



# KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Doktori (PhD) értekezés

Burai Pál József

Debreceni Egyetem  
Természettudományi Kar

Debrecen, 2007

---

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és számítástudomány Doktori Iskola Függvényegyenletek és függvényegyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2007.....

a jelölt aláírása

Tanusítom, hogy Burai Pál József doktorjelölt 2003-2006 között a fent megnevezett Doktori Iskola Függvényegyenletek és függvényegyenlőtlenségek programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2007.....

a témavezető aláírása

---

## Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik bármilyen formában is elősegítették a disszertáció elkészülését.

Elsősorban természetesen tanáromnak és témavezetőmnek Dr. Daróczy Zoltánnak, aki döntően befolyásolt analízis előadásaiival, valamint speciálkollégiumaival abban, hogy érdeklődésem a matematikai analízis és a függvényegyenletek felé fordult. Külön köszönettel tartozom lelkiismeretes témavezetéséért, és a jelen munka elkészüléséhez nyújtott segítségéért, melyet több változatban is átnézett. Hasznos tanácsaival és észrevételeivel hozzájárult a doktori dolgozat jobbá, olvashatóbbá tételéhez.

Másodsorban köszönettel tartozom az Analízis Tanszék minden oktatójának, akik igazi ösztönző, baráti, családi légkört teremtettek a munkához. Egyetemi és doktori tanulmányaim során sokat tanultam mindannyiuktól. Bármilyen szakmai problémámmal fordulhattam hozzájuk bizalommal.

Harmadsorban mind témavezetőmnek, mind az Analízis Tanszék oktatóinak köszönettel és hálával tartozom a szakmai előmenetelem szempontjából fontos konferenciákon való részvételi lehetőségekért.

Végül köszönetet mondok családomnak az irányóban mutatott türelemért és támogatásért.

# Tartalomjegyzék

<b>1</b>	<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Középértékek és Gauss kompozíciójuk</b>	<b>4</b>
2.1	Példák középértékekre . . . . .	5
2.2	Gauss kompozíció . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Matkowski-Sutô típusú egyenletek</b>	<b>14</b>
3.1	Az eredeti Matkowski-Sutô egyenlet . . . . .	14
3.2	Matkowski-Sutô probléma súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre . . . . .	16
3.2.1	Folytonosan differenciálható megoldások . . . . .	17
3.2.2	Kiterjesztési tétel . . . . .	27
3.2.3	Fő eredmény . . . . .	38
3.3	Matkowski-Sutô probléma identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre . . . . .	39
3.4	Matkowski-Sutô egyenlet szimmetrizált kvázi-aritmeti- kai közepekre . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek ekviva- lenciája</b>	<b>52</b>
4.1	Bevezetés . . . . .	52

4.2 Saját eredmények a témakörben . . . . .	56
4.3 Egy alkalmazás . . . . .	61
<b>5 Összefoglaló</b>	<b>62</b>
<b>6 Summary</b>	<b>66</b>
<b>7 Előadások</b>	<b>70</b>
<b>8 Publikációk</b>	<b>72</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>74</b>

# 1

## Bevezetés

A függvényegyenletek elmélete a nagy matematikai diszciplínákon belül az analízishez tartozik, de alkalmazása kiterjed a matematika más területeire is, pl. geometriára (pl. [Acz66], [Ben01], [Ben03], [Ger92]), játékelméletre (pl. [CanJuaInd97], [KuzNat70]), valószínűségelméletre (pl. [Bak94], [RaoSha94]), információelméletre (pl. [AD75], [Dar70], [DM79], [Mak87]). Az utóbbi években a közgazdaságtanban (pl. [Acz89], [AD89], [Eic78], [Szé88]) és a pszichológiában (pl. [Acz95], [AD89]) is egyre nagyobb teret nyer alkalmazása.

A középértékekkel kapcsolatos kutatások régebbiek, mint a függvényegyenletekkel kapcsolatosak. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség kétváltozós változatát már az ókorban is ismerték. A középértékeket tartalmazó függvényegyenletek problémakör viszont nem számít réginek a matematikán belül. Valószínűleg az egyik legrégebbi ilyen témájú dolgozatok Jensen dán és Sutô japán matematikusok nevéhez fűződnek (lásd. [Jen05], [Jen06], [Sut14a], [Sut14b]).

A múlt század második felében felélénkültek a középértékekkel kapcsolatos kutatások, több új középérték osztályt fedeztek fel (pl. [BajPal], [DP06a],[DP06a], [Gin38], [Los00], [Los02a], [MakoPal],

[Sto75]), új kutatási irányok indultak el. Az egyik ilyen a Matkowski-Sutô egyenletek problémaköre. A debreceni függvényegyenletes iskolához kapcsolódik sok új, jelentős eredmény felfedezése, vagy probléma felvetése a tárgykörben (pl. [BajPal], [Dar99], [Dar00], [Dar04], [Dar05], [DH05], [DHN03], [DLL<sup>+</sup>07], [DM99], [DMP00], [DMP04], [DMP06], [DP02a], [DP01], [DP02b], [DP03b], [DP03c], [Haj02], [Haj03], [Los99], [Los00], [Los02b], [Los03], [Los06], [MakoPal]). A jelen dolgozatban található eredmények kapcsolódnak az itt folytatott munkához. A felvetett problémák jelenleg is intenzíven kutatottak. Több hazai és külföldi matematikus publikál ebben a témakörben (pl. [DM06], [Jar07], [Haj02], [JM06], [KM96], [KM97], [KM03], [Mat99], [Mat04], [Mat06]).

A disszertáció a bevezetésen kívül három fejezetet tartalmaz. Az első: Középértékek és Gauss kompozíciójuk. Ebben a felhasznált fogalmakat, jelöléseket rögzítjük. Definiáljuk azon középérték osztályokat, melyek a későbbi fejezetekben dolgozunk. Szerepel néhány a bevezetett fogalmakkal és közepekkel kapcsolatos alapvető tétel, melyeket szintén később használunk. Ebben a fejezetben található még néhány történeti megjegyzés is.

A második: Matkowski-Sutô egyenletek. Ez a rész egy rövid történeti bevezetővel kezdődik, mely az ilyen típusú egyenletekkel kapcsolatos első kutatásokat mutatja be. Ez után három Matkowski-Sutô típusú egyenlettel kapcsolatos különféle eredményeket mutatunk be.

A harmadik: Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciája. Ebben a fejezetben [Dar02]-ben és [DMP06]-ban a szerzők által felvetett problémakört tárgyaljuk. Bemutatjuk az eddig ismert eredményeket. A fejezetet egy alkalmazás zárja.

A disszertációban minden mástól származó tétel mellett fel van tüntetve a felfedezőjének (felfedezőinek) neve (nevei). Kivétel a második fejezet, ahol feltüntettük a tételek származási helyét vagy az adott bizonyítás forrását. Ezek az eredmények azért nem nevesítettek, mert a matematikai folklór részét képezik, felfedezőjük ismeretlen.

## 1. BEVEZETÉS

---

Minden más, későbbi fejezetben található, nem nevesített eredmény saját. Ezek az eredmények vagy már publikáltak (ilyenkor a szövegkörnyezetből kiderül, hogy hol) vagy publikálás alatt vannak.

A tételek stb. részenként (section) és nem fejezetenként (chapter) vannak számozva egymás után, azaz pl. a 3.2.2 számozáshoz csak egy dolog (tétel, definíció stb.) tartozik. Az egyenletek fejezetenként (chapter) vannak számozva.

## 2

# Középértékek és Gauss kompozíciójuk

Ebben az fejezetben a legfontosabb fogalmakat és jelöléseket ismertetjük. Ezeket a későbbiekben visszahivatkozás nélkül fogjuk használni.

A szokásoknak megfelelően  $\mathbb{R}$  jelöli a valós,  $\mathbb{R}_+$  pedig a pozitív valós számok halmazát.  $I \subset \mathbb{R}$  mindig egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallumot jelent, ha mást nem mondunk.

Az  $M : I \times I \rightarrow I$  folytonos függvényt *középnek* nevezzük  $I$ -n, ha teljesül rá az ún. *közepelő tulajdonság*:

$$(KT) \quad \min\{x, y\} \leq M(x, y) \leq \max\{x, y\},$$

minden  $x, y \in I$ -re.

**2.0.1 Megjegyzések.** 1. Világos, hogy minden közép *reflexív*, tehát  $M(x, x) = x$  minden  $x \in I$ -re.

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

2. Előfordul, hogy az  $I$ -n adott közép helyett csak közepet vagy középértéket írunk, ha a szövegkörnyezetből kiderül, hogy hol van értelmezve az éppen szóban forgó közép.

Az  $I$ -n adott  $M$  közepet *szimmetrikusnak* nevezzük, ha  $M(x, y) = M(y, x)$  teljesül minden  $I$ -beli  $x, y$ -ra. Ha (KT)-ben szigorú egyenlőtlenségek állnak fenn minden  $x \neq y$ ,  $x, y \in I$  esetén, akkor  $M$ -et *szigorú középnek* nevezzük.

### 2.1 Példák középértékekre

A legismertebb két középérték a számtani- és a mértani közép. Most, az utóbbi évek kutatásainak megfelelően, középértékek halmazait fogjuk definiálni, amelyeket osztályoknak nevezzük. Ezek az osztályok speciális esetekben tartalmazni fogják az előbb említett középértékeket.

A továbbiakban  $\mathcal{CM}(I)$ -vel fogjuk jelölni az  $I$  intervallumon értelmezett valós értékű, szigorúan monoton, folytonos függvények osztályát.

**2.1.1 Definíció.** Az  $I$ -n adott  $M$  közepet *kvázi-aritmetikainak* nevezzük, ha létezik  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ , hogy

$$M(x, y) = \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right) =: A_{\varphi}(x, y), \quad x, y \in I.$$

**2.1.2 Megjegyzés.** Az előbbi definícióban a  $\varphi^{-1} : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény a  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény inverzét jelöli, mely létezik, hiszen  $\varphi$  szigorúan monoton és folytonos  $I$ -n. Így természetesen  $\varphi(I) \subset \mathbb{R}$  is nemüres, nyílt intervallum.

**2.1.3 Definíció.** Az  $I$ -n adott  $M$  közepet *súlyozott kvázi-aritmetikai*-nak nevezzük, ha létezik  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  és  $\alpha \in ]0, 1[$ , hogy

$$M(x, y) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)) =: A_\varphi(x, y; \alpha), \quad x, y \in I.$$

Ekkor  $\varphi$ -t az  $M$  kvázi-aritmetikai (súlyozott kvázi-aritmetikai) közép *generátorfüggvényének*,  $\alpha$ -t (csak a súlyozott kvázi-aritmetikai közeppek esetében) pedig *súlynak* nevezzük.

**2.1.4 Megjegyzések.** 1. A kvázi-aritmetikai közeppek osztálya valószínűleg a legfontosabb középérték osztály. A velük közvetve vagy közvetlenül kapcsolatos problémák a XX. század közepétől kezdve intenzíven kutatottak (pl. [Acz48], [Acz48], [Dar04], [DM99], [DMP00], [DP02a], [DP03a], [HLP34], [Mat99]). A kvázi-aritmetikai közeppekre vonatkozó következő karakterizációs tételt (lásd. [Acz48], [Acz47]) Aczél János bizonyította 1947-ben.

**2.1.5 Tétel (Aczél).** *Legyen  $M : I \times I \rightarrow I$  függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(a)  *$M$  kvázi-aritmetikai közép  $I$ -n.*

(b) *•  $M$  mindkét változójában ugyanolyan értelemben szigorúan monoton.*

*•  $M$ , mint kétváltozós függvény, folytonos.*

*•  $M(x, x) = x$  minden  $I$ -beli  $x$  esetén. (reflexivitás)*

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

- $M(x, y) = M(y, x)$  minden  $I$ -beli  $x$  és  $y$  esetén. (szimmetria)
- $M[M(x, y), M(u, v)] = M[M(x, u), M(y, v)]$  minden  $I$ -beli  $x, y, u, v$  esetén. (biszimmetria)

2. A kvázi-aritmetikai közepek szigorúak és szimmetrikusak.
3. A súlyozott kvázi-aritmetikai közepek szigorúak, de az  $\alpha = \frac{1}{2}$  esetet kivéve nem szimmetrikusak. Ekkor pontosan a kvázi-aritmetikai közepeket adják.
4. Az  $A_{id_I}(x, y)$  közepet *számtani* (aritmetikai) középnek nevezzük  $I$ -n, ahol  $id_I(x) := x$  minden  $x \in I$ -re.
5. Ha  $I \subset \mathbb{R}_+$ , akkor az  $A_{\log_I}(x, y)$  közepet *mértani* (geometriai) középnek nevezzük  $I$ -n, ahol  $\log_I$  a természetes alapú logaritmus függvény megszorítása  $I$ -re.
6. A súlyozott kvázi-aritmetikai közepek jellemzési tételét szintén Aczél János bizonyította [Acz48]-ban.

**2.1.6 Tétel** (Aczél). *Legyen  $M : I \times I \rightarrow I$  függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

- (a)  $M$  súlyozott kvázi-aritmetikai közép  $I$ -n.
- (b) •  $M$  mindkét változójában ugyanolyan értelemben szigorúan monoton.

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

- $M$ , mint kétváltozós függvény, folytonos.
- $M(x, x) = x$  minden  $I$ -beli  $x$  esetén. (reflexivitás)
- $M[M(x, y), M(u, v)] = M[M(x, u), M(y, v)]$  minden  $I$ -beli  $x, y, u, v$  esetén. (biszimmetria)

Érdekes tény, hogy egy súlyozott kvázi-aritmetikai középnek (s így természetesen egy kvázi-aritmetikainak is) több generátorfüggvénye van (lásd. 2.1.9 Állítás).

**2.1.7 Definíció.** Legyenek  $\varphi, \Phi \in \mathcal{CM}(I)$ .  $\varphi$  ekvivalens  $\Phi$ -vel  $I$ -n, ha léteznek olyan  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$  konstansok, hogy

$$\varphi(x) = a\Phi(x) + b, \quad x \in I.$$

Jelölésben:  $\varphi(x) \sim \Phi(x)$  ha  $x \in I$ ; vagy  $\varphi \stackrel{I}{\sim} \Phi$ ; vagy  $\varphi \sim \Phi$   $I$ -ben.

**2.1.8 Megjegyzés.** Az előbb definiált reláció ekvivalencia reláció  $\mathcal{CM}(I)$ -n.

**2.1.9 Állítás.** Két  $I$ -n adott súlyozott kvázi-aritmetikai közép pontosan akkor egyenlő egymással, ha a súlyaik egyenlőek és a generátorfüggvényeik ekvivalensek  $I$ -n.

A következő bizonyítás Daróczy Zoltántól származik.

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a két közép egyenlő. Legyenek a generátorfüggvényeik  $\varphi, \Phi \in \mathcal{CM}(I)$ , a súlyok pedig  $\alpha, \beta \in ]0, 1[$ . Ekkor teljesül a következő függvényegyenlet:

$$\varphi^{-1}(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)) = \Phi^{-1}(\beta\Phi(x) + (1-\beta)\Phi(y)), \quad x, y \in I.$$

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

Ekkor az  $f := \Phi \circ \varphi^{-1}$ ,  $\varphi(x) = u$ ,  $\varphi(y) = v$  jelölésekkel az előző egyenletből kapjuk, hogy

$$(2.1) \quad f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \beta f(u) + (1 - \beta)f(v), \quad u, v \in J := \varphi(I),$$

ahol  $J$  nemüres, nyílt intervallum, hiszen  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ .

Cseréljük fel a változókat az előbbi egyenletben, ekkor

$$f(\alpha v + (1 - \alpha)u) = \beta f(v) + (1 - \beta)f(u), \quad u, v \in J := \varphi(I).$$

Adjuk hozzá ezt az egyenletet az (2.1) egyenlethez. Egyszerűsítés után kapjuk, hogy:

$$(2.2) \quad f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + f(\alpha v + (1 - \alpha)u) = f(u) + f(v),$$

ha  $u, v \in J := \varphi(I)$ . Legyenek most  $u, v \in J$  tetszőlegesek, továbbá

$$u_1 := \alpha u + (1 - \alpha)v, \quad v_1 := (1 - \alpha)u + \alpha v$$

$$u_{n+1} := \alpha u_n + (1 - \alpha)v_n, \quad v_{n+1} := (1 - \alpha)u_n + \alpha v_n.$$

Ekkor [Dar99, Lemma 1] miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{u + v}{2}.$$

Ezt és (2.2)-t, valamint  $f$  folytonosságát felhasználva kapjuk:

$$f\left(\frac{u + v}{2}\right) = \frac{f(u) + f(v)}{2}, \quad u, v \in J.$$

Azaz  $f$  folytonos megoldása a Jensen egyenletnek  $J$ -n. Ezért léteznek olyan  $a, b$  valós konstansok (lásd pl. [Acz66, Theorem 1. 46.p.],[Kuc85, Theorem 2., 316 p.]), hogy  $f(t) = at + b$ ,  $t \in J$ , így

$$\Phi(x) = a\varphi(x) + b, \quad x \in I.$$

Mivel  $\Phi$  szigorúan monoton  $a$  nem lehet nulla. Ezt felhasználva kapjuk, hogy a súlyok szükségképpen egyenlők.

A megfordítás egyszerű számolás.

Ezzel a bizonyítás teljes. □

**2.1.10 Megjegyzés.** A fenti tétel kvázi aritmetikai közepekre vonatkozó változata megtalálható [HLP34]-ben (66. oldal, 83. Tétel).

## 2.2 Gauss kompozíció

Tekintsünk két ugyanazon az  $I$  intervallumon adott középerértéket,  $M_1$ -et és  $M_2$ -t. Ekkor elkészíthetjük a következő un. *Gauss-féle iterációs sorozatokat* tetszőleges  $x, y \in I$  elemek esetén:

$$x_1 := x, \quad y_1 := y, \quad x_{n+1} := M_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} := M_2(x_n, y_n).$$

Ha a fenti sorozatok minden  $x, y \in I$  esetén konvergensek és határértékeik egyenlők, akkor a közös határértéket az adott közepek *Gauss kompozíciójának* nevezzük  $I$ -n és  $M_1 \otimes M_2(x, y)$ -nal jelöljük.

**2.2.1 Megjegyzés.** Legyen  $M_1(x, y) = \min\{x, y\}$  és  $M_2(x, y) = \max\{x, y\}$  ha  $x, y \in I$ . Ekkor az ezzel a két középpel képzett Gauss-féle iterációs sorozatok konvergensek, de a határértékeik  $x \neq y$  esetén különbözőek.

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

Rögtön felvetődik két kérdés: Mikor létezik a Gauss kompozíció? Ha létezik, hogyan határozhatjuk meg?

A következő két tétel, melyeket megtalálhatunk [DP02a]-ban, választ ad ezekre a kérdésekre.

**2.2.2 Tétel.** *Legyenek  $M_1, M_2$   $I$ -n adott közepek. Ha legalább az egyik szigorú, akkor létezik a Gauss kompozíciójuk  $M_1 \otimes M_2$ , mely maga is közép  $I$ -n.*

**2.2.3 Megjegyzés.** A tétel feltételei mellett  $M_2 \otimes M_1$  is létezik, de nem feltétlenül egyenlő  $M_1 \otimes M_2$ -vel. Például legyen  $M_1(x, y) = \frac{3x+y}{4}$ ,  $M_2(x, y) = \frac{x+y}{2}$  ( $x, y \in I$ ), ekkor  $M_1 \otimes M_2(x, y) = \frac{2x+y}{3} \neq \frac{x+2y}{3} = M_2 \otimes M_1(x, y)$  minden  $I$ -beli  $x, y$  esetén.

**2.2.4 Tétel.** *Legyenek  $M_1, M_2$   $I$ -n adott közepek, melyeknek létezik az  $M_1 \otimes M_2$  Gauss kompozíciója. Ha egy  $F : I \times I \rightarrow I$  folytonos függvény megoldása az*

$$(IE) \quad F\left(M_1(x, y), M_2(x, y)\right) = F(x, y), \quad x, y \in I$$

*egyenletnek, és  $F(x, x) = x$  minden  $I$ -beli  $x$  esetén, akkor  $F(x, y) = M_1 \otimes M_2(x, y)$  minden  $I$ -beli  $x$  és  $y$  esetén.*

*Megfordítva, a Gauss kompozíció, amennyiben létezik, megoldása az (IE) függvényegyenletnek. Azaz, ha  $M_1 \otimes M_2$  létezik  $I$ -n, akkor*

$$(IE') \quad M_1 \otimes M_2\left(M_1(x, y), M_2(x, y)\right) = M_1 \otimes M_2(x, y), \quad x, y \in I.$$

**2.2.5 Megjegyzések.** 1. A "Gauss kompozíció" és a "Gauss-féle iterációs sorozat" elnevezéseket a következő indokolja. 1799 május 30-án (az időpontot Gauss naplójából tudjuk ilyen pontosan, további történeti adatokért lásd.pl. [BorBor87], [Sch82]) kézzel elvégzett számításai alapján észrevette, hogy a számtani és a mértani közepekkel képzett,  $x = 1, y = \sqrt{2}$ -ből induló Gauss-féle iterációs sorozatok határértékei legalább 11 tizedesjegy pontossággal a

$$\frac{\pi}{2} \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \right)^{-1}$$

integrál értékével egyeznek meg. A naplójában tett bejegyzés szerint az előbbi ténynek nagy jelentőséget tulajdonított. Úgy sejtette, hogy ez a felfedezés a matematikai analízist egy új tudományterülettel fogja gazdagítani. Később Gauss bebizonyította, hogy

$$A_{id|\mathbb{R}_+} \otimes A_{\log}(x, y) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 \cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+.$$

Ez a híres Gauss-féle számtani-mértani közép, melynek igen gazdag irodalma van (további adatokért lásd. pl. [BorBor87], [Sch82], [DP03a], [DP02a]). Az előbbi un. elliptikus integrálokat csak numerikus eszközökkel tudjuk kiszámítani. Mivel a Gauss féle iterációs sorozatok elég gyorsan konvergálnak, így egy új numerikus eszközt adanak az ilyen típusú integrálok kiszámításához. Az első integrál a Lemniskáta görbe ívhosszával egyezik

## 2. KÖZÉPÉRTÉKEK ÉS GAUSS KOMPOZÍCIÓJUK

---

meg, így a számtani-mértani közepet a  $\pi$  közelítésére is használhatjuk. Gauss felfedezése óta a számtani-mértani közép– az angol nyelvű szakirodalomban arithmetic-geometric mean vagy röviden AGM– nagy karriert futott be. Számos dolgozat és könyv született a témával kapcsolatban. Itt csak [BorBor87]-re hivatkozunk, mely teljes egészében csak ezzel középpel és a hozzá közvetlenül kapcsolódó témákkal foglalkozik.

2. Az (IE) egyenletet *invariancia egyenlet*nek nevezzük.
3. A 2.2.4 Tétel szerint, ha megsejtjük, hogy mi a Gauss kompozíció, akkor (IE) segítségével ellenőrizhetjük, igazunk van-e. Például legyen  $M_1(x, y) = \frac{x+y}{2}$ ,  $M_2(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$ ,  $x, y \in I \subset \mathbb{R}_+$ . Könnyen látható, hogy  $M_2$  közép  $I$ -n. Mivel a számtani közép szigorú a 2.2.2 Tétel szerint létezik  $M_1 \otimes M_2$   $I$ -n. Továbbá

$$\sqrt{\frac{x+y}{2} \frac{2xy}{x+y}} = \sqrt{xy}.$$

Az invariancia egyenlet szerint ezen közepek Gauss kompozíciója a mértani közép.

# 3

## Matkowski-Sutô típusú egyenletek

### 3.1 Az eredeti Matkowski-Sutô egyenlet

1995-ben vetette fel a következő problémát Janusz Matkowski lengyel matematikus: Mikor lesz két kvázi-aritmetikai közép összege egyenlő az aritmetikai közép kétszeresével? Más szavakkal, adjuk meg az alábbi függvényegyenlet összes megoldását:

(MS)

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y, \quad x, y \in I,$$

ahol  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ . [Mat99]-ben Matkowski megadta a kétszer folytonosan differenciálható megoldásait az (MS) függvényegyenletnek. Később kiderült, hogy Sutô, japán matematikus, 1914-ben szintén foglalkozott ezzel a függvényegyenlettel és [Sut14a]-ban megadta az analitikus megoldásokat. A probléma 1995-ös újrafelfedezése után

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

több dolgozat is született a témával kapcsolatban pl. [DM99], [DMP00], [DP01]. Végül Daróczy és Páles [DP02a]-ban minden regularitási feltétel nélkül megoldották a problémát. A dolgozat fő eredményének ismertetéséhez szükségünk lesz a következő egyparaméteres függvénycsaládra, amit később is használni fogunk.

**3.1.1 Definíció.** Tetszőleges  $p$  valós szám esetén legyen

$$\chi_p(x) := \begin{cases} x & \text{ha } p = 0 \\ e^{px} & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \quad x \in I.$$

**3.1.2 Tétel** (Daróczy-Páles). *Ha a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása az (MS) egyenletnek, akkor létezik olyan  $p$  valós szám, hogy*

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p, \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

A Matkowski által felvetett kérdés szoros kapcsolatban van a Gauss kompozíciók keresztül a következő problémával. Mikor lesz két kvázi aritmetikai közép Gauss kompozíciója kvázi aritmetikai? Azaz, adjuk meg az összes megoldását a következő függvényegyenletnek (itt az 2.2.4 Tételt használjuk):

$$\begin{aligned} \omega^{-1} \left( \frac{\omega \left( \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right) \right) + \omega \left( \psi^{-1} \left( \frac{\psi(x) + \psi(y)}{2} \right) \right)}{2} \right) = \\ = \omega^{-1} \left( \frac{\omega(x) + \omega(y)}{2} \right), \end{aligned}$$

ahol  $x, y \in I$  és  $\varphi, \psi, \omega \in \mathcal{CM}(I)$ . Bevezetve az  $\omega(x) = u$ ,  $\omega(y) = v$ ,  $\omega(I) = J$ ,  $\varphi \circ \omega = \Phi$ ,  $\psi \circ \omega = \Psi$  jelöléseket, az előbbi egyenlet a

következő alakú lesz:

$$\Psi^{-1}\left(\frac{\Psi(u) + \Psi(v)}{2}\right) + \Phi^{-1}\left(\frac{\Phi(u) + \Phi(v)}{2}\right) = u + v, \quad u, v \in J.$$

Ez az egyenlet pedig pontosan olyan alakú, mint az (MS) függvényegyenlet.

**3.1.3 Megjegyzés.** A "Mikor lesz két azonos osztályba tartozó közép számtani közepe egyenlő a számtani középpel?" kérdésekhez tartozó függvényegyenleteket nevezzük *Matkowski-Sutô típusú egyenleteknek*.

A "Mikor lesz két azonos osztálybeli közép Gauss kompozíciója is ugyanabban az osztályban?" típusú kérdésekehez tartozó egyenleteket *Daróczy-Páles típusú egyenleteknek* nevezzük. Az elnevezést a következők indokolják: [DP02a]-ban hívták fel a szerzők a figyelmet az előbb tárgyalt két probléma szoros kapcsolatára. Másrészt, nem minden középérték osztály esetén vezet a Daróczy-Páles típusú egyenlet Matkowski-Sutô típusú egyenletre.

## 3.2 Matkowski-Sutô probléma súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre

Az Matkowski-Sutô probléma mintájára vetette fel Daróczy Zoltán a következő, vele rokon problémát: Adjuk meg az összes megoldását a következő Matkowski-Sutô típusú egyenletnek:

$$(*) \quad \varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)\right) + \psi^{-1}\left((1 - \alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y)\right) = x + y,$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

ha  $x, y \in I$ , ahol  $I \subset \mathbb{R}$  továbbra is egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallum,  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  és  $\alpha \in ]0, 1[$ .

A fejezetben található eredmények megtalálhatóak [Bur07]-ben.

Az  $\alpha = \frac{1}{2}$  esettel nem kell foglalkoznunk, hiszen ez pontosan az eredeti Matkowski-Sutó probléma, amely már megoldott. A továbbiakban ezért mindig feltesszük, hogy

$$(3.1) \quad \alpha \neq \frac{1}{2}.$$

A további alfejezetekben megadjuk a probléma folytonosan differenciálható megoldásait, pontosabban elegendő csak egy részintervallumon megkövetelni a folytonos differenciálhatóságot az ismeretlen  $\varphi, \psi$  függvényekre.

Használni fogjuk a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása a (\*) egyenletnek kifejezést.

#### 3.2.1 Folytonosan differenciálható megoldások

Ebben részben először, a differenciálhatóságot kihasználva, átírjuk a (\*) un. összetett függvényegyenletet egy nem összetett alakú függvényegyenletre. Az így kapott (\*\*) egyenletben szereplő függvényekről fogjuk belátni, hogy egy részintervallumon folytonosan differenciálhatóak. Ezen a részintervallumon megoldjuk az egyenletet, így megkapjuk (\*) megoldásait is  $I$ -nek egy részintervallumán. Ezeket a megoldásokat a következő alfejezetben található kiterjesztési tétel segítségével fogjuk kiterjeszteni  $I$ -re.

**3.2.1 Lemma.** *Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár differenciálható megoldása (\*)-nak úgy, hogy  $\varphi'(x) \neq 0$  és  $\psi'(x) \neq 0$ , ha  $x \in I$ . Ekkor a*

$$(3.2) \quad \varphi(x) := u, \quad \varphi(y) := v, \quad \varphi' \circ \varphi^{-1} := f, \quad \psi' \circ \varphi^{-1} := g, \quad \varphi(I) := J$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

jelölésekkel teljesül a következő egyenlet:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 f(u)g(v) - (1 - \alpha)^2 f(v)g(u) = \\ (**) & \\ & = (\alpha g(v) - (1 - \alpha)g(u))f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \end{aligned}$$

minden  $u, v \in J$  esetén.

*Bizonyítás.* Differenciáljuk a (\*) egyenletet  $x$  szerint. Ekkor az

$$\frac{\alpha \varphi'(x)}{\varphi'(A_\varphi(x, y; \alpha))} + \frac{(1 - \alpha)\psi'(x)}{\psi'(A_\varphi(x, y; 1 - \alpha))} = 1, \quad x, y \in I,$$

egyenletet kapjuk. Hasonlóképpen,  $y$  szerinti deriválással kapjuk, hogy

$$\frac{(1 - \alpha)\varphi'(y)}{\varphi'(A_\varphi(x, y; \alpha))} + \frac{\alpha\psi'(y)}{\psi'(A_\varphi(x, y; 1 - \alpha))} = 1, \quad x, y \in I.$$

Az első egyenletet szorozzuk meg  $\alpha\psi'(y)$ -nal, a másodikat pedig  $(1 - \alpha)\psi'(x)$ -szel. Az így kapott két egyenletet vonjuk ki egymásból. Rendezés után a következőt kapjuk:

$$\frac{\alpha^2 \varphi'(x)\psi'(y) - (1 - \alpha)^2 \varphi'(y)\psi'(x)}{\varphi'(A_\varphi(x, y; \alpha))} = \alpha\psi'(y) - (1 - \alpha)\psi'(x) \quad x, y \in I.$$

Bevezetve a (3.2) jelöléseket, pontosan az (\*\*) egyenletet kapjuk. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.  $\square$

A továbbiakban a (\*\*) egyenlet megoldásával foglalkozunk. Ebben az egyenletben lévő ismeretlen függvények olyan deriváltfüggvények,

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

melyekről feltettük, hogy sehol sem nullák. A deriváltfüggvények rendelkeznek a Darboux-tulajdonsággal, ezért feltehetjük, hogy  $f$  és  $g$  értékkészlete  $\mathbb{R}_+$ -ban van. Itt még kihasználtuk azt is, hogy  $\varphi$ -t és  $\psi$ -t választhatjuk szigorúan monoton növekedőnek a 2.1.9 állítás miatt. A továbbiakban  $J$  is mindig a valós számok egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallumát jelöli.

**3.2.2 Lemma.** *Legyenek  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  folytonos függvények melyek kielégítik a (\*\*) egyenletet  $J$ -n. Ha  $f$   $J$ -n folytonosan differenciálható, akkor  $g$  is folytonosan differenciálható  $J$ -n.*

*Bizonyítás.* Legyen  $v_0$  rögzített, míg  $u$  tetszőleges eleme a  $J$  intervallumnak. (\*\*)-ből a következő egyenletet kapjuk:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \left[ (1 - \alpha)f(\alpha u + (1 - \alpha)v_0) - (1 - \alpha)^2 f(v_0) \right] g(u) = \\ = \left[ \alpha f(\alpha u + (1 - \alpha)v_0) - \alpha^2 f(u) \right] g(v_0). \end{aligned}$$

Ha  $(1 - \alpha)f(\alpha u + (1 - \alpha)v_0) - (1 - \alpha)^2 f(v_0) = 0$   $J$ -nek valamely részintervallumán ( $v_0$  rögzített), akkor ezen az intervallumon  $f$  konstans, így (\*\*) miatt  $g$  is konstans ugyanezen az intervallumon. Ebben az esetben kész a bizonyítás.

Tegyük fel, hogy  $(1 - \alpha)f(\alpha u_0 + (1 - \alpha)v_0) - (1 - \alpha)^2 f(v_0) \neq 0$  valamely rögzített  $v_0, u_0$  esetén. Ekkor a folytonosság miatt létezik olyan  $J' \subset J$  nemüres, nyílt intervallum, hogy ez minden  $u \in J'$  esetén igaz. Ekkor (3.3) miatt

$$g(u) = \frac{\left( \alpha f(\alpha u + (1 - \alpha)v_0) - (1 - \alpha)^2 f(u) \right) g(v_0)}{\left( (1 - \alpha)f(\alpha u_0 + (1 - \alpha)v_0) - (1 - \alpha)^2 f(v_0) \right)}, \quad u \in J'.$$

$f$  folytonos differenciálhatósága miatt létezik  $g'(u)$  ( $u \in J'$ ) és a derivált folytonos  $u$ -ban. Mivel  $u$  tetszőleges eleme volt  $J$ -nek, a lemma bizonyítása teljes.  $\square$

**3.2.3 Tétel.** *Legyenek  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}_+$  folytonos függvények melyek kielégítik a (\*\*) egyenletet  $J$ -n. Ekkor létezik olyan  $K \subset J$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum, melyen  $f$  és  $g$  folytonosan differenciálható.*

*Bizonyítás.* Az előző lemma miatt elegendő megmutatni, hogy  $f$  folytonosan differenciálható egy  $K \subset J$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallumon.

Cseréljük fel a változókat a (\*\*)-ban, ekkor az így kapott egyenlettel együtt a következő lineáris egyenletrendszer adódik a  $(g(u), g(v))$  párra, mint ismeretlenekre:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \left[ \alpha^2 f(u) - \alpha f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \right] g(v) + \\ & + \left[ (1 - \alpha)f(\alpha u + (1 - \alpha)v) - (1 - \alpha)^2 f(v) \right] g(u) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ (1 - \alpha)f(\alpha v + (1 - \alpha)u) - (1 - \alpha)^2 f(u) \right] g(v) + \\ & + \left[ \alpha^2 f(v) - \alpha f(\alpha v + (1 - \alpha)u) \right] g(u) = 0. \end{aligned}$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer minden rögzített  $J^2$ -beli  $(u, v)$  párra. A tétel feltételei miatt  $g(J) \subset \mathbb{R}_+$ , így a (3.4) egyenletrendszer mátrixának a determinánsa nulla minden  $J^2$ -beli rögzített

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

$(u, v)$  pár esetén. Azaz,

$$\begin{aligned} & \left( \alpha^2 f(u) - \alpha f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \right) \left( \alpha^2 f(v) - \alpha f(\alpha v + (1 - \alpha)u) \right) = \\ & = \left( (1 - \alpha) f(\alpha u + (1 - \alpha)v) - (1 - \alpha)^2 f(v) \right) \cdot \\ & \cdot \left( (1 - \alpha) f(\alpha v + (1 - \alpha)u) - (1 - \alpha)^2 f(u) \right), \quad u, v \in J. \end{aligned}$$

Rendezzük a fenti egyenletet:

(3.5)

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \alpha^4 - (1 - \alpha)^4 \right) f(u) - \alpha^3 f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha)^3 f(\alpha v + (1 - \alpha)u) \right] f(v) = \\ & = \alpha^3 f(\alpha v + (1 - \alpha)u) f(u) - (1 - \alpha)^3 f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + \\ & + \left( (1 - \alpha)^3 - \alpha^3 \right) f(\alpha v + (1 - \alpha)u) f(\alpha u + (1 - \alpha)v), \quad u, v \in J. \end{aligned}$$

A bizonyítás folytatásához szükségünk lesz a következő kétváltozós függvény és egy halmaz vizsgálatára. Legyen

$$\begin{aligned} F(u, v) := & \left( \alpha^4 - (1 - \alpha)^4 \right) f(u) - \alpha^3 f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + \\ & + (1 - \alpha)^3 f(\alpha v + (1 - \alpha)u), \quad u, v \in J, \end{aligned}$$

és

$$N := \{ (u, v) \in K^2 \mid F(u, v) = 0, u, v \in J \} \subset J^2.$$

Mivel  $f$  folytonos  $J$ -n,  $F$  folytonos  $J^2$ -n, ezért  $N$  zárt  $J^2$ -ben. Továbbá

$$F(u, u) = \alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)f(u) \neq 0, \quad u \in J.$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Így tetszőleges  $u \in J$  esetén  $(u, u) \in J^2$ ,  $F$  folytonossága miatt, nem lehet torlódási pontja  $N$ -nek. Tehát minden  $J$ -beli  $u$ -hoz létezik  $\varepsilon_u$  pozitív valós szám, hogy

$$F(s, t) \neq 0 \quad (s, t) \in G((u, u), \varepsilon_u),$$

ahol  $G((u, u), \varepsilon_u)$  az  $(u, u)$  körüli  $\varepsilon_u$  sugarú nyílt gömböt jelöli. Az előzőek miatt létezik olyan  $J' \subset J$  nemüres, nyílt intervallum, hogy

$$F(u, v) \neq 0 \quad u, v \in J'.$$

Ez előbbi és (3.5) együtt adja, hogy

(3.6)

$$\begin{aligned} f(v) = & \left[ \alpha^3 f(\alpha v + (1 - \alpha)u) f(u) - (1 - \alpha)^3 f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + \right. \\ & \left. + ((1 - \alpha)^3 - \alpha^3) f(\alpha v + (1 - \alpha)u) f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \right] \cdot \\ & \cdot \left[ (\alpha^4 - (1 - \alpha)^4) f(u) - \alpha^3 f(\alpha u + (1 - \alpha)v) + \right. \\ & \left. + (1 - \alpha)^3 f(\alpha v + (1 - \alpha)u) \right]^{-1}, \quad u, v \in J'. \end{aligned}$$

Erre az egyenletre alkalmazhatjuk Járai tételét [Jár05, Theorem 11.6]

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

a következő szereposztással:

$$Z \subset \mathbb{R} \text{ egy nyílt halmaz, } T = Y = J', \quad \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^s = \mathbb{R}$$

$$D = J'^2, \quad v = t, \quad u = y$$

$$g_1(t, y) = y, \quad g_2(t, y) = \alpha t + (1 - \alpha)y, \quad g_3(t, y) = \alpha y + (1 - \alpha)t$$

$$h(z_1, z_2, z_3) = \frac{\alpha^3 z_1 z_2 - (1 - \alpha)^3 z_3 + ((1 - \alpha)^3 - \alpha)^3 z_2 z_3}{((1 - \alpha)^4 - \alpha^4)z_1 - \alpha^3 z_3 + (1 - \alpha)^3 z_2}.$$

Ekkor  $h$  és  $g_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) teljesítik a szóban forgó Járai tétel feltételeit, mivel  $h$  kétszer folytonosan differenciálható,  $g_i$ -k  $y$  szerinti parciális deriváltjai pedig nem nullák,  $f$  pedig folytonos.

Már csak a Járai tétel feltételeiben szereplő  $C \subset J'$  kompakt halmazt kell meghatározni. Feltehetjük, hogy  $J'$  korlátos. Legyen  $J' := ]a, b[$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Ekkor a

$$C := [(1 - \alpha + \alpha^2)a + \alpha(1 - \alpha)b, \alpha(1 - \alpha)a + (1 - \alpha + \alpha^2)b].$$

definícióval adott zárt intervallum megfelelő lesz. Így az említett Járai tétel miatt  $f$  lokálisan Lipschitz függvény  $J'$ -n.

Az előbbieket miatt egy másik Járai tételt [Jár05, Theorem 14.2] alkalmazhatunk a fenti szereposztással, csak még  $f_i = f$ . Mivel  $f$  lokálisan Lipschitz  $J'$ -n, majdnem mindenütt differenciálható  $J'$ -n. Ezért [Jár05, Theorem 14.2] miatt létezik olyan  $K \subset J'$  pozitív hosszú-

ságú, nyílt intervallum, melyen  $f$  folytonosan differenciálható. Ezzel a tételünket bebizonyítottuk.  $\square$

**3.2.4 Következmény.** *Legyen  $K \subset \mathbb{R}$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum,  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  folytonos függvények, melyek kielégítik a (\*\*) egyenletet  $K$ -n. Ekkor létezik olyan  $c > 0$  valós konstans, hogy*

$$f(u)g(u) = c, \quad u \in K.$$

*Bizonyítás.* Az előző tétel és 3.2.2 Lemma szerint deriválhatjuk a (\*\*) egyenletet  $u$  szerint. Az így kapott egyenletben hajtsuk végre az  $u = v$  helyettesítést, majd rendezzük a kapott differenciálegyenletet:

$$f'(u)g(u) + f(u)g'(u) = 0, \quad u \in K.$$

A fenti egyenletből

$$(f(u)g(u))' = 0 \quad u \in K.$$

Ez ekvivalens az állításunkkal, ha figyelembe vesszük, hogy  $f$  és  $g$  értékkészlete  $\mathbb{R}_+$ -ban van a feltételek szerint.  $\square$

A következő tétel a (\*\*) függvényegyenlet folytonosan differenciálható megoldásait adja meg egy részintervallumon.

**3.2.5 Tétel.** *Legyen  $K \subset \mathbb{R}$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum,  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}_+$  folytonosan differenciálható függvények, melyek kielégítik a (\*\*) egyenletet  $K$ -n. Ekkor léteznek olyan  $A, B, c$ , ( $c > 0$ ) konstansok és  $K' \subset K$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum, hogy*

(3.7)

$$f(u) = Au + B > 0, \quad g(u) = \frac{c}{Au + B} > 0, \quad u \in K'.$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

*Bizonyítás.* Az 3.2.4 Következmény szerint  $g(u) = \frac{c}{f(u)}$  ( $u \in K, c > 0$ ). Végrehajtva ezt a helyettesítést a (3.7) egyenletben rendezés után a következő függvényegyenletet kapjuk  $f$ -re:

$$(3.8) \quad \left( \alpha f(u) - (1 - \alpha)f(v) \right) \cdot \\ \cdot \left( \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v) - f(\alpha u + (1 - \alpha)v) \right) = 0,$$

minden  $u, v \in K$  esetén. Legyen

$$F(u, v) := \alpha f(u) - (1 - \alpha)f(v), \quad u, v \in K,$$

ekkor  $F(u, u) = (2\alpha - 1)f(u) \neq 0$ . Hasonlóan bizonyítható, mint az előző tétel bizonyításában, hogy létezik olyan  $K' \subset K$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum, hogy

$$F(u, v) \neq 0, \quad u, v \in K'.$$

Így

$$\alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v) - f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = 0, \quad u, v \in K'.$$

Ezt és [DP87, Lemma 1.]-t felhasználva a (3.8) egyenletből kapjuk, hogy  $f$  Jensen konvex és Jensen konkáv  $K'$ -n. Másrészt  $f$  folytonos is  $K'$ -n azaz  $f$  konvex és konkáv egyszerre  $K'$ -n (lásd. [Acz66, Part I., Chapter 2.1.4. Theorem 1., 46.p.] vagy [Kuc85, Part III., Chapter 2. Theorem 2., 316.p.]). Figyelembe véve, hogy  $f$  és  $g$  értékészlete a feltételek szerint  $\mathbb{R}_+$ -ban van, a bizonyítás teljes.  $\square$

Most már meg tudjuk oldani a (\*) egyenletet egy részintervallumon, ha folytonos differenciálhatóságot is feltételezünk az ismeretlen függvényekről.

**3.2.6 Tétel.** *Legyenek  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ . Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi)$  pár folytonosan differenciálható megoldása a (\*) függvényegyenletnek. Ekkor létezik olyan  $I' \subset I$  nemüres, nyílt intervallum és  $p$  valós konstans, hogy*

$$\varphi \stackrel{I'}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I'}{\sim} \chi_{-p}.$$

*Bizonyítás.* A 3.2.1 Lemma miatt, az ottani jelölésekkel fennáll a (\*\*\*) egyenlet a  $\varphi(I) =: J$  intervallumon. A 3.2.3 Tétel miatt létezik olyan nemüres  $K$  részintervalluma  $J$ -nek, melyen  $f$  és  $g$  folytonosan differenciálhatóak. Így teljesülnek a 3.2.5 Tétel feltételei, tehát léteznek  $A, B, c$  konstansok ( $c > 0$  és  $K$ -nak olyan pozitív hosszúságú  $K'$  részintervalluma, hogy

$$f(u) = Au + B > 0, \quad g(u) = \frac{c}{Au + B} > 0, \quad u \in K'.$$

Ha  $A = 0$ , akkor  $\varphi' \circ \varphi^{-1}(u) = B$  minden  $K'$ -beli  $u$  esetén. Azaz,  $\varphi \sim \chi_0$   $\varphi^{-1}(K')$ -ben, ahol  $\varphi^{-1}(K') \subset I$  pozitív hosszúságú intervallum. Egyszerű számolással kapjuk, hogy ekkor  $\psi \sim \chi_0$   $\varphi^{-1}(K')$ -ben is teljesül.

Ha  $A \neq 0$ , akkor  $\varphi' \circ \varphi^{-1}(u) = Au + B$  minden  $K'$ -beli  $u$  esetén. Azaz  $\varphi'(x) = A\varphi(x) + B$  minden  $x \in \varphi^{-1}(K')$ , tehát  $\varphi \sim \chi_A$   $\varphi^{-1}(K')$ -ben. Hasonló számolással kapjuk, hogy  $\psi \sim \chi_{-A}$   $\varphi^{-1}(K')$ -ben. Ezzel a tétel bizonyítása kész. □

### 3.2.2 Kiterjesztési tétel

**3.2.7 Lemma.** *Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása a  $(*)$  egyenletnek, továbbá  $\varphi \stackrel{I}{\sim} \Phi$  és  $\psi \stackrel{I}{\sim} \Psi$ , ekkor a  $(\Phi, \Psi)$  pár is megoldása a  $(*)$  egyenletnek.*

*Bizonyítás.* Egyszerű számolás. □

Az előbbi lemma miatt feltehetjük, hogy  $\varphi, \psi$  szigorúan monoton növekvő függvények. Továbbá, ebben a részben mindig feltesszük, hogy

$$(3.9) \quad \alpha < 1 - \alpha.$$

Az  $\alpha = \frac{1}{2}$  esettel nem kell foglalkoznunk, hiszen ez minden regularitási feltétel nélkül megoldott (lásd. [DP02a]). Ha  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  lenne, akkor legyen  $\beta := 1 - \alpha$  és cseréljük fel  $\varphi$ -t  $\psi$ -vel. Ekkor  $(*)$ -ból a következő egyenletet kapjuk:

$$A_\varphi(x, y; \beta) + A_\psi(x, y; 1 - \beta) = x + y, \quad x, y \in I,$$

ahol  $0 < \beta < \frac{1}{2}$ .

**3.2.8 Lemma.** *Legyen  $\varphi : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $A < B$ ) szigorúan monoton, folytonos függvény és*

$$(3.10) \quad \gamma := \frac{B - A}{\varphi(B) - \varphi(A)} \geq 1.$$

*Tegyük fel, hogy a*

$$(3.11) \quad f(t) := t - \alpha\varphi(t), \quad t \in [A, B]$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

*függvény megoldása a*

$$(3.12) \quad (1-\alpha)f(x)+\alpha f(y) = f(x+y-A_\varphi(x,y;\alpha)), \quad x,y \in [A,B],$$

*függvényegyenletnek. Ekkor*

$$(3.13) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\gamma}x - \frac{\sigma}{\gamma}, \quad x \in [A,B],$$

*ahol*

$$(3.14) \quad \sigma = \frac{A\varphi(B) - B\varphi(A)}{\varphi(B) - \varphi(A)}.$$

*Bizonyítás.* Részletesen leírva a (3.12) egyenletet a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} & (1-\alpha)x - (1-\alpha)\alpha\varphi(x) + \alpha y - \alpha^2\varphi(y) = \\ & = x + y - A_\varphi(x,y;\alpha) - \alpha\varphi(x+y-A_\varphi(x,y;\alpha)), \quad x,y \in [A,B]. \end{aligned}$$

Rendezzük az előbbi egyenletet!

$$\begin{aligned} \alpha x + (1-\alpha)y + \alpha(1-\alpha)\varphi(x) + \alpha^2\varphi(y) &= \\ &= A_\varphi(x,y;\alpha) + \alpha\varphi(x+y-A_\varphi(x,y;\alpha)) \end{aligned}$$

minden  $x,y \in [A,B]$  esetén. Hajtsuk végre ebben az egyenletben a  $u := \varphi(x)$ ,  $v := \varphi(y)$ ,  $\varphi^{-1} := g$  helyettesítéseket. Ekkor rendezés után a következő függvényegyenletet kapjuk  $g$ -re:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} & g\left(g(u) + \frac{1-\alpha}{\alpha}g(v) + (1-\alpha)u + \alpha v - \frac{1}{\alpha}g(\alpha u + (1-\alpha)v)\right) = \\ & = g(u) + g(v) - g(\alpha u + (1-\alpha)v), \quad u,v \in [\varphi(A), \varphi(B)]. \end{aligned}$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Legyen

$$b(u) := \frac{B-A}{\varphi(B)-\varphi(A)}u + \frac{A\varphi(B)-B\varphi(A)}{\varphi(B)-\varphi(A)} - g(u)$$

minden  $u, v \in [\varphi(A), \varphi(B)]$  esetén. Könnyen látható, hogy  $b(\varphi(B)) = b(\varphi(A)) = 0$  és

$$(3.16) \quad g(u) = \gamma u + \sigma - b(u), \quad u \in [\varphi(A), \varphi(B)],$$

ahol  $\gamma := \frac{B-A}{\varphi(B)-\varphi(A)} \geq 1$ ,  $\sigma = \frac{A\varphi(B)-B\varphi(A)}{\varphi(B)-\varphi(A)}$ . A (3.16) függvényegyenletből (3.16) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & g\left((1-\alpha)u + \alpha v - b(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}b(v) + \frac{1}{\alpha}b(\alpha u + (1-\alpha)v)\right) = \\ & = \gamma\left((1-\alpha)u + \alpha v - b(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}b(v) + \frac{1}{\alpha}b(\alpha u + (1-\alpha)v)\right) + \sigma - \\ & - b\left((1-\alpha)u + \alpha v - b(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}b(v) + \frac{1}{\alpha}b(\alpha u + (1-\alpha)v)\right) = \\ & = \gamma u + \sigma - b(u) + \gamma v + \sigma - b(v) - \\ & - \gamma(\alpha u + (1-\alpha)v) - \sigma + b(\alpha u + (1-\alpha)v), \quad u, v \in [\varphi(A), \varphi(B)]. \end{aligned}$$

Rendezzük ezt az egyenletet! Ekkor egy új függvényegyenletet kapunk  $b$ -re.

(3.17)

$$\begin{aligned} & (1-\gamma)b(u) + \left(1 - \gamma\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)b(v) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right)b(\alpha u + (1-\alpha)v) = \\ & = b\left((1-\alpha)u + \alpha v - b(u) - \frac{1-\alpha}{\alpha}b(v) + \frac{1}{\alpha}b(\alpha u + (1-\alpha)v)\right) \end{aligned}$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

minden  $u, v \in [\varphi(A), \varphi(B)]$  esetén. Be fogjuk bizonyítani, hogy  $b$  azonosan nulla a  $[\varphi(A), \varphi(B)]$  intervallumon. Indirekt tegyük fel az ellenkezőjét. Ekkor két eset lehetséges:

1. eset:

Az  $[\varphi(A), \varphi(B)]$  intervallum belsejében  $b$  valahol pozitív értéket vesz fel.  $b$  folytonos, ezért felveszi a maximumát  $[\varphi(A), \varphi(B)]$ -ben. Legyen

$$0 < M := \max_{u \in [\varphi(A), \varphi(B)]} b(u),$$

és

$$u_0 := \sup\{ u \in [\varphi(A), \varphi(B)] \mid b(u) = M \}.$$

Feltehető, hogy  $u_0$  belső pontja a  $[\varphi(A), \varphi(B)]$  intervallumnak, hiszen a végpontokban  $b$  eltűnik. Így létezik olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon, u_0 - \alpha\varepsilon \in [\varphi(A), \varphi(B)]$$

és

$$(3.18) \quad 0 < b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) < M, \quad 0 < b(u_0 - \alpha\varepsilon) \leq M.$$

Hajtsuk végre az  $u = u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon$ ,  $v = u_0 - \alpha\varepsilon$  helyettesítéseket a (3.17) függvényegyenletben! Kapjuk, hogy

$$(3.19) \quad \begin{aligned} & (1 - \gamma)b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) + \left(1 - \gamma \frac{1 - \alpha}{\alpha}\right) b(u_0 - \alpha\varepsilon) + \\ & \quad + \left(\frac{\gamma}{\alpha} - 1\right) b(u_0) = \\ & = b \left( u_0 - b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) - \frac{1 - \alpha}{\alpha} b(u_0 - \alpha\varepsilon) + \frac{1}{\alpha} b(u_0) \right). \end{aligned}$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Vezessük be a

$$(3.20) \quad v(\varepsilon) := \frac{1}{\alpha} b(u_0) - b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) - \frac{1 - \alpha}{\alpha} b(u_0 - \alpha\varepsilon)$$

jelölést. Ekkor (3.18), (3.20) és  $u_0$  definíciója miatt

$$(3.21) \quad M > \alpha v(\varepsilon) = b(u_0) - \alpha b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) - (1 - \alpha) b(u_0 - \alpha\varepsilon) > 0.$$

Másrészt, (3.19) és (3.20) együtt adja, hogy

$$(3.22) \quad b(u_0 + v(\varepsilon)) = (\gamma - 1)v(\varepsilon) + \frac{1 - \alpha}{\alpha} b(u_0) + \frac{2\alpha - 1}{\alpha} b(u_0 - \alpha\varepsilon).$$

Most (3.10), (3.18), (3.21) és (3.22) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$(1 - \alpha)M = \alpha b(u_0 + v(\varepsilon)) + \alpha(1 - \gamma)v(\varepsilon) + (1 - 2\alpha)b(u_0 - \alpha\varepsilon) < \\ \alpha < M + \alpha(1 - \gamma)v(\varepsilon) + (1 - 2\alpha)M = (1 - \alpha)M + \alpha(1 - \gamma)v(\varepsilon).$$

Rendezzük az előbbi egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$0 < (1 - \gamma)\alpha v(\varepsilon).$$

Ez pedig ellentmondás (3.10) és (3.21) miatt.

2. eset:

Az  $[\varphi(A), \varphi(B)]$  intervallum belsejében  $b$  valahol negatív értéket vesz fel.  $b$  folytonos, ezért felveszi a minimumát  $[\varphi(A), \varphi(B)]$ -ben. Legyen

$$0 > m := \min_{u \in [\varphi(A), \varphi(B)]} b(u),$$

és

$$u_0 := \inf \{ u \in [\varphi(A), \varphi(B)] \mid b(u) = m \}.$$

Csakúgy, mint az első esetben,  $u_0$  belső pontja a  $[\varphi(A), \varphi(B)]$  intervallumnak. Így létezik olyan  $\varepsilon > 0$ , amelyre a következők teljesülnek:

$$u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon, u_0 - \alpha\varepsilon \in [\varphi(A), \varphi(B)]$$

$$(3.23) \quad 0 > b(u_0 + (1 - \alpha)\varepsilon) \geq m, \quad 0 > b(u_0 - \alpha\varepsilon) > m.$$

Az előző esethez hasonlóan, (3.23)-t és  $v(\varepsilon)$  (3.23)-beli definícióját felhasználva, kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} (1 - \alpha)m &= \alpha b(u_0 + v(\varepsilon)) + \alpha(1 - \gamma)v(\varepsilon) + (1 - 2\alpha)b(u_0 - \alpha\varepsilon) > \\ &> \alpha m + (1 - 2\alpha)m + \alpha(1 - \gamma)v(\varepsilon). \end{aligned}$$

ebből kapjuk, hogy

$$(3.25) \quad m < \alpha v(\varepsilon) < 0.$$

Rendezve (3.24)-t

$$0 > (1 - \gamma)\alpha v(\varepsilon).$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Ez pedig (3.10) és (3.25) miatt ellentmondás.

A fentieket figyelembe véve  $b$  azonosan nulla, azaz

$$\varphi^{-1} = g(u) = \gamma u + \sigma \quad u \in [\varphi(A), \varphi(B)],$$

ebből pedig

$$\varphi(x) = \frac{1}{\gamma} x - \frac{\sigma}{\gamma} \quad x \in [A, B].$$

Ezzel a lemma bizonyítása kész.  $\square$

**3.2.9 Tétel.** *Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása a (\*) egyenletnek. Ha létezik olyan  $I' \subset I$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum és  $p \in \mathbb{R}$  konstans, hogy*

$$(3.26) \quad \varphi \stackrel{I'}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I'}{\sim} \chi_{-p},$$

akkor

$$(3.27) \quad \varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

*Bizonyítás.* Feltehető, a 3.2.7 Lemma miatt, hogy

$$(3.28) \quad \varphi = \chi_p \quad \text{és} \quad \psi = \chi_{-p}$$

a szóban forgó  $I'$  intervallumon. Feltehető továbbá, hogy  $I'$  maximális hosszúsággal rendelkezik a következő értelemben. Nincs olyan  $I'$ -t valódi módon tartalmazó intervallum, melyen szintén teljesülnek a (3.28) egyenletek. Bebizonyítjuk, hogy ekkor  $I'$  szükségképpen megegyezik  $I$ -vel.

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Legyen  $I' = ]a, b[$ . Indirekt tegyük fel, hogy  $I' \neq I$ . Ekkor  $I'$  legalább egyik végpontja  $I$ -ben van. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy  $a \in I$  és  $b < \infty$ . Ha ez utóbbi nem lenne igaz, akkor válasszunk  $I'$  jobboldali végpontjául egy ilyen  $a < b$ -t.  $\varphi$  és  $\psi$  folytonosságát, valamint szigorú monotonitását kihasználva létezik olyan  $0 < \delta < b - a$  valós szám, hogy

$$(3.29) \quad \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y) \in \varphi(I') \quad \text{és} \quad (1 - \alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y) \in \psi(I')$$

teljesül minden  $x \in ]a - \delta, a[$ ,  $y \in ]b - \delta, b[$  esetén.

Most két esetet kell megvizsgálnunk.

1. eset:  $p \neq 0$ .

(3.26)-ből

$$(3.30) \quad \varphi^{-1}(t) = \frac{1}{p} \log t, \quad \text{ha} \quad t \in \varphi(I') \subset \mathbb{R}_+$$

és

$$(3.31) \quad \psi^{-1}(t) = -\frac{1}{p} \log t, \quad \text{ha} \quad t \in \psi(I') \subset \mathbb{R}_+.$$

(3.26), (3.29), (3.30) és (3.31) felhasználásával a (\*) függvényegyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{p} \log (\alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)e^{py}) - \frac{1}{p} \log ((1 - \alpha)\psi(x) + \alpha e^{-py}) = x + y,$$

ahol  $x \in ]a - \delta[$ ,  $y \in ]b - \delta, b[$ . Rendezzük ezt az egyenletet! Ekkor

$$\alpha\varphi(x) - (1 - \alpha)e^{px} = (1 - \alpha)e^{py} (\psi(x)e^{px} - 1)$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

minden  $x \in ]a - \delta[, y \in ]b - \delta, b[$  esetén. A fenti egyenlet baloldala független  $x$ -től. Ez csak akkor állhat fenn, ha

$$\psi(x)e^{px} - 1 = 0, \quad \text{if } x \in ]a - \delta, a[,$$

azaz

$$\psi(x) = e^{-px}, \quad x \in ]a - \delta, b[.$$

Továbbá

$$\varphi(x) = e^{px}, \quad x \in ]a - \delta, b[.$$

Ezzel ellentmondást kaptunk, hiszen az  $]a - \delta, b[$  intervallum bővebb, mint  $I'$ .

2. eset:  $p = 0$ .

Ekkor

$$(3.32) \quad \varphi(x) = \psi(x) = x \quad x \in ]a, b[.$$

Legyen  $x \in ]a - \delta, a[, y \in ]b - \delta, b[$ . Ekkor a (\*) függvényegyenletből (3.29) és (3.32) felhasználásával kapjuk, hogy

$$(3.33) \quad \alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\psi(x) = x$$

minden  $]a - \delta, a[-$ beli  $x$  esetén. Továbbá

$$\alpha\varphi(a - \delta) + (1 - \alpha)\psi(a - \delta) = a - \delta,$$

ezért feltehető, hogy

$$(3.34) \quad \varphi(a - \delta) \geq a - \delta.$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

A (3.33) által adott új információt felhasználva megoldjuk a (\*) egyenletet az  $a - \delta, a$  intervallumon. (\*)-ból, (3.33) felhasználásával kapjuk, hogy

$$(1 - \alpha) \frac{x - \alpha\varphi(x)}{1 - \alpha} + \alpha \frac{y - \alpha\varphi(y)}{1 - \alpha} = \psi(x + y - A_\varphi(x, y; \alpha))$$

minden  $x, y \in ]a - \delta, a[$ -re. Alkalmazzuk újra (3.33)-at az előbbi egyenletre! Ekkor

$$(3.35) \quad \alpha x + (1 - \alpha)y + (1 - \alpha)\alpha\varphi(x) + \alpha^2\varphi(y) = \\ A_\varphi(x, y; \alpha) + \alpha\varphi(x + y - A_\varphi(x, y; \alpha))$$

minden  $]a - \delta, a[$ -beli  $x$  és  $y$  esetén. Legyen

$$(3.36) \quad f(t) := t - \alpha\varphi(t), \quad t \in ]a - \delta, a[.$$

Ekkor a (3.35) egyenletet (3.36) felhasználásával a következő alakra hozhatjuk:

$$(1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) = f(x + y - A_\varphi(x, y; \alpha)), \quad x, y \in ]a - \delta, a[.$$

(3.34) miatt

$$(3.37) \quad \gamma := \frac{a - (a - \delta)}{\varphi(a) - \varphi(a - \delta)} \geq \frac{\delta}{a - (a - \delta)} = 1,$$

így alkalmazhatjuk a 3.2.8 Lemmát. Tehát

$$(3.38) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\gamma}x - \frac{\sigma}{\gamma} \quad x \in [a - \delta, a]$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

és

$$(3.39) \quad \psi(x) = \frac{x - \alpha\varphi(x)}{1 - \alpha} = \frac{(1 - \frac{\alpha}{\gamma})x + \alpha\frac{\sigma}{\gamma}}{1 - \alpha} \quad x \in [a - \delta, a].$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy  $\sigma = 0$  és  $\gamma = 1$ . A folytonosság miatt  $\varphi(a) = a$ . Ezt és (3.38)-at felhasználva ( $x = a$  helyettesítéssel) kapjuk hogy

$$(3.40) \quad \sigma = (1 - \gamma)a.$$

Helyettesítsük ezt vissza (3.38)-ba és (3.39)-be, valamint számítsuk ki az inverzfüggvényeket is!

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\gamma}x - \frac{1 - \gamma}{\gamma}a, & x \in [a - \delta, a], \\ \psi(x) &= \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(1 - \alpha)}x + \frac{(1 - \gamma)\alpha}{\gamma(1 - \alpha)}a, & x \in [a - \delta, a], \end{aligned}$$

$$\varphi^{-1}(x) = \gamma x + (1 - \gamma)a, \quad x \in \varphi([a - \delta, a]),$$

$$\psi^{-1}(x) = \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma - \alpha}x - \frac{(1 - \gamma)\alpha}{\gamma - \alpha}a, \quad x \in \psi([a - \delta, a]).$$

Legyen most  $y \in [a, b]$  és  $x \in [a - \delta, a]$ , ekkor (3.41), felhasználásával a (\*) függvényegyenlet a következő alakot ölti:

$$\left( \gamma - \alpha\gamma + \frac{\gamma(1 - \alpha)}{\gamma - \alpha}\alpha - 1 \right) y + \left( 1 - \gamma - \alpha + \alpha\gamma - \frac{1 - \gamma}{\gamma - \alpha}\alpha^2 \right) a = 0,$$

ahol  $y \in [a, b]$ . Így  $y$  együtthatója szükségképpen eltűnik, azaz

$$\gamma - \alpha\gamma + \frac{\gamma(1-\alpha)}{\gamma-\alpha}\alpha - 1 = 0.$$

Az előbbi egyenletet és (3.37)-et felhasználva

$$\gamma = 1.$$

Így a tételünk bizonyítása teljes. □

### 3.2.3 Fő eredmény

**3.2.10 Tétel.** *Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum,  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$ . Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi)$  pár megoldása a (\*) egyenletnek. Ha létezik olyan  $I' \subset I$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum, melyen  $\varphi$  és  $\psi$  folytonosan differenciálhatóak, akkor létezik egy  $p \in \mathbb{R}$  konstans, hogy*

$$(3.42) \quad \varphi \overset{I}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \overset{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

*Bizonyítás.* A 3.2.6 Tételből és a kiterjesztési tételből azonnal adódik az állításunk. □

**3.2.11 Megjegyzés.** A fejezetben található eredményeknél általánosabbat kapott Justyna Jarczyk, aki velem egyidőben, de tőlem függetlenül dolgozott egy hasonló problémán. [Jar07]-ben egy (\*)-ot speciális esetként tartalmazó egyenletet oldott meg folytonosságot feltételezve az ismeretlen függvényekről.

### 3.3 Matkowski-Sutô probléma identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közepekre

Mindenek előtt szükségünk lesz az identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közép definíciójára.

**3.3.1 Definíció.** Az

$$M_\varphi(x, y) := \varphi^{-1} \left( \frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x + y} \right), \quad x, y \in I$$

alakú kétváltozós függvényt *identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai középnek* nevezzük, ahol  $I \subset \mathbb{R}_+$  nemüres, nyílt intervallum,  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$ . Ekkor  $\varphi$ -t az identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közép *generátorfüggvényének* nevezzük.

Könnyen bebizonyítható, hogy a fenti definícióban szereplő  $M_\varphi : I \times I \rightarrow I$  kétváltozós függvény szigorú, szimmetrikus közép  $I$ -n.

2002-ben a 40. ISFE-én Gronow-ban Matkowski a következő problémát vetette fel: adjuk meg az összes olyan  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  párokat, melyek megoldásai a

$$(3.43) \quad M_\varphi(x, y) + M_\psi(x, y) = x + y, \quad x, y \in I$$

függvényegyenletnek. Domsta és Matkowski [DM06]-ban az alábbi tételt bizonyították.

**3.3.2 Tétel** (Domsta-Matkowski). *Legyen  $I \subset \mathbb{R}_+$  nemüres, nyílt intervallum. Ha a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása a (3.43) egyenletnek,*

és vagy  $\varphi$  vagy  $\psi$  négyszer folytonosan differenciálható  $I$ -n, akkor

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Ebben a részben általánosítjuk valamelyest az előbbi eredményt. Nevezetesen egy kiterjesztési tételt fogunk igazolni (lásd. [Bur06]), mely felhasználásával elegendő lesz megkövetelni a négyszeres folytonos differenciálhatóságot egy részintervallumon.

Először bebizonyítjuk, hogy ekvivalens generátorok ugyanazt az identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közeget generálják. Ennek egyszerű, de a kiterjesztési tétel bizonyításában fontos szerepet játszó következménye lesz, hogy ha egy  $\mathcal{CM}(I)$ -beli függvénytár megoldása a (3.43) egyenletnek, akkor egy vele ekvivalens pár is megoldás lesz.

**3.3.3 Lemma.** *Ekvivalens  $\mathcal{CM}(I)$ -beli függvényekkel generált identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közepek egyenlőek.*

*Bizonyítás.* Legyenek a szóban forgó generátorfüggvények  $\varphi$  és  $\Phi$ . A lemma feltételei miatt léteznek olyan  $a, b$ , ( $a \neq 0$ ) valós számok, hogy  $\varphi(x) = a\Phi(x) + b$  minden  $I$ -beli  $x$  esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(\frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x+y}\right) &= \Phi^{-1}\left(\frac{\frac{a(x\Phi(x) + y\Phi(y)) + b(x+y)}{x+y} - b}{a}\right) = \\ &= \Phi^{-1}\left(\frac{x\Phi(x) + y\Phi(y)}{x+y}\right). \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítás kész. □

**3.3.4 Következmény.** *Ha a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása (3.43)-nek és  $\varphi \stackrel{I}{\sim} \Phi$ ,  $\psi \stackrel{I}{\sim} \Psi$ , akkor a  $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár is megoldása (3.43)-nek.*

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

*Bizonyítás.* Azonnal következik az előbbi lemmából.  $\square$

**3.3.5 Tétel.** Legyen a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár megoldása a

$$(3.44) \quad \varphi^{-1} \left( \frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x+y} \right) + \psi^{-1} \left( \frac{x\psi(x) + y\psi(y)}{x+y} \right) = x + y$$

$x, y \in I$  egyenletnek. Tegyük fel, hogy létezik olyan  $J \subset I$  nemüres nyílt intervallum, hogy

$$(3.45) \quad \varphi(x) \underset{J}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \underset{J}{\sim} \frac{1}{x},$$

akkor

$$(3.46) \quad \varphi(x) \underset{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \underset{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

*Bizonyítás.* A 3.3.4 következmény miatt feltehető, hogy

$$(3.47) \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in J.$$

Az előbbieket miatt mindkét függvény szigorúan csökkenő  $I$ -n.

Legyen  $K \subset I$   $J$ -t tartalmazó maximális hosszúságú intervallum a következő értelemben:  $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{x}$  minden  $K$ -beli  $x$ -re, és nincs olyan  $K'$  részintervalluma  $I$ -nek, mely valódi módon tartalmazza  $K$ -t és  $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{x}$  minden  $K'$ -beli  $x$ -re. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben  $K = I$ .

Tegyük fel indirekt, hogy  $K \neq I$ . Mivel a szóban forgó függvények folytonosak,  $K$  zárt  $I$ -ben, azaz vagy  $\sup K$  vagy  $\inf K$  belső pontja  $I$ -nek az indirekt feltételezésünk miatt. Az általánosság megszorítása

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

nélkül feltehető, hogy  $K$  baloldali végpontja eleme  $I$ -nek, legyen ez  $c$ .  
Ekkor  $-\infty < c$ . Legyen

$$I := ]a, b[, \quad K := [c, d], \quad a < c < d \leq b,$$

ahol  $] := [$  vagy  $]$ . A bizonyítás lényegét nem változtatja, ha feltesszük még, hogy  $b < \infty$ , ellenkező esetben válasszunk ilyen  $b$ -t  $I$ -ből, és folytassuk ezzel a bizonyítást!

Első lépésben a következő tulajdonságokkal rendelkező  $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_2 \leq d - c$ ) pozitív valós számok létezését fogjuk bizonyítani:

(i) Minden  $x \in ]c - \delta_1, c]$  és  $y \in [d - \delta_2, d]$  esetén fennáll a következő

$$\frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x + y} = \frac{x\varphi(x) + 1}{x + y} \in [1/d, 1/c],$$

és

$$\frac{x\psi(x) + y\psi(y)}{x + y} = \frac{x\psi(x) + 1}{x + y} \in [1/d, 1/c].$$

(ii) 
$$\frac{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + 1}{c - \delta_1 + d - \delta_2} = \frac{1}{c}.$$

Vezessük be a következő függvényt:

$$\delta_2(\lambda) = d - (\lambda c + (1 - \lambda)d) = \lambda(d - c), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ekkor  $\varphi$  folytonossága miatt

$$\varphi(d) = \frac{1}{d} < \frac{\varphi(c)c + \varphi(d - \delta_2(\frac{1}{2}))(d - \delta_2(\frac{1}{2}))}{c + d - \delta_2(\frac{1}{2})} < \frac{1}{c} = \varphi(c).$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Ezt és  $\varphi$  folytonosságát kihasználva létezik olyan  $\delta_1$  pozitív valós szám, hogy

$$\frac{1}{d} < \frac{\varphi(x)x + \varphi(d - \delta_2(\frac{1}{2}))(d - \delta_2(\frac{1}{2}))}{x + d - \delta_2(\frac{1}{2})} < \frac{1}{c}, \quad x \in [c - \delta_1, c].$$

A következőkben feltesszük, hogy  $\varphi(c - \delta_1)(c - \delta_1) \neq 1$ , ezt az általánosítás megszorítása nélkül megtehetjük, hiszen  $c = \inf K$ .  $\varphi$  folytonosságát ismét felhasználva az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{1}{d} \leq \frac{\varphi(x)x + \varphi(y)y}{x + y} \leq \frac{1}{c}$$

minden  $x \in [c - \delta_1, c]$  és  $y \in [d - \delta_2(\frac{1}{2}), d]$  esetén. Így  $\delta_2 := \delta_2(\frac{1}{2})$  választással  $\varphi$ -re teljesül (i). Hasonlóan megy a bizonyítás  $\psi$ -re. Ha most (ii) nem teljesül a választott  $\delta_1$ -gyel és  $\delta_2(\frac{1}{2}) =: \delta_2$ -vel, akkor  $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb értéknél mégis teljesül (i). Ezt a következő módon bizonyíthatjuk:  $\varphi$  szigorúan monoton csökkenő, így

$$(3.48) \quad \frac{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + (d - \delta_2(\frac{1}{2}))\varphi(d - \delta_2(\frac{1}{2}))}{c - \delta_1 + d - \delta_2(\frac{1}{2})} < \frac{1}{c}$$

és

$$(3.49) \quad \frac{\varphi(c - \delta_1)(c - \delta_1) + \varphi(c)c}{c - \delta_1 + c} > \frac{1}{c}.$$

Alkalmazzuk a Bolzano tételt az alábbi függvényre:

$$Q(\lambda) := \frac{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + (d - \delta_2(\lambda))\varphi(d - \delta_2(\lambda))}{c - \delta_1 + d - \delta_2(\lambda)}.$$

Az (3.48) és (3.49) miatt (felhasználva, hogy  $c = d - \delta_2(1)$ ) létezik olyan  $\lambda_0 \in ]\frac{1}{2}, 1[$ , hogy (ii) fennáll  $\delta_2 := \delta_2(\lambda)$  választással. Világos, hogy ekkor (i) továbbra is érvényes.

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Második lépésben belátjuk, hogy a  $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{x}$  egyenlőségek egy  $K$ -t valódi módon tartalmazó intervallumon is fennállnak, ami el-  
lent fog mondani a  $K$ -ra rótt feltételnek.

(3.43), (ii), és  $K$  maximalitása miatt minden  $x \in [c - \delta_1, c]$ ,  $y \in [d - \delta_2, d] \subset K$  esetén fennáll az alábbi egyenlet:

$$\frac{x + y}{x\varphi(x) + 1} + \frac{x + y}{x\psi(x) + 1} = x + y.$$

Ezt és a (3.50) egyenletet felhasználva összefüggést kapunk az ismeretlen függvények között, nevezetesen:

$$(3.50) \quad \frac{1}{x^2} = \varphi(x)\psi(x), \quad x \in [c - \delta_1, d].$$

Ezt figyelembe véve, most két eset lehetséges:

$$(3.51) \quad \frac{1}{c - \delta_1} > \varphi(c - \delta_1) \quad \text{és} \quad \frac{1}{c - \delta_1} < \psi(c - \delta_1),$$

vagy

$$\frac{1}{c - \delta_1} < \varphi(c - \delta_1) \quad \text{és} \quad \frac{1}{c - \delta_1} > \psi(c - \delta_1).$$

A (3.43) egyenletben  $\varphi$  és  $\psi$  felcserélhető, így elegendő csak az egyik esettel foglalkoznunk, legyen ez (3.51). Feltehető még, hogy

$$\varphi(c - \delta_1) \neq \frac{1}{c - \delta_1} \quad \text{és} \quad \psi(c - \delta_1) \neq \frac{1}{c - \delta_1},$$

( $\delta_1$  megválasztható úgy, hogy még a fenti egyenletek is teljesüljenek).

A (3.43) egyenletből

$$\psi(x + y - M_\varphi(x, y)) = \frac{x\psi(x) + x\psi(y)}{x + y}, \quad x, y \in [c - \delta_1, d].$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Ebből, (3.50)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x+y-M_\varphi(x,y)} = \frac{\frac{1}{x\varphi(x)} + \frac{1}{y\varphi(y)}}{x+y}, \quad x, y \in [c-\delta_1, d].$$

Rendezzük az előző egyenletet, ekkor

$$\begin{aligned} (x\varphi(x) + y\varphi(y))(x+y-M_\varphi(x,y))^2 \varphi(x+y-M_\varphi(x,y)) = \\ = xy\varphi(x)\varphi(y)(x+y) \end{aligned}$$

teljesül minden  $x, y \in [c-\delta_1, d]$ -re. Helyettesítsünk az előbbi egyenletbe tetszőleges  $[c-\delta_1, c]$ -beli  $x$ -et és  $[d-\delta_2, d]$ -beli  $y$ -t. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} (x\varphi(x) + 1) \left( x+y - \frac{x+y}{x\varphi(x) + 1} \right)^2 \varphi \left( x+y - \frac{x+y}{x\varphi(x) + 1} \right) = \\ = x\varphi(x)(x+y), \end{aligned}$$

minden  $x \in [c-\delta_1, c]$  és  $y \in [d-\delta_2, d]$  esetén. Rendezzük ez utóbbi egyenletet, ekkor

$$x\varphi(x) \left[ (x+y) \frac{x\varphi(x)}{x\varphi(x) + 1} \varphi \left( \frac{x+y}{x\varphi(x) + 1} x\varphi(x) \right) - 1 \right] = 0,$$

teljesül minden  $x \in [c-\delta_1, c]$  és  $y \in [d-\delta_2, d]$ -re. Ebből,  $x\varphi(x) \neq 0$  felhasználásával kapjuk, hogy

$$\varphi \left( \frac{x+y}{x\varphi(x) + 1} x\varphi(x) \right) = \frac{x\varphi(x) + 1}{x\varphi(x)(x+y)},$$

ha  $x \in [c - \delta_1, c]$  és  $y \in [d - \delta_2, d]$ . Helyettesítsünk ebben az egyenletben  $x$  helyére  $c - \delta_1$ -et, ekkor

$$\begin{aligned} & \varphi \left( \frac{c - \delta_1 + y}{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + 1} (c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) \right) = \\ & = \frac{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + 1}{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1)(c - \delta_1 + y)} \left( = \frac{1}{\frac{c - \delta_1 + y}{(c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1) + 1} (c - \delta_1)\varphi(c - \delta_1)} \right), \end{aligned}$$

minden  $y \in [d - \delta_2, d]$  esetén. Ezt az egyenletet, (3.51) és (ii)-t felhasználva kapjuk, hogy  $\varphi(y) = \psi(y) = \frac{1}{y}$  egy olyan  $L$  intervallumon, melyre  $\inf L < \inf K$ . Ez pedig ellentmond  $K$  maximalitásának. Ezzel a bizonyítás kész.  $\square$

Az előbbi kiterjesztési tétel segítségével rögtön általánosíthatjuk a [DM06, Theorem 3]-t.

**3.3.6 Tétel.** *Legyenek  $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$  megoldásai a (3.43) egyenletnek. Ha  $\varphi$  és  $\psi$  közül legalább az egyik négyszer folytonosan differenciálható  $I$ -nek egy nemüres részintervallumán, akkor*

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

*Bizonyítás.* Rögtön következik a 3.3.2 Tételből és az előbbi kiterjesztési tételből.  $\square$

### 3.4 Matkowski-Sutô egyenlet szimmetrizált kvázi-aritmetikai közepekre

**3.4.1 Definíció.** Legyen  $M$  egy  $I$ -n adott közép. Azt mondjuk, hogy  $M$  szimmetrizált kvázi-aritmetikai közép  $I$ -n, ha létezik  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  és  $\alpha \in ]0, 1[$ , hogy

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \frac{A_\varphi(x, y; \alpha) + A_\varphi(x, y; 1 - \alpha)}{2} = \\ &= \frac{\varphi^{-1}(\alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y)) + \varphi^{-1}((1 - \alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y))}{2} = \\ &=: A_\varphi^*(x, y; \alpha) \end{aligned}$$

teljesül minden  $x, y \in I$  esetén.

**3.4.2 Megjegyzések.** 1. Látható, hogy az előbb definiált közép szigorú, szimmetrikus közép  $I$ -n.

2. Az  $\alpha = \frac{1}{2}$  esetben a szimmetrizált kvázi-aritmetikai közepek a kvázi-aritmetikai közepeket adják.

3. Az ilyen típusú közepeket először Daróczy és Páles definiálta (lásd. [DP06a], [DP06b]). Speciális esetekben megoldották az ilyen típusú közepekre vonatkozó egyenlőség problémát.

A következő Matkowski-Sutô típusú egyenlettel foglalkozunk:

$$A_\varphi^*(x, y; \alpha) + A_\psi^*(x, y; \alpha) = 2A_{id_I}(x, y), \quad x, y \in I.$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Az egyenlet két ismeretlen függvényt és egy paramétert tartalmaz. Az egyenlet megoldásait négyszeres differenciálhatóság mellett adjuk meg.

Ha  $\alpha \neq \frac{1}{2}$ , akkor az előbbi egyenletet rendezve a következőt kapjuk:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} & \varphi^{-1}(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)) + \\ & + \varphi^{-1}((1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y)) + \psi^{-1}(\alpha\psi(x) + (1-\alpha)\psi(y)) + \\ & + \psi^{-1}((1-\alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y)) = 2x + 2y, \quad x, y \in I. \end{aligned}$$

**3.4.3 Lemma.** *Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár kétszer differenciálható megoldása a (3.52) egyenletnek, és  $\varphi'(x) \neq 0$ ,  $\psi'(x) \neq 0$  ha  $x \in I$ . Ekkor létezik olyan  $c \neq 0$  valós szám, hogy*

$$\varphi'(x)\psi'(x) = c \quad x \in I.$$

*Bizonyítás.* Jelöljük  $\frac{\partial^{k+j}[M(x,y)]}{\partial x^k \partial y^j}$ -nal az  $M$  kétváltozós függvény  $x$  szerint  $k$ -dik,  $y$  szerint  $j$ -dik vegyes parciális deriváltjait. Ekkor

$$\frac{\partial [A_\varphi(x, y; \alpha)]}{\partial x} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(A_\varphi(x, y; \alpha))}, \quad \frac{\partial [A_\varphi(x, x; \alpha)]}{\partial x} = \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 [A_\varphi(x, y; \alpha)]}{\partial x^2} = \frac{\alpha\varphi''(x)}{\varphi'(A_\varphi(x, y; \alpha))} - \frac{\alpha\varphi'(x)\varphi''(A_\varphi(x, y; \alpha)) \frac{\partial [A_\varphi(x, y; \alpha)]}{\partial x}}{\varphi'^2(A_\varphi(x, y; \alpha))}$$

$$\frac{\partial^2 [A_\varphi(x, x; \alpha)]}{\partial x^2} = \frac{\alpha(1-\alpha)\varphi''(x)}{\varphi'(x)}, \quad x, y \in I.$$

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

Hasonlóan kiszámíthatóak  $A_\varphi(x, y; 1 - \alpha)$ ,  $A_\psi(x, y; 1 - \alpha)$ ,  $A_\psi(x, y; \alpha)$  parciális deriváltjai is. Az előbbieket felhasználva, a (3.52) egyenletet kétszer deriválva  $x$  szerint, majd az így kapott parciális deriváltat véve az  $(x, x)$  helyen, rendezés után a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\alpha(1 - \alpha) \left( \varphi''(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi''(x) \right)}{\varphi'(x)\psi'(x)} = 0, \quad x \in I.$$

Itt felhasználtuk, hogy a deriváltak nem tűnnek el  $I$ -n. Az előbbi egyenletben szükségképpen  $\varphi''(x)\psi'(x) + \varphi'(x)\psi''(x) = 0$  minden  $I$ -beli  $x$  esetén. Azaz létezik olyan  $c$  valós konstans, hogy  $\varphi'(x)\psi'(x) = c$  minden  $x \in I$ -re.  $c$  nem lehet nulla, hiszen a feltételek szerint a deriváltak nem tűnnek el  $I$ -n. Ezzel a lemma bizonyítása kész.  $\square$

**3.4.4 Tétel.** *Tegyük fel, hogy a  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{CM}(I)^2$  pár négyszer differenciálható megoldása a (3.52) egyenletnek,  $\varphi'(x) \neq 0$ ,  $\psi'(x) \neq 0$ , ha  $x \in I$ . Továbbá,  $\alpha \notin \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14} \right\}$ . Ekkor létezik olyan  $p$  valós szám, hogy*

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

*Bizonyítás.* Az előző lemma szerint létezik olyan  $c \neq 0$  konstans, hogy  $\psi'(x)\varphi'(x) = c$  ha  $x \in I$ . Ezt, a négyszeri differenciálhatóságot és a  $\varphi'(x) \neq 0$  ( $x \in I$ ) feltételt felhasználva  $\psi$  deriváltjai kifejezhetőek  $\varphi$

deriváltjaival a következőképpen:

$$\begin{aligned}
 \psi'(x) &= \frac{c}{\varphi'(x)} \\
 \psi''(x) &= -\frac{c\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} \\
 \psi'''(x) &= \frac{2c\varphi''(x)}{\varphi'^3(x)} - \frac{c\varphi'''(x)}{\varphi'^2(x)} \\
 \psi^{(iv)}(x) &= -\frac{6c\varphi''(x)}{\varphi'^4(x)} + \frac{6c\varphi''(x)\varphi'''(x)}{\varphi'^3(x)} - \frac{c\varphi^{(iv)}(x)}{\varphi'^2(x)}
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Hasonlóan, mint az előző lemma bizonyításában számíthatjuk ki a negyedik parciális deriváltjait az  $A_\varphi(x, y; \alpha)$ ,  $A_\varphi(x, y; 1-\alpha)$ ,  $A_\psi(x, y; \alpha)$ ,  $A_\psi(x, y; 1-\alpha)$  közepeknek az  $x = y$  helyen. Például

$$\begin{aligned}
 &\frac{\varphi'^3(x)}{\alpha(1-\alpha)} \cdot \frac{\partial^4 [A_\varphi(x, x; \alpha)]}{\partial x^4} = \\
 &(1 + \alpha + \alpha^2)\varphi'(x)\varphi^{(iv)}(x) - 2\alpha(2 + 5\alpha)\varphi'(x)\varphi''(x)\varphi'''(x) + \\
 &\quad + 15\alpha^2\varphi'^3(x) - 3\alpha\varphi''^3(x)
 \end{aligned}$$

Deriváljuk a (3.52) egyenletet négyszer  $x$  szerint, majd az így kapott egyenletben végezzük el az  $x = y$  helyettesítést. Ekkor a (3.53) egyenleteket felhasználva egyszerűsítés után a következő differenciálegyen-

### 3. MATKOWSKI-SUTÓ TÍPUSÚ EGYENLETEK

---

letet kapjuk  $\varphi$ -re:

$$(3.54) \quad \frac{4\alpha(1-\alpha)(7\alpha^2-7\alpha+1)(\varphi''^2(x)-\varphi'''(x)\varphi'(x))}{\varphi''^3(x)} = 0, \quad x \in I.$$

A feltételek miatt ebből az következik, hogy vagy  $7\alpha^2 - 7\alpha + 1 = 0$  vagy  $\varphi''^2(x) - \varphi'''(x)\varphi'(x) = 0$ . Az első esetben azt kapjuk, hogy  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}$  vagy  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}$ . A második esetben pedig létezik olyan  $p \in \mathbb{R}$ , hogy  $\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p$ . Ezeket felhasználva pontosan a tétel állítását kapjuk.  $\square$

**3.4.5 Megjegyzés.** Az előbbi tételben kapott megoldások tetszőleges  $\alpha \in ]0, 1[$  paraméter esetén is megoldások (ez visszahelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető), de jelenleg nem tudjuk, hogy léteznek-e más négyszer differenciálható megoldások  $\alpha \in \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14} \right\}$  esetén.

## 4

# Középértékeket tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciája

### 4.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben egy [Dar02]-ben és [DMP06]-ban a szerzők által felvetett problémával foglalkozunk. A témával kapcsolatban jó áttekintést találhatunk [Mak]-ban.

Legyenek  $M_1, M_2$  ugyanazon az  $I$  intervallumon adott szigorú közepek. Milyen további, a közepekre kirótt feltételek esetén egyenlő a következő két függvényegyenlet megoldáshalmaza?

$$(4.1) \quad f(M_1(x, y)) + f(M_2(x, y)) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I,$$

$$(4.2) \quad 2f(M_1 \otimes M_2(x, y)) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I.$$

#### 4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

- 4.1.1 Megjegyzések.** 1. A probléma felvetésében nyilván a közepek szigorúsága helyett feltehető, hogy létezik a Gauss-kompozíciójuk.
2. Itt  $f$ -ről semmilyen regularitást nem tételezünk fel.
3. A (4.2) egyenlet megoldásai mindig megoldásai (4.1)-nek is. Alkalmazzuk ugyanis a (4.2) egyenletet kétszer egymás után, ekkor az (IE') invariancia egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= 2f(M_1 \otimes M_2(x, y)) = \\ &= 2f(M_1 \otimes M_2(M_1(x, y), M_2(x, y))) = \\ &= f(M_1(x, y)) + f(M_2(x, y)). \end{aligned}$$

Másrészt (4.1) folytonos megoldásai mindig megoldásai (4.2)-nek. Ez rögtön látható, ha alkalmazzuk (4.1)-et többször egymás után. Ekkor az un. Gauss-féle iterációs sorozatok jelennek meg  $f$ -ben, ezek határértéke pedig most egyenlő az adott közepek Gauss kompozíciójával. A folytonosságot felhasználva rögtön kapjuk (4.2)-t. A fő probléma tehát a (4.1) függvényegyenlet olyan nem folytonos megoldásainak a megkeresése, melyek nem megoldásai (4.2)-nek, ha léteznek egyáltalán ilyen megoldások.

Az előbbieken bemutatott problémával kapcsolatban, [DMP06]-on kívül, több dolgozat is született: [Bur], [Dar07], [DLL<sup>+</sup>07], [Eba02].

Először összefoglaljuk a [DMP06]-ban és a [DLL<sup>+</sup>07]-ben található eredményeket. A következő alfejezetben részletesen kifejtjük a [Bur]-ban található eredményeket, melyek [Eba02] általánosításai. Végül összefoglaljuk a [Dar07]-ben található eredményeket, melyek alkalmazák a korábbi dolgozatok eredményeit.

[DMP06]-ban a szerzők három jól elkülöníthető esetben vizsgálják a (4.1) és (4.2) egyenletek ekvivalenciáját. Elsőként az egyik közép egyenlő a mértani a másik a számtani középpel. A második esetben a közepek és a Gauss-kompozíciójuk is kvázi-aritmetikai. A harmadik esetben pedig mindkét közép súlyozott aritmetikai, az egyik  $p \in ]0, 1[$ -gyel a másik  $(1 - p)$ -vel. A felsorolt esetekben a következő eredményeket kapták:

**4.1.2 Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles). *Tegyük fel, hogy  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása az*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y),$$

*függvényegyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén. Ekkor  $f$  konstans a pozitív valós számok halmazán.*

A bevezetés elején tett megjegyzések és előbbi tétel miatt, ha  $M_1(x, y) = \frac{x+y}{2}$  és  $M_2(x, y) = \sqrt{xy}$ , akkor (4.1) ekvivalens (4.2)-vel.

**4.1.3 Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles). *Tegyük fel, hogy  $M_1, M_2$  és  $M_1 \otimes M_2$  kvázi aritmetikai közepek az  $I$  intervallumon, ekkor (4.1) és (4.2) megoldáshalmazai megegyeznek.*

**4.1.4 Megjegyzések.** 1. Az előző tétellel kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy a bizonyításból több is kiderül. Nevezetesen,

#### 4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

a tétel feltételei mellett létezik olyan  $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$  és  $p$  valós szám, hogy  $M_1, M_2, M_1 \otimes M_2$  generátorfüggvényei rendre  $\chi_p \circ \varphi, \chi_{-p} \circ \varphi$   $\varphi$ . Legyen  $f$  a (4.1) és a (4.2) függvényegyenletek megoldása. Ekkor a  $h := f \circ \varphi^{-1}$  függvény megoldása a Jensen egyenletnek a  $K := \varphi(I)$  intervallumon. Közismert, hogy a Jensen egyenletnek léteznek nem folytonos megoldásai is (lásd. [Acz66],[Kuc85]). Tehát ebben az esetben a megoldáshalmaz gazdagabb, mint az előző esetben.

2. A bizonyításban alapvető szerepet játszottak a korábban már vázolt eredeti Matkowski-Sutô problémával kapcsolatos eredmények ([DP02a]).

**4.1.5 Tétel** (Daróczy-Maksa-Páles). *Legyen  $M_1(x, y) = px + (1-p)y$ ,  $M_2(x, y) = (1-p)x + py$ , ahol  $p \in ]0, 1[$ . Ha  $p$  transzcendens vagy pedig olyan algebrai szám, hogy  $\beta = \frac{p}{2p-1}$  algebrai konjugáltja  $p$ -nak, akkor (4.1) megoldáshalmaza bővebb, mint (4.2) megoldáshalmaza.*

[DLL<sup>+</sup>07] első részében szükséges és elegendő feltételt adnak az ekvivalencia eldöntésére  $p$  függvényében.

**4.1.6 Tétel** (Daróczy-Lajkó-Lovas-Maksa-Páles). *Legyen  $p \in ]0, 1[$ . Ekkor következő két eset lehetséges:*

- (a) *Ha  $\frac{1-p}{p}$  algebrai és  $-\frac{1-p}{p}$  nem algebrai konjugáltja, akkor a (4.1) egyenlet megoldáshalmaza megegyezik a (4.2) egyenlet megoldáshalmazával.*

(b) Ha  $\frac{1-p}{p}$  transzcendens vagy olyan algebrai szám, hogy  $-\frac{1-p}{p}$  algebrai konjugáltja, akkor a (4.1) egyenlet megoldáshalmaza bővebb a (4.2) egyenlet megoldáshalmazánál.

## 4.2 Saját eredmények a témakörben

Ebben a fejezetben a [Bur]-ban található eredményeket mutatjuk be. A továbbiakban  $I \subset \mathbb{R}_+$ . Vizsgáljuk a (4.1) és (4.2) egyenletek ekvivalenciáját, ha  $M_1$  egyenlő az  $p$ -vel súlyozott számtani középpel,  $M_2$  pedig egyenlő az  $(1-p)$ -vel súlyozott harmónikus középpel. Tehát a következő két egyenlet megoldáshalmazával foglalkozunk:

$$(4.3) \quad f(px + (1-p)y) + f\left(\frac{1}{(1-p)\frac{1}{x} + p\frac{1}{y}}\right) = f(x) + f(y),$$

$$(4.4) \quad 2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y),$$

ahol  $x, y \in I$ .

**4.2.1 Megjegyzések.** 1. Itt felhasználtuk, hogy a szóban forgó közepek Gauss kompozíciója a mértani közép (lásd 2.2.5/3). Ezt könnyen beláthatjuk az (IE') egyenlet segítségével.

2. A problémát ebben a formában Daróczy Zoltán vetette fel.

3. [Eba02]-ben Ebanks bebizonyította, hogy  $p = \frac{1}{2}$  esetén (4.3) megoldáshalmaza megegyezik (5) megoldáshalmazával.

#### 4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

Most bebizonyítjuk, hogy tetszőleges  $p \in ]0, 1[$  esetén is igazolható Ebanks-éhez hasonló eredmény.

**4.2.2 Tétel.** *Az (4.3) függvényegyenlet megoldáshalmaza megegyezik az (4.4) függvényegyenlet megoldáshalmazával.*

*Bizonyítás.* A korábban tett megjegyzéseink miatt elegendő csak azt bebizonyítani, hogy (4.3) minden megoldása (4.4)-nek is megoldása.

Legyen  $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása (4.3)-nak. Ekkor az

$$F(x, y) := f(x) + f(y) - f\left(\frac{xy}{px + (1-p)y}\right), \quad x, y \in I$$

kétváltozós függvény megoldása a következő függvényegyenletnek:

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(z, w) + F\left(\frac{xy}{px + (1-p)y}, \frac{zw}{pz + (1-p)w}\right) = \\ = F(x, z) + F(y, w) + F\left(\frac{xz}{px + (1-p)z}, \frac{yw}{py + (1-p)w}\right), \end{aligned}$$

ahol  $x, y, z, w \in I$ . Ezt,  $F$  definícióját és a (4.3) egyenletet felhasználva a következő függvényegyenletet teljesül  $f$ -re:

$$\begin{aligned} (4.5) \quad & f(px + (1-p)y) + f(pz + (1-p)w) + \\ & + f\left(\frac{pxy}{px + (1-p)y} + \frac{(1-p)zw}{pz + (1-p)w}\right) = \\ & = f(px + (1-p)z) + f(py + (1-p)w) + \\ & + f\left(\frac{pxz}{px + (1-p)z} + \frac{(1-p)yw}{py + (1-p)w}\right) \end{aligned}$$

minden  $x, y, z, w \in I$  esetén.

#### 4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

Ebből az egyenletből ki szeretnénk küszöbölni két változót, ennek érdekében a következő helyettesítéseket kellene végrehajtanunk (4.5)-ben:

$$y = \frac{px^2 - pxz + z^2}{px + (1-p)z}, \quad w = \frac{px^2 - p^2xz + (1-p)^2z^2}{(1-p)(px + (1-p)z)}.$$

Meg kell vizsgálnunk, hogy végrehajtható-e ez a helyettesítés, azaz a fenti képlettel adott  $y$  és  $w$  benne van-e  $I$ -ben?

Legyen

$$\mathcal{D} := \{ (x, x) \mid x \in I \} \subset I^2$$

és

$$\mu, \lambda : I^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mu(x, z) := \frac{px^2 - pxz + z^2}{px + (1-p)z}, \quad \lambda(x, z) := \frac{px^2 - p^2xz + (1-p)^2z^2}{(1-p)(px + (1-p)z)}.$$

Meg kell vizsgálnunk ezen leképezések képhalmazát. Egyszerű számlással belátható, hogy  $\mu(x, x) = \lambda(x, x) = x$ . Így a  $\mu(I^2)$  és a  $\lambda(I^2)$  halmazok nemüresek, sőt  $\mathcal{D} \subset \mu(I^2) \times \lambda(I^2)$ . Most bebizonyítjuk, hogy  $\mu(I^2) \times \lambda(I^2)$  halmaz tartalmazza  $\mathcal{D}$  egy környezetét is  $\mathbb{R}^2$ -ben. Az  $(x, z) \mapsto (\mu(x, z), \lambda(x, z))$  leképezés Jacobi-determinánusa

$$\mathcal{J}(x, z) = \frac{((x-z)^2 p^2 - (x-z)(x-3z)p + z^2)p}{(px + (1-p)z)^2 (p-1)}.$$

Ez az átlón nem tűnik el ugyanis,  $\mathcal{J}(t, t) = \frac{p}{1-p}t > 0$ ,  $t \in I$ . Mivel az  $(x, z) \mapsto \mathcal{J}(x, z)$  leképezés folytonos  $I^2$ -en, létezik olyan környezete  $\mathcal{D}$ -nek ( $\mathcal{D}$ -t tartalmazó nyílt halmaz  $\mathbb{R}^2$ -ben), melyen az imént említett

#### 4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

leképezés pozitív. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\left(\mu(I^2) \times \lambda(I^2)\right)^\circ \neq \emptyset,$$

ahol  $A^\circ$  az  $A$  halmaz belsejét jelöli. Az eddigiegből pedig kapjuk, hogy

$$\Omega := \left(I^2 \cap \left(\mu(I^2) \times \lambda(I^2)\right)\right)^\circ$$

nemüres, nyílt halmaz  $\mathbb{R}^2$ -ben, amelynek részhalmaza  $\mathcal{D}$ .

Végezzük el a (4.5) függvényegyenletben az alábbi helyettesítéseket:

$$y = \frac{px^2 - pxz + z^2}{px + (1-p)z}, \quad w = \frac{px^2 - p^2xz + (1-p)^2z^2}{(1-p)(px + (1-p)z)}, \quad (x, z) \in \Omega.$$

Rendezés után a következő egyenletet kapjuk, hogy minden  $(x, z) \in \Omega$  esetén  $f$ -re fennáll a következő függvényegyenlet:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & 2f \left( \frac{px^2 + (1-p)z^2}{px + (1-p)z} \right) = \\ & = f \left( \frac{p(1+p)x^2 + (1-p+p^2)z^2 - 2p^2xz}{px + (1-p)z} \right) + \\ & + f \left( \frac{(px^2 + (1-p)z^2)^2}{(p(1+p)x^2 + (1-p+p^2)z^2 - 2p^2xz)(px + (1-p)z)} \right). \end{aligned}$$

Legyen most

$$(4.7) \quad A(x, z) := \frac{p(1+p)x^2 + (1-p+p^2)z^2 - 2p^2xz}{px + (1-p)z}$$

és

$$B(x, z) := \frac{(px^2 + (1-p)z^2)^2}{(p(1+p)x^2 + (1-p+p^2)z^2 - 2p^2xz)(px + (1-p)z)}.$$

4. KÖZÉPÉRTÉKEKET TARTALMAZÓ  
FÜGGVÉNYEGYENLETEK EKVIVALENCIÁJA

---

Vizsgáljuk meg a

$$\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{T}(x, z) := (A(x, z), B(x, z))?$$

leképezés képhalmazát.

Hasonlóan, mint korábban kapjuk, hogy  $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}(\Omega)$ .  $\mathcal{T}$  Jacobi determinánsa pedig  $\mathcal{D}$ -n kívül sehol sem nulla, hiszen

$$\mathcal{J}_{\mathcal{T}}(x, z) = \frac{(x - z)(px^2 + (1 - p)z^2)}{((x - z)^2 p^2 + (x - z)(x + z)p + z^2)(px^2 + (1 - p)z^2)},$$

és  $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}(x, z) \neq 0$ , ha  $x \neq z$ . Az előbbiek pedig azt jelentik, hogy  $\mathcal{T}(I^2) \cap I^2 =: \Delta$  nemüres, nyílt halmaz  $\mathbb{R}^2$ -ben, továbbá  $\mathcal{D} \subset \Delta$ .

Most már végrehajthatjuk (4.6)-ban a (4.7)-ben lévő helyettesítések. Ekkor a következő egyenletet kapjuk  $f$ -re:

$$(4.8) \quad 2f(\sqrt{AB}) = f(A) + f(B)$$

ha  $(A, B) \in \Delta$ .

Legyenek most  $x, y \in I$  tetszőlegesek. Elegendően nagy  $n$  természetes szám esetén  $(x_n, y_n) \in \Delta$ , ahol  $x_n$  és  $y_n$  a megfelelő Gauss-féle iterációs sorozatok  $n$ . tagját jelölik. Így (4.3)-t és (4.8)-t felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(px + (1 - p)y) + f\left(\frac{xy}{px + (1 - p)y}\right) = \dots = \\ &= f(\underbrace{px_{n-1} + (1 - p)y_{n-1}}_{x_n}) + f\left(\frac{x_{n-1}y_{n-1}}{\underbrace{px_{n-1} + (1 - p)y_{n-1}}_{y_n}}\right) = \\ &= 2f(\sqrt{x_n y_n}) = 2f(\sqrt{xy}). \end{aligned}$$

Mivel  $x$  és  $y$  tetszőleges volt, a bizonyítás teljes. □

**4.2.3 Megjegyzés.** A bizonyítás utolsó lépésében hasonló módszert használtunk, mint a szerzők [DEP02]-ben.

### 4.3 Egy alkalmazás

A fejezetben találhatóakhoz kapcsolódnak Daróczy Zoltán [Dar07]-ben található eredményei. Vizsgálandó a (4.1) és (4.2) egyenletek ekvivalenciája, azzal a mellékfeltétellel, hogy  $M_1$ ,  $M_2$  és  $M_1 \otimes M_2$  is súlyozott kvázi-aritmetikai közepek.

Legyenek  $M_1, M_2, M_3$  ugyanazon az  $I$  intervallumon értelmezett súlyozott kvázi-aritmetikai közepek úgy, hogy  $M_3$  a Gauss kompozíciója  $M_1$ -nek és  $M_2$ -nek  $I$ -n. Az  $(M_1, M_2, M_3)$  rendezett hármas *kivételes esetnek* nevezzük  $I$ -n, ha létezik azonos generátorfüggvényük és  $0 < p < 1$  valós szám, hogy  $M_1$   $p$ -vel  $M_2$   $(1-p)$ -vel  $M_3$  pedig  $\frac{1}{2}$ -del van súlyozva, ahol  $p$  vagy transzcendens, vagy olyan algebrai szám, hogy  $\frac{1-p}{p}$  és  $-\frac{1-p}{p}$  algebrai konjugáltak.

**4.3.1 Tétel (Daróczy).** *Legyenek  $M_1, M_2, M_3$  ugyanazon az  $I$  intervallumon értelmezett súlyozott kvázi-aritmetikai közepek úgy, hogy  $M_3$  a Gauss kompozíciója  $M_1$ -nek és  $M_2$ -nek  $I$ -n.*

- *Ha az  $(M_1, M_2, M_3)$  rendezett hármas nem kivételes eset, akkor a (4.1) és (4.2) egyenletek ekvivalensek.*
- *Ha az  $(M_1, M_2, M_3)$  rendezett hármas kivételes eset, akkor a (4.1) egyenletnek létezik olyan megoldása, amely (4.2)-nek nem megoldása.*

Az előbbi tételben a "nem kivételes eset" bizonyításában a szerző felhasználja a 4.2.2 Tételt is.

# 5

## Összefoglaló

A disszertációban különböző középértékeket tartalmazó függvényegyenletekkel foglalkozunk. A fontosabb fogalmakat és néhány alapvető tételt tartalmazó fejezet után először Matkowski-Sutô típusú egyenletekkel (továbbiakban MS egyenlet) kapcsolatos problémákat tárgyalunk. Ebben a részben három alfejezet található. Az első alfejezetben egy súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket tartalmazó MS egyenletet oldunk meg folytonos differenciálhatóság feltételezése mellett. Az alfejezet fő eredménye:

**1 Tétel.** *Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  pozitív hosszúságú, nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton, folytonos függvények megoldásai a*

$$\varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)\right)+\psi^{-1}\left((1-\alpha)\psi(x)+\alpha\psi(y)\right) = x+y, \quad x, y \in I$$

*függvényegyenletnek. Ha  $\varphi$  és  $\psi$   $I$ -nek egy pozitív hosszúságú, nyílt intervallumán folytonosan differenciálhatóak, akkor létezik olyan  $p$  valós*

## 5. ÖSSZEFOGLALÓ

---

konstans, hogy

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p},$$

ahol

$$\chi_p(x) := \begin{cases} x & \text{ha } p = 0 \\ e^{px} & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \quad x \in I.$$

A második alfejezetben egy identikus súlyfüggvénnyel súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket tartalmazó egyenletre bizonyítottunk kiterjesztési tételt. Ezzel általánosítjuk Domsta és Matkowski [DM06]-ban található tételét. Az alfejezet fő eredményei:

**2 Tétel.** *Legyenek a  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton, folytonos függvények megoldásai a*

$$(E) \quad \varphi^{-1} \left( \frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x+y} \right) + \psi^{-1} \left( \frac{x\psi(x) + y\psi(y)}{x+y} \right) = x + y$$

*egyenletnek, ahol  $x, y \in I$ . Tegyük fel, hogy létezik olyan  $J \subset I$  nemüres nyílt intervallum, hogy*

$$\varphi(x) \stackrel{J}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \stackrel{J}{\sim} \frac{1}{x},$$

*akkor*

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

**3 Tétel.** *Legyenek  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton, folytonos függvények megoldásai a (E) egyenletnek. Ha  $\varphi$  és  $\psi$  közül legalább az egyik*

négyszer folytonosan differenciálható  $I$ -nek egy nemüres részintervallumán, akkor

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

A harmadik alfejezetben szimmetrizált kvázi-aritmetikai közepeket tartalmazó MS egyenletet oldunk meg négyszeres differenciálhatóságot feltételezve az ismeretlen függvényekről. Az alfejezet fő eredménye:

**4 Tétel.** *Legyenek  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  szigorúan monoton, folytonos függvények megoldásai a*

$$\begin{aligned} & \varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)\right) + \varphi^{-1}\left((1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y)\right) + \\ & \psi^{-1}\left(\alpha\psi(x) + (1-\alpha)\psi(y)\right) + \psi^{-1}\left((1-\alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y)\right) = \\ & \qquad \qquad \qquad 2x + 2y, \quad x, y \in I. \end{aligned}$$

egyenletnek. Tegyük fel, hogy  $\varphi$  és  $\psi$  négyszer differenciálható  $I$ -n,  $\varphi'$  és  $\psi'$  nem tűnik el  $I$ -n. Továbbá,  $\alpha \notin \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}\right\}$ . Ekkor létezik olyan  $p$  valós szám, hogy

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{és} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

A harmadik fejezetben középértékeket és Gauss-kompozíciójukat tartalmazó függvényegyenletek megoldáshalmazainak egyenlőségét vizsgáljuk. Az ismeretlen függvényről semmilyen regularitást nem tételezünk fel ebben a fejezetben. A fejezet fő eredménye:

**5 Tétel.** *Legyen  $0 < p < 1$  és  $I \subset \mathbb{R}_+$ . Ekkor a*

$$f(px + (1-p)y) + f\left(\frac{1}{(1-p)\frac{1}{x} + p\frac{1}{y}}\right) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I,$$

## 5. ÖSSZEFOGLALÓ

---

és a

$$2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y), x, y \in I,$$

*függvényegyenletek megoldáshalmazai megegyeznek.*

# 6

## Summary

In this work we deal with different functional equations involving means. After the first chapter, which contains the most important definitions and some theorems connected with them, we start our investigation three Matkowski-Sutô type functional equations (in the followings MS equation). Accordingly, there are three subsections in this chapter. In the first one we solve an MS equation involving weighted quasi-arithmetic means. We assume the continuous differentiability of the unknown functions. The main result of this subsection:

**1 Theorem.** *Let  $I \subset \mathbb{R}$  be nonempty, open interval and  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictly monotone, continuous functions are solutions of the following functional equation:*

$$\varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x)+(1-\alpha)\varphi(y)\right)+\psi^{-1}\left((1-\alpha)\psi(x)+\alpha\psi(y)\right) = x+y, \quad x, y \in I.$$

*If  $\varphi$  and  $\psi$  are continuously differentiable on a nonempty, open subin-*

## 6. SUMMARY

---

terval of  $I$ , then there exist  $p \in \mathbb{R}$ , such that

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{and} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p},$$

where

$$\chi_p(x) := \begin{cases} x & \text{ha } p = 0 \\ e^{px} & \text{ha } p \neq 0 \end{cases} \quad x \in I.$$

In the second subsection we prove an extension theorem on a functional equation involving weighted quasi-arithmetic means with variable weights. With the aid of this theorem we generalize a theorem of Domsta and Matkowski from [DM06]. Here are the main results of this subsection:

**2 Theorem.** *Let  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictly monotone, continuous functions are solution of the following functional equation*

$$(E) \quad \varphi^{-1} \left( \frac{x\varphi(x) + y\varphi(y)}{x + y} \right) + \psi^{-1} \left( \frac{x\psi(x) + y\psi(y)}{x + y} \right) = x + y,$$

where  $x, y \in I$ . If there exists  $J \subset I$  nonempty, open interval, such that

$$\varphi(x) \stackrel{J}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{and} \quad \psi(x) \stackrel{J}{\sim} \frac{1}{x},$$

then

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{and} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

**3 Theorem.** *Let  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictly monotone, continuous functions are solutions of equation (E). If either  $\varphi$  or  $\psi$  four times continuously differentiable on a nonempty open subinterval of  $I$  then*

$$\varphi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{and} \quad \psi(x) \stackrel{I}{\sim} \frac{1}{x}.$$

In the third subsection we examine an another MS equation, which contains symmetrized quasi-arithmetic means, assuming that the unknown functions are four times differentiable. The main theorem of this subsection is the following:

**4 Theorem.** *Let  $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  strictly monotone, continuous functions are solutions of the next functional equation:*

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}\left(\alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)\right) + \varphi^{-1}\left((1-\alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y)\right) + \\ \psi^{-1}\left(\alpha\psi(x) + (1-\alpha)\psi(y)\right) + \psi^{-1}\left((1-\alpha)\psi(x) + \alpha\psi(y)\right) = \\ 2x + 2y, \quad x, y \in I. \end{aligned}$$

*Assume that  $\varphi$  and  $\psi$  are four times differentiable functions with non-vanishing first derivatives on  $I$ , and  $\alpha \notin \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{14}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{14}\right\}$ . Then there exists a real number  $p$ , such that*

$$\varphi \stackrel{I}{\sim} \chi_p \quad \text{and} \quad \psi \stackrel{I}{\sim} \chi_{-p}.$$

In the last chapter we study the solution sets of two functional equations:

(1)

$$f(px + (1-p)y) + f\left(\frac{1}{(1-p)\frac{1}{x} + p\frac{1}{y}}\right) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I,$$

and

$$(2) \quad 2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y), \quad x, y \in I,$$

where  $0 < p < 1$  and  $I \subset \mathbb{R}_+$ . There is no regularity assumption of the unknown function. Here is the main result of this chapter:

**5 Theorem.** *The solution set of functional equation (1) is equal the solution set of functional equation (2).*

# 7

## Előadások

1. *Extension theorem for a functional equation*, 2004, Síkfőkút, Hungary.
2. *Extension theorem for a functional equation*, The Fifth Katowice- Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2005. 02. 2–5, Bedlewo, Poland.
3. *Functional equation of Domsta and Matkowski*, The First International Student's Conference of Analysis, 2005.02.09–13, Szczyrk, Poland.
4. *How to use Maple to solve functional equations*, 2005, Síkfőkút, Hungary.
5. *Matkowski-Sutôtype functional equations*, 2006. 01. 15–22, Karlsruhe, Germany.
6. *A Matkowski-Sutô type equation*, The Sixth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2006.02. 1–4, Berekfürdő, Hungary.

## 7. ELŐADÁSOK

---

7. *A Matkowski-Sutô type equation*, The Second International Students Conference of Analysis, 2006.02. 4–7, Síkfőkút, Hungary.
8. *On a Matkowski- Sutô type equation*, 6th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, 2006.07. 12–15, Pécs, Hungary.
9. *On the equivalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy*, 11th International Conference on Functional Equations and Inequalities, 2006.09. 17–23, Bedlewo, Poland.
10. *Means and their Gauss composition*, The Third International Students Conference of Analysis, 2007.02. 3–6, Síkfőkút, Hungary.
11. *Matkowski-Sutô equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means*, The Seventh Katowice- Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2007. 01.31–02.3, Bedlewo, Poland.
12. *Equivalence of equations involving means*, The 45<sup>th</sup> International Symposium on Functional Equations, Bielsko-Biała, Poland June 24-July 1, 2007.

# 8

## Publikációk

1. Pál Burai: *On the equivalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy*, közlésre elfogadva (Aequationes Mathematicae).
  - Zoltán Daróczy, *Functional equations involving weighted quasi-arithmetic means*, Annales Univ. Sci. Budapest, Sec.Comp. **27** (2007), 45-55.
2. Pál Burai: *A Matkowski-Sutô type equation*, Publ.Math. Debrecen **70/1-2** (2007), 233–247.
  - Szabolcs Baják and Zsolt Páles, *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted
  - Zita Makó and Zsolt Páles, *On the equality of generalized quasi-arithmetic means*, submitted
3. Pál Burai: *Extension theorem for a functional equation*, Journal of Applied Analysis **12/2** (2006), 293–299.
  - Szabolcs Baják and Zsolt Páles, *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted

## 8. PUBLIKÁCIÓK

---

- Zita Makó and Zsolt Páles, *On the equality of generalized quasi-arithmetic means*, submitted
- 4. Pál Burai and Árpád Szász, *Homogeneity properties of subadditive functions*, Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.) **32** (2005), 189–201.
- 5. Pál Burai and Árpád Szász, *Coincidence theorems for subadditive and superadditive functions*, Carpathian J. Math., **21** (2005), no. 1-2, 21–26.
- 6. Pál Burai and Árpád Szász, *Relationships between homogeneity, subadditivity and convexity properties*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. **16** (2005), 77–87.

# Irodalomjegyzék

- [Acz47] J. Aczél, *The notion of mean values*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19** (1947), no. 23, 83–86.
- [Acz48] ———, *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392–400.
- [Acz66] ———, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966.
- [Acz89] ———, *Basics of functional equations arising from recent applications to economics and to other sciences*, XII Symposium on Operations Research (Passau, 1987), Athenäum/Hain/Hanstein, Königstein, 1989, pp. 3–14.
- [Acz95] ———, *Some recent applications of functional equations to the social and behavioral sciences. Further problems*, Aequationes Math. **50** (1995), no. 1-2, 38–49.
- [AD75] J. Aczél and Z. Daróczy, *On measures of information and their characterizations*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

- [AD89] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.
- [BajPal] Baják, Sz. and Páles, Zs., *Invariance for generalized quasi-arithmetic means*, submitted.
- [Bak94] J. A. Baker, *A functional equation from probability theory*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), no. 3, 767–773.
- [Ben01] W. Benz, *Functional equation problems in geometry*, Aequationes Math. **62** (2001), no. 1-2, 11–17.
- [Ben03] ———, *A common characterization of Euclidean and hyperbolic geometry by functional equations*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), no. 3, 495–510.
- [BorBor87] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1987.
- [Bur06] P. Burai, *Extension theorem for a functional equation*, J. Appl. Anal. **12** (2006), no. 2, 293–299.
- [Bur07] ———, *A Matkowski–Sutô type equation*, Publ. Math. Debrecen **70** (2007), no. 1-2, 233–247.
- [Bur] ———, *On the equicalence of equations involving means and solution to a problem of Daróczy*, accepted, Aequationes Math..
- [CanJuaInd97] Candeal, Juan C. and De Miguel, Juan R. and Induráin, *Functional equations in utility and game theory*, Rev. Un. Mat. Argentina, **40** (1997), no. 3-4, 113–124.

- [Dar70] Z. Daróczy, *On the Shannon measure of information*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **19** (1970), 9–24. MR 40:8497
- [Dar99] ———, *On a class of means of two variables*, Publ. Math. Debrecen **55** (1999), no. 1-2, 177–197.
- [Dar00] ———, *Matkowski-Sutô type problem for conjugate arithmetic means*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 89–100, Dedicated to Professor Zenon Moszner on the occasion of his seventieth birthday.
- [Dar02] ———, *Functional equations involving means and their Gauss-composition*, Report of Meeting: The Second Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, <http://riesz.math.klte.hu/debkat/2002/2002.html>.
- [Dar04] ———, *Quasi-arithmetic elements of a given class of means*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 3-4, 317–322, Dedicated to the memory of Béla Brindza and Jenő Erdős.
- [Dar05] ———, *Functional equations involving means and Gauss compositions of means*, Nonlinear Anal. **63** (2005), no. 5-7, e417–e425.
- [Dar07] Z. Daróczy, *Functional equations involving weighted quasi-arithmetic means*, Annales Univ.Sci. Budapest, Sec. Comp. **27** (2007), 45-55.
- [DEP02] Z. Daróczy B. Ebanks and Zs. Páles, *5. feladat és megoldása, Jelentés a2001. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről*, Mat.Lapok, **2**(2000–2001), 58–60.

(Problem 5. solution, Schwitzer Contest in Higher Mathematics 2001 (in Hungarian)).

- [DH05] Z. Daróczy and G. Hajdu, *On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means*, *Aequationes Math.* **69** (2005), no. 1-2, 58–67.
- [DHN03] Z. Daróczy, G. Hajdu, and C. T. Ng, *An extension theorem for a Matkowski-Sutô problem*, *Colloq. Math.* **95** (2003), no. 2, 153–161.
- [DLL<sup>+</sup>07] Z. Daróczy, K. Lajkó, R. L. Lovas, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Functional equations involving means*, *Acta Math. Hungar.* **116** (2007), no. 1-2, 79–87.
- [DM79] Z. Daróczy and Gy. Maksa, *Nonnegative information functions*, *Analytic function methods in probability theory (Proc. Colloq. Methods of Complex Anal. in the Theory of Probab. and Statist., Kossuth L. Univ. Debrecen, Debrecen, 1977)*, North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 67–78.
- [DM99] ———, *On a problem of Matkowski*, *Colloq. Math.* **82** (1999), no. 1, 117–123.
- [DMP00] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Extension theorems for the Matkowski-Sutô problem*, *Demonstratio Math.* **33** (2000), no. 3, 547–556.
- [DMP04] ———, *On two-variable means with variable weights*, *Aequationes Math.* **67** (2004), no. 1-2, 154–159.
- [DMP06] ———, *Functional equations involving means and their Gauss composition*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **134** (2006), no. 2, 521–530.

- [DP87] Z. Daróczy and Zs. Páles, *Convexity with given infinite weight sequences*, Stochastica **11** (1987), no. 1, 5–12.
- [DP01] ———, *On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic*, Acta Math. Hungar. **90** (2001), no. 4, 271–282.
- [DP02a] ———, *Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 1-2, 157–218.
- [DP02b] ———, *A Matkowski–Sutô type problem for quasi-arithmetic means of order  $\alpha$* , Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Adv. Math. (Dordr.), vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 189–200.
- [DP03a] ———, *Középértékek Gauss-féle kompozíciója és a Matkowski–Sutô probléma megoldása*, Mat. Lapok (1998-99 (2003)), no. 3-4, 1–53.
- [DP03b] ———, *A Matkowski–Sutô-type problem for weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. **22** (2003), 69–81, Dedicated to the 60th birthday of Professor Karl-Heinz Indlekofer.
- [DP03c] ———, *On functional equations involving means*, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), no. 3-4, 363–377, Dedicated to Professor Lajos Tamássy on the occasion of his 80th birthday.
- [DP06a] ———, *On the equality of means*, Report of Meeting: The Sixth Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional

Equations and Inequalities, <http://riesz.math.klte.hu/debkat/2006/2006.html>

- [DP06b] ———, *On symmetrized weighted quasi-arithmetic means*, Report of Meeting: The Forty-third International Symposium on Functional Equations, *Aequationes Math.* **71** (2006), 178–179.
- [DM06] J. Domsta and J. Matkowski, *Invariance of the arithmetic mean with respect to special mean-type mappings*, *Aequationes Math.* **71** (2006), no. 1-2, 70–85.
- [Eba02] B. R. Ebanks, *Solution of some functional equations involving symmetric means*, *Publ. Math. Debrecen* **61** (2002), no. 3-4, 579–588.
- [Eic78] W. Eichhorn, *Functional equations in economics*, *Applied Mathematics and Computation*, vol. 11, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.
- [Ger92] Ger, Roman *On a system of functional equations occurring in projective geometry*, *Rad. Mat.*, **2** (1992), no. 3-4, 189–200.
- [Gin38] C. Gini, *Di una formula compressiva delle medie*, *Metron* **13** (1938), 3–22.
- [Haj02] G. Hajdu, *An extension theorem for the Matkowski–Sutô problem for conjugate arithmetic means*, *Functional Equations — Results and Advances* (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), *Advances in Mathematics*, vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 201–208. MR 2003e:39046

- [Haj03] ———, *Investigations in the theory of functional equations*, PhD értekezés, (PhD Thesis), Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, 2003.
- [HLP34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition).
- [Jár05] A. Járai, *Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables*, Adv. Math. (Springer), vol. 8, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
- [Jar07] J. Jarczyk, *Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen **71** (2007).
- [JM06] J. Jarczyk and J. Matkowski, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Polon. Math. **88** (2006), no. 1, 39–51.
- [Jen05] J.L.W.V. Jensen, *Om konvekse funktioner og uligheder imellem middelværdier*, Nyt. Tidsskrift for Mathematik **16 B** (1905), 49–69.
- [Jen06] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entere les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 179–193.
- [KM96] P. Kahlig and J. Matkowski, *Functional equations involving the logarithmic mean*, Z. Angew. Math. Mech. **76** (1996), no. 7, 385–390.

- [KM97] ———, *On the composition of homogeneous quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), no. 1, 69–85.
- [KM03] ———, *A solution of a problem of Z. Daróczy on mixing-arithmetic means*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), no. 1-2, 49–56.
- [Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.
- [KuzNat70] Kuznecov, S. E. and Natanzon, S. M., *A certain functional equation that has applications in game theory*, Sibirsk. Mat. Ž., **11** (1970), 128–136.
- [Los99] L. Losonczy, *Equality of two variable weighted means: reduction to differential equations*, Aequationes Math. **58** (1999), no. 3, 223–241.
- [Los00] ———, *Equality of Cauchy mean values*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), no. 1-2, 217–230.
- [Los02a] ———, *Comparison and subhomogeneity of integral means*, Math. Inequal. Appl. **5** (2002), no. 4, 609–618.
- [Los02b] ———, *Homogeneous Cauchy mean values*, Functional Equations — Results and Advances (Z. Daróczy and Zs. Páles, eds.), Advances in Mathematics, vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, pp. 209–218.
- [Los03] ———, *Equality of two variable Cauchy mean values*, Aequationes Math. **65** (2003), no. 1-2, 61–81.

- [Los06] ———, *Equality of two variable means revisited*, Aequationes Math. **71** (2006), no. 3, 228–245.
- [MakoPal] Makó, Z. and Páles, Zs., *On the equality of generalized quasi-arithmetic means*, submitted to Publ.Math. Debrecen.
- [Mak87] Gy. Maksa, *The general solution of a functional equation arising in information theory*, Acta Math. Hungar. **49** (1987), no. 1-2, 213–217.
- [Mak] ———, *Közéértékeket tartalmazó függvényegyenletek*, Közgyűlési előadások, 2006 Magyar Tudományos Akadémia, Budapest (to appear).
- [Mat99] J. Matkowski, *Invariant and complementary quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **57** (1999), no. 1, 87–107.
- [Mat04] ———, *Solution of a regularity problem in equality of Cauchy means*, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), no. 3-4, 391–400.
- [Mat06] ———, *On weighted extensions of Cauchy's means*, J. Math. Anal. Appl. **319** (2006), no. 1, 215–227.
- [RaoSha94] Rao, C. Radhakrishna and Shanbhag, D. N. *Choquet-Deny type functional equations with applications to stochastic models*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, (1994).
- [Sch82] I. J. Schoenberg, *Mathematical time exposures*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1982.
- [Sto75] K. B. Stolarsky, *Generalizations of the logarithmic mean*, Math. Mag. **48** (1975), 87–92.

- [Sut14a] O. Sutô, *Studies on some functional equations I*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 1–15.
- [Sut14b] ———, *Studies on some functional equations II*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 82–101.
- [Szé88] L. Székelyhidi, *Stability of some functional equations in economics*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **58** (1988), 169–176 (1990).

**Középértékeket tartalmazó  
függvényegyenletek**

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében  
a matematika tudományágban.

Írta: Burai Pál József okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika doktori programja Analízis alprogramja keretében.

Témavezető: Dr. Daróczy Zoltán

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 200... ..

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 200... ..