Vilenkin-rendszerekkel kapcsolatos approximációs kérdések vizsgálata

doktori (PhD) értekezés tézisei

Blahota István

Debreceni Egyetem

Természettudományi Kar

Debrecen, 2001

A dolgozat tézisei

Rövid történeti áttekintés.

A diadikus harmonikus analízis a 20-as években jött létre, amikor Walsh bevezette a később róla elnevezett függvényeket, rendszert és transzformációt. Maguk a Walsh-függvények szakaszonként konstans, csak -1 és 1 értékeket felvevő függvények.

Az elmélet tovább gazdagodott Vilenkin munkássága nyomán, aki a 40-es években általánosította Walsh fogalmait és eredményeit. Az utóbbi évtizedekben néhány új alkalmazási területen éli reneszánszát a diadikus analízis. Egyfelől a számítástechnikai alkalmazások váltak egyre szélesKörűbbé (például mérési eredmények kiértékelése, képfeldolgozási és karakterfelismerési algoritmusok hatékonyságának javítása), másfelől egy további általánosítás után, az úgynevezett $\psi\alpha$-rendszer bevezetésével számelméleti alkalmazásokra nyílik lehetőség.

A legfrissebb erdemények közé tartozik a későbbiekben ψ'-vel jelölt Vilenkin-szerű ortonormált rendszer bevezetése, melynek segítségével lehetőség nyílott a szokásos Vilenkin-technikákhoz hasonlító módszerek használatára művelet nélküli halmazokon értelmezett függvények Fourier-approximációja során.

Néhány jelölés és definíció.

Jelöljük $\mathbb{P}$-vel a pozitív egész számok halmazát, $\mathbb{N} := \mathbb{P} \cup \{0\}$, valamint jelölje $\mathbb{C}$ a komplex számokat. Legyen $m := (m_0, m_1, ...)$ 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata. Jelöljük G_m-mel az m

sorozat által generált Vilenkin csoportot ([AVDR]). Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m |\ y_0 = x_0, ..., y_{n-1} = x_{n-1}\},$$

ha $x \in G_m,\ n \in \mathbb{N}$. Legyen $I_n := I_n(0)$ amennyiben $n \in \mathbb{N}$. Az $I_n(x)$ halmazokat intervallumoknak fogjuk nevezni.

A G_m csoport a szorzattopológiával és a szokásos szorzatmértékkel ellátva kompakt Hausdorff-féle topologikus tér lesz és nulla dimenziós Abel-csoport. A megszámlálható sok I_n halmaz mint a $0 = (0, 0, ...)$ elem környezetbázisa meghatározza G_m topológiáját, és annak megszámlálható bázisát alkotja.

Tehát azt a műveletet, topológiát és mértéket vesszük G_m-en, amely abból adódik, hogy G_m szorzattér.

A továbbiakban fontos szerepet fog játszani a következő jelölés

$$M_0 := 1,\ M_{j+1} := m_j M_j\ (j \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-t egyértelműen elő lehet állítani, mint

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j, \text{ ahol } n_j \in Z_{m_j}\ (j \in \mathbb{N}).$$

A számelméleti függvényekkel kapcsolatos Vilenkin-Fourier elmélet legtöbbször nem a Vilenkin-csoportot, hanem az ennél speciálisabb, úgynevezett R(Ramanujan)-Vilenkin-csoportot használja.

Ha minden $k \in \mathbb{P}$-re létezik egy $n = n(k)$ úgy hogy $k|\ M_n$, akkor azt mondjuk, hogy G_m egy R-Vilenkin-csoport.

Világos, hogy R-Vilenkin csoport nem lehet korlátos Vilenkin-csoport. Mindezt azért kell külön hangsúlyozni, mert azon eredmények, amelyek a Walsh-Paley-féle diadikus csoporton fennállnak, sok esetben analóg módon általánosíthatók korlátos Vilenkin-csoportokra, ugyanez azonban nem mindig mondható el, ha m nem korlátos. Ez utóbbi esetben a bizonyítások általában erősebb eszközöket igényelnek.

Definiáljuk G_m-en az úgynevezett általánosított Rademacher-függvényt a következőképpen

$$r_k(x) := \exp \frac{2\pi \imath x_k}{m_k} \quad (\imath := \sqrt{-1},\ x \in G_m,\ k \in \mathbb{N}).$$

A

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (x \in G_m,\ n \in \mathbb{N})$$

függvényrendszert Vilenkin-rendszernek nevezzük ([Vil]).

Mivel a μ mérték segítségével definiálhatjuk a G_m-en értelmezett komplex értékű függvények integrálját, a szokott módon belső szorzatot értelmezve Hilbert-teret kapunk. Így beszélhetünk az $L^p(G_m)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ térről is. A Vilenkin-rendszer ortonormált és teljes $L^1(G_m)$-ben.

Legyen $\mathcal{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ az $I_n(z)$ $(z \in G_m)$ részhalmazok által generált σ-algebra. Legyenek $\alpha_j^k,\ \alpha_n$ $(k, j, n \in \mathbb{N})$ olyan függvények, amelyek teljesítik az alábbiakat:

i. az $\alpha_j^k : G_m \to \mathbb{C}$ függvények legyenek $\mathcal{A}_j$-mérhetők $(k, j \in \mathbb{N})$.

ii. $|\alpha_j^k| := \alpha_0^k := \alpha_j^0 := \alpha_j^k(0) := 1$ $(k, j \in \mathbb{N})$,

iii. $\alpha_n := \prod\limits_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{n^{(j)}}$ $(n \in \mathbb{N},\ n^{(j)} := \sum\limits_{k=j}^{\infty} n_k M_k)$,

vagyis az $\alpha_j^{n^{(j)}}$ függvény az $x = (x_0, x_1, ..., x_{j-1}, x_j, ...)$ elemnek csak az első j darab $(0, 1, ..., j-1)$ koordinátájától függjön, míg az

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k M_k = (n_0, n_1, ..., n_{j-1}, n_j, ...)$$

első j darab $(0, 1, ..., j-1)$ koordinátájától ne függjön.

Legyen $\chi_n := \psi_n \alpha_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Egy ilyen $\{\chi_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ függvényrendszert $\psi\alpha$-rendszernek neveznek a G_m Vilenkin-csoporton. A $\psi\alpha$-rendszer ortonormált és teljes $L^1(G_m)$-ben ([Gát2]).

A $\psi\alpha$-rendszer bevezetésének igazi jelentősége, hogy kapcsolatot teremt az analízis és a számelmélet között, lehetőséget nyújtva a jól kidolgozott Fourier-technikák használatára bizonyos számelméleti függvények approximációjában.

Legyen $k \in \mathbb{P}$. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ számelméleti függvény páros modulo k, ha minden $n \in \mathbb{P}$-re

$$f(n) = f((n,k)),$$

ahol (n,k) jelöli n és k legnagyobb közös osztóját.

$$\mathcal{B}_k := \{f \text{ páros modulo } k\}, \qquad \mathcal{B} := \bigcup_{k\in\mathbb{P}} \mathcal{B}_k.$$

Legyen $1 \leq q < \infty$, ekkor a $\overline{M}(f) := \limsup_{x\to\infty} x^{-1} \sum_{1\leq j\leq x} f(j)$ felső közép értékből származik egy szeminorma:

$$\|f\|_{\mathcal{B}^q} := \{\overline{M}(|f|^q)\}^{1/q} \text{ az } \{f|f : \mathbb{P} \to \mathbb{C}, \|f\|_{\mathcal{B}^q} < \infty\}$$

lineáris téren. Jelöljük $\mathcal{B}^q$-val $\mathcal{B}$ lezártját erre a szeminormára nézve. A $\mathcal{B}^q$-ban lévő függvényeket majdnem páros számelméleti függvényeknek nevezik. Jónéhány közismert és fontos számelméleti függvények tartozik ebbe a függvényosztályba. Ilyen például a $\phi(n)/n$, vagyis az Euler-féle függvény osztva n-nel. ($\phi(n)/n \in \mathcal{B}^q$ minden $1 \leq q < \infty$ esetén.)

A c_r Ramanujan összeget a következőképpen definiálják:

$$c_r(n) := \sum_{a=1,(a,r)=1}^{r} \exp(2\pi\imath(a/r)n) \qquad (\imath := \sqrt{-1},\ r,n \in \mathbb{P}).$$

Legyen

$$a_r(f) := \frac{1}{\phi(r)} M(f\overline{c_r})$$

ahol ϕ az Euler-féle függvény. Ismert ([Hil]), hogy ha f páros számelméleti függvény, akkor

$$f(n) = \sum_r a_r c_r(n) \quad (n,r \in \mathbb{P}).$$

Ha $n \in \mathbb{N}, n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, akkor legyen

$$\breve{n} = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_{j+1}^{-1}.$$

Jelölje

$$\kappa_n(x) := \lim_{k\to\infty} \exp(2\pi\imath\breve{n}\sum_{j=0}^{k} x_j M_j)\ (n \in \mathbb{N}, x \in G_m).$$

A határérték létezik és $\{\kappa_n | n \in \mathbb{N}\}$ rendszer G_m-en $\psi\alpha$ típusú rendszer ([Gát3]).

Ha $1 \leq q < \infty$, akkor van olyan $* : \mathcal{B}^q \to L^q(G_m)$ lineáris normatartó leképezés, hogy $f^*(\lambda^{-1}(\breve{n})) = f(n)$, $(n \in \mathbb{P})$. Ekkor $\|f^*\|_q = \|f\|_{\mathcal{B}^q}$ és $f_n \to f \Leftrightarrow f_n^* \to f^*$ (a megfelelő terekben, a megfelelő normákban nézve).

Vezessük be most a kettős rendszerek vizsgálatához szükséges definíciókat. Jelölje $G_m \times G_m$ a G_m csoport önmagával vett direkt szorzatát.

Kétdimenziós (vagy kettős) Vilenkin-szerű rendszernek az $\{\chi_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ rendszert, a $\{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ Vilenkin-szerű rendszer önmagával vett Kronecker-szorzatát fogjuk nevezni. Tehát

$$\chi_{n,m}(x, y) := \chi_n(x)\chi_m(y),$$

ahol $x, y \in G_m$.

Minden $f \in L^1(G_m \times G_m)$-re legyen a maximál és a diagonál maximál függvény az alábbi módon definiálva:

$$f^\star := \sup_{n_1,n_2\in\mathbb{N}} |S_{M_{n_1},M_{n_2}} f|, \qquad f^\circ := \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_{M_n,M_n} f|$$

és

$$\|f\|_H := \|f^\star\|_1, \quad \|f\|_{H^\circ} := \|f^\circ\|_1.$$

Definiáljuk a $H(G_m \times G_m)$ (vagy, ha egyértelmű milyen térhez tartozik, egyszerűen: H) a kettős maximál-Hardy-teret az $f \in L^1(G_m \times G_m)$ függvények összességeként, úgy, hogy $\|f\|_H < \infty$, valamint a $H^\circ(G_m \times G_m)$ (vagy ha egyértelmű milyen térhez tartozik, egyszerűen: H°) a kettős diagonál-maximál-Hardy-teret úgy, mint

$$H^\circ := \{f \in L^1(G_m \times G_m): \quad \|f\|_{H^\circ} < \infty\}.$$

Mivel $\|f\|_{H^\circ} \leq \|f\|_H$, így $H \subset H^\circ$.

Hasznos eszköz a diagonál-maximál-Hardy-tér vizsgálatában annak úgynevezett atomos felbontása.

Azt mondjuk, hogy $a \in L^\infty(G_m \times G_m)$ egy H° atom, ha

i. létezik $x = (x_1, x_2)$ és $k \in \mathbb{N}$, úgy hogy supp $a \subset I_k(x_1) \times I_k(x_2)$,

ii. $\|a\|_\infty \leq M_k M_k$,

iii. $(E_k a)(y) := (E_{k,k} a)(y) = 0$ minden $y \in G_m \times G_m$ esetén (ahol $E_{r,s}$ a kettős feltételes várható érték, így $(E_{r,s} f)(y) = M_r M_s \int_{I_r(y_1) \times I_s(y_2)} f$).

A továbbiakban vezessük be a Vilenkin-térrel kapcsolatos fogalmakat([Gát8]).

Legyen m továbbra is a 2-nél nem kisebb pozitív egészek sorozata, G_{m_j} pedig egy m_j $(j \in \mathbb{P})$ elemszámú halmaz, bármilyen művelet nélkül, de ellátva a diszkrét topológiával. Definiáljunk a szokásos számláló mértéket G_{m_j} halmazon. Legyen G'_m a G_{m_j} halmazok teljes direkt szorzata, ellátva a szorzattopológiával és a szorzatmértékkel. Ez a szorzatmérték reguláris valószínűségi Borel-mérték lesz. A Vilenkin-csoporthoz hasonlóan G'_m elemeit is sorozatokként reprezentálhatjuk, valamint az intervallumfogalom, az intervallumok által generált σ-algebrák és a Lebesgue-féle függvényterek is hasonlóan értelmezhetőek.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a G'_m Vilenkin-tér korlátos.

A $H(G'_m)$ maximál-Hardy-teret a $f^* := \sup_n |E_n f|$ $(f \in L^1(G'_m))$ maximál függvény segítségével definiáljuk. Akkor mondjuk, hogy f

eleme a maximál-Hardy-térnek, ha $f^* \in L^1(G_m)$. Ekkor $H(G'_m)$ egy Banach-tér a

$$\|f\|_{H^1} := \|f^*\|_1$$

normával.

Itt is elkészíthetjük a tér függvényeinek atomos felbontását.

Bevezetünk egy ortonormált rendszert G'_m-en, amit ψ' Vilenkin-szerű rendszernek fogunk nevezni. A komplex értékű ${r'}_k^n : G'_m \to \mathbb{C}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ függvényeket Vilenkin-téren értelmezett általánosított Rademacher-rendszernek nevezzük, amennyiben rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.

i. ${r'}_k^n$ függvény $\mathcal{A}_{k+1}$ mérhető és ${r'}_k^0 = 1$ minden $k, n \in \mathbb{N}$ esetén.

ii. Ha M_k az n, l számok osztója és $n^{(k+1)} = l^{(k+1)}$ $(k, l, n \in \mathbb{N})$, akkor

$$E_k({r'}_k^n \bar{r'}_k^l) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n_k = l_k, \\ 0, \text{ ha } n_k \neq l_k \end{cases}$$

(ahol $E_n f$ a feltételes várható érték, így $(E_n f)(x) = M_n \int_{I_n(x)} f$, valamint $\bar{z}$ a z szám komplex konjugáltja).

iii. Ha M_k az n osztója (vagyis $n = n_k M_k + n_{k+1} M_{k+1} + ... + n_{|n|} M_{|n|}$), akkor

$$\sum_{n_k=0}^{m_k-1} |{r'}_k^n(x)|^2 = m_k$$

minden $x \in G'_m$ esetén.

Végül definiáljuk a $\psi' := (\psi'_n : n \in \mathbb{N})$ Vilenkin-szerű rendszert a következőképpen:

$$\psi'_n := \prod_{k=0}^{\infty} {r'}_k^{n^{(k)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Két, azonos G'_m Vilenkin-térhez tartozó Vilenkin-szerű rendszer Kronecker-szorzataként definiálhatjuk a kétparaméteres (kétdimenziós) Vilenkin-szerű rendszert:

$$\psi'_{n,k}(x,y) := \psi'_n(x)\psi'_k(y).$$

Analóg módon vezethetjük be a Vilenkin analízis szokásos jelöléseit egy- és kétparaméteres esetben is.

A főbb eredmények összefoglalása.

A dolgozat 2. fejezetében egy példát láthatunk olyan majdnem páros számelméleti függvényre, melynek Vilenkin—Fourier-sora mindenhol divergál. Ekkor az ortonormált rendszer a G_m R-Vilenkin csoporton értelmezett Vilenkin-szerű $(\psi\alpha)$ rendszer.

2.2.1. Tétel. *Legyen G_m egy R-Vilenkin-csoport és $1 \leq q < \infty$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $\mathcal{B}^q$-beli függvény, melynek Vilenkin-Fourier sora sehol sem konvergens.*

A 3. fejezet kettős Vilenkin—Fejér-közepekkel foglalkozik. Az ortonormált rendszer a fejezet minden állításában a kettős és korlátos (az m sorozat korlátos) Vilenkin-szerű $(\psi\alpha)$ rendszer.

A főbb eredmények a következők.

3.2.1. Tétel. *Legyen $f \in L^1$. Ekkor*

$$\sigma_{n_1,n_2} f \to f$$

majdnem mindenütt, amint $n_1, n_2 \to \infty$, $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.

Kettős trigonometrikus Fourier-sorokra Marcinkiewicz és Zygmund ([MZ])bizonyította, hogy $\sigma_{n_1,n_2)} f \to f$ majdnem mindenütt, amint $n_1, n_2 \to \infty$ úgy, hogy az (n_1, n_2) koordinátapár által meghatározott rácspontok egy pozitív kúpon belül maradnak, nevezetesen $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ valamely rögzített $\beta \geq 1$ paraméterre.

Ismert, hogy a klasszikus Fejér-magok felülről becsülhetők véges integrálú csökkenő függvények sorozatával, míg ez az egydimenziós Walsh—Fejér-magokról nem mondható el. Ez a különbség okozza, hogy a trigonometrikus technika sokszor nem használható sikeresen a magasabb dimenziós Walsh esetben.

Az utóbbi évtizedben számos kísérlet történt a fenti tétel diadikus átültetésére. Kettős Walsh-rendszer esetén Móricz Ferenc, Schipp Ferenc és William R. Wade ([MSW]) bizonyította, hogy $\sigma_{(2^{n_1},2^{n_2})}f \to f$ majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(Q^2)$ esetén, ahol $n_1, n_2 \to \infty$, $|n_1 - n_2| \leq \alpha$ valamely rögzített α-ra, és ahol Q^2 az egységnégyzet. Szintén kettős Walsh-rendszerre Gát Györgynek ([Gát6])és Weisz Ferencnek ([Wei2]) sikerült belátni, hogy $\sigma_{n_1,n_2}f \to f$ majdnem mindenütt, minden $f \in L^1(Q^2)$ esetén, ahol $n_1, n_2 \to \infty$ és $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, valamint $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$ valamely rögzített $\beta \geq$ 1-re. A fenti 3.2.1. Tétel (ami közös munka Gát Györggyel) ezen állítás általánosítása a kettős és korlátos $\psi\alpha$ Vilenkin-szerű rendszerre.

3.3.1. Tétel. *Legyen $f \in H$. Ekkor a σ^* operátor (H, L) típusú, vagyis*

$$\|\sigma^* f\|_1 \leq c\|f\|_H,$$

aholis $\sigma^* f := \sup_{(n_1,n_2)} |\sigma_{n_1,n_2} f|$, amelyben (az előző, 3.2.1. Tételhez hasonlóan) $n_1, n_2 \in \mathbb{P}$, és $\beta^{-1} \leq n_1/n_2 \leq \beta$, ahol $\beta \geq 1$ rögzített paraméter.

A 4. fejezet egy Vilenkin-szerű tereken értelmezett függvényekre vonatkozó normaegyenlőtlenség egy- és kétdimenziós változatát tárgyalja. Az ortonormált rendszer a fejezet minden állításában az általánosított (Vilenkin téren értelmezett) Vilenkin-szerű rendszer, az első állításban az egydimenziós, míg a másodikban a kétdimenziós rendszer.

4.2.1. Tétel. *Legyen m korlátos sorozat. Ekkor létezik $c > 0$ abszolút konstans, hogy minden $f \in H(G'_m)$ függvényre*

$$\sup_{N \in \mathbb{P}} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\|S_n f\|_1}{n} \leq c\|f\|_H.$$

E normaegyenlőtlenség klasszikus rendszerekre vonatkozó analóg változatai ismertek és bizonyítottak. Trigonometrikus rendszerre

B. Smith ([Smi]) 1983-ban, Walsh-rendszerre Simon Péter ([Sim1]) 1987-ben, (nemcsak korlátos) Vilenkin rendszerre pedig Gát György bizonyította 1993-ban. Ők konkrétan az alábbi egyenlőséget látták be tetszőleges f maximál Hardy-térbeli függvényre:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\|S_n f - f\|_1}{n} = 0.$$

Ez az egyenlőség egyszerű következménye a normaegyenlőtlenségnek.

Az egyparaméteres Vilenkin-rendszerre vonatkozó eredmények úgynevezett H^p változata ($p < 1$) [Sim3]-ban található. Ezt 1996-ban Weisz Ferenc általánosította két paraméteres trigonometrikus- és Walsh-rendszerre [Wei4]. Bizonyításaiban martingálelméleti eredményeket használt. A (kettős) Vilenkin-rendszerre vonatkozó általánosítás Simon Péter és Weisz Ferenc munkája ([SiW]).

Mivel a Vilenkin-szerű rendszer azonban lényegesen általánosabb, mint a klasszikus Walsh- és Vilenkin-rendszerek (illetve kevéssé hasonlítható a trigonometrikus rendszerhez), a tétel bizonyítása csupán részben alkalmazza a szokásos eljárásokat.

A 4.3. alfejezetben belátjuk az előző alfejezetben tárgyalt normaegyenlőtlenség kétváltozós alakját, nevezetesen, ha az indexek hányadosa korlátos.

4.3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy m korlátos sorozat, $2 \le N, K \in \mathbb{P}$ és legyen $\beta \ge 1$ rögzített konstans. Ekkor létezik $c > 0$ csak β-tól függő konstans, melyre tetszőleges $f \in H^1(G'_m \times G'_m)$ függvény esetén*

$$\sup_{N,K} \frac{1}{\log N \log K} \sum_{\substack{\beta^{-1} \le n/k \le \beta \\ (n,k) \le (N,K)}} \frac{\|S_{n,k} f\|_1}{nk} \le c\|f\|_H$$

teljesül.

Hivatkozások.

[AVDR] Agajev, G. N., Vilenkin, N. Ya., Dzhafarli, G. M. and Rubinstein, A. I., *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups*, "ELM" (Baku, U.S.S.R) (1981).

[CZ] Calderon, A. P., Zygmund, A., *On the existence of certain singular integrals* Acta Math. 88 (1952), 85-139.

[Fin] Fine, N. J., *Cesàro summability of Walsh-Fourier series*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 41 (1955), 558-591.

[FS] Fridli, S., Simon, P., *On the Dirichlet kernels and a Hardy space with respect to the Vilenkin system*, Acta Mathematica Hungarica 45 (1-2) (1985), 223-234.

[Gát1] Gát, G., *Vilenkin—Fourier Series and Limit Peridic Arithmetic Functions*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 58 (1990), 315-332.

[Gát2] Gát, G., *Orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Mathematica Hungarica 58 (1-2) (1991), 193-198.

[Gát3] Gát, G., *On almost even arithmetical functions via orthonormal systems on Vilenkin groups*, Acta Arithmetica LX.2 (1991), 105-123.

[Gát4] Gát, G., *Investigation of some operators with respect to Vilenkin-like systems*, Annales Univ. Sci. Budapest XIV. (1994), 61-70.

[Gát5] Gát G., *Pointwise convergence of Fejér means on compact totally disconnected groups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995), 311-319.

[Gát6] Gát G., *Pointwise convergence of double Walsh-Fejér means*, Annales Univ. Sci. Budapestiensis, Sect. Comp. 16 (1996), 173-184.

[Gát7] Gát, G., *On the almost everywhere convergence of Fejér means of functions on the group of 2-adic integers*, Journal of Approx. Theory vol 90 (1) (1997), 88-96.

[Gát8] Gát, G., *On* $(C, 1)$ *summability for Vilenkin-like systems*, Studia Math. 144 (2) (2001), 101-120.

[GT] Gát, G., Toledo, R., L^p*-norm convergence of series in compact totally disconnected groups*, Analysis Math. 22 (1996), 13-24.

[HR] Hewitt, E., Ross, K., *Abstract Harmonic Analysis,* Springer-Verlag, Heidelberg, (1963)

[Hil] Hildebrand, H., *Über die punktweise Konvergenz von Ramanujan-Entwicklungen zahlentheoretische Funktionen*, Acta Arithmetic a XLIV (1984), 109-140.

[MZ] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., *On the summability of double Fourier series*, Fund. Math. 32 (1939), 122-132.

[Mau] Mauclaire, J. L., *Intégration et théorie des nombres*, Hermann, Paris (1986)

[MSW] Móricz, F., Schipp, F., Wade, W. R., *Cesàro summability of double Walsh-Fourier series*, Trans Amer. Math. Soc. 329 (1992), 131-140.

[Sch1] Schipp, F., *Universal conctractive projections and a.e. convergence*, Probability Theory and Applications, Essays to the Memory of József Mogyoródi, Eds.: Galambos, J., Kátai, I., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1992), 47-75.

[Sch2] Schipp, F., *On L^p -norm convergence of series with respect to product systems*, Analysis Math. 2 (1976), 49-63.

[SW1] Schipp, F., Wade, W. R., *Norm convergence and summability of Fourier series with respect to certain product systems*, Pure and Appl. Math. Approx. Theory 138 Marcel Dekker, New York-Basel-Hong Kong (1992), 437-452.

[SW2] Schipp, F., Wade, W. R., *Transforms on normed fields*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs (1995)

[SW3] Schipp, F., Wade, W. R., *A Fundamental Theorem of Dyadic Calculus for the Unit Square*, Applicable Analysis 34 (1989), 203-218.

[SWS] Schipp, F., Wade, W. R., Simon, P., Pál, J., *Walsh series, "An Introduction to dyadic harmonic analysis"*, Adam Hilger, Bristol and New York (1990)

[Sim1] Simon, P., *Strong convergence of certain means with respect to the Walsh-Fourier series*, Acta Math. Hungar. 49 (1987), 425-431.

[Sim2] Simon, P., *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen II.*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 27 (1976), 329-341.

[Sim3] Simon, P., *Strong convergence theorem for Vilenkin-Fourier series*, Journal of Math. Analysis and Applications 245 (1) (2000), 52-68.

[SiW] Simon, P., Weisz, F., *Strong convergence theorems for two-parameter Vilenkin-Fourier series* Acta Math. Hungar. 86 (1-2) (2000), 17-38.

[Smi] Smith, B., *A Strong Convergence Theorem for $H^1(T)$*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin-New York 995 (1983), 169-173.

[Tai] Taibleson, M. H., *Fourier Analysis on Local Fields*, Princeton Univ. Press., Princeton, N. J. (1975)

[Tol] Toledo, R., *Átlagos értékben vett konvergencia az uniform majdnem páros számelméleti függvények terében*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 12/D (1990), 47-56.

[Vil] Vilenkin, N. Ya., *A class of complete orthonormal systems*, Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R., Ser. Mat. 11 (1947), 363-400.

[Wad] Wade, W. R., *A growth estimate for Cesàro partial sums of multiple Walsh-Fourier series*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 49, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest (1985), 975-991.

[Wei1] Weisz, F., *Cesàro summability of two-dimensional Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2169-2181.

[Wei2] Weisz, F., *Hardy spaces and Cesàro means of two-dimensional Fourier series*, Bolyai Soc. Math. Stud. 5 (1996), 353-367.

[Wei3] Weisz, F., *Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Lectures Notes in Math. 1568 Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1994)

[Wei4] Weisz, F., *Strong convergence theorems for two-parameter Walsh-Fourier and trigonometric-Fourier series*, Studia Math. 117 (2) (1996), 173-194.

[Zyg] Zygmund, A., *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1959)

Publikációk jegyzéke.

[Bla1] Blahota, I., *On a theorem of Fridli and Simon with respect to some Vilenkin-like systems*, Bulletins for Applied Mathematics LXV (1993), 231-238.

[Bla2] Blahota, I., *Approximation by Vilenkin-Fourier sums in $L^p(G_m)$*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 13/D (1992), 35-39. Referált: ZBL 881.41015

[Bla3] Blahota, I., *Example for an almost even arithmetical function, the Vilenkin—Fourier series of which diverges everywhere*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis 13/D (1992), 41-45. Referált: ZBL 880.11004

[Bla4] Blahota, I., *Relation between Dirichlet kernels with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis XXII (1994), 109-114. Referált: ZBL 882.42017

[Bla5] Blahota, I., *A Walsh-Vilenkin analízis néhány approximációs kérdése és alkalmazása*, Egyetemi doktori értekezés (1995), KLTE

[Bla6] Blahota, I., *A Hardy-Littlewood-like inequality on compact totally disconnected spaces*, Acta Mathematica Academaiae Paedagogicae Nyíregyháziensis Vol. 14. (1998), 19-24. Referált: ZBL 908.42013, MR 2000h:42019

[Bla7] Blahota, I., *On the (H, L) typeness of the maximal function of Cesàro means of two-parameter integrable functions on bounded Vilenkin groups*, Publicationes Mathematicae Debrecen 54/3-4 (1999), 417-426. Referált: ZBL 934.42018, MR 2000g:43009

[Bla8] Blahota, I., *On a norm inequality with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Mathematica Hungarica 89 1-2 (2000), 15-27.

[Bla9] Blahota, I., *Investigation with respect to the two-dimensional Vilenkin space*, közlésre elfogadva a Colloq. Soc. János Bolyai-nál

[BS] Blahota, I., Sarkadi, D., *On an equality of type Hardy-Littlewood with respect to Vilenkin-like systems*, Acta Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 13/D, 1992, 51-55. Referált: ZBL 880.43005

[BG] Blahota, I., Gát, G., *Pointwise convergence of double Vilenkin-Fejér means*, Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica 36 (2000), 49-63. Referált: MR 1 768 234