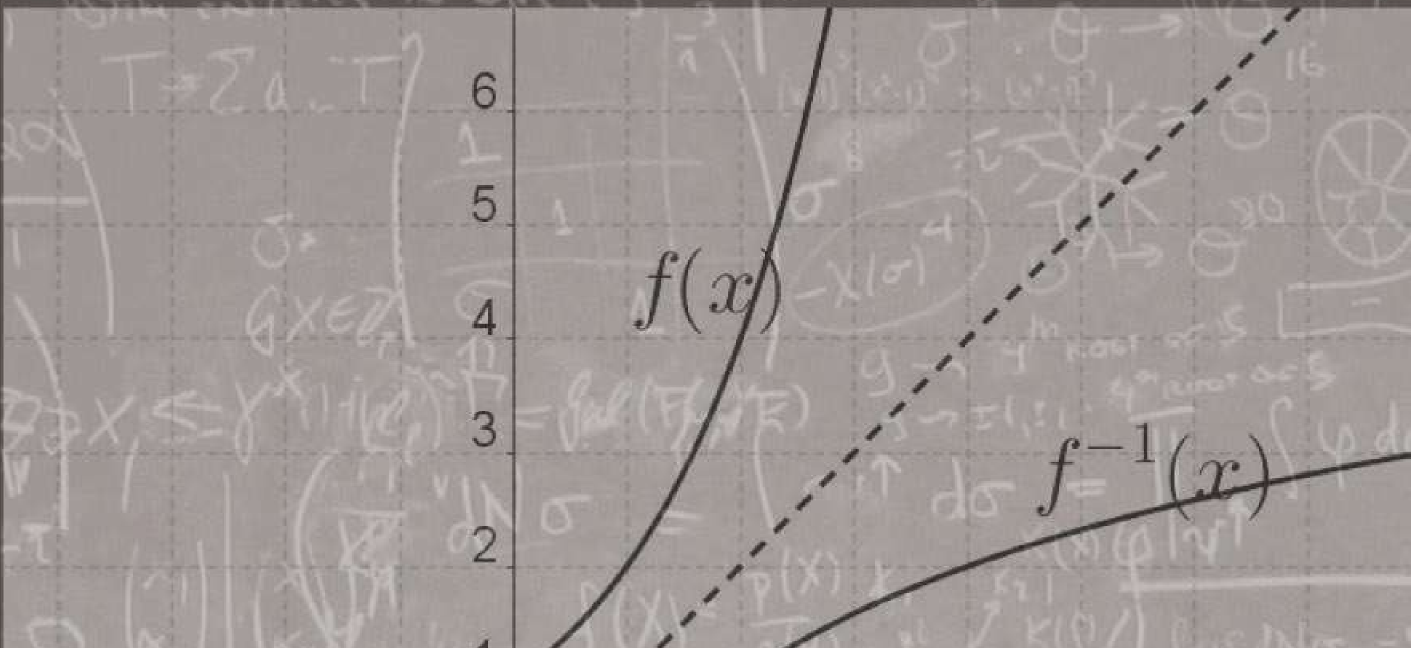
Dr. Kézi Csaba

Bevezetés a magasabb szintű matematikába és alkalmazásaiba



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR

Dr. Kézi Csaba Gábor

BEVEZETÉS A MAGASABB SZINTŰ MATEMATIKÁBA ÉS ALKALMAZÁSAIBA

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2017

Lektorok:

Kocsis Imre Tibor

Tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Nagy Gergő

Tanársegéd
Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Kar,
Matematikai Intézet

ISBN 978 963 318 172 0

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2017-ben.
www.dupress.hu

Előszó

Ez a jegyzet egy többrészes sorozat első kötete, mely elsősorban a Debreceni Egyetem Műszaki Karának „Matematika I." és a „Bevezető matematika" nevű tantárgyaihoz készült oktatási segédanyagként.

A jegyzet a precíz matematikai felépítésen túl számos, a műszaki és gazdasági életben felmerülő probléma megoldására alkalmazható módszert is megmutat. Az egyes fejezetek az elmélet pontos leírása mellett részletesen kidolgozott példafeladatokat tartalmaznak.

Az elméleti tételek jelentős része bizonyításokkal együtt szerepel, illetve bizonyos helyeken a tananyagon túlmutató elméleti tételek is megtalálhatóak, így hasznos lehet a magasabb szintű matematikát tanuló minden hallgató számára, sőt akár matematika szakosok részére is.

A jegyzet gondos átolvasásáért és lektorálásáért és a sok hasznos észrevételért, amelyek beépültek a jegyzetbe köszönettel tartozom a jegyzet lektorainak, Dr. Kocsis Imre tanszékvezető főiskolai tanárnak és Dr. Nagy Gergő tanársegédnek. Köszönettel tartozom Dr. Szíki Gusztáv Áron főiskolai tanárnak, aki hasznos információkkal látott el a jegyzet megírása során. Köszönöm továbbá Kedvesemnek, Józsa Bettina Csillának és Édesanyámnak, akik mindenben mellettem álltak és támogattak a jegyzet megírása során.

2017. május 20.

1. Logikai állítások, műveletek

A matematikai logika alapjait a neves görög tudós filozófus Arisztotelész rakta le „Analitika” című művében, Kr.e. IV. században. Ő már tudatosan kereste azokat a módszereket, amelyeket az emberi gondolkodásnak követnie kell a tudományos kutatások közben.

1.1. **Definíció.** Matematikai értelemben *állítás*nak nevezünk egy olyan kijelentést, melynek igazságértéke egyértelműen eldönthető.

1.2. **Példa.** Az alábbiakban adunk egy-egy példát olyan kijelentésre, amely nem állítás és olyanra, amely állítás.

- Matematikai értelemben nem állítás például az, hogy „Holnap jó műsor lesz a TV-ben” .
- Matematikai értelemben állítás például az, hogy „Ma péntek van”.

Az első kijelentés igazságértékét nem tudjuk eldönteni, míg a második kijelentésről egyértelműen eldönthető, hogy a kijelentés pillanatában az állítás igaz vagy hamis.

1.3. **Definíció.** A „ha p, akkor q” kapcsolatnak megfelelő logikai műveletet *implikáció*nak nevezzük, melynek p az *előtag*ja, q pedig az *utótag*ja. Az implikáció logikai értéke hamis, ha az előtagja igaz, és az utótagja hamis, különben az implikáció igaz. Jele: $p \Rightarrow q$. Ezt úgy is kiolvashatjuk, hogy p implikálja q-t, vagy másképp p-ből következik q. Az implikáció igazságtáblázata:

p	q	$p \Rightarrow q$
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

1.4. **Megjegyzés.** Az előbbi definíció szerint, ha az implikáció előtagja hamis, akkor az implikáció igaz, az utótag igazságértékétől függetlenül. Emiatt például (a logika rendszere szerint) az alábbi állítás igaz: ha a 4 prímszám, akkor minden négyszög téglalap.

1.5. **Megjegyzés.** Az implikáció nem kommutatív és nem is asszociatív, azaz:

- $p \Rightarrow q$ implikációból nem következik a $q \Rightarrow p$ implikáció;
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ igazságértéke nem azonos $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ igazságértékével.

1.6. **Definíció.** Ha „p”-ből következik „q”, akkor azt mondjuk, hogy q *szükséges feltétel*e p-nek, vagy p *elégséges feltétel*e q-nak.

1.7. **Példa.** Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor páros. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a párosság szükséges feltétele a 4-gyel való oszthatóságnak. A feltétel azonban nem elégséges, ugyanis abból, hogy egy szám páros még nem következik az, hogy 4-gyel osztható.

1.8. **Definíció.** A $p \Rightarrow q$ és $q \Rightarrow p$ állításokat egymás *megfordítás*ának mondjuk.

1.9. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a „p” és a „q” állítások *ekvivalens*ek, ha p és q logikai értéke megegyezik, azaz p akkor igaz, ha q igaz, és p akkor hamis, q hamis. Jele: $p \Leftrightarrow q$. Ha p és q ekvivalensek, akkor azt úgy is kiolvashatjuk, hogy p „akkor és csak akkor” teljesül, ha q teljesül, vagy úgy is, hogy p „pontosan akkor” teljesül, ha q teljesül. Az ekvivalencia igazságtáblázata:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	I

1.10. **Megjegyzés.** Az, hogy a p és q állítások ekvivalensek, azt jelenti, hogy $p \Rightarrow q$ és $q \Rightarrow p$ is teljesül.

1.11. **Példa.** Ismert, hogy egy háromszög pontosan akkor derékszögű, ha a befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével. Ez az állítás részletesebben kiírva az alábbi két állítást jelenti:

- ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogóinak négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével;
- ha egy háromszögben a két rövidebb oldal négyzetének összege megegyezik a hosszabbik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű.

1.12. **Definíció.** Az állításokat az alábbi logikai műveletek segítségével összekapcsolhatjuk, így újabb, összetett állításokat kapunk:

- egy p állítás *tagadás*án vagy *negáció*ján azt az állítást értjük, amely igaz, ha p hamis, és hamis, ha p igaz. Jele: $\neg p$. A negáció igazságtáblázata:

p	$\neg p$
I	H
H	I

- a p és q állítások *konjunkció*ján azt az állítást értjük, amely pontosan akkor igaz, ha mindkét állítás igaz. Jele: $p \wedge q$. A konjunkció igazságtáblázata:

p	q	$p \wedge q$
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

- a p és q állítások *diszjunkció*ján azt az állítást értjük, amely pontosan akkor hamis, ha mindkét állítás hamis. Jele: $p \vee q$. A diszjunkció igazságtáblázata:

p	q	$p \vee q$
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

1.13. **Tétel.** Legyenek p, q és r állítások. Ekkor igazak a következők:

(1) $p \vee q = q \vee p$, azaz a $\vee$ kommutatív;

(2) $p \wedge q = q \wedge p$, azaz a $\wedge$ kommutatív;

(3) $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, azaz a $\vee$ asszociatív;

(4) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$, azaz a $\wedge$ asszociatív;

(5) $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$, azaz a $\wedge$ disztributív $\vee$-re nézve;

(6) $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$, azaz a $\vee$ disztributív $\wedge$-re nézve;

(7) $p \vee p = p$, azaz a $\vee$ idempotens;

(8) $p \wedge p = p$, azaz a $\wedge$ idempotens;

(9) $\neg(\neg p) = p$.

Bizonyítás: A megfelelő igazságtáblázatok felírásával adódnak a megfelelő állítások. ■

1.14. **Tétel.** (de Morgan)
Legyenek p és q állítások. Ekkor $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

Bizonyítás: Felírva az igazságtáblázatokat, egyrészt

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
I	I	I	H
I	H	H	I
H	I	H	I
H	H	H	I

másrészt

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
I	I	H	H	H
I	H	H	I	I
H	I	I	H	I
H	H	I	I	I

Tehát a két formula igazságértéke azonos, amivel igazoltuk az állítást. ■

1.15. **Tétel.** (de Morgan)
Legyenek p és q állítások. Ekkor $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

Bizonyítás: Az előző állítással analóg módon igazolható. ■

1.16. **Definíció.** *Nyitott mondat*nak vagy *logikai függvény*nek nevezünk egy olyan állítást, amely változót tartalmaz. Igazságértéke a változó értékétől függ.

1.17. **Megjegyzés.** A logikai függvények fontos szerepet töltenek be az informatikában és a mérnöki tudományokban.

1.18. **Definíció.** Ha $A(x)$ nyitott mondat (x a változó), akkor ebből új állításokat nyerhetünk a $\exists$ *létezik* és a $\forall$ *minden* úgynevezett kvantorok segítségével. Az előbbit *egzisztenciális kvantor*nak, az utóbbit *univerzális* kvantornak nevezzük.

1.19. **Megjegyzés.** A $\forall x A(x)$ formulát úgy olvassuk ki, hogy minden x-re teljesül az A tulajdonság.

1.20. **Megjegyzés.** A $\exists x A(x)$ formulát úgy olvassuk ki, hogy van olyan x (létezik olyan x), amelyre teljesül az A tulajdonság.

1.21. **Megjegyzés.** Bizonyos esetekben fontos, hogy az előbb említett kvantorok tagadását is meg tudjuk adni. Ezek az alábbiak:

$$\neg\big((\forall x)A(x)\big) = (\exists x)\big(\neg A(x)\big)$$

$$\neg\big((\exists x)A(x)\big) = (\forall)\big(\neg A(x)\big).$$

Szavakban megfogalmazva, ha az $A(x)$ állítás minden x-re teljesül, akkor ennek tagadása az, hogy van olyan x, amire az $A(x)$ állítás nem teljesül. Ha van olyan x, amelyre az $A(x)$ teljesül, akkor ennek tagadása az, hogy minden x esetén az $A(x)$ „nem teljesül”.

1.22. **Példa.** Tekintsük az alábbi állítást: „Az osztályban minden fiú szereti a focit”. Ennek a tagadása: „Az osztályban van olyan fiú, aki nem szereti a focit”.

1.23. **Megjegyzés.** Fontos megjegyezni, hogy a

$$(\forall x)(\exists y)A(x, y)$$

és a

$$(\exists x)(\forall y)A(x, y)$$

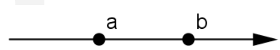
kifejezések nem ugyanazt jelenti. Gondoljunk például arra, hogy ha $A(x, y)$ azt jelenti, hogy x szereti y-t, akkor az első formula jelentése, hogy „minden x esetén van olyan y, hogy x szereti y-t”, míg a második formula jelentése, hogy „van olyan y, aki minden x-et szeret”.

1.24. **Definíció.** *Tautológiá*nak nevezünk egy olyan állítást, amely azonosan igaz.

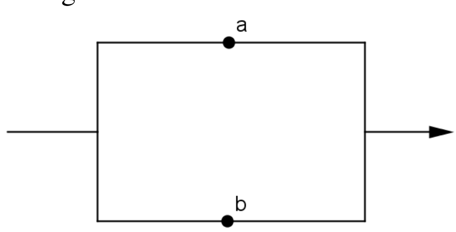
1.25. **Példa.** Ha p egy tetszőleges állítás, akkor $p \vee \neg p$ tautológia, ugyanis

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
I	H	I
H	I	I

1.26. **Logikai áramkörök modellje.** Tekintsünk egy ágat, amiben van két kapcsoló. Ezek legyenek a és b. A soros kapcsolású áramkör pontosan akkor működőképes, ha a és b is be van kapcsolva. Ez alapján a soros kapcsolásnak a konjunkció logikai művelete feleltethető meg.



A párhuzamos kapcsolású áramkör pontosan akkor működőképes, ha a vagy b be van kapcsolva. Ez alapján a párhuzamos kapcsolásnak a diszjunkció logikai művelete feleltethető meg.



1.27. **Példa.** A folyosói világítást a folyosó mindkét végén fel tudjuk kapcsolni és le is tudjuk oltani. Ezt a kapcsoló típust nevezzük *alternatív kapcsoló*nak. Jelentse p azt, hogy az első kapcsoló fel van kapcsolva, q pedig azt, hogy a második kapcsoló fel van kapcsolva. A logika nyelvén felírva a lámpa akkor világít, ha a

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

formula igazságértéke igaz. Jelöljük el $I(p;q)$-val a fenti formulát. Ennek igazságtáblázata:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	I(p;q)
I	I	H	H	H	H	H
I	H	H	I	I	H	I
H	I	I	H	H	I	I
H	H	I	I	H	H	H

Ellenőrző kérdések

1. Ha $p \Rightarrow q$, akkor azt mondjuk, hogy p .... feltétele q-nak.
2. Ha $q \Rightarrow p$, akkor azt mondjuk, hogy q .... feltétele p-nek.
3. Ha $p \Rightarrow q$ és $q \Rightarrow p$, akkor ....
4. Két állítás konjunkciója pontosan akkor igaz, ha ....
5. Két állítás diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha ....
6. Két állítás konjunkciója pontosan akkor hamis, ha ....
7. Két állítás diszjunkciója pontosan akkor hamis, ha ....
8. A de Morgan azonosság szerint $\neg(p \vee q)$ ....
9. A de-Morgan azonosság szerint $\neg(p \wedge q)$ ....

2. Halmazelméleti alapok

2.1. **Megjegyzés.** A halmaz, elem, eleme fogalmakat nem definiáljuk, adottnak tekintjük. A halmaz bizonyos jól meghatározott, különböző objektumok összességét jelenti. A halmazt alkotó objektumok a halmaz elemei. Egy halmazban minden elem csak egyszer fordulhat elő és az elemek sorrendje tetszőleges. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha minden elemről egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy benne van-e a halmazban. A halmazokat latin nagybetűkkel, a halmaz elemeit latin kisbetűkkel jelöljük. Azt, hogy az a elem *eleme* az A halmaznak az $a \in A$ jelöléssel fejezzük ki, míg ennek tagadására az $a \notin A$ jelölést használjuk. Halmazokat megadhatunk az elemeinek felsorolásával, például $A = \{1;\ 2;\ 3\}$ vagy valamilyen tulajdonságokkal, például $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ (kiolvasva: az A halmaz azokat a valós számokat tartalmazza, melyek pozitívak).

2.2. **Példa.** Az
$$A = \{\text{szép lányok}\}$$
matematikai értelemben nem halmaz, hiszen az, hogy „szép” nem mindenki számára jelenti ugyanazt, egy szubjektív fogalom. Emiatt egy adott személyről nem tudjuk megmondani, hogy beletartozik-e, vagy sem abba a meghatározásba, hogy „szép”. A
$$B = \{\text{Magyarország megyéi}\}$$
halmaz, hiszen a halmaz elemeit meg tudjuk adni.

2.3. **Definíció.** *Üreshalmaz*nak nevezzük azt a halmazt, melynek egyetlen eleme sincs. Jele: $\emptyset$.

2.4. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok *egyenlőek*, ha az elemeik ugyanazok. Jele: $A = B$. Ennek tagadására az $A \neq B$ jelölést használjuk.

2.5. **Példa.** Az
$$\begin{aligned} A &= \{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\} \\ B &= \{\text{páratlan számok}\} \\ C &= \{n \leq 9 \,|\, n \text{ pozitív egész szám}\} \end{aligned}$$
halmazok esetén $A = C$, de $B \neq C$.

2.6. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A halmaz *részhalmaz*a a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$. Az A halmaz valódi részhalmaza B-nek, ha A részhalmaza B-nek, de $A \neq B$.

2.7. **Megjegyzés.** Az üreshalmaz minden halmaznak részhalmaza.

2.8. **Példa.** Az $A = \{1;\ 2;\ 3\}$ halmaznak részhalmaza a $B = \{2;\ 3\}$ halmaz, jelölésben $B \subset A$.

2.9. **Példa.** A páros számok részhalmazát alkotják az egész számok halmazának.

2.10. **Definíció.** Egy halmaz összes részhalmazaiból képzett halmazt az adott halmaz *hatványhalmaz*ának nevezzük. Jele: $\mathcal{P}(A)$.

2.11. **Példa.** Az $A = \{1;\ 2\}$ halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{1;\ 2\}\big\}$$

halmaz.

2.12. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az A és B hamlazok *diszjunkt*ak, ha nincs közös elemük.

2.13. **Példa.** Az $A = \{1;\ 2\}$ és a $B = \{3;\ 4\}$ halmazok diszjunktak.

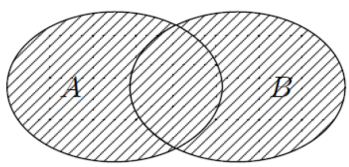
2.14. **Tétel.** Az A és B halmazok pontosan akkor egyenlőek, ha egymásnak kölcsönösen részhalmazai, azaz ha $A \subset B$ és $B \subset A$ teljesül.

Bizonyítás: Ha $A = B$, akkor nyilván $A \subset B$ és $B \subset A$ is teljesül. Megfordítva, ha $A \subset B$, akkor A minden eleme B-nek is eleme; másrészt ha $B \subset A$, akkor B minden eleme A-nak is eleme, így $A = B$. ■

2.15. **Definíció.** (műveletek halmazokkal) Legyen $H \neq \emptyset$ (alaphalmaz) és $A, B, C \subset H$.

(1) Az A és B halmazok *unió*ján azt az $A \cup B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei, azaz

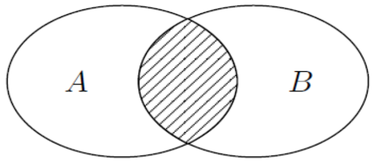
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy x} \in \text{B}\}.$$



$A \cup B$

(2) Az A és B halmazok *metszet*én azt az $A \cap B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei mindkét halmaznak elemei, azaz

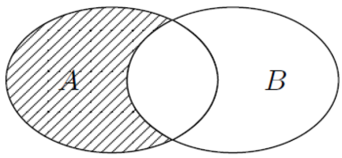
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$



$A \cap B$

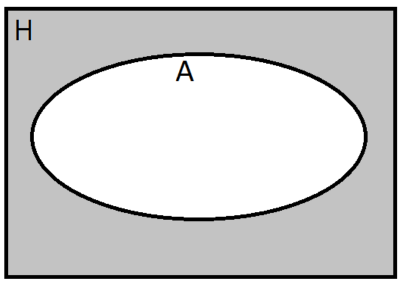
(3) Az A *különbség* B halmazon azt az $A \setminus B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei A-nak elemi, de B-nek nem elemei, azaz

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$



$A \setminus B$

(4) Az A halmaz *komplementer*én azt az A^c halmazt értjük, melynek elemei az A halmaznak nem elemei, de az alaphalmaznak elemei.



2.16. **Példa.** Tekintsük a

$$H = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$$

alaphalmazt és az

$$A = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\},\ B = \{2;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$$

halmazokat. Ekkor A és B uniója:

$$A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\},$$

A és B metszete:

$$A \cap B = \{4;\ 5\},$$

az $A \setminus B$ halmaz:

$$A \setminus B = \{1;\ 3;\ 6\},$$

az A halmaz komplementere:

$$A^c = \{2;\ 7;\ 8;\ 9\}.$$

2.17. **Tétel.** (a halmazműveletek tulajdonságai)
Legyenek A, B, C egy H alaphalmaz részhalmazai. Ekkor igazak a következő állítások:

(1) $A \cup B = B \cup A$, azaz az unió kommutatív;

(2) $A \cap B = B \cap A$, azaz a metszet kommutatív;

(3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, azaz az unió asszociatív;

(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, azaz a metszet asszociatív;

(5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, azaz a metszet disztributív az unióra nézve;

(6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, azaz az unió disztributív a metszetre nézve;

(7) $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$, azaz az unió és a metszet idempotens;

(8) $A \cup A^c = U, \quad A \cap A^c = \emptyset$;

(9) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, azaz teljesülnek az úgynevezett de-Morgan azonosságok.

Bizonyítás:

(1) Ha $x \in (A \cup B)$ tetszőleges, akkor $x \in A$ vagy $x \in B$, azaz $x \in B$ vagy $x \in A$, így azt kapjuk, hogy $x \in (B \cup A)$, amiből következik, hogy $(A \cup B) \subset (B \cup A)$.
Ha $x \in (B \cup A)$ tetszőleges, akkor $x \in B$ vagy $x \in A$, azaz $x \in A$ vagy $x \in B$, így azt kapjuk, hogy $x \in (A \cup B)$, amiből következik, hogy $(B \cup A) \subset (A \cup B)$.
Tehát $A \cup B$ és $B \cup A$ egymásnak kölcsönös részhalmazai, így a halmazok egyenlőek.

(2) Ha $x \in (A \cap B)$ tetszőleges, akkor $x \in A$ vagy $x \in B$, azaz $x \in B$ vagy $x \in A$, így azt kapjuk, hogy $x \in (B \cap A)$, amiből következik, hogy $(A \cap B) \subset (B \cap A)$.
Ha $x \in (B \cap A)$ tetszőleges, akkor $x \in B$ vagy $x \in A$, azaz $x \in A$ vagy $x \in B$, így azt kapjuk, hogy $x \in (A \cap B)$, amiből következik, hogy $(B \cap A) \subset (A \cap B)$.
Tehát $A \cap B$ és $B \cap A$ egymásnak kölcsönös részhalmazai, így a halmazok egyenlőek.

A többi állítás is hasonlóan igazolható. ∎

2.18. **Definíció.** Az $\mathbb{N} = \{1; 2; 3 \ldots\}$ halmazt a *természetes számok halmazának* nevezzük.

2.19. **Megjegyzés.** A természetes számok halmazából az összeadás és a szorzás művelete nem vezet ki, azaz két természetes szám összege, illetve két természetes szám szorzata is természetes szám.

2.20. **Megjegyzés.** Legyen $A(n)$ egy n természetes számtól függő állítás. Ha bebizonyítjuk, hogy

- $A(1)$ igaz és
- abból, hogy feltételezzük, hogy $A(n)$ igaz valamely n-re következik, hogy $A(n+1)$ is igaz,

akkor az állítás minden természetes számra igaz. Ezt a bizonyítási módszert *teljes indukció*nak nevezzük. A teljes indukció nemcsak $n = 1$-gyel, hanem tetszőleges $n_0 \in \mathbb{N}$ számmal is kezdődhet.

2.21. **Példa.** Bebizonyítjuk, hogy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Először $n = 1$-re megvizsgáljuk, hogy teljesül-e az egyenlőség: a bal oldal 1, a jobb oldal

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Tehát a bal oldalon és a jobb oldalon ugyanazt kaptuk, így $n = 1$-re igaz az egyenlőség.
Tegyük föl, hogy n-re igaz az állítás, azaz

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, és bizonyítsuk be $n+1$-re az összefüggést! A bizonyítandó egyenlőség:

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot\big((n+1)+1\big)}{2}.$$

Felhasználva, hogy n-re igaz az állítás, majd a jobb oldalon elvégezve az összevonást, beszorozva mindkét oldalt 2-vel, ezután $n+1$-el osztva az egyenlet mindkét oldalát (ami megtehető, mivel $n+1\neq 0$), azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)&=\frac{(n+1)\cdot\big((n+1)+1\big)}{2}\\ \frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)&=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\\ n\cdot(n+1)+2\cdot(n+1)&=(n+1)\cdot(n+2)\\ n+2&=n+2.\end{aligned}$$

Azonosságot kaptunk, amivel az állítást igazoltuk.
Megjegyezzük, hogy az összefüggés teljes indukció nélkül is belátható lett volna, például úgy, hogy a bal oldalon szereplő összeg egy számtani sorozat első n tagjának összege úgy, hogy

$$a_1=1,\ d=1,\ a_n=n.$$

A jól ismert összegzési képlet felhasználásval azt kapjuk, hogy

$$S_n=\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_n)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

A feladat történeti érdekessége Carl Friedrich Gauss német matematikushoz (akinek a nevével a későbbiekben még többször is fogunk találkozni) kötődik. Gauss általános iskolai tanára, J. G. Büttner a diákjait azzal akarta lefoglalni, hogy 1-től 100-ig adják össze az egész számokat. A fiatal Gauss mindenki megdöbbenésére másodpercek alatt megadta a helyes megoldást. Észrevette, hogy az ellenkező „végeken" lévő számok párokba állításával azonos összegeket kap:

$$1+100=101,\ 2+99=101,\ 3+98=101,\ \text{stb.},$$

ami összesen $50\cdot 101=5050$-et eredményez. Ha az összeg tagjait fordított sorrendben az eredeti összeg alá írjuk, akkor még inkább látszik a gondolatmenet:

$$\begin{array}{l}1\ +\ \ \ 2+\ldots+99\ \ +100\\ \underline{100+\ \ 99+\ldots+2\ \ \ +\ \ 1}\\ 101+101+\ldots+101+101\end{array}$$

A 101-et 100-szor adtuk össze, így az $101 \cdot 100$, de minden tagot duplán számoltunk, így a keresett összeg

$$\frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

2.22. **Példa.** Bebizonyítjuk, hogy 2 osztója $n^2 + n$-nek minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra. Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz, hiszen 2 osztója a 2-nek. Tegyük föl, hogy n-re igaz az állítás, azaz 2 osztója $n^2 + n$-nek. Be fogjuk látni, hogy 2 osztója $(n+1)^2 + (n+1)$-nek is. Mivel

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2 = \\ = n^2 + n + 2 \cdot (n+1),$$

továbbá a feltevésünk szerint a 2 osztója az $n^2 + n$-nek, másrészt a 2 nyilván osztója $2 \cdot (n+1)$-nek, ezért 2 osztója ezek összegének is, amivel igazoltuk az állítást.
Megjegyezzük, hogy az előbbi állítás teljes indukció nélkül is igazolható, ugyanis $n \cdot (n+1)$ egy páros és egy páratlan szám szorzata, ami mindig páros, így osztható 2-vel.

2.23. **Definíció.** Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor n *faktoriális*a az első n pozitív egész szám szorzata. Jele: $n!$. Definíció szerint $0! = 1$.

2.24. **Példa.** Kiszámoljuk az 5! értékét:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2.25. **Definíció.** Ha $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $n \geq k$, akkor az

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

módon definiált szimbólumot *binomiális együttható*nak nevezzük, és „n alatt a k"-nak olvassuk.

2.26. **Példa.** Kiszámoljuk az $\binom{5}{2}$ értékét:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} = \frac{20}{2} = 10.$$

2.27. **Tétel.** Ha $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $n \geq k$, akkor az

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Bizonyítás: Ha $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $n \geq k$, akkor

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

másrészt

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot \big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)\cdot!k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

2.28. **Tétel.** Ha $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ és $n \geq k$, akkor

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Bizonyítás: Mivel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

másrészt

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot \big(n-(k+1)\big)!},$$

ezért

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot \big(n-(k+1)\big)!} = \\
&= \frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot \big(k+1+(n-k)\big)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\
&= \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

A következő tételben két tag összegének (különbségének) n-edik hatványának kifejtésére (átírására) adunk meg egy formulát.

2.29. **Tétel.** (binomiális tétel)
Ha $n \in \mathbb{N}$, és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \\
&= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n.
\end{aligned}
$$

Bizonyítás: Az állítás $n = 1$ esetén nyilván igaz, hiszen ekkor $a + b = a + b$. Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás, és bizonyítsuk be $n + 1$-re. Első lépésben $(a + b)^{n+1}$-et felírjuk úgy, hogy alkalmazni tudjuk a feltevésünket, azaz

$$(a+b)^n \cdot (a+b)$$

alakban, ezután már alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, majd felbontjuk a zárójelet, a tagokat megfelelő módon csoportosítjuk, és alkalmazzuk az

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

összefüggést:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) = (a+b)^n \cdot a + (a+b)^n \cdot b = \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \\
&+ \binom{n}{n} a \cdot b^n + \binom{n}{0} a^n \cdot b + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^3 + \\
&\ldots + \binom{n}{n} b^{n+1} = a^{n+1} + \\
&+ \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) \cdot a^n \cdot b + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right) \cdot a^{n-1} \cdot b^2 + \\
&+ \ldots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right) \cdot a \cdot b^n + b^{n+1} = \\
&= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n \cdot b + \binom{n+1}{2} a^{n-1} \cdot b^2 + \ldots + \\
&+ \binom{n+1}{n} a \cdot b^n + b^{n+1} = (a+b)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ∎

2.30. **Példa.** Kiszámoljuk az $(a-b)^3$ kifejezést binomiális tétel segítségével:

$$(a-b)^3 = \binom{3}{0}a^3(-b)^0 + \binom{3}{1}a^2(-b)^1 + \binom{3}{2}a(-b)^2 + \binom{3}{3}(-b)^3 =$$
$$= a^3 - \frac{3!}{1!\cdot 2!}a^2b + \frac{3!}{2!1!}ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

2.31. **Következmény.** Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Bizonyítás: A binomiális tételt alkalmazva

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{0}1^{n-1} \cdot + \binom{n}{0}1^{n-2}\cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{n}1^n =$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

2.32. **Következmény.** Egy n elemű véges halmaz összes részhalmazának száma 2^n. Másképp fogalmazva n elemű véges halmaz hatványhalmazának számossága 2^n.

Bizonyítás: Egy n elemű halmaz 0, 1, 2, stb. n elemű részhalmazainak száma rendre $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, stb. $\binom{n}{n}$, így az összes részhalmazok száma ezek összege, ami az előző következmény miatt éppen 2^n-el egyenlő. ■

2.33. **Példa.** Egy 5 elemű halmaznak $2^5 = 32$ részhalmaza van.

2.34. **Definíció.** A

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

halmazt az *egész számok halmazá*nak nevezzük.

2.35. **Megjegyzés.** Az egész számok halmazából az összeadás, a kivonás és a szorzás művelete nem vezet ki, azaz két egész szám összege, különbsége, illetve két egész szám szorzata is egész szám.

2.36. **Megjegyzés.** Az egész számok halmazának részhalmaza a természetes számok halmaza.

2.37. **Definíció.** *Racionális számok halmazá*nak nevezzük azt a halmazt, melynek elemei előállnak két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}$.

2.38. **Megjegyzés.** A racionális számok halmazából az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás művelete nem vezet ki, azaz két racionális szám összege, különbsége, szorzata és két nullától különböző racionális szám hányadosa is racionális szám.

2.39. **Megjegyzés.** A racionális számok halmaza részhalmazként tartalmazza az egész számok és a természetes számok halmazát, pontosabban $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.40. **Megjegyzés.** Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszosan ismétlődő végtelen tizedes tört alakban.

2.41. **Példa.** Például

$$0,1234 = \frac{1234}{10000} = \frac{617}{5000}.$$

Például

$$1,\dot{3} = \frac{4}{3},$$

ugyanis

$$x = 1,\dot{3}$$

esetén $10x = 13,\dot{3}$, majd kivonva egymásból az előbbi két egyenletet $9x = 12$ adódik, amiből az x-et kifejezve, majd a kapott törtet egyszerűsítve

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

adódik.

2.42. **Definíció.** *Valós számok halmazá*nak nevezzük a számegyenes pontjainak megfeleltethető számhalmazt. Jelölés: $\mathbb{R}$.

2.43. **Megjegyzés.** Valójában a fenti definíció csak egy szemléletes „beazonosítás”, a valós számok halmazának intuitív fogalmára építő megfogalmazás. A valós számok halmazának precíz definíciója a testaxiómkra, rendezési axiómákra és a teljességi axiómára épül, amit itt az egyszerűség kedvéért tulajdonságokként mutatunk be.

2.44. **Definíció.** *Irracionális számok halmazá*nak nevezzük a racionális számok halmazának a valós számok halmazára vonatkozó komplementerét, azaz azokat a valós számokat, amelyek nem állnak elő két egész szám hányadosaként. Jele: $\mathbb{Q}^\star$.

2.45. **Példa.** A $\sqrt{2}$ szám irracionális. Ugyanis tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ekkor léteznek olyan p és q egész számok, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

továbbá feltehető, hogy p-nek és q-nak nincs közös osztója, azaz a tört tovább már nem egyszerűsíthető. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd beszorozva q^2-el azt kapjuk, hogy

$$2q^2 = p^2.$$

Ez azt jelenti, hogy p^2 osztható 2-vel. Viszont egy páratlan szám négyzete is páratlan. Ebből következik, hogy p osztható 2-vel, azaz van olyan k egész szám, hogy $p = 2k$, vagyis $p^2 = 4k^2$. Ugyanakkor $p^2 = 2q^2$, tehát $4k^2 = 2q^2$, vagyis $2k^2 = q^2$. Azaz q^2 páros, de akkor q is páros, azaz osztható 2-val, ami ellenetmond annak, hogy p-nek is q-nak nincs közös osztója.

2.46. **Megjegyzés.** A valós számok halmazára teljesül, hogy

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^\star.$$

2.47. **Tétel.** A racionális számok halmaza mindenütt sűrű a valós számok halmazában, azaz bármely két racionális szám között van racionális szám.

2.48. **Megjegyzés.** A valós számok halmazából nem vezet ki a négy alapművelet, azaz az összeadás, a kívonás, a szorzás, az osztás (nullától különböző számok esetén), valamint a nem-negatív számokból való négyzetgyökvonás.

2.49. **Megjegyzés.** (testaxiómák) Az összeadás és a szorzás tulajdonságai a valós számok halmazán:

- minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x+y = y+x$, azaz az összeadás kommutatív;
- minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x+y)+z = x+(y+z)$, azaz az összeadás asszociatív;
- létezik $0 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x + 0 = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz létezik zéruselem;
- minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x+y = 0$, azaz minden valós számnak van additív inverze;
- minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \cdot y = y \cdot x$, azaz az szorzás kommutatív;
- minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, azaz a szorzás asszociatív;
- létezik $1 \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \cdot 1 = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, azaz létezik egységelem;
- minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén létezik $y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $x \cdot y = 1$, azaz minden nullától különböző valós számnak van multiplikatív inverze;

- minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, azaz a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

2.50. **Megjegyzés.** (rendezési axiómák) A valós számok halmazán értelmezett $\leq$ reláció teljesíti az alábbi tulajdonságokat

- $x \leq x$
- ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$
- ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$
- minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$ teljesül
- ha $x \leq y$, akkor minden $z \in \mathbb{R}$ esetén $x + z \leq y + z$
- ha $x \leq y$, akkor minden $z \geq 0$ esetén $x \cdot z \leq y \cdot z$.

2.51. **Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *felülről korlátos*, ha létezik olyan K valós szám, amely nagyobb vagy egyenlő minden A-beli elemnél. Ekkor a K-t az A halmaz egy *felső korlát*jának mondjuk.

2.52. **Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *alulról korlátos*, ha létezik olyan k valós szám, amely kisebb vagy egyenlő minden A-beli elemnél. Ekkor a k-t az A halmaz egy *alsó korlát*jának mondjuk.

2.53. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

2.54. **Példa.** Az

$$A = \left\{ 3 + \frac{2}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 5; 4; 3 + \frac{2}{3}; 3 + \frac{1}{2} \ldots \right\}$$

halmaz

- alulról korlátos, mert minden $x \in A$ esetén $x \leq 5$;
- felülről korlátos, mert minden $x \in A$ esetén $x > 3$;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

2.55. **Példa.** Az

$$A = \left\{ (-2)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \{-2; 4; -8; 16; \ldots\}$$

halmaz

- alulról nem korlátos;
- felülről nem korlátos;
- nem korlátos.

2.56. **Példa.** Az
$$A = \left\{ 2^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \{2; 4; 8; 16; \ldots\}$$
halmaz

- alulról korlátos, egy alsó korlátja a 2;
- felülről nem korlátos;
- nem korlátos.

2.57. **Definíció.** Ha az A halmaz felülről korlátos, akkor az A felső korlátainak legkisebbikét az A *pontos felső korlát*jának vagy *szuprémum*ának nevezzük. Jele: $\sup A$. Ha a pontos felső korlát eleme is a halmaznak, azaz $\sup A \in A$, akkor azt *maximum*nak mondjuk. Jele $\max A$.

2.58. **Definíció.** Ha az A halmaz alulról korlátos, akkor az A alsó korlátainak legnagyobbikát az A *pontos alsó korlát*jának vagy *infimum*ának nevezzük. Jele: $\inf A$. Ha a pontos alsó korlát eleme is a halmaznak, azaz $\inf A \in A$, akkor azt *minimum*nak mondjuk. Jele $\min A$.

2.59. **Példa.** Az
$$A = \left\{ 1 + \frac{4}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 5; 3; 1 + \frac{4}{3}; 2 \ldots \right\}$$
halmaz

- infimuma: $\inf A = 1$;
- szuprémuma: $\sup A = 5$;
- minimuma: nem létezik, mert $1 \notin A$;
- maximuma: $\max A = 5$;
- alulról korlátos;
- felülről korlátos;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

2.60. **Definíció.** Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám abszolútértéke:
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ -x, \text{ ha } x < 0 \end{cases} .$$

2.61. **Példa.** A fenti definíció szerint például $|-5| = 5$.

2.62. **Tétel.** Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha létezik $K \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy $|x| \leq K$ minden $x \in A$ esetén.

Bizonyítás:

- Ha A korlátos, akkor alulról is és felülről is korlátos, így léteznek olyan k_1 és k_2 valós számok, hogy $x \geq k_1$, illetve $x \leq k_2$ minden $x \in A$ esetén, azaz $k_1 \leq x \leq k_2$. Legyen
$$K = \max\{|k_1|; |k_2|\}.$$
Ekkor $-K < x < K$, azaz $|x| \leq K$.
- Ha $|x| \leq K$, akkor $-K \leq x \leq K$, azaz A minden A-beli elem nagyobb, vagy egyenlő mint $-K$, tehát A alulról korlátos és minden A-beli elem kisebb vagy egyenlő, mint K, azaz A felülről korlátos, így A korlátos.

Ezzel az állítást igazoltuk. ■

2.63. **Definíció.** *Intervallumok*nak nevezzük a valós számok halmazának olyan, legalább kételemű részhalmazait, amelyeknek bármely két elemükkel együtt az azok között elhelyezkedő összes valós szám is elemük.

$$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \quad \text{(zárt intervallum)}$$

$$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$$

$$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$$

$$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} \quad \text{nyílt intervallum.}$$

2.64. **Megjegyzés.** Intervallumok az alábbiak is

$$]a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$$

$$[a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$$

$$]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$$

$$]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$$

2.65. **Példa.** Az $A = [1;8[$ intervallum esetén

- $\inf A = 1$;

- $\sup A = 8$;
- $\min A = 1$, mert az infimum eleme az A halmaznak;
- $\max A$ nem létezik, mert a szuprémum nem eleme a halmaznak;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

2.66. **Példa.** Az $A = [1; \infty[$ intervallum
- $\inf A = 1$;
- $\sup A$ nem létezik, mert a halmaz felülről nem korlátos;
- $\min A = 1$, mert az infimum eleme az A halmaznak;
- $\max A$ nem létezik;
- alulról korlátos;
- felülről nem korlátos;
- nem korlátos, mert felülről nem korlátos.

2.67. **Megjegyzés.** (teljességi axióma) A valós számok halmazán minden nem üres, felülről korlátos részhalmaznak van pontos felső korlátja.

2.68. **Következmény.** A pontos felső korlát fogalma nem vezet ki a valós számok halmazából, ellentétben a racionális számok halmazával. Például az

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

halmaznak a racionális számok halmazán nincs pontos felső korlátja.

2.69. **Definíció.** Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám $r > 0$ sugarú *környezet*én a

$$G(x; r) = \{h \in \mathbb{R} \mid |x - h| < r\}$$

halmazt értjük.

2.70. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy ha $|x - h| < r$, akkor $|h - x| < r$, ami azt jelenti, hogy $-r < h - x < r$, azaz $x - r < h < x + r$, így az x valós szám r sugarú környezete az $]x - r; x + r[$ intervallum.

2.71. **Definíció.** Az $x \in A$ szám az A halmaz belső pontja, ha x-nek van olyan környezete, amely teljesen benne van az A halmazban, azaz létezik $r > 0$ úgy, hogy $G(x; r) \subset A$. Egy halmaz összes belső pontjainak halmazát A°-el jelöljük.

2.72. **Példa.** Az $A =]1; 5]$ halmaznak 5 nem belső pontja. Az A halmaz összes belső pontjainak halmaza $]1; 5[$.

2.73. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy halmaz *nyílt*, ha minden pontja belső pont.

2.74. **Példa.** Az $A =]1;2[$ halmaz nyílt; de a $B =]1;5]$ halmaz nem nyílt, mert az 5 nem belső pontja.

2.75. **Definíció.** Egy halmaz *zárt*, ha a komplementere nyílt.

2.76. **Példa.** Az $A = [1;2]$ halmaz komplementere $]-\infty;1[\cup]2;\infty[$, ami nyílt, így az A halmaz zárt.

Léteznek olyan halmazok, amelyek nem nyíltak és nem is zártak, továbbá olyanok is, amelyek egyaránt nyíltak és zártak is. A következő példában ilyen típusú halmazokat adunk meg.

2.77. **Példa.** Létezik olyan halmaz, amely nem nyílt és nem is zárt, továbbá olyan is, amely egyidejűleg nyílt is és zárt is.

- Az $A = [1;2[$ halmaz nem is nyílt, ugyanis az 1 nem belső pontja. Az A halmaz nem is zárt, mert a halmaz komplementere $]-\infty;1[\cup[2;\infty[$, ami nem nyílt, hiszen a 2 nem belső pontja.
- Az $\emptyset$ egyidejüleg nyílt és zárt is. Nyílt, mert minden pontja belső pont. Zárt, mert a komplemenetre $\mathbb{R}$, ami nyílt.

2.78. **Definíció.** Az $x \in A$ valós szám az A halmaz *határpont*ja, ha x bármely környezetében van A-beli és $\mathbb{R} \setminus A$-beli elem. Az A halmaz összes határpontjaiból képzett halmazt ∂A-val jelöljük.

2.79. **Példa.** Az $A = [1;2[$ halmaz határpontjai 1 és 2.

2.80. **Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak az $x \in \mathbb{R}$ szám *torlódási pont*ja, ha x bármely környezetében van x-től különböző A-beli elem. Az A halmaz összes torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük.

2.81. **Példa.** Az $A =]1;2]$ halmaz összes torlódási pontja $[1;2]$.

2.82. **Megjegyzés.** A torlódási pont nem feltétlenül eleme a halmaznak.

2.83. **Megjegyzés.** Minden belső pont torlódási pont.

2.84. **Definíció.** *Izolált* pontoknak nevezzük azokat a halmazbeli elemeket, amelyek nem torlódási pontok.

2.85. **Példa.** Az $A = [1;3] \cup \{5\}$ halmaznak az 5 izolált pontja.

2.86. **Definíció.** Egy halmaz elemeinek a számát a halmaz *számosság*ának nevezzük. Jele:$|A|$. Egy halmazt *véges*nek nevezünk, ha elemeinek a száma véges.

Ellenőrző kérdések

1. Két halmaz unióján azt a halmazt értjük, melynek elemei ....
2. Két halmaz metszetén azt a halmazt értjük, melynek elemei ....
3. Az $A \setminus B$ halmazon azt a halmazt értjük, melynek elemei ....
4. Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha ....
5. Egy 5-elemű halmaz összes részhalmazinak száma: ....
6. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor ....
7. Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor $A \cup (B \cap C) =$ ....
8. Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor $A \cap (B \cup C) =$ ....
9. A természetes számok halmazából az .... műveletek nem vezetnek ki.
10. Az egész számok halmazából az .... műveletek nem vezetnek ki.
11. A racionális számok halmazából az .... műveletek nem vezetnek ki.
12. A racionális és irracionális számok halmazának uniója a ....
13. A de-Morgan azonosság szerint $(A \cup B)^c =$................
14. A de-Morgan azonosság szerint $(A \cap B)^c =$................

3. Relációk

3.1. **Definíció.** Legyenek A és B halmazok. Ekkor az $(a;b)$ szimbolumot *rendezett elempár*nak nevezzük, ha $a \in A$ és $b \in B$, továbbá az $(a;b) = (c;d)$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = c$ és $b = d$.

3.2. **Definíció.** Az A és B halmaz *Descartes-szorzat*án azt az $A \times B$-vel jelölt halmazt értjük, melynek elemei olyan rendezett elempárokból állnak, melyek első tagja az A, második tagja a B halmazból való, azaz

$$A \times B = \{(a;\, b) \mid a \in A,\, b \in B\}.$$

Az A halmaz önmagával vett Descartes-szorzatát szokás A^2-el is jelölni:

$$A^2 = A \times A.$$

3.3. **Példa.** Tekintsük az $A = \{1;\, 3\}$ és $B = \{2;\, 4\}$ halmazokat! Ekkor

$$A \times B = \{(1;\, 2),\ (1;\, 4),\ (3;\, 2),\ (3;\, 4)\},$$

másrészt

$$B \times A = \{(2;\, 1),\ (2;\, 3),\ (4;\, 1),\ (4;\, 3)\},$$

amiből látható, hogy $A \times B$ és $B \times A$ nem egyenlőek, tehát a Descartes-szorzat nem-kommutatív művelet.

3.4. **Megjegyzés.** Az

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x;y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

halmaz elemei megfeleltethetőek a „kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszer” pontjainak, ha rögzítünk egy koordinátarendszert.

3.5. **Definíció.** Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok *Descartes-szorza*tán az

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1; a_2; \ldots; a_n) \,|\, a_1 \in A_1; a_2 \in A_2; \ldots; a_n \in A_n\}$$

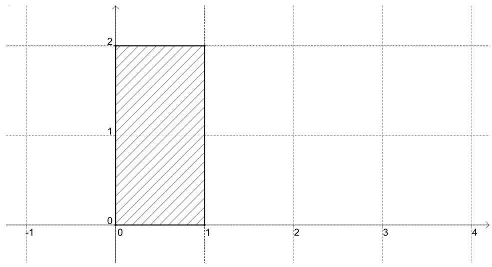
halmazt értjük. Magukat az $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ elemeket rendezett *szám n-esek*nek nevezzük. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok egyenlőek, akkor az $A \times A \times \ldots \times A$ „n”-tényezős Descartes-szorzatot szokás A^n-el is jelölni.

3.6. **Megjegyzés.** Az

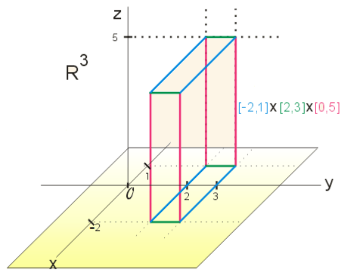
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x;y;z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

halmaz elemei megfeleltethetőek a „háromdimenziós Descartes-féle koordinátarendszer” pontjainak, ha rögzítünk egy koordinátarendszert.

3.7. **Példa.** A $[0; 1] \times [0; 2]$ Descartes szorzat ábrázolása:



3.8. **Példa.** A $[-2; 1] \times [2; 3] \times [0; 5]$ Descartes szorzat ábrázolása:



3.9. **Definíció.** Két halmaz Descartes-szorzatának bármely részhalmazát *relációnak* nevezzük. Pontosabban, ha A és B nem üres halmazok, úgy az $A \times B$ halmaz tetszőleges részhalmazát az A és B halmaz közötti relációnak nevezzük.

3.10. **Példa.** Legyen $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$. Ekkor $\varrho = \{(1; 2); (2; 3)\}$ reláció A és B között.

3.11. **Megjegyzés.** Amennyiben ϱ egy reláció, úgy azt, hogy az (a, b) elempár benne van a relációban úgy is kifejezhetjük, hogy az a elem relációban van a b elemmel, amit az $a\varrho b$ kapcsolattal jelölhetünk.

3.12. **Definíció.** Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy reláció. A

$$D_\varrho = \{x \in A \,|\, \text{létezik } y \in B \text{ úgy, hogy } (x; y) \in \varrho\},$$

illetve

halmazt a ϱ reláció *értelmezési tartományának* nevezzük.

3.13. **Definíció.** Legyen $\varrho \subset A \times B$ egy reláció. Az

$$R_\varrho = \{y \in B \,|\, \text{létezik } x \in A \text{ úgy, hogy } (x; y) \in \varrho\}$$

halmazt a ϱ reláció *értekkészlet*ének nevezzük.

3.14. **Példa.** Tekintsük az $A = \{-1, 0, 1\}$ és a $B = \{-1, 0\}$ halmazokat, továbbá legyen

$$\varrho = \{(a, b) \mid a \cdot b = 0\} \subset A \times B.$$

a) Írjuk fel az $A \times B$ halmazt!

b) Írjuk fel a reláció elemeit!

c) Határozzuk meg a reláció értelmezési tartományát és értékkészletét!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Először felírjuk az $A \times B$ halmazt:

$$A \times B = \{(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0)\}.$$

b) A reláció elemei:

$$\varrho = \{(-1, 0), (0, -1), (0, 0), (1, 0)\}.$$

c) A reláció értelmezési tartománya a relációban szereplő elempárok első koordinátájából álló halmaz, értékkészlete a második koordinátákból álló halmaz:

$$D_\varrho = \{-1, 0, 1\}, \quad R_\varrho = \{-1, 0\}.$$

3.15. **Definíció.** Egy $\varrho \subset A \times B$ reláció *inverz*én az

$$\varrho^{-1} = \{(b; a) \in B \times A \mid (b; a) \in \varrho\}$$

relációt értjük.

3.16. **Példa.** A

$$\varrho = \big\{(1; 2);\ (1; 5);\ (3; 4)\big\}$$

reláció inverze az

$$\varrho^{-1} = \big\{(2; 1);\ (5; 1);\ (4; 3)\big\}$$

reláció.

3.17. **Definíció.** Legyenek $A,\ B,\ C$ adott halmazok, $\varrho_1 \subset A \times B$ és $\varrho_2 \subset B \times C$ adott relációk. A ϱ_1 és ϱ_2 relációk *kompozíció*ján a

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(a; c) \mid \text{létezik } b \in B \text{ úgy, hogy } (a; b) \in \varrho_1,\ (b; c) \in \varrho_2\}$$

relációt értjük.

3.18. **Példa.** Tekintsük a

$$\varrho_1 = \{(1;2);\ (2;3);\ (2;5);\ (4;6)\}$$

és a

$$\varrho_2 = \{(2;3);\ (3;5);\ (3;6);\ (5;1)\}$$

relációkat. Ekkor

$$\varrho_2 \circ \varrho_1 = \{(1;3);\ (2;5);\ (2;6);\ (2;1)\}.$$

3.19. **Definíció.** Ha ϱ egy reláció és $C \subset D_\varrho$, akkor a

$$\varrho|_C = \{(x;y) \in \varrho \mid x \in C\}$$

relációt a ϱ reláció C-re való *leszűkítés*ének nevezzük.

3.20. **Definíció.** Legyen adott az A halmaz. Azt mondjuk, hogy az $\varrho \subset A \times A$ reláció

(1) *reflexív*, ha minden elem relációban van önmagával, azaz ha $x\varrho x$ minden $x \in A$ esetén;

(2) *irreflexív*, ha minden $x \in A$ esetén $(x;x) \notin \varrho$;

(3) *szimmetrikus*, ha $x\varrho y$-ból következik, hogy $y\varrho x$ minden $x, y \in A$;

(4) *antiszimmetrikus*, ha $x\varrho y$ és $y\varrho x$, akkor $x = y$;

(5) *tranzitív*, ha $x\varrho y$ és $y\varrho z$, akkor $x\varrho z$;

(6) *teljes* vagy *lineáris*, ha $x\varrho y$ vagy $y\varrho x$ teljesül.

3.21. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy reláció

- *ekvivalencia reláció*, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív;
- *félig rendezési reláció*, vagy *parciális rendezés*, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív;
- *rendezési reláció*, ha olyan félig rendezés, amely teljes is;
- *gyenge rendezés* vagy *preferencia*, ha reflexív, tranzitív és teljes.

3.22. **Példa.** A valós számok halmazán az „egyenlőség” ekvivalencia reláció! Azaz, ha

$$A = \mathbb{R},\ \varrho: \text{„egyenlőség”},$$

akkor ϱ ekvivalencia reláció A-n, ugyanis a reláció

- reflexív, mert $a = a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén
- szimmetrikus, mert ha $a = b$, akkor $b = a$
- tranzitív, mert ha $a = b$ és $b = c$, akkor $a = c$.

3.23. **Definíció.** Legyen A egy tetszőleges halmaz. Egy $\mathcal{C}$ halmazrendszer *osztályozás* az A halmazon, ha $\mathcal{C}$ az A nemüres részhalmazaiból áll és minden A-beli elem pontosan egy $\mathcal{C}$-beli halmaznak eleme, továbbá a $\mathcal{C}$ halmazrendszerbeli halmazok uniója az A halmaz. A $\mathcal{C}$ halmaz elemeit *osztályok*nak nevezzük.

3.24. **Megjegyzés.** Az A halmaz nemüres részhalmazainak egy rendszerét *osztályozásnak* nevezzük, ha az elemei páronként diszjunktak és egyesítésük az A halmaz.

3.25. **Példa.** Tekintsük az $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ halmazt. Ekkor a $\mathcal{C} = \{A_1; A_2\}$ halmazrendszer, ahol

$$A_1 = \{1; 3; 5\} \quad A_2 = \{2; 4; 6\}$$

osztályozása az A halmaznak, ugyanis teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$;
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
- $A_1 \cup A_2 = A$.

3.26. **Tétel.** Minden ekvivalencia reláció létrehoz egy osztályozást: két elem egy osztályba tartozik, ha relációban állnak egymással.

3.27. **Példa.** Tekintsük alaphalmaznak az egész számok halmazát és legyen

$$\varrho = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 2|(x + y)\}.$$

A reláció

- reflexív, mert $x\varrho x$, hiszen $(x; x) \in \varrho$, mert
$$2|(x + x) = 2x$$
minden $x \in \mathbb{Z}$ esetén;
- szimmetrikus, hiszen ha $(x; y) \in \varrho$, akkor $(y; x) \in \varrho$, ugyanis, ha
$$2|(x + y) \qquad \Rightarrow \qquad 2|(y + x)$$
minden $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén;
- tranzitív, ugyanis, ha $(x; y) \in \varrho$ és $(y; z) \in \varrho$, akkor
$$2|(x + y),\ 2|(y + z),$$
azaz léteznek olyan k és l egész számok, hogy
$$2k = x + y$$
$$2l = y + z.$$

Ekkor a fenti egyenleteket összeadva azt kapjuk, hogy

$$x + z = 2k + 2l - 2y,$$

így $2|(x + z)$, következésképpen $(x; z) \in \varrho$.

A reláció tehát reflexív, szimmetrikus és tranzitív, így ekvivalencia reláció, tehát létrehoz egy osztályozást. Nyilván végtelen sok olyan szám van, amelyek egymással relációban vannak. A páros számok a párosakkal relációban állnak, hiszen két páros szám összege páros. A páratlan számok szintén relációban állnak egymással, mert két páratlan szám összege páros. A páros és páratlan számok uniója a teljes egész számok halmaza. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathcal{C} = \{\{\text{páros számok}\}; \{\text{páratlan számok}\}\}$$

osztályozás, amit a ϱ reláció hoz létre.

3.28. **Relációk a közgazdaságtanban.** Legyen A egy olyan halmaz amelynek az elemei azok a lehetőségek (javak, szolgáltatások, stb.) amelyekből a fogyasztó választhat. Ha az egyed választani akar, akkor rendelkeznie kell valamiféle olyan véleménnyel az A halmaz elemeiről, amelynek alapján eldöntheti azt, hogy két elem közül melyiket értékeli többre, melyiket „preferálja” jobban.

Ha például x a jobb az y-nál, akkor ezt úgy fogjuk jelölni, hogy $x \succeq y$. Induljunk ki egy tetszőleges $\succeq$ relációból. Ekkor az alábbi négy, egymást kizáró eset lehetséges:

- x és y közömbösek (indifferensek), ha $x \succeq y$ és $y \succeq x$, jele: $x \approx y$;
- x és y nem összehasonlíthatóak, ha $x \not\succeq y$ és $y \not\succeq x$, jele: $x?y$;
- x szigorúan preferált y-hoz képest, ha $x \succeq y$ és $y \not\succeq x$, jele: $x \succ y$;
- y szigorúan preferált x-hez képest, ha $y \succeq x$ és $x \not\succeq y$, jele: $y \succ x$.

Megmutatható, hogy ha $\succeq$ gyenge rendezés az A halmazon, akkor a közömbösség (indifferencia) ekvivalencia-reláció. A racionális döntést hozó személyt gyenge rendezés (preferencia) jellemez.

A preferencia három axiómája közül a reflexivitás természetes, ezért a tranzitivitás és a teljesség az, amivel empirikus szempontból foglalkozni kell. Hozható érv mindkét feltételezés mellett és ellen is.

A teljesség például azzal kritizálható, hogy túlságosan erős feltevés: nem biztos, hogy a fogyasztó bármely két fogyasztási cikket össze tud hasonlítani. A tranzitivitás mellett szól, hogy bizonyos szabályok szerint döntünk, akkor következetes döntéseket igyekszünk hozni.

Ugyanakkor a tranzitivitás ellen szól bizonyonos esetekben például az emberi érzékelés. Például tegyük fel, hogy valaki a lakása fűtésénél a 19 és 20 fok valamint a 20 fok és 21 fok között nem tud különbséget tenni (közömbös) számára, de a 21 fokot már jobban preferálja, mint a 19 fokot. Ekkor $19 \approx 20$ és $20 \approx 21$ de $21 \succ 19$, ami ellentmond a tranzitivitásnak.

Egy érdekes eset, melyet Pearce ír le. Képzeljük el, hogy X úr vendégsében vacsorázik, és a végén a gyümölcs fogásnál az első lépésben egy kis és egy nagy alma közül választhat. A kisebbiket választja, mert éhes ugyan, de jólnevelt. A második kínálásnál egy nagy körte és egy kis alma közül választhat, és a körtét választja, mert éhes. A harmadik kínálásnál egy nagy alma és nagy körte közül az almát választja, mert azt jobban szereti. Matematikailag:

$$\begin{aligned} \text{kis alma} &\succ \text{nagy alma} \\ \text{nagy körte} &\succ \text{kis alma} \\ \text{nagy alma} &\succ \text{nagy körte}, \end{aligned}$$

amiből a tranzitivitás feltétele miatt:

$$\text{kis alma} \succ \text{nagy alma} \succ \text{nagy körte} \succ \text{kis alma}$$

adódik, ami ellentmondás. Itt különböző körülmények között a döntés különböző motivációja erősödik meg.

Ellenőrző kérdések

1. Egy reláció ekvivalencia reláció, ha ....
2. Egy reláció rendezési reláció, ha ....
3. Egy $R \subset A \times A$ reláció reflexív, ha ....
4. Egy $R \subset A \times A$ reláció szimmetrikus, ha ....
5. Egy $R \subset A \times A$ reláció tranzitív, ha ....
6. Ha az A halmaz 3 elemű és a B halmaz 6 elemű, akkor $A \times B$ elemeinek a száma: ....

4. Függvények

4.1. **Megjegyzés.** Ebben a szakaszban a D halmaz a valós számok halmazának egy tetszőleges, nem üres részhalmazát jelöli.

4.2. **Definíció.** Legyenek A és B halmazok. Az $f \subset A \times B$ relációt *függvény*nek nevezzük, ha az A halmaz minden eleme legfeljebb egy B halmazbeli elemmel áll relációban.

4.3. **Megjegyzés.** A relációknál korábban definiált értelmezési tartomány, értékkészlet, leszűkítés fogalmak változatlan formában érvényesek a függvényekre is, hiszen a függvényeket, mint speciális relációkat deifiniáltuk.

4.4. **Megjegyzés.** Ha az f reláció függvény, akkor az $f \subset A \times B$ jelölés helyett az $f\colon A \to B$ jelölést használjuk, továbbá ha $(x; y) \in f$, akkor azt úgy jelöljük, hogy $f(x) = y$, és úgy olvassuk ki, hogy az f függvény x helyen felvett helyettesítési értéke y, vagy hogy az f függvény az x elemhez az y elemet rendeli hozzá.

4.5. **Példa.** Legyen $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$, és tekintsük a

$$\varrho = \{(x; y) \mid y = x^2\}$$

relációt. Ekkor

$$\varrho = \{(1; 2); (2; 4)\}.$$

Az így definiált reláció függvény, melynek értékkészlete $R_f = \{2; 4\}$.

4.6. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *grafikon*jának nevezzük az

$$\operatorname{graf}(f) = \{(x; y) \mid x \in D\}$$

halmazt.

4.7. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in D$ helyen *zérushely*e van, ha $f(x_0) = 0$.

4.8. **Megjegyzés.** A zérushely meghatározása egy egyenlet megoldását jelenti.

4.9. **Példa.** Az $f(x) = x^2 - 1$ függvény zérushelyeit az

$$x^2 - 1 = 0$$

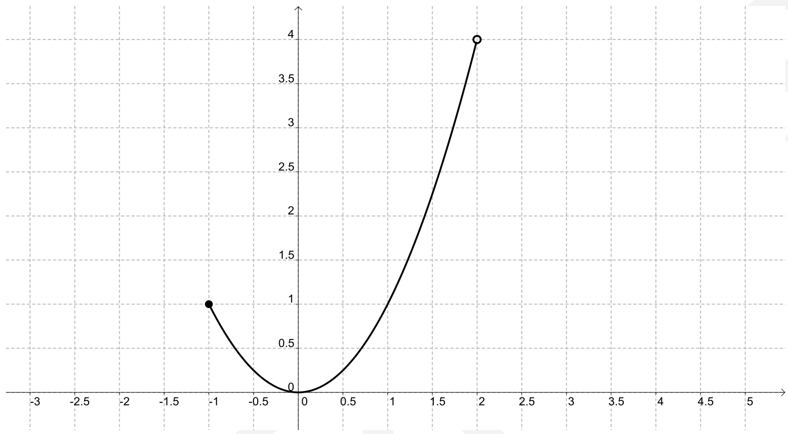
egyenlet megoldásával kapjuk, amiből átrendezés után $x^2 = 1$ adódik, így azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

4.10. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

- *alulról korlátos*, ha az értékkészlete alulról korlátos;
- *felülről korlátos*, ha az értékkészlete felülről korlátos;
- *korlátos*, ha az értékkészlete korlátos.

4.11. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *infimum*a, illetve *szuprémum*a az értékkészletének infimuma, illetve szuprémuma.

4.12. **Példa.** Az $f\colon [-1; 2[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonja:



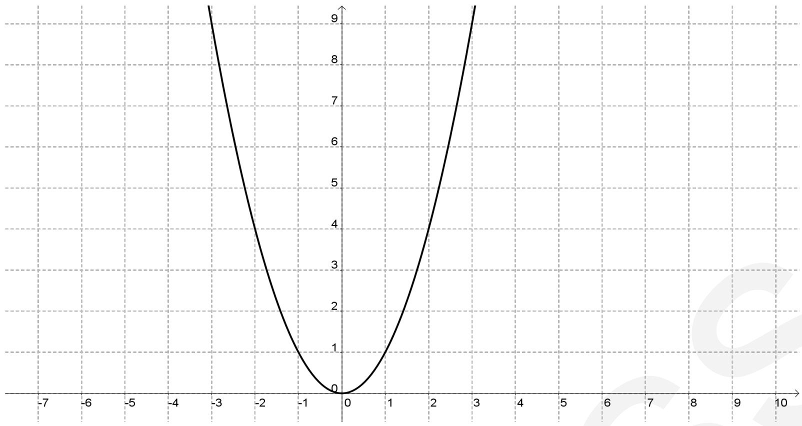
A függvény

- értékkészlete: $R_f\ :\ [0; 4[$;
- infimuma: $\inf\big(f(x)\big) = 0$;
- szuprémuma: $\sup\big(f(x)\big) = 4$;
- korlátos, mert alulról és felülről is korlátos.

4.13. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

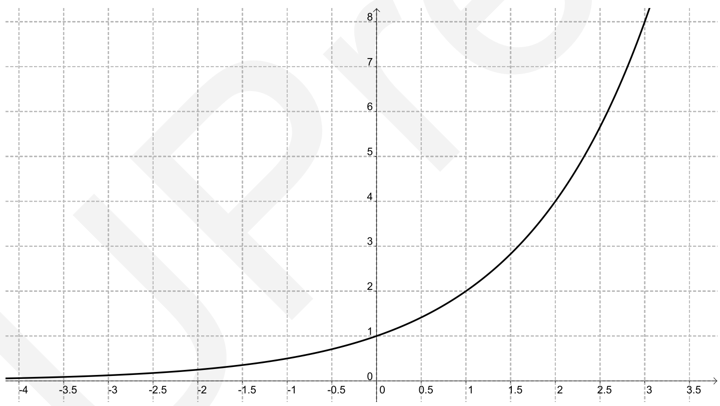
- *monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$, teljesül, hogy $f(x_1) \geq f(x_2)$;
- *szigorúan monoton növekvő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$;
- *szigorúan monoton csökkenő*, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

4.14. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény grafikonja:



A függvény szigorúan monoton csökkenő, ha $x \leq 0$, és szigorúan monoton növekvő, ha $x \geq 0$.

4.15. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény grafikonja:

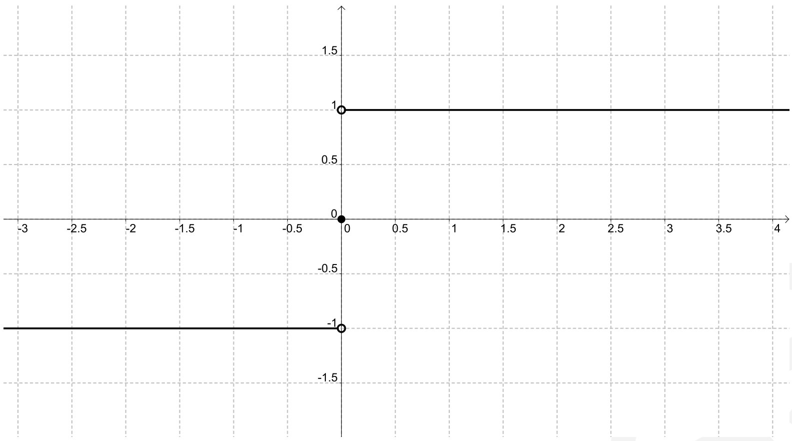


A függvény szigorúan monoton növekvő.

4.16. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

(szignum függvény) monoton növekvő, de nem szigorúan monoton növekvő.



4.17. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *maximuma* van, ha $f(x) \le f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legnagyobb eleme;
- *minimuma* van, ha $f(x) \ge f(x_0)$ minden $x \in D$ esetén, azaz ha $f(x_0)$ az f értékkészletének legkisebb eleme.

4.18. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen *szélsőérték*e van, ha minimuma vagy maximuma van az x_0 helyen.

4.19. **Példa.**

- Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen minimuma van.
- Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvénynek az $x_0 = 0$ helyen maximuma van.
- Az $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénynek nincs szélsőértéke.
- Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ függvénynek minimuma és maximuma is van.

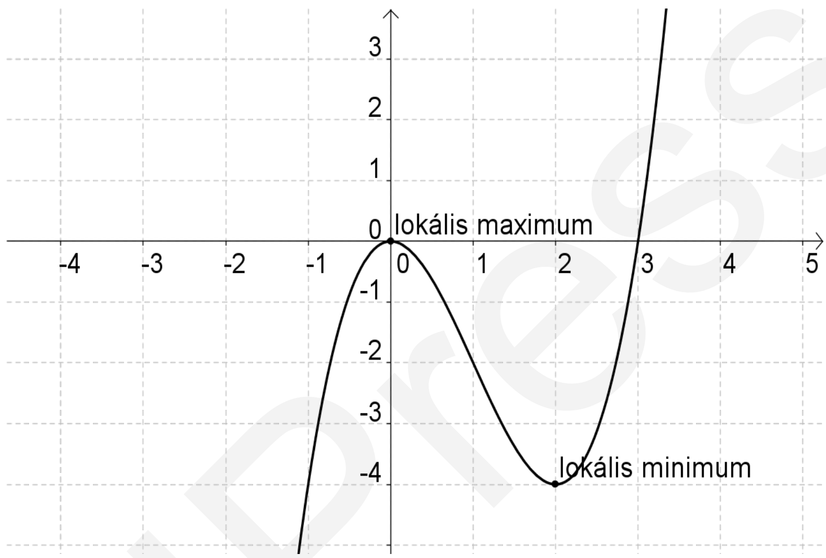
4.20. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen

- *lokális (helyi) maximum*a van, ha létezik $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy $f(x) \le f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legnagyobb függvényérték;
- *lokális (helyi) minimum*a van, ha létezik $\varepsilon > 0$ valós szám úgy, hogy $f(x) \ge f(x_0)$ minden $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ esetén, azaz ha f-nek van olyan környezete, amelyben $f(x_0)$ a legkisebb függvényérték.

4.21. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen *lokális szélsőértéke* van, ha lokális minimuma vagy lokális maximuma van az x_0 helyen.

4.22. **Megjegyzés.** Minden globális szélsőérték egyben lokális szélsőérték is.

4.23. **Példa.** Az alábbi függvénynek lokális minimuma és lokális maximuma is van:



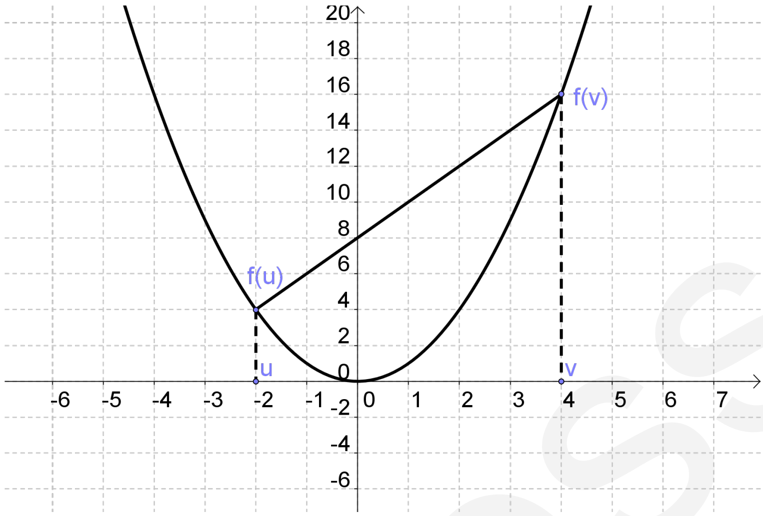
4.24. **Megjegyzés.** Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő az $[x_0-\varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton növekvő az $[x_0, x_0+\varepsilon]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális minimuma van.

4.25. **Megjegyzés.** Ha létezik olyan ε pozitív valós szám, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő az $[x_0-\varepsilon; x_0]$ intervallumon és monoton csökkenő az $[x_0; x_0+\varepsilon]$ intervallumon, akkor f-nek az x_0 helyen lokális maximuma van.

4.26. **Definíció.** Legyen I egy nyílt intervallum. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény

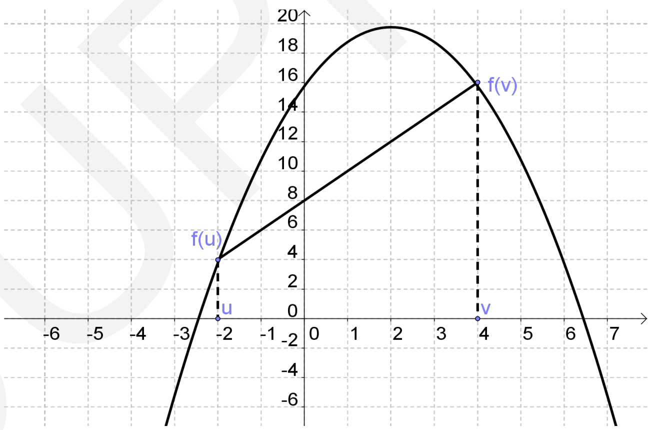
- *konvex*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény felett halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \le t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v).$$



- *konkáv*, ha minden $u, v \in I$, $u < v$ esetén az $\big(u; f(u)\big)$ és $\big(v; f(v)\big)$ pontokat összekötő szakasz az f függvény alatt halad, azaz ha minden $u, v \in I$ és minden $t \in [0; 1]$ esetén

$$f\big(t \cdot u + (1-t) \cdot v\big) \geq t \cdot f(u) + (1-t) \cdot f(v).$$



4.27. **Példa.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény konvex.

4.28. **Példa.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$ függvény konkáv.

4.29. **Definíció.** Legyen I nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in I$ helyen *inflexiós hely*e van, ha x_0-ban megváltozik a konvexitása, azaz létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f

konkáv és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konvex, vagy az $[x_0 - \varepsilon; x_0]$ intervallumon f konvex és az $[x_0; x_0 + \varepsilon]$ intervallumon konkáv.

4.30. **Példa.** Az $f(x) = \sin x$ függvénynek $x = k \cdot \pi$ a $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken inflexiós helyei vannak.

4.31. **Definíció.** Legyen a D halmaz szimmetrikus az origóra. Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény

- *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ minden $x \in D$ esetén;
- *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ minden $x \in D$ esetén.

Bizonyos mérnöki számolásokban fontos, hogy egy függvény páros vagy páratlan-e (esetleg egyik sem). Például egy függvény által határolt síklemez súlypontjának kiszámításánál.

4.32. **Megjegyzés.** Egy függvény

- páros, ha a grafikonja tengelyesen szimmetrikus az y tengelyre;
- páratlan, ha a grafikonja középpontosan szimmetrikus az origóra.

4.33. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$ függvény páros, mert

$$f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4.34. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ függvény páratlan, mert

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

4.35. **Megjegyzés.** A trigonometrikus függvények közül a $\sin x, \operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények páratlanok, míg a $\cos x$ függvény páros.

4.36. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periódikus*, ha van olyan $p \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f(x + p) = f(x)$.
Ha az f függvény periódikus, akkor végtelen sok megfelelő p érték van. Ha a definícióban meghatározott tulajdonságú p értékek halmazának van legkisebb eleme, akkor ezt a számot az f függvény *periódus*ának nevezzük.

4.37. **Példa.** A trigonometrikus függvények periódikusak. A szinusz és a koszinusz függvények periódusa 2π, a tangens és a kotangens függvények periódusa π.

4.38. **Definíció.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ és a $g\colon D \to \mathbb{R}$ függvények

- *összege* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D$;
- *különbsége* $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in D$;
- *szorzata* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in D$;

- *hányadosa* $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ha $g(x) \neq 0$, $x \in D$ esetén.

4.39. **Tétel.** Páros függvények összege páros.

Bizonyítás: Ha f és g páros függvények, akkor egyrészt $f(-x) = f(x)$, másrészt $g(-x) = g(x)$. Legyen $h(x) = (f+g)(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = \\ &= (f+g)(x) = h(x), \end{aligned}$$

így $h(-x) = h(x)$, tehát h valóban páros. ∎

4.40. **Tétel.** Páros függvények különbsége páros.

Bizonyítás: Ha f és g páros függvények, akkor egyrészt $f(-x) = f(x)$, másrészt $g(-x) = g(x)$. Legyen $h(x) = (f-g)(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = \\ &= (f-g)(x) = h(x), \end{aligned}$$

így $h(-x) = h(x)$, tehát h valóban páros. ∎

4.41. **Tétel.** Páros függvények szorzata páros.

Bizonyítás: Ha f és g páros függvények, akkor egyrészt $f(-x) = f(x)$, másrészt $g(-x) = g(x)$. Legyen $h(x) = (f \cdot g)(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = \\ &= f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) = h(x), \end{aligned}$$

tehát $h(-x) = h(x)$, így h páros. ∎

4.42. **Tétel.** Páros függvények hányadosa páros.

Bizonyítás: Ha f és g páros függvények, továbbá $g(x) \neq 0$, akkor egyrészt $f(-x) = f(x)$, másrészt $g(-x) = g(x)$. Legyen $h(x) = (f/g)(x)$. Ekkor

$$h(-x) = \left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = h(x),$$

tehát $h(-x) = h(x)$, így h páros. ∎

4.43. **Tétel.** Páratlan függvények összege páratlan.

Bizonyítás: Ha f és g páratlan függvények, akkor egyrészt $f(-x) = -f(x)$, másrészt $g(-x) = -g(x)$. Legyen $h(x) = (f+g)(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = \\ &= -f(x) - g(x) = -(f+g)(x) = -h(x), \end{aligned}$$

tehát $h(-x) = -h(x)$, így h páratlan. ■

4.44. **Tétel.** Páratlan függvények különbsége páratlan.

Bizonyítás: Ha f és g páratlan függvények, akkor egyrészt $f(-x) = -f(x)$, másrészt $g(-x) = -g(x)$. Legyen $h(x) = (f-g)(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f-g)(-x) = f(-x) - g(-x) = \\ &= -f(x) + g(x) = -(f-g)(x) = -h(x), \end{aligned}$$

tehát $h(-x) = -h(x)$, így h páratlan. ■

4.45. **Tétel.** Páratlan függvények szorzata páros.

Bizonyítás: Ha f és g páratlan függvények, akkor egyrészt $f(-x) = -f(x)$, másrészt $g(-x) = -g(x)$. Legyen $h(x) = (f \cdot g)(x)$. Megmutatjuk, hogy h páros:

$$\begin{aligned} h(-x) &= (f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = \\ &= -f(x) \cdot \big(-g(x)\big) = (f \cdot g)(x) = h(x), \end{aligned}$$

tehát $h(-x) = h(x)$, így h valóban páros. ■

4.46. **Tétel.** Páros függvények hányadosa páros.

Bizonyítás: Ha f és g páratlan függvények, továbbá $g(x) \neq 0$, akkor egyrészt $f(-x) = -f(x)$, másrészt $g(-x) = -g(x)$. Legyen $h(x) = (f/g)(x)$. Megmutatjuk, hogy h páros:

$$h(-x) = \left(\frac{f}{g}\right)(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = h(x),$$

tehát $h(-x) = h(x)$, így h valóban páros. ■

4.47. **Definíció.** Az $f\colon D \to B \subset \mathbb{R}$ függvény

- *injektív*, ha különböző elemekhez különböző elemeket rendel, azaz, ha minden $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$;
- *szürjektív*, ha minden értékkészletbeli elem megjelenik képként, azaz ha $R_f = B$;
- *bijektív*, ha injektív és szürjektív.

4.48. **Példa.** Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény

- nem injektív, mert például $f(-1) = f(1)$, azaz a -1-hez és az 1-hez ugyanazt az értéket rendeli;
- nem szürjektív, mert az értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, így a negatív valós számok nem jelennek meg értékként;
- nem bijektív, hiszen nem injektív és nem is szürjektív.

4.49. **Példa.** Az $f\colon [0; \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény

- injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel;
- nem szürjektív, mert az értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, így a negatív valós számok nem jelennek meg értékként;
- nem bijektív, mert nem szürjektív.

4.50. **Példa.** Az $f\colon [0; \infty[\to [0; \infty[$, $f(x) = x^2$ függvény

- injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel;
- szürjektív, mert az értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza, ami megegyezik a $[0; \infty[$ intervallummal;
- bijektív, mert injektív és szürjektív.

4.51. **Megjegyzés.** Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan injektív, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $f(x_1) = f(x_2)$, teljesül, hogy $x_1 = x_2$.

4.52. **Megjegyzés.** Egy függvény pontosan akkor injektív, ha a függvény grafikonját „vízszintes vonalakkal elmetszve mindenhol legfeljebb egy metszéspontot kapunk”.

4.53. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *invertálható*, ha az inverze is függvény.

4.54. **Példa.** Tekintsük az

$$A = \{-1; 1; 2\}$$

és

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

halmazokat, valamint az ezen halmazok közötti

$$\varrho = \{(a; b) \in A \times B \mid b = a^2\}$$

relációt. Ekkor a reláció:

$$\varrho = \{(-1; 1); (1; 1); (2; 4)\}.$$

Ez a reláció függvény is, mert egyértelmű hozzárendelés. Mint relációnak, az inverze

$$\varrho^{-1} = \{(1;-1);(1;1);(4;2)\}.$$

Ez a reláció azonban nem függvény, mert az 1-hez a -1-et és az 1-et is hozzárendeli, következésképpen, a függvény nem invertálható, mert az inverze nem függvény.

4.55. **Példa.** Tekintsük az

$$A = \{1;2\}$$

és a

$$B = \{1;2;3;4;5\}$$

halmazokat, valamint az ezen halmazok közötti

$$\varrho = \{(a;b) \in A \times B \mid b = 2a\}$$

relációt. Ekkor a reláció

$$\varrho = \{(1;2);(2;4)\}.$$

Ez a reláció függvény is, mert egyértelmű hozzárendelés. Mint relációnak, az inverze

$$\varrho^{-1} = \{(2;1);(4;2)\}.$$

Ez a reláció is függvény, mert egyértelmű hozzárendelés, következésképpen, a függvény invertálható, mert az inverze is függvény.

4.56. **Megjegyzés.** A definíció alapján nyilvánvaló, hogy egy $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor invertálható, ha injektív.

4.57. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvény nem invertálható, mert nem injektív.

4.58. **Definíció.** Legyenek D és H a valós számok halmazának tetszőleges részhalmazai, továbbá f, illetve g a D, illetve H halmazon értelmezett valós értékű függvények. A g és f függvények *kompozíció*ján vagy *összetett függvény*én a $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$$

függvényt értjük.

4.59. **Példa.** Legyen $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$. Ekkor

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(|x|) = |x|^2 = x^2;$$
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = |x^2| = x^2.$$

4.60. **Példa.** Legyen $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$. Ekkor

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+2) = (x+2)^2;$$
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2) = x^2 + 2.$$

4.61. **Példa.** Legyen $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x + 6$. Ekkor

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(\sin x) = 2 \cdot \sin x + 6;$$
$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x+6) = \sin(2x+6).$$

4.62. **Megjegyzés.** Az előbbi példák mutatják, hogy a függvénykompozíció művelete nem kommutatív, azaz általában

$$f \circ g(x) \neq g \circ f(x).$$

4.63. **Megjegyzés.** Ha az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény invertálható, és az inverze f^{-1}, akkor

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

4.64. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 2$ függvény invertálható, mert injektív, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel. Az előbbi megjegyzés alapján

$$x = f \circ f^{-1}(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = 2 \cdot f^{-1}(x) - 2,$$

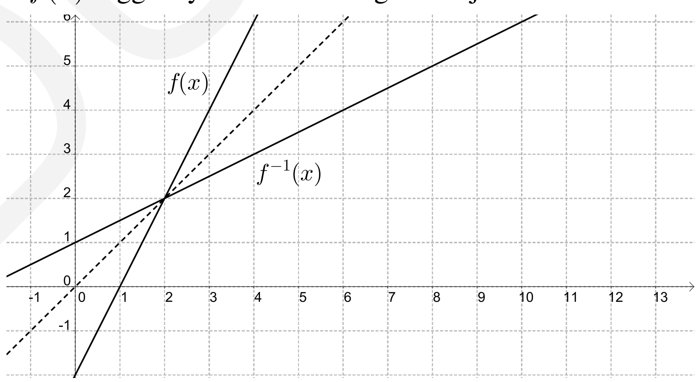
azaz

$$x = 2 \cdot f^{-1}(x) - 2.$$

Ebből $f^{-1}(x)$-et kifejezve az inverz függvényre

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

adódik. Az $f(x)$ függvény és inverzének grafikonja az alábbi ábrán látható:



Látható a függvények grafikonjain, hogy az $f^{-1}(x)$ függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az $f(x)$ függvény grafikonjára.

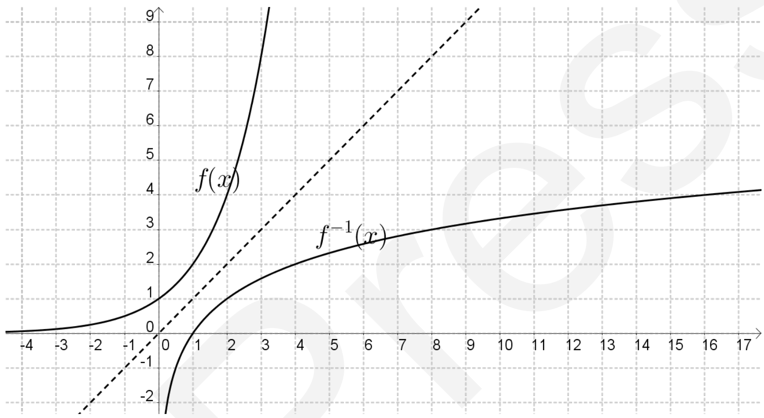
4.65. **Példa.** Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvény invertálható, mert injektív, azaz különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

$$x = f \circ f^{-1}(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = 2^{f^{-1}(x)},$$

amiből $f^{-1}(x)$-et kifejezve az inverz függvényre

$$f^{-1}(x) = \log_2(x) \qquad (x > 0)$$

adódik. Az $f(x)$ függvény és inverzének grafikonja az alábbi ábrán látható:



Látható a függvények grafikonjain, hogy az $f^{-1}(x)$ függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus az $f(x)$ függvény grafikonjára.

Ellenőrző kérdések

1. Egy reláció függvény, ha ....
2. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ zérushelye x_0, ha ....
3. Az $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvény zérushelyei: ....
4. Páros függvények összege ....
5. Páratlan függvények szorzata ....
6. Egy függvény korlátos, ha ....
7. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő, ha ....
8. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő, ha ....
9. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha ....
10. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ha ....
11. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ha ....
12. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény konkáv, ha ....
13. Ha az f függvény konvex, akkor $-f$ ....
14. Ha az f függvény konkáv, akkor $-f$ ....
15. Az $f(x) = 2^x$ függvény inverze ....
16. Az $f(x) = \log_2 x \quad (x > 0)$ függvény inverze ....

5. Elemi függvények

5.1. **Megjegyzés.** Megállapodunk abban, hogy ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, akkor n tetszőleges egész számot fog jelölni.

5.2. **Definíció.** Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tetszőleges valós számok és $a_n \neq 0$. Ekkor a

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

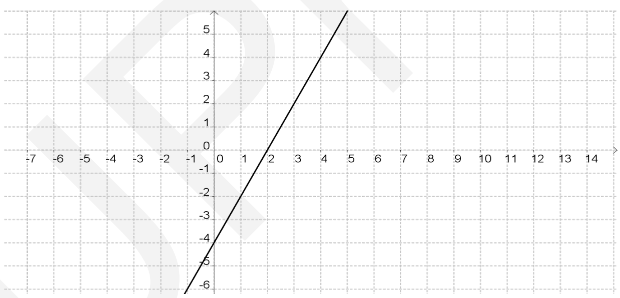
függvényt *n-edfokú polinomfüggvény*nek nevezzük.

5.3. **Definíció.** Az $f(x) = m \cdot x + b$ függvény elsőfokú polinomfüggvény, ahol m-et a függvény *meredekség*ének mondjuk.

5.4. **Megjegyzés.** Az elsőfokú polinomfüggvények grafikonja egyenes.

5.5. **Definíció.** Az $f(x) = m \cdot x + b$ elsőfokú polinom függvény *irányszög*én azt az $0 \leq \alpha < \pi$ szöget értjük, amelyre $m = \mathrm{tg}\alpha$ teljesül.

5.6. **Példa.** Az $f(x) = 2x - 4$ függvény grafikonja:



- Az egyenes meredeksége: $m = 2$.
- Az egyenes irányszöge: $\alpha \approx 63,43°$.

5.7. **Tétel.** Ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan polinomok, hogy $g(x)$ sehol sem zérus, akkor egyértelműen léteznek olyan $h(x)$ és $m(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) + m(x)$$

és $m(x)$ fokszáma $g(x)$ fokszámánál kisebb.

5.8. **Példa.** Legyen $f(x) = x^2 + 7x + 13$ és $g(x) = x + 3$. Ekkor

$$x^2 + 7x + 13 = (x + 3) \cdot (x + 4) + 1.$$

5.9. **Megjegyzés.** Az előbbi tételt a maradékos osztás tételének nevezzük és azt az eljárást, amely segítségével elvégezzük két polinomfüggvény osztását, euklideszi algoritmusnak nevezzük. Az $f(x)$ polinomot az alábbi módon oszthatjuk el $g(x)$-el:

- Elsőként az $f(x)$ legnagyobb fokszámú tagját elosztjuk $g(x)$ legnagyobb fokszámú tagjával.
- Második lépésben a kapott kifejezést megszorozzuk $g(x)$-el és a kapott polinomot $f(x)$ alá írjuk le.
- Harmadik lépésben az $f(x)$-ből kivonjuk a megkapott polinomot.
- Az eljárást folytatjuk addig, amíg a „kivonás” után olyan polinomot nem kapunk, amelynek a fokszáma $g(x)$ fokszámánál kisebb lesz.

5.10. **Példa.** Az előbbi eljárás illusztrálására az $x^3-6x^2+15x-550$ polinomot elosztjuk az $(x-10)$ polinommal:

$$\begin{array}{l}
(x^3-6x^2+15x-550) : (x-10) = x^2+4x+55 \\
-(x^3-10x^2) \\
\qquad\quad 4x^2+15x-550 \\
\qquad -(4x^2-40x) \\
\qquad\quad 55x-550 \\
\qquad -(55x-550) \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$x^3-6x^2+15x-550 = (x-10)\cdot(x^2+4x+55).$$

5.11. **Tétel.** Ha $f(x)$ egy polinom és c gyöke $f(x)$-nek, azaz $f(c)=0$, akkor $f(x)$ osztható $(x-c)$-vel, azaz létezik olyan $h(x)$ polinom, hogy

$$f(x) = (x-c)\cdot h(x).$$

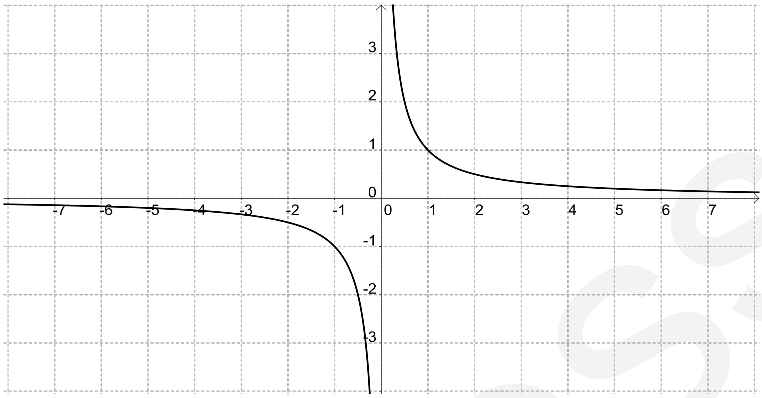
5.12. **Példa.** Az $f(x)=x^2-4$ polinomnak gyöke az $x=2$, ugyanis $2^2-4=0$, így a polinom osztható $(x-2)$-vel:

$$x^2-4 = (x-2)\cdot(x+2).$$

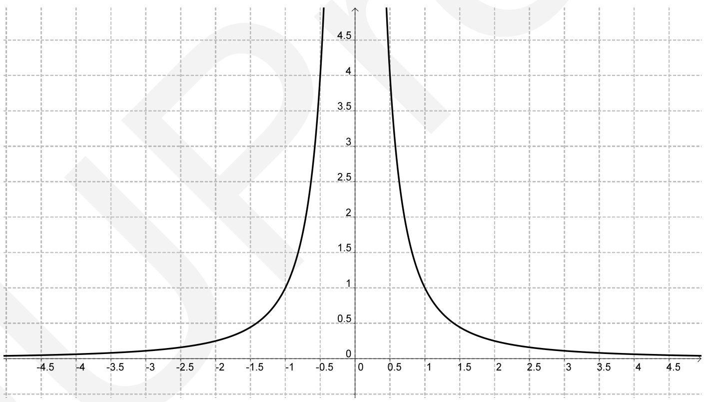
5.13. **Definíció.** Az $f(x)$ függvényt *racionális törtfüggvény*nek nevezzük, ha léteznek olyan $p(x)$ és nem azonosan zérus $q(x)$ polinomok, hogy

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

5.14. **Példa.** Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény racionális törtfüggvény, grafikonja:



5.15. **Példa.** Az $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény racionális törtfüggvény, grafikonja:

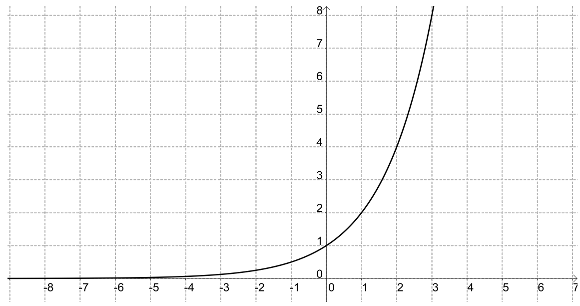


5.16. **Definíció.** Legyen $0 < a \neq 1$ valós szám. Az $f(x) = a^x$ függvényt *exponenciális függvény*nek nevezzük.

5.17. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy az exponenciális függvény irracionális kitevőinek precíz értelmezéséhez határértékszámításra lenne szükség, amely témakör tárgyalására jelen jegyzetben nem kerül sor.

5.18. **Megjegyzés.** Az exponenciális függvények fontos szerepet töltenek be a gazdasági és műszaki tudományokban. Ezekre néhány példát fogunk látni a következő fejezetben.

5.19. **Példa.** Az $f(x) = 2^x$ függvény grafikonja:



5.20. **Megjegyzés.** A későbbiekben többször fogunk találkozni az

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

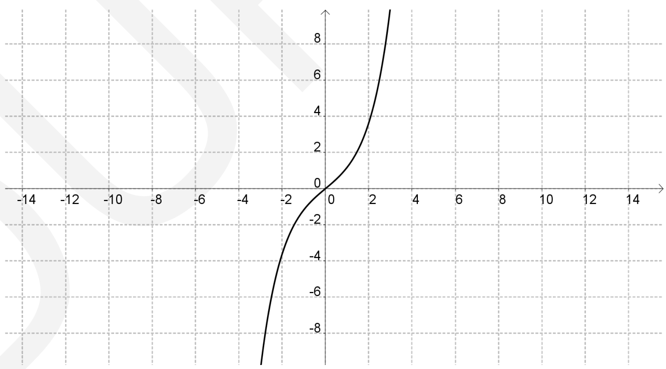
függvénnyel, ahol e az úgynevezett Euler-féle szám, a természetes alapú logaritmus alapszáma ($\mathrm{e} \approx 2,718$). Ez a függvény rendkívül fontos szerepet tölt be a mérnöki és gazdasági számításokban egyaránt.

5.21. **Definíció.** *Szinusz hiperbolikusz* függvénynek nevezzük az

$$\mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

függvényt.

5.22. **Megjegyzés.** Az $\mathrm{sh}x$ függvény grafikonja:

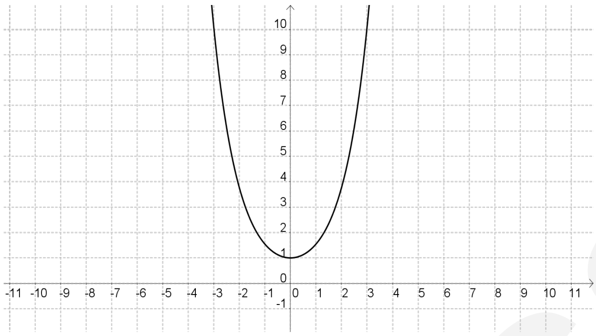


5.23. **Definíció.** *Koszinusz hiperbolikusz* függvénynek nevezzük az

$$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

függvényt.

5.24. **Megjegyzés.** A $\mathrm{ch}x$ függvény grafikonja:



5.25. **Megjegyzés.** A $\mathrm{ch}x$ függvény grafikonját „láncgörbének” is nevezik.

5.26. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1.$$

Bizonyítás: Felhasználva a $\mathrm{ch}\, x$ és az $\mathrm{sh}\, x$ függvények definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{4} = 1,\end{aligned}$$

amivel bizonyítottuk az állítást. ■

5.27. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x = \mathrm{ch}(2x).$$

Bizonyítás: Felhasználva a $\mathrm{ch}\, x$ és az $\mathrm{sh}\, x$ függvények definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x &= \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \\ &= \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x),\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

5.28. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

Bizonyítás: Felhasználva a $\operatorname{ch} x$ és az $\operatorname{sh} x$ függvények definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x &= 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \operatorname{ch}(2x). \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk. ∎

5.29. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

azaz $\operatorname{ch} x$ páros függvény.

Bizonyítás: Felhasználva a $\operatorname{ch} x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \operatorname{ch}(x),$$

amivel igazoltuk az állítást. ∎

5.30. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x,$$

azaz $\operatorname{sh} x$ páratlan függvény.

Bizonyítás: Felhasználva a $\operatorname{sh} x$ függvény definícióját azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\operatorname{sh} x,$$

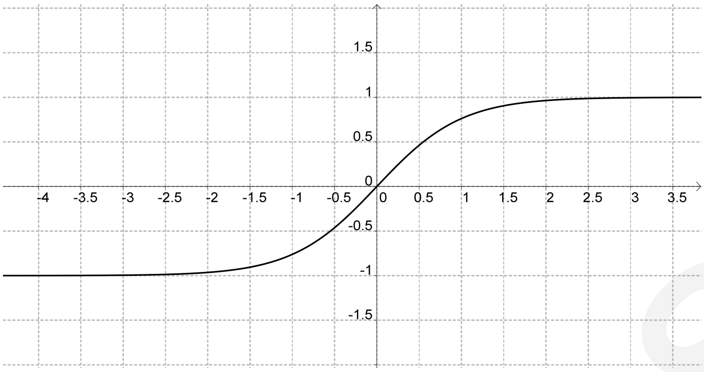
amivel igazoltuk az állítást. ∎

5.31. **Definíció.** *Tangens hiperbolikusz* függvénynek nevezzük a

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$$

függvényt.

5.32. **Megjegyzés.** A $\mathrm{th}x$ függvény grafikonja:

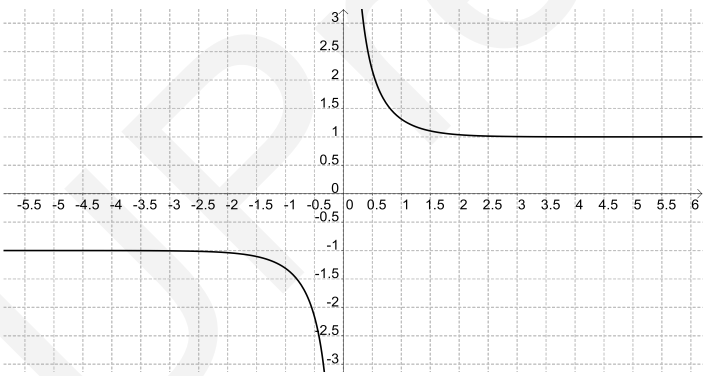


5.33. **Definíció.** *Kotangens hiperbolikusz* függvénynek nevezzük a

$$\mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$$

függvényt.

5.34. **Megjegyzés.** A $\mathrm{cth}x$ függvény grafikonja:



5.35. **Definíció.** Az $f(x) = a^x$ függvény invertálható, inverze az *a-alapú logaritmus* függvény: $\log_a x$. Speciálisan szokás alkalmazni az $\mathrm{lg}x = \log_{10} x$ és az $\ln x = \log_e x$ jelöléseket.

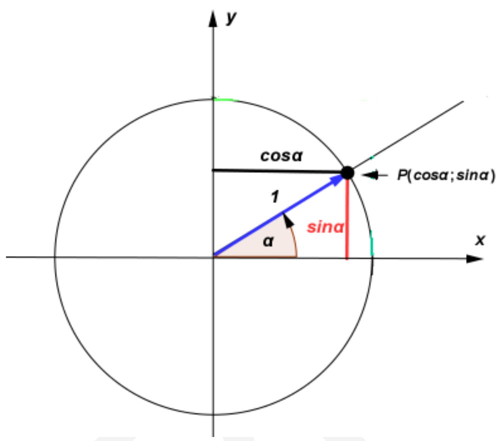
5.36. **Definíció.** Az $\mathrm{sh}x, \mathrm{ch}x, \mathrm{th}x, \mathrm{cth}x$ függvényeket összefoglaló néven *hiperbolikus függvények*nek nevezzük.

5.37. **Definíció.** A hiperbolikus függvények inverzeit *area* függvényeknek nevezzük.

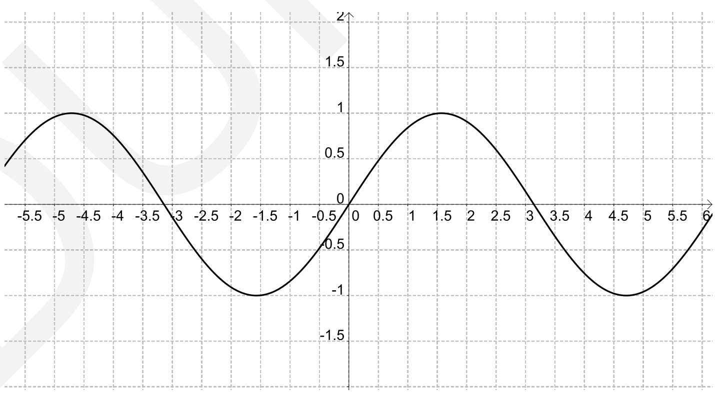
- A $\mathrm{sh}x$ függvény inverze: $\mathrm{arsh}x$;
- A $[0; \infty[$ intervallumra leszűkített $\mathrm{ch}x$ függvény inverze: $\mathrm{arch}x$;

- A $\mathrm{th}x$ függvény inverze: $\mathrm{arth}x$;
- A $\mathrm{ctgh}x$ függvény inverze: $\mathrm{arctgh}x$.

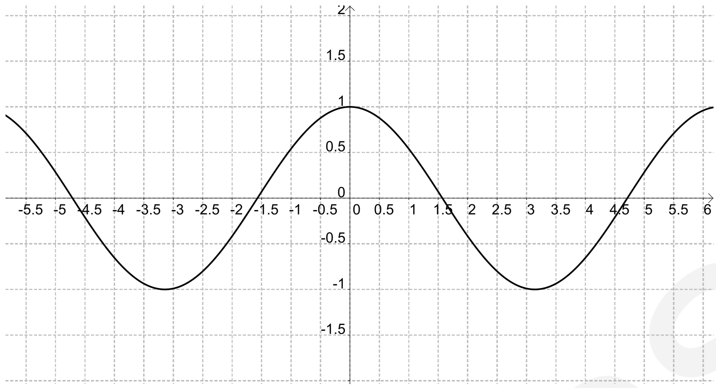
5.38. **Definíció.** Legyen x egy tetszőleges valós szám. A koordinátarendszer $(1;0)$ koordinátájú pontjának origó körüli x radián nagyságú szöggel való elforgatásával keletkezett pont első koordinátáját (abszcisszáját) *koszinusz*nak, második koordinátáját (ordinátáját) *szinusz*nak nevezzük.



5.39. **Megjegyzés.** A $\sin x$ függvény grafikonja:



5.40. **Megjegyzés.** A $\cos x$ függvény grafikonja:



5.41. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(-x) = \cos x$, azaz a koszinusz függvény páros.

5.42. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(-x) = -\sin x$, azaz a szinusz függvény páratlan.

5.43. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Bizonyítás: Tekintsük az origó középpontú, egységnyi sugarú körvonal egy tetszőleges $(a; b)$ koordinátájú pontját. Ekkor $a = \cos x$ és $b = \sin x$. Ezt felhasználva az $(a; b) = (\cos x; \sin x)$ pontnak az origótól való távolsága

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

ami éppen a bizonyítandó összefüggés. ∎

5.44. **Tétel.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y.$$

5.45. **Következmény.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y.$$

Bizonyítás: Felhasználva az előbbi tételt

$$\cos(x + y) = \cos\big(x - (-y)\big) = \cos x \cdot \cos(-y) + \sin x \cdot \sin(-y),$$

adódik. Mivel a koszinusz függvény páros, a szinusz függvény pedig páratlan azt kapjuk, hogy

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin y \cdot \sin y,$$

ami a bizonyítandó állítás. ∎

5.46. **Következmény.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y.$$

Bizonyítás: Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos\big(90^\circ - (x+y)\big) = \cos\big((90^\circ - x) - y\big) = \\ &= \cos\big((90^\circ - x)\big) \cdot \cos y + \sin\big((90^\circ - x)\big) \cdot \sin y = \\ &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,\end{aligned}$$

ami a bizonyítandó állítás. ■

5.47. **Következmény.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

Bizonyítás: Mivel a koszinusz függvény páros és a szinusz függvény páratlan, ezért

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin\big(x + (-y)\big) = \sin x \cdot \cos(-y) + \cos x \cdot \sin(-y) = \\ &= \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y\end{aligned}$$

adódik, ami az igazolandó összefüggés. ■

5.48. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Bizonyítás: Mivel

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$

ezért

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

teljesül, ami a bizonyítandó állítás. ■

5.49. **Tétel.** Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

amivel igazoltuk az állítást.

Bizonyítás: Mivel

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

ezért

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x,$$

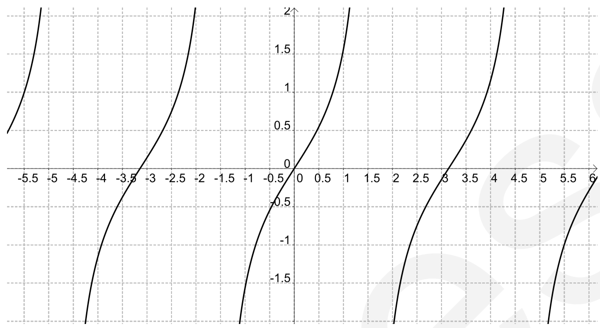
amivel bizonyítottuk az állítást. ■

5.50. **Definíció.** *Tangens* függvénynek nevezzük a

$$\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

függvényt.

5.51. **Megjegyzés.** A $\mathrm{tg} x$ függvény grafikonja:



5.52. **Tétel.** A $\mathrm{tg}\, x$ függvény páratlan, azaz minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$ esetén

$$\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\, x.$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}.$$

Mivel a $\sin x$ függvény függvény páratlan és a $\cos x$ függvény páros, ezért

$$\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\,\mathrm{tg}\, x.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathrm{tg}(-x) = -\,\mathrm{tg}\, x,$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathrm{tg}\, x$ függvény páratlan. ■

5.53. **Tétel.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\mathrm{tg}(x+y)$ értelmezve van teljesül, hogy

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{1 - \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}.$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

továbbá

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y}.$$

A kapott tört számlálóját és nevezőjét osszuk el $\cos x \cdot \cos y$-al. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y}}.$$

Felhasználva, hogy

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$$

ami a bizonyítandó összefüggés. ■

5.54. **Következmény.** Minden olyan x esetén, amelyre $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg}(2x)$ értelmezve van:

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

Bizonyítás: Az előbbi tételt alkalmazzuk úgy, hogy $y = x$. ■

5.55. **Tétel.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{tg}(x-y)$ értelmezve van teljesül, hogy

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

Bizonyítás: Mivel a tangens függvény páratlan, ezért

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\big(x + (-y)\big) &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-y)}{1 + \operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{tg}(-y)} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \end{aligned}$$

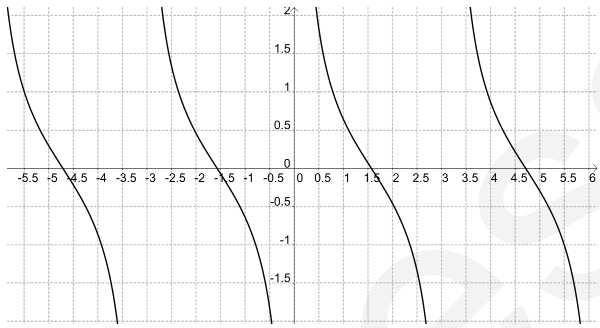
ami a bizonyítandó állítás. ■

5.56. **Definíció.** *Kotangens* függvénynek nevezzük az

$$\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

függvényt.

5.57. **Megjegyzés.** A $\mathrm{ctg} x$ függvény grafikonja:



5.58. **Megjegyzés.** Minden $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$ esetén

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x}.$$

5.59. **Tétel.** A $\mathrm{ctg}\, x$ függvény páratlan, azaz minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi\}$ esetén

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\,\mathrm{ctg}\, x.$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{ctg}(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)}.$$

Mivel a $\sin x$ függvény függvény páratlan és a $\cos x$ függvény páros, ezért

$$\frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\,\mathrm{ctg}\, x.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\,\mathrm{ctg}\, x,$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathrm{ctg}\, x$ függvény páratlan. ∎

5.60. **Tétel.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{ctg}(x+y)$ értelmezve van teljesül, hogy

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}.$$

Bizonyítás: Felhasználva a

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

továbbá a

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}.$$

Ismételten alkalmazva a

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

átírást azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x},$$

ami a bizonyítandó összefüggés. ■

5.61. **Következmény.** Minden olyan x esetén, amelyre $\operatorname{ctg} x$ és $\operatorname{ctg}(2x)$ értelmezve van:

$$\operatorname{ctg}(2x) = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Bizonyítás: Az előbbi tételt alkalmazzuk úgy, hogy $y = x$. ■

5.62. **Következmény.** Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén, amelyre $\operatorname{ctg}(x-y)$ értelmezve van teljesül, hogy

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x}.$$

Bizonyítás: Az előbbi következményt felhasználva

$$\operatorname{ctg}(x+y) = \operatorname{ctg}\big(x + (-y)\big) = \frac{-\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{-\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} x} = \\ = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} y - \operatorname{ctg} x}$$

adódik, amivel igazoltuk az állítást. ■

5.63. **Definíció.** Az $\sin x, \cos, \mathrm{tg}x, \mathrm{ctg}x$ függvényeket összefoglaló néven *trigonometrikus függvények*nek nevezzük.

5.64. **Definíció.** A trigomonetrikus függvények inverzeit *arkusz* függvényeknek nevezzük.

- A $\sin x$ függvény $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumra való leszűkítésének inverze: $\mathrm{arcsin}x$;
- A $[0; \pi]$ intervallumra leszűkített $\cos x$ függvény inverze: $\mathrm{arccos}x$;
- A $\mathrm{tg}x$ függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumra való leszűkítésének inverze: $\mathrm{arctg}x$;
- A $]0; \pi[$ intervallumra leszűkített $\mathrm{ctg}x$ függvény inverze: $\mathrm{arcctg}x$.

5.65. **Definíció.** *Elemi függvény*nek nevezünk minden olyan függvényt, amely az $x; \sin x; \mathrm{e}^x$ függvényekből véges sok összeadással, szorzással, konstanssal való szorzással, osztással, inverz képzéssel és összetett függvény képzéssel állítható elő.

Ellenőrző kérdések

1. Az elsőfokú polinomfüggvény grafikonja ....
2. Az $f(x) = 2x - 4$ függvény meredeksége ....
3. Az $f(x) = x^2 - 7x + 12$ polinomnak az $x = 5$ valós szám gyöke, így a polinom osztható ....-tel.
4. Definíció szerint $\operatorname{ch} x =$ ....
5. Definíció szerint $\operatorname{sh} x =$ ....
6. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x =$ ....
7. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x =$ ....
8. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x =$ ....
9. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x - \sin^2 x =$ ....
10. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(x + y) =$ ....
11. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x + y) =$ ....
12. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(x - y) =$ ....
13. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x - y) =$ ....
14. A $\cos 15^\circ$ pontos értéke: ....
15. A $\sin 15^\circ$ pontos értéke: ....

6. Függvények gazdasági alkalmazásokban

Egy vállalat termelési költségei több tényezőtől függnek. Például a technológiától, a felhasznált alapanyagok árától és a termelés mennyiségétől.

6.1. **Definíció.** *Fix költség*nek nevezzük azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek. Például ilyenek a bérleti díjak, a hitelkamatok, vagy az olyan egyszeri beruházások, mint például egy gyártósor megvásárlása ahhoz, hogy a gyártási folyamatot el tudjuk kezdeni. A fix költséget szokás FC-vel jelölni (fix cost).

6.2. **Definíció.** *Változó költség*nek hívjuk azokat a költségeket, amelyek függnek a gyártott mennyiségtől. Például ilyen lehet a dolgozók bére, az anyagköltség, energiaköltség. A változó költséget szokás VC-vel jelölni (variable cost).

6.3. **Definíció.** *Költségfüggvény*nek mondjuk azt a függvényt, amely megadja, hogy a termelt mennyiség függvényében mennyi lesz a teljes költségünk, azaz a termelt mennyiséghez hozzárendeli a termelés teljes költségét. A költségfüggvényt szokás $C(q)$-val vagy $TC(q)$-val jelölni (total cost).

6.4. **Megjegyzés.** A korábbi jelöléseket megtartva:

$$C(q) = FC + VC(q).$$

6.5. **Definíció.** *Átlagos fixköltség*nek nevezzük egy termék egy egységére jutó fix költségét.

6.6. **Megjegyzés.** Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor

$$AC = \frac{FC}{q}.$$

6.7. **Példa.** Egy konzervgyárban naponta 500 üveg befőttet állítanak elő. Egy üveg befőtt átlagos változó költsége 350 Ft, az üzem napi fix költsége 60.000 Ft. Ekkor a költségfüggvény:

$$C(q) = 60.000 + 350q.$$

6.8. **Definíció.** A termelésből származó összes *bevétel* az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata. A termék árát p-vel, az eladott mennyiséget q-val jelölve, a fent leírtak a $p \cdot q$ összefüggéssel írhatóak le. A teljes bevételt R-el vagy TR-el szokás jelölni (revenue).

6.9. **Definíció.** A *keresleti függvény* egy termék minden lehetséges árához hozzárendeli a hozzá tartozó keresett mennyiséget. A függvényt $D(p)$-vel (demand) vagy $f(p)$-vel szokás jelölni.

6.10. **Megjegyzés.** A keresleti függvény általában monoton csökkenő, azaz növelve az árat, a belőle keresett mennyiség csökken és fordítva.

6.11. **Megjegyzés.** Ha $f(p)$ egy keresleti függvény, azaz az $f(p)$ függvény megadja, hogy a p ár mellett mennyi az adott termék iránti kereslet, akkor a termék eladásából származó teljes bevétel:

$$R(p) = p \cdot f(p).$$

6.12. **Példa.** Egy termék iránti keresleti függvény

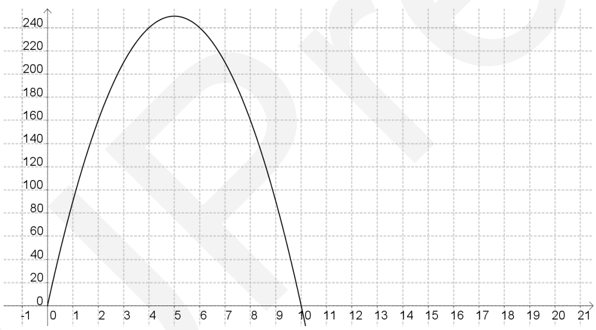
$$f(p) = 100 - 10p.$$

A termék árát euro-ban, a termék iránti keresletet ezer darabban értjük. Ekkor a bevételi függvény

$$R(p) = p \cdot f(p) = p \cdot (100 - 10p) = 100p - 10p^2.$$

Felmerülhet a kérdés, hogy milyen árat válasszunk a terméknek ahhoz, hogy a bevételünk maximális legyen? Ekkor az $R(p)$ függvény maximumát keressük:

$$R(p) = -10 \cdot (p^2 - 10p) = -10 \cdot [(p-5)^2 - 25] = -10 \cdot (p-5)^2 + 250.$$



A fenti függvénynek akkor van maximuma, ha $p = 5$. Azt kaptuk tehát, hogy 5 euro ár esetén lesz a legnagyobb a bevételünk. Ekkor

$$q = f(5) = 100 - 10 \cdot 5 = 50,$$

így 50.000 darab terméket kell legyártunk. Ebben az esetben jutunk tehát a legnagyobb bevételhez, ami

$$R(5) = 5 \cdot f(5) = p \cdot q = 250.$$

6.13. **Definíció.** A keresleti függvény inverzét *inverz keresleti függvény*nek nevezzük. Az inverz keresleti függvény minden egyes mennyiségegységhez hozzárendeli azt az árat, amely mellett a vizsgált személy vagy csoport még éppen hajlandó az adott terméket megvásárolni. Az említett árat *rezervációs ár*nak nevezzük.

6.14. **Definíció.** Ha egy termékből q mennyiséget gyártunk, akkor az *átlagbevétel*:

$$AR = \frac{R(q)}{q}.$$

6.15. **Definíció.** *Profit*nak vagy *nyereség*nek nevezzük a bevétel és költség különbségét:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q).$$

6.16. **Definíció.** *Fedezeti pont*nak nevezzük azt a pontot, amely azon termelési mennyiséghez tartozik, amikor a profit zérus.

6.17. **Megjegyzés.** Azon termelési mennyiség esetén, amikor a profit zérus, a bevételi függvény és költségfüggvény értéke azonos.

6.18. **Megjegyzés.** Az átlagköltség függvény minimuma a fedezeti pont.

6.19. **Definíció.** *Üzembezárási pont*nak nevezzük az átlagos változó költség függvény minimumát.

6.20. **Példa.** Egy vállalat teljes költségfüggvénye:

$$C(q) = q^3 - 4q^2 + 10q + 10,$$

ahol q a vállalat által termelt mennyiség. Ekkor a fix költség: 10, a változó költség függvény:

$$VC(q) = q^3 - 4q^2 + 10q.$$

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 4q + 10 + \frac{10}{q}.$$

Az átlagos fix költség függvény:

$$AFC(q) = \frac{10}{q},$$

az átlagos változó költség függvény:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10.$$

Az üzembezárási pont az előbbi függvény minimuma:

$$AVC(q) = q^2 - 4q + 10 = (q-2)^2 + 6,$$

így $q = 2$ az a termelési mennyiség, amely az üzem bezárását jelenti.

6.21. **Definíció.** A *kínálat* egy vagy több termék azon mennyisége, amivel az általunk vizsgált személy vagy vállalat rendelkezik, és azt adott ár mellett eladni is hajlandó. Kézenfekvőnek tűnik, hogy minden lehetséges árszinthez az emellett érvényes kínálatot rendeljük hozzá, létrehozva így a *kínálati függvény*t. Ezt $S(p)$-vel jelölhetjük (supply), ahol p az adott termék ára.

6.22. **Megjegyzés.** A vállalatok kínálati függvényei monoton növekvőek, vagyis az ár emelkedésével a kínált mennyiség is nő.

6.23. **Definíció.** A keresleti és kínálati függvény metszéspontját *egyensúlyi pont*nak hívjuk. Az egyensúlyi ponthoz tartozó mennyiséget *egyensúlyi mennyiség*nek, az egyensúlyi ponthoz tartozó árat *egyensúlyi ár*nak nevezzük.

6.24. **Példa.** Egy termék keresleti függvénye:

$$f(p) = 150 - 3p,$$

kínálati függvénye:

$$S(p) = 2p - 20.$$

Az árat euro-ban értjük, a mennyiséget ezer darabban. Az egyensúlyi árat az $f(p) = S(p)$ egyenlet megoldása adja:

$$\begin{aligned} 150 - 3p &= 2p - 20 \\ 170 &= 5p, \end{aligned}$$

amiből azt kapjuk, hogy $p = 34$ euro. Ekkor az egyensúlyi mennyiség:

$$q = f(34) = S(34) = 150 - 3 \cdot 34 = 48,$$

tehát $q = 48.000$ darab termék az egyensúlyi mennyiség.

6.25. **Definíció.** Amikor a kereslet nagyobb, mint a kínálat, *túlkereslet*ről vagy más szóval *hiány*ról beszélünk. Ha a kínálat nagyobb, mint a kereslet, akkor *túlkínálat*ról beszélünk, ilyenkor *felesleg* keletkezik.

6.26. **Definíció.** *Hasznossági függvény*nek nevezzük azt a függvényt, amely a gazdaság egy szereplőjének (vagy bizonyos esetekben a társadalom egészének) meghatározott javakhoz kapcsolódó preferenciáit matematikai eszközökkel modellezi.

6.27. **Megjegyzés.** A hasznossági függvénytől elvárjuk, hogy monoton növekvő és konkáv legyen. Lényegében az azt jelenti, hogy ha az általunk vizsgált termékből többet vásárolunk, akkor az nagyobb hasznosságot eredményez, továbbá a növekvő mennyiségekhez „egyre kevésbé növekvő” hasznot rendel. A hasznossági függvényt $U(x)$-el jelöljük (utility).

6.28. **Példa.** Például az $U(x) = \sqrt{x}$ függvény vagy az $U(x) = \log_2 x$ függvény teljesíti az előbb leírt követelményeket.

Ellenőrző kérdések

1. Azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek ...... költségeknek nevezzük.
2. Azokat a költségeket, amelyek függnek a gyártott mennyiségtől .... költségeknek nevezzük.
3. A $C(q) = 20q^2 + 1000$ költségfüggvény esetén a fix költség ...., míg a változó költség ....
4. Egy termék egy egységére jutó fix költségét .... nevezzük.
5. Az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata a ....
6. Ha $R(q)$ bevételi függvény, $C(q)$ költségfüggvény, akkor a profitfüggvény ....

7. Függvények fizikai és biológiai alkalmazásokban

Ebben a fejezetben néhány olyan fizikai és biológiai példát mutatunk be, amelyekben a korábban tárgyalt függvények szerepelnek.

7.1. **Szinuszos feszültség.** Egy téglalap alakú vezető keretet egyenletesen forgatunk ω szögsebességgel egy homogén B indukciójú mágneses térben úgy, hogy a keret forgástengelye merőleges a mágneses tér erővonalaira. A vezető keret két kivezetésén, idő szerint szinuszosan váltakozó feszültség keletkezik. Feltételezzük, hogy a keret felülete F. A keletkezett *feszültség pillanatnyi érték*e

$$U(t) = \omega \cdot B \cdot F \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Ha a keret N darab menetet tartalmaz fémvezetőből, akkor

$$U(t) = N \cdot \omega \cdot B \cdot F \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Ekkor a szinuszos a feszültség maximális értéke:

$$N \cdot \omega \cdot B \cdot F,$$

mivel $|\sin x| \leq 1$. A fenti függvényben szereplő ω értéket a feszültség *körfrekvenciájá*nak nevezzük, amelyre

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f,$$

teljesül, ahol f a feszültség *frekvenciája* vagy a keret forgásának *fordulatszám*a, továbbá

$$f = \frac{1}{T},$$

ahol T a feszültség *periódusideje*. Ezen idő alatt a feszültség egy „teljes rezgést végez”. Ez alatt az idő alatt feszültség kétszer vált előjelet (polaritást) és kétszer veszi fel a zérus értéket. A fentiek értelmében az

$$U_{\text{max}} = N \cdot \omega \cdot B \cdot F$$

jelöléssel a feszültség-idő függvény az

$$U(t) = U_{\text{max}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

alakban is felírható.

7.2. **Példa.** Egy motor tekercsét $50\,[\text{Hz}]$ frekvenciájú, $U_{\text{max}} = 325\,[\text{V}]$ maximális feszültségű hálózatra kötünk. Ekkor a periódusidő:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02\,[\text{s}].$$

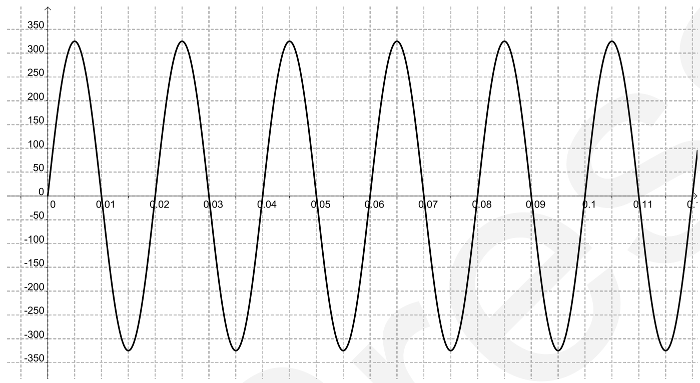
A körfrekvencia:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 100\pi \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] = 314,16 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right].$$

A feszültség-idő függvény:

$$U(t) = 325 \cdot \sin(100\pi \cdot t).$$

A függvény grafikonja:



7.3. **Mechanikai hullámok.** Rugalmas közegben terjedő hullám kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = A \cdot \sin\left(k \cdot x - \omega \cdot t\right),$$

ahol ω a körfrekvencia, azaz

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T},$$

ahol T a hullám periódusideje. Továbbá

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

az úgynevezett *hullámszám*, ahol λ a *hullámhossz*, amely megmutatja, hogy mekkora utat tesz meg a hullám egy periódusnyi idő alatt, továbbá x a hullámforrástól mért távolság. A A konstans értékét amplitúdónak is szokás nevezni.

7.4. **Példa.** Gumikötél végéről $4\,[\mathrm{cm}]$ amplitúdójú, $0,2\,[s]$ periódusidejű hullámzást indítunk, amely $21\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ sebességgel terjed. Adjuk meg a kitérés-idő függvényt!

Az előbbi modell szerint a kitérés idő függvény

$$y(t) = A \cdot \sin\left(k \cdot x - \omega \cdot t\right).$$

A megadott adatokat felhasználva azt kapjuk, hogy a körfrekvencia:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0,2} = 10 \cdot \pi,$$

a hullámhossz:

$$\lambda = v \cdot T = 4,2\,[\mathrm{m}],$$

a hullámszám:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi}{4,2} = 0,476 \cdot \pi.$$

Behelyettesítve az adatokat a kitérés-idő függvény:

$$y(t) = 4 \cdot \sin\left(0,476 \cdot \pi \cdot 3 - 10 \cdot \pi \cdot t\right) = 4 \cdot \sin(1,428\pi - 10\pi \cdot t).$$

7.5. **Harmonikus rezgőmozgás.** Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right),$$

sebesség-idő függvénye:

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

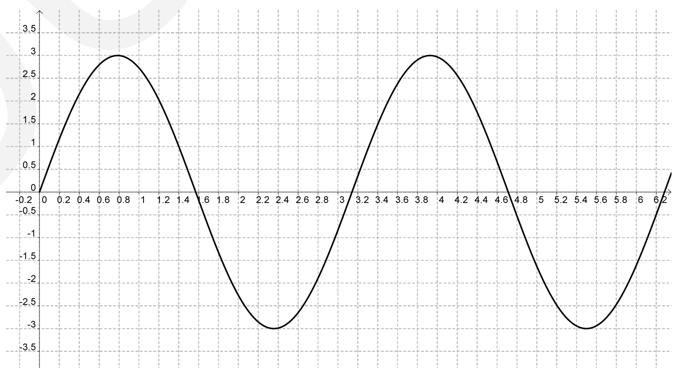
gyorsulás-idő függvénye:

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

7.6. **Példa.** Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:

$$y(t) = 3 \cdot \sin(2t),$$

ahol az időt másodpercben, a kitérést méterben mérjük. Felvázoljuk a függvény grafikonját:



7.7. **Fényerő.** A fény a ködben elég rövid távon elveszíti a fényerejét. A fényerőt a fényforrástól d távolságban az

$$I(d) = I_0 \cdot a^d$$

függvény adja meg, ahol I_0 a kezdeti fényerő, a pedig egy, a köd sűrűségétől függő állandó ($0 < a < 1$).

7.8. **Feladat.** Tudjuk, hogy egy autó lámpája még ködben is észrevehető, ha az eredeti fényének legalább az 5%-a megvan. Egy adott napon $a = 0,95$. Milyen messziről lehet látni a szembejövő autó lámpáját?

Az előbbi modellt felhasználva

$$0,05I_0 = I_0 \cdot 0,95^d,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$0,05 = 0,95^d.$$

Vegyük mindkét oldal (például) 10-es alapú logaritmusát. Ekkor

$$\lg 0,05 = \lg 0,95^d \qquad \Rightarrow \qquad \lg 0,05 = d \cdot \lg 0,95$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$d = \frac{\lg 0,05}{\lg 0,95} \approx 58,4.$$

Tehát $58,4$ méternél távolábbi autó lámpáját (az említett napon) már nem fogjuk látni.

7.9. **Radioaktív anyagok bomlása.** Ha a 0 időpillanatban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma:

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t},$$

ahol λ az úgynevezett *bomlási állandó*.

7.10. **Példa.** A ^{14}C szénizotóp radioaktív. Tudjuk, hogy a ^{14}C-et tartalmazó anyagban 5570 év alatt csökken a felére a ^{14}C atomok száma, azaz 5570 év a felezési idő. Ebből kiszámolhatjuk a bomlási állandót. Mivel

$$0,5N_0 = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 5570},$$

ezért N_0-al egyszerűsítve

$$0,5 = \mathrm{e}^{-5570\lambda}$$

adódik. Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$\ln 0,5 = -5570\lambda,$$

így a bomlási állandó:

$$\lambda = -0,000124.$$

7.11. **Nyomás.** A kilométerben megadott h magasságban uralkodó nyomást a

$$p(h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-0,1275 \cdot h}$$

függvény adja meg, ahol p_0 a Föld felszínén mért légnyomás értékét jelenti, ami $100\,000$ [Pa].

7.12. **Példa.** Milyen magasságban lesz a légnyomás a Föld felszínén mért érték fele?

Az előbbi modell szerint keressük azt a h magasságot, amelyre teljesül, hogy

$$\frac{1}{2}p_0 = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-0,1275 \cdot h}.$$

Ha egyszerűsítünk p_0-lal, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-0,1275 \cdot h}.$$

Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát:

$$\ln 2 = -0,1275h \qquad \Rightarrow \qquad h \approx 5,436\,[km].$$

Azt kaptuk tehát, hogy $5\,436$ méter magasságban lesz a légnyomás a Föld felszínén mért érték fele.

7.13. **Korlátozott növekedés modellje.** Az úgynevezett korlátozott (logisztikus) növekedés matematikai modellje szerint egy populáció egyedszáma időben nem a végtelenségig nő, hanem a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva a lélekszám:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t},$$

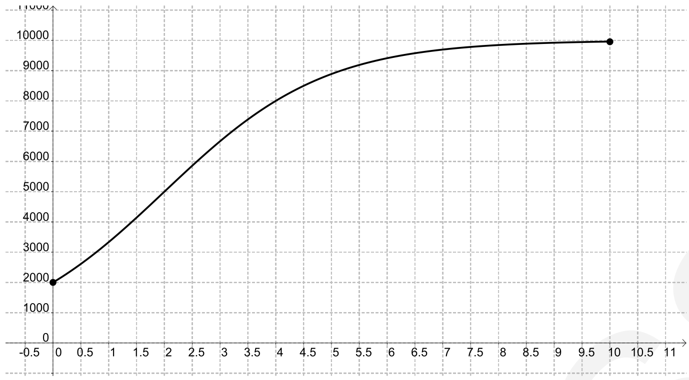
ahol N_0 a populáció induló egyedszáma, K a körülmények szerint „eltartható” maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző konstans.

7.14. **Példa.** Egy populáció induló egyedszáma $N_0 = 2\,000$ egyed, továbbá ismertek a $K = 10\,000$ és az $a = 0,5$ értékek. Az időt években mérjük. A korlátozott növekedés modellje szerint, t év múlva hány egyede lesz a populációnak? Vázoljuk fel a függvény grafikonját a $[0; 10]$ intervallumon!

Az adatok behelyettesítése után, az előbbi modellt alkalmazva azt kapjuk, hogy az egyedszám t év múlva:

$$N(t) = \frac{20\,000\,000}{2\,000 + 8\,000 \cdot 0,5^t}.$$

A függvény grafikonja:



7.15. **Népességnövekedés modellje.** A népességnövekedés egy lehetséges modellje

$$N(t) = K \cdot (1 - c \cdot a^t),$$

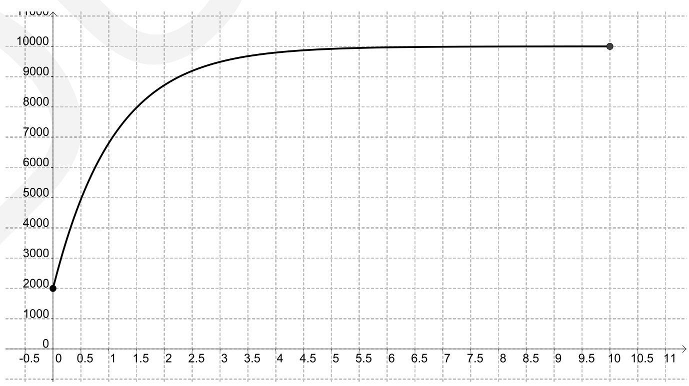
ahol K, c és a konstansok, t pedig a vizsgálat kezdete óta eltelt idő években, $N(t)$ a népesség létszáma az adott t időben.

7.16. **Példa.** Egy adott területen írjuk fel a népesség lélekszámát az idő függvényében az előbbi modell alapján, ha rendelkezésre állnak a $K = 10\,000$, $c = 0,8$ és $a = 0,4$ adatok! (Az eltelt időt években mérjük.) Vázoljuk fel a függvény grafikonját a $[0; 10]$ intervallumon!

A modell alapján a népesség lélekszámát leíró függvény:

$$N(t) = 10\,000 \cdot (1 - 0,8 \cdot 0,4^t).$$

A függvény grafikonja:



7.17. **Titkosírás.** Egy szöveg titkosítása történhet például úgy, hogy a betűket egy adott „eljárással" megváltoztatjuk és az így keletkezett szöveget küldjük el. Ahhoz, hogy a kódolt üzenetet „vissza tudjuk fejteni" egyértelmű hozzárendelést kell létrehoznunk, azaz egy bijektív függvényt kell megadnunk.

Ellenőrző kérdések

1. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye: ....
2. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test sebesség-idő függvénye: ....
3. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulás-idő függvénye: ....
4. A korlátozott (logisztikus) növekedés modellje: ....

8. Halmazok számossága

8.1. **Megjegyzés.** Korábban már definiáltuk a véges halmaz számosságát. Ezt most megismételjük. Egy halmaz elemeinek a számát a halmaz *számosság*ának mondjuk. Jele: $|A|$. Egy halmazt *véges*nek nevezünk, ha elemeinek a száma véges.

8.2. **Tétel.** Ha A és B véges halmazok, akkor

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

8.3. **Példa.** Egy 100 fős társaságban 70-en teáznak és 50-an kávéznak. Hány olyan személy van, aki teázik és kávézik is?

Megoldás:

Jelöljük T-vel azon személyek halmazát, akik teáznak és K-val azon személyek halmazát, akik kávéznak. Ekkor

$$|T \cup K| = 100; \; |T| = 70; \; |K| = 50.$$

Ekkor az előbbi tétel szerint

$$|T \cup K| = |T| + |K| - |T \cap K|.$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat

$$100 = 70 + 50 - |T \cap K|$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$|T \cap K| = 20.$$

8.4. **Tétel.** Ha A, B és C véges halmazok, akkor

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

8.5. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy a H és K halmazok *egyenlő számosságú*ak, vagy más szóval *ekvivalens*ek, ha létezik közöttük bikjetív függvény, azaz van olyan $f\colon H \to K$ invertálható függvény, melynek az értékkészlete K. Jele: $H{\sim}K$.

8.6. **Tétel.** Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor

- $A{\sim}A$, azaz a definiált reláció reflexív
- ha $A{\sim}B$, akkor $B{\sim}A$, azaz $\sim$ szimmetrikus
- ha $A{\sim}B$ és $B{\sim}C$, akkor $A{\sim}C$, azaz $\sim$ tranzitív,

következésképpen $\sim$ ekvivalenciareláció.

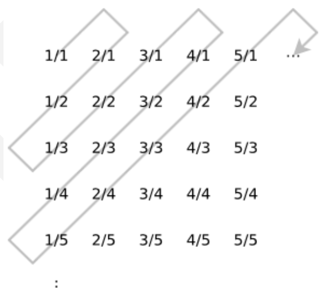
Bizonyítás: A reflexivitást az $f\colon A \to A$, $f(x) = x$ leképezés biztosítja. Ha A és B ekvivalensek, akkor létezik $f\colon A \to B$ bijektív leképezés. Ekkor $f^{-1}\colon B \to A$ bijekció, így $B \sim A$. Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor léteznek és $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to C$ bijekciók. Ekkor $g \circ f$ bijekció lesz A és C között. ∎

8.7. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy halmaz

- *véges*, ha elemeinek a száma véges, pontosabban, ha üreshalmaz vagy ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy a halmaz és az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz ekvivalensek, azaz egyenlő számosságúak;
- *végtelen*, ha nem véges;
- *megszámlálhatóan végtelen*, ha a számossága megegyezik a természetes számok halmazának számosságával (azaz ha az elemei „felsorolhatóak”);
- *megszámlálható*, ha véges vagy megszálmlálhatóan végtelen.

8.8. **Tétel.** A racionális számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás: Soroljuk fel a racionális számokat az alábbiak szerint:



Itt minden racionális szám megtalálható, némelyik többször is. (Amelyiket korábban felsoroltuk, azt már kihagyjuk.) A táblázatot járjuk be a jelölt módon. Ezáltal minden természetes számhoz hozzárendelünk egy racionális számot a fenti bejárás szerint, azaz például

$$1 \mapsto 1; 2 \mapsto 2; 3 \mapsto \frac{1}{2}; 4 \mapsto \frac{1}{3}; 5 \mapsto 3; 6 \mapsto 4.$$

A megadott bejárás szerint haladunk, azokat a pozitív racionális számokat, amik már korábban szerepeltek, kihagyjuk. Ezzel megadtunk egy bijektív leképezést a természetes számok halmaza és a racionális számok halmaza között, amivel igazoltuk az állítást. ∎

8.9. **Tétel.** Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen.

Bizonyítás: Az $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k,l) = 2^k \cdot 3^l$ leképzés bijektív. ■

8.10. **Tétel.** Megszámlálható számosságú halmaz minden részhalmaza is megszámlálható.

8.11. **Tétel.** Minden végtelen halmaznak van megszámlálható számosságú részhalmaza.

8.12. **Tétel.** (Cantor) Egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üreshalmaz.

8.13. **Tétel.** Az $[a;b]$ intervallum nem megszámlálható számosságú.

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy $[a;b]$ megszámláható számosságú, azaz $[a;b] = \{c_1; c_2; \ldots\}$. Definiáljuk az alábbi $[a_n; b_n]$ intervallumokat az alábbi módon:

- $[a_0; b_0] = [a;b]$
- $[a_{n+1}; b_{n+1}] \subset [a_n; b_n]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$
- $b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}$
- $c_n \neq [a_n; b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$

A Cantor-féle metszettétel alapján létezik

$$c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n; b_n] \subset [a;b],$$

azonban $c \notin \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\} = [a;b]$, így ellentmondásra jutottunk. ■

8.14. **Tétel.** A valós számok halmazának számossága nem megszámlálhatóan végtelen.

8.15. **Definíció.** A valós számok halmazának számosságát *kontinuum* számosságúnak nevezzük.

Ellenőrző kérdések

1. Ha A és B véges halmazok, akkor $|A \cup B| =$................
2. A racionális számok halmazának számossága ....
3. Az irracionális számok halmazának számossága ....
4. A valós számok halmazának számossága ....
5. A $[0; 1]$ intervallum számossága ....

9. Komplex számok

9.1. **Motiváció.** A komplex számok fogalmának bevezetését az indokolja, hogy a valós számok halmazán negatív számból nem tudunk páros gyökkitevőjű gyököt vonni, ezért felmerül a kérdés, hogy tudunk-e olyan számhalmazt „létrehozni”, amelynél ez már lehetséges.

Bizonyos mérnöki számítások megkövetelnek olyan helyzetet, amikor negatív számból kell páros gyökkitevőjű gyököt vonnunk. Például gondoljunk arra, hogy előfordulhat olyan mérnöki probléma, amely során az $x^2 + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldása során -1 számból kellene négyzetgyököt vonni, ami azonban a valós számok halmazán nem lehetséges, mert nincs olyan valós szám, amelynek a négyzete negatív szám lenne.

A komplex számok halmazán definiálhatunk olyan számot, aminek a négyzete negatív lesz.

A valós számok halmazának elemei megfeleltethetők a számegyenes pontjainak. A komplex számok halmazának elemeit a számsík ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) pontjainak feleltethetjük meg. Ebben az esetben a síkot Gauss-féle *komplex számsík*nak nevezzük, a vízszintes tengelyt *valós tengely*nek, a függőleges tengelyt *képzetes tengely*nek mondjuk. Jelöljük i-vel a számsík $(0; 1)$ pontját. Ezt a számot nevezzük *képzetes egység*nek. Az $(a; 0)$ számok a valós számegyenesen helyezkednek el, így ezek a számok megfeleltethetők a valós számoknak. Emiatt az $(a; 0)$ komplex számokat egyszerűen a-val jelöljük.

9.2. **Definíció.** A $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon vezessünk be két műveletet, egy összeadást és egy szorzást az alábbi módon:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$
$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; bc + ad).$$

Az így bevezett két művelettel ellátott $\mathbb{C}$ halmazt a *komplex számok halmazá*nak nevezzük.

9.3. **Megjegyzés.** Megmutatható, hogy az előbb bevezett összeadás és szorzás kommutatív, asszociatív, létezik zéruselem az összeadásra és egységelem a szorzásra nézve, minden komplex számnak létezik additív inverze, és minden nullától különböző komplex számnak létezik multiplikatív inverze, továbbá, hogy a szorzás disztributív az összeadásra nézve.

9.4. **Tétel.** Ha i jelöli a képzetes egységet, akkor $i^2 = -1$.

Bizonyítás: Az előbb definiált szorzás műveletét használva azt kapjuk, hogy

$$i^2 = i \cdot i = (0;1) \cdot (0;1) = (0-1; 0+0) = (-1;0),$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. ∎

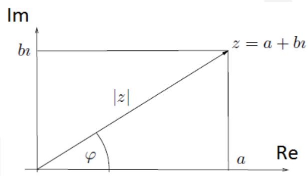
9.5. **Tétel.** Minden komplex szám előáll $z = a + b \cdot i$ alakban.

Bizonyítás: Ha $z = (a;b)$, akkor

$$z = (a;b) = (a;0) + (0;b) = a \cdot (1;0) + b \cdot (0;1) = a + b \cdot i,$$

amivel az állítást igazoltuk. ∎

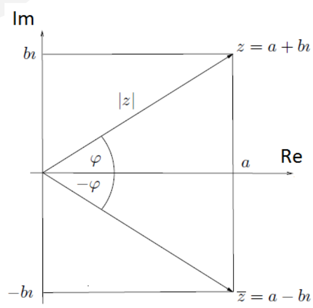
9.6. **Definíció.** A $z = (a;b) \in \mathbb{C}$ komplex szám $z = a + b \cdot i$ alakját a komplex szám *algebrai alak*jának nevezzük. Az a-t a komplex szám *valós rész*ének, vagy *reális rész*ének, b-t a komplex szám *képzetes rész*ének vagy *imaginárius rész*ének mondjuk. Jelölései: $a = Re(z)$, $b = Im(z)$. A komplex számnak a valós tengellyel bezárt $\varphi \in [0; 2\pi[$ szögét a komplex szám *argumentum*ának vagy *szög*ének hívjuk.



9.7. **Példa.** A $z = 2 + 3i$ komplex szám valós része $Re(z) = 2$, képzetes része $Im(z) = 3$.

9.8. **Definíció.** A $z = a + b \cdot i$ komplex szám *konjugált*ja a $\overline{z} = a - b \cdot i$ komplex szám.

9.9. **Megjegyzés.** A konjugálás a valós tengelyre való tükrözést jelenti.



9.10. **Példa.** A $z = 1 + i$ komplex szám konjugáltja a

$$\overline{z} = 1 - i$$

komplex szám.

9.11. **Definíció.** A $z = a + b \cdot i$ komplex szám *hossza* a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

valós szám.

9.12. **Példa.** A $z = 1 + i$ komplex szám hossza a

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

valós szám.

9.13. **Megjegyzés.** Műveletek algebrai alakban megadott komplex számokkal: a $z_1 = a_1 + i \cdot b_1$ és a $z_2 = a_2 + i \cdot b_2$ algebrai alakú komplex számok

- *összeg*e a

  $$z_1 + z_2 = a_1 + i \cdot b_1 + a_2 + i \cdot b_2 = a_1 + b_2 + i \cdot (a_2 + b_1 2)$$

  komplex szám;
- *szorzat*a a

  $$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

  komplex szám;
- *hányados*a a

  $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} = \frac{a_1 + i \cdot b_1}{a_2 + i \cdot b_2} \cdot \frac{a_2 - i \cdot b_2}{a_2 - i \cdot b_2} = \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_1 + i \cdot (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}, \end{aligned}$$

  azaz két algebrai alakban megadott komplex számot úgy osztunk el, hogy a törtet bővítjük a nevező konjugáltjával, majd megszorozzuk a számlálót a számlálóval és a nevezőt a nevezővel.

9.14. **Példa.** Legyen $z_1 = 2 - 3i$ és $z_2 = 1 + i$. Ekkor:

- a két komplex szám összege:

  $$z_1 + z_2 = 2 - 3i + 1 + i = 3 - 2i$$

- a két komplex szám szorzata:

$$z_1 \cdot z_2 = (2-3i) \cdot (1+i) = 2 + 2i - 3i - 3i^2 = 2 - i + 3 = 5 - i$$

- a z_1 és $z_2 \neq 0$ komplex számok hányadosa:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{3-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \\ = \frac{3+3i-2i-2i^2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i.$$

9.15. **Tétel.** (az abszolútérték és a konjugálás tulajdonságai)
Ha z, z_1 és z_2 tetszőleges komplex számok, akkor

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

c) $|z| = |\overline{z}|$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

f) $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Bizonyítás: Legyen $z = a + b \cdot i$, $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$.

a) Mivel

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) = \\ = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

ezért

$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} = \\ = \sqrt{(a_1^2a_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2) + (a_1^2b_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2)} = \\ = \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2}.$$

Másrészt

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)} = \\ = \sqrt{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2},$$

amivel az első összefüggést igazoltuk.

b) Az előzővel analóg módon igazolható.

c) Egyrészt
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$
másrészt
$$|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$
amivel megkaptuk a kívánt összefüggést.

d) Az összeadást, majd a konjugálást elvégezve, majd megfelelően csoportostíva azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + a_2 + i \cdot (b_1 + b_2)} = a_1 + a_2 - i \cdot (b_1 + b_2) = \\ &= a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,\end{aligned}$$
ami a bizonyítandó állítás.

e) A szorzást, majd a konjugálást elvégezve, majd megfelelően csoportostíva azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{a_1a_2 - b_1b_2 + i \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)} = \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 - i \cdot (a_1b_2 + a_2b_1) = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,\end{aligned}$$

f) Az előzőhöz hasonlóan igazolható.

Az állításokat igazoltuk. ■

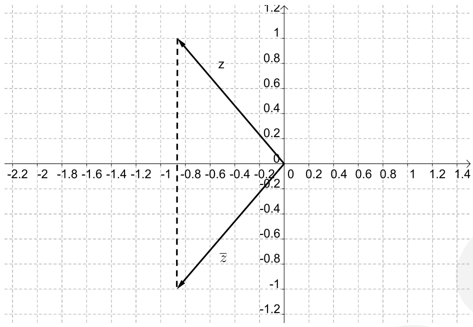
9.16. **Definíció.** A $z = a + b \cdot i$ komplex szám *trigonometrikus alak*ján a
$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$
komplex számot értjük.

9.17. **Megjegyzés.** Tekintsük a $z = a+b\cdot i$ algebrai alakban megadott komplex számot, és legyen φ a komplex szám argumentuma. Ekkor egyrészt
$$\sin\varphi = \frac{a}{|z|}, \text{ amiből } a = |z| \cdot \sin\varphi,$$
másrészt
$$\cos\varphi = \frac{b}{|z|}, \text{ amiből } b = |z| \cdot \sin\varphi,$$
azaz
$$z = |z| \cdot \cos\varphi + |z| \cdot \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

9.18. **Példa.** Felírjuk a

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

komplex számnak és konjugáltjának a trigonometrikus alakját.



Ehhez először meghatározzuk a komplex szám hosszát:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

A komplex szám argumentuma: $\varphi = 150^\circ$, így a trigonometrikus alak

$$z = 1 \cdot (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ.$$

A $\overline{z}$ komplex szám trigonometrikus alakja

$$\overline{z} = 1 \cdot (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = \cos 210^\circ + i \sin 210^\circ.$$

9.19. **Példa.** A

$$z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

komplex szám algebrai alakja

$$z = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i.$$

9.20. **Tétel.** A

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

és a

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

komplex számok szorzata a

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

komplex szám.

Bizonyítás: Felhaszálva a

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

és a

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

addíciós tételeket, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \\ + i \cdot \big(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)\big) = \\ = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big), \end{aligned}$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

9.21. **Tétel.** A

$$z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

és a

$$z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

komplex számok hányadosa a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$$

komplex szám.

Bizonyítás: A

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

komplex szám reciproka

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} \cdot \big(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\big),$$

ugyanis az előző állítást felhaszálva

$$z \cdot \frac{1}{z} = |z| \cdot \frac{1}{|z|} \cdot \big(\cos(\varphi - \varphi) + i\sin(\varphi - \varphi)\big) = 1.$$

Ezért

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} \cdot \big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big),$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

9.22. **Tétel.** A $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ komplex szám n-edik hatványa a

$$z^n = |z|^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\big)$$

komplex szám.

Bizonyítás: Mivel

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z,$$

ezért a szorzásra vonatkozó azonosság felhasználásával adódik az állítás. ■

9.23. **Példa.** Tekintsük a

$$z_1 = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$

és a

$$z_2 = 3 \cdot (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

komplex számokat. Szorzatuk

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ),$$

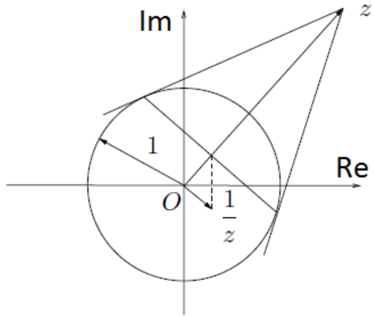
hányadosuk

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} \cdot (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ),$$

továbbá

$$z_1^{10} = 2^{10} \cdot (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ).$$

9.24. **Megjegyzés.** Komplex szám reciprokának geometriai tartalma: z-nek az egységkörre vonatkozó tükörképét (inverzét) tükrözzük a valós tengelyre.



9.25. **Megjegyzés.** Tekinstük a $z = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ komplex számot. Ennek a négyzete (algabrai alakú komplex számként tekintve):

$$z^2 = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i \cdot 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Másrészt z trigonometrikus alakú komplex számnak is tekinthető A négyzetre emelést ilyen alakban elvégezve:

$$z^2 = \cos 2\varphi + i \cdot \sin 2\varphi.$$

A két komplex számnak meg kell egyeznie, így egyrészt

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

másrészt

$$\sin 2\varphi = 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi,$$

amelyek az ötödik fejezetben már ismertetett trigonometrikus azonosságok.

9.26. **Definíció.** A z komplex szám n-edik *gyök*ének nevezzük a w komplex számot, ha $w^n = z$.

9.27. **Példa.** A $z = 1 + i$ komplex számnak egy négyzetgyöke a

$$w = \sqrt[4]{2} \cdot (\cos 22,5^\circ + i \cdot \sin 22,5^\circ)$$

komplex szám, ugyanis

$$w^2 = \left(\sqrt[4]{2} \cdot (\cos 22,5^\circ + i \cdot \sin 22,5^\circ)\right)^2 = \sqrt{2} \cdot (\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

9.28. **Tétel.** Minden nullától különböző komplex számnak n darab n-edik gyöke van, melyek

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right), \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

alakban állnak elő.

Bizonyítás: Ha

$$w = |w| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi) \quad \text{és} \quad z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

akkor $w^n = z$ esetén

$$w^n = |w|^n \cdot \big(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi) \big) = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

ahonnan $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ és

$$n \cdot \psi = \varphi + k \cdot 2\pi \quad (k = 0, \ldots, n-1),$$

ahonnan

$$\psi = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n},$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

9.29. **Definíció.** A $z = 1$ komplex szám n-edik gyökeit n-edik egységgyököknek nevezzük.

9.30. **Megjegyzés.** Az n-edik egységgyökök origó középpontú, n oldalú szabályos sokszög csúcsaiban helyezkednek el.

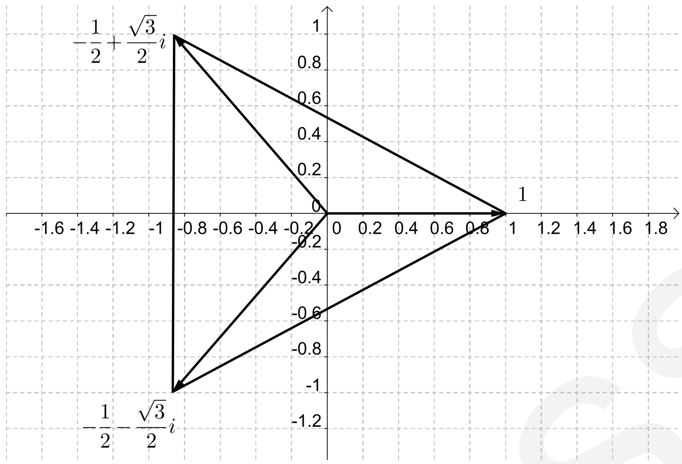
9.31. **Példa.** Meghatározzuk és ábrázoljuk a harmadik egységgyököket. Tekintsük a $z = 1$ komplex számot. Ennek hossza 1, argumentuma 0. Az előbbi tételt felhasználva

$$w_0 = \left(\cos \frac{0 + 0 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 0 \cdot 2\pi}{3} \right) = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$w_1 = \left(\cos \frac{0 + 1 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 1 \cdot 2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$w_2 = \left(\cos \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2 \cdot 2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Ezeket ábrázolva:



tehát a harmadik egységgyökök valóban origó középpontú szabályos háromszög csúcsaiban helyezkednek el.

9.32. **Példa.** A $z = -4$ komplex szám négyzetgyökei: $\pm 2i$, ugyanis

$$(2i)^2 = 4i^2 = 4 \cdot (-1) = -4.$$

9.33. **Definíció.** Minden komplex szám felírható

$$z = |z| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$$

alakban, melyet a komplex szám *exponenciális alak*jának vagy *Euler-féle alak*jának nevezünk.

9.34. **Tétel.** Ha

$$z_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_1}$$

és

$$z_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_2},$$

akkor

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Bizonyítás: Az állítás azonnal adódik abból, hogy azonos alapú hatványok szorzásakor az alapot a kitevők összegére emeljük. ∎

9.35. **Tétel.** Ha

$$z_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_1}$$

és

$$z_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi_2},$$

akkor
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Bizonyítás: Az állítás azonnal adódik abból, hogy azonos alapú hatványok osztásakor az alapot a kitevők különbségére emeljük. ■

9.36. **Tétel.** Ha $z = |z| \cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$, akkor
$$z^n = |z|^n \cdot \mathrm{e}^{in\varphi}.$$

Bizonyítás: Az állítás azonnal adódik abból, hogy hatvány hatványozásakor az alapot a kitevők szorzatára emeljük. ■

9.37. **Megjegyzés.** Mivel
$$\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

ezért a koszinusz függvény párossága és a szinusz függvény páratlan tulajdonsága miatt
$$\mathrm{e}^{-i\cdot\varphi} = \mathrm{e}^{i\cdot(-\varphi)} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi.$$

Az előbbi két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy
$$\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} + \mathrm{e}^{-i\cdot\varphi} = 2\cos\varphi,$$

amiből
$$\frac{\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} + \mathrm{e}^{-i\cdot\varphi}}{2} = \cos\varphi$$

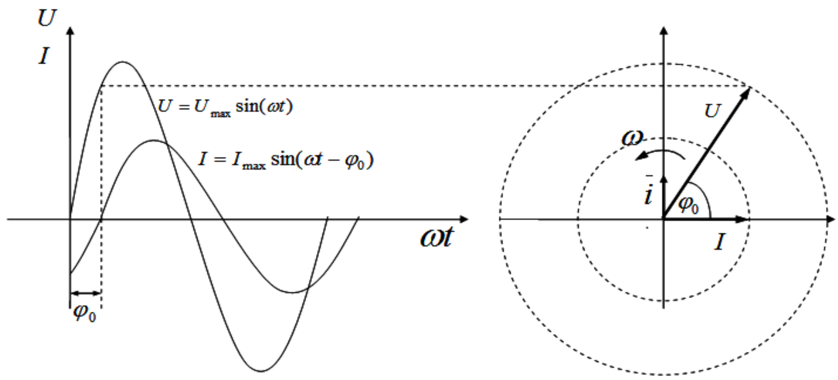
adódik. Hasonlóan a fenti két egyneletet kivonva azt kapjuk, hogy
$$\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} - \mathrm{e}^{-i\cdot\varphi} = 2i \cdot \sin\varphi,$$

amiből
$$\frac{\mathrm{e}^{i\cdot\varphi} - \mathrm{e}^{-i\cdot\varphi}}{2i} = \sin\varphi$$

adódik.

9.38. **Komplex váltóáramú hálózatok.** Az elektromos hálózatban a hálózati feszültség szinuszos váltófeszültség. A hálózatra egy elektromos fogyasztót (Z) kötve, azon szinuszos váltóáram folyik. A feszültség-idő, illetve áramerősség-idő függvények:
$$U(t) = U_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0)$$
$$I(t) = I_{\text{max}} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0).$$

Az összefüggésekben $\omega = 2\pi \cdot f$, ahol f a hálózati frekvencia (Magyarországon $f = 50\,[\mathrm{Hz}]$). Az ábráról leolvasható, hogy a feszültség és áram között általános esetben φ_0 fáziseltolás van, azaz a feszültség és áram nem ugyanabban az időpillanatban veszi fel maximális értékét.
Váltóáramoknál az egyenáramokhoz hasonlóan megfogalmazható az Ohm törvény. Ehhez a feszültséget, áramerősséget és váltóáramú ellenállást komplex mennyiségekként kell értelmeznünk. Ehhez tekintsük az alábbi ábrát!



Az ábrán látható, hogy az $\hat{U}$ és $\hat{I}$ komplex feszültséget és áramerősséget úgy vezetjük be, hogy képzetes részük minden pillanatban megegyezzen a feszültség és áramerősség értékével. Ahogy az idő telik, az $\hat{U}$ és $\hat{I}$ vektorok az origó körül azonos nagyságú ω szögsebességgel forognak, így bezárt szögük (φ_0) nagysága változatlan. Ebből adódóan a

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

hányados időben állandó. A $\hat{Z}$ mennyiséget *komplex váltóáramú ellenállás*nak, vagy másképpen *komplex impedanciá*nak nevezzük. Ezek alapján az Ohm törvény váltóáramokra:

$$\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I}.$$

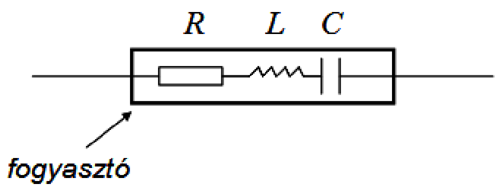
Váltóáramok esetén egy fogyasztónak nem csak ohmos, hanem induktív és kapacitív ellenállása is lehet. Ezek szintén komplex mennyiségek, értékük az alábbi összefüggésekkel számítható:

$$\hat{X}_L = \omega \cdot L \cdot i; \qquad \hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i.$$

Az fenti egyenletekben L a fogyasztó induktivitása, C pedig a kapacitása. A megfelelő mértékegységek:

$$L[\mathrm{H}]; \quad C[\mathrm{F}]; \quad \omega\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]; \quad \hat{X}_L[\Omega]; \quad \hat{X}_C[\Omega].$$

A fogyasztó ohmos ellenállását, induktivitását és kapacitását rajzban különválasztva jelöljük.



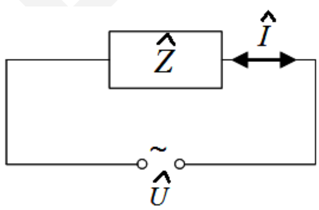
A fogyasztó teljes komplex impedanciája a három különböző ellenállás összege:

$$\hat{Z} = R + \hat{X}_L + \hat{X}_C.$$

A megfelelő mértékegységek:

$$\hat{Z}[\Omega]; \quad R[\Omega].$$

(Természetesen L, C, vagy R értéke nulla is lehet, ekkor a fenti kifejezésben kevesebb tag szerepel.)



Ohm törvénye akkor is teljesül, ha a fenti ábrán szereplő fogyasztót egy bonyolult, több fogyasztóból álló hálózattal helyettesítjük. Néhány speciális esetben az eredő komplex impedancia egyszerűen számítható.
Soros kapcsolás esetén:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \ldots + \hat{Z}_n.$$

Párhuzamos kapcsolás esetén:

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\hat{Z}_n}.$$

A φ_0 fázisszög a komplex impedancia argumentuma.
További, a gyakorlat szempontjából hasznos összefüggéshez jutunk, ha az Ohm törvényében szereplő összefüggés abszolútértékét vesszük:

$$|\hat{U}| = |\hat{Z}| \cdot |\hat{I}|,$$

amiből az következik, hogy

$$U_{\max} = Z \cdot I_{\max}.$$

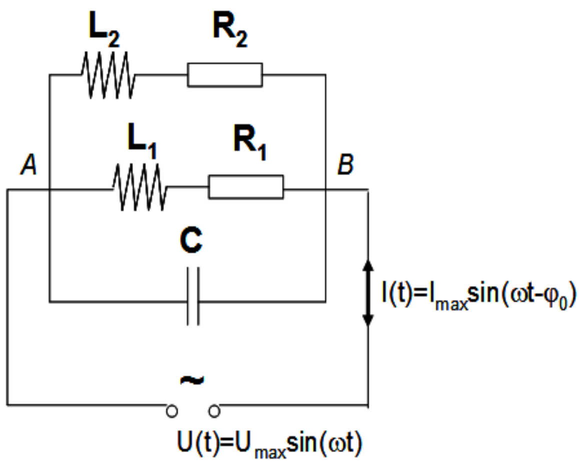
Az összefüggésben a valós impedancia (valós váltóáramú ellenállás). A maximális értékek (csúcsértékek) helyett a gyakorlatban az effektív (hatásos) értékeket használják. Egy váltóáram effektív feszültségén és áramerősségén annak az egyenáramnak a feszültségét és áramerősségét értjük, amely egy teljes periódus alatt ugyanannyi hőt termel a fogyasztón, mint a váltóáram. Szinuszos váltóáram esetén a feszültség csúcsértékéből annak effektív értékét az alábbi módon számolhatjuk ki:

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}; \qquad I_{\text{eff}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Magyarországon a hálózati feszültség effektív értéke $220\,[\mathrm{V}]$. Ebből adódik, hogy a feszültség értéke $-311\,[\mathrm{V}]$ és $311\,[\mathrm{V}]$ közötti érték között változik.
Ezt követően az Ohm törvényt az alábbi formába írhatjuk:

$$U_{\text{eff}} = Z \cdot I_{\text{eff}}.$$

9.39. **Példa.** Tekintsük az alábbi váltóáramú hálózatot:



Adatok:

$$U_{\text{eff}} = 220\,[\text{V}];\ f = 50\,[\text{Hz}];\ L_1 = 0,1\,\text{H};\ L_2 = 0,15\,[\text{H}];$$
$$C = 5 \cdot 10^{-5}\,[\text{F}];\ R_1 = 3\,[\Omega];\ R_2 = 4\,[\Omega].$$

a) Határozzuk meg a komplex, majd a valós impedanciát az alábbi váltóáramú hálózatok A és B pontja között!

b) Határozzuk meg a φ_0 fázisszöget!

c) Határozzuk meg a főágban folyó áramerősség effektív értékét!

d) Adjuk meg az áramerősséget az idő függvényében!

Megoldás:

a) Mivel

$$\omega = 2\pi \cdot f \approx 314,16 \left[\frac{1}{\text{s}}\right],$$

ezért egyrészt

$$\hat{X}_{L_1} = \omega \cdot L_1 \cdot i \approx 31,42i\,[\Omega],$$

másrészt

$$\hat{X}_{L_2} = \omega \cdot L_2 \cdot i \approx 47,12i\,[\Omega].$$

A fentiek felhasználásával az induktív ellenállás egyrészt

$$\hat{Z}_1 = R_1 + \hat{X}_{L_1} = (3 + 31,42i)\,[\Omega],$$

másrészt

$$\hat{Z}_2 = R_2 + \hat{X}_{L_2}(4 + 47,12i)\,[\Omega].$$

A kapacitív ellenállás

$$\hat{X}_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} \cdot i \approx -63,66i\,[\Omega].$$

Az eredő komplex impedancia

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{X}_C}$$

Behelyettesítve az adatokat, továbbá elvégezve az osztást és az összeadást azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\hat{Z}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \frac{1}{\hat{X}_C} = \frac{1}{3+31,42i} + \frac{1}{4+47,12i} + \frac{1}{-63,66i} =$$

$$= \frac{1}{3+31,42i} \cdot \frac{3-31,42i}{3-31,42i} + \frac{1}{4+47,12i} \cdot \frac{4-47,12i}{4-47,12i} +$$

$$+ \frac{1}{-63,66i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3-31,42i}{9+31,42^2} + \frac{4-47,12i}{16+47,12^2} + \frac{i}{63,66} \approx$$

$$\approx 0,048 - 0,0369i \left[\frac{1}{\Omega}\right],$$

így

$$\hat{Z} = \frac{1}{0,048 - 0,0369i} \approx 13,09 + 10,07i\,[\Omega].$$

A valós impedancia

$$Z = \sqrt{13,09^2 + 10,07^2} \approx 13,13\,[\Omega].$$

b) A fázisszög:

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{10,07}{13,09} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 \approx 37,57^\circ.$$

c) Az effektív áramerősség

$$I_{\mathrm{eff}} = \frac{U_{\mathrm{eff}}}{Z} = \frac{220}{13,13} \approx 16,76\,[\mathrm{A}].$$

d) A maximális áramerősség

$$I_{\max} = I_{\mathrm{eff}} \cdot \sqrt{2} \approx 23,7\,[\mathrm{A}].$$

Az áramerősség-idő függvény

$$I(t) = I_{\max} \cdot \sin(\omega t - \varphi_0) = 23,7 \cdot \sin(314,16t - 0,21\pi).$$

Ellenőrző kérdések

1. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám hossza ....
2. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám konjugáltja ....
3. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám négyzete ....
4. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám trigonometrikus alakja ....
5. A $z = 1 + i$ komplex szám trigonometrikus alakja ....
6. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám exponenciális alakja ....
7. Az i képzetes egység 100-adik hatványa ....
8. A komplex számok halmazán $\sqrt{-9} =$ ....
9. A komplex számok halmazán $\sqrt{-16} =$ ....
10. A $z = 1$ komplex szám negyedik gyökei: ....

10. Az ellenőrző kérdések megoldásai

Logikai állítások, műveletek

1. Ha $p \Rightarrow q$, akkor azt mondjuk, hogy p elégséges feltétele q-nak.
2. Ha $q \Rightarrow p$, akkor azt mondjuk, hogy q szükséges feltétele p-nek.
3. Ha $p \Rightarrow q$ és $q \Rightarrow p$, akkor $p = q$.
4. Két állítás konjunkciója pontosan akkor igaz, ha mindkét állítás igaz.
5. Két állítás diszjunkciója pontosan akkor igaz, ha legalább az egyik állítás igaz.
6. Két állítás konjunkciója pontosan akkor hamis, ha legalább az egyik állítás hamis.
7. Két állítás diszjunkciója pontosan akkor hamis, ha mindkét állítás hamis.
8. A de-Morgan azonosság szerint $\neg(p \vee q)$ $\neg p \wedge \neg q$.
9. A de-Morgan azonosság szerint $\neg(p \wedge q)$ $\neg p \vee \neg q$.

Halmazelméleti alapok

1. Két halmaz unióján azt a halmazt értjük, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei.
2. Két halmaz metszetén azt a halmazt értjük, melynek elemei mindkét halmaznak elemei.
3. Az $A \setminus B$ halmazon azt a halmazt értjük, melynek elemei az A halmaznak elemei, de a B halmaznak nem elemei.
4. Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme.
5. Egy 5-elemű halmaz összes részhalmazinak száma: $2^5 = 32$.
6. Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $A = B$.
7. Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
8. Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. A természetes számok halmazából az összeadás és szorzás műveletek nem vezetnek ki.

10. Az egész számok halmazából az összeadás, kivonás és szorzás műveletek nem vezetnek ki.
11. A racionális számok halmazából az összeadás, kivonás, szorzás és osztás műveletek nem vezetnek ki.
12. A racionális és irracionális számok halmazának uniója a valós számok halmaza.
13. A de-Morgan azonosság szerint $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
14. A de-Morgan azonosság szerint $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Relációk

1. Egy reláció ekvivalencia reláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.
2. Egy reláció rendezési reláció, ha reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és teljes.
3. Egy $R \subset A \times A$ reláció reflexív, ha minden $a \in A$ esetén aRa.
4. Egy $R \subset A \times A$ reláció szimmetrikus, ha minden $aRb \Rightarrow bRa$.
5. Egy $R \subset A \times A$ reláció tranzitív, ha aRb és $bRc \Rightarrow aRc$.
6. Ha az A halmaz 3 elemű és a B halmaz 6 elemű, akkor $A \times B$ elemeinek a száma: $3 \cdot 6 = 18$.

Függvények

1. Egy reláció függvény, ha egyértelmű hozzárendelés, azaz ha $(a; b_1) \in R$ és $(a; b_2) \in R$, akkor $b_1 = b_2$.
2. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ zérushelye x_0, ha $f(x_0) = 0$.
3. Az $f(x) = x^3 - 3x^2$ függvény zérushelyei: $x = 0$; $x = 3$.
4. Páros függvények összege páros.
5. Páratlan függvények szorzata páros.
6. Egy függvény korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.
7. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton növekvő, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ teljesül, hogy $f(x_1) \le f(x_2)$.
8. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény monoton csökkenő, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ teljesül, hogy $f(x_1) \ge f(x_2)$.

9. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ teljesül, hogy $f(x_1) < f(x_2)$.
10. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ha minden $x_1, x_2 \in D$ esetén, melyre $x_1 < x_2$ teljesül, hogy $f(x_1) > f(x_2)$.
11. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény konvex, ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a függvény grafikonja fölött halad.
12. Az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény konkáv, ha a függvény grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a függvény grafikonja alatt halad.
13. Ha az f függvény konvex, akkor $-f$ konkáv.
14. Ha az f függvény konkáv, akkor $-f$ konvex.
15. Az $f(x) = 2^x$ függvény inverze $f^{-1}(x) = \log_2 x \quad (x > 0)$.
16. Az $f(x) = \log_2 x \quad (x > 0)$ függvény inverze $f^{-1}(x) = 2^x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Elemi függvények

1. Az elsőfokú polinomfüggvény grafikonja egyenes.
2. Az $f(x) = 2x - 4$ függvény meredeksége $m = 2$.
3. Az $f(x) = x^2 - 7x + 12$ polinomnak az $x = 5$ valós szám gyöke, így a polinom osztható $x - 5$-tel.
4. Definíció szerint $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
5. Definíció szerint $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
6. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
7. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x)$.
8. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
9. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.
10. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.
11. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.
12. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.
13. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$.

14. A $\cos 15^\circ$ pontos értéke:
$\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

15. A $\sin 15^\circ$ pontos értéke:
$\sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$
$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Függvények gazdasági alkalmazásai

1. Azokat a költségeket, amelyek a termelés mennyiségétől függetlenek fixköltségeknek nevezzük.
2. Azokat a költségeket, amelyek függnek a gyártott mennyiségtől változóköltségeknek nevezzük.
3. A $C(q) = 20q^2 + 1000$ költségfüggvény esetén a fix költség 1000, míg a változó költség $20q^2$.
4. Egy termék egy egységére jutó fix költségét átlagos fixköltségnek nevezzük.
5. Az eladott mennyiség és a termék egységárának a szorzata a bevétel.
6. Ha $R(q)$ bevételi függvény, $C(q)$ költségfüggvény, akkor a profitfüggvény $\Pi(q) = R(q) - C(q)$.

Függvények fizikai és biológiai alkalmazásai

1. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test kitérés-idő függvénye:
$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
2. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test sebesség-idő függvénye:
$y(t) = A \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)$.
3. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulás-idő függvénye:
$y(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
4. A korlátozott (logisztikus) növekedés modellje:
$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$.

Halmazok számossága

1. Ha A és B véges halmazok, akkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. A racionális számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen.
3. Az irracionális számok halmazának számossága kontinuum végtelen.
4. A valós számok halmazának számossága kontinuum végtelen.
5. A $[0;1]$ intervallum számossága kontinuum végtelen.

Komplex számok

1. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám hossza $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám konjugáltja $\overline{z} = a - b \cdot i$.
3. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám négyzete $z^2 = a^2 - b^2 + 2ab \cdot i$.
4. A $z = a+b\cdot i$ komplex szám trigonometrikus alakja $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$.
5. A $z = 1 + i$ komplex szám trigonometrikus alakja $z = \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$.
6. A $z = a + b \cdot i$ komplex szám exponenciális alakja $z = |z| \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\varphi}$.
7. Az i képzetes egység 100-adik hatványa $i^{100} = i^0 = 1$.
8. A komplex számok halmazán $\sqrt{-9} = \pm 3i$.
9. A komplex számok halmazán $\sqrt{-16} = \pm 4i$.
10. A $z = 1$ komplex szám negyedik gyökei: ± 1, $\pm i$.

Irodalomjegyzék

[1] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[2] Bárd Ágnes – Frigyesi Miklós – Lukács Judit – Major Éva – Székely Péter – Vancsó Ödön, *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten (feladatgyűjtemény)*, Műszaki Kiadó, 2006.

[3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[4] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[5] Bíró Fatime – Vincze Szilvia, *A gazdasági matematika alapjai*, Debreceni Egyetemi Kiadó, 2010.

[6] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[7] Denkinger Géza – Gyurkó Lajos, *Analízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1987.

[8] Gábos Adél – Halmos Mária, *Készüljünk az érettségire matematikából közép-, emelt szinten*, Műszaki Könyvkiadó, 2005.

[9] Dr. Gerőcs László – Juhász István – Orosz Gyula – Paróczay József – Számadó László – Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[10] Gilbert János – Sólyom András – Kocsányi László, *Fizika mérnököknek I-II*, Egyetemi Tankönyv, Műegyetemi Kiadó, 1999.

[11] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[12] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfalvi Péter – Siposs András – Vancsó Ödön, *Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I.*, Konsept-H Könyvkiadó, 2002.

[13] Hortobágyi István – Marosvári Péter – Pálmay Lóránt – Pósfalvi Péter – Siposs András – Vancsó Ödön, *Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika II.*, Konsept-H Könyvkiadó, 2002.

[14] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*, http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[15] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[16] Kertesi Gábor, *Mikroökonómia előadásvázlatok*, http://www.econ.core.hu/ kertesi/kertesimikro/tartalom.html, 2004.

[17] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.

[18] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[19] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei, 11 – 12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[20] Losonczi László, *Döntéselmélet*, http://riemann.math.klte.hu/ losi/jegyzet/eco/ujdont4.pdf, 2012.

[21] Pintér Lajos, *Analízis I*, Typotex, 1998.

[22] Rapcsák Tamás, *Többszempontú döntési problémák*, http://www.oplab.sztaki.hu/tanszek/download/ITobbszdontmodsz.pdf, 2007.

[23] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[24] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.

[25] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.

[26] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[27] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[28] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial, Life and Social Sciences*, Brooks/Cole, 1999.

[29] Temesi József, *A döntéselmélet alapjai*, AULA, Budapest, 2002.

[30] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

[31] Hal R. Varian, *Mikroökonómia középfokon*, Akadémiai Kiadó Zrt., 2010.

Tartalomjegyzék