz:

$$\sin \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{2}}, \quad (17)$$

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{2}}. \quad (18)$$

Ezekből osztással:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} = \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega}}$$

Az utóbbi két gyökmennyiséget végszerű alakban is kifejezhetjük, t. i.

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \omega}{1 + \cos \omega}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \omega)^2}{1 - \cos^2 \omega}} = \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega};$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos \omega}{1 - \cos \omega}} = \sqrt{\frac{(1 + \cos \omega)^2}{1 - \cos^2 \omega}} = \frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega};$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega}. \quad (19)$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\omega}{2} = \frac{1 + \cos \omega}{\sin \omega}. \quad (20)$$

86. §. A szögfüggvények összegének és különbségének szorzattá, illetőleg hányadosá való átalakítása.

Trigonometriai számításoknál rendszeren *logaritmusokat* használunk; ámde ez utóbbiak sem összegekre, sem különbségekre nem alkalmazhatók, ezért felette szükséges, módot találnunk arra, hogy a szögmértani függvények összegét és különbségét szorzat, vagy hányados alakjában kifejezhessük.

E célból adjuk össze (1) és (5), továbbá (2) és (6) egyenleteket (84. §.), azután vonjuk ki (1) egyenletből (5)-öt és (2)-ből (6)-ot, lesz:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Legyen itt: $\alpha + \beta = \gamma$ és $\alpha - \beta = \delta$, következésképen:

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \text{ és } \beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta);$$

e helyettesítés folytán a fentebbi egyenletek ily alakot öltenek:

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta); \quad (21)$$

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \cos \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \delta); \quad (22)$$

$$\cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta); \quad (23)$$

$$\cos \gamma - \cos \delta = -2 \sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \delta). \quad (24)$$

Ezen egyenletek segítségével két *sinus* vagy *cosinus* összegét, illetőleg különbségét *szorzattá* alakíthatjuk át.

Továbbá:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta},$$

vagyis:
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (25)$$

Épen úgy:

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (26)$$

Ezenkívül, ha a (21), (22), (23) és (24) négy egyenlet mind-egyikét a többi hárommal külön-külön elosztjuk, 12 új egyenletet

találunk. Ezek közül helykimelésből csak egyet említünk meg, a melyre később szükségünk lesz. Osszuk el a (21) egyenletet a (22) számúval, lesz:

$$\frac{\sin \gamma + \sin \delta}{\sin \gamma - \sin \delta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\gamma - \delta)}{\cos \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \delta)},$$

$$= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(\gamma - \delta),$$

vagyis:
$$\frac{\sin \gamma + \sin \delta}{\sin \gamma - \sin \delta} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\gamma - \delta). \quad (27)$$

87. §. Három vagy több szög összegének függvényeiről.

Eddigi képleteink csak két szög függvényeire vonatkoznak; lehet azonban azokat három, vagy több szögre is alkalmazni.

Például, ha $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ értékét, α , β és γ szögek függvényeiben kellene kifejeznünk, $(\beta + \gamma)$ -t egytagú mennyiségnek tekintjük, és ekkép járunk el:

$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha \sin(\beta + \gamma)$,
most: $\cos(\beta + \gamma)$ -t és $\sin(\beta + \gamma)$ -t az ismeretes képletek szerint kifejtjük, és lesz:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha (\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma) + \cos \alpha (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma);$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma.$$

Ha pedig $\alpha = \beta = \gamma$, akkor:

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha;$$

itt $\cos^2 \alpha$ helyébe $(1 - \sin^2 \alpha)$ -t írhatunk, és akkor:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Ez az egy példa világosan mutatja, miképen kell a többi esetben eljárunk.

88. §. A szögmértani függvények kiszámítása.

Mielőtt a goniometriai függvények kiszámításához fognánk, az eddig tanultak alapján a következőket kell emlékezetünkbe visszaidéznünk: a) bármely szög függvényeit a hegyes szögek függvényeivel fejezhetjük ki; b) valamely szög egyetlen függvényének ismerete elég arra, hogy valamennyi többi függvényét meghatározhassuk; c) teljesen elég a 45° -ig terjedő szögek függvényeit kiszámítanunk,

mert a $(45^\circ + \alpha)$ szög függvényeit a pótló $(45^\circ - \alpha)$ szög függvényeiben fejezhetjük ki, csakis azt kell figyelembe vennünk, hogy minden szög sinusa a pótlószög cosinusával, cosinusa ennek sinusával stb. egyenlő.

Ha ezeketán meggondoljuk, hogy az egység-sugarú körben foglalt α szög íve nagyobb, mint sinusa, azonban kisebb, mint a szög tangense, akkor:

$$\sin \alpha < \text{arcus } \alpha \text{ és } \text{arc } \alpha < \text{tg } \alpha;$$

$$\text{arc } \alpha < \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \text{ arc } \alpha \cos \alpha < \sin \alpha;$$

$$\text{arc } \alpha \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} < \sin \alpha.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség még inkább érvényes marad, ha $\sin^2 \alpha$ helyett az annál nagyobb $\text{arc}^2 \alpha$ -t tesszük; akkor:

$$\text{arc } \alpha \sqrt{1 - \text{arc}^2 \alpha} < \sin \alpha.$$

A gyökjel alatt foglalt mennyiség, ha a szög 45° -nál kisebb, nem éri el az egységet, hanem 1-nél kisebb értékű tört lesz, azonban akkor:

$$1 - \text{arc}^2 \alpha < \sqrt{1 - \text{arc}^2 \alpha},$$

tehát még inkább igaz a következő egyenlőtlenség:

$$\text{arc } \alpha (1 - \text{arc}^2 \alpha) < \sin \alpha$$

és:

$$\text{arc } \alpha - \sin \alpha < \text{arc}^3 \alpha.$$

Ezen egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a 45° -nál kisebb szög íve és sinusa közt létező különbség kisebb az ív harmadik hatványánál.

Ámde az egység sugarú körben az egy percnak megfelelő *arcus* $= \frac{2\pi}{360,60} = 0,0002908882$; ennek a számnak harmadik hatványa elhanyagolható kis tört, úgy hogy az 1 percnyi szög ívét és sinusát egyenlőnek vehetjük; a hiba, amit ezen felvétel által elkövetünk, kisebb, mint $1 : 10^{10}$.

Ilyformán: $\sin 1' = 0,0002908882$.

Ebből: $\cos 1' = \sqrt{1 - \sin^2 1'} = 0,999999959$

azaz: $\cos 1' = 1$.

Ha ismerjük az egy percnyi szög sinusát, akkor a 75. §. szerint annak valamennyi függvényét kiszámíthatjuk, ezekből pedig a kétszeres szögek, majd a két szög összegének függvényeit kifejező képletek alkalmazásával képesek vagyunk valamennyi szög függvényét kiszámítani.

Az 1'-nél kisebb szögekről még jogosabban állíthatjuk, hogy a sinus a megfelelő ívvel pótolható. E szerint:

$$\sin 1'' = \text{arc } 1'' = \frac{\text{arc } 1'}{60},$$

vagyis: $\sin 1'' = 0.000018181$
és: $\cos 1'' = 1.$

Továbbá: $\sin 2'' = 2 \sin 1''$; $\sin 3'' = 3 \sin 1''$ stb.

Az elemi mennyiségtannak ezen kiszámítási módja igen hosszadalmas, épen azért a függvények tényleges meghatározásánál az egyszerűbb felsőbb-mennyiségtani módszereket alkalmazzák.

89. §. A tompa és a kihajló szögek függvényeinek logaritmusai.

Ha valamely adott tompa, vagy kihajló szög függvényeinek a logaritmusait kell felkeresnünk, akkor előbb a 82. §. alapján az adott tompa, illetőleg kihajló szög függvényeit a megfelelő hegyes-szög függvényeiben fejezzük ki és úgy alkalmazzuk a 77. §. 1. pontjában megismertetett eljárást.

Pl. keressük: $\log \sin 150^\circ 23' 48''$.

Minthogy $150^\circ 23' 48'' = 180^\circ - 29^\circ 36' 12''$, azért:

$$\log \sin 150^\circ 23' 48'' = \log \sin 29^\circ 36' 12'' = 9.69372 - 10.$$

Hasonlóképen lenne:

$$\log \cos 150^\circ 23' 48'' = \log \cos 29^\circ 36' 12'' \text{ (n) stb.}$$

Vagy, ha pl.:

$\log \sin 295^\circ 20' 46''$ lenne meghatározandó, úgy figyelembe véve, hogy $295^\circ 20' 46'' = 360^\circ - 64^\circ 39' 14''$, lesz:

$$\log \sin 295^\circ 20' 46'' = \log \sin 64^\circ 39' 14'' \text{ (n) stb.}$$

Ha pedig a szögmértani függvény adott logaritmusához a megfelelő szöget kell keresnünk, úgy a 77. §. 2. pontja szerint járunk el, csakhogy tudván azt, hogy minden goniometriai függvény logaritmusának egy tompa, vagy kihajló és egy hegyes szög felel meg, a feladat természetéből iparkodunk megállapítani, hogy a két szög közül melyik veendő.

Igy pl., ha:

$$\log \sin \alpha = 9.69372 - 10, \text{ úgy:}$$

$$a) \alpha = 29^\circ 36' 12''$$

$$b) \alpha = 150^\circ 23' 48''$$

A feladatnak, amint látjuk két megfejtése van. Hogyha azonban ki van kötve, hogy α olyan szög lehet csupán, amelyre nézve $\cos \alpha$

negatív értékkel bír, úgy az első megoldás elesik, mert tudjuk, hogy a kettő közül ennek a feltételnek csakis a tompa szög felelhet meg.

Hasonló kikötések mellett más esetekben is határozottakká válnak a feladatok.

90. §. Goniometriai egyenletek.

Goniometriai egyenleteknek azokat hívjuk, amelyekben egy, vagy több ismeretlen szög goniometriai függvényei fordulnak elő.

Az ilyen egyenletek megfejtésénél arra kell törekednünk, hogy az ismeretlen szög különböző goniometriai függvényeit egyugyanazon szögmértani függvényben fejezzük ki. Ha ezt sikerült elérnünk, úgy az illető függvényt, mint ismeretlent az algebra szabályai szerint könnyen meghatározhatjuk, és a nyert értékből a szögmértani táblák segítségével az ismeretlen szöget is felkereshetjük. Az itt kijelölt célt gyakran segédszögek bevezetésével, máskor a kétszeres, vagy a felényi szögek függvényeiről tanultak figyelembe vételével, szóval a goniometriai képletek megfelelő felhasználásával érjük el. Pl.

1. Hány fokos szög x , ha:

$$\sin x \cos x = a?$$

Ebből:

$$2 \sin x \cos x = 2a,$$

és:

$$\sin 2x = 2a.$$

2. Hány fokos szög x , ha $\sin(x + a) - \cos x \cdot \sin a = \cos a$?

$$\sin x \cdot \cos a + \cos x \cdot \sin a - \cos x \cdot \sin a = \cos a;$$

$$\sin x \cdot \cos a = \cos a; \sin x = 1; x = 90^\circ.$$

3. $\cos x = \operatorname{tg} x$; $\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cos^2 x = \sin x$;

$$1 - \sin^2 x = \sin x; \sin^2 x + \sin x = 1;$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{5}).$$

4. $a \cdot \sin 2x = b \cdot \cos x$; $2a \cdot \sin x \cdot \cos x = b \cdot \cos x$;

$$\sin x = \frac{b}{2a}.$$

5. $5 \sin^2 x - 15 \cos^2 x = 2.5 \sin x \cdot \cos x$;

$$5 \cos^2 x \text{-szel osztva, lesz: } \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x = 3;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}; \operatorname{tg} x = 2, \text{ vagy } \operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}.$$

$$6. \frac{a}{\sin^2 x} + \frac{b}{\sin x \cos x} + \frac{a}{\cos^2 x} = c;$$

$$a (\sin^2 x + \cos^2 x) + b \sin x \cos x = c \sin^2 x \cos^2 x;$$

$$c (\sin x \cos x)^2 - b \sin x \cos x - a = 0;$$

$$\sin^2 2x - \frac{2b}{c} \sin 2x - \frac{4a}{c} = 0;$$

$$\sin 2x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 16ac}}{c}.$$

$$7. \sin x + \cos 2x = 1;$$

$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1;$$

$$\sin x - 2 \sin^2 x = 0;$$

$$\sin x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$a) \sin x = 0; x = n \cdot 180^\circ$$

$$b) \sin x = \frac{1}{2}; x = \begin{cases} n \cdot 360^\circ + 30^\circ \\ n \cdot 360^\circ + 150^\circ \end{cases}$$

$$8. a \sin x + b \cos x = c; \text{ minthogy } \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

$$c - a \sin x = b \sqrt{1 - \sin^2 x};$$

$$\text{másfelől: } \sin x = \frac{ac + b \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2};$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}; \cos x = \frac{bc \pm a \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Reális értékekhez akkor jutunk, ha:

$$a^2 + b^2 > c^2.$$

$$9. x + y = a; \sin x + \sin y = b,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = b;$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{b}{2 \sin \frac{x+y}{2}} = \frac{b}{2 \sin \frac{a}{2}}.$$

$x-y$ kiszámítása után x és y értéke meghatározható

$$10. x + y = 75^\circ; \sin x - \sin y = 0.207107.$$

$$\sin \frac{x-y}{2} = \frac{0.207107}{2 \cdot \cos 37^\circ 30'}; x - y = 15^\circ;$$

$$x = 45^\circ; y = 30^\circ.$$

$$11. x + y = a; \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b;$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = b;$$

$$\sin(x+y) = b \cos x \cos y;$$

$$\sin a = \frac{1}{2} b \cdot [\cos(x+y) + \cos(x-y)];$$

$$\cos(x-y) = \frac{2 \cdot \sin a}{b} - \cos a$$

$$12. \text{ Így } x - \cos y = c; \quad x - y = d;$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos y}{\sin y} = c;$$

$$\frac{\sin x \cdot \sin y - \cos x \cdot \cos y}{\cos x \cdot \sin y} = c;$$

$$\frac{-2 \cos(x+y)}{\sin(x+y) - \sin d} = c;$$

$$c \cdot \sin(x+y) + 2 \cos(x+y) = c \cdot \sin d;$$

$$\sin(x+y) + \frac{2}{c} \cos(x+y) = \sin d.$$

Legyen:

$$x+y = s; \quad \frac{2}{c} = \operatorname{tg} \varphi;$$

akkor:

$$\sin s + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos s = \sin d;$$

$$\sin s \cdot \cos \varphi + \cos s \cdot \sin \varphi = \sin d \cos \varphi;$$

$$\sin(s + \varphi) = \sin d \cos \varphi.$$

Innen $s + \varphi$, illetőleg s meghatározható, mert φ a $\frac{2}{c} = \operatorname{tg} \varphi$ egyenletből amúgy is ismeretes.

Hasonló módon juthatunk az eddig megismert képletek alapján eszközölt átalakítások révén más egyenlet-alakok megoldására is.

Tizenkettedik fejezet.

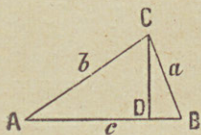
A ferdeszögű háromszögek megfejtéséről.

91. §. A ferdeszögű háromszögek megfejtésére szolgáló képletek.

Valamint az egyenlőszárú háromszögek megfejtését a derékszögűekére vezettük vissza; úgy a ferdeszögű háromszögeket is két-két derékszögű háromszögre bontjuk és ezekre a 78. §. egyenleteit alkalmazzuk.

E célból ABC ferdeszögű háromszög (215. ábra) egyik szögpontjából az átelles oldalra meghúzzuk a magasságot. Ez vagy a háromszögon belül, vagy azon kívül eshetik. Lássuk egyenként ez eseteket:

215. ábra.



1. Jelöljük ABC háromszög oldalait a , b , c -vel, a szemközt levő szögeket megfelelőleg α , β , γ -val; húzzuk meg C szögpontból $CD \perp AB$ egyenest. Ez uton ACD és BCD derékszögű háromszögek származnak.

ACD derékszögű háromszögben:

$$CD = b \sin \alpha, \quad (1)$$

$$AD = b \cos \alpha. \quad (2)$$

BCD háromszögben:

$$CD = a \sin \beta, \quad (3)$$

$$BD = a \cos \beta. \quad (4)$$

Az (1) és (3) egyenletből:

$$b \sin \alpha = a \sin \beta. \quad \text{I.}$$

A (2) és (4) egyenlet összeadásából:

$$AD + BD = b \cos \alpha + a \cos \beta$$

azért:

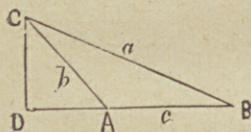
$$AD + BD = c;$$

tehát:

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta \quad \text{II.}$$

2. Ha a magasság a háromszögon kívül esik (216. ábra) ACD derékszögű háromszögben:

216. ábra.



$$D = b \sin CAD \text{ és}$$

$$AD = b \cos CAD.$$

Ámde $CAD \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, következöleg:

$\sin CAD = \sin \alpha$, és $\cos CAD = -\cos \alpha$;

tehát a föntebbi egyenletek így is írhatók:

$$CD = b \sin \alpha, \quad (5)$$

$$AD = -b \cos \alpha. \quad (6)$$

BCD derékszögű háromszögben:

$$CD = a \sin \beta, \quad (7)$$

$$BD = a \cos \beta. \quad (8)$$

Az (5) egyenletet összehasonlítva a (7)-dikkel, látni való, hogy:

$$b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

a (6) egyenletet kivonva a (8)-ból lesz:

$$BD - AD = a \cos \beta + b \cos \alpha,$$

$$\text{vagy: } c = a \cos \beta + b \cos \alpha.$$

E szerint az I. és II. számú egyenletek minden ferdeszögű háromszögre nézve egyaránt érvényesek. Hasonló egyenleteket találunk, ha a magasságot A vagy B szögpontból húzzuk meg az átellenes oldalra; ekkép összesen hat egyenlet származik u. m.:

$$\left. \begin{array}{l} a \sin \beta = b \sin \alpha \\ a \sin \gamma = c \sin \alpha \\ b \sin \gamma = c \sin \beta \end{array} \right\} \text{I.} \quad \left. \begin{array}{l} a = b \cos \gamma + c \cos \beta \\ b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \\ c = a \cos \beta + b \cos \alpha \end{array} \right\} \text{II.}$$

Ezen egyenletekből a következő fontos tantételek származnak.

1. *Az egyenes vonalú háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint az átellenes szögek sinusai.* (Sinus-tétel.)

Mert az I. alatt összefoglalt egyenletek aránypárok alakjában így írhatók:

$$\left. \begin{array}{l} a : b = \sin \alpha : \sin \beta, \\ a : c = \sin \alpha : \sin \gamma, \\ b : c = \sin \beta : \sin \gamma; \end{array} \right\}$$

azaz:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

2. *Minden ferdeszögű háromszögben két oldal összege úgy aránylik ezen oldalak különbségéhez, mint a szemközt fekvő szögek fél összegének tangense ugyan e szögek fél különbségének tangenséhez.* (Tangenstétel.) Ez is az I. alatt összefoglalt egyenletekből folyik. Ugyanis:

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Azonban a mértani aránypár ismeretes tulajdonságainál fogva: az első és második tag összege úgy aránylik e tagok különbségéhez, mint a harmadik és negyedik tag összege ugyanezen tagok különbségéhez; tehát a fentebbi aránypárból a következő új aránypár ered:

$$(a + b) : (a - b) = (\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta).$$

Tekintetbe véve a szögméltan 27. képletét, melyszerint:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta)},$$

lesz:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

3. *A ferdeszögű háromszög bármelyik oldalának négyzete annyi, mint a másik két oldal négyzetének összege, kivonva ebből az utóbbi két oldal és a közbefoglalt szög cosinusának kétszeres szorzatát.* (Cosinus-tétel, vagy Carnot-féle tétel.)

E tétel a II. alatt összefoglalt egyenletekből következik. Mert, ha az első egyenletet a -val, a másodikat b -vel, a harmadikat c -vel megszorozzuk; akkor:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \cos \gamma + ac \cos \beta, \\ b^2 &= ab \cos \gamma + bc \cos \alpha, \\ c^2 &= ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \end{aligned}$$

Most, ha két-két egyenletet összeadunk és az összegből a harmadikat kivonjuk, lesz:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \end{aligned} \right\}$$

és ez a három egyenlet a fentebbi, szavakban már előadott cosinus-tételt fejezi ki, a háromszög mindegyik oldalára alkalmazva.

Ha a háromszög *derékszögű*, például $\alpha = 90^\circ$, akkor $\cos \alpha = 0$, tehát:

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

azaz a cosinus-tétel Pythagoras tantételévé változik át. Eszerint a Carnot-féle tétel a Pythagorasét is magában foglalja.

4. Végül említésre méltók még a *Mollweide*-féle egyenletek. A sinus-tantétel szerint:

$$\begin{aligned} b \sin \alpha &= a \sin \beta; \\ c \sin \alpha &= a \sin \gamma; \end{aligned}$$

ezekből összeadás és kivonás útján lesz:

$$\begin{aligned} (b + c) \sin \alpha &= a (\sin \beta + \sin \gamma) \\ (b - c) \sin \alpha &= a (\sin \beta - \sin \gamma). \end{aligned}$$

Mint hogy $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ és így $\sin \alpha = \sin (\beta + \gamma)$, tehát:

$$\begin{aligned} (b + c) \sin (\beta + \gamma) &= a (\sin \beta + \sin \gamma); \\ (b - c) \sin (\beta + \gamma) &= a (\sin \beta - \sin \gamma). \end{aligned}$$

Tekintetbe véve a szögméretan 9. képletét, melyszerint:

$$\sin (\beta + \gamma) = 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma),$$

továbbá a (21) és (22) képleteket, melyeknél fogva:

$$\begin{aligned} \sin \beta + \sin \gamma &= 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma), \\ \sin \beta - \sin \gamma &= 2 \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma); \end{aligned}$$

fentebbi egyenleteink így írhatók:

$$\begin{aligned} (b + c) 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) &= a 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) \\ (b - c) 2 \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) &= a 2 \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma), \end{aligned}$$

vagy:

$$\begin{aligned} (b + c) \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma) &= a \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) \\ (b - c) \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma) &= a \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Ezen egyenleteket Mollweide tanár találta föl és ezek arány-párok alakjában még így is írhatók:

$$(b + c) : a = \cos \frac{1}{2} (\beta - \gamma) : \cos \frac{1}{2} (\beta + \gamma)$$

$$(b - c) : a = \sin \frac{1}{2} (\beta - \gamma) : \sin \frac{1}{2} (\beta + \gamma).$$

A megelőző tantételek alapján bármely ferdeszögű háromszöget meg lehet fejteni, amint ezt a következő §. mutatja.

92. §. A ferdeszögű háromszögek megfejtése.

I. *A háromszög megfejtése egy oldal és két szög alapján.*

Legyen adva c oldal és a rajta fekvő két szög α és β .

A harmadik szög $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$. (1)

Az oldalak kiszámítására a sinus-tételt alkalmazzuk, melyszerint

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma;$$

minthogy: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ azért $\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$,
tehát az előbbi aránypárt így is írhatjuk:

$$a : c = \sin \alpha : \sin (\alpha + \beta),$$

következöleg:

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{c \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}. \quad (2)$$

Hasonlóképen:

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}. \quad (3)$$

Példa. Valamely háromszögben $\alpha = 43^\circ 20'$, $\beta = 61^\circ 40'$ és $c = 437.8$ m mekkora γ , a és b ?

α	43° 20'
β	61° 40'
$\alpha + \beta$	105°
$\log c$	2.64128
$\log \sin \alpha$	9.83648 — 10
	12.47776 — 10
$\log \sin \gamma$	9.98494 — 10
	— +
$\log a$	2.49282
	76 ..3110
	64

$$a = 311.04 \text{ m.}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 75^\circ$$

$\log c$	2.64128
$\log \sin \beta$	9.94458 — 10
	12.58586 — 10
$\log \sin \gamma$	9.98494 — 10
	— +
$\log b$	2.60092
	86 ...3989
	65

$$b = 398.95 \text{ m.}$$

Azon esetre, ha az egyik ismeretes szög az adott oldallal szemközt esnék, előbb a harmadik szöget határozzuk meg, a többit azután a föntebbinek a mintájára számítjuk ki.

II. *A háromszög megfejtése két oldal és a közbefoglalt szög alapján.*

Legyen adva a és b oldal és γ szög.

Az ismeretlen szögek kiszámítására a tangens-tételt alkalmazuk, eszerint:

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + \beta) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - \beta).$$

Mint hogy $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ és ennek kapcsán:

$$\frac{1}{2} (x + \beta) = \frac{1}{2} (180^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{1}{2} \gamma,$$

a fentebbi aránypárnak három tagja ismeretes, következöleg a negyedik is kiszámítható. T. i.:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + \beta). \quad (1)$$

Kiszámítva ebből a szögmértani táblák segítségével $\frac{1}{2} (x - \beta)$ szöveget, a keresett α és β szöveget könnyü szerrel megtaláljuk a következő egyenletekből:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} (x + \beta) + \frac{1}{2} (x - \beta). \\ \beta = \frac{1}{2} (x + \beta) - \frac{1}{2} (x - \beta). \end{cases} \quad (3)$$

A harmadik oldalt vagyis c -t illetöleg, a sinus-tétel szerint:

$$\begin{aligned} c : a &= \sin \gamma : \sin \alpha; \\ \text{és } c : b &= \sin \gamma : \sin \beta, \end{aligned}$$

tehát:

$$\begin{aligned} c &= a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \\ \text{vagy: } c &= b \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Példa. Valamely háromszögben $a = 31.7$ m, $b = 29.5$ m és $\gamma = 32^\circ 17'$; mekkora α , β és c .

a	31.7	γ	32° 17'
b	29.5	$\frac{1}{2} \gamma$	16° 8' 30"
$a + b$	61.2	$\frac{1}{2} (x + \beta)$	73° 51' 30"
$a - b$	2.2		
$\log (a - b)$	0.34242	$\frac{1}{2} (x + \beta)$	73° 51' 30"
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x + \beta)$	10.53847 - 10	$\frac{1}{2} (x - \beta)$	7° 4' 49"
	10.88089 - 10	α	80° 56' 19"
$\log (a + b)$	1.78675	β	66° 46' 41"
$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (x - \beta)$	9.09414 - 10		

330...7° 4'

84... ..49"

$\log a$	1.50106	$\log b$	1.46982
$\log \sin \gamma$	9.72763 - 10	$\log \sin \gamma$	9.72763 - 10
	11.22869 - 10		11.19745 - 10
$\log \sin \alpha$	9.99454 - 10	$\log \sin \beta$	9.96330 - 10
$\log c$	1.23415	$\log c$	1.23415

01...1714

14.....5

01...1714

13.....5

$c = 17.145$ m.

Célszerűbb azonban az ismeretlen oldalt a *Mollweide*-féle egyenletek alapján kiszámítani.

Az előbbieket szerint:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \\ \text{vagy: } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) &= \frac{(a-b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{(a+b) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ezen egyenlethöz mindenekelőtt kiszámítjuk $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ szöveget. A tangenst azért fejeztük ki a sinus és cosinus által, mert az ekképen származott törtszám számlálójának és nevezőjének még további hasznát vehetjük. Ugyanis, ha a keresett harmadik oldalra *Mollweide* egyenleteit alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} (a+b) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= c \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \\ (a-b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) &= c \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta); \end{aligned}$$

tehát:

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{(a-b) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \\ c &= \frac{(a+b) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Az utóbbi képletek alkalmazásánál csupán a $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ és $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ logaritmusait szükséges kikeresni, minthogy a *számlálók* már az előbbi számításból ismeretesek. Ekképen kétféle úton kapjuk meg c értékét, és ez egyszerre mind az egész számítás próbájául szolgál.

Példa. Valamely háromszögben $a = 197.74$ m, $b = 140.29$ m és $\gamma = 112^\circ 47' 20''$; mekkora a többi rész?

$\frac{a}{b}$	197.74 140.29	$\log(a-b)$	1.75929
$\frac{a+b}{a-b}$	338.03 57.45	$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	9.74309 - 10
$\frac{1}{2}\gamma$	56° 23' 40"	$\log(a+b)$	1.50238 (<i>log n</i>)
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	33° 36' 20"	$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$	9.92057 - 10
			2.44953 (<i>log n</i>)

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \left\{ \begin{array}{l} 11.50238 - 10 \\ 2.44953 \\ 9.05285 - 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 33^\circ 36' 20''$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 6^\circ 26' 37''$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 40^\circ 2' 57'' \\ \beta = 27^\circ 9' 43'' \end{array} \right.$$

$$\frac{14.6^\circ 25'}{61. \dots 37''}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 6^\circ 26' 37''$$

$\log m$	1.50238	$\log n$	2.44953
$\log \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	9.05009 - 10	$\log \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$	9.99725 - 10
$\log c$	2.45229	$\log c$	2.45228
	25.2833		
	3. \dots 2		

$$c = 28.32 \text{ m.}$$

Ha csak a harmadik oldalt, c -t keresnők, ezt közvetlenül a megadott részekből is kiszámíthatjuk, a cosinus-tétel segítségével. Ugyanis:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Minthogy e képlet logaritmusos számításra nem alkalmas, azt e célra át kell alakítani. E végből a szóban forgó egyenletet ily alakban írjuk:

$$c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab - 2ab \cos \gamma,$$

vagy:
$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos \gamma).$$

Azonban $(1 - \cos \gamma)$ -t egytagú alakban is kifejezhetjük, mert a szög-mértan (14) képlete szerint:

$$1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

tehát:
$$c^2 = (a - b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

vagy, ha $(a - b)^2$ -et közös tényezőként kiemeljük, lesz:

$$c^2 = (a - b)^2 \left(1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{(a - b)^2} \right).$$

Tegyük fel most, hogy:

$$\frac{4ab \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{(a - b)^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi;$$

$$\text{vagy: } 2 \frac{\sqrt{ab} \sin \frac{\gamma}{2}}{a - b} = \operatorname{tg} \varphi;$$

(6)

ahol φ valamely segédszöveget jelent.

Ekkor fentebbi egyenletünk ily alakú lesz:

$$c^2 = (a - b)^2 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = (a - b)^2 \cdot \sec^2 \varphi;$$

$$c^2 = \frac{(a - b)^2}{\cos^2 \varphi};$$

tehát:

$$c = \frac{a - b}{\cos \varphi};$$

(7)

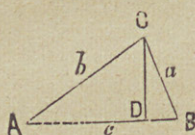
ebben φ érték a (6) egyenletből meghatározható.

Példa. Legyen ismét $a = 197.74$, $b = 140.29$ m és $\gamma = 112^\circ 47' 20''$; keressük c oldalt.

$\log a$	2.29610	$\log(a - b)$	1.75929
$\log b$	2.14703	$\log \cos \varphi$	0.30701 — 10
	4.44313 : 2	$\log c$	2.45228
$\log \sqrt{ab}$	2.22156		25.2833
$\log 2$	0.30103		3.....2
$\log \sin \frac{1}{2}\gamma$	9.92057 — 10		$c = 283.32$ m.
	2.44316		
$\log(a - b)$	1.75929		
$\log \operatorname{tg} \varphi$	0.68387		
	84.78° 18'		
	3.....3"		
	$\varphi = 78^\circ 18' 3''$		

Lehet végre α , vagy β szöget is külön kiszámítani. Ugyanis ABC háromszögben (217. ábra):

217. ábra.



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{BD}$$

Azonban $CD = AC \sin DAC = b \sin \alpha$
és $BD = AB - AD = c - b \cos \alpha$, tehát:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} \quad (8)$$

Az alkalmazásra nézve megjegyzendő, hogy, ha $c < b \cos \alpha$, tehát $\operatorname{tg} \beta$ negatív, akkor nem a szögmértani táblákból kiirt hegyes szög, hanem a megfelelő *tömpa mellékszög* veendő.

Hasonlóképp ered: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \beta}{c - a \cos \beta}$.

III. *A ferdeszögű háromszög megfejtése két oldal és egyik átellenes szög alapján.*

Legyen adva a és b oldal és α szög, keressük a többi három alkotórészt. (Megrajzoljuk a megfelelő ábrát.)

β szöget a sinus-tétel segítségével számítjuk ki. T. i.:

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta,$$

tehát.

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}. \quad (1)$$

β szögére nézve itt sajátos kétértelműség forog fenn. Mert tudvalevő, hogy $\sin (180^\circ - \beta) = \sin \beta$; azaz, két mellékszög sinusa úgy számértékre, mint előjelre nézve egyenlő; ennél fogva az a kérdés támad, vajjon a fentebbi (1) egyenlethől talált sinus-függvénynek hegyes-, vagy tompaszög felel-e meg? vagy pedig *két* különböző megfejtése van-e a feladatnak?

Elemezzük. Az a oldal vagy $>$, vagy $<$ b oldalnál. (Lehetne ugyan: $a = b$, ez esetet azonban mellőzhetjük, mert ekkor $\alpha = \beta$, következésképp β szög ismeretes.)

1. $a > b$; ezen esetben $\alpha > \beta$ -nál, mert a nagyobbik oldallal nagyobb szög fekszik szemben; tehát β szög szükségképp hegyes.

2. $a < b$; ekkor $\alpha < \beta$; és $\sin \alpha < \sin \beta$ -nál. Ezen esetben tehát nemcsak a szögmértani táblából kiirt hegyes szög hanem az utóbbihoz tartozó tompa mellékszög is nagyobb az ismeretes α szögnél; az adott alkotórészekből tehát általában két különböző háromszög alakítható, amint ezt már a síkmértanból is tudjuk. (Lásd a 17. §-t.)

Egyébiránt megjegyzendő, hogy ez utóbbi *kétes* esetben (midő t. i. a háromszög két oldala és a *kisebbik* oldallal átellenes szög

van) adva) az is megtörténhetik, hogy az adott alkotórészekből háromszöget alkotni épenséggel nem lehet. Ugyanis, ha a oldal nem csak b -nél, hanem még $b \sin \alpha$ -nál is kisebb, ekkor a fentebbi (1) egyenlet nem lehet igaz, mert $\sin \beta > 1$ -nél, ez pedig képtelenség. Ez esetben tehát az adott részekből nem lehet háromszöget alakítani. Minthogy $b \sin \alpha$ nem egyéb, mint a háromszög C szögpontjából az átellenes oldalra bocsátott merőleges egyenes hossza, a fentebbi észrevételt szavakkal is könnyen kifejezhetjük.

Említésre méltó még azon eset, midőn $a = b \sin \alpha$; ekkor az (1) egyenlet szerint: $\sin \beta = 1$, tehát $\beta = 90^\circ$, vagyis a háromszög derékszögű és b oldal az átfogója.

Ha kiszámítottuk β szöveget, a hátralevő harmadik szög:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta). \quad (2)$$

Végre, ami a c oldalt illeti, ezt legegyszerűbben a sinus-tétel alapján keressük meg:

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha.$$

$$\text{Következőleg: } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

Világos, hogy abban az esetben, ha β szögnek két különböző értéke van, γ szögnek és c oldalnak is két különböző érték felel meg.

A harmadik (c) oldalt közvetlenül az adott részekből is kiszámíthatjuk a cosinus-tétel segítségével. Mert:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \text{ tehát}$$

$$c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2 - b^2, \text{ és}$$

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 + b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$c = b \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Ez utóbbi egyenlet ujjlag igazolja a fentebbi eredményeket. Ugyanis:

A) ha $a < b \sin \alpha$, vagyis ha a oldal kisebb az említett merőleges egyenesnél, c képzetes értékű, más szóval a háromszög meg nem alakítható;

B) ha $a = b \sin \alpha$, c -nek két egyenlő értéke van, azaz, csak egy derékszögű háromszög alakítható, melynek átfogója: b ;

C) ha $a > b \sin \alpha$, akkor c -nek általában két különböző értéke van. Ha ezenkívül $a = b$, akkor c -nek egyik értéke $= 0$, azaz csak egy, még pedig egyenlőszárú háromszög szerkeszthető. Ha pedig $a > b$ -nél, akkor a gyökmennyiség értéke a megelőző

$b \cos \alpha$ -t felülmúlja (miért?); tehát c -nek egyik értéke negatív, következéleg hasznavehetetlen, azaz, csak egy háromszög alakítható.

A fentebbi (4) képlet logaritmikus számításra nem alkalmas. E célra azt valamely segédszög felvételével át kellene alakítanunk, oly formán, amint ezt már egy alkalommal (a II. pontban) megtettük. Azonban mivel az átalakított képlet semmivel sem kényelmesebb az előadott közvetett számítási módnál, azért azt, mint nem előnyöset, mellőzzük.

Példák. 1) Valamely ferdeszögű háromszögben ismeretes $a = 428.65$ m, $b = 391.77$ m és $\alpha = 32^\circ 55' 41''$; mekkorák a többi részek?

$\log b$	2.59303
$\log \sin \alpha$	9.73527-10
	12.32830-10
$\log a$	2.63210-10
$\log \sin \beta$	9.69620-10
	11...29° 47''
	9.....24''

Minthogy itt $a > b$ -nél, tehát β -nak hegyes szögnek kell lennie, következéleg csak ezen *egy* értéke van:
 $\beta = 29^\circ 47' 24''$.

Továbbá: $\alpha + \beta = 62^\circ 43' 5''$ és $\gamma = 117^\circ 16' 55''$.

Végre c oldalt illetőleg:

$\log a$	2.63210
$\log \sin (\alpha + \beta)$	9.94879
	12.58089-10
$\log \sin \alpha$	9.73527-10
$\log c$	2.84562
	59...7008
	3.....4.

$c = 700.84$ m

2. Egy másik háromszögben $a = 736.25$, $b = 972.42$ és $\alpha = 43^\circ 55'$.

$\log b$	2.98785
$\log \sin \alpha$	9.84112-10
	12.82897-10
$\log a$	2.86703-10
$\log \sin \beta$	9.96194-10
	90...66° 21'
	4.....40''

Mivel itt $a < b$ -nél, tehát β vagy hegyes, vagy tompaszög lehet, azaz:

$$\beta_1 = 66^\circ 21' 40''$$

$$\beta_2 = 113^\circ 38' 20''$$

β két különböző értékének megfelelőleg:

$$\gamma_1 = 69^\circ 43' 20'' \text{ és } \gamma_2 = 22^\circ 26' 40''.$$

$\log a$	2.86703
$\log \sin \gamma_1$	9.97221-10
	12.83924-10
$\log \sin \alpha$	9.84112-10
$\log c_1$	2.99812
	08...9956
	4.....8

$c_1 = 995.68$

$\log a$	2.86703
$\log \sin \gamma_2$	9.58182-10
	12.44885-10
$\log \sin \alpha$	9.84112-10
$\log c_2$	2.60773
	67...4052
	6.....5

$c_2 = 405.23$

IV. A háromszög megfejtése a három oldala alapján.

A szögeket Carnot tételével számítjuk ki. Ugyanis:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

és ebből:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (1)$$

Itt α szögnek csak egy érték felel meg; mert, ha $\cos \alpha$ számértéke pozitív, azaz $b^2 + c^2 > a^2$, akkor α okvetetlenül hegyes-szög (miért?); ellenben ha $\cos \alpha$ számértéke negatív, vagyis $b^2 + c^2 < a^2$, akkor α szükségképen tompaszög. Eszerint az első esetben a szögmértani táblában megtalált hegyes szög a keresett szög; a második esetben ellenben a táblabeli szöghöz tartozó tompa mellékszöget kell vennünk.

β és γ szög kiszámítására hasonló képletek vannak.

Mint hogy ezek a képletek logaritmusos számvetésre nem alkalmasak, a fentebbi egyenlet jobb oldalát egytagú kifejezéssé fogjuk átalakítani. E célra a szögmértan 17. és 18. képleteit használjuk; ezek szerint:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$\cos \alpha$ helyébe fentebbi értékét téve lesz:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}.$$

Most a gyökjel alatti kifejezéseket közös nevezőre hozva:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}},$$

vagyis:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}}.$$

Végül a számlálókát tényezőkre bontjuk:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}.$$

Rövidség okáért legyen: $a+b+c = 2s$, következőleg:

$$a+b-c = 2s - 2c = 2(s-c);$$

$$a+c-b = 2s - 2b = 2(s-b);$$

$$b+c-a = 2s - 2a = 2(s-a);$$

ekkor a fentebbi képletek rövidebben így írhatók:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \end{aligned} \right\} (2)$$

Ezekből α szög értéke már kiszámítható.

Hasonlóképp származnak:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \end{aligned} \right\} \text{és} \left. \begin{aligned} \sin \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\ \cos \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned} \right\}$$

A sinus- és cosinusból a *tangens*-függvényt is kikereshetjük.

Ugyanis:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}};$$

vagy:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{aligned} \right\} (3)$$

és:

Láttnivaló, hogy ez utóbbi képletek alkalmazása mellett mind a három szög kiszámításához összesen 4 szám logaritmusát kell kikeresni; ellenben, ha a *sinus*-képletek szerint számítunk, 5 logaritmust, a *cosinus*-képletek szerint pedig 6-ot kell a táblából kikeresnünk. De még azon esetben is, ha csak *egy* szöget kellene kiszámítani, a *tangens*-képlet célszerűbb a másik kettőnél, mert a *tangens függvénye* a szög változával gyorsabban változnak, mint a *sinusok*, vagy *cosinusok*: ennél fogva a tangens-függvénnyel a szög másodperceit pontosabban határozhatjuk meg, mint a sinus-, vagy cosinussal.

Az imént kifejtett képletekben a gyökjel előtt csak \pm állhat, mert a háromszögben mindegyik szög kisebb 180° -nál, tehát a felényi szög szükségkép kisebb 90° -nál, azaz $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ hegyes szögek, ennél fogva minden függvényük pozitív mennyiség.

Példa. Valamely háromszögben a három oldal $a = 216.7$ m, $b = 392.1$ m, és $c = 465.2$ m; mekkorák a szögek?

$$\begin{array}{l} a = 216.7 \\ b = 392.1 \\ c = 465.2 \end{array} \left. \begin{array}{l} 2s = 1074.0 \\ s = 537.0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s - a = 320.3 \\ s - b = 144.9 \\ s - c = 71.8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log(s-b) \\ \log(s-c) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.16107 \\ 1.85612 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \log s \\ \log(s-a) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.72997 \\ 2.50556 \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 24.01719-20 \\ 5.23553 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5.23553 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \left| \begin{array}{l} (18.78166-20):2 \\ 9.39083-10 \end{array} \right. \quad \frac{\alpha}{2} = 13^\circ 49' 1''$$

$$\begin{array}{l} 2..13^\circ 49' \\ 2....1'' \end{array} \quad \alpha = 27^\circ 38' 2''$$

$$\begin{array}{l} \log(s-a) \\ \log(s-c) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.50556 \\ 1.85612 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \log s \\ \log(s-b) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.72997 \\ 2.16107 \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 24.36168-20 \\ 4.89104 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4.89104 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \left| \begin{array}{l} (19.47064-20):2 \\ 9.73532 \quad 10 \end{array} \right. \quad \frac{\beta}{2} = 28^\circ 31' 50''$$

$$\begin{array}{l} 5.7..28^\circ 31' \\ 25.....50'' \end{array} \quad \beta = 57^\circ 3' 40''$$

$$\begin{array}{l} \log(s-a) \\ \log(s-b) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.50556 \\ 2.16107 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \log s \\ \log(s-c) \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.72997 \\ 1.85612 \end{array} \right. \\ \hline \begin{array}{l} 24.66663-20 \\ 4.58609 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4.58609 \end{array}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left| \begin{array}{l} (20.08054-20):2 \\ 10.04027-10 \end{array} \right. \quad \frac{\gamma}{2} = 47^\circ 39' 9''$$

$$\begin{array}{l} 23..47^\circ 39' \\ 4....9'' \end{array} \quad \gamma = 95^\circ 18' 18''$$

93. §. A háromszög területének kiszámítása.

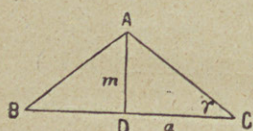
Tudjuk, hogy a háromszög területe (t) egyenlő az alap (a) és a magasság (m) fél szorzatával, vagyis jelekkel kifejezve:

$$t = \frac{a m}{2}.$$

Ámde a háromszög magassága közvetlenül nem szokott ismeretes lenni, hanem azt többnyire a háromszög ismeretes alkotórészeiből kell előbb kiszámítanunk. A gyakrabban előforduló esetek a következők.

1. Adva van a háromszög két oldala (a , b) és a közbezárt szög (γ), keressük a területet.

218. ábra.



$BC = a$ oldalt alapnak tekintvén (217. ábra), a háromszög területe:

$$t = \frac{am}{2}.$$

Azonban ADC derékszögű háromszögben:

$$m = b \sin \gamma,$$

tehát:

$$t = \frac{1}{2} ab \sin \gamma. \quad \text{I.}$$

Például legyen $a = 71.7$ m. $b = 29.5$ m. és $\gamma = 32^\circ 17'$; keressük a háromszög területét.

$\log a$	1.50106
$\log b$	1.46982
$\log \sin \gamma$	9.72763-10
$tiz. \text{kieg. } \log^* 2$	9.69897-10
$\log t$	2.39748
t	249.73 m ² .

Ha a közbefoglalt szög helyett egy másik ismeretes, akkor előbb a befoglalt szöget keressük, és csak ezután alkalmazzuk a fentebbi képletet.

2. Adva van egy oldal (a) és két szög (β és γ); mekkora a háromszög területe?

a oldalt alapul véve: $m = b \sin \gamma$; vagy b -t az adott részek által fejezve ki:

$$m = \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} \sin \gamma;$$

tehát:

$$t = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}. \quad \text{II.}$$

Példa. Legyen $a = 283.75$ m, $\beta = 32^\circ 24' 20''$ és $\gamma = 78^\circ 12' 50''$,
következésképp $\alpha = 69^\circ 22' 50''$; mekkora a háromszög területe?

$\log a$	2.45294		
	×2		
	4.90588		
$\log \sin \beta$	9.72909-10	$\log 2$	0.30103
$\log \sin \gamma$	9.99075-10	$\log \sin \alpha$	9.97125-10
	4.62572		0.27228
	0.27228		
$\log t$	4.35344		

$t = 22565 \text{ m}^2$.

3. Három adott oldalból számítsuk ki a háromszög területét.
a oldalt alapnak tekintvén, $m = b \sin \gamma$. Minthogy a szög-
mértan (15) képlete értelmében: $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ és a meg-
előző §. IV. pontja szerint

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad \text{és} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}, \quad \text{tehát:}$$

$$m = 2b \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2 b^2}},$$

$$\text{és} \quad t = \frac{am}{2} = \frac{2ab \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2ab},$$

vagyis:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \text{III.}$$

Az utóbbi formula már régóta ismeretes; a görögök alexandriai *Heronak*
tulajdonították.

Példa. Legyen $a = 216.7$ m, $b = 392.1$ m, és $c = 465.2$ m; mekkora t ?

a	216.7	$\log s$	2.72997	
b	392.1	$\log (s-a)$	2.50556	
c	465.2	$\log (s-b)$	2.16107	
$2s$	1074.0	$\log (s-c)$	1.85612	
s	537.0		9.25272 : 2	
$s-a$	320.3	$\log t =$	4.62636	$t = 42302 \text{ m}^2$.
$s-b$	144.9		34...4230	
$s-c$	71.8		2.....2	

A Hero-féle képlet tekintetbe vételével a felényszögek tangenseinek
egyenletei (lásd a 92. §. IV. pontjában a (3) egyenletet) így írhatók:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2(s-a)^2}}$$

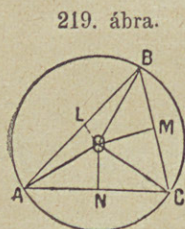
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{t}{s(s-a)}$$

Szintűgy: $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{t}{s(s-b)}$, és $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{t}{s(s-c)}$.

Ez utóbbi alak némely feladatnál igen célszerűen alkalmazható

94. §. A körülírt és a beírt kör sugarának kiszámítása.

1. Adott háromszögre nézve számítsuk ki a körülírt kör sugarát.



Legyen ABC az adott háromszög (219. ábra);
 O a körülírt kör középpontja, $OL \perp AB$, továbbá
 $OM \perp BC$ és $ON \perp AC$; tudjuk hogy:

$AL = LB = \frac{1}{2}c$, $BM = MC = \frac{1}{2}a$ és
 $AN = NC = \frac{1}{2}b$ továbbá:

$BAC \sphericalangle$, vagyis $\alpha = \frac{1}{2} BOC = BOM \sphericalangle$,

$ABC \sphericalangle$, $\alpha \quad \beta = \frac{1}{2} AOC = AON \sphericalangle$,

$ACB \sphericalangle$, $\alpha \quad \gamma = \frac{1}{2} AOB = AOL \sphericalangle$.

Most, ha a körülírt kör sugarát r -rel jelöljük, azaz:

$AO = BO = CO = r$, akkor:

$$\frac{\frac{1}{2}a}{r} = \sin \alpha; \quad \frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin \beta \quad \text{és} \quad \frac{\frac{1}{2}c}{r} = \sin \gamma,$$

következésképpen:

$$r = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma}. \quad (I)$$

Látni ebből, hogy a háromszög köré írt kör sugara csak egy oldaltól és az ezzel szemközt fekvő szögtől függ.

E képlet más alakban is felírható; mert ha $\sin \alpha$ helyébe $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ -t írunk és a felényi-szög függvényeinek értékét a 92. §. IV. pontjából helyettesítjük, lesz:

$$r = \frac{a}{4 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \text{és ebből:}$$

$$r = \frac{abc}{4 \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

Ámde a nevezőben levő gyökmennyiség nem egyéb, mint a háromszög területe t , vagyis:

$$r = \frac{abc}{4t}$$

A fentebbi (I) egyenletből egyúttal következik, hogy $a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. (Sinus-tétel).

2. A háromszög három oldalából számítsuk ki a beírt kör sugarát.

A síkmértan 52. §-ának 2. pontja szerint:

$$\rho = \frac{2t}{a + b + c},$$

ahol ρ a beírt kör sugarát és t a háromszög területét jelenti.

Minthogy: $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, és $a + b + c = 2s$,
azért:

$$\rho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Azonban: $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = (s-a) \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$;

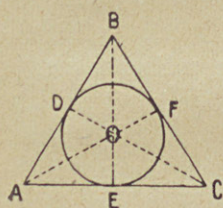
továbbá: $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ (92. §. IV. p.);

tehát: $\rho = (s-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = (s-b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = (s-c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Az utóbbi képleteket a megfelelő ábrából (52. §. 2. p.) közvetlenül is leszámaztathatjuk.

3. A háromszög egy oldalából és két szögéből kiszámítandó a beírt kör sugara.

220. ábra.



Legyen O az ABC háromszögbe írt kör középpontja (220. ábra); a kör az oldalakat D , E , F pontokban érinti. A síkmértanból tudjuk, hogy AO , BO , CO sugarak A , C , B , szögeket felezik. Ha adva van $AC = b$ oldal és a rajta fekvő α és γ szög, AOE és COE derékszögű háromszögekben:

$$AE = \rho \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}, \quad CE = \rho \cdot \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2};$$

$$AE + CE = b = \rho \left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \right);$$

$$\rho = \frac{b}{\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}}.$$

A nevezőben levő cotangenst cosinus és sinussal kifejezve, lesz:

$$\rho = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)};$$

$$\rho = \frac{b \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

4. A háromszög három adott oldalából (a, b, c) kiszámítandó a kívülről érintkező három kör sugara (ρ_1, ρ_2, ρ_3). Megfelelő ábrát készítően, kitűnik, hogy:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}, \\ \rho_2 &= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}, \\ \rho_3 &= \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}. \end{aligned} \right\}$$

Ebből látnivaló egyszersmind, hogy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}; \\ t &= \sqrt{\rho \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3}. \end{aligned} \right\} \text{ Szavakkal?}$$

95. §. Háromszögmértani feladatok.

A 92. §-ban tárgyalt négy főfeladaton kívül még számtalan más, többé-kevésbé összetett feladat is adható, részint a háromszög alkotórészeinek különféleképen való összekapcsolása, részint a körülírt, vagy beírt kör sugarának, a magasságoknak, a középvonalaknak, a szögfelezőknek stb. számbavétele útján. Minden ilyenmű feladatnál arra kell törekednünk, hogy azt a tanult háromszögtani tételek segítségével az előbbi egyszerű feladatok valamelyikére vezessük vissza. E tekintetben útmutatóul szolgálhatnak a következő példák:

1. Valamely háromszögből ismeretes az egyik oldal (a), továbbá a másik két oldal összege ($b + c$), és az utóbbi oldalakkal átellenes szögek összege ($\beta + \gamma$); fejtsük meg a háromszöget.

A Mollweide-féle első egyenlet szerint (91. §. 4):

$$(b + c) \cdot \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = a \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$$

Ebben: a , $(b + c)$ és $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ ismeretes mennyiségek, tehát:

$$\cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = \frac{(b + c) \cdot \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma)}{a}.$$

Már most $\frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ -t és $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ -t, vagyis a két szög fél összegét és fél különbségét ismervén, β -t és γ -t is könnyen kiszámíthatjuk. Az oldalakat pedig a *tangens-tétel* alapján kereshetjük. Mikor nem fejthető meg a feladat?

Egyszerűbb eszközökkel, habár nem oly rövid úton fejthető meg e feladat, ha olyforma eljárást követünk, mint a szerkesztés útján történő megfejtésnél (19. §.). Ugyanis gondoljuk a fentebbi

feladatot megfejtettnek és legyen ABC a keresett háromszög. Hosszabbítsuk meg ennek b oldalát, vagyis CA -t annyira, hogy $AD = c$, tehát $CD = b + c$ legyen. Az ekkép származott BCD \triangle -ben BDC szög $= 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ és $CBD = 90^\circ - \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$; minthogy pedig $BC = a$, $CD = b + c$ és BDC szög ismeretes, tehát a sinustétel alapján $\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ szög is kiszámítható.

2. Fejtsük meg a háromszöget, ha az alapvonal (a), a másik két oldal összege ($b + c = s$), és az alapon fekvő szögek egyike (β) ismeretes.

A Mollweide-féle első egyenlet szerint (91. §. 4.):

$$a \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) = (b + c) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Hogy ebből γ -t megtalálhassuk, a cosinusokat az egyenlet mindkét oldalán a szögmértan (6) és (2) képlete szerint kifejtjük; akkor lesz:

$$a \left(\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) = (b + c) \left(\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right);$$

ezután az egyenlet mindkét oldalát $\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ -vel osztjuk:

$$a \left(\cotg \frac{\beta}{2} + \tg \frac{\gamma}{2} \right) = (b + c) \left(\cotg \frac{\beta}{2} - \tg \frac{\gamma}{2} \right),$$

és ebből:

$$\tg \frac{\gamma}{2} = \frac{b + c - a}{b + c + a} \cotg \frac{\beta}{2}.$$

Sokkal hamarabb érünk célt, ha $\tg \frac{\gamma}{2}$ és $\tg \frac{\beta}{2}$ ismeretes egyenleteit 92. §. IV. pont (3) egymással szorozzuk.

Ezen egyszerű képletből γ szöveget kényelmesen kiszámíthatjuk; a többi alkotórészt ezután a szokott módon kereshetjük.

Fejtsük meg ugyanezt a feladatot oly segédháromszög fölvételével, melyben az adott a alapvonalon és β szögön kívül az oldalösszeg ($b + c$) is, mint egyszerű alkotórész fordul elő. Lásd az 1. példánál alott utasítást és a 19. §. 1. pontját.

3. Valamely háromszögből ismeretes a kerület (azaz a három oldal összege $a + b + c$) és két szög (β, γ); fejtsük meg a háromszöget.

A harmadik szög $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$.

A három oldal ismeretes összegét $2s$ -sel jelöljük, azaz:

$$a + b + c = 2s.$$

A sinus-tétel alapján:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \text{ és } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Ezen értékeket (1) egyenletbe helyettesítvén, lesz:

$$a + \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} + \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = 2s,$$

vagy:

$$a (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 2s \sin \alpha;$$

tehát:

$$a = \frac{2s \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

Hasonlóképen nyerhető b és c értéke, melyet külön levezetni fölösleges.

De minthogy a fentebbi törtszám nevezője többtagú kifejezés és ennek következtében logaritmusokkal való számításra nem alkalmas, a három sinus összegét szorzattá fogjuk átalakítani:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \sin \beta) + \sin \gamma &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) [\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) + \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)] \\ &= 4 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ezen utóbbi értéket helyettesítvén, kellő rövidítés után lesz:

$$a = \frac{s \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Irjuk fel b és c értékét is.

Fejtsük meg ugyane feladatot oly segédháromszög felvételével, melynek alapvonala: $a + b + c$. (Lásd a 19. §. 3. pontját.)

4. Valamely háromszögből ismeretes az egyik oldal (a), a másik két oldal különbsége ($b - c$) és az utóbbi oldalakkal szemközt fekvő szögek különbsége ($\beta - \gamma$); fejtsük meg a háromszöget.

(E feladat megfejtése hasonló az 1-höz.)

5. Valamely háromszögből ismeretes az alap (a), a hozzátartozó magasság (m) és az alappal szemközt fekvő szög (α); mekkorák a többi alkotórészek?

Alkalmazzuk Carnot tételét az a oldalra és keressük $(b + c)$ - és $(b - c)$ -t.

6. Valamely háromszögből ismerjük az egyik oldalt (a -t), a hozzátartozó magasságot (m -t) és a másik két oldal összegét ($b + c$); számítsuk ki a háromszöget. (Lásd a 93. §. utolsó pontját.)

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2am}{(b+c) + (b+c-a)}$$

7. A háromszög m_1, m_2, m_3 három magasságából számítsuk ki a területet.

Nevezzük a három oldalt x, y, z -nek, fél összegüket s -nek, lesz:

$$m_1 x = m_2 y = m_3 z, \text{ tehát } y = \frac{m_1}{m_2} x, \text{ és } z = \frac{m_1}{m_3} x.$$

Helyettesítsük e két értéket a Hero-féle képletbe, melyszerint $t = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ és írjunk t helyébe $\frac{1}{2} m_1 x$ -et. Stb.

Tizenharmadik fejezet.

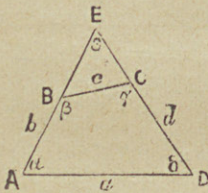
A trigonometria néhány alkalmazása.

96. §. Néhány feladat a négyszögről.

Tudjuk, hogy a négyszög meghatározására öt alkotórész szükséges. Lássuk néhány példában, mikép lehet öt adott alkotórészből a négyszög többi részét kiszámítani.

1. $ABCD$ (221. ábra) négyszögből ismeretes három szög, névszerint: α, β, γ és két átellenes oldal: a és c ; számítsuk ki a többi alkotórészt és a négyszög területét.

221. ábra.



Hosszabbítsuk meg a b és d két ismeretlen oldalt, a mig E pontban találkoznak. Ez úton AED és BEC háromszögek jönnek létre. Mind a kettőből egy-egy oldal és két-két szög ismeretes lévén, a többi alkotórészeket könnyen kiszámíthatjuk.

Ugyanis AED háromszögben:

$$AE = \frac{a \sin \delta}{\sin \varepsilon} \text{ és } DE = \frac{a \sin \alpha}{\sin \varepsilon}.$$

BEC háromszögben:

$$BE = \frac{c \sin \gamma}{\sin \varepsilon} \text{ és } CE = \frac{c \sin \beta}{\sin \varepsilon}.$$

Minthogy $AB = AE - BE$ és $CD = DE - CE$, továbbá $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \delta)$, következőleg: $\sin \varepsilon = \sin (\alpha + \delta)$, tehát:

$$b = \frac{a \sin \delta}{\sin (\alpha + \delta)} - \frac{c \sin \gamma}{\sin (\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \delta - c \sin \gamma}{\sin (\alpha + \delta)}.$$

$$d = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\alpha + \delta)} - \frac{c \sin \beta}{\sin (\alpha + \delta)} = \frac{a \sin \alpha - c \sin \beta}{\sin (\alpha + \delta)}.$$

E képletek akkor is érvényesek, ha AB és CD oldalak AD alatt érnek össze. (Miért?)

Megfejtendő-e a fönntebbi feladat azon esetben, ha $\alpha + \delta = 180^\circ$?

A négyszög területének kiszámítására: AED háromszög területéből $BEC \triangle$ területét kivonjuk. Azaz:

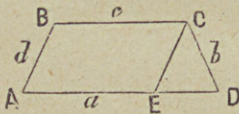
$$= \frac{a^2 \sin \alpha \sin \delta}{2 \sin(\alpha + \delta)} - \frac{c^2 \sin \beta \sin \delta}{2 \sin(\alpha + \delta)}$$

2. $ABCD$ négyszögből adva van három oldal: a , b , c és a két közbezárt szög α és β , miképen számítható ki a másik két szög? (Lásd az előbbi ábrát.)

A számítás következő rendben történik: Először ABD háromszögből kikeressük BD átlót és ABD szöget; ezen két alkotórész segítségével azután kiszámítjuk BCD háromszögből γ -t és végül δ -t.

3. A trapéz négy ismeretes oldalából kiszámítandók a szögek és a terület.

222. ábra.



Jelöljük $ABCD$ trapéz oldalait (222. ábra) sorban a , b , c , d -vel, a szögeket α , β , γ , δ -val. A trapéz jellemző tulajdonságánál fogva:

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \text{ és } \gamma + \delta = 180^\circ.$$

Húzzuk meg $CE = AB$ egyenest; ezzel a trapéz két egyszerűbb idomra t. i. $ABCE$ parallelogrammára és ECD háromszögre oszlik. Minthogy az utóbbinak mind a három oldala ismeretes, továbbá $CED \sphericalangle = \alpha$ és $CDE \sphericalangle = \delta$, tehát a trapéz eme két szöge könnyen kiszámítható. (92. §. IV.)

A területet illetőleg:

$$ABCE [\square] = cd \sin \beta = cd \sin \alpha$$

$$CED \triangle = \frac{(a-c)d \sin \alpha}{2},$$

tehát:
$$ABCD = cd \sin \alpha + \frac{(a-c)d \sin \alpha}{2}.$$

$$ABCD = \frac{d(a+c)}{2} \sin \alpha, \quad \text{vagy:}$$

$$ABCD = d(a+c) \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

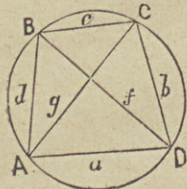
vége $\sin \frac{\alpha}{2}$ -t és $\cos \frac{\alpha}{2}$ -t CED háromszög oldalaival kifejezve;

$$ABCD = \frac{a+c}{2} \sqrt{s(s-b)(s-d)(s-(a-c))},$$

ahol CED háromszög fölkerületét s -sel jelöltük.

4. A körbe írt négyszög négy ismeretes oldalából számítsuk ki a szögeket és a területet. (223. ábra.)

223. ábra.



Rövidség okáért a négyszög oldalait a, b, c, d -vel, a szögeket $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -val, a két átlót f és g -vel jelöljük. Tudjuk, hogy a körbe írt négyszögben két átellenes szög összege 180° . Ennélfogva:

$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \text{ és } \beta + \delta = 180^\circ,$$

következően:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha \text{ és } \delta = 180^\circ - \beta.$$

ABD és BCD háromszögre a cosinus-tételt alkalmazván:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \text{ és}$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

ezekből:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

tehát:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

Mint hogy ezen egyenlet logaritmosos számvetésre nem alkalmas, a 92. §. IV. pontja módjára átalakítjuk.

Ugyanis, a szögméтан szerint:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \text{ és } \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

$\cos \alpha$ imént talált értékét helyettesítvén:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{4(ad + bc)}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{4(ad + bc)}};$$

vagy:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{ad + bc}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a + c + d - b)(a + b + d - c)}{ad + bc}}.$$

Rövidség kedvéért legyen:

$$a + b + c + d = 2s; \text{ ekkor:}$$

$$a + b + c - d = 2(s - d),$$

$$a + b + d - c = 2(s - c),$$

$$a + c + d - b = 2(s - b),$$

$$b + c + d - a = 2(s - a),$$

és képleteink így alakulnak:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}};$$

ezekből osztás után lesz:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}.$$

β -ra nézve hasonló képlet nyerhető, ha g átlót egyszer ABC , majd ACD háromszögből keressük; akkor a fentebbi eljárás mellett:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)}}.$$

A négyszög területét illetően nyilvánvaló, hogy ez ABD és BCD háromszögek területének összegéből áll. A 93. §. értelmében:

$$ABD \triangle = \frac{ad \sin \alpha}{2} \text{ és } BCD \triangle = \frac{bc \sin \alpha}{2};$$

tehát:

$$t = (ad + bc) \frac{\sin \alpha}{2} = (ad + bc) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$\sin \frac{\alpha}{2}$ és $\cos \frac{\alpha}{2}$ helyébe az imént kifejtett értékeket téve, következő egyszerű képlet származik:

$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

5. A körbe írt négyszög ismeretes oldalából keressük a két átlót.

Az előbbi pont szerint:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \text{ és:}$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)};$$

$\cos \alpha$ ezen értékét a megelőző egyenletben helyettesítve, lesz:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)},$$

vagy:

$$f^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc},$$

tehát:

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Hasonlóképen:

$$g = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}.$$

Ebből a két egyenlethől szorzás és osztás által két nevezetes kapcsolat származik, t. i.:

$$fg = ac + bd, \text{ és } \frac{f}{g} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Az első egyenlettel már az 53. §-ban (Ptolemaeus-féle tantétel) megismerkedtünk; a másikat sem nehéz szavakkal kifejezni.

6. Valamely négyszögből ismeretes a két átló (f és g) és a közbefogott szög (ω); számítsuk ki a négyszög területét.

A négyszög területe egyenlő az átlók meghúzása által keletkezett négy háromszög területének összegével. Ha most az egyes háromszögek területét két oldal és a bezárt szög sinusával kifejezzük, lesz:

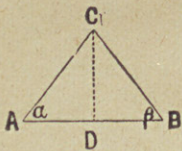
$$t = \frac{fg}{2} \cdot \sin \omega.$$

Látni ebből, hogy az egyenlő átlójú négyszögek között az a legnagyobb, amelynek átlói egymást derékszögben metszik. (Miért?)

97. §. A szabályos sokszögek kiszámítása.

1. Számítsuk ki valamely n -oldalú szabályos sokszög oldalhosszából a területét, és viszont, a területéből az oldal-hosszát.

224. ábra.



Legyen $AB = a$ valamely szabályos n -szögnek egyik oldala (224 ábra); C pont ugyanannak középpontja és $CD \perp AB$ -re. Tudjuk, hogy:

$$\angle ACB = \frac{360^\circ}{n},$$

következőleg ennek fele: $\angle ACD = \frac{180^\circ}{n}$.

Továbbá ACD \triangle -ben:

$$DC = AD \cdot \cotg \angle ACD = \frac{a}{2} \cotg \frac{180^\circ}{n},$$

tehát ACB háromszög területe:

$$ACB \triangle = AD \cdot CD = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cotg \frac{180^\circ}{n} = \frac{a^2}{4} \cotg \frac{180^\circ}{n},$$

következőleg a szabályos sokszög területe:

$$t = \frac{na^2}{4} \cotg \frac{180^\circ}{n}.$$

Megfordítva, ha t ismeretes és a -t keressük:

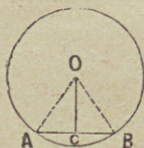
$$a = \sqrt{\frac{4t}{n} \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}};$$

vagy.

$$a = 2 \sqrt{\frac{t}{n} \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

2. A kör sugarából számítsuk ki a beírt n -oldalú szabályos sokszög oldalát és területét és megfordítva, a szabályos n -szög oldalából, vagy területéből keressük meg a körülírt kör sugarát.

225. ábra.



Legyen O a kör középpontja (225. ábra), $AO = BO = R$, és $AB = l$ az n -oldalú szabályos sokszög egyik oldala. Legyen $OC \perp AB$ -re, akkor AOC derékszögű háromszögben:

$$AC = AO \cdot \sin AOC, \text{ vagy:}$$

$$\frac{l}{2} = R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n},$$

tehát:

$$l = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

A sokszög kerülete: $K = nl$, vagyis:

$$K = 2n R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

A területre vonatkozólag:

$$AOB \triangle = AC \cdot OC = \frac{l}{2} R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n};$$

vagy l értékét helyettesítve:

$$AOB \triangle = \frac{R^2}{2} \cdot 2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n};$$

vagyis:

$$AOB \triangle = \frac{R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n};$$

következőleg a sokszög területe:

$$t = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Ellenben, ha R az ismeretlen mennyiség, akkor az l és t számára nyerte gyenleteket R -re nézve fejtjük meg; lesz megfelelőleg:

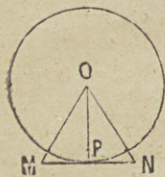
$$R = \frac{l}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}};$$

és:

$$R = \sqrt{\frac{2t}{n \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}}}.$$

3. A kör sugarából kiszámítandó a körülírt szabályos n -szög oldalhossza és területe és megfordítva, az n -oldalú szabályos sokszög oldalhosszából, vagy területéből a beírt kör sugara.

226. ábra.



Legyen O a kör középpontja (226. ábra), r a sugár, $MN = L$ a körülírt szabályos n -szög egyik oldala, és P az érintési pont. — MOP derékszögű háromszögben:

$$MP = OP \cdot \operatorname{tg} MOP, \text{ vagyis:}$$

$$\frac{L}{2} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$$

tehát:

$$L = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

A sokszög kerülete: $K = nL$, vagyis:

$$K = 2nr \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

A területet illetően:

$$MON \triangle = MP \cdot OP = \frac{1}{2} Lr = r^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n};$$

tehát a sokszög területe: $T = nr^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

Ha r a keresett mennyiség, akkor az L és T számára nyert egyenleteket r -re vonatkozólag kell megfejtenünk; lesz:

$$r = \frac{L}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}} = \frac{L}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n},$$

és:

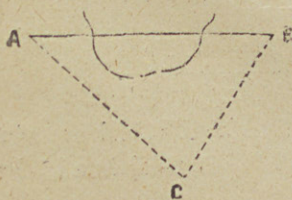
$$r = \sqrt{\frac{T}{n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}} = \sqrt{\frac{T}{n} \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

98. §. Feladatok a gyakorlati mértan köréből.

A trigonometria a gyakorlati mértanban bő alkalmazást nyer. Mi csak néhány fontosabb feladat megfajtására szorítkozunk. Ezek:

1. *Határozzuk meg két pont egymástól való távolságát, feltéve, hogy valamely közbeeső akadály miatt e távolságot közvetlenül megmérni nem lehet.*

227. ábra.

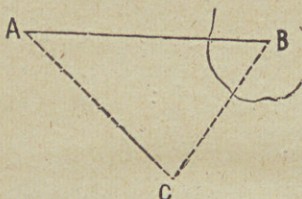


Legyen e két pont A és B (227. ábra). Minthogy a helyi viszonyoknál fogva (például mocsár, vagy más akadály miatt) az AB egyenes közvetlenül nem mérhető meg, valamely harmadik C pontot tűzünk ki úgy, hogy ebből úgy A mint B -felé mérni lehessen. Ezután

a mérő lánccal megmérjük $CB = a$ és $CA = b$ távolságokat, és végül valamely szögmérő műszerrel $ACB = \gamma$ szöget; most már a keresett AB távolságot ABC háromszögből a 92. §. II. pontja szerint könnyen kiszámíthatjuk.

2. *Határozzuk meg két pont egymástól való távolságát, feltéve, hogy az egyik hozzáférhetetlen.*

228. ábra.

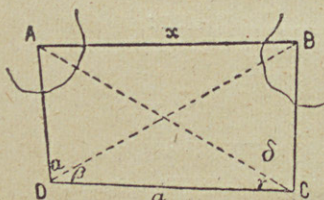


Legyen a két pont A és B (228. ábra). Itt is egy harmadik C pontot tűzünk ki úgy, hogy ebből a megközelíthető A pont felé mérni lehessen. Ezután megmérjük AC távolságot, továbbá PAC és ACB szögeket; e három adatból a keresett AB

távolságot a 92. §. I. pontja szerint kiszámíthatjuk.

3. *Határozzuk meg két hozzáférhetetlen pont egymástól való távolságát.*

229. ábra.



Hogy e feladatot megfejthessük, oly ($CD = a$) alapvonalat (229. ábra) kell kitűznünk, mely a meghatározandó $AB = x$ egyenes vonallal ugyanazon síkban fekszik, és amelynek végpontjaiból A és B pontokat látni és irányba venni lehet.

Megmérvén ezután CD alapvonalat, továbbá D ponton α és β szögeket, végül C pontban γ és δ szögeket, az ismeretlen x távolságot számítás útján ekkép határozzuk meg:

$$\sphericalangle CAD = 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma);$$

és:

$$\sphericalangle DBC = 180^\circ - (\beta + \gamma + \delta).$$

Tehát úgy ACD mint BCD háromszögben egy oldal és valamennyi szög ismeretes, következésképp a 92. §. I. pontja szerint:

ACD \triangle -ben:

$$AC = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} \text{ és } AD = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)};$$

BCD \triangle -ben:

$$BC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \gamma + \delta)} \text{ és } BD = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)}.$$

E négy adat alapján x -et akár ABD , akár ABC háromszögből könnyen kiszámíthatjuk, mert mindegyikből két oldal és a közbe

zárt szög ismeretes lévén, a harmadik oldalt (x -et) a szokott módon meghatározhatjuk.

Kellő ellenőrzés tekintetéből célszerű x értékét *mind a két* háromszögből kiszámítani.

Jóval egyszerűbb a feladat megfejtése, ha az alapvonal (CD) egyik végpontja (pl. C) a meghatározandó AB meghosszabbításába esik.

4. *Három A , B és C pontnak ismeretes helyzetéből határozzuk meg valamely D negyedeknek a fekvését, az utóbbi pontban tett szögmérések alapján.* Föltésszük, hogy mind a négy pont ugyanazon síkban van. (Pathenot-féle föladat.)

Minthogy A , B és C pontok (230. ábra) kölcsönös fekvése ismeretes, tehát AC és BC , vagyis a és b távolságokat, továbbá ACB , vagyis γ szöveget ismerteknek tekintetjük; ezenkívül még $ADC = \alpha$ és $BDC = \beta$ szögek is meg vannak mérve.

D pont fekvését A , B és C pontokra vonatkozólag AD , BD és CD távolságok határozzák meg, melyeket röviden x, y, z -vel jelölünk. Hogyha $CAD = \varphi$ és $CBD = \psi$ szögek ismertek lennének, a keresett távolságokat ACD és BCD háromszögekből könnyen kiszámíthatnók; mert a sinustételnél fogva ACD háromszögben:

$$x = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha} \quad \text{és} \quad z = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha}. \quad (1)$$

BCD háromszögben pedig:

$$y = \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta} \quad \text{és} \quad z = \frac{b \sin \psi}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Legközelebbi teendők tehát φ és ψ szögeket meghatározni.

z -nek két értékéből következő új egyenlet származik:

$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \psi}{\sin \beta}; \quad (3)$$

ezenkívül $ACBD$ négyszögben:

$$\varphi + \psi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma). \quad (4)$$

A (3) és (4)-ik egyenlet φ és ψ szögeken kívül más ismeretlen mennyiséget nem foglal magában; e szögek tehát meghatározhatók.

Rövidség kedvéért legyen $360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$; ekkor a (4) egyenlet szerint:

$$\psi = \delta - \varphi. \quad (5)$$

ψ -nek ezen értékét a (3) egyenletbe helyettesítve, lesz:

$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin (\delta - \varphi)}{\sin \beta},$$

vagy:
$$\frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \delta \cos \varphi - b \cos \delta \sin \varphi}{\sin \beta};$$

ebből: $a \sin \varphi \sin \beta = b \sin \delta \cos \varphi \sin \alpha - b \cos \delta \sin \varphi \sin \alpha$,
ezen egyenletet $\sin \varphi$ -vel osztva:

$$a \sin \beta = b \sin \delta \sin \alpha \cotg \varphi - b \cos \delta \sin \alpha,$$

$$\cotg \varphi = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha \sin \delta} + \cotg \delta. \quad (6)$$

Az utóbbi egyenletből kiszámíthatjuk φ -t, ezután az (5) egyenlet alapján ψ -t, végre az (1) és (2) egyenletekből x -et, y -t és z -t.

Ha $\alpha + \beta + \gamma = \delta = 180^\circ$, azaz ha A, B, C, D pontok ugyanazon kör kerületébe esnek, a feladat határozatlan, következésképp meg nem fejthető (miért nem?). Ezért a gyakorlati alkalmazásoknál ügyelnünk kell, nehogy a negyedik pont a másik három által meghatározott kör kerületébe (vagy ennek közelébe) essék.

Mennyiben változnak a fentebbi egyenletek

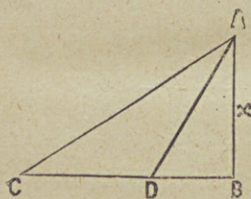
1. azon esetben, ha a keresett D pont C -vel AB -től egyfelől esik?

2. ha C pont AB egyenes vonalon fekszik?

3. ha a meghatározandó D pont ABC háromszög terébe esik?

5. *Határozzuk meg valamely láragnak (például toronynak) magasságát ismert hosszúságú vízszintes alapvonalból.*

231. ábra.



Legyen AB (231. ábra) a meghatározandó magasság és CD a vízszintes alapvonal, mely kellően meghosszabbítva B talponton halad keresztül.

Eltételezve a szögmérő műszer magasságától, mely minden esetre a talált magassághoz hozzáadandó, C pontban megmérjük $ACB = \varepsilon_1$ és D pontban $ADB = \varepsilon_2$ emelkedési (elevacio) szöveget. Rövidség okáért legyen: $AB = x$ és $CD = a$.

ADC háromszögben:

$$ADC \sphericalangle = 180^\circ - \varepsilon_2, \quad CAD \sphericalangle = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

és:

$$CA = \frac{a \sin \varepsilon_2}{\sin (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

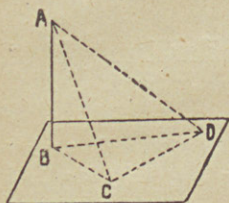
Minthogy CAB derékszögű háromszögben:

$$x = CA \cdot \sin \varepsilon_1,$$

tehát:

$$x = \frac{a \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2}{\sin (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}.$$

Gyakran nincs módunkban oly vízszintes alapvonalat kitűzni, mely a megméréendő tárgy talppontján megy keresztül. Ilyenkor a *CD* alapvonal *C* végpontjában (232. ábra) megmérjük a vízszintesen fekvő $BCD = \alpha$ szöget és $ACB = \varepsilon$ emelkedési szöget, a másik *D* végpontban a vízszintes $BDC = \beta$ szöget. Ekkép *BCD* vízszintesen fekvő háromszögben egy oldal ($CD = a$) és két szög (α és β) ismeretes lévén, a sinus-tételnél fogva:



$$BC = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Mintthogy továbbá *ABC* derékszögű háromszögben:

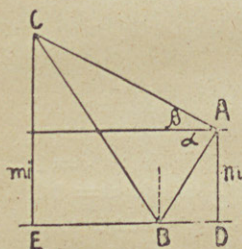
$$AB = x = BC \cdot \operatorname{tg} \varepsilon,$$

tehát:

$$x = \frac{a \sin \beta \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)}$$

6. Határozzuk meg valamely felhő magasságát, ha annak képét az alattunk fekvő tó tükörének bizonyos pontjában látjuk.

233. ábra.



Legyen *C* a felhő helye, (233. ábra) *B* annak képe az *EBD* tükörében, *A* a parton levő megfigyelő állása; $AD = m$, a part magassága, $CE = m_1$ a felhő magassága, α a hajlásszög (depresszió-szög) a tükörkép felé; β az emelkedési szög (eleváció-szög) a felhő irányában. Mintthogy siktükörnél a beesési szög egyenlő a visszaverődés szögével, ennélfogva:

$$\sphericalangle CBE = \sphericalangle ABD = \alpha; \quad \sphericalangle ACB = \alpha - \beta.$$

BCE derékszögű háromszögből:

$$m_1 = CE = BC \sin \alpha;$$

ABC háromszögből:

$$BC : AB = \sin (\alpha + \beta) : \sin (\alpha - \beta);$$

$$BC = \frac{AB \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)};$$

vége *ABD* derékszögű háromszögből:

$$m = AB \cdot \sin \alpha; \quad AB = \frac{m}{\sin \alpha};$$

tehát:

$$BC = \frac{m \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin (\alpha - \beta)};$$

és:

$$m_1 = \frac{m \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Feladatok a trigonometriához.

X. Fejezet. A szögfüggvényekről és a derékszögű és egyenlőszárú háromszög megfejtéséről.

Szögfüggvények. 384. Legyen a derékszögű háromszög átfogója c , a két befogója a és b , az ezekkel átellenes szögek α és β . — Mily nagyok α és β szögfüggvényei, ha:

$$\begin{aligned} c &= 5, 89, 499, \frac{1}{10}, 1, \frac{1}{2} \text{ m}, m^2 + n^2; \\ a &= 3, 8, 391, \frac{5}{100}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \text{ m}, m^2 - n^2; \\ b &= 4, 39, 12, \frac{2}{100}, \frac{1}{2} \sqrt{3}, \frac{1}{3} \text{ m}, 2mn? \end{aligned}$$

385. Mily nagyok ama derékszögű háromszög α hegyes szögének a függvényei, melyben a) $a = 2b$; b) $a = \frac{2}{3}c$; c) $a + b = \frac{5}{4}c$?

386. Mekkora a derékszögű háromszög α hegyes szögének a függvényei, ha ismerjük az a befogót és az átfogóra bocsátott magasságot?

387. Mekkora akkor, ha ismerjük az egyik befogót és a másik befogónak az átfogón való projekcióját?

388. Derékszögű, egyenlőszárú háromszögben az átfogó a ismeretes; mekkora a hegyes szögek függvényei?

389. Valamely derékszögű háromszög területe 12 m^2 , egyik szögének tangense 1.5 ; mily nagyok a befogók?

390. Mily nagy az átfogó, ha $\sin \alpha = 0.6$, az α szöggel szemben fekvő befogó pedig 20.5 m ?

391. Mekkora a derékszögű háromszög oldalai és területe, ha: a) $c = 1.45$ és $\tan \alpha = 1.05$; b) $a = 24$ és $\cos \alpha = 0.28$; c) $b = 117$ és $\sin \alpha = 0.352$.

392. Szerkesszük meg a szöveget, ha: $\sin \alpha = 0.8$; $\cos \alpha = \frac{5}{6}$; $\tan \alpha = 3$; $\cotg \alpha = 1$; $\sin \alpha = 0.6$; $\cotg \alpha = 3$; $\cotg \alpha = \frac{3}{4}$.

Szögfüggvények összefüggése. 393. Mily nagyok α szög többi függvényei, ha:

a) $\sin \alpha = 0.75$; $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; $\sin \alpha = \frac{2m}{1+m^2}$; $\sin \alpha = 0.85$; $\sin \alpha = \frac{1}{4}$;
 $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$?

b) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; $\cos \alpha = 0.28$; $\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}$; $\cos \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $\cos \alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$?

c) $\tan \alpha = \frac{2}{3}$; $\tan \alpha = 2.4$; $\tan \alpha = 3$; $\tan \alpha = 1$; $\tan \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{3}$; $\tan \alpha = 1\frac{1}{2}$?

d) $\cotg \alpha = 0.8$; $\cotg \alpha = \frac{5}{7}$; $\cotg \alpha = \frac{1}{3}$; $\cotg \alpha = 1$; $\cotg \alpha = \sqrt{3}$;
 $\cotg \alpha = \frac{3}{4}$?

e) $\sec \alpha = 2$; $\sec \alpha = \frac{5}{4}$; $\sec \alpha = \sqrt{2}$; $\sec \alpha = \frac{3}{2}$; $\sec \alpha = 1$; $\sec \alpha = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}$?

f) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{7}$; $\operatorname{cosec} \alpha = 1.125$; $\operatorname{cosec} \alpha = 2$; $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{3}$; $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{2}{3} \sqrt{3}$;
 $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{2}$?

394. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket akképp, hogy azokban csak ugyanazon egy függvény forduljon elő:

a) $\cos \alpha + \frac{\cotg \alpha}{\sin \alpha}$; a kifejezés csak $\sin \alpha$ -t tartalmazzon,

b) $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$; a kifejezés csak $\cos \alpha$ -t tartalmazzon,

c) $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; a kifejezés csak $\cos \alpha$ -t tartalmazzon,

d) $1 + \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$; a kifejezés csak $\operatorname{ctg} \alpha$ -t tartalmazzon,

e) $\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{-1 \sin^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \cos \alpha$; a kifejezés csak $\operatorname{ctg} \alpha$ -t tartalmazzon

395. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét ha: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

a) $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2}$; b) $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} - \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \right)$;

c) $\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \frac{\gamma}{2}$; d) $\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2}.$$

A 30° , 45° , 60° -nyi szögek függvényei. 396. Mivel egyenlő:

a) $\frac{2 - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$, ha $\alpha = 45^\circ$; b) $\frac{2 - \sec \alpha}{2 \cdot 5 - \sin \frac{\alpha}{2}}$, ha $\alpha = 60^\circ$; c) $\frac{2 - \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$, ha $\alpha = 45^\circ$?

397. Mekkora α és β , ha: a) $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$ és $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$;

b) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$ és $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 1$?

Függvények logaritmusai. 398. Mekkora:

a) $\log \sin 38^\circ 17'$; $\log \sin 17^\circ 8' 20''$; $\log \sin 0^\circ 48' 37''$; $\log \sin 51^\circ 58' 33''$?

b) $\log \operatorname{tg} 1^\circ 25' 40''$; $\log \operatorname{tg} 69^\circ 27' 39''$; $\log \operatorname{tg} 23^\circ 23' 23''$; $\log \operatorname{tg} 89^\circ 19' 31''$?

c) $\log \cos 57^\circ 48'$; $\log \cos 39^\circ 9' 47''$; $\log \cos 50^\circ 9' 9''$; $\log \cos 24^\circ 16' 20''$?

d) $\log \operatorname{ctg} 77^\circ 31'$; $\log \operatorname{ctg} 8^\circ 8' 54''$; $\log \operatorname{ctg} 0^\circ 40' 29''$; $\log \operatorname{ctg} 63^\circ 15' 26''$?

399. Hány fok, perc, másodperc a szög, ha:

a) $\log \sin x = 9 \cdot 67843 - 10$; $\log \cos x = 9 \cdot 91469 - 10$; $\log \operatorname{tg} x = 0 \cdot 3043$,

$\log \operatorname{ctg} x = 9 \cdot 65062 - 10$.

b) $\log \sin x = 9 \cdot 59530 - 10$; $\log \cos x = 9 \cdot 94603 - 10$; $\log \operatorname{tg} x = 9 \cdot 81963 - 10$,

$\log \operatorname{ctg} x = 0 \cdot 83012$.

c) $\log \sin x = 9 \cdot 95301 - 10$; $\log \cos x = 9 \cdot 74151 - 10$; $\log \operatorname{tg} x = 0 \cdot 21453$;

$\log \operatorname{ctg} x = 9 \cdot 88603 - 10$.

400. Mekkora a szög, ha:

$\log \sin \alpha = -0 \cdot 52791$, $\log \cos \alpha = -0 \cdot 25849$, $\log \operatorname{ctg} \alpha = 0 \cdot 79825$.

$\log \operatorname{tg} \alpha = -0 \cdot 18027$, $\log \operatorname{ctg} \alpha = -0 \cdot 11387$, $\log \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot 08851$.

401. Mekkora a szög, ha:

a) $\operatorname{tg} \alpha = 3$; $\sin \alpha = 0 \cdot 5$; $\cos \alpha = 0 \cdot 637$; $\operatorname{ctg} \alpha = 2 \cdot 539$.

b) $\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2}$; $\cos \alpha = 0 \cdot 96$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$.

402. Adva van a szög; keressük meg logaritmus-táblák segítségével a

függvény értékét. Mekkora:

$\sin 36^\circ 12' 6''$, $\cos 53^\circ 42' 6''$, $\operatorname{tg} 72^\circ 25' 20''$, $\operatorname{tg} 21^\circ 12' 40''$, $\operatorname{ctg} 30^\circ 26' 20''$,

$\operatorname{ctg} 50^\circ 6'$, $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 45^\circ$?

403. Számítsuk ki x értékét, ha:

a) $x = 32 \cdot 538 \cdot \sin 12^\circ 52' 20''$. $\operatorname{tg} 43^\circ 5' 6''$;

b) $x = \frac{0 \cdot 93 \cos 52^\circ 6'}{3 \cdot 09 \sin 46^\circ 10'}$; c) $\sin x = \frac{0 \cdot 359 \operatorname{tg} 45^\circ 16' 10''}{10 \cdot 437 \operatorname{ctg} 43^\circ 5' 9''}$;

d) $\operatorname{tg} x = \frac{4 \cdot 536 \sin 50^\circ 16' 4'' \operatorname{ctg} 36^\circ 10' 10''}{0 \cdot 087 \cos 15^\circ 32' 16'' \operatorname{tg} 65^\circ 30' 20''}$

Derékszögű háromszögek megfejtése. 404. A derékszögű háromszög átfogója a , két befogója b és c , az ezekkel szemben fekvő szögek β és γ ; ha ezek közül két alkotórész adva van, számítsuk ki a többit és a területet:

	a	b	c	β	
c)	233	105	208	$29^{\circ} 47' 9''$	$63^{\circ} 12' 54''$;
b)	397	228	325	$35^{\circ} 3' 4''$	$54^{\circ} 56' 56''$;
c)	505	336	377	$41^{\circ} 42' 32''$	$48^{\circ} 17' 28''$;
d)	65.5	39.6	40.3	$44^{\circ} 29' 53''$	$45^{\circ} 30' 7''$;
e)	3.794	2.083	3.171	$33^{\circ} 18' 2''$	$56^{\circ} 41' 58''$;
f)	2.3156	1.3988	1.8828	$36^{\circ} 36' 37''$	$53^{\circ} 23' 23''$.

405. Fejtsük meg a derékszögű háromszöget, ha ismeretes a terület (t) és egy szög β . ($t = 797.94 \text{ m}^2$, $\beta = 45^{\circ} 30' 7''$; vagy $t = 37050 \text{ dm}^2$, $\gamma = 54^{\circ} 56' 56''$.)

406. Megfejtendő a derékszögű háromszög, ha ismeretes a terület (t) és egy befogó (b) vagy (c). ($t = 3.3026 \text{ m}^2$, $b = 2.083$; vagy $t = 1.31685 \text{ m}^2$, $c = 1.8828$.)

407. Fejtsük meg a derékszögű háromszöget, ha az átfogója: a , az átfogóhoz tartozó magasság: m . ($a = 13 \text{ m}$, $m = 6 \text{ m}$.)

408. A derékszögű háromszög befogóinak az átfogóra való projekciói p_1 és p_2 ; fejtsük meg a háromszöget. ($p_1 = 32.4 \text{ m}$, $p_2 = 57.6 \text{ m}$.)

409. Az egyik projekció (p_1) és a szög β ismeretes; megfejtendő a háromszög. ($p_1 = 143 \text{ m}$, $\beta = 83^{\circ} 16' 1''$.)

410. Valamely út $2^{\circ} 51' 44''$ -nyi szög alatt hajlik a vízszintes síkhoz; hány percent az emelkedés; azaz mekkora az út olyan pontjának a magassága a vízszintes sík fölött, amelynek talppontja az út kezdőpontjától 100 m-nyi távolságban van?

411. Valamely hegyi útnak az emelkedése 4.8%; mekkora az emelkedési szög?

412. Mily nagy a Nap magassága, mikor a 15.2431 m magas torony árnyék 47.62 m?

413. Mily magasan áll a Nap, mikor az ember árnyéka magasságának kétszerese?

414. Ismeretes valamely derékszögű háromszögben az átfogó és az egyik befogó különbsége (s) és a bezárt szög (γ); számítsuk ki az átfogót. $s = 212$, $\gamma = 49^{\circ} 14' 50''$.

415. A derékszögű háromszögből ismeretes a két befogó összege (s) és az egyik hegyes szög (β), számítsuk ki az oldalakat.

416. A derékszögű háromszögből ismeretes az egyik befogó (b) és az ehhez tartozó középvonal (d); fejtsük meg a háromszöget. ($b = 240 \text{ m}$, $d = 200 \text{ m}$.)

417. Valamely derékszögű háromszögből ismeretes a két befogóhoz tartozó két középvonal (d_1 és d_2); megfejtendő a háromszög. $d_1 = 200 \text{ m}$, $d_2 = 252.96 \text{ m}$.

418. A derékszögű háromszög átfogója 8 m, az egyik befogó 2 m-rel hosszabb, mint a másik. A háromszög megfejtendő.

419. Egy A pont valamely $r = 12 \text{ m}$ sugarú kör középpontjától 20 m távolságban van. Számítsuk ki az A pontból a körhöz vont érintőket, az érintők által bezárt szöveget, az érintési pontokat összekötő húr és az ehhez tartozó iv hosszát.

420. Két kör kívülről érintkezik; az egyik sugara $R = 10$ dm, a másiké $r = 6$ dm, mily szöget alkotnak a közös érintők a centrálissal?

421. Mekkora szöget alkotnak két körhöz húzott külső érintők egymással, és mekkora a külső közös érintőknek az érintési pontok közt fekvő része, ha a sugarak: $r_1 = 32.5$ cm, $r_2 = 24.7$ cm, a centrális 65.8 cm?

Az egyenlőszárú háromszög megfejtése. 422. Valamely egyenlőszárú háromszög alapja: a , szára: b , az átelleses szögek: α és β , magassága: m ; fejtjük meg a háromszöget, ha két alkotórésze ismeretes:

	a	b	m	α	β
a)	88	125	117	$41^\circ 13' 6''$	$69^\circ 23' 27''$
b)	672	505	377	$83^\circ 25' 4''$	$48^\circ 17' 28''$
d)	3.12	2.05	1.33	$99^\circ 6'$	$40^\circ 27'$
e)	4.5	2.3995	0.8338	$139^\circ 20'$	$20^\circ 20'$

423. Megfejtendő az egyenlőszárú háromszög, ha ismeretes a terület (t) és egy szög (β), vagy (α). $t = 1515.88$ m², $\alpha = 45^\circ 30' 7''$; vagy $t = 1.876$, $\beta = 20^\circ 20'$.

424. Az egyenlőszárú háromszög kerülete (k) és az alapon fekvő szög (β) ismeretes; mekkorák az oldalak? $k = 24.8$ m, $\beta = 36^\circ 12'$.

425. Az egyenlőszárú háromszögben az alapnak és az ehhez tartozó magasságnak az összege kétszer akkora, mint a szár; mekkorák a szögek?

426. Mekkora valamely égitest valóságos átmérője, ha látszólagos átmérője (α) és a Földtől való távolsága (d)?

427. Valamely test eltűnik szemünk elől, ha $45''$ -nél kisebb a szemszög; mekkora távolságban fogjuk a d átmérőjű golyót pontnak látni?

428. Mekkoraának kell lenni valamely testnek a Hold fölületén, hogy 500-szoros nagyításnál még észrevehető legyen, ha a Hold távolsága a Földtől 385080 Km.?

429. Valamely körből ismeretes a sugár, r és a középponti szög α ; mekkora: a) a megfelelő húr hossza h , b) az ív hossza i , c) a középponti háromszög területe t , d) a körsegmentum területe t' ?

430. A körsector területe $t = 10$ m², a kör sugara $r = 10$ m; mily nagy a sectorhoz tartozó húr?

431. Egyenlőszárú háromszögben az alappal átelleses szög 120° ; ez három egyenlő részre van osztva. Hogy aránylik az alapnak középső szelete egy külsőhöz?

432. Egy szabályos ötszög oldala 2.5 dm; mekkorák az ötszög átlói?

433. Két körök egy síkban van felállítva; sugaraik R és r , középpontjaik távolsága d ; mekkora e két kereket körülfogó szíj?

XI. Fejezet. Feladatok a goniometriához.

A hegyes szögnél nagyobb szög függvényei. 434. Fejazzük ki hegyes szögek függvényeivel a következőket:

a) $\sin 156^\circ 27' 18''$; $\cos 122^\circ 18' 12''$; $tg 135^\circ 24' 8''$; $\sec 156^\circ 22' 48''$.

b) $\sec 100^\circ 20' 20''$; $\cotg 170^\circ 0' 10''$; $\operatorname{cosec} 160^\circ 16' 0''$; $\sin 110^\circ 0' 30''$.

c) $\sin 200^\circ$; $\cos 220^\circ 0' 40''$; $tg 190^\circ 10' 10''$; $\cotg 199^\circ 39' 10''$.

d) $\cos 280^\circ 10'$; $tg 300^\circ 20' 21''$; $\cotg 349^\circ 59' 20''$; $\sin 289^\circ 9' 50''$.

435. Egyszerűsítsük e kifejezéseket:

$$a) \sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) - \cos(90^\circ - \alpha) \sin(180^\circ - \alpha);$$

$$b) \frac{a^2 \sec(180^\circ - \alpha) \cos \alpha}{\operatorname{cosec}(180^\circ - \beta) \sin \beta} - \frac{b^2 \cotg(180^\circ - \beta) \operatorname{tg} \beta}{\cos \alpha \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha)};$$

$$c) \frac{(a^2 - b^2) \cotg(180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} - \frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\cotg(180^\circ - \alpha)}.$$

436. Szerkesztendő a szög, ha adva van a függvény:

$$1) \sin \alpha = +\frac{2}{3}, \cos \alpha < 0; 2) \cos \beta = -\frac{2}{3}, \sin \beta > 0; 3) \operatorname{tg} \gamma = +2, \sin \gamma < 0;$$

$$4) \cotg \delta = -2, \cos \delta < 0; 5) \sin \varphi = -\frac{5}{7}, \operatorname{tg} \varphi < 0; 6) \cos \omega = +\frac{1}{2}, \sin \omega < 0.$$

437. Egyszerűsítsük a következő kifejezéseket:

$$a) a \cdot 0^\circ + b \cos 90^\circ - c \operatorname{tg} 180^\circ; - b) a \cos 90^\circ - b \operatorname{tg} 180^\circ + c \cotg 90^\circ;$$

$$c) a^2 \sin 90^\circ + 2ab \cos 180^\circ + b \sec 0^\circ; - d) b \sin 90^\circ - c \cos 0^\circ + (b - c) \cos 180^\circ.$$

438. Űgyszintén:

$$a) 7 \sin 360^\circ - 11 \cos 270^\circ + 21 \cotg 0^\circ. - b) a^2 \cos 360^\circ - ab \sin 270^\circ - ab \cos 180^\circ + b \sin 90^\circ.$$

$$b) \frac{a \cos 0^\circ - b \sec 180^\circ}{a \operatorname{cosec} 90^\circ + b \operatorname{cosec} 270^\circ} + \frac{a \sec 360^\circ - b \cos 360^\circ}{(a + b) \cos 0^\circ - 2a \sin 180^\circ}.$$

$$439. \text{Mivel egyenlő: } \frac{\sec \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}, \text{ ha } \alpha = 0^\circ? \frac{\operatorname{cosec} \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ ha } \alpha = 90^\circ? \frac{\cotg \alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \text{ ha } \alpha = 90^\circ? \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \text{ ha } \alpha = 0^\circ?$$

A szögfüggvények logaritmusai. 440. Keressük a következő függvények logaritmusait:

$$a) \log \cos 146^\circ 20' 32''; \log \operatorname{tg} 170^\circ 16'; \log \sin 100^\circ; \log \cotg 190^\circ 0' 20''.$$

$$b) \log \sin 185^\circ 20'; \log \operatorname{tg} 250^\circ 0' 30''; \log \cos 245^\circ 16'; \log \cotg 216^\circ 19'.$$

$$c) \log \cos 280^\circ 15'; \log \sin 300^\circ 20'; \log \operatorname{tg} 320^\circ 15' 20''; \log \cotg 350^\circ 10'.$$

$$441. \text{Mekkora } \alpha \text{ szög, ha: } a) \log \sin \alpha = 9.35643 - 10; b) \log \cos \alpha = 9.47635 - 10 (n); c) \log \operatorname{tg} \alpha = 0.97235; d) \log \cotg \alpha = 9.43206 - 10; e) \log \cos \alpha = -0.43965; f) \log \sin \alpha = -0.93521.$$

$$442. \text{Mekkora } \alpha \text{ szög, ha: } a) \sin \alpha = 0.432; b) \sin \alpha = -0.7; c) \cos \alpha = -0.967; d) \cos \alpha = -0.9325; e) \operatorname{tg} \alpha = -1.327.$$

443. Számítsuk ki x értékét, ha:

$$a) x = 3.25 \cos 110^\circ \operatorname{tg} 160^\circ. - b) x = 0.039 \operatorname{tg} 113^\circ 20' \sin 160^\circ 40'.$$

$$c) x = \sqrt[3]{49.3 \sin 160^\circ \cos 120^\circ}. d) x = \frac{0.38 \sin 123^\circ \operatorname{tg} 156^\circ}{\cos 138^\circ \cotg 168^\circ}.$$

444. Kiszámítandó α szög, ha:

$$a) \cos \alpha = \frac{0.3298 \cotg 112^\circ \sin 10^\circ 30' 3''}{0.0239 \cos 130^\circ \operatorname{tg} 110^\circ}. b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{0.92 \cos 110^\circ \sin 170^\circ}{\cotg 130^\circ \cos 140^\circ}$$

$$445. \text{Logaritmustáblákkal számítsuk ki a függvényeket: } \sin 120^\circ 12'; \cos 150^\circ; \operatorname{tg} 200^\circ 20'; \cotg 178^\circ; \sin 220^\circ 2'.$$

Szögek összegének és különbségének függvényei. 446. Kiszámítandók $\alpha \pm \beta$ függvényei, ha: a) $\alpha = 90^\circ, \beta = 30^\circ$; b) $\alpha = 90^\circ, \beta = 60^\circ$; c) $\alpha = 30^\circ, \beta = 0^\circ$; d) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ$; e) $\alpha = 45^\circ, \beta = 30^\circ$.

$$447. \text{Mennyi } \alpha, \text{ ha: } a) \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = 2 + \sqrt{3}; b) \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = -3?$$

$$448. \text{Mennyi } \alpha, \text{ ha: } \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) + \cotg(45^\circ - \alpha) = 4?$$

$$449. \text{Egyszerűsítendő: } \cos(180^\circ + \alpha) \cos(270^\circ - \beta) - \sin(180^\circ + \alpha) \sin(270^\circ - \beta).$$

450. Egyszerősítendő:

$$\frac{\sin(170^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) + \operatorname{cotg}(90^\circ - \alpha) \sin(\gamma - 90^\circ)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) \cos(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \gamma) \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)}$$

451. Mennyi: $\sin 165^\circ$ ($165^\circ = 120^\circ + 45^\circ$), $\sin 120^\circ$; $\cos 15^\circ$, ($15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$); $\sin 135^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\operatorname{tg} 135^\circ$; $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\sin 78^\circ$, $\cos 78^\circ$?

452. Mennyi $\sin(360^\circ \pm \alpha)$; $\operatorname{tg}(90^\circ \pm \alpha)$; $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$?

453. Alkalmazzuk $\alpha \pm \beta$ függvényeinek a képletét azon esetre, ha a szög: $90^\circ \pm \alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $270^\circ \pm \alpha$.

Negatív szög függvényei. 454. Számítsuk ki a -30° , -45° , -60° , -135° , -120° , -180° , -240° negatív szögek függvényeit.

455. Mutassuk meg, hogy $\sin(-\alpha) = \frac{\cos \beta}{2}$, ha $\alpha + \beta = 90^\circ$ és $\alpha = 360^\circ$.

456. Ha $\cos(-\alpha) = \frac{1}{3}$, mennyi $\operatorname{cotg}(-\alpha)$; ha $\operatorname{tg}(-\alpha) = -1.875$, mennyi $\frac{1}{\cos(-\alpha)} - \operatorname{tg}(-\alpha)$?

457. 30° és 45° segítségével számítsuk ki $\sin(-15^\circ)$ értékét.

458. Mekkora $\sin(-135^\circ) - \cos(-135^\circ)$? Mekkora $\frac{\operatorname{cotg}(-240^\circ)}{\sin(-240^\circ)}$?

459. Ha α negatív szög, mikor lesz $\cos \alpha = -\sin \alpha$?

A kétszeres és felényi szögek függvényei. 460. Mekkora 60° függvényei, ha ismerjük 30° függvényeit?

461. A 45° -nyi szög függvényeivel fejezzük ki a 90° -nyi szög függvényeit.

462. $\operatorname{cotg} \alpha = \sqrt{3}$: mennyi $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$?

463. Mennyi $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$?

464. Ha $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, mennyi $\sin(2\alpha)$?

465. Ha egy háromszögben $\operatorname{tg} \beta \sin^2 \gamma = \operatorname{tg} \gamma \sin^2 \beta$, ekkor a háromszög egyenlőszáru, vagy derékszögű.

466. Úgyszintén, ha $\sin 2\beta = \frac{\sin 4\gamma}{4 \cos^2 \gamma - 2}$.

467. Ha $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, mennyi $\cos \frac{\alpha}{2}$? ha $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$, mennyi $\sin \frac{\alpha}{2}$ ha $\cos \alpha = \frac{11}{13}$, mekkora $\frac{\alpha}{2}$ függvényei?

468. Ha $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, mekkora $22^\circ 30'$ függvényei?

469. Fejezzük ki a 15° és 7.5° -nyi szög függvényeit a 30° -nyi szög függvényeivel.

470. $\cos 2\alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ mekkora $\operatorname{tg} \alpha$?

471. Mekkora $\sin(-15^\circ)$, ha ismerjük a 30° -nyi szög függvényeit?

472. Mekkora $\operatorname{cotg}(-75^\circ) - \operatorname{tg}(-75^\circ)$?

473. Ha $\operatorname{tg}(-\alpha) = x - \sqrt{3}$ és $\operatorname{cotg}(-\alpha) = x + \sqrt{3}$, mekkora x és $(-\alpha)$?

474. Bizonyítsuk be a következő képletek helyességét:

a) $\sin 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha$;

b) $2 \sec 2\alpha = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$;

c) $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

d) $\operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$;

e) $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$;

f) $2 \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$;

g) $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

h) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$;

$$i) \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sec \alpha - 1}{\sec \alpha + 1}};$$

$$k) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};$$

$$l) \sin 2\alpha = (1 + \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$m) \sin 2\alpha = (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{cotg} \alpha;$$

$$n) \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$o) \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

A szögfüggvények összege és különbsége. 475. Mennyi:

$$a) \sin 105^\circ + \sin 75^\circ; \quad \cos 75^\circ + \cos 15^\circ.$$

$$b) \cos 135^\circ - \cos 45^\circ; \quad \sin 240^\circ - \sin 120^\circ.$$

476. Változtassuk szorzatokká a következőket:

$$a) \sec \alpha \pm \sec \beta; \quad \operatorname{cosec} \alpha \pm \operatorname{cosec} \beta.$$

$$b) \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta; \quad \operatorname{cotg} \alpha \pm \operatorname{cotg} \beta.$$

477. Bizonyítsuk be a következő képletek helyességét:

$$a) \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}; \quad \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

$$b) \frac{\sin a + \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{cotg} \frac{a-b}{2}; \quad \frac{\sin a - \sin b}{\cos a - \cos b} = -\operatorname{cotg} \frac{a+b}{2}.$$

$$c) \frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}; \quad \frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \operatorname{cotg} \frac{a+b}{2} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}.$$

$$d) \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\cos(a+b) - \cos(a-b)} = -\operatorname{cotg} a; \quad \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\cos(a-b) + \cos(a+b)} = \operatorname{tg} a.$$

$$e) \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta; \quad \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

$$f) \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha} = \sin \alpha \cos \alpha; \quad \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha.$$

$$g) \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \sin 2\alpha; \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha.$$

478. Ha $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, akkor bizonyítsuk be, hogy:

$$a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$b) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$c) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

$$d) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

$$e) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}.$$

Goniometriai egyenletek. 479. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

$$1. 2 \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

$$2. 2 \sin x = \operatorname{tg} x.$$

$$3. \sin x = \cos^2 x.$$

$$4. \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = a.$$

$$5. \sin x \operatorname{cotg} x = \frac{1}{2}.$$

$$6. \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x} = 3.$$

$$7. \sin x + \operatorname{tg} x = 1 + \cos x.$$

$$8. \sin x + \operatorname{tg} x = \frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

$$9. \cos x + \operatorname{cotg} x = \frac{1 + \sin x}{\sin x}.$$

$$10. \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2.$$

$$11. \operatorname{tg} x + \sec^2 x = 3.$$

$$12. \sin x - 2\cos x = 6.$$

$$13. \sin 2x - \sin x = \frac{2}{5} \operatorname{tg} x.$$

$$14. \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} - \sec^2 \frac{x}{2} = 2\sqrt{3} \operatorname{cosec} x.$$

$$15. \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin 2x = \cos x.$$

$$16. \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} x = 2.$$

$$17. x + y = 92^\circ \text{ és } \sin x - \sin y = 0.678554.$$

$$18. x + y = 105^\circ \text{ és } \sin x \cos y = 0.6124.$$

$$19. \sin x + \sin y = 1.4783 \text{ és } \cos x - \cos y = 0.1937.$$

$$20. \sin(x - y) = \frac{1}{2} \text{ és } \cos(x + y) = \frac{1}{2}.$$

$$21. \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = 2 \text{ és } \sin x \cos u = \frac{1}{2}$$

XII. Fejezet. Feladatok a ferdeszögű háromszögek megfejtéséről.

Háromszög. 480. A háromszög oldalai a , b és c , az átellenes szögek α , β , γ . Három adott alkotórészből számítsuk ki a többit.

	a	b	c	α	β	γ
1.	388	389	195	75° 10' 52"	75° 45' 0"	29° 9' 8"
2.	569	281	680	55° 17' 31"	23° 57' 8"	100° 45' 21"
3.	330.1	412.2	371.3	49° 29' 50"	71° 42' 42"	58° 47' 28"
4.	15.47	17.39	22.88	42° 30' 44"	49° 25' 49"	88° 3' 27"
5.	1.275	1.2753	0.0565	88° 24' 10"	89° 3' 30"	2° 32' 20"

481. Valamely háromszögben adva van két oldal a és b és $\beta = 2x$ mekkorák a szögek; $a = 225$ m, $b = 353.6$ m.

482. Valamely háromszög oldalai úgy aránylanak, mint 3:4:5; a legkisebb oldal $a = 12$ cm; mekkorák a szögek?

483. A háromszögből ismeretes c , γ , és $a:b = n$; határozzuk meg a többi alkotórészt. $c = 200$ m, $\gamma = 76° 10' 8''$, $n = 5:4$.

484. Valamely háromszögben $\alpha = 30° 12'$, $\beta = 31° 10'$, $a + b = 22.15$ m; mekkora: c , γ , α , b ?

485. Valamely háromszögben ismeretesek az a és b oldalakra bocsátott magasságok m_1 és m_2 , és γ szög; megfejtendő a háromszög. $m_1 = 4.54$, $m_2 = 5.74$, $\gamma = 56° 17' 48''$.

486. Adva van a háromszögből $a + b$, $\alpha - \beta$ és γ ; oldjuk meg e háromszöget.

487. A háromszögből ismeretes: a , b , $\alpha - \beta$; mekkorák az oldalak?

488. Fejtsük meg a háromszöget, ha ismeretes:

a) mind a három szög és egy magasság; b) két oldal és egy magasság; c) a magasság, az alappal átellenes szög és ennek felezője.

489. Két egymást A pontban 60° -nyi szög alatt metsző egyenes B és C pontjainak távolsága 35 dm. Ha C pont A pont felé közeledik C_1 -ig, $CC_1 = 22$ dm.; a C_1 és B egymástól mért távolsága 24 dm. Mily távolra esik A pont B és C -től?

490. Egy a körön kívül fekvő A ponttól a körhöz vont két szelő egyike, $AB = 40$ dm, ennek a külső szelete $AC = 13.5$ dm, a másik AD szelő külső szelete $AE = 15$ dm; a szelők közt fekvő ívrészek $80^\circ 20' 10''$ és $30^\circ 14' 30''$; mekkora $ADB \triangle$ -nek BD oldala?

A háromszög területe. 491. Ismerjük a háromszög területét (t), egy oldalát (a) és β szögét; mekkora a többi oldal és szög? $t = 715$ m², $a = 53.4$ m, $\beta = 38^\circ 47' 30''$.

492. Számítsuk ki a háromszög oldalait, ha a szögek és a terület alva vannak.

493. A háromszög területe $t = 812.56$ m², két oldala 48.6 m és 53.4 m mekkora az ezen oldalak által bezárt szög?

494. A háromszög területe t , két oldalának összege $b + c = n$, és α szög ismeretes. Meghatározandó b és c oldal.

495. Adva van $\alpha + \beta = 105^\circ 12' 14''$, $\alpha - \beta = 5^\circ 14' 32''$, $t = 108132$ m² mekkorák az oldalak?

496. Adva van $a + b = 1045.7$ m, $ab = 27100$ m, $t = 18904$ m² megfejtendő a háromszög.

497. Mekkora azon két háromszög területének az összege, melyeket a kétértelmű megfejtés esetében (92. §. III. p.) kapunk.

A háromszög beírt és körülírt körének sugara. 498. A háromszög két oldalából ($a = 24$ m, $b = 20$ m) és a körülírt kör sugarából ($r = 14$ m) számítsuk ki a szögeket és a területet.

499. A háromszög két szögéből (α és β) és a beírt kör sugarából (ρ) számítsuk ki az oldalakat és a területet.

500. Határozzuk meg valamely háromszög területét, ha két szögét és a körülírt kör sugarát ismerjük.

501. Adva van a körülírt kör sugara (r), egy szög (α) és a c oldalhoz tartozó magasság (m); mekkora a terület?

502. A háromszög egyik oldalából (a), a körülírt kör sugarából (r), és a c oldalra bocsátott magasságból (m) számítsuk ki a szögeket.

503. A háromszög két szögéből (α , β) és a körülírt kör sugarából (r) határozzuk meg a beírt kör sugarát (ρ).

504. Ismerjük a háromszögnek egyik oldalát (a), a beírt kör sugarát (ρ) és a körülírt kör sugarát (r). Mekkora a terület?

505. Ismeretes egy háromszögből a terület, $t = 10.6$ dm², az egyik szög $\alpha = 62^\circ 43' 20''$, a körülírt kör sugara $r = 3.2$ dm. Mekkora az oldalak?

506. Egy háromszögnek oldalai 569 m., 231 m., 650 m.; mekkora azon háromszög területe, melynek egyik szögpontja az első háromszög köré írt kör középpontja, egyik oldala pedig az adott háromszög legkisebb oldala?

507. Egyenlőszárú háromszög alapvonala $a = 12$ m, a körülírt kör sugara $r = 6.25$ m; mekkora a szár, a magasság, a szögek és a terület?

508. Egyenlőszárú háromszög alapja $a = 4.36$, a szár $b = 6.35$; mekkora a beírt kör sugara.

509. Valamely derékszögű háromszögbe írt kör sugara $\rho = 65$ dm, az átfogóra vont magasság $m = 154$ dm; megfejtendő a háromszög.

510. Valamely derékszögű háromszög egyik befogója $b = 396$ mm, a beírt kör sugara $\rho = 117$ mm; megfejtendő a háromszög.

Háromszögmértani feladatok. 511. Ha egy háromszög két oldalának összege $a + b = 21$ m, területe $t = 54$ m², a beírt kör sugara $\rho = 3$ m, milyenek az oldalai és szögei?

512. Egy háromszögben két oldal összege $a + b = 118$ m, területe $t = 596.4$ m², $\gamma \sphericalangle = 49^\circ 57' 41''$; megfejtendő a háromszög.

513. Mekkora annak a háromszögnek az oldalai és a területe, melynek kerülete $2s = 36.5$ m, egyik szöge $\alpha = 52^\circ$ s ennek a szögpontjából bocsátott magassága $m = 10.5$ m?

514. Valamely derékszögű háromszög kerülete $2s = 40$ m, a két befogó összege 6 m-rel nagyobb, mint az átfogó; megfejtendő a háromszög.

515. Derékszögű háromszögben a befogók különbsége 4 dm, a kerület 48 dm; mekkora a három oldal különvéve, mekkora a szögek?

516. Egy háromszögben két oldal különbsége $b - c = 2.3$ m, az oldal $a = 5.2$ m, és az a -val szemközt fekvő szög $\alpha = 46^\circ 15'$; megfejtendő a háromszög.

517. Egy háromszög területe meghatározandó egy szögéből, $\alpha = 70^\circ 42' 30''$, ezen szög szögpontjából bocsátott magasságból, $m = 140$ m, és a körülírt kör sugarából $r = 117.603$ m.

518. Ismerjük a derékszögű háromszög átfogóját, $c = 8.52$ dm, és a β szöget felező egyenest, $d = 6.48$ dm; megfejtendő a háromszög.

XIII. Fejezet. A trigonometria alkalmazása.

Négyszög. 519. Ismeretes a paralelogramma két átlója (d és d_1) és az átlók által bezárt szög (α); mennyi a terület? $d = 98$ m, $d_1 = 12.4$ m, $\alpha = 135^\circ 54' 12.4''$.

520. Mily nagyok a paralelogramma oldalai és szögei, ha az átlók és a terület adva vannak? $d_1 = 8$ m, $d_2 = 2.5$ m, $t = 320.5$ m².

521. A paralelogramma területe (t), egyik szöge (α) és egyik oldala (a) ismeretesek. Mekkora a másik oldala (b)? $t = 742.12$ m², $\alpha = 28^\circ 31' 15''$, $a = 15.4$ m.

522. A derékszögű négyszög oldalainak felező pontjait összekötő egyenesek rombuszt alkotnak. Az első oldalából számítsuk ki a rombus oldalát és szögeit.

523. A rombus területe t , egyik szöge α . Mily nagy az oldala? $t = 2125$ m², $\alpha = 128^\circ 26' 30''$.

524. Egy rombus két átlójából határozzuk meg a szögeket.

525. Ismeretes az egyenlőszárú trapéz két párhuzamos oldala (a és b) és egyik szöge (α); megfejtendő a trapéz.

526. Egyenlőszárú trapézben ismerjük a két párhuzamos oldalt és a területet; számítsuk ki a szögeket.

527. A 65. cm. sugarú körbe írt trapéz párhuzamos oldalai 126 és 66 cm. hosszúak. Mekkora a területe és kerülete?

528. Egy trapéz nem párhuzamos oldalai ($a = 3.51$, $b = 7.04$) meghosszabbítva derékszög alatt találkoznak; mekkorák a trapéz szögei?

529. Valamely trapéznek a és b párhuzamos oldalából és az a mellett fekvő α és β szögekből számítsuk ki a nem párhuzamos oldalakat.

530. A trapézből ismeretes a nagyobbik párhuzamos oldal (a), a mellette fekvő két szög (α , β) és egy nem párhuzamos oldal; mekkora a trapéz területe?

531. A trapézből adva van három oldal és egy szög; megfejtendő a trapéz.

532. Valamely hűrnégyszögben adva van két átellenes oldal (a , c), egy szög (α) és a körülírt kör sugara (r); számítsuk ki a másik két oldalt.

533. Valamely hűrnégyszögben ismeretes két átló (m , n), az ezektől bezárt szög (γ) és a körülírt kör sugara (r); határozzuk meg a négyszög szögeit és oldalait.

Szabályos sokszög. 534. Mekkora területe van ama szabályos tizenkét-szögnek, amelynek egyik oldala $a = 8$ m?

535. Valamely szabályos nyolcszög területe 1 m²; mekkora az oldala?

536. Mekkora területe van a 10 m sugarú körbe írt szabályos tízszögnek?

537. A körbe írt szabályos tizenötös oldal 4 cm; mekkora a kör átmérője?

538. Valamely négyzet területe $t = 239 \text{ dm}^2$; mekkora a körülírt körnek a sugara?

539. A szabályos nyolcszögbe írt kör sugara $r = 5 \text{ dm}$; mekkora a sokszög területe?

540. Valamely szabályos húszszög oldala 29 mm ; mekkora a beírt kör átmérője?

541. Hány oldalú azon szabályos sokszög, melyre nézve a körülírt kör sugara kétszer nagyobb a beírt kör sugaránál?

542. Valamely szabályos tizenkétszög területe akkora, mint valamely szabályos hétszög területe, melynek oldala $a = 4 \text{ m}$; mekkora a tizenkétszögbe írt kör sugara?

543. A körbeírt szabályos ötszög területe t ; mekkora a beírt kilencszög területe?

544. Valamely szabályos tizenegyszög és szabályos húszszög egyenlő kerülettel bírnak. Az első területe d -vel kisebb, mint a másiké. Mekkora a húszszög oldala a ? ($d = 294.5$).

545. Adva van két koncentrikus kör 5.6 m , illetőleg 5.4091 m . sugárral; hányoldalú az a szabályos sokszög, melynek oldalai az első körben húrok, a a másikra nézve pedig érintők?

546. Szabályos tizenkétszög alakú erdőterületről kivágják a fát. Hány köbméter fa kerül ki onnan, ha a szabályos sokszögnek oldala 125 m , egy hektárról pedig 240 m^3 fát nyernek?

Magasság- és távolságszámítás. 547. Hogy AB torony magasságát meghatározhassuk, ha annak A talppontjához nem juthatunk, mérjük meg a síkban ama CD egyenest ($CD = 86.5 \text{ m}$), mely kellően meghosszabbítva A pontot érné; szintűgy $BDA = 14^\circ 32' 50''$ és $BCA = 25^\circ 32' 40''$ szögeket. Mekkora AB ?

548. CD torony magasságát meg kell határozni (a talppontja D); e végett megmérünk a vízszintes síkban egy tetszés szerinti egyenest: $AB = 38.5 \text{ m}$; továbbá $BAD \sphericalangle = 62^\circ 31' 40''$, $ABD \sphericalangle = 33^\circ 42' 15''$ és $DAC \sphericalangle = 38^\circ 42' 50''$. Mekkora CD ?

549. CD hegy magasságának meghatározására megmérjük a vízszintes síkban az $AB = 24.5 \text{ m}$ hosszú egyenest, mely kellően meghosszabbítva C talpponton haladna át. Ha $DAC \sphericalangle = 38^\circ 15'$ és $DBC \sphericalangle = 42^\circ 38'$; mekkora a magasság?

550. Egy torony keresztlje 290 m távoból α szög alatt látszik; e szög megkétszereződik, ha a toronyhoz 150 m -rel közeledünk. Mily magas a torony?

551. Egy ház tetején levő AB villámhárító magasságát akarjuk meghatározni. E végből a villámhárítóval egy síkban fekvő M és N pontokból, melyek távolsága 18 m , a villámhárító végpontjaira tekintünk: $AMN \sphericalangle = 135^\circ$, $ANM \sphericalangle = 31^\circ 40'$, $BNM \sphericalangle = 42^\circ 10'$.

552. Valaki a folyó partján állva, a túlsó parton levő fát 66° alatt látja, ha pedig 12.64 m -rel tovább megy, a fát 30° alatt látja. Minő széles a folyó és milyen magas a fa?

553. AB torony magassága 72 m . B csúcspontról a CD torony $30^\circ 15'$ -nyi szög alatt látszik s azon szög, melyet a B -től C -hez húzott egyenes AB -vel $t = 59^\circ 35' 40''$. Mily magas CD és minő messze van a két torony egymástól?

551. A, B, C egy vízszintes egyenes három pontja, D egy épület csúcs-pontja, α, β, γ az AD, BD és CD egyeneseknek a vízszintessel alkotott szögei; mily magas az épület, ha: $AB = 50$ m, $BC = 30$ m, $\alpha = 9^\circ 29' 41''$, $\beta = 15^\circ 14'$, $\gamma = 27^\circ 51'$?

555. Egy bizonyos távolságból nézve, valamely fa $52^\circ 28' 55''$ -nyi szög alatt látszik; 10 m-rel közelebb menvén a fához, az már $59^\circ 47' 57''$ -nyi látszólagos magassággal bír. Mily magas a fa?

556. Egy torony magassága $a = 35$ m és távolsága egy folyó innenső partjától 30 m. Mily széles a folyó, ha ez a torony tetejéről $\beta = 15^\circ 13' 14''$ -nyi szög alatt látszik?

557. A Szt.-Gellérthegy legmagasabb pontjáról az alatta levő Duna-meder két pontját $62^\circ 53' 2''$, illetve $15^\circ 46' 45''$ depresszió-szög alatt látjuk. Mekkora a Duna szélessége, ha a Szt.-Gellérthegy magassága a Duna partjától számítva 1367 m?

558. A völgynek egy pontjából B hegy csúcsa az előtte levő A hegy fölött $2^\circ 9' 20''$ -nyi szög alatt látszik, az A hegy pedig $8^\circ 23' 40''$ alatt. A hegyek felé haladva 1725 m-nyire, az A hegy egészen elfedi a B hegyet. Ekkor A és B látószöge $12^\circ 16' 35''$. Milyen magasak a hegyek és mekkora a két hegycsúcs távolsága?

559. Mekkora egy $41\frac{2}{3}$ m magas torony tetején álló kereszt magassága, ha a kereszt $66\frac{2}{3}$ m távolságban a torony talppontjától $49' 53''$ -nyi szög alatt látszik?

560. Mily magasan áll fölöttünk az a felhő, melyet $m = 10$ m magas partról $\alpha = 56^\circ 10'$ emelkedési szög alatt látunk, ha a felhő képét az alattunk lévő tó tükrében $\beta = 36^\circ 10'$ lehajlás-szög alatt észlelhetjük?

Mekkora a magasság, ha $m = 1.5$ m, $\alpha = 45^\circ 20'$, $\beta = 52^\circ 16' 8''$?

561. Két hajó (C és D) távolságának meghatározása végett a parton kitűzünk két pontot (A és B), melyek távolsága 670 m és megmérjük $BAD = 40^\circ 16'$, $BAC = 90^\circ 56'$, $ABC = 42^\circ 22'$ és $ABD = 113^\circ 19'$ szögeket. Határozzuk meg CD -t.

562. Határozzuk meg a mocsárnak AB hosszát, ha csak A és B pontjához juthatunk és ha C álláspontban CA és CB egyenesek $72^\circ 13' 12''$ -nyi szöget alkotnak és $CA = 308$ m, CB pedig 672 m.

563. Valamely 62.8 m magas CD toronynak D csúcsáról a szemlélő látja a közel elterülő folyam partjainak két átellenes A és B pontjait. Szögmérővel azt találja, hogy $ADC \sphericalangle = \delta = 64^\circ 56' 15''$ és $BDC \sphericalangle = \delta = 79^\circ 32' 48''$ és hogy a vízszintes síkban $ACB \sphericalangle = 18^\circ 42' 50''$. Milyen széles a folyam?

564. Valamely folyó partján torony áll két, függélyesen egymás felett álló nyílással, melyek középpontjai 10 m-nyire vannak. Ezen nyílásokból az átellenes partnak valamely pontjához vezető sugarak a függélyes irányval $\alpha = 80^\circ 21'$ és $\beta = 96^\circ 53'$ -nyi szöget alkotnak. Mily széles a folyó?

565. Egy folyó AB szélességének meghatározása végett AB irányában kitűzzük C pontot. C -ből γ szög alatt kijelöljük $CF = d$ egyenest, és megmérjük $CFA = \alpha$ és $CFB = \beta$ szögeket. Mekkora AB ?

566. Három A, B, C pont a mezőn hozzáférhetetlen. A távolságokat úgy akarjuk meghatározni, hogy beállunk AB egyenesbe valahová (X -be) és onnan

AB -re merőleges irányban haladunk a távolságra M -ig, úgy, hogy BMC egy egyenesbe essék; onnan azután b távolságra N -ig, úgy, hogy ACN egy egyenesbe essék. M és N pontokban megmérjük az XMB és XNA szögeket. $a = 4120$ m, $b = 5900$ m, $XMB \sphericalangle = 60^\circ$, $XNA \sphericalangle = 45^\circ$.

567. Határozzuk meg egy folyó AB szélességét, ha AB meghosszabbításában C pontból α szög alatt kitűzünk egy $CD = a$ egyenest, mely a D -ből a folyó két partjához húzott egyenesekkel $CDB = \beta$ és $CDA = \gamma$ szöget alkot. $\alpha = 57^\circ 13' 15''$, $\beta = 15^\circ 31' 49''$, $\gamma = 53^\circ 7' 48''$, $a = 56$ m.

568. Hogy a folyam AC szélességét meghatározhassuk, megmérjük a síkban tetszés szerint felvett $AB = 142$ m egyenest, mely AC -vel $98^\circ 33' 44''$ szöget alkot; ABC szög $48^\circ 15' 13''$. Milyen széles a folyam?

569. Ismerjük három, B , C és D pontnak kölcsönös helyzetét; határozzuk meg valamely negyedik A pontnak B , C és D pontoktól való távolságát, ha A pontból a BC és CD egyenesek α , illetőleg β szög alatt látszanak. (AC az AB és AD között van.)

a) A és C pontok BD egyenes két különböző oldalán fekszenek. $BC = 520$ m, $CD = 312$ m, $BCD \sphericalangle = 65^\circ 27'$, $\alpha = 32^\circ 52'$, $\beta = 23^\circ 25'$.

b) Az A pont C -vel BD -től egyfelől esik; $BC = 1298,4$, $CD = 1248,5$, $BCD \sphericalangle = 126^\circ 50' 40''$, $\alpha = 33^\circ 2' 35''$, $\beta = 18^\circ 34' 17''$.

c) Az A pont BCD háromszög terébe esik. $BC = 2277,9$, $CD = 2271,9$, $BCD \sphericalangle = 76^\circ 57' 30''$, $\alpha = 97^\circ 8' 15''$, $\beta = 126^\circ 50' 40''$.

d) Az A pont BD egyenes vonalon fekszik. $BC = 232$ m, $CD = 80$ m, $\alpha = 85^\circ 11' 56''$, $\beta = 46^\circ 12' 45''$.

Vegyes feladatok. 570. Valamely háromszög oldalai számtani sort alkotnak, melyek különbsége 1; a legkisebb oldal átellenes szögének cosinusa $\frac{3}{5}$. Megfejtendő a háromszög.

571. Mekkora az azon háromszög szögei és területe, melynek oldalai a következő egyenletek gyökei: $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{4}{z} = \frac{43}{60} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{47}{60}$?

572. Egy háromszög két oldalát a következő egyenlet két gyöke adja cm-ben: $\sqrt{3x^2 - 479} + 31 = 3x$; a nagyobb oldallal szemközt fekvő szög $\alpha = 76^\circ 10'$. Mekkora a háromszög területe?

573. Hasonlóképen: $\sqrt{x^2 - 540} + 42 = 2x$, és $\alpha = 73^\circ 45' 20''$.

574. Egyenlőszárú trapézból ismerjük a szárt (c) és a körülírt kör sugarát (r); a területe a körülírt kör ötödrésze. Megfejtendő a trapéz.

575. Valamely körnek szelője és érintője 60° alatt metszik egymást; a szelőnek külső szelete a , a belső $3a$; mekkora a kör sugara?

576. Valamely húrnégyszögben adva van a négy oldal; számítsuk ki a négy szöget.

577. Valamely érintőnégyszögnek két szomszédos oldala (a és b), az általuk bezárt szög (β) és a kör sugara (r) ismeretes; számítsuk ki a négyszög szögeit és oldalait.

578. Egy trapéz területe (t), a parallel oldalainak különbsége (a), a nem parallel oldalaké (ρ) és a szemközt lévő szögek különbsége (ϵ) ismeretesek. Mily nagyok az oldalak?

579. A trapéz-alaku 3600 m² nagyságú telket egyik átlója egy egyenlő oldalú és egy ferdeszögű háromszögre bontja. A részek területeinek aránya 5:4. Mekkora az oldalak?

580. Tompaszögű háromszögből, melynek a a legnagyobb oldala, adva van két oldal aránya $a:b=4:1$, egyik szöge $\beta=12^\circ 35' 40''$, és a b oldal meghosszabbítása, amíg a β szögpontjából bocsátott magassággal találkozik: $d=65$ cm. Mekkora az oldalak és a szögek?

581. Két egymást metsző kör közös részének területét kell meghatározni, ha a két kör sugara és középpontjaik távolsága ismeretes.

582. A háromszög egyik oldala: $a=3.05$ m; az a oldalra bocsátott magasság az a -val szemben fekvő szöget oly két részre osztja, melyek nagysága $22^\circ 21'$ és $33^\circ 15' 20''$. Mekkora a háromszög területe?

583. A háromszög területe t , a kerülete $2s$, és az egyik oldala a adva van. Mekkora az α szög?

584. Egy háromszögben $\alpha=13.4$ dm; β és γ eleget tesznek ezen egyenleteknek: $4tg\beta + tg\gamma = 8$, $tg^2\beta - tg^2\gamma = \frac{1}{4}$. Megfejtendő a háromszög.

585. Valamely háromszög alakú földterület két oldala akkora, mint valamely $2\frac{1}{2}$ hektárnyi négyzet, illetőleg $7\frac{1}{2}$ hektárnyi területű szabályos ötszög oldala, harmadik oldala pedig olyan, mint a 4 hektárnyi területű kör átmérője; mily nagyok ezen háromszög szögei és területe?

586. Egy háromszög oldalai számtani sort alkotnak, melynek különbsége 1., a legkisebb szög fele a legnagyobbak. Fejtsük meg a háromszöget.

587. Valamely háromszög oldalainak mértékszámait a természetes számsorban egymás után jövő három szám. A terület mértékszámát kétszer akkora, mint a kerületé. Megoldandó a háromszög.

588. Mutassuk meg, hogy az $x^2 - \sin(-\alpha) \cdot x + \cos(-\alpha) = 0$ egyenlet gyökei csak akkor valósak, ha $0 > \cotg(-\alpha) > -\frac{1}{2}$, vagy pedig $0 < \cotg(-\alpha) < \frac{1}{2}$.

589. Egy háromszög oldalai a következő egyenleteknek tesznek eleget: $b:c=1:2$, $a^2 + b^2 = 13$, $a^2 - b^2 = 5$; mekkora az oldalak és szögei, a területe és a beírt kör sugara?

590. Egy háromszög oldalai: $x^2 + x + 1$; $2x + 1$; $x^2 - 1$. Mutassuk meg, hogy a legnagyobb szög 120° -ú, és oldjuk meg a háromszöget, ha $x = 4\frac{1}{2}$.

591. Valamely derékszögű háromszög egyik szöge $\alpha = 33^\circ 15'$; területe egyenlő oly körszegmentum területével, melynek középponti szöge 2α , és melynek húrja a középponttól 48 m-nyi távolságban van. Mekkora az oldalak?

592. Valamely háromszög szögei geometriai sort alkotnak, melynek hányadosa $\frac{1}{2}$; mutassuk meg, hogy a legnagyobb oldal úgy aránylik a kerülethez, mint $2 \sin \frac{\pi}{14} : 1$.

593. Egyenlőszárú háromszögben az alapnak fele egyenlő a folytonos arány szerint osztott szárnak nagyobbik szeletével; mekkora a szögek?

594. Egyenlőszárú trapézban a rövidebb párhuzamos oldal a trapézbe szerkeszthető oly négyzet oldalát adja, melynek átlója $2\frac{1}{2}$ cm, s mely átló a trapéz egyik nem párhuzamos oldalával $68^\circ 40'$ szöget alkot. Mekkora a trapéz területe?

595. Valamely háromszögnek oldalai geometriai sort alkotnak, melynek hányadosa $1:1$, és összege $264:8$; mekkora a legkisebb oldalra bocsátott magasság?

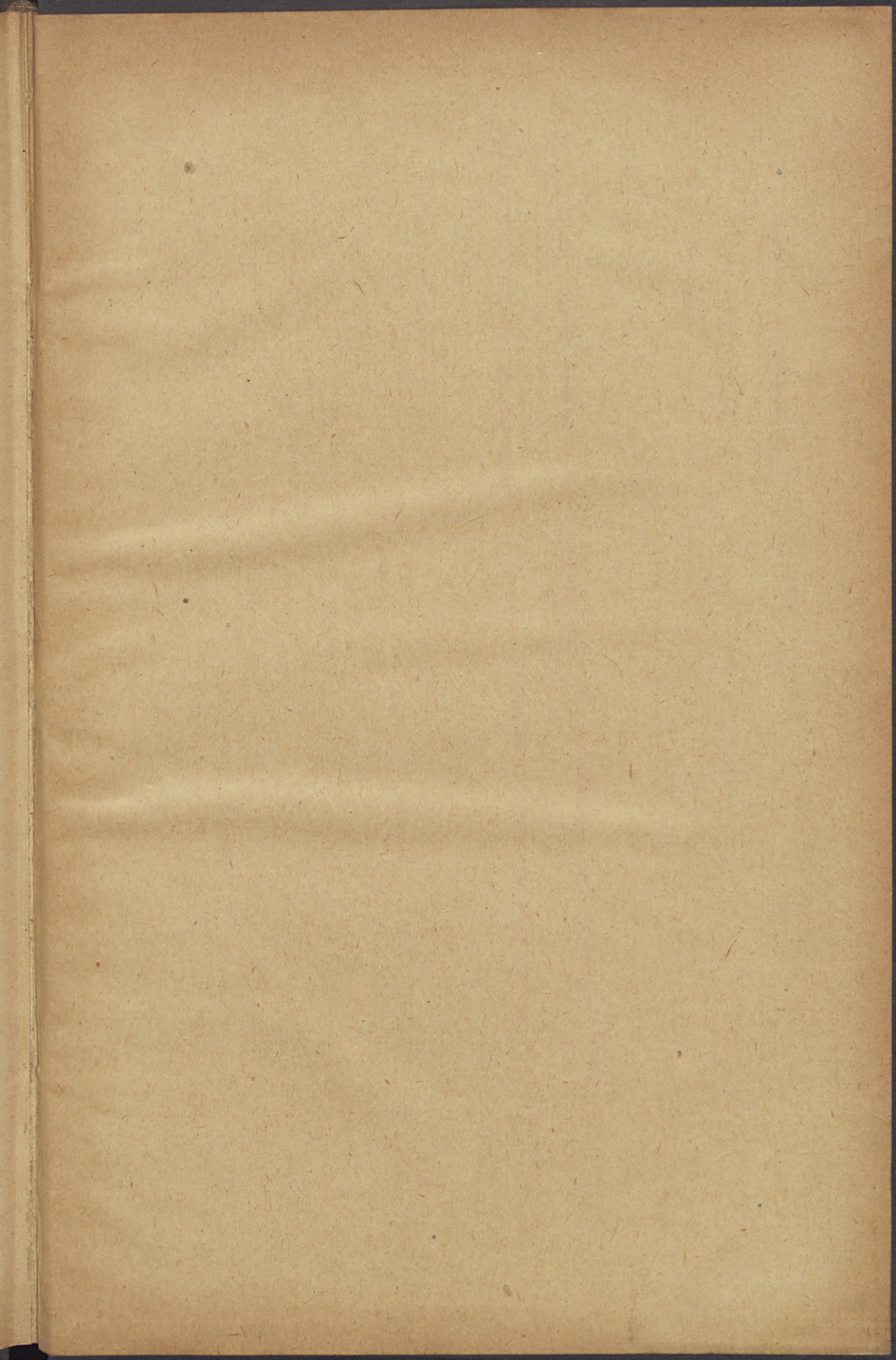
596. Valamely háromszögnek szögei számtani haladványt alkotnak, melynek különbsége $d = 8\frac{1}{2}$; mekkora a háromszög területe, ha a legkisebb szög szögpontjából bocsátott magasság $m = 30\sqrt{3}$ m?

597. Valamely háromszög szögei geometriai sort alkotnak, melynek hányadosa $q = 2$; a háromszög területe $t = 327:95$ dm²; megfejtendő a háromszög.

598. Valamely háromszögnek egyik oldalát, méterekben kifejezve, ezen egyenlet gyöke adja: $5^{2x} + 1 = 7^x + 1 = 5^{2x} + 7^x$; ezen oldal végpontjából bocsátott magasság, mely $0:27225$ m, a másik oldallal $20^\circ 16' 30''$ -nyi szöget alkot; mekkora a háromszög területe?

599. Valamely háromszögben adva vannak az a és b oldalra bocsátott magasságok: $m_1 = 4:52$ és $m_2 = 5:74$ dm, és $\gamma \sphericalangle = 56^\circ 17' 48''$. Megfejtendő a háromszög.

600. Valamely háromszög területe $t = 84$ cm²; a háromszög körülírt körének a sugara $r = 8:25$ m; továbbá b oldalnak c oldalon levő projekciója úgy aránylik a c oldalra bocsátott magassághoz, mint $3:4$. Megfejtendő a háromszög.



DEENK
5 000000 509119



