DE TTK

1949

PROBLEME UND ENTWICKLUNGSMÖGLICHKEITEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER MITTELSCHULE BEIM THEMA „EXPONENTIELLE UND LOGARITHMISCHE FUNKTIONEN”

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

a szerző neve: Várady Ferenc
témavezető neve: Dr. Ambrus András

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2017

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika Didaktika *programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.*
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Debrecen, 2017*. február 9.*

____
Várady Ferenc

Tanúsítom, hogy Várady Ferenc doktorjelölt 2009 - 2017 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika Didaktika *programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.*
Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2017*február 9.*

____
Dr. Ambrus András

PROBLEME UND ENTWICKLUNGSMÖGLICHKEITEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER MITTELSCHULE BEIM THEMA „EXPONENTIELLE UND LOGARITHMISCHE FUNKTIONEN"

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika és számítástudományok tudományágban

Írta: Várady Ferenc okleveles matematikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori iskolája (Matematika Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Ambrus András

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Molnár Lajos	……………
tagok:	Dr. Hortobágyi István	……………
	Dr. Boros Zoltán	……………

A doktori szigorlat időpontja: 2015. február 12.

Az értekezés bírálói:

	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 200… . ……………… … .

Köszönetnyilvánítás

Hálás szívvel köszönöm témavezetőmnek a sok segítséget, lényeglátó szakmai tanácsait, a sok törődést és bíztatást a munka során. Hálával tartozom anyanyelvi lektoromnak, Michael Knotenak is. Továbbiakban szeretnék köszönetet mondani Dr. Szabó Csabának és feleségének Dr. Szabóné Dr. Erdélyi Évának a sok segítségért. És végül, de nem utolsó sorban hálásan köszönöm Feleségemnek a sok bíztatást, tanácsot és támogatást.

INHALTSVERZEICHNIS

EINFÜHRUNG

In dieser Arbeit sind die Methoden und Ergebnisse meines entwickelnden Unterrichtsexperiments zu finden, in dem die exponentiellen und logarithmischen Funktionen und ihrer Anwendungen aus neuen methodologischen Aspekten bearbeitet und unterrichtet wurden. Das Experiment fand im Schuljahr 2010/11, vom Anfang November 2010 bis Mitte Januar 2011 in dem Pilisvörösvárer (Werischwar) Friedrich Schiller Nationalitätengymnasium, in der gemischten Gruppe aus den Klassen 11.c/12.s statt.

Bei der Auswahl der Gruppe spielten zwei wichtige Aspekte eine wesentliche Rolle: (1) Ein wichtiger Gesichtspunkt war, dass die Schüler Mathematik nicht auf der Muttersprache Ungarisch, sondern auf der Arbeitssprache Deutsch gelernt haben. In der ungarischen Sprache stehen zahlreiche Lehrbücher, Arbeitsbücher, Arbeitshefte, Aufgabensammlungen zur Verfügung. In der deutschen Sprache dagegen nur etliche, zum Teil aus dem Ungarischen übersetzte, teilweise mit dem neuen Nationallehrplan und mit dem neuen Abitur nicht kompatible Auflagen. Diese deutschsprachigen Bücher sind die folgenden: die Übersetzungen der „alten“ Hajnal Bücher, die „alte grüne“ Aufgabensammlung (Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából - NT-81307), die „neue“ Abituraufgabensammlung (Egységes érettségi feladatgyűjtemény - Matematika I./II.) und das Hilfsmaterial der Gruppe DePhyMa, das den Lehrstoff der Klassenstufen 9-12. des „alten“ Abiturs zusammenfasst (Kompendium). Außerdem können einigen bilinguale Mittelschulen etliche deutsche Lehrbücher in begrenzter Menge benutzen (z.B. die Serie von Lambacher-Schweizer), sie sind aber nur ausschließlich für Übungen geeignet, da der Aufbau des Lehrstoffes dem ungarischen Schulcurriculum überhaupt nicht entspricht. Aus diesem Grund habe ich zum entwickelnden Unterrichtsexperiment einen deutschsprachigen Lehrstoff entwickelt mit zwei grundsätzlichen Zielrichtungen: Erstens wollte ich kein ungarisches Buch übersetzen, sondern ich wollte eine Methode einführen, die voraussichtlich den Schülern hilft, die schwierigeren mathematischen Begriffe, Zusammenhänge der exponentiellen und logarithmischen Funktion und ihrer Anwendungen zu verstehen. Das zweite Ziel war, falls das Experiment die Erwartungen erfüllt, kann man die erarbeitete Methode weiterhin, in anderen Themen des Mathematikunterrichts verwenden. (2) Der zweite Aspekt bei der Auswahl der Gruppe war, dass die Schüler scheinbar größere Probleme mit Mathematik hatten. So bestand die Möglichkeit zu untersuchen, ob es zu verwirklichen ist, solche Schüler mit einer anderen Methode als die herkömmliche, entwickeln zu können.

Ich unterrichte seit fünfzehn Jahren Mathematik. Meine Erfahrungen auf diesem Gebiet können als umfangreich betrachtet werden, da ich in verschiedenen Städten Ungarns (Zalaegerszeg, Kecskemét, Pilisvörösvár und Budapest) und in verschiedenen Schultypen (bilinguales Gymnasium, bilinguale Fachmittelschule, in einem Nationalitätengymnasium und in der Deutschen Schule Budapest) gearbeitet habe. Ich habe die Schüler anfangs – in den vier Jahren der Mittelschule – für das „alte" Abitur vorbereitet, später, ab 2004, für das neue. Das neue Abitur bedeutete einen Paradigmenwechsel. Die Bücher, Aufgabensammlungen passten sich langsam an die neuen Herausforderungen an. Was bedeutet das? Während im „alten" Abitur in erster Linie die „rein" mathematischen Kenntnissen befragt wurden, d.h. solche Aufgaben, die in alltägliche, praktische Aufgaben nur mit Schwierigkeiten umgeformt werden konnten, wird im neuen Abitur oft auch nach den im alltäglichen Textumfeld formulierten Problemen gefragt.
Es lohnt sich im gleichen Themenkreis je eine Aufgabe zu erwähnen:

a) Altes Abitur: 1322. (2326.) „Eine Pyramide hat ein Rechteck zur Grundfläche. Die Pyramidenspitze liegt auf der Geraden, die durch einen Eckpunkt dieses Rechtecks geht und senkrecht auf der Grundfläche steht. Die Rechteckseiten betragen 6 cm und 9 cm, die Pyramidenhöhe misst 12 cm. Wie groß sind die Seitenkanten und das Volumen der Pyramide? (Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988)
b) Ähnliche Aufgabe im neuen Abitur:
18. Ein aufgestelltes Zirkuszelt bildet eine regelmäßige sechsseitige gerade Pyramide, deren Grundkante 12 Meter und deren Höhe 16 Meter beträgt. Beim Aufbau des Zeltes werden 13 Stangen verwendet. Sechs Verfestigungsstangen nehmen den Verlauf der sechs Seitenkanten ein. Es sind noch sieben vertikale Trägerstangen. Eine steht im Mittelpunkt der Grundfläche und hält das Zelt in voller Höhe. Die sechs kleinen Stangen halten in den dem Boden näherliegenden Dreiteilungspunkt der Seitenkante.
a) Wie viel Quadratmeter Flächeninhalt besitzt die Plane, mit der das Zelt gebaut wird (Mantelfläche der Pyramide)? (Das Ergebnis soll ganzzahlig gerundet angegeben werden!)
b) Insgesamt wie viel Meter lang sind die 13 Stangen?
c) Wir führen und spannen ein Seil um die oberen Endpunkte der kürzeren Stützstangen. Wie lang ist dieses Seil? (05.05.2009)

Man kann diesen Vergleich auch bei exponentiellen und logarithmischen Aufgaben ziehen. Während früher auf diesem Gebiet fast ausschließlich Terme, die Funktionen, Gleichungen, Ungleichungen vorkamen, kann man heute auch auf „praktische" Aufgaben stoßen. Ich unterrichtete auch aus den

„neuen“ ungarischen Lehrbüchern. Sie sind schon überwiegend anhand der Erwartungen des neuen Nationallehrplanes und des neuen Abiturs zusammengestellt. Beim Thema Exponential- und Logarithmusfunktion und ihrer Anwendungen hatten meine Schüler aber weiterhin Probleme. Einer meiner Schüler hat es in Worten formuliert, als wir in der 12. Klassen, etwa ein Jahr nachher, als wir den Logarithmus gelernt haben, mit einer praktischen Aufgabe wiederholt hatten. Wir haben eben eine logarithmische Textaufgabe gelöst, als er mit Begeisterung aufgerufen hat: „*Wenn ich gewusst hätte, dass man den Logarithmus auch für einen solchen Zweck verwenden kann, hätte ich ihn voriges Jahr mit mehr Begeisterung gelernt.*“

Die genannte Aufgabe war die folgende:

(Oktober 2009) Wenn der Laserstrahl, der ursprünglich eine Intensität von $I_0 \left(\frac{watt}{m^2}\right)$ *hat in einem bestimmten Stoff x mm (x ≥ 0) tief eindrängt, dann ist seine Intensität in dieser Tiefe* $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}} \left(\frac{watt}{m^2}\right)$. *Dieser Stoff wird durch einen Laserstrahl von der Intensität* $I_0 = 800 \left(\frac{watt}{m^2}\right)$ *beleuchtet.*

a) Ergänzen Sie die folgende Tabelle! (Die Werte, die Sie für die Intensität erhalten, sollen Sie auf ganzen Zahlen gerundet angeben!)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x) \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) In welcher Tiefe beträgt die Intensität des eindrängenden Leserstrahles nur noch 15% des ursprünglichen Wertes (I_0)*? (Der Antwort sollen Sie auf Zehntelmillimeter gerundet angeben!)*

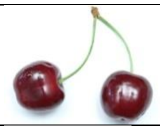
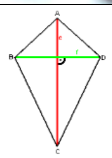
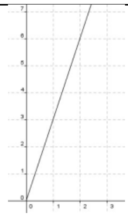
Warum ist aber heutzutage die praktische Anwendbarkeit der im Unterricht gelernten Kenntnisse so wichtig? Man könnte die Frage einfach mit den Erwartungen aus den PISA-Tests beantworten. Oder man könnte sagen, dass die praktische Anwendbarkeit der Kenntnisse heute viel wichtiger als früher ist. Oder man könnte – als praktizierender Lehrer – antworten, dass das Lebensalter der Schüler voraussetzt, dass sie nicht gleich den reinen mathematischen Formulierungen begegnen, sondern dass die Aufgaben zuerst in der Form auftauchen müss(t)en, wie sie im Leben auftauchen (können). Meiner Meinung nach wären alle Antworten teilweise korrekt, aber man kann mit diesen Antworten die Wurzel des Problems nicht sehen, beantworten. Aber alle Antworten zeigen in die Richtung, die ein Lehrer vielleicht unbewusst ahnt, wonach er während des Unterrichts strebt. Diese Antwort ist meiner Ansicht nach die Struktur, der Prozess, der Vorgang des Verstehens. So suchte ich ein Modell, mit welchem ich entsprechend der oben geschilderten Erwartungen, dem Alter der Schüler, dem zu erlernenden Stoff und meinen Vorstellungen in einem Unterrichtsexperiment ausprobieren kann. So habe ich das Modell der Freudenthal’schen realistischen Mathematik ausgewählt, meinen Vorstellungen und Erwartungen nach verwendet und wo es möglich war, mit den Möglichkeiten der Computertechnik, in erster Linie mit der Software GeoGebra ergänzt.

1. Theoretischer Rahmen

1.1. Lernpsychologische Grundlagen

1.1.1. Repräsentationen

Die Entwicklungstheorie von Bruner beschreibt, dass ein Kind während seiner Entwicklung etwa bis zum zwölften Lebensjahr zum Stadium der formalen Operationen kommen kann. Es sollte also in diesem Alter fähig sein, abstrakte, formale und logische Operationen durchzuführen und seine Theorien auf logischen Wegen zu begründen (Bruner, 1966). Dementsprechend sollte man von Schülern mit etwa 16 Jahren erwarten können, dass sie stark abstrakt formulierte Definitionen, Zusammenhänge und Aufgaben verstehen und verwenden können. Viele von ihnen können nach einiger Zeit auf dieses Niveau kommen. Sie brauchen aber dazu eine kräftige Unterstützung. Diese Unterstützung kann eine gut ausgewählte Einführungsaufgabe, aber auch eine Reihe verschiedener geeigneter Repräsentationen dieser Aufgabe sein. Bruner unterscheidet drei Formen der Repräsentationen: die enaktive, die ikonische und die symbolische Repräsentation (Lesh – Post – Behr 1987). Die Reihenfolge ist dabei sehr wichtig. Um die gewünschte, allgemeine symbolische Repräsentation verwenden zu können, wäre es sinnvoll, in der Mehrheit der Fälle die obige Reihenfolge einzuhalten. Man darf die neue Repräsentation solange nicht benutzen, bis die vorherige nicht vertieft wurde.

Repräsentation:	Enaktive	Ikonische	Symbolische
Natürliche Zahlen	Ein Paar Kirschen		2, zwei, II
Geometrie	Drachen		Deltoid
Funktionen	Ein Fußgänger legt jede Stunde 3 km zurück. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zeit und der zurückgelegten Strecke?		f: $\mathbf{R}^{+,0} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$

1. Abbildung: Die Repräsentationen – eigene Quelle

Die äußeren Repräsentationen müssen natürlich die inneren Repräsentationen auslösen. Diese inneren lassen sich aber direkterweise nicht beobachten. Eben deshalb hat sich die Verhaltensforschung mit den inneren Repräsentationen nicht beschäftigt. Die heutige kognitive Psychologie versucht mit Hilfe von indirekten Beobachtungen die inneren Repräsentationen und ihr Netz zu untersuchen. Unter anderem hat Greeno (1988) den Zusammenhang zwischen den äußeren und inneren Repräsentationen erforscht. Im Allgemeinen kann man behaupten, wie die äußeren Repräsentationen zur Herstellung der inneren Repräsentationen wichtig sind, so beeinflussen die inneren Repräsentationen ihre eigenen äußeren Wiederspiegelungen. Darauf hat auch schon Skemp (2005) hingewiesen, als er sagte, dass es zwischen den Symbolen und den entsprechenden Begriffen nicht unbedingt ein-eindeutige Beziehungen gibt, sondern es vorkommen kann, dass einem Begriff mehrere Symbole entsprechen oder umgekehrt. Was wichtig wäre: Der Vortragende und der Zuhörer sollen im gleichen Schemasystem bleiben, innerhalb dieses Schemas darf ein Symbol nur einem Begriff zugeordnet werden und umgekehrt, und dass der Vorträger das Schemasystem nicht wechseln darf. Es sei denn er informiert den Zuhörer darüber. Diese Bedingungen scheinen zwar logisch und eindeutig zu sein, oft halten aber die Vorträger eben die letzte Bedingung nicht ein und wechseln das Schemasystem, ohne den Zuhörern diesen Wechsel bewusst zu machen. Ein Beispiel dafür kann eben das Potenzieren sein: die Schüler wissen gut, wie man zwei Zahlen multipliziert, $3 \cdot 3 = 9$, wenn man aber mit Potenzen arbeitet, sieht das Ergebnis einer Multiplikation anders aus: $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$. In diesem Fall kann man neben der guten Lösung auch andere Varianten sehen, wo man gleich erkennt, dass der Schemawechsel nicht, nur teilweise oder theoretisch falsch durchgeführt wurde. Beispiele für die möglichen falschen Lösungen sind: $3^2 \cdot 3^5 = 9^{???}$, oder: $3^2 \cdot 3^5 = 3^{10}$, oder: $3^2 \cdot 3^5 = 9^7$, oder: $3^2 \cdot 3^5 = 9^{10}$. Eben deshalb wäre besonders wichtig, die Schemasysteme bewusst zu machen, zu den Begriffen nicht nur symbolische, sondern auch enaktive oder ikonische Repräsentationen hinzufügen. An diesem Beispiel kann man z.B. die Dreier gruppieren und zusammenzählen:

$$3^2 \cdot 3^5 \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\underbrace{3 \cdot 3}_{2\,St.} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5\,St.}}_{7\,St.} \stackrel{\text{def}}{=} 3^7.$$

So visualisiert sehen auch die schwächeren Schüler, warum die Basen nicht multipliziert werden dürfen und warum die Exponenten addiert werden müssen.

In meinem entwickelnden Unterrichtsexperiment habe ich bewusst danach gestrebt, alle drei Repräsentationen zu benutzen und den Wechsel, den Übergang unter ihnen bewusst zu machen. Ich wollte damit erreichen, dass es den Schülern bewusst wird, was es für einen Zusammenhang zwischen den

alltäglichen Vorgängen und ihren mathematischen Repräsentationen gibt. Die konkreten, praktischen Beispiele – wie ein exponentielles Wachstum bei den Pflanzen oder bei der Geldanlage in der Bank, oder die Halbwertszeit bei Koffein, Medikamenten oder radioaktiven Stoffen – bedeuteten die enaktive Repräsentation des Vorgangs. Mit Hilfe der Funktionsgraphen, die oft mit GeoGebra dargestellt wurden, wurden die Vorgänge veranschaulicht – so kamen wir zu der ikonischen Repräsentation. Und nach einer Anzahl von Beispielen wurden die mathematischen Zusammenhänge entdeckt und exakt formuliert – symbolische Repräsentation und danach wurde natürlich unser mathematisches Modell mit der Wirklichkeit verglichen.
Zwischen den äußeren und inneren Repräsentationen können aber vielerlei Zusammenhänge entstehen. Dieser Zusammenhang ist nicht immer ein-eindeutig. Eine innere Repräsentation kann beispielsweise mehrere äußere und umgekehrt, eine äußere mehrere innere Repräsentation ins Leben rufen, wie darauf András Ambrus (2002b) und Éva Vásárhelyi (2002) hingewiesen haben.

1.1.2. Verstehen

Man kann mehrere Typen des Verstehens voneinander unterscheiden. Grundsätzlich kann man über disziplinäres und interdisziplinäres, in der Schule erworbenes und außerschulisches Wissen sprechen. Das Ziel des Unterrichts wäre es, keinen der oben genannten, „separierten" Verständnistypen zu erreichen, d. h. das erworbene Wissen eines Schülers dürfte nicht nur im Rahmen einer der oberen Kategorien bleiben. Im Idealfall müsste ein Netz, ein enger Zusammenhang zwischen dem schulischen und außerschulischen Wissen entstehen, worauf schon ziemlich früh Wertheimer (Wertheimer 1959) und Pólya (Pólya 1971) hingewiesen haben. Oft erreichen viele Schüler nicht einmal das disziplinäre Niveau. Das würde bedeuten, dass die Schüler die erworbenen Kenntnisse innerhalb der Mathematik einstufen und verwenden können, sie über die richtigen inneren Repräsentationen, über „concept image" verfügen, sie die auftauchenden Probleme richtig behandeln können, und dass die Schüler diese Probleme ihrer Wissensstufe entsprechend bearbeiten und lösen können. Dagegen bleiben leider viele Schüler innerhalb des Rahmens des Gelernten einer einzigen Stunde. Sie können nicht einmal die Zusammenhänge innerhalb eines Themenbereiches sehen und verstehen. Die nächste Stufe wäre, dass die Schüler nicht nur den Lernstoff einer Stunde oder eines Themenbereiches verstehen und anwenden können, sondern dass sie zwischen verschiedenen Themenkreisen Zusammenhänge entdecken, zwischen den Schemen und den dazu gehörenden Begriffen schnell, richtig und problemlos wechseln können. Die oberste Stufe des disziplinären Wissens wäre, wenn das Netz der inneren Repräsentationen das Lehrfach dicht

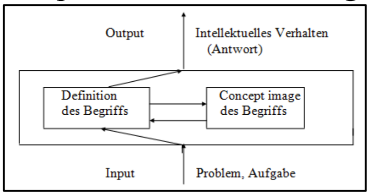
durchweben würde. Die Studenten werden mit diesem Wissensniveau von Gardner disziplinäre Studenten genannt (Gardner, 1991).
Die Forschungen weisen aber darauf hin, dass der scheinbar lineare Auf- und Ausbau der Wissensnetzwerke nicht so einfach erfolgt (Cobb – Steffe, 1988). Man kann auch solche Vorgänge beobachten, bei denen das Netz, oder Teile davon zerfallen, neue Kontakte entstehen. Während des Lernprozesses entstehen oft alleinstehende Inseln von Kenntnissen. Die Kontakte zwischen ihnen entwickeln sich erst später. Während des Unterrichts muss man auch danach streben, diese Kontakte auszubauen, zu vertiefen, um so die Stufen des disziplinären und interdisziplinären Wissens sowie schulisches und außerschulisches Wissen miteinander zu verknüpfen.

1.1.3. Concept image

Die Grundbegriffe der obigen zwei Abschnitte – die äußeren und inneren Repräsentationen und der Begriff des Verstehens im psychologischen und pädagogischen Sinne – werden durch den Begriff *concept image* verknüpft und noch mehr vertieft, welcher von David Tall und Shlomo Vinner in die Mathematikdidaktik eingeführt wurde (Tall – Vinner, 1981). Concept image bedeutet eine komplexe kognitive Struktur, die mit dem Begriff zusammenhängt. Das bedeutet visuelle Repräsentationen, mentale (innere) Bilder, und damit verknüpfte Eigenschaften, Vorgänge, Bilder, Abbildungen, konkrete Erfahrungen, Beispiele, Erlebnisse. Die konkreten materiellen und visuellen Repräsentationen tragen zur Entstehung der zum Begriff gehörenden mentalen Bilder bei, die stark von den Erfahrungen und Erlebnissen der Person abhängen. Bilder, konkrete Beispiele und Erfahrungen spielen bei der Entstehung eines effektiven concept images eine große Rolle.
In der Relation zwischen concept image und der Definition des Begriffes unterscheidet Vinner vier Klassen, die ich anhand Ambrus (2002b) darstelle:

a) *Gegenseitige, zweiseitige Relation*

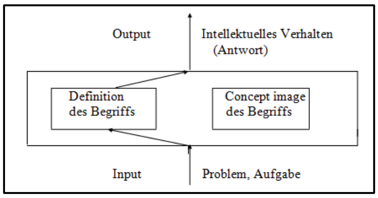
   Es wäre der Idealfall, wenn der Schüler einerseits die Definition des Begriffs kennt, zweitens verfügt er über den Begriff über eine innere Vorstellung, ein inneres Bild (concept image), und die beiden in Kontakt sind. Das bedeutet, dass der Schüler während der Problemlösung seine persönlichen Erfahrungen verwendet.



2. Abbildung: Die Darstellung von „concept image” – Quelle: Ambrus (2002b)

b) *Reine, formale Überlegung*

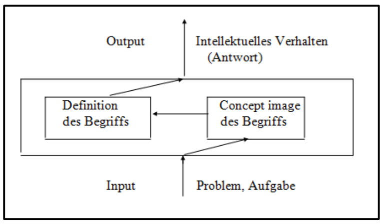
In diesem Fall kennt zwar der Schüler die Definition des Begriffs, sie ist aber mit keinem inneren Bild verbunden. Das kann man entweder bei solchen Schülern beobachten, die eine gute Note in Mathematik erwerben wollen, und sich dazu auch viel Zeit nehmen, die Definitionen oder/aber die mathematischen Rechnungswege zu lernen. Diese Kenntnisse sind aber mit keinen anderen mathematischen (oder interdisziplinaren) Kenntnissen verbunden. In diesem Fall kommt es oft vor, dass die Schüler viel lernen, aber bei kleinen Veränderungen in den Grundbedingungen der Aufgabe erkennen sie es nicht, und sie lösen die Aufgabe theoretisch falsch, oder sie werden dadurch verwirrt, und können die Aufgabe nicht einmal anfangen. Das kann man auch bei schwachen Schülern beobachten, wenn sie aus Zwang (wegen Angst vorm Sitzenbleiben) plötzlich viel lernen, ohne den Sinn des Erlernten zu verstehen.
Diese Art des Denkens kann selten auch bei einem Mathematiker vorkommen, der rein „axiomatisch“ denkt.



3. Abbildung: Die Darstellung von „concept image” – Quelle: Ambrus (2002b)

c) *Folgerungen, die auf intuitiven Überlegungen basieren, aber auch formale Definitionen beachten*

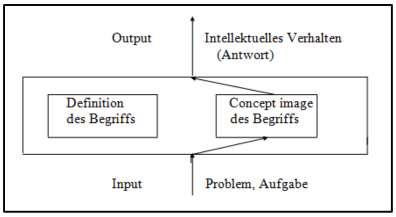
In diesem Fall haben die Schüler eine Vorstellung über den Begriff. Sie kennen auch die Definition dazu, vergleichen sie aber nicht. Sie überprüfen nicht, ob ihr concept image mit der Definition übereinstimmt.



4. Abbildung: Die Darstellung von „concept image” – Quelle: Ambrus (2002b)

d) *Überlegungen ausschließlich mit Hilfe von Intuitionen*

Interessanterweise kommt dieser Vorgang bei den Schülern oft vor, sie kennen die (exakte) Definition eines Begriffs nicht, oder sie reflektieren bei der Lösung nicht darauf, sie haben dafür eine richtige Vorstellung darüber und können so die Aufgabe richtig lösen.



5. Abbildung: Die Darstellung von „concept image" – Quelle: Ambrus (2002b)

Das Ziel meines entwickelnden Unterrichtsexperiments war, eine gegenseitige, zweiseitige Relation zwischen der Definition des Begriffs der exponentiellen und logarithmischen Funktion und dem concept image dieser zu bilden, damit die Schüler den tiefsten Sinn des Problems mit den Lösungsstrategien verstehen und verwenden können.

1.1.4. Kognitive Psychologie

Für die kognitive Psychologie geben Gerrig und Zimbardo (2008) die folgende Definition an: „*Die kognitive Psychologie unterstreicht die Art und Weise, wie Menschen bestimmtes Wissen erlangen und wie sie es in der Folge anwenden, um erlebte und zukünftige Erfahrungen in der Welt zu verstehen und zu erzeugen. Kognitive Psychologen beschäftigen sich demnach mit den höheren geistigen Funktionen von Menschen, wie Wahrnehmung, Intelligenz, Sprache, Gedächtnis, Denken und Problemlösen und Aufmerksamkeit.*"

Der Anspruch nach der Erforschung der inneren Strukturen des menschlichen Denkens entstand mit der Entwicklung der Computertechnik. Für Psychologen, Forscher wurde es wichtig, wie man die Vorgänge, das Verstehens, der Sprache, Problemlösung mit Hilfe von Computern modellieren kann. In diesem Modell wird das Gehirn als die Hardware, der menschliche Geist als die Software vorgestellt. Das menschliche Denken ist den Algorithmen gleichgesetzt. Eine entscheidende Rolle spielt die kognitive Psychologie darin, dass die Forscher den Prozess des Verstehens (vgl. 1.1.2.) besser kennenlernen können. Die kognitive Psychologie regte auch die Gehirnforschung an (und umgekehrt auch), hilft die Gedächtnisstruktur des Menschen zu verstehen. Nachdem der Behaviorismus viele menschliche Prozesse – wie zum Beispiel das Muttersprachelernen der Kinder – nicht erklären konnten, legten Psychologen und Forscher wie Allen Newell, Herbert

Simon, Marvin Minsky, Noam Chomsky, Alan Turing und George Kelly die Grundlagen der kognitiven Psychologie ab. Die interdisziplinare Wissenschaft –die Kognitionswissenschaft– enthält bis heute die folgenden Teildisziplinen: Philosophie, Informatik (Künstliche Intelligenz), Kognitive Anthropologie, Linguistik und die Neurowissenschaften. Die wichtigsten zu beantwortenden Fragen der kognitiven Psychologie sind zum Beispiel:

- Wie funktioniert der Geist?
- Wie funktionieren der Wissenserwerb und die Wissensnutzung?
- Studium mentaler Repräsentationen
- Erforschung intelligenter Leistungen und Prozesse mit dem Ziel einer allgemeinen Theorie der Intelligenz (natürliche und künstliche Intelligenz)[1].

1.1.5. Ergebnisse der Gehirnforschung

In der letzten Zeit geriet der Lernprozess in den Mittelpunkt vieler Gehirnvorscher, Psychologen. Viele Untersuchungen wurden durchgeführt, um den Vorgang des Lernens, die verschiedenen Gedächtnisstrukturen kennenzulernen. János Hámori (1999) fasst in seinem Werk *Az emberi agy szimmetriái* (Die Symmetrien des menschlichen Gehirns) die Ergebnisse seiner und der internationalen Forschungen zusammen und behauptet, dass bei 85% der Menschen sind die folgenden Merkmale für die entsprechende Gehirnhälfte charakteristisch sind:

Linke Gehirnhälfte	***Rechte Gehirnhälfte***
Sprache, Sprachgebrauch	*stumm, sehend, Raummanipulierend*
sequenziell, digital	*gleichzeitig, analog*
logisch, analytisch	*synthetisch, holistisch*
algebraisch	*geometrisch*
intellektuell	*instinktiv*
konvergent	*divergent*
induktiv	*kreativ*
rational	*irrational*
abstrakt (Denkweise)	*gegenstandorientiert (Denkweise)*
realistisch, objektiv	*impulsiv, subjektiv*
kein Sinn für Humor	*Sinn für Humor*
gerichtet	*frei*
Zeitgefühl	*zeitlos*

6. Abbildung: Funktionen der Gehirnhälften – Quelle: Ambrus (2002b)

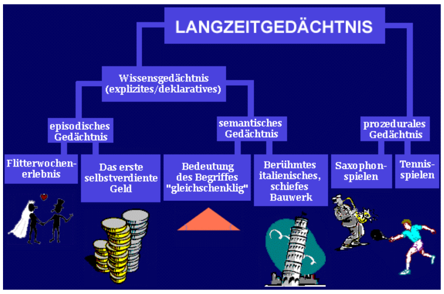
Während des Lernprozesses muss man diese Diversität der Gehirnstruktur, die verschiedenen Arbeitsmethoden der Hemisphären berücksichtigen. Bei verschiedenen Aufgabentypen, bei der Problemlösung drückt sich die eine

[1] Vollständigen Artikel auf Suite101.de lesen: Die kognitive Psychologie | Suite101.de http://suite101.de/article/die-kognitive-psychologie-a112404#ixzz23QpGdRGI

oder die andere Seite der Denkweise in Vordergrund. So benutzt man zum Beispiel bei der Lösung einer schon eingeübten Gleichung lieber die linke Hälfte (sequenzielle, digitale, logische, analytische, algebraische Eigenschaften), bei der Problemlösung lieber die rechte (gleichzeitige, analoge, synthetische, holistische, instinktive, divergente, kreative Eigenschaften). Ipke Wachsmuth (1981) spricht über zwei Denkweisen, über den sogenannten L-Modus und R-Modus. Die Kategorien stimmen strak mit den Kategorien vom Hámori überein.

Während der Arbeit verwendet das Gehirn verschiedene Speicherbereiche und Speichermodi. Man kann das Gedächtnis zum Teil nach Dauer unterscheiden. Es gibt ein *sensorisches* oder *Ultrakurzzeitgedächtnis*, in dem die von den Sinnesorganen wahrgenommenen Signale gespeichert werden. Sie werden durchschnittlich nur höchstens Zehntelsekunden lang gespeichert, und können nur relativ schwer untersucht werden. Sperling entwickelte im Jahr 1960 die sogenannte Teilbericht-Methode. Darwin (1972) hat gezeigt, dass das visuelle sensorische Gedächtnis etwa 15 Millisekunden lang, das auditorische dagegen über zwei Sekunden lang Informationen speichern kann. Was wichtig ist, diese Speicherung bleibt unbewusst, ist aber für den nächsten Schritt, das Arbeitsgedächtnis unentbehrlich. Andererseits weist diese Erkenntnis darauf hin, was für eine wichtige Rolle die Visualisierung, die visuellen Repräsentationen beim Lernprozess spielen. Die zweite Stufe ist das *Arbeitsgedächtnis* (Früher auch Kurzzeitgedächtnis genannt). In diesem Bereich wird eine begrenzte Anzahl der Informationen relativ kurzfristig gespeichert, Untersuchungen nach durchschnittlich 20 – 45 Sekunden lang gehalten. Miller (1956) spricht über eine Anzahl von 7 ± 2 Informationen gleichzeitig. Im Arbeitsgedächtnis werden auch Operationen durchgeführt, die zu verwendenden Ergebnisse werden ins *Langzeitgedächtnis* überführt. Das Langzeitgedächtnis scheint kein einheitliches System zu sein. Verschiedene Arten von Informationen werden auf verschiedenen Weisen gespeichert. Über die Kapazität gibt es nur Schätzungen. Leitner spricht über etwa 125 MB Speicherplatzgröße. Es gibt auch solche Schätzungen die sogar über etwa 2,5 Petabytes Daten sprechen (Reber 2010). Das Geheimnis des Gehirns soll im „optimalen Zusammenspiel aller Prozesse und Strukturen“ liegen (Leitner, G.: Gedächtnis und mentale Modelle). Es sieht so aus, dass die Informationen, die im Langzeitgedächtnis gespeichert werden, bei einem gesunden Menschen nicht mehr gelöscht werden, obwohl man sie für eine Weile „vergisst“. Bei einer entsprechenden Situation, oder in der Hypnose können sie hervorgebracht werden. Dieses Langzeitgedächtnis kann grob in drei Bereiche zerlegt werden:

- *Prozedurales Gedächtnis*- Gedächtnis für Fähigkeiten und Fertigkeiten
- *Semantisches Gedächtnis*- "abstraktes Wissen"
- *Episodisches Gedächtnis*- Erinnerungen an Ereignisse, Situationen[2]



7. Abbildung: Langzeitgedächtnis – Quelle[3]

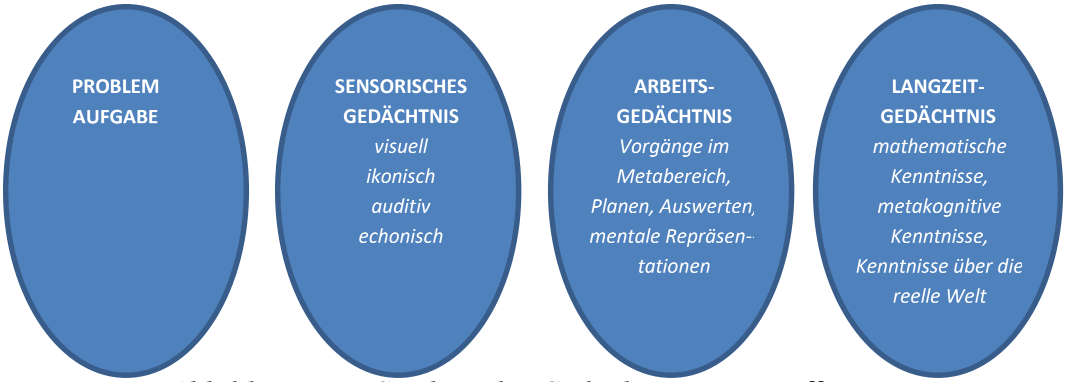
Hier kann man auch die Struktur des menschlichen Gedächtnisses nach Ambrus (2002a) darstellen. Seine Gliederung ist das folgende:

- *Semantisches Gedächtnis*, welches das System der Wörter, der verbalen Zeichen bedeutet und auch ihre Bedeutungen, Relationen zueinander enthält.
  Bei den Wachstumsvorgängen haben wir Rufwörter benutzt wie zum Beispiel *Wachstumsfaktor* (Basis der exponentiellen, logarithmischen Funktion); *Periode* (Exponent der exponentiellen Funktion). Diese Begriffe haben den Schülern später eine Eselsbrücke bedeutet, um die rein mathematischen Aufgaben (Gleichungen, Ungleichungen) lösen zu können.
- *Episodisches Gedächtnis* enthält die in der Zeit geschehenen Ereignisse, speichert ihre zeitlichen, räumlichen Relationen.
  In meinem Versuch habe ich mit konkreten Beispielen angefangen, die sich im Laufe der Zeit entwickeln (s. Wachstum von Pflanzen, Geldanlagen, Abbau vom Koffein im Blut – Halbwertszeit, usw.). Von diesen Versuchen aus sind wir zu abstrakteren, statischen, mathematischen Aufgaben gekommen.
- *Visuelles Gedächtnis* speichert die Bilder, Abbildungen getrennt in einem getrennten Gehirnbereich als das semantische Gedächtnis, so hat man eine andere Möglichkeit, das Gelernte hervorzurufen. So können die Bilder im Lernprozess ein effektives Mittel sein.
  Um das visuelle Gedächtnis zu fördern, haben wir die Graphen der Funktionen der Vorgänge oft benutzt, manchmal mit der Hand skizziert, teils mit Computer, mit GeoGebra unterstützt.

---

[2] Leitner, G.: Gedächtnis und mentale Modelle
[3] http://paedpsych.jk.uni-linz.ac.at/internet/arbeitsblaetterord/LERNTECHNIKORD/Gedaechtnis.html

Die Struktur des Gedächtnisses ist das folgende (Niendieck, 2008):



8. Abbildung: Die Struktur des Gedächtnisses – Quelle

1.2.Mathematisch-didaktische Grundlagen

In Europa und in den USA begannen in den sechziger Jahren die reformpädagogischen Bewegungen im Bereich Mathematik. In erster Linie bildet in den Ländern Schweden, Dänemark und Holland die mathematische Modellierung einen Teil des Lehrstoffes, sie ist darin stark integriert. Seit Anfang der 2000er Jahre haben die Ergebnisse der PISA-Tests gezeigt, dass in den Ländern, in denen das Modellieren keine besondere Rolle spielt, die Schüler mit realistischen Problemen halb so gut umgehen können wie die Mitschüler in den erwähnten Ländern. Unter diesen Ländern ist Holland erwähnenswert, wo die Ergebnisse der letzten vier Tests in Mathematik immer unter den ersten zehn sind.

1.2.1. Der realistische Mathematikunterricht

In den sechziger Jahren übten die Mathematikdidaktiker eine starke Kritik aus, die die „Nutzlosigkeit“ der mathematischen Kenntnisse ausdrückten. Zu diesen Didaktikern gehörten unter anderem Freudenthal, Pollak, Krygovska, Engel, Steiner. Sie wollten einen Mathematikunterricht aufbauen, wo die formulierten Probleme realitätswahr sind, wo die Frage von den Schülern „Wozu werde ich das im Leben verwenden?“ immer seltener vorkommt. Schon Streefland wies in seinem Studium (Streefland, 1985) darauf hin, wie wichtig ist es, im Mechanismus des Verstehens zwischen der formalen und der informellen Ebene wechseln zu können und statt das Unterrichtsmodell „model of" das „model for" zu verwenden. Später wurde diese Vorstellung über das Wechseln der Modelle ein wesentlicher Bestandteil der Freudenthalschen Unterrichtsmethode (Streefland, 1991; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1994a, b; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995). Das realistische Problem bedeutet nicht unbedingt, dass man Probleme aus dem „Leben“ nehmen sollte, sondern dass diese Probleme nah an den Schülern stehen müssten. Nach der Meinung von De Lange (1996) können diese Situationen auch mathematische Modelle, Modellierung bedeuten. Zweitens müsste der Mathematikunterricht eine Möglichkeit zur (Neu)Entdeckung bieten, wo die Schüler durchs Experimentieren die Regel, die Zusammenhänge entdecken und später verwenden können. Treffers (1987) unterscheidet in dem Vorgang der Mathematisation zwei Typen, die horizontale und die vertikale Mathematisation. In der horizontalen Mathematisation kommt man von der intuitiven, kontextabhängigen, informalen Ebene mit Hilfe von visuellen Modellen, Modell-Situationen, verschiedenen Materialien, Schemen, Symbolen und Diagrammen auf die reflektive, formale, systematische Ebene. In der vertikalen Mathematisation baut man die Strukturen, die systematischen, formalen Kenntnisse aus. Die didaktischen Richtlinien des realistischen Mathematikunterrichts hat Freudenthal formuliert und man kann sie folgendermaßen zusammenfassen:

- *Mathematik im Kontext*: Die mathematische Aktivität der Schüler passiert in einem konkreten Kontext, die Schüler lernen die Theorie, die Zusammenhänge im konkreten Textumfeld kennen. Aus diesen Erkenntnissen abstrahieren sie später die exakten mathematischen Inhalte. Ich habe bei der Einführung der exponentiellen und logarithmischen Funktion diesen Weg gewählt, die konkreten Aufgaben dazu werde ich später präsentieren.
- *Horizontale und vertikale Mathematisation* (s. oben);
- *Die Wichtigkeit der eigenen Produkte, Konstruktionen der Schüler;*
- *Sozialer Kontext, Interaktionen;*
- *Zusammenhänge, Kontakte;*

In den Niederlanden, wo der realistische Mathematikunterricht ab Mitte der 80er Jahre eingeführt worden ist, werden auch gegenüber dieser Methode starke Kritiken formuliert. Landsman (2008) sieht die Lage folgendermaßen: „*Tatsächlich bedeutet dies in den Niederlanden inzwischen, dass Kinder eine Sammlung von Tricks lernen, die sie typischerweise auf in Geschichten eingekleidete Probleme anwenden sollen.*" (p. 3) Er findet unter anderem darin den Grund, das die Anzahl der Mathematikstudenten in den letzten 30 Jahren in Holland drastisch –von 700 auf etwa 200- zurückgegangen ist. Er führt diesen Gedanken weiter: „*Das bisschen Theorie und Abstraktion, das in den Schulbüchern übrig geblieben ist, ist oft weit entfernt von ernsthafter Mathematik und manchmal schlicht falsch.*" Diese Meinung teilt auch der deutsche Übersetzer des Artikels, Prof. Dr. Sebastian Walcher aus Aachen. Während der Zusammenstellung des Lehrstoffes des Unterrichtsexperiments wurde deshalb bewusst danach gestrebt, die obigen Fehler zu vermeiden. Bei der Einführung wurden Probleme gewählt, die einerseits realitätsnah sind aber auch für die Schüler nicht „infantil“, sondern so interessant wie möglich vorkommen. Aber auch die „reinen“ mathematischen Zusammenhänge, Sätze haben wir formuliert und bewiesen.

1.2.2. Andere didaktische Richtungen (Anhand: Ambrus, 1995)

a) Projektorientierter Mathematikunterricht

Am Anfang der 1900er Jahre erscheint zuerst der Begriff des Projekts als Unterrichtsmethode. Zwei Namen kennzeichnen diese Auffassung in den USA, nämlich Dewey und sein Student Kilpatrick. Sie denken so, dass das Lernen ein aktiver Vorgang ist, worin der Schüler mit „vollem Herzen“ teilnehmen muss. Dieser Vorgang muss zielbewusst sein und in einem sozialen Kontext verlaufen. In Europa erscheint diese Richtung in erster Linie in Deutschland von Kerschensteiner und in der Sowjetunion, wo sie im Schuljahr 1930/31 in allen Schulen eingeführt wurde. Seit den 70er Jahren blüht diese Methode wieder in den USA und in Deutschland auf, wo sogar im Schuljahr –nicht fachspezifische, sondern fachintegrierende – Projektwochen eingeführt worden sind. Die Gegner dieser Methode kritisieren unter anderem, dass die hierarchische Struktur der Mathematik, die ihrer Meinung nach das Mathematiklernen erleichtern, fehlt, dass die Schüler die Themen auswählen können (dürfen), dass die Schüler im Alter zwischen 10-16, in erster Linie die schwächeren, kein Projekt durchführen können, dass durch die genauen Zielsetzungen der geschlossenen Lehrpläne diesse viel effektiver sind oder dass die Gruppenarbeit nicht effektiv sein kann (vgl. 1.2.3).

b) Wissenschaftsorientierter Mathematikunterricht

Da schon seit dem 19. Jahrhundert die Bedeutung der Wissenschaft stark gestiegen ist, ist die pädagogische Richtung Szientismus in die Mathematik eingedrängt (Claus, H. J., 1989). Laut dieser Auffassung muss die Schule die Kenntnisse dem aktuellen Stand der Wissenschaften entsprechend beibringen. Eben diese Theorie löste eine heftige Kritik unter anderem von Felix Klein aus. Er bevorzugte einen genetischen Aufbau des Stoffes, die sogenannte Euklidische Methode: Das Ziel müsse sein, „überall an den vorhandenen Vorstellungskreis [der Schüler] anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewussten zu machen“. (Meraner Beschlüsse, S. 208.) Die Kritiker betonten die Wichtigkeit der Entdeckung in der Mathematik, statt eine fertige, schon abgeschlossene Theorie unterrichten zu müssen. Eine große Schwäche dieser Methode ist, dass es keine Kriterien für die Auswahl des Lehrstoffes gibt. Sie wollen immer die neusten Ergebnisse der Mathematik unterrichten. Deshalb betonten unter anderem die Mathematiker wie Bruner, Klein, Schreiber, Bender oder Fischer die Wichtigkeit der fundamentalen, universalen Leitprinzipien. Hier lohnt es sich noch, die Bewegung *New Math* zu erwähnen, die sich in den 60er Jahren verbreitet hat. Die Gruppe BOURBAKI, dessen Gründer die Mathematiker Henri Cartan, André Weil, Jean Delsarte, Jean Dieudonné und Claude Chevalley waren, hat den theoretischen Rahmen entwickelt, der die Mathematik in drei Grundstrukturen zurückgeführt hat: Ordnungs-, algebraische und topologische Strukturen. Die mathematische Fachsprache, Symbole, sowie die mathematische Deduktion, die Präzision spielten dabei eine besonders wichtige Rolle. Sie legten einen großen Wert auf das System und für sie spielte die Leistung eine große Rolle. Auf die ungarische Mathematikdidaktik hatte diese Richtung eine Wirkung. Im Versuchslehrbuch von 1977 kann man zum Beispiel über die Relationen einen stark abstrakten Absatz finden.

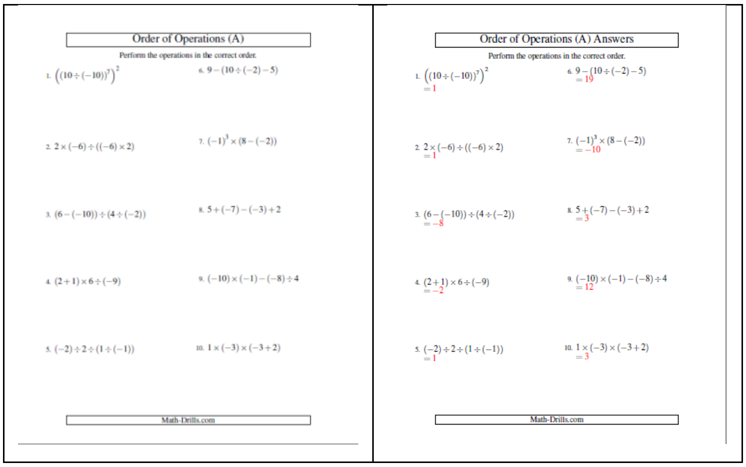
c) Empirischer Mathematikunterricht

Er verbreitete sich in erster Linie in Großbritannien. Es wurde ein großer Wert auf die Anwendung der mathematischen Kenntnisse –in erster Linie innerhalb der „reinen“ Mathematik gelegt. Die Reflexion der Schüler auf das eigene Produkt spielte keine besondere Rolle. Bei dieser Form des Unterrichtes bekommen die Schüler Arbeitsblätter, oft verschiedene Schüler verschiedene Blätter. Die Schüler arbeiten einzeln, die sozialen Formen fehlen hier. Die Arbeitsblätter bestehen aus vielen kleineren Teilaufgaben, die systematisch aufgebaut sind. Man kann dabei weder die horizontale noch die vertikale Mathematisation beobachten.

d) Mechanistischer Mathematikunterricht- Programmierte Unterweisung

Laut dieser Auffassung ähnelt das menschliche Gehirn einem Computer. Dementsprechend ist es am besten, wenn die Schüler die grundlegenden mathematischen Kenntnisse (im Bereich der Arithmetik, Algebra und Geometrie) durch systematische Übungen erlernen können. Die didaktischen Grundlagen hat Skinner (1958) ausgearbeitet. Er hat aber auch seine Theorie in der Praxis ausprobiert und versuchte, die Schüler durch Computer zu unterrichten. Er betrachtete die Mathematik als System von Regeln. Die Schüler versuchen die neuen Aufgaben mit Hilfe dieser schon eingeübten

Regeln zu lösen. Im ungarischen Algebraunterricht spielt diese Methode bis heute eine wichtige Rolle. Die Nachfolger dieser Auffassung denken, dass die realistischen Probleme, die Anwendungen im Unterricht keine Rolle spielen, die sozialen Kontakte, die Reflexionen, die Untersuchung der Strukturen werden oft in den Hintergrund gedrückt. In erster Linie bei schwächeren Schülern wird diese Methode auch noch heute benutzt, wo gedacht wird, dass diese Schüler allein durch das „unendliche“ Üben von Grundaufgaben, mit ihnen besser umgehen können, sie sogar später möglichst schwierigere Aufgaben lösen können.



9. Abbildung: Drillaufgaben – Quelle: http://www.math-drills.com/

1.2.3. Sozialformen im Unterricht

Früher war für den ungarischen Mathematikunterricht der Frontalunterricht typisch, also der Lehrer hielt so zu sagen einen „Vortrag“. Die Aufgaben wurden auch vom Lehrer an der Tafel gelöst, ein Schüler konnte oder musste die Aufgabe auch an der Tafel lösen. Die Anderen arbeiteten an ihren Tischen alleine, oder was eher typisch war, sie schrieben die Lösungen einfach von der Tafel ab. Die Persönlichkeit der Lehrer konnte sie von der Richtigkeit der Lösung überzeugen. Der Lehrer hätte dabei denken können, dass die Schüler, oder mindestens die Mehrheit der Schüler die Aufgabe, die Lösung verstanden hat. Die Probleme des Verstehens dieses Unterrichts stellten sich in einer nicht so begabten Gruppe heraus. Über die Probleme hat Engbersen, A. (2009) seine Erfahrungen formuliert. Mit dem neuen Nationallehrplan wurde klar, dass diese fast einzige Methode des Frontalunterrichts nicht weiter haltbar ist. Immer mehr Mathematiklehrer verwenden während des Unterrichts neue Methoden, neue Sozialformen. Die Definition der Sozialform formuliert Becker folgenderweise: „*Unter Sozialform wird die Art und Weise verstanden, in der der Lehrer die Schüler zum Lernen organisiert oder die Schüler sich* *selbst organisieren. Deshalb kann auch von „Organisationsformen“ gesprochen werden, die durch bestimmte interaktionale Konstellationen gekennzeichnet sind.*“ (Becker, 1984) Grundsätzlich unterscheidet heute die Literatur sechs Sozialformen: Einzelarbeit (Alleinarbeit), Partnerarbeit (Paararbeit), Kleingruppenarbeit, Großgruppenunterricht (Kreisunterricht), Klassenunterricht (Frontalunterricht), Team Teaching. Während des Unterrichts wurden außer Großgruppenunterricht und Team Teaching die anderen vier Sozialformen benutzt. Dabei wurde immer vor Auge gehalten, welche die Vor- bzw. Nachteile der einzelnen Methoden bestehen, die bestimmen Formen wurden nur dann verwendet, wenn ihre Vorteile dominierten. Die zusammenfassende Tabelle von Hentzschel ist im Anhang A zu finden.

1.2.4. Mathematikunterricht in Ungarn

Das Konzept des ungarischen Mathematikunterrichts trägt noch bis heute die sogenannten „top-down“ Züge, obwohl in der letzten Zeit, in erster Linie seit der Einführung des Neuen Nationallehrplans (NAT, 1998) und wegen der Ergebnisse der internationalen PISA-Tests große Bemühungen gemacht wurden. In diesem „top-down“ Konzept wird der Lehrstoff Schritt für Schritt, mit Hilfe einer starken theoretischen Stützung des Lehrstoffs aufgebaut. Damit unterstützt sie das Experimentieren, das Erlebnis des Selbstentdeckens nicht so stark (vgl. 1.2.1.). Die internationalen Untersuchungen (z.B. PISA) und die neusten ungarischen Vergleichsarbeiten (Landeskompetenzmessung, das neue Abitur) rücken die praxisorientierten, realitätsnahen Aufgaben und Probleme immer mehr in den Vordergrund. Man kann dabei die verschiedensten Beispiele erwähnen. Zur Zeit des Unterrichtexperiments hat das Gymnasium das Lehrbuch „Sokszínű matematika“ (Bunte Mathematik) vom Mosaik-Verlag benutzt. In diesem Buch wird die exponentielle und Funktion eingeführt, Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme unterrichtet, und erst dann kommen die alltäglichen, praktischen Beispiele. Der Logarithmus ist nur mit einer Textaufgabe eingeführt, die anderen praktischen Anwendungen kommen erst am Ende des Abschnitts. Das Lehrbuch ist zwar „bunt“, aber meiner Ansicht nach nicht immer nach Schwierigkeitsgrad aufgebaut. So können die durchschnittlichen Schüler die Aufgaben nicht alleine anfangen, lösen. Es gibt mehrere didaktische Möglichkeiten den Unterricht zu gestalten, aufzubauen. Während der Einführung des obigen Themenkreises habe ich realistische Züge gewählt. Dabei habe ich es für wichtig und für effektiv gehalten, die Unterrichtsphasen von Ben-Hur vor Augen zu halten. Über österreichische und holländische Beispiele ist bei Engbersen (2009) zu lesen. Meir Ben-Hur unterscheidet während des Unterrichts fünf Phasen: Practice (Übungen), Dekontextulaisierung, Encapsulating a generalization in words

(Die Verallgemeinerungen in Worten formulieren), Rekontextualisierung, Realisation. Er definiert diese Phasen folgendermaßen:

- Practice: Lernprozesse benötigen eine ausreichende Anzahl von Übungen.
- Dekontextulaisierung: Es ist notwendig, für die Schüler eine Vielfalt von Anwendungen vorzustellen, damit sie fähig sind, das entsprechende Konzept zu bilden.
- Encapsulating a generalization in words: Die Schüler entwickeln mit Hilfe der Reflexion und Verbalisierung ein konzeptuelles Verständnis oder Bedeutung.
- Rekontextualisierung: Die Schüler müssen für das Konzept die neuen Anwendungen identifizieren. Sie müssen dieses Konzept bei der Verbindung der neuen Erfahrungen mit den vorherigen oder aktuellen Erfahrungen verbinden.
- Realisation: Die Lehrer müssen den Transfer in die neuen Erfahrungen unterstützen.

Die erste Phase im ungarischen Unterrichtssystem enthalten. Viele Lehrer unterstützen die Übungen. Problem kann aber bedeuten, falls in erster Linie bei den schwächeren Schülern überwiegend diese Phase benutzt wäre. Die zweite Phase, die sogenannte Dekontextulaisierung würde bedeuten, dass der Lehrer den Schülern durch eine Vielfalt verschiedenster Beispiele den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Inhalten, Sachverhalten klarmacht. Im realistischen Mathematikunterricht und in meinem Experiment kommen diese zwei Phasen umgekehrt, zusammengemischt vor. Die Schüler haben zuerst einige alltägliche Beispiele gesehen. An diesen Beispielen haben sie schon den Zusammenhang zwischen dem alltäglichen und mathematischen Schachverhalten gesehen. Da zum Beispiel die exponentiellen Vorgänge an mehreren Beispielen gezeigt wurden, konnten sie den Kontext vertiefen. Erst danach haben wir mit dem Üben angefangen. Ich strebte dabei bewusst danach, dass auch die „higher-order“ Fragen, also solche Fragen, die bei der Entdeckung der Zusammenhänge zwischen mehreren mathematischen Sachverhalten helfen, vorkommen. Nach dieser Phase haben wir mit der Verallgemeinerung angefangen, aber hier wurde wieder versucht, dass – wo es möglich war– die Schüler die Zusammenhänge entdecken und formulieren können. Erst danach wurden die exakten mathematischen Definitionen, Regel formuliert, gelernt. In der nächsten Phase, in der Rekontextualisierung wurden die Schüler gebeten, dem mathematischen Inhalt entsprechend, auch Aufgaben, Probleme zu formulieren. Sie konnten die Beispiele der Stunden benutzten. Die Schüler haben die formulierten Aufgaben, Probleme entweder selbst gelöst, oder sie haben sie mit einem anderen Schüler getauscht und die

Aufgabe des Partners gelöst. Und zuletzt kam die Realisation. Ich habe damit den Schülern geholfen, wo es möglich war, neue Erfahrungen zu sammeln.

1.2.5. Nötige mathematische Vorkenntnisse und Kompetenzen zum Thema Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Anwendungen

Der obige Themenbereich umfasst mindestens drei große Teilgebiete der Mathematik: Algebra, Funktionen und Problemlösen. Algebra ist unentbehrlich bei den Potenzen, Wurzeltermen, Gleichungen/ Ungleichungen, Gleichungssystemen. Ohne stabile Kenntnisse der Potenz- bzw. Wurzelgesetze sind die Schüler nicht in der Lage, exponentielle und logarithmische Aufgaben zu lösen. Diese Zusammenhänge kennen die Schüler schon aus der achten Klasse. Sie kommen jedes Jahr immer wieder vor. Das Rechnen mit Potenzen und Wurzeln ist aber nicht einmal in der ersten Klasse für viele Schülerinnen und Schüler selbstverständlich, wie es das Ergebnis des Vortests zeigt. Die Funktionen bilden einen weiteren Bereich, ohne sie ist das Thema unvorstellbar. Der Begriff der Funktion –und in erster Linie der Sinn der Zuordnungen- kommt schon relativ früh im Unterricht vor. Wegen des Bedürfnisses am hohen Maß der Abstraktion bedeutet dieses Teilgebiet für die Schüler eine große Schwierigkeit. Probleme bzw. Problemlösen kommen im (Mathematik-)Unterricht immer betonter vor. Die Grundlagen auf diesem Gebiet haben u.a. Pólya (1979) und Schoenfeld (1985) gelegt. Diese drei Teile der Mathematik kommen hier nicht disjunkt vor, sondern es gibt einen starken Zusammenhang zwischen ihnen.

a) Algebraunterricht

Bednarz (1996) fasst die vier Aspekte, durch welche der Algebraunterricht überwiegend betrachtet wird, folgendermaßen zusammen: 1. Annäherung der Algebra durch Verallgemeinerungen: Der Sinn der Methode ist, dass die Schüler die allgemeinen Gültigkeiten der algebraischen Gesetzte verstehen können. Dabei können ihnen geometrische Muster, Relationen zwischen den Zahlen helfen. Diese Tätigkeit kann Grundlage der Vermutungen über mathematische Strukturen, Gesetzmäßigkeiten, der Sätze und Beweise sein. Dieser Aspekt wurde z.B. bei der Einführung der Logarithmusgesetzte verwendet. 2. Algebra als Mittel für Problemlösen: Der Sinn dieses Aspekts ist, dass man Textaufgaben, reelle Probleme mit Hilfe von Gleichungen löst. Wichtig ist, dass die Schüler das Problem analysieren, Lösungsstrategien aufstellen können. Dabei spielen die Lösungsalgorithmen eine wesentliche Rolle. 3. Algebra als Modellieren: Beim Modellieren spielt eine wichtige Rolle, dass die Schüler die zu untersuchenden Erscheinungen, Daten beobachten und deuten können. Sie müssen dabei zwischen den verschiedenen Repräsentationen (Tabelle, Formel) wechseln können. Bei der Einführung der Exponentialfunktion haben wir diese Auffassung verwendet. 4. Funktionsartiger Aspekt: Viele Probleme können als mathematische Funktionen aufgefasst werden. Im Zeitalter der digitalen Technik –Computer, Smartphones, Tablets usw.- spielt dieses Modell eine immer wichtigere Rolle. Während des Unterrichts wurden alle vier Aspekte des Algebraunterrichtes verwendet. So konnten die Schüler den Zusammenhang zwischen den drei oben genannten Gebieten der Mathematik besser verstehen.

b) *Über den Unterricht der Funktionen*

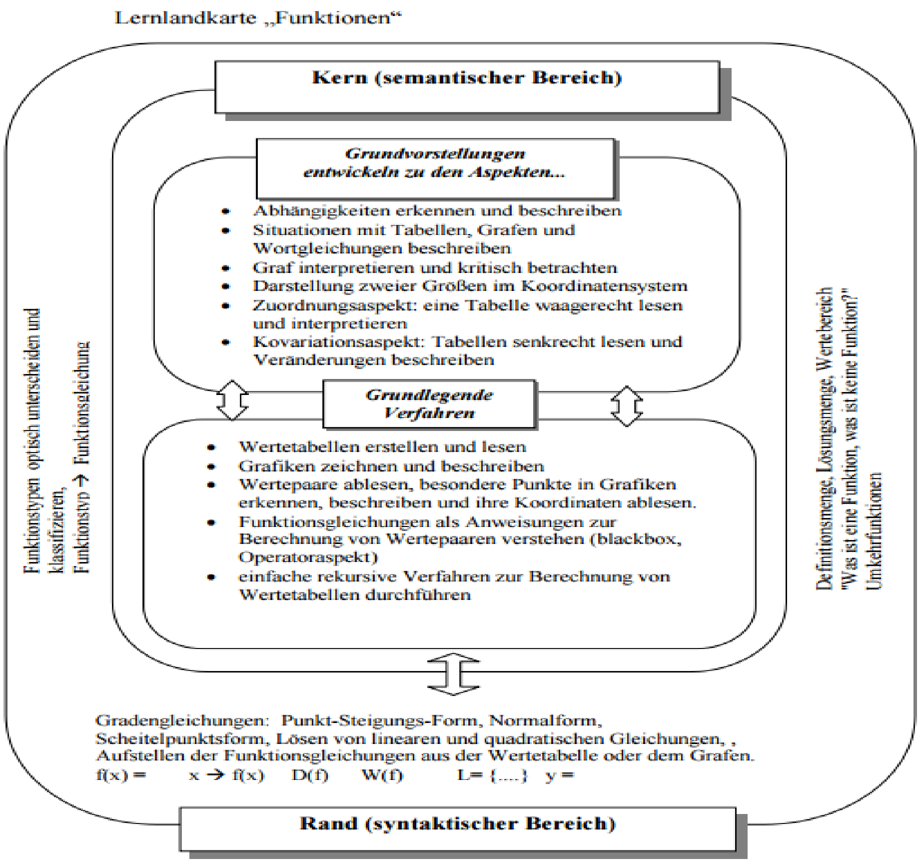
Malle behauptet anhand seiner Unterrichtserfahrungen der Funktionen folgendes: „*Es ist wahrscheinlich der größte Fehler des heutigen Mathematikunterrichts, dass er zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufsteigt und die Dinge auf eine bloß rechnerisch-mechanische Weise erledigt, jedoch verabsäumt, die dahinterliegenden intuitiven und anschaulichen Vorstellungen zu entwickeln.*“ (Malle, 2004) Er bezeichnet die mathematischen Inhalte, die bei der Allgemeinbildung unverzichtbar sind als Grundvorstellungen. Er weist darauf hin, dass sie nicht angeboren sind, sie müssen erlernt werden. Seiner Meinung nach müsste der Mathematikunterricht in vielen Gebieten zweiphasig sein. In der ersten Phase (inhaltlich-anschauliche Phase) müssten die Schüler die nötigen Grundvorstellungen erwerben. In der zweiten Phase (er nennt sie formal-regelhafte Phase) „*geht es darum, den jeweiligen Kalkül zu entwickeln und einzuüben.*“ Er behauptet, dass die erste Phase „*fast völlig unter den Tisch fällt.*“ Er sieht es so, dass das in Österreich ein wichtiger Punkt ist, weshalb die Schüler in TIMSS, PISA eine schwache Leistung hervorbringen.
Ewas ähnliches formulieren Koepsell und Jannack im Hinblick auf die deutschen Unterrichtsmethoden der Funktionen: „*Statt auf "concepts" ist der deutsche Unterricht zu sehr auf "drills" ausgelegt.*“ (Koepsell, Jannack, 2002) Sie schlagen vor, dass der Unterricht

- eine Vielfalt unterschiedlicher individueller Zugänge möglich machen,
- Subjektivität beim Lernenden zulassen,
- allzu enge Vorstellungen von Mathematik vermeiden,
- Freiräume zum eigenen Erkunden zulassen und
- Handlungen und Sprechweisen in weniger normierter Form zulassen muss.

Sie beschäftigen sich in erster Linie mit dem Thema Funktionen, da sie Funktionen als „Kernidee“ der Mathematik betrachten. Sie fassen in fünf Punkten die wichtigsten Aspekte des Unterrichts der Funktionen zusammen:

- mit verschiedenen Variablenaspekten (Gegenstandsaspekt, Einsetzaspekt, Kalkülaspekt) zum Beispiel in Gleichungen und Formeln umgehen;
- Interpretation und Modellieren von Zusammenhängen;
- qualitatives und quantitatives Umgehen mit zwei und mehr Variablen (Formeln); beim Umgang Zuordnungs- und Veränderungsaspekt betrachten;
- mit analytisch, rekursiv oder iterativ gegebenen Beziehungen umgehen und
- Wechselwirkungen in vernetzten Systemen erkennen

Sie fassen schließlich ihre Auffassung über den Unterricht der Funktionen in der Landkarte „Funktionen“ zusammen. Diese Vorstellung entspricht auch meiner Ansicht. In verschiedenen Stufen des Unterrichtsexperimentes habe ich diese Aspekte verwendet.



10. Abbildung: Landkarte „Funktionen”, p.3

c) *Problemlösen*

Die mathematischen Probleme spielen im Mathematikunterricht ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts bis heute eine wesentliche Rolle. Einer der wichtigsten Vorläufer des Problemlösens ist Pólya György. Er formuliert seine Gedanken über die Probleme folgendermaßen: „*Man hat ein Problem bedeutet, dass man bewusst eine entsprechende Tätigkeit sucht, die entsprechend ist, ein klar formuliertes Ziel zu erreichen, das direkterweise nicht zugänglich ist. Das Problemlösen bedeutet, dass man die entsprechende Tätigkeit findet.*“ (Pólya, 1979) Er gibt dazu Strategien, obwohl er betont, dass eine allgemeingültige Methode für alle Probleme, wie es Descartes und Leibniz gedacht hat- nicht gibt. Pólya fasst die den möglichen Weg zum Problemlösen in vier Punkten zusammen: 1. Verstehen der Aufgabe; 2. Ausdenken eines Planes; 3. Ausführung des Planes; 4. Probe der Lösung. Innerhalb der Punkte stellt er immer wieder Fragen, gibt Instruktionen, die uns beim Problemlösen weiterhelfen können. Schoenfeld (1985) hat das Problem folgendermaßen bestimmt: „*Die Schwierigkeit bei der Untersuchung des Begriffes 'Problem' ist, dass der Vorgang des Problemlösens stark von der Person abhängt, die das Problem lösen möchte. Die Aufgaben, deren Lösung von einigen Schülern eine große Anstrengung verlangt, können für die anderen einfachen Routineaufgaben sein, für einen Mathematiker können sie –wegen seiner Kenntnisse- trivial sein. Eben deshalb, ob eine Aufgabe ein Problem ist, ist nicht das Wesen der Aufgabe, lieber der Charakterzug der Beziehung zwischen der Person und der Aufgabe.*“ Er hat das Modell von Pólya ergänzt, verfeinert, mit weiteren Ansichtspunkten, Fragen und Instruktionen hat er das Modell erweitert. Seine wichtigsten Ansichtspunkte sind die folgenden: 1. Analyse und Verstehen der Aufgabe; 2. Skizze des Lösungsplanes; 3. Suchen der Lösungen bei schwierigeren Aufgaben; 4. Probe der Lösung. Wittman (1981) fasst die Bedingungen für die Förderung kognitiver Strategien in zehn Punkten zusammen: 1. Erwerb des Wissens durch entdeckendes Lernen (discovery-Lernen); 2. Die Schüler zum divergenten Denken ermutigen; 3. Automatische Gedankenabläufe stören und scheinbare Paradoxien vorlegen; 4. Offene und herausfordernde Probleme stellen; 5. Schüler selbst Probleme stellen oder weiterführen lassen; 6. Entwicklung einer Sprache für die Untersuchung, damit die Schüler eigene Ideen artikulieren können; 7. Intuitives Argumentieren und Vermutungen anregen; 8. Heuristische Strategien; 9. Ein konstruktives Verhältnis zu Fehlern aufbauen; 10. Diskussion, Reflexion und Argumentation anregen.

Während des Unterrichts, als in erster Linie Textaufgaben vorkamen, wurden die bekannten Strategien bzw. Elemente davon verwendet. Das Ziel war, dass die Schüler während des Lernens, so weit wie möglich selbständig Zusammenhänge entdecken Probleme lösen können.

1.3.Zweisprachigkeit

Der Anspruch der Eltern und/oder der Schüler, in der Schule verschiedene Fächer außer in der Muttersprache auch in einer Fremdsprache zu lernen ist in der ganzen Welt groß. Nach Schätzungen bedeutet das 3-30% der Schüler in Europa. In Malta und Luxemburg gibt es nur einen bilingualen Unterricht. In vielen Ländern Afrikas, in Indien, in China existieren neben der offiziellen Sprache(n) mehrere Minderheitssprachen, Mundarten. Deshalb ist es notwendig, neben der „Muttersprache“ die amtliche Fachsprache zu kennen. Die Motivationen können sehr verschieden sein: Minderheitswesen, mehrere Amtssprachen im Land (z.B. Finnland, Schweiz), bessere Berufschancen auf dem späteren Arbeitsmarkt u.a. Deshalb unterstützt die Europäische Union auch diese Unterrichtsform: “*Ein gemeinsames Haus zu erreichen, um darin zusammenzuleben, zu arbeiten und Handel zu treiben, bedeutet, sich die Fähigkeit anzuzeigen, sich effektiv miteinander zu verständigen und einander besser zu verstehen. Andere Sprachen zu erlernen und zu sprechen ermutigt uns, uns anderen, ihren Kulturen und Ansichten stärker zu öffnen.*“[4]

Das Ziel scheint zwar in allen Ländern einheitlich zu sein, nämlich neben der Muttersprache eine andere Sprache auf hohem Niveau zu erlernen, die Verwirklichung, die Terminologie, die didaktischen Grundlinien sind bis heute aber nicht einheitlich. Früher sprach man gern über bilingualen (eventuell multilingualen) Unterricht, welche Benennung relativ irreführend ist[5], da man meinen könnte, dass es sich hier um zwei Unterrichtssprachen in einem Fach handeln könnte. Es geht hier natürlich nicht darum. Um die Jahrtausendwende wurde deshalb der Begriff „bilingualer Sachfachunterricht” eingeführt, welcher schon zeigt, dass es hier um Fachunterricht geht. Das Wort „bilingual“ blieb aber weiterhin problematisch (Bach, 2000). In der neuesten Fachliteratur wird die englische Abkürzung CLIL für „*Content and Language Integrated Learning*” verwendet, die am besten den Sinn des Unterrichts dieser Art ausdrückt. Die Europäische Kommission gibt zugleich eine Definition des Begriffs an, und kämpft darum, diesen Sachverhalt unter „bilingualen Unterricht“ zu verstehen: *„Das Akronym CLIL wird als allgemeiner Begriff verwendet, um alle Arten von Vorkehrungen zu beschreiben, in denen eine zweite Sprache (eine Fremdsprache, eine Regional- oder Minderheitensprache*

---

[4] Kommission der Europäischen Gemeinschaften: Förderung des Sprachenlernens und der Sprachenvielfalt: Aktionsplan 2004 – 2006. Brüssel 2003. S. 5.

[5] Bis heute benutzt das ungarische Gesetzt die Übersetzung des Wortes bilingual „két tanítási nyelvű” – vgl. 26/1997. (VII. 10.) MKM rendelet a két tanítási nyelvű iskolai oktatás irányelvének kiadásáról

und/ oder eine andere offizielle Landessprache) dazu verwendet wird, bestimmte Fächer im Curriculum zu lehren, außer Sprachunterricht selbst" (European Commission, 2006). Im Sinne von CLIL kann man auch die Definition des bilingualen mathematischen Fachunterrichts angeben: „... *unter bilingualem Mathematikunterricht jede Art von Unterricht zu verstehen, in dem eine zweite Sprache (sei es eine Fremdsprache, eine regionale Sprache, eine Minderheitensprache, und/oder eine weitere Amtssprache des jeweiligen Landes) als Arbeitssprache im Mathematikunterricht verwendet wird.*" (Szűcs, 2009, p. 66) Nach dieser Definition ist schon eindeutig, dass der Fachunterricht die Mathematik ist, die „Fremdsprache" dazu ein Arbeitsmittel, die Arbeitssprache ist. Das schließt natürlich nicht aus, dass der Lehrer in der Stunde manchmal –in erster Linie bei den Anfängern- die Muttersprache benutzt.

In Ungarn hat CLIL –bilingualer Unterricht- eine lange Tradition. Nach dem zweiten Weltkrieg, vor der Wende sank die Zahl der bilingualen Schulen, Klassen und dementsprechend die Anzahl solcher Schüler drastisch. Bis Mitte der sechziger Jahre blieben etwa 25.000 Schüler im Minderheitenschulwesen. Die tatsächliche Konsolidierung kam erst in den achtziger Jahren. Im Jahr 1987 waren die gesetzlichen Bedingungen für den bilingualen Unterricht geschaffen worden. In den vergangenen 25 Jahren wuchs die Zahl der bilingualen und minderheitlichen Kindergärten, Grund- und Mittelschulen. Sogar im Hochschul- und Universitätswesen erschien die Zweisprachigkeit, obwohl hier die Motivation zum Teil anders ist als im vorigen Bereich. Laut des Berichts des Vereines für bilinguale Schulen[6] gab es im Jahr 2011 etwa je 70 Grundschulen, Gymnasien und Fachmittelschulen in Ungarn. Hier ist nicht mitgeteilt, welche Mittelschulen „Gesamtschulen" sind, also welche sowohl mit einem Gymnasialzweig als auch mit einem Fachmittelschulzweig versehen sind. Die Anzahl solcher Schulen wuchs leicht in den letzten knapp zehn Jahren (Szűcs, 2009, p. 61). Leider war das politische, finanzielle und gesetzliche Umfeld in dem letzten 25 Jahren überhaupt nicht einheitlich. Die Unsicherheit, die –oft aus der Hinsicht der bilingualen Schulen negative– Veränderungen führten langsam dazu, dass die Arbeit in solchen Schulen immer schwieriger wurde.

Aber bringt der bilinguale Mathematikunterricht etwas? Oft habe ich die Frage in erster Linie von ungarischen Kollegen – Mathematik- und Deutschlehrer gehört. Die Mathematiklehrer formulieren oft die Kritik, dass die Schüler den Schachverhalt oft nicht einmal auf Ungarisch verstehen. Die zweite Kritik ist oft, dass die Schüler die mathematischen Begriffe auf Deutsch kennen, vielleicht übersetzen sie sie wortwörtlich ins Ungarische, was manchmal

[6] http://kettannyelvu.com/kie/?p=elmeletihatter Az elnökség összefoglalója a két tanítási nyelvű oktatás eredményeiről (2011) 2011. október

überhaupt nicht geht, oder wenn ja, dann irreführend ist. Viele deutsche Begriffe sind Spiegelübersetzungen wie z. B.: Winkelhalbierende – szögfelező, aber es gibt auch solche, bei denen die Spiegelübersetzung stark irreführend ist: Seitenhalbierende – noch die besten Schüler sagen oft dafür „oldalfelező (merőleges??? – Mittelsenkrechte), obwohl sie die „súlyvonal" („Schwerlinie") ist. Die Deutschlehrer kritisieren oft, dass es in der Mathematik relativ wenig „Sprache“ gibt. Wörter, Wortverbindungen sogar ganze Sätze werden durch mathematische Symbole ersetzt. Aber wo man Texte, Sprache benutzt, ist der Anspruch an einem grammatisch richtig formulierten Satz nicht so wichtig wie die richtige mathematische Formulierung. So ist die Sprache oft eher in den Hintergrund gedrückt. Diese Diskrepanz konnte man früher auch bei den Fachdidaktikern beobachten. Es gab nämlich solche, die die didaktische Relevanz des bilingualen Fachunterrichts aus der Hinsicht des Fremdsprachenunterrichts, aber auch solche, die sie aus der Hinsicht des Fachunterrichts her ableiten wollten. Heute scheint diese didaktische Zersplitterung gescheitert zu sein. Es wird immer klarer, dass man beim bilingualen Unterricht nach der Integration, der Zusammenarbeit der zwei Bereiche streben muss, nicht zu vergessen, dass die primäre Rolle bei diesem Unterrichtstyp das unterrichtete Fach trägt. Otten und Wildhage haben dies folgendermaßen formuliert: „*Integration von Inhalt und Sprache bedeutet für das bilinguale Sachfach die Verwendung der Fremdsprache als Arbeitssprache. Ausgangs- und Bezugspunkt didaktischer Planung ist damit zunächst die Fachdidaktik des Sachfaches. Fremdsprachendidaktische Konzepte und Methoden unterstützen die fachspezifischen Lehr- und Lernprozesse.*“ (Otten/Wildhage, 2003)

Aus der Hinsicht der Didaktiker scheint die Frage des vorigen Absatzes beantwortet *Aber bringt der bilinguale Mathematikunterricht etwas?* zu sein. Die Antwort auch für die Eltern, Schüler, Mathematiklehrer, die im bilingualen Unterricht teilnehmen klar. Aber was sagen die Zahlen? Sind diese Schüler mindestens so erfolgreich, wie die Mitschüler, deren Arbeitssprache ihre Muttersprache ist? Die Studie von Wendland (2011) gibt ein Bild darüber, was die „bilingualen“ und „nicht-bilingualen“ Schüler in Ungarn beim Abitur leisten. Laut seiner Untersuchungen kann man feststellen, dass die Schüler im Fach Mathematik in der Zielsprache Deutsch eine überdurchschnittliche Leistung bringen. Im Jahr 2010 waren die Ergebnisse in der Zielsprache Deutsch um 15% besser als auf Ungarisch. Laut der Studie trifft das auch für fast alle Zielsprachen zu (englisch, französisch, italienisch, spanisch, slowakisch und serbisch). Nur in Russisch war das Ergebnis schwächer. Wendland betont aber, dass in diesem Jahr nur 4 Schüler das Abitur in dieser Sprache geschrieben haben. Auf ein ähnliches Ergebnis kam zwei Jahre früher Vámos (2009). Wendland versucht auf die Spuren der Gründe kommen. Zuerst nimmt er an, dass hier vielleicht der Altersunterschied eine Rolle spielen kann.

Die bilingualen Schüler legen oft in der Klasse 13 statt 12 das Abitur ab. Wenn man aber die eine ungarische Vergleichsgruppe untersucht, entsprechen die Ergebnisse dem ungarischen Durchschnitt. Nach näheren Untersuchungen schließt er diese Möglichkeit aus. Er findet vier Gründe, warum die Zweisprachigkeit effektiver sein kann als der monolinguale Unterricht. Erstens sieht er so, dass die Effektivität mit dem bilingualen Lernen zusammenhängt, zweitens liegt das an der Kompetenz und dem Engagement der Lehrer[7], drittens hängt es davon ab, ob das bilinguale Schulprofil oft anregend und fördernd ist und letztens erwähnt er den überdurchschnittlichen Arbeitseinsatz der Schüler.

1.4. Computer im Unterricht, blended learning

Die technologische Entwicklung ermöglicht während des Unterrichts die Benutzung von verschiedenen technischen Hilfsmitteln. Diese Hilfsmittel können heutzutage sehr vielfaltig sein. Man kann über verschiedene Unterrichtssoftwares, Computerapplikationen, Filme (online oder offline) oder auch über Smartboard sprechen. In den letzten paar Jahren werden auch die mobilen Verwendungsmöglichkeiten wie graphischer Taschenrechner (GTR) oder auch Smartphone-Applikationen in den Vordergrund gerückt. Timo Leuders weist darauf hin, dass diese neuen computertechnischen Möglichkeiten in erster Linie auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts hilfreich und effektiv sein können: „*Neue Technologien und neue Medien (gemeint ist meist: Computer) bieten für den Mathematikunterricht – mehr noch als die meisten anderen Schulfächer – die Chance zu einer grundlegenden inhaltlichen und methodischen Reform. Sie ermöglichen eine Entlastung von Routinearbeiten und bahnen daher exploratives und kreatives Arbeiten, ebenso die Behandlung realistischer Anwendungssituationen und das Vernetzen von Inhalten.*" (Leuders, 2010). Die Frage ist, wie und wie weit man diese neuen Möglichkeiten im Unterricht verwenden kann. Tulodziecky meint, dass man die technischen Mittel im Unterricht zur Anregung und Unterstützung nutzen muss, wenn Lernprozesse in problem-, entscheidungs-, gestaltungs- oder beurteilungsorientier Weise angesprochen werden (Tulodziecky, 2007). Er hält die Medienbenutzung auf fünf gebieten des Unterrichts mit Rücksicht auf die kognitionstheoretischen, konstruktivistischen und didaktischen Ebenen für besonders nützlich und hilfreich:

[7] In Ungarn gibt es eine selbstorganisierende Lehrergruppe, die Mathematik, Physik und Informatik in Deutsch unterrichten. Sie tagen jährlich zweimal und entwickeln viele Materialien zum Teil zur Fachsprache, zum Teil zum Lehrfach. Viele Materialien sind frei erhältlich unter: www.uni-miskolc.hu/~dephyma

1. Bedeutsame Aufgabe mit angemessenem Komplexitätsgrad als Ausgangspunkt;
2. Verständigung über Ziel und Vorgehensweisen;
3. Selbständige und kooperative Auseinandersetzung mit bedeutsamen Aufgaben;
4. Vergleich unterschiedlicher Lösungswege;
5. Anwendung und Reflexion des Gelernten.

In den Stunden wurden die Vorteile der Technik aller Art benutzt. Der Computer wurde in der Mehrheit der Stunden benutzt. Es gab leider keine Möglichkeit, in einen Computerraum zu gehen. So konnten die Schüler nicht selbständig damit arbeiten. Aber an der Tafel, mit Hilfe eines Beamers haben sie die Aufgaben oft alleine oder mit Hilfe gelöst – natürlich mit viel Freude. Sie wurden ständig ermutigt, GeoGebra zu Hause heurunterzuladen und zu benutzen. Viele haben es auch getan. Es wurden auch Drillaufgaben online gelöst (vgl. 1.2.2.). Es wurde zum Thema exponentielles Wachstum einen Film von Beutelspacher gesehen, welcher das Einführen und Verstehen dieses Prozesses sehr erleichtert hat[8]. Bei dem Entwurf einer solchen Stunde wurden auch mit den Empfehlungen von Abfalterer (Abfalterer, 2007) gearbeitet und die Stunden dementsprechend gestaltet:

1. Die Software muss vorbereitet und getestet sein.
2. Der Ablauf ist geplant, Zielsetzungen sind gegeben.
3. Aufgaben sind gestellt, die Rolle des Lehrers geklärt.
4. Kurze Feedbackschlaufen sind eingebaut

Eine weitere Möglichkeit wäre, wenn man auch in den ungarischen Schulen einen graphischen Taschenrechner benutzen könnte/dürfte. Er ist in Ungarn derzeit nicht erlaubt, sogar im Abitur ist er kategorisch verboten. Diese Art von Taschenrechner hat meiner Ansicht nach zwei große Nachteile: 1. Er ist sehr teuer. So können ihn sich viele ungarische Familien nicht leisten. 2. Er verfügt über solche Funktionen, die den Schülern das mathematische Denken leicht abgewöhnen können, wenn man ihn nicht richtig benutzt. Ich denke hier z.B. an die „*solve*“ Funktion, wodurch man Gleichungen vieler Art blitzschnell genau oder annähernd lösen kann, ohne den Lösungsweg zu zeigen. So können auch die besten die Lösungsmethoden der Gleichungen einfachster Art schnell vergessen werden, worauf ich in meiner Studie hingewiesen habe (Várady, 2013). Aber das Nutzen des GTR-s ist nicht zu umstritten. Man muss aber die Verwendung vom GTR didaktisch richtig planen. In der Deutschen Schule Budapest habe ich sehr positive Erfahrungen damit gesammelt. Im Folgenden

[8] A. Beutelspacher: Die Geschichte des Schachbretts.
http://www.youtube.com/watch?v=f6UMdo81A1g&list=PL12570B51A69CF67C (7.7.13)

werde ich die Software GeoGebra ausführlicher darstellen, die ich in meinen Stunden und auch die Schüler zu Hause oft benutzt haben.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist blended learning, den Friesen folgendermaßen definiert: “*"Blended Learning" bezeichnet die Bandbreite der Möglichkeiten, die durch die Kombination von Internet und digitalen Medien verbunden mit Arbeitsformen im Klassenzimmern vorhanden sind, die die physische Präsenz von Lehrern und Schülern erfordern.*“ (Friesen, 2012) Er weißt in seiner Studie darauf hin, dass der Begriff erst 1999 erschienen ist und erst etwa nach einem Jahrzehnt eindeutig definiert wurde. Am Anfang wurden darunter in erster Linie online Kurse verstanden (PR Newswire, 1999). In der Mitte des ersten Jahrzehntes haben mehrere diesen Begriff mit der höheren Schulbildung identifiziert (Bonk&Graham, 2006, Garrison and Vaughan, 2008). Mit der Definition von Staker und Horn (2012) wurden die endlosen Kombinationen der Methoden von „Blended learning“ in vier Kategorien zusammengefasst, aus denen die erste und vierte eher der höheren Edukation, die anderen zwei der Mittel- und Oberstufen entsprechen. Sie haben diese vier Kategorien folgendermaßen gekennzeichnet:

1. "Das Rotationsmodell", in dem die Online-Tätigkeit mit der Möglichkeit der face-to-face (F2F) Instruktionen zyklischer Weise kombiniert oder besser gesagt, eingebettet wird;
2. "Das Flex-Modell“, in dem mehrere Schüler in erster Linie Online engagiert sind, aber im Rahmen der Aufsicht eines Lehrers, der physisch vorhanden ist;
3. "Das self-blending Modell ", in dem die Schüler verschiedene Kurse wählen, um unabhängig zu werden, aber sie tun das in einer Umgebung, wo sowohl eine Überwachung der Lehrer und auch die anderen Schüler anwesend sind;
4. "Das enriched-virtual Modell": in diesem Modell werden online, virtuelle Erfahrungen als bereichert gesehen nur periodisch erscheint die physischen Anwesenheit.

Während des Unterrichtsexperiments kam die Methode „Blended learning“ entsprechend der Definition von Friesen zur Anwendung, obwohl durch GeoGebra-Übungen zu Hause auch die zweite und dritte Stufe von Starker und Horn zur Geltung kamen.

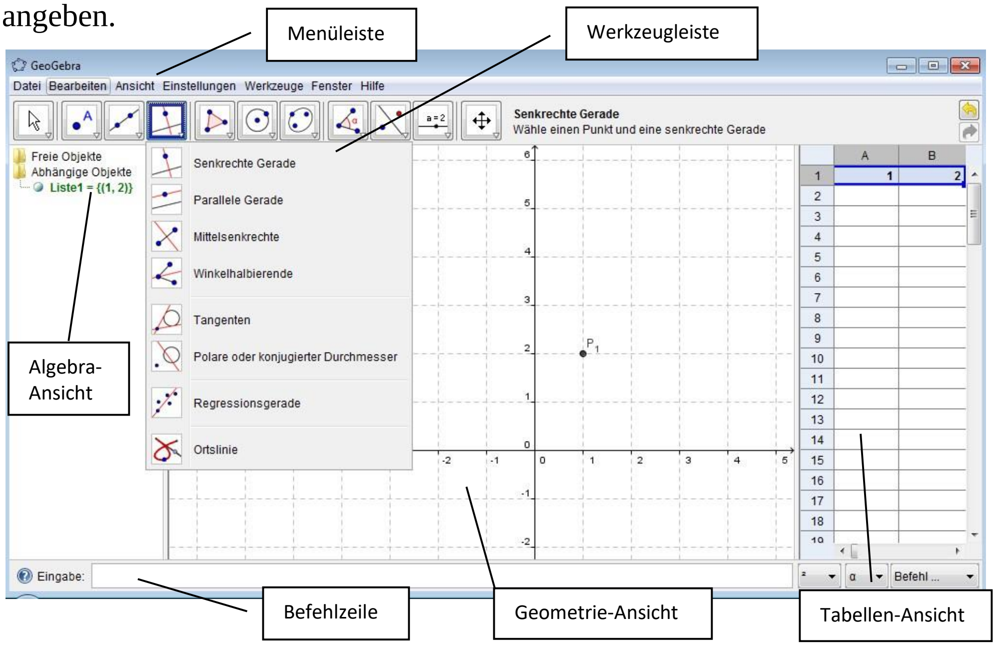
1.5.GeoGebra

„Die Begriffsstruktur der Mathematik ist viel komplizierter als jemand ohne Hilfe fähig wäre, während des Lebens schaffen zu können.” (Skemp, 2005) Laut der vorigen Überlegungen (vgl. 1.1.1. und 1.1.2.), unterstützt vom Zitat von Skemp kann man behaupten, dass die Repräsentationen im Unterricht, und wegen des starken Symbolismus betont im Mathematikunterricht besonders wichtig sind. Das hat der Mathematikunterricht schon lange entdeckt. Er benutzt bereits seit dem Altertum die überwiegend statischen Repräsentationen. Die Mathematiker skizzieren Abbildungen. Um den zeitlichen Ablauf zeigen zu können, werden die Teile der Abbildung nummeriert oder Abbildungsreihen gefertigt. Ich erwähne hier, dass es bei den Beweisen eine Methode gibt, wo man ihn ohne Wörter, ausschließlich mit visuellen Bezeichnungen durchführt (Skemp (2005), bzw. Kátai (2005)). Diese Methoden ermöglichen es, den zeitlichen Ablauf des Problemlösens zu zeigen. Damit wird auch das Verstehen erleichtert. Heutzutage, wegen der Entwicklung der Computertechnik, sind wir fähig, den Gedankengang zeitlich so darzustellen, dass er einerseits vor- und zurückspulbar, andererseits während der Lösung veränderbar ist. Im ersten Fall kann man an die verschiedenen Präsentationsprogramme denken, die in Vorlesungen mit Vorliebe verwendet werden. Im zweiten Fall wird in erster Linie an dynamische Computeralgebra-Softwares gedacht. Hier möchte ich eine solche Software vorstellen, womit ich in den Stunden oft arbeite, die auch die Schüler leicht erreichen und bedienen können. Diese Software ist GeoGebra.

Die Software GeoGebra (www.geogebra.org) hat Markus Hohenwarter begonnen an der Salzburger Universität im Jahre 2006 zu entwickeln. Er nimmt auch heute an der Entwicklung und Verbreitung aktiv teil und versucht mit seinem Team ein weltweites Netz aufzubauen, das den Lehrern und Schülern bei der Verwendung der Software zu helfen versucht. Die Software selbst ist eine dynamische Computeralgebra-Software, die die Elemente der Algebra, der Geometrie und der Analysis vereinigt. Sie ist nicht nur für geometrische Konstruktionen geeignet, sondern sie teilt auch die dazu gehörenden algebraischen Berechnungen mit, und umgekehrt. Außerdem kann man sie ausgezeichnet für Funktionendarstellungen und Kurvendiskussionen (mit Hilfe z.B. der Ableitungsfunktion), für die Darstellung des bestimmten Integrals (Ober- und Untersumme), für einfache Tabellenkalkulationen und ihrer Darstellung, für Folgendarstellung usw. verwenden. GeoGebra will die Rolle der wissenschaftlichen mathematischen Softwares nicht übernehmen, sie bietet aber durch ihre schnelle, einfache Anwendung eine große Hilfe von den Grundschulen bis zu den Universitäten, Mathematik genießbarer und verständlicher zu machen.

Der Aufbau der Software ähnelt sich stark anderen Progarammen. Oben befindet sich die Menüleiste mit den Elementen: *Datei*, *Bearbeiten*, *Ansicht, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, Hilfe*. Darunter liegt die Werkzeugleiste, die die Piktogramme der wichtigsten Funktionen enthält. Durch diese kann man weitere Funktionen erreichen.

Auf der linken Seite des Bildschirms befindet sich eine ausschaltbare Algebra-Ansicht, in der z.B. die Koordinaten der Punkte, die Gleichungen der Figuren, Flächeninhalt, Längen usw. zu sehen sind, die beliebig mit Mausklick schnell ein- und ausblendbar sind. Wenn man das durchführt, erscheinen bzw. verschwinden nebenan, in der Grafik-Ansicht die Objekte. Auf der rechten Seite kann die Tabellen-Ansicht vorkommen. Die hier durchgeführten Operationen sind mit denen in der Algebra-, bzw. Grafik-Ansicht zu verbinden. In der Mitte liegt die Grafik-Ansicht, welche man auch verschieden einstellen kann. Das Blatt kann einfach sein, kann ein Gitternetz enthalten (auch mit trigonometrischen und isometrischen Einstellungen), man kann die Koordinatenachsen ein- und ausblenden. Auf dem unteren Teil ist die Eingabezeile. Hier kann man die Objekte in algebraischer Form angeben. Mit der Befehl-Taste kann man die durchzuführenden Operationen direkterweise angeben.



11. Abbildung: Die Funktionen von GeoGebra – eigene Quelle

In dem Abschnitt, in dem das Unterrichtsexperiment vorgestellt wird, werden die Möglichkeiten gezeigt, die während des Unterrichts verwendet worden sind. Es ist wichtig, dass die Schüler GeoGebra schon teilweise gekannt haben, weil sie sie im Vorjahr im Unterricht benutzt haben. Die Mehrheit der Schüler fanden die Software gut, sie haben sie wirklich zu Hause benutzt, die Hausaufgaben zum Teil damit gelöst. GeoGebra wurde zum Beispiel bei der Einführung der exponentiellen Vorgänge verwendet, bei den Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihrer Transformationen benutzt. Die Software war auch bei den Textaufgaben hilfreich, als die Schüler den Logarithmus noch nicht gelernt hatten. So konnte die Lösung anhand der Abbildung geschätzt werden.

2. Die Methodologie der Forschung

2.1. Forschungsfragen

1. Wie beeinflusst die Effektivität des Unterrichts vom Thema "Exponentielle und logarithmische Vorgänge" die Anwendung der Hauptideen des realistischen Mathematikunterrichts?
2. Wie kann man die Effektivität des Unterrichts vom Thema "Exponentielle und logarithmische Vorgänge" mit Hilfe GeoGebra Software erhöhen?

2.2. Hypothesen

Anhand der oben formulierten Fragen habe ich grundsätzlich zwei Hypothesen formuliert:

1. Die realistische Auffassung des Mathematikunterrichts führt zur reicheren concept image der Schüler, sie können die Begriffe und Gesetzmäßigkeiten verständnisvoller und effektiver anwenden.
2. Mit Hilfe der dynamischen computeralgebraischen Software GeoGebra werden die Schüler motivierter arbeiten, mit solchen Übungen verstärkt sich ihr Begriffsverständnis, ihr Wissen und Können werden stabiler, flexibler, reicher und anwendbarer.

2.3. Die Abwicklung und die Versuchsklasse des entwickelnden Unterrichtsexperiments

Das entwickelnde Unterrichtsexperiment fand im Schuljahr 2010/11, von Anfang November 2010 bis Mitte Januar 2011 in dem Pilisvörösvárer (Werischwar), Friedrich-Schiller-Nationalitätengymnasium statt.
Die Gruppe bestand aus 21 Schülerinnen und Schülern aus zwei verschiedenen Klassen, aus den Klassen 11.c/12.s. Andere Schüler, die sich mit Mathematik beschäftigen wollten, haben den Leistungskurs gewählt, die „restlichen“ 21 Schüler habe ich unterrichtet. Die zwei wesentlichen Aspekte der Auswahl der Experimentgruppe waren erstens die verschieden Mutter- und Arbeitssprache der Schüler. Das ermöglichte die Entwicklung eines deutschsprachigen Lehrstoffes des Themas auf deutscher Sprache, der bis dahin nicht vorhanden war. Zweitens wollte ich Schüler unterstützen, entwickeln, die nicht gut in Mathematik waren. Und diese Schüler waren nicht besonders gut in Mathematik, die Durchschnittsnoten am Ende des vorigen Schuljahres waren die folgenden:

1. Tabelle: Ergebnisse der beiden Klassen im Vorjahr – eigene Quelle

10.c	11.s[9]	Insgesamt:
2,92	2,38	2,71

Die Schüler beider Klassen haben die Mathematik ab dem 9. Jahrgang auf Deutsch gelernt, aber von verschiedenen Lehrern. In diesem neuen, 11. Jahrgang haben sie einen neuen Lehrer –mich- bekommen. Es war eine große Herausforderung, die Gruppe kennen zu lernen, die Schüler miteinander, mit dem Lehrstoff, und mit mir vertraut zu machen. Es ist meiner Meinung nach ziemlich schnell gelungen, obwohl die räumliche Zerlegung bis Ende des Jahres bestand - die Schüler der zwei Klassen haben sich im Klassenraum nicht gemischt, aber sie hatten einen guten Kontakt zueinander.

Die Themen des Unterrichtsjahres 11 – Kombinatorik, Graphen; Potenzen, Wurzeln, Logarithmus; Trigonometrie; Funktionen; Koordinatengeometrie; Wahrscheinlichkeit, Statistik – sind schwer genug, damit die schwächeren Schüler große Probleme haben. Der Notendurchschnitt am Ende des 11. Jahrganges war dementsprechend noch schwächer als im Vorjahr.

2. Tabelle: Ergebnisse der beiden Klassen im Jahrgang 11 – eigene Quelle

11.c	12.s	Insgesamt:
2,77	2,25	2,57

Die Schüler hatten wöchentlich vier Mathematikstunden. Für das Thema „Wurzelziehen, Potenzen mit rationalen Exponenten, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen und ihre Anwendungen“ gab es laut Stoffverteilungsplan 33 Unterrichtsstunden. Diese Zeit ist für den sehr umfangreichen Stoff relativ knapp. Anscheinend mussten wir mehr leisten als eine „normale“ Klasse, weil schon allein die Einführung des Themas nicht die herkömmliche Methode war, also ein bis zwei Beispiele, dann eine Menge Übungsaufgaben. Schon die Einführung war so geplant, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Aufgaben, die aus dem Alltagsleben stammten, den Sinn des Stoffes verstehen, sich in ihn vertiefen, sich mit ihm vertraut machen konnten. So war es für sie einfacher, den theoretischen, trockenen Teil besser verstehen und lernen zu können. Dazu haben wir den Computer sowohl in den Stunden als auch zu Hause benutzt.

[9] Die zwei Klassen besuchen den gleichen Lehrgang, aber die Klasse „s” hatte ein deutschsprachiges Vorbereitungsjahr, deshalb haben sie die Bezeichnung 11.s. Die Schüler sind 17, 18 Jahre alt. In Ungarn ist die beste Note 5, die schlechteste 1.

2.4. Der Stoffverteilungsplan des entwickelnden Unterrichtsexperiments

Bei der Zusammenstellung des Stoffverteilungsplanes mussten die Charakteristika des Ungarischen Nationallehrplanes, des örtlichen Stoffverteilungsplanes und die zeitlichen Bedürfnisse des realistischen Mathematikunterrichtes vor Augen gehalten werden. In der ersten Stunde wurde der Vortest geschrieben. Die Schüler wussten nicht, welches Thema im Vortest vorkommt, so hatten sie keine Möglichkeit es zu wiederholen. Anhand der Ergebnisse wurde dann noch die Aufgaben der Wiederholung (5 Stunden) ein wenig modifiziert. In der 7. Stunde fingen wir mit den exponentiellen Vorgängen an. Diese Einführung dauerte drei Stunden lang. Danach kamen die, im ungarischen Schulsystem unentbehrlichen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme. In den letzten zwei Stunden haben wir uns mit Textaufgaben und einer kleinen Wiederholung beschäftigt. In der folgenden Stunde kam ein Test, um zu kontrollieren, wie die Schüler dieses Thema erlernt haben. In den nächsten vierzehn Stunden wurde der Logarithmusbegriff gelehrt. Die Einführung des Themas passierte wieder mit realistischen Mitteln, es wurde sogar das Beispiel des exponentiellen Teiles genommen. Die Logarithmusgesetze wurden auch mit Hilfe von Aufgaben eingeführt. Das haben die Schüler als sehr positiv empfunden. Danach kamen wieder die Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssysteme. Zuletzt haben wir uns wieder mit Textaufgaben beschäftigt. Danach kam die zusammenfassende Klassenarbeit, die große Klassenarbeit. Die Stoffverteilung ist im Anhang B: zu finden.

2.5. Die Forschungsmethoden

Das Experiment begann mit einem Vortest, der schnell korrigiert und dessen Ergebnisse schnell ausgewertet wurden. In allen weiteren Stunden wurden Tonbandaufnahmen gemacht, Notizen wurden gefertigt. Die Hefte der Schüler wurden kopiert. Ich habe auch Fotos über die Arbeiten der Schüler, über die Gruppe, über die Stunde gemacht. Vor und nach den Stunden habe ich die Schüler gefragt, was sie gut oder nicht so gut verstanden haben, bzw. am Ende der Stunden gab es Hausaufgaben, die am Anfang der nächsten Stunde – wenn es nötig war – ausführlich besprochen wurden. Währen der 33 Stunden gab es auch Tests, bzw. am Ende haben die Schüler eine zusammenfassende Klassenarbeit geschrieben, den ich ausgewertet habe.

2.6. Materialien

In den Stunden haben wir überwiegend mit den Arbeitsblättern gearbeitet, die für das Unterrichtsexperiment vorbereitet wurde. Aus diesen Arbeitsblättern werden Teile im Abschnitt der Beschreibung des Experiments eingefügt, die aus didaktischen, methodischen Gründen besonders wichtig sind. Bei der

Zusammenstellung wurden auch auf die Lehr- und Übungsbücher verwendet, die die Schüler hatten. Die Hausaufgaben hatten sie oft –wo es möglich war – aus diesen Büchern bekommen. Sie hatten ein Lehrbuch: „Sokszínű matematika“ von Kosztolányi (2003), und zwei Aufgabensammlungen: Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., und „Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I”. Die Aufgaben der ersten Sammlung wurden mit # , die Aufgaben der zweiten mit * markiert. Ein Paar Aufgaben wurden aus der Aufgabensammlung von „mathepower“ (www.mathepower.de) genommen. Ich habe auch selbst Aufgaben erstellt. Manchmal mussten auch die Schüler über Aufgaben nachdenken, formulieren.

3. Das entwickelnde Unterrichtsexperiment

3.1.Lehrbücher

In diesem Abschnitt werden kurz einige, in Ungarn zurzeit erhältlichen Lehrbücher vorgestellt, in erster Linie aus der Hinsicht der Forschung. Der Abschnitt wird vorgestellt, der sich mit den exponentiellen und logarithmischen Funktionen, mit ihren Einführungen und Anwendungen beschäftigt. Es wurde dazu ein deutsches Lehrbuch, (Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien, 2006) genommen und ein, im Internet erhältlicher Lehrstoff (http://www.sulinovadatbank.hu/) untersucht, der vom Kultusministerium von Ungarn bestellt wurde und den Verfassern nach als nach den Kompetenzerwartungen entsprechendes Lehrmaterial entwickelt wurde. Die Methoden der Bücher, der Aufbau des Lehrstoffes wird jetzt kurz zusammengefasst[10].

a) Kosztolányi, J: Sokszínű matematika 11. Jahrgang (Bunte Mathematik)

Dieses Lehrbuch war unter den ersten, die den Erwartungen des neuen Nationallehrplans entsprechen wollten und die damals „grauen“ Mathematikbücher in ein bunteres umwandeln wollten. Auch der Titel des Buches „Sokszínű matematika – Bunte Mathematik“ betont dieses Streben. Diese schnelle Erscheinung bedeutet für das Buch sowohl einen Vor- als auch einen Nachteil. Vorteil, weil das Buch wegen der Schnelligkeit auf Anhieb beliebt wurde, es hat viele neue Ideen gezeigt, benutzt, es ist neuen didaktischen Wege gefolgt. Die Verfasser haben zum Teil kompetenzgeeignete Aufgaben verwendet, praktische Aufgaben gezeigt. Das Buch ist wirklich „bunt“, voll mit Abbildungen und komischen Graphiken. Der Nachteil ist, dass

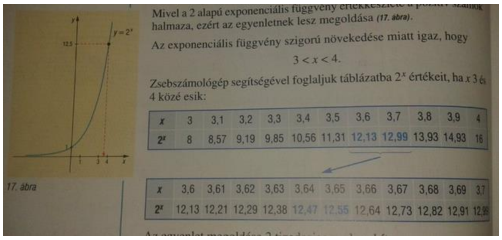
[10] Es gibt noch weitere erhältliche Bücher auf dem Markt, z.B:

- Gerőcs, L.; Számadó L. (2012): Matematika 11. évfolyam, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
- Juhász, I; Orosz, Gy.; Paróczay, J.; Szászné Dr. Simon, J.: Matematika 11. évfolyam, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
- Hajnal, I.; Számadó, L.; Békéssy, S.: Matematika a gimnáziumok 11. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó

nach diesem Buch viele neuere erschienen sind, die teilweise diese bunte, praxis- und kompetenzorientierte Sichtweise übernommen haben, sie teilweise erweitert, weiterentwickelt haben und viele „frische“ Ideen benutzt haben.

Die Potenzen, Wurzelgesetze werden mit Formeln, mathematischen Mitteln wiederholt, welche von Drillaufgaben gefolgt werden. Nachher kommen die Potenz- und Wurzelfunktionen, die mit „herkömmlichen“ Methoden behandelt werden. Danach stehen die rationalen Exponenten, wieder mit mathematischen Formeln und Aufgaben bearbeitet. Mit den irrationalen Exponenten wird gleichzeitig die exponentielle Funktion eingeführt und viele Beispielsfunktionen werden gezeigt. Hier kommt auch die erste praktische Anwendung, eine Aufgabe über den Luftdruck. Im Übungsteil ist auch noch eine andere Aufgabe zu finden, über einen radioaktiven Zerfall. Leider kommen keine anderen Aufgaben solcher Art im exponentiellen Teil.

Der Logarithmus wird mit einem Textbeispiel eingeführt: Bakterien vermehren sich. Zur Lösung wird zum Teil eine Tabelle, zum Teil die exponentielle Funktion verwendet (Kosztolányi, p. 92.).



Mivel a 2 alapú exponenciális függvény értékkészlete a pozitív számok halmaza, ezért az egyenletnek lesz megoldása *(17. ábra)*.

Az exponenciális függvény szigorú növekedése miatt igaz, hogy

$$3 < x < 4.$$

Zsebszámológép segítségével foglaljuk táblázatba 2^x értékeit, ha x 3 és 4 közé esik:

x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
2^x	8	8,57	9,19	9,85	10,56	11,31	12,13	12,99	13,93	14,93	16

x	3,6	3,61	3,62	3,63	3,64	3,65	3,66	3,67	3,68	3,69	3,7
2^x	12,13	12,21	12,29	12,38	12,47	12,55	12,64	12,73	12,82	12,91	12,9

12. Abbildung: Zuordnung vom Logarithmus – Quelle: Kosztolányi (2003)

Gleich danach kommen die Definition des Logarithmus und eine Reihe von Übungsaufgaben. Obwohl die Einführung der Logarithmusfunktion durch mathematische Mittel passiert findet man keine praktischen Anwendungen. Unter den Übungsaufgaben ist auch eine Textaufgabe zu finden: Das Wachstum einer Zierpflanze mit Tabelle und Funktionsgraphen. Unter den Logarithmusgesetzen, Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssystemen sind Anwendungen nur im letzten Abschnitt die folgenden Typen zu sehen: Abkühlung von Materialien, Amortisation, radioaktiver Zerfall, Wachstum des Drogenkonsums.

Im Lehrbuch ist eine Mischung zu finden, die zum Teil der „reinen“ mathematischen Richtung entspricht, zum Teil praxis- und anwendungsorientiert ist.

b) Ábrahám: Matematika 11.

Die Autoren betonen schon im Vorwort, dass sie ein Lehrbuch geschrieben haben, durch das sie die Mathematik verständlich und beliebt machen wollen.

Sie möchten das so erreichen, dass sie unzählige alltägliche Beispiele zeigen. Erst dann wollen sie die exakten mathematischen Inhalte angeben.

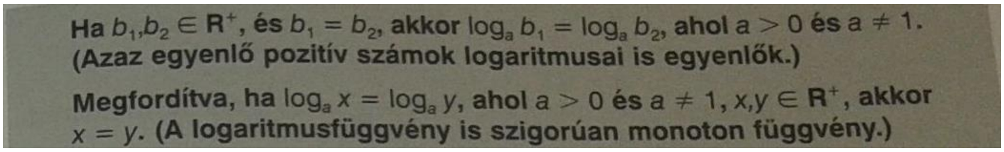
Die Wiederholung der Quadratwurzel, der Potenzen mit ganzzahligen Exponenten und Einführung der rationalen, irrationalen Exponenten und der n-ten Wurzel passiert mit der herkömmlichen Methode. Das heißt, sie werden exakt mathematisch eingeführt. Am Rande des Haupttextes gibt es bunte Abbildungen, Fotos, die das Verstehen, den Kontext mit dem Alltagsleben erleichtern können. Auch die Funktion selbst wird mit der Definition eingeführt, und erst dann kommt eine (und zugleich die einzige) Textaufgabe. Hier geht es um die Vermehrung von Bakterien, der Zusammenhang ist mit der Formel $N_1(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{t_g}}$ angegeben, wobei N_0 die Anfangsanzahl der Bakterien bedeutet, t_g die Generationszeit, also die Zeit, welche die Bakterien brauchen, um ihre Anzahl verdoppeln zu können. Meiner Ansicht nach, ist das Anliegen, dass die Autoren die praktische Seite der Mathematik zeigen wollen, hier lobenswert. Was ein Problem bedeuten kann, ist, dass die angegebene Formel für viele Schüler erschreckend vorkommen kann. Es kann eventuell vorkommen, dass viele, in erster Linie schwächere Schüler, mit diesem Problem nichts anfangen können. Ich habe eben deshalb mit einer einfacheren Aufgabe angefangen. Durch Entdeckung einer Reihe solcher Probleme, als die Schüler mit der Aufgabe schon befreundet sind, haben wir den mathematischen Zusammenhang formuliert. Nach diesem einzigen Beispiel kommen wieder viele Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen. Bei den Ungleichungen werden die Funktionsgraphen benutzt, aber wieder kommen keine Textaufgaben vor.

Interessanterweise wird der Logarithmus mit einer kleinen Geschichte von Marie Curie eingeführt und dazu gehört auch ein Textbeispiel über einen radioaktiven Zerfall. Die benutzte Formel sieht ähnlich wie die Formel bei dem exponentiellen Beispiel aus. Mit Hilfe des Funktionsgraphen wird die Aufgabe gelöst und kontrolliert. Dann kommen die Definition vom Logarithmus und eine Reihe von Einübungsaufgaben. Nachher kommt die Logarithmusfunktion, die logarithmischen Gesetzte. Man kann hier keine Textaufgaben, nicht einmal Hinweise darauf sehen. Was ich positiv finde, dass der Gebrauch des Taschenrechners erklärt ist. Das kann nämlich den Schülern große Schwierigkeiten bereiten. Dann kommen die Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen. Aber leider gibt es nicht einmal am Ende als Zusammenfassung praktische Beispiele. Dieser Teil enthält keine offenen Fragen, verlangt keine Selbstproduktion der Schüler. Das Lehrbuch ist sonst sehr schön, bunt, voll mit Abbildungen, Bildern. Meiner Meinung nach nehmen die Schüler ein solches Buch gern in die Hand.

c) *Czapáry, E.; Gyapjas, F.: Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára*

Im Vorwort setzten die Autoren das Ziel, ein Buch zu schreiben, das den Forderungen des zweistufigen ungarischen Abiturs entspricht. Es wird weiterhin erwähnt, dass die Schüler im Buch auch Ergänzungsmaterialien finden können. Das Buch ist vom optischen Eindruck her sehr einfach, schwarz-weiß. Das ganze Buch ist vom Inhalt her sehr sachlich. Der Aufbau folgt den Vorschriften des Abiturs. Alle neuen Stoffe werden mit exakten mathematischen Definitionen eingeführt. Nach den einzelnen theoretischen Teilen – wie zum Beispiel die Potenzen mit ganzen Exponenten – gibt es nur ein-zwei ausgearbeitete Aufgaben, aber keine Übungsaufgaben. Sie befinden sich – in nicht allzu großer Menge – erst am Ende des Abschnitts. Man kann sagen, es gibt zwar eine Wiederholung und Erweiterung des Potenzbegriffs, dieser Teil ist aber sehr kurz. Noch in diesem Teil wird die exponentielle Funktion, wieder sehr präzise eingeführt.

Nach diesem Abschnitt kommen die Definition des Logarithmus, die Logarithmusgesetze und die Logarithmusfunktion. Bei der Logarithmusfunktion werden sogar die Mengen verwendet. Somit ist der mathematische Sachverhalt noch weiter verstärkt. Es wird hier auf den Zusammenhang zwischen der exponentiellen und logarithmischen Funktion hingewiesen (Umkehrfunktion). Erst nachher kommen die exponentiellen und logarithmischen Gleichungen und Ungleichungen. Interessanterweise ist die Definition der exponentiellen Gleichung angegeben. Es wird auch fettgedruckt formuliert, wann zwei Logarithmen mit zwei möglichen Basen gleich sind:


Ha $b_1, b_2 \in \mathbf{R}^+$, és $b_1 = b_2$, akkor $\log_a b_1 = \log_a b_2$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. (Azaz egyenlő pozitív számok logaritmusai is egyenlők.)

Megfordítva, ha $\log_a x = \log_a y$, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$, $x, y \in \mathbf{R}^+$, akkor $x = y$. (A logaritmusfüggvény is szigorúan monoton függvény.)

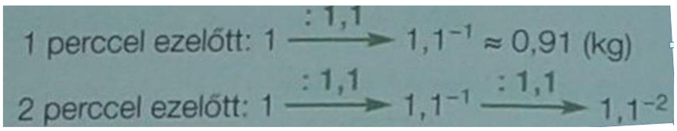
13. Abbildung: Definition des Logarithmus – Quelle: Czapáry (2010, p. 53)

Hier kann man die einzige Textaufgabe des Teiles finden. Das ist eine Produktionsaufgabe, in der keine tatsächlichen oder fiktiven Angaben vorkommen, sondern man muss die Produktion bei einem jährlichen Wachstum vom 12% verdoppeln, und die Frage die Zeit ist. Nach dem theoretischen Teil kommen die Übungsaufgaben. Am Ende befindet sich eine theoretische Zusammenfassung.

d) *Haju, S: Matematika 11. évfolyam – Gondolkodni jó*

Am Anfang des Abschnittes ist immer zusammengefasst, was die Schüler schon wissen müssten, bzw. in welche Richtung der Teil mit der Verallgemeinerung des Themas gehen wird. Das Potenzieren wird sehr schnell wiederholt (2 Musteraufgaben mit einfachen Beispielen) und mit den rationalen Exponenten (n-te Wurzel) ergänzt. Keine Übungsaufgaben gibt es zur Wiederholung, zu den rationalen Exponenten und zur n-ten Wurzel auch nur welche. Es gibt keine offenen Fragen. Man kann auch nicht sagen, dass es hier um Drillaufgaben ginge. Lieber um Einzelbeispiele, die man zum Beispiel aus einer Aufgabensammlung ergänzen kann. Die neuen theoretischen Teile werden mit mathematischen Definitionen eingeführt. Gleich danach kommt die Erweiterung des Potenzbegriffes mit reellen Exponenten. Das Potenzieren mit reellen Exponenten wird mit Hilfe der Zehnerpotenzen gezeigt (mit Wertetafel), das n-te Wurzelziehen mit Hilfe des Taschenrechners. Was in diesem Abschnitt ungewöhnlich ist, dass die n-te Wurzel für alle reellen Wurzelexponenten außer 0 definiert ist, sogar ein Beispiel ist für den negativen rationalen Wurzelexponenten angegeben: $\sqrt[-\frac{1}{2}]{3}$. Der Term ist folgendermaßen umgeformt: $\sqrt[-\frac{1}{2}]{3} = 3^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$. Dieser Gedankengag kommt mehrmals im Themenbereich vor.

Die Einführung der Exponentialfunktion geht hier durch ein Textbeispiel - Vermehrung des Hefepilzes. Die Anfangsmenge (1 kg) und der Wachstumsfaktor pro Minute (10%) werden angegeben. Die Fragen sind meiner Meinung nach sehr gut formuliert. Im Teil a) wird gefragt, wie groß die Menge des Pilzes *nach* 1, 2, 60, 0,5, 60,2 Minuten ist. Erstens werden hier nicht nur ganze Minuten gefragt, zweitens gibt es auch eine Zeitdauer, welche kürzer als 1 Minute ist. Noch besser finde ich die Frage b), wo nach der Menge *vor* 1, 2, 5,5 Minuten gefragt wird. Es bedeutet für die Schüler immer ein Problem, wenn sie „rückgängig“ denken müssen. Die Aufgabe c) fragt nach dem *mathematischen Modell*. Ich finde es sehr wichtig, dass die Schüler das Modell formulieren – wo es (natürlich) möglich ist. Dazu braucht man eine Aufgabe, die nicht zu kompliziert ist. Entsprechend gezielte Fragen helfen auch sehr dabei. Diese Aufgabe und die Fragen halte ich für geeignet zu diesem Zweck. Die Aufgabe ist ausgearbeitet, und finde ich dabei die Veranschaulichung des Vorgangs durch Pfeile sehr gut.



14. Abbildung: Veranschaulichung exponentieller Vorgänge – Quelle: Hajdu (2012)

Es könnte hier noch die Gelegenheit genutzt werden alle Punkte in einem geeigneten Koordinatensystem darzustellen. So könnte man die Funktion einführen, diese Visualisierungsmöglichkeit beim Lernen ausnutzen.

Stattdessen wird die Exponentialfunktion mit $x \mapsto 2^x$ eingeführt. Aber viele Beispiele werden hier für die exponentiellen Vorgänge aufgezählt (Populationswachstum, Radioaktivität, Zinseszins, technische Vorsprünge). Die exponentielle Funktion wird definiert, dann werden die Transformationen behandelt. Das Buch ist mit vielen Abbildungen geziert, zur Funktionendarstellung wird die Software GeoGebra benutzt. Bei den Gleichungen finde ich sehr sympathisch, dass auch solche Gleichungen gelöst werden, die algebraisch nicht, oder mit den vorhandenen mathematischen Mitteln (11. Klasse) nicht gelöst werden können. Dazu werden die Funktionsgraphen und GeoGebra benutzt. Am Ende des exponentiellen Teiles sind einige Übungsaufgaben zu finden. Leider gibt es keine anderen Textaufgaben neben der Einführungsaufgabe mehr.

Die Einführung des Logarithmus passiert auf mathematische Art, kein Textbeispiel kommt vor. Nach der Definition kommen viele Drillaufgaben um sie einzuüben. Interessanterweise wird wieder gezeigt, wie man die Zehnerpotenzen bei Zehnerlogarithmus verwenden kann, und wie man diese Werte aus der Wertetafel auslesen kann. Erst dann wird die Anwendung des Taschenrechners gezeigt. Bei den Logarithmusgesetzten wird ein interessantes, praktisches Beispiel verwendet. „Im Ozean befinden sich 48,5 mg Algen, deren Masse jeden Tag auf das 3,6-fache wächst. Das Wie Vielfache wäre die Masse der Algen unter idealen Bedingungen in 180 Tagen? (Die Masse der Erde ist etwa $5{,}97 \cdot 10^{30}$ mg.)“ Leider werden die Ergebnisse direkterweise nicht benutzt, die Gesetzte zu „entdecken“, obwohl das eine gute Basis dafür gewesen wäre. Auch die Beweise sind zu den Gesetzten angegeben. Jetzt kommen wieder die Übungsaufgaben, wieder ohne Textbeispiele. Nachher kommen der Zusammenhang der exponentiellen und logarithmischen Funktion und die Transformationen mit vielen, schönen, bunten Beispielen.

Es sind hier viele praktische Aufgaben angegeben, zum Teil gelöst, zum Teil als Übungsaufgabe aufgegeben. Die Schüler sind hier aufgerufen, mit dem Taschenrechner zu rechnen, und das mathematische, logarithmische Modell anzugeben. Solche Beispiele sind: Wachstum des Holzbestandes im Wald, durchschnittliche Produktion in einem Betrieb, Salzlösung, Atombombe, Halbwertzeit, Luftdruck, Schallintensität.

Bei der Lösung der Gleichungen, Ungleichungen spielt wieder auch die graphische Methode eine wichtige Rolle. Aber auch mit den Logarithmusgesetzen werden sie gelöst. Es gibt noch vier Seiten, wo die Lösung durch Computer gezeigt wird, wie schon erwähnt wurde, verwenden die Autoren GeoGebra. Die letzte Seite ist eine praktische Zusammenfassung, wie zum Beispiel eine Klassenarbeit aussehen könnte.

e) *Vancsó Ö.: Matematika 11. osztályosok számára*

Im Vorwort betonen die Autoren, dass sie den Schrecken vor der Mathematik abbauen wollen. Durch eine Menge von praktischen Aufgaben, Problemen wollen sie die Themen einführen, auf sie wollen sie hinweisen. Sie behaupten, dass sie die Mathematik „praktischer“ machen wollen. Sie ermutigen den Leser alle Aufgaben zu lösen, alle Fragen zu beantworten, sogar selbst Fragen zu stellen, Aufgaben zu formulieren (s. Rekontextualisierung, Realisation)

Zuerst werden die schon gelernten wiederholt, allein mit mathematischen Inhalten und Übungsaufgaben gestellt. Gleich danach ist für das exponentielle Wachstum ein bekanntes Beispiel gestellt - Erfindung des Schachspieles, das gründlich erklärt wird. Hier werden zwei Begriffe eingeführt: exponentielles Wachstum (Rückgang) und Wachstumsfaktor. Hier wird eine kleine Forschungsaufgabe gestellt. Man müsste nachschlagen wie groß die jährliche Weizenernte auf der Erde ist. Dann kommt ein zweites Beispiel über die Erdbevölkerung mit einem Diagramm. Dabei ist vom Leser verlangt, einen mathematischen Zusammenhang zwischen den angegebenen Daten aufzustellen. Im Übungsteil gibt es weitere praktische Aufgaben mit geschlossenen, offenen, sogar mit Forschungsaufgaben - Bakterien, Insekten (Tiszavirág - (Polingenia longicauda)), Population, Zinseszins, Handyverkauf als ein reelles Beispiel. Die rationalen Exponenten werden auch mit einer Textaufgabe eingeführt (Viren vermehren sich), sogar die n-te Wurzel wird mit dieser Methode gezeigt. Danach folgen wieder praktische Übungsaufgaben. Im nächsten Abschnitt werden am Virenbeispiel und mit dem Permanenzprinzip die Potenzen mit reellen Exponenten erklärt und dadurch die exponentielle Funktion gezeigt. Es kommen wieder viele praktische Übungsaufgaben. Nur in einem nächsten Absatz geht es um den exponentiellen Rückgang - Werteverlust – Amortisation, die Kohlenisotope C14 – Halbwertszeit, Luftdruck, Zurückprall eines Gummiballes, Lichtintensität durch das Glas. Die exponentielle Funktion kommt nachher, zu den Abbildungen wird hier die Software GeoGebra benutzt. Als Ergänzungsstoff steht hier das permanente Wachstum, Rückgang und die Eulersche Zahl „*e*“.

Der Zehnerlogarithmus wird an mathematischen Beispielen eingeführt, die Definition ist hier auch angegeben. Nach den Musterbeispielen sind die Übungsaufgaben angegeben. In diesen Aufgaben sind die Probleme auch in Worten formuliert. Erst nachher stehen die praktischen Anwendungen, wie pH-Wert, Schallintensität mit vielen Fragen dazu. Nach dem Zehnerlogarithmus werden der Logarithmus mit beliebiger Basis und die Logarithmusgesetzte gezeigt, wieder mit rein mathematischen Mitteln. Bei der logarithmischen Funktion wird auch der Begriff der Inversfunktion beschrieben. Bei den logarithmischen-exponentiellen Gleichungen und

Ungleichungen benutzen die Autoren auch Textaufgaben. Am Ende des Themas steht eine theoretische Zusammenfassung.

f) *Sulinova, Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft: Matematikai kompetencia*

Die Sulinova Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit GmbH. hat im Auftrag des ungarischen Staates mit der Unterstützung der Europäischen Union ein kompetenzfähiges Lehrmaterial im Fach Mathematik zusammengestellt. Das Material ist umfassend, geeignet der Klassen von 1 – 12. Im Abschnitt 2 (Modul 2) des Jahrgangs 11 ist der untersuchte Stoff enthalten. Der Zielsetzung der Autoren nach müsste der Lehrstoff den Erwartungen der Kompetenzmessung (Vergleichsarbeiten) entsprechen, es ist also in dem Sinne kein herkömmliches Mathematikbuch. Wenn man diesen Abschnitt untersucht, gibt es viele solcher Teile, die anders aufgebaut sind, als die in Ungarn erhältlichen, oben geschilderten Lehrbücher. Die Zielsetzung des Teiles ist folgendermaßen formuliert: „*Er (der Schüler) muss die Definition, die Gesetze des Logarithmus kennenlernen, er muss sie in einfacheren Fällen verwenden können. Er muss exponentielle und logarithmische Gleichungen lösen können, die auf der direkten Verwendung der Definitionen und Gesetze basieren.*“ Das könnte bedeuten, dass der Aufbau und die Methoden des Abschnittes so ähnlich sind, wie in den oben dargestellten Büchern. Aber unter den Methoden kann man die neuen mathematisch-didaktischen Richtungen entdecken. Obwohl das Material meinem Unterrichtsexperiment in dieser Form nicht entspricht, steht es ihm unter den hier geschilderten Lehrstoffen am nächsten.

Die Wiederholung beginnt mit den Potenzen mit ganzen Exponenten, dann kommt die Quadratwurzel. Die n-te Wurzel wird mit der dritten Wurzel eingeführt, und hier ist das erste Beispiel eine Textaufgabe (Würfel: Volumen – Kante), und dann noch ein Textbeispiel (Volumenunterschied zweier Würfel). Danach werden die Definitionen und Eigenschaften der n-ten Wurzel ausgesagt, und dann kommen die mechanischen Drill-Übungen. Noch in der Wiederholung werden die Potenz- und Wurzelfunktionen eingeführt, sogar auf ihren Zusammenhang (Umkehrfunktion) wird hingewiesen. Was neu ist, und in Richtung der neuen Mathematikdidaktik zeigt, dass hier schon offene Fragen gestellt werden, die die Aufmerksamkeit der Schüler verlangen. Solche Fragen und Aufgaben sind zum Beispiel (Seite 66, Aufgabe 19, Fragen): 1. Was für einen Zusammenhang kannst du zwischen den Wertebereich und den Exponenten von x entdecken? 11. Durch welche Punkte gehen die Graphen aller Wurzelfunktionen mit geraden Wurzelexponenten? Danach kommt die

Erweiterung des Potenzierens mit rationalen Exponenten. Das wird wieder mit einer Textaufgabe eingeführt - Eine Zellenzucht verdoppelt sich jede Stunde. Am Anfang gibt es 1 Zelle. Wie viele Zellen existieren nach 1, 2, 3, 4, 4,5 Stunden? (Seite 75). Leider gibt es unter den Aufgaben keine Textaufgabe, nur Drillübungen. Es gibt hier aber einen neuen, spielerischen Aufgabentyp, zwar ein Toto. Am Ende des zweiten Moduls steht noch ein kleines Lexikon, das die wichtigsten Begriffe –mit Erklärung– des Moduls enthält.

Im für mich wichtigen Teil –also bei dem exponentiellen und logarithmischen Teil – kann man wieder die didaktischen Fortschritte sehen. Der exponentielle Teil beginnt mit der Wiederholung der rationalen Exponenten. Dann wird es mit den irrationalen ergänzt, dann kommt die Definition der exponentiellen Funktion. In dem theoretischen Teil befinden sich schon Aufgaben (auch mit offenen Fragen), dann kommen zwei Beispiele. Das erste verlangt die Darstellung und Diskussion der allgemeinen exponentiellen Funktion, das zweite ist schon eine Textaufgabe (ein radioaktiver Zerfall). Die Beispiele sind natürlich ausgearbeitet. Dann kommen 3 alltägliche Beispiele: Seerosen, beschränktes Wachstum, wieder ein radioaktiver Zerfall. Ich würde, wie ich es gemacht habe, mit der Seerose beginnen. Das ist am verständlichsten meiner Meinung nach. Die anderen zwei – vom Sachverhalt her kompliziertere Aufgaben- würde ich erst später nehmen. Die weiteren Themen in diesem Modul sind der Reihe nach: Funktionen und Gleichungen. Die Textaufgaben kommen nicht wieder zurück, die Ungleichungen, Gleichungssysteme werden nicht einmal berührt.

Der Logarithmus wird wieder mit der Definition und einer Menge von Drillübungen eingeführt, ähnlich wie bei den Funktionen. Es gibt hier zwar wieder offene Fragen, aber keine Textaufgaben. Es gibt hier einen Teil, in dem solche Gleichungen sind, die mit Hilfe von Funktionen zu lösen sind. Die Logarithmusgesetze werden mit mathematischen Mitteln eingeführt. Nachher kommen die logarithmischen Gleichungen, und solche exponentiellen, bei denen man den Logarithmus verwenden muss. Am Ende kommen die exponentiellen Vorgänge, die Textaufgaben - Zinseszins, radioaktiver Zerfall, Population, Druck.

g) *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien*

Dieses deutsche Mathematiklehrbuch verkörpert eine völlig andere didaktische Auffassung über den Mathematikunterricht als die ungarische. Nach dem „Schock“ der Ergebnisse der ersten PISA-Tests (Maresch, R., 2002) haben sich die Mathematikdidaktiker in Deutschland bewogen gefühlt, die ganzen Lehrpläne, die Lehrbücher umzuwandeln. Ein Beispiel dafür ist dieses

Buch. Besonders auffällig ist es, wenn man das Buch mit seinem Vorläufer vergleicht.

In diesem Buch kommt der Teil Potenzen, exponentielle Funktion, Logarithmus schon in der neunten Klasse vor, also zwei Jahre früher als in Ungarn. Dementsprechend ist es nicht überraschend, dass solange in Ungarn der Abschnitt mit einer Wiederholung der Potenzgesetze beginnt, sie in diesem deutschen Buch hier eingeführt und eingeübt werden. Alle einzelnen Abschnitte beginnen mit einem praktischen, offenen Problem, um zu zeigen, wofür der Teil im alltäglichen Leben zu verwenden ist. Die Potenzen werden mit den Zehnerpotenzen eingeführt. Obwohl die ersten Aufgaben immer mathematische Drillaufgaben sind, folgen diesen oft eine Reihe von praktischen Anwendungen aller Art. Ich habe trotzdem manchmal das Gefühl, dass die mathematischen Grundlagen manchmal nicht tief genug bearbeitet werden, die Verfasser basieren eher auf den „mathematischen Sinn“ der Schüler. Die Potenzgesetze werden hier auch für die ganzzahligen Exponenten (ohne Beweis) gezeigt und eingeübt, wieder mit vielen Textaufgaben. Auch für die rationalen Exponenten sind hier schöne Aufgaben aufgeführt. Darunter sind unter anderem stereometrische Aufgaben, die Kepler'schen Gesetzte, Fallzeit eines Körpers, Windchill-Faktor. Die irrationalen Exponenten werden nur marginal behandelt, natürlich wird hier das Permanenzprinzip verwendet – obwohl es wortwörtlich nicht ausgesagt ist.

Nach diesem Teil kommen die Potenzgleichungen und gleich danach wird interessenterweise der Logarithmus mit der Definition und vielen Drillaufgaben eingeführt. Erst nach dem Logarithmus kommen die einfacheren exponentiellen Gleichungen mit mathematischen Beispielen, Definition und unter den Aufgaben ist nur eine Textaufgabe zu finden. In der Wiederholung kann man wieder praktische Anwendungen aller Art finden (Lichtjahr, Stereometrie, PH-Faktor, Lautstärke, Astronomie). Die Logarithmusgesetzte, kompliziertere Aufgaben kommen hier nicht vor (auch nicht im nächsten Jahr, in der zehnten Klasse). Eine Vergleichstabelle der Lehrbücher ist im Anhang B zu finden.

3.2. Der Vortest

Im Vortest wurde untersucht, welche Begriffe, Operationen die Schüler gut kennen, wo sie im Allgemeinen kleinere Schwierigkeiten bzw. große Probleme haben. Bei der Zusammenstellung wurde darauf geachtet, was sie schon wissen müssten, über welche Fähigkeiten sie verfügen und was der Erwartungshorizont im Abitur ist. Mit Hilfe der Ergebnisse wurden später die Schwerpunkte des Unterrichts ausgearbeitet, modifiziert. Hier werden die Ergebnisse zusammengefasst gezeigt. Vor dem Test war den Schülern nicht bekanntgegeben, dass in der nächsten Stunde den Test schreiben, sie wussten nicht, mit welchem Thema der Unterricht fortgesetzt wird.

3. Tabelle: Vortest – eigene Quelle

Vortest

1. Berechne ohne Taschenrechner die genauen Werte der folgenden Potenzen. Die Ergebnisse dürfen in Bruchform aufgeschrieben werden.

a) $3^4 =$	b) $2^{-3} =$	c) $25^0 =$
d) $\frac{2^3}{3} =$	e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$	f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

2. Berechne ohne Taschenrechner den genauen Wert der folgenden Potenzen. Das Ergebnis darf in Bruchform aufgeschrieben werden. Benutze dazu die Definitionen und Identitäten der Potenzen!

a) $\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 8}{(2^{-1})^{-3}} =$

3. Löse die Aufgaben!

a) *(2006.02. (2))* Entscheide von den folgenden Gleichungen, ob sie richtig oder falsch sind bei allen reellen Werten?

A) $b^3 + b^7 = b^{10}$ B) $(b^3)^7 = b^{21}$ C) $b^4 b^5 = b^{20}$

b) *(2005.05. (6)) Bringe den folgenden Term in eine möglichst einfache Form* $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} =$!

c) *Bringe den folgenden Term in eine möglichst einfache Form:*

$\frac{(a^3)^2 \cdot a^{-4}}{(a^{-2})^3 \cdot a^5} =$!

4. In dieser Aufgabe geht es um die Funktionen. Beachte die ***Instruktionen*** *und folge ihnen.*

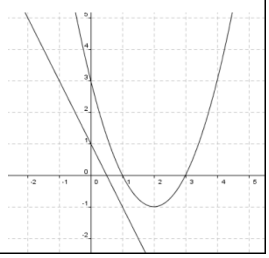
a) Fülle die fehlenden Werte der Tabelle aus, zeichne die folgende ***lineare*** Funktion im kartesischen Koordinatensystem, dann gib die Zuordnungsvorschrift an:

x	-3	-1	0		4	
f(x)	-10	-6		2		8

b) Zeichne die folgende ***quadratische*** Funktion im kartesischen Koordinatensystem:

$$f(x) = (x + 2)^2 - 4$$

c) Gib die Zuordnungsvorschriften der folgenden, mit ihren Graphen angegebenen Funktionen an!



d) Gib solche alltäglichen Probleme an, die mit linearer oder quadratischer Funktionen lösbar sind (z.B.: wenn ich eine Flasche Cola kaufe, bezahle ich 200 Ft, bei zwei Flaschen 400 Ft usw. (lineare Funktion))

Es wird hier überwiegend auf typischen Fehler hingewiesen, welchen von den Schülern begangen sind. Die detaillierten Ergebnisse und Analysen der Aufgaben sind im Anhand D zu finden.

In den ersten drei Aufgaben mussten die Schüler die Definitionen des Potenzierens und die Potenzgesetzte mit ganzen Exponenten verwenden. Im Allgemeinen kann man feststellen, dass die Rechnungen mit positiven Exponenten der Mehrheit der Schüler wenige Probleme verursacht hat, obwohl manchmal das Potenzieren mit der Multiplikation verwechselt wurde: $2^3 = 6$. Den Exponenten 0 konnten nur 9 Schüler richtig verwenden. Die größte Schwierigkeit hatten die Kinder mit den negativen Exponenten, $2^{-3} = \frac{1}{8}$ wussten nur 2 Schüler! Bei den Potenzgesetzen, wo man nur den logischen Wert der Aussage angeben musste (Aufgabe 3), hat die Mehrheit richtig geantwortet nur beim Teil A haben ausschließlich 7 Schüler die richtige Antwort gegeben (nämlich FALSCH: $b^3 + b^7 = b^{10}$). Mit den negativen Exponenten gab es hier wieder die meisten Probleme (s. Aufgabe 3, Teil b). Was überraschend war, dass aus den zwei komplexeren Aufgaben (Aufgabe 2 bzw. Aufgabe 3 c)) die Aufgabe 3 c) besser gelungen ist, obwohl man hier Terme umformen musste (mit entsprechendem Taschenrechnergebrauch hätten alle Schüler die Aufgabe 2 richtig berechnen können).
Bei den Funktionen wurde nach den vier Funktionsangabe-Möglichkeiten gefragt: Mit einer Tabelle, mit Funktionsgleichung, mit dem Funktionsgraphen und durch eine Instruktion (praktische Anwendung). Die Tabelle der linearen Funktion konnten lediglich 7 Schüler richtig ausfüllen, dagegen haben 8 Schüler den Graphen richtig dargestellt. Die Funktionsgleichung konnten nur 2 Schüler angeben! Die quadratische Funktion konnten 9 Schüler anhand der Funktionsgleichung richtig darstellen. Bei den Anderen ist nur eine oder keine der Verschiebungen richtig durchgeführt oder es gab einen Schüler, der statt einer Parabelform eine V-Form gezeichnet hat. Die umgekehrte Aufgabe, aus den Graphen die Funktionsgleichungen anzugeben, ist viel schwächer gelungen: im linearen Fall konnten nur 2, im quadratischen Fall 6 Schüler die richtige Funktionsgleichung angeben. Bei den alltäglichen Problemen war die Lage vielleicht noch schlimmer. Zu der linearen Funktion wurde ein Beispiel angegeben, dieses Beispiel habe ich von 7 Schülern in verschiedenen Formen zurückbekommen, weitere Anwendungen konnten sie nicht benennen. Bei der quadratischen Funktion habe ich überhaupt kein richtiges Beispiel (wie z.B. Flugbahn eines Wurfes, Beschleunigung, Durchhang der Kette an einer Kettenbrücke usw.) bekommen. Im Weiteren, während des entwickelnden Unterrichtexperiments wurde eben deshalb in den entsprechenden Stunden auf

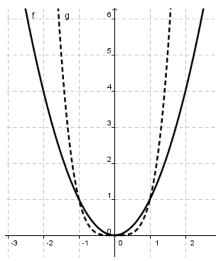
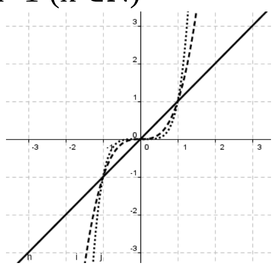
die drei Aspekte ein besonders großer Wert gelegt: Auf die begriffliche Entwicklung der Schüler, auf die Entwicklung des Funktionsbegriffs der Schüler, auf die Entwicklung des Problemlösens der Schüler.

3.3. Die Wiederholung

Für die Wiederholung hatten wir mit dem Kurztest zusammen 6 Stunden. Die Schüler haben zu jeder Stunde je ein Arbeitsblatt bekommen, das eine theoretische Zusammenfassung des Stoffes enthält, welchen sie schon in den vorigen Jahren erlernt hatten. Wir haben diese kurz besprochen und dann haben sie die Aufgaben alleine oder in Paaren gelöst. Sie bekamen dazu genügend Zeit, bevor wir die Ergebnisse, die Probleme besprochen haben. In der ersten Stunde nach dem Vortest haben wir die Ergebnisse kurz analysiert. Sie wurden auf die typischen Fehler aufmerksam gemacht. Dann haben wir die Potenzgesetze wiederholt und geübt. In den weiteren Stunden kamen die Wurzelidentitäten und die Rechnungsregeln mit Wurzeln in Frage. Es war wichtig, durch die Potenz- und Wurzelfunktionen auch die Transformationen und Diskussionsschritte einer Funktion zu wiederholen. Sie spielen nämlich bei exponentiellen und logarithmischen Vorgängen eine wichtige Rolle. Zur Wiederholung wurde GeoGebra regelmäßig verwendet, die die Schüler zu Hause herunterladen konnten. Die Schüler haben zu der Stunde mit Funktionen das folgende Arbeitsblatt bekommen:

Potenzfunktionen

Definition: $f: \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}; f(x) = x^n \quad n \in \boldsymbol{N}$

Wenn $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^+$) z.B.: $f(x) = x^2$ $g(x) = x^4$  *Diskussion (für f und g):* 1. $D = \mathbf{R}$ 2. Wertebereich: $\mathbf{R}^{+,0}$ 3. Nullstelle: $x = 0$ 4. Monotonie: $x \in]-\infty; 0]$ str. mon. F. $x \in [0; \infty[$ str. mon. St. 5. Extremstelle: MIN(0; 0) 6. Parität: gerade 7. nach unten beschränkt 8. stetig	Wenn $n = 2k+1$ ($k \in \mathbf{N}$) z.B.: $h(x) = x$ $i(x) = x^3$ $j(x) = x^5$  *Diskussion (für h, i und j):* 1. $D = \mathbf{R}$ 2. Wertebereich: $\mathbf{R}$ 3. Nullstelle: $x = 0$ 4. Monotonie: str. mon. St. 5. Extremstelle: keine 6. Parität: ungerade 7. nicht beschränkt 8. stetig

Bemerkung: die Benennung der Parität (gerade oder ungerade) kommt aus der Parität der Exponenten der Potenzfunktion.

Wurzelfunktionen

Definitionen: $f: \boldsymbol{R}^{+,0} \longmapsto \boldsymbol{R}^{+,0}; f(x) = \sqrt[2k]{x}, \quad g: \boldsymbol{R} \longmapsto \boldsymbol{R}; g(x) = \sqrt[2k+1]{x}, k \in \boldsymbol{N}^{+}$

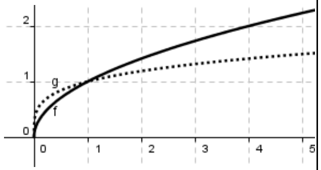
Wenn $n = 2k$

($k \in \mathbf{N}^{+}$)

z.B.:

$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \sqrt[4]{x}$



Diskussion (für f und g):

1. Definitionsbereich: $\mathbf{R}^{+,0}$
2. Wertebereich: $\mathbf{R}^{+,0}$
3. Nullstelle: $x = 0$
4. Monotonie:
   $x \in [0; \infty[$ str. mon. steigend
5. Extremstelle: MIN(0; 0)
6. Parität: weder gerade noch ungerade
7. nach unten beschränkt
8. stetig

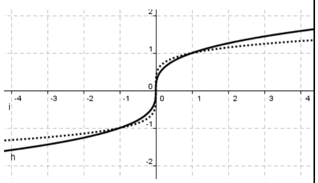
Wenn $n = 2k+1$

($k \in \mathbf{N}$)

z.B.:

$h(x) = \sqrt[3]{x}$

$i(x) = \sqrt[5]{x}$



Diskussion (für h und i):

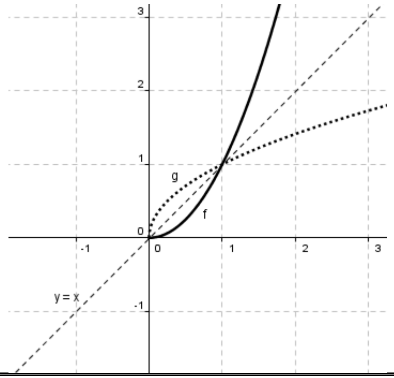
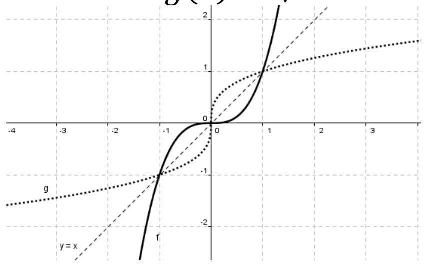
1. Definitionsbereich: $\mathbf{R}$
2. Wertebereich: $\mathbf{R}$
3. Nullstelle: $x = 0$
4. Monotonie: str. mon. steigend
5. Extremstelle: keine
6. Parität: ungerade
7. nicht beschränkt
8. stetig

Zusammenhang zwischen der Potenz- und der Wurzelfunktion (Umkehrfunktionen)

Definition: *Eine Funktion $f: x \to f(x); x \in D_f$, heißt umkehrbar, wenn die Zuordnung $f(x) \to x$ ebenfalls eine Funktion ist.*

Bemerkung 1: Wenn der Wurzelexponent eine gerade Zahl ist (also 2, 4, …), nur dann sind die zwei Funktionen die Umkehrfunktionen voneinander, wenn die Definitionsbereiche auf die Zahlenmenge $\mathbf{R}^{+,0}$ eingeschränkt sind. Bei ungeraden Exponenten gibt es keine Einschränkung.

Bemerkung 2: Die Graphen der Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind immer Spiegelbilder voneinander an der Geraden $y = x$.

Beispiel 1: $f(x) = x^2$ *und* $g(x) = \sqrt{x} \quad (x \in \boldsymbol{R}^{+,0})$	Beispiel 2: $f(x) = x^3$ *und* $g(x) = \sqrt[3]{x}$
	

15. Abbildung: Arbeitsblatt zu der Wiederholung der Funktionen – eigene Quelle

In der letzten Stunde haben sie einen Kleintest geschrieben. Da ich bei der Wiederholung keine besondere methodische Neuigkeit verwendet habe, möchte ich diesen Teil nicht lange schildern, nur das Ergebnis des Tests mitteilen.

4. Tabelle: Ergebnisse des Kleintests – eigene Quelle

11.c	12.s	Insgesamt:
3,08	3,5	3,27

Wie es aus den Ergebnissen zu sehen ist, haben sich die Schüler im Vergleich zum Vorjahrergebnis sehr stark verbessert, interessanterweise eben die Klasse „*s*“, wo die Ergebnisse mehr als um eine Note verbessert waren.

Gruppe A

1. Vereinfache die Terme

$\frac{3^{-4} \cdot 9^2 \cdot 27}{\left(3^{-1}\right)^{-3}} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{b^4}}{\sqrt[3]{b}} =$

2. Berechne die folgenden Werte:

$\sqrt{12} - \sqrt{27} + \frac{1}{2}\sqrt{48}$

3. Stelle die Funktionen dar und diskutiere sie!

$f(x) = 2(x-3)^2 - 2$

Gruppe B

1. Vereinfache die Terme

$\frac{\left(b^3\right)^2 \cdot b^{-4}}{\left(b^{-2}\right)^3 \cdot b^5} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^5}} =$

2. Berechne die folgenden Werte:

$3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$

3. Stelle die Funktionen dar und diskutiere sie!

$f(x) = -(x+1)^2 + 3$

16. Abbildung: Kleintest – eigene Quelle

Ich möchte hier die Ergebnisse des Tests nicht so ausführlich analysieren wie bei dem Vortest. Ich möchte hier nur auf die richtigen Lösungen bzw. auf die typischen Fehler hinweisen. Die ausführlichere Analyse ist im Anhang E zu finden. Obwohl die Potenzgesetze wiederholt worden sind, konnten die erste Aufgabe nur 5 Schüler richtig lösen. Ähnliche Fehler wurden begangen wie im Vortest: die negativen Exponenten waren weiterhin eine Quelle der Fehler bzw. ein typischer Fehler war, dass nach dem richtigen Klammerauflösen viele Schüler die Exponenten nicht oder falsch zusammenfassten oder sich später verrechnet haben. In der zweiten Aufgabe haben die Lösung 10 Schüler richtig oder teilweise richtig angegeben, es gab hier nur Rechnungsfehler. Bei den weiteren Schülern gab es schon am Anfang theoretische Fehler: sie haben aus dem Wurzelzeichen die falsche Zahl herausgezogen. Bei der Funktion sind folgende Ergebnisse ausgekommen: 10 Schüler haben die angegebene Funktion richtig dargestellt. 5 Schüler haben entweder die eine Transformation verfehlt oder die Form der Parabel war nicht exakt. Nur zwei Schüler haben die Aufgabe völlig verfehlt. Da in dieser Klasse die Funktionsdiskussion anhand des Graphen durchgeführt ist, kamen bei Der Diskussion ähnliche Ergebnisse wie bei der Darstellung vor.

3.4. Exponentielle Vorgänge

In diesem Teil kommt der realistische Mathematikunterricht in erster Linie bei der Einführung des Begriffs und bei der Entdeckung der mathematischen Gesetze zur Bedeutung. Diese Teile wurden auch mit Medien und dem Computer unterstützt. Wir hatten auch ein wenig Zeit zum Spielen, um die Monotonie und Abstraktheit der Gleichungen unterbrechen zu können. Die Schüler arbeiteten zum Teil selbstständig. Ich habe aber auch für sehr wichtig gehalten, dass die Paararbeit verstärk wird. So mussten sie die Aufgaben oft in diesen Sozialformen lösen. Es kam auch vor, dass sie einige Aufgaben in Gruppen gelöst haben. Dann haben sie die Ergebnisse vor der Klasse präsentiert.

3.4.1. Einführung des Begriffs

Der Sinn des realistischen Mathematikunterrichts ist, dass die neuen mathematischen Inhalte nicht durch abstrakte mathematisch Formeln, durch exakte Definitionen und Sätze eingeführt werden, sondern die Schüler sie anhand relativ einfacher, alltäglicher Beispiele entdecken, mit eigenen Worten formulieren (dekontextualisieren) Verallgemeinern – möglicherweise zuerst durch die Aufgabe– und so ähnliche Probleme formulieren (rekontextualisieren) können. Deshalb wurde jede Stunde des Versuchs dementsprechend aufgebaut, Aufgaben herausgefunden, gesammelt oder umgeformt, damit sie dem Experiment am besten entsprechen. Aus diesen Stundenentwürfen haben die Schüler immer einen Auszug bekommen, woran und womit sie arbeiten konnten. Das Thema haben wir mit einem Video angefangen, wo es um die Erfindung des Schachbretts geht[11]. Die Schüler waren froh, als das Blattfalten in Frage kam, weil unlängst ein Dokumentarfilm bei Discovery Chanel zu sehen war, wo der Versuch durchgeführt war[12]. Viele haben den Film im Fernsehen gesehen. So haben sie schon von Anfang an das Thema interessant gefunden. In der einführenden Stunde wurden drei Probleme präsentiert. Die Ergebnisse der Aufgaben wurden analysiert. Hier wurden die Aufgaben und Lösungen aus zwei Aspekten betrachtet. 1. Es wurde zusammengezählt, wie viele Schüler die Aufgaben völlig, teilweise oder nicht – eventuell völlig falsch – gelöst haben. 2. Es war auch wichtig, die De- und Rekontextualisierung bzw. die Verallgemeinerung des Problems so weit wie möglich im Textumfeld durchzuführen. Diese Fragen wurden im Weiteren mit rot (*kursiv*) markiert.

Als erste Aufgabe wurde ein Beispiel genommen, das für alle einfach verständlich war, womit sie ohne die Definition der Exponentialfunktion einfach arbeiten konnten. Die Schüler haben alleine gearbeitet, später haben wir die Antworten besprochen.

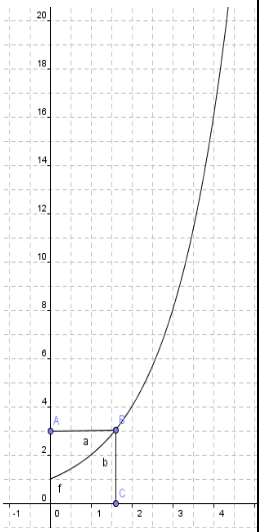
Aufgabe 1:

Die kleine Wasserlinse (lemna minor- kis békalencse) ist eine sehr schnell wachsende Pflanze. Ihre Menge verdoppelt sich jeden Tag, so kann sie schon in kurzer Zeit den ganzen See bedecken. Deshalb ist es sehr wichtig festzustellen, wann sie schon einen bestimmten Anteil (ein Zehntel, Drittel usw.) des Sees bedeckt. Die Größe der bedeckten Fläche war anfangs 1 m^2 groß (Anfangszeit t = 0), 1 Tag später (t = 1) 2 m^2. Dieser Vorgang wird mit der Funktion: $a = f(t) = a^t$.

1. Wie groß ist die Wasserlinsenfläche nach 1, 2, 3, 5 Tagen?

Benutze den Graphen die folgenden Fragen zu beantworten!

2. Etwa wie groß ist die Wasserlinsenfläche nach 1,6; 2,6; 3,6 Tagen?

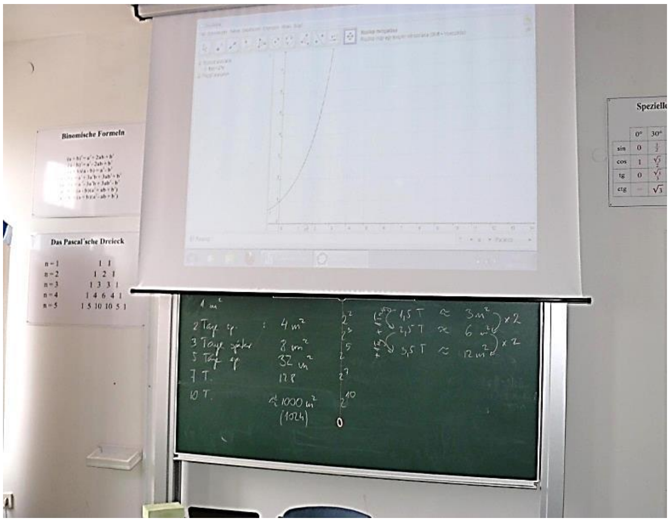


[11] vgl. 1.4; A. Beutelspacher: Die Geschichte des Schachbretts

[12] Die entsprechende Serie von Mythbuster ist unter http://www.youtube.com/watch?v=kRAEBbotuIE (11.07.13) zu sehen.

Jetzt ohne den Graphen: Etwa wie groß ist die Wasserlinsenfläche nach 6,6 Tagen?
3. *Was kannst du entdecken?*
4. *Versuche mit eigenen Worten zu erzählen, nach welchem Gesetz die Wasserlinse wächst!*
5. *Könntest du den entdeckten Zusammenhang mit Hilfe von Funktionen beschreiben?*

Die Funktion wurde an die Leinwand projiziert, und wir haben die wichtigsten Schritte an die Tafel geschrieben.



In diesem Beispiel haben die Schüler den Funktionsgraphen im Voraus bekommen, obwohl die besseren Schüler ihn laut der ersten Frage hätten zeichnen können. Es war besonders wichtig, dass die enaktiven und visuellen Repräsentationen miteinander verknüpft werden. Wie es aus den Ergebnissen zu sehen ist, konnten die Schüler schnell und effektiv die Informationen des Textes mit dem Graphen verbinden und in der Mehrheit richtige, oder teilweise richtige Schlussfolgerungen ziehen.

5. Tabelle: Ergebnisse der Beispielaufgabe – eigene Quelle

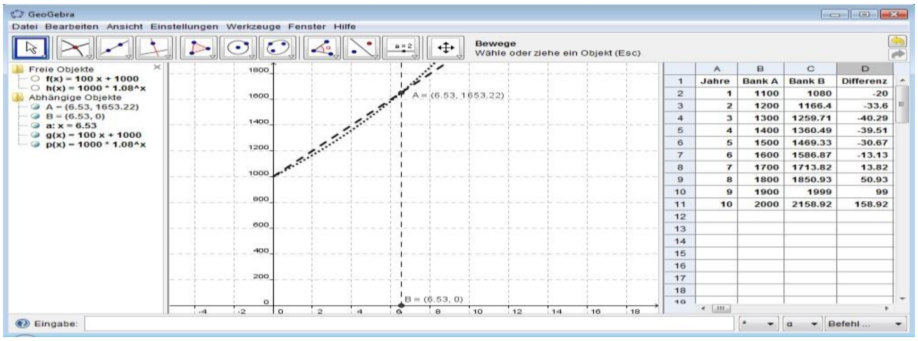
21 Schüler	1.		2.		3.		4.		5.	
richtige Antworten	21	**100,0%**	16	**76,2%**	15	**71,4%**	15	**71,4%**	0	**0,0%**
teilweise richtige Antworten	0	**0,0%**	5	**23,8%**	6	**28,6%**	6	**28,6%**	0	**0,0%**
nicht geantwortet	0	**0,0%**	0	**0,0%**	0	**0,0%**	0	**0,0%**	21	**100,0%**

Die mit rot markierten Fragen sind solche, die nicht nur ein mechanisches Einüben ermöglichen, sondern auch die Schüler dazu bewegen, ein bisschen überlegen zu müssen. Sie müssen die Erscheinung mit eigenen Worten erzählen und erklären und die (mathematische) Regel entdecken und formulieren. Wie es aus den Daten zu sehen ist, ist es ihnen in den Fragen 3 und 4 relativ gut gelungen. Von 21 Schülern konnten 16 die Fragen richtig beantworten. Die anderen 6 konnten auch teilweise eine richtige Antwort geben. Für mich war aber sehr interessant und aufschlussreich, dass niemand der Schüler die mathematische Funktion formulieren konnte, obwohl die parametrische Funktion in der Aufgabenstellung angegeben war. Sie konnten aber die Bedeutungen der Parameter nicht deuten, obwohl wir vorher besprochen hatten, dass der Wachstumsfaktor (a) 2 ist, und t die Zeit bedeutet.

Aufgabe 2: Peter möchte sein Geld von 1000€ für zehn Jahre in einer Bank anlegen. Er geht deshalb in zwei Banken, wo er zwischen zwei verschiedene Geldanlage-Arten wählen kann. In der Bank A gibt es eine Konstruktion, wo er zehn Jahre lang, jedes Jahr 100€ bekommt. In der Bank B wird dagegen jedes Jahr 8% Zinsen zu der Summe des Vorjahres gutgeschrieben.

1. Was würde er in der Bank A bzw. in der Bank B nach zehn Jahren bekommen?
2. Fertige eine Tabelle dazu!
3. Stelle die zwei Wachstume graphisch dar! *Was kannst du feststellen, was ist der wichtigste Unterschied zwischen den zwei Graphen?*
4. Nach wie vielen Jahren ist es ungefähr egal, in welcher Bank man das Geld anlegt? Bei welcher Laufzeit lohnt es sich das Geld in der Bank A bzw. in der Bank B anzulegen? *Kann noch einmal diese Tendenz wechseln? Warum?*
5. *Welche Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Geld (f(t)) und der Zeit (t) im Fall der Bank A?*
6. *Überprüfe diesen Zusammenhang für einige Zahlenpaare und versuche ihn zu erklären!*
7. *Erkläre, warum die Funktion $B(t) = 1000 \cdot 1{,}08^t$ diesen Vorgang korrekt beschreibt!*

Nachdem die Schüler zur Aufgabenlösung genug Zeit bekommen haben, haben wir die Ergebnisse überprüft und besprochen. Hier konnten die Schüler die Aufgaben mit gutem Ergebnis lösen. Man muss hinzufügen, dass am Anfang geholfen werden musste. Aber nachher ging die Lösung schon relativ gut.



17. Abbildung: Der graphische und tabellarische Vergleich der linearen und exponentiellen Vorgänge mit Hilfe von GeoGebra – eigene Quelle

In diesem Beispiel wurde wieder mit rot markiert, welche Fragen ein bisschen weiterführen, wo sich die Schüler Fakten über den Kontakt zwischen dem mathematischen und alltäglichen Sachverhalt überlegen müssen.

6. Tabelle: Ergebnisse der Beispielaufgabe – eigene Quelle

21 Schüler	1.		2.		3.		4.		5.	
richtige Antworten ohne Hilfe	5	**23,8%**	12	**57,1%**	9	**42,9%**	9	**42,9%**	3	**14,3%**
teilweise richtige Antworten mit Hilfe	16	**76,2%**	7	**33,3%**	8	**38,1%**	6	**28,6%**	5	**23,8%**
falsche Antworten/ nicht geantwortet	0	**0,0%**	2	**9,5%**	4	**19,0%**	6	**28,6%**	13	**61,9%**

In der dritten Antwort konnten nur 9 Schüler beide Graphen richtig darstellen, 8 nur den linearen Graphen und 4 Schüler konnten die Daten überhaupt nicht darstellen. Die Schüler, die alles richtig gelöst haben, konnten auch den Unterschied zwischen den beiden erklären. Obwohl die vierte Aufgabe nur von 9 Schülern richtig gelöst wurde, konnten alle die rote Frage richtig beantworten. Die Begründungen dazu waren bei nicht allen Schülern mathematisch richtig, aber aus den Funktionsgraphen, die in der vorigen Frage dargestellt wurden, konnten alle eine richtige Folgerung ziehen. In der fünften Aufgabe mussten die Schüler eine lineare Funktionszuordnung aufschreiben. Nur 3 konnten die richtige Formel angeben. Die letzten zwei Fragen konnten kein Schüler richtig beantworten. Deshalb haben wir sie gemeinsam besprochen. Die Schüler haben später eine ähnliche Aufgabe bekommen.

Im dritten Beispiel habe ich wieder ein gut bekanntes Problem, die Halbwertszeit dargestellt. Ich habe dazu den Abbau des Koffeins im Blut nach einer Tasse Kaffee gewählt. Das Problem hilft gleichzeitig den exponentiellen Rückgang zu verstehen und die rationalen und irrationalen Exponenten einzuführen.

Exponentieller Rückgang

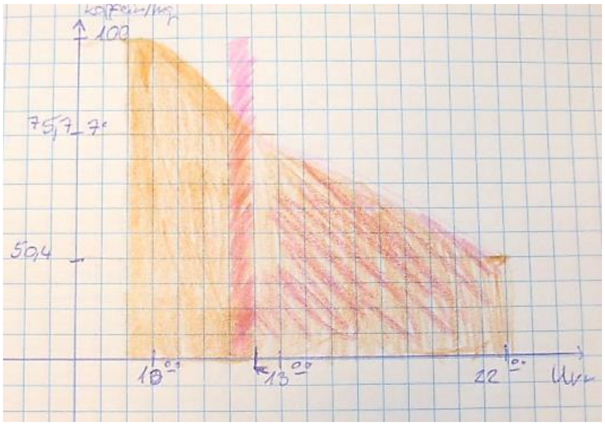
In dem vorigen Beispiel gab es ein exponentielles Wachstum, aber im alltäglichen Leben sind auch exponentielle Rückgänge. Ein gutes Beispiel dafür ist die **Halbwertszeit** verschiedener Vorgänge. Solche sind z.B. der radioaktive Zerfall, Abbau von Alkohol, Medikamente oder Koffein in der Menschlichen Körper.

Aufgabe 3: 50% der Menge des eingetragenen Koffeins baut der Menschliche Körper bei einem Erwachsenen im Schnitt in 5 Stunden ab, so ist die Halbwertszeit des Koffeins 5 Stunden. Eine Tasse Espresso enthält etwa 100 mg Koffein.

1. Ein Erwachsener trinkt eine Tasse Espresso um 10 Uhr morgens. Wie viel mg Koffein ist noch um 15.00 Uhr im Blut?
2. Wie viel mg Koffein ist noch um 20.00 Uhr im Blut?
3. *Wie groß ist der Wachstumsfaktor in einer Stunde?*
4. *Wie viel mg Koffein ist noch um 22.00 Uhr im Blut?*
5. *Nach dem Morgenkaffee trinkt er noch um 13.00 Uhr einen anderen. Wie viel Koffein ist noch in seinem Blut um 22.00 Uhr?*
6. *Stelle den Abbauvorgang graphisch dar!*
7. *Kann die Funktion die x-Achse erreichen? Also kann der Koffeingehalt im Blut prinzipiell auf 0 mg sinken?*
8. *Was wäre der Fall bei einem linearen Vorgang?*
9. *Kann man diesen Vorgang für rationale Stunden deuten (z.B. nach 1,5 Stunden), oder sogar für irrationale Zeitabstände (z.B.: nach $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$)?*

Die Schüler haben wieder Zeit bekommen, aber die Instruktion war, zuerst nur die ersten zwei Fragen zu beantworten, dann die dritte zu überlegen, und versuchen sie zu beantworten. Laut der vorherigen Erfahrungen, wurde angenommen, dass sie die dritte Frage alleine nicht beantworten können. Ich hatte Recht, die Schüler, die sich mit der dritten Frage beschäftigten, wollten den fünfstündigen Rückgang einfach durch 5 teilen (5 Schüler). Sie haben also angenommen, dass der Rückgang in einer Stunde 10% war. Die anderen Schüler konnten die Frage überhaupt nicht beantworten. Nachdem wir dieses Problem besprochen haben waren die Ergebnisse für Fragen 4-6 auch nicht so gut gelungen, wie bei den exponentiellen Zuwachsaufgaben. Dabei spielte es eine große Rolle, dass sie –nachdem wir die Größe des stündlichen Rückgangs gemeinsam aufgeschrieben haben (etwa 13%)– diesen Wert nicht in einen Wachstumsfaktor umformen konnten. Wie es aus der Tabelle unten zu sehen ist, konnten lediglich 8 Schüler die 4. Frage gut beantworten. Die anderen überhaupt nicht, oder sie haben zum Beispiel mit $0{,}13^x$ gerechnet. Ich habe diese Lösungen in die Zeile „*falsche Antworten / nicht geantwortet*“

geschrieben. Die Anzahl der richtigen Antworten auf die fünfte Frage war noch geringer, ausschließlich 5 Schüler konnten die Frage richtig beantworten. Diese fünf konnten die Funktion auch richtig skizzieren. Sie haben alle eine stetige Funktion gezeichnet, obwohl man aus dem Text der Aufgabe an eine, in der Menge der natürlichen Zahlen definierte Funktion denken könnte. Als ich bei diesen Schülern danach gefragt habe, ob sie bewusst eine stetige Funktion gezeichnet haben, um zu zeigen, dass der Abbauprozess auch stetig ist, hat einer von ihnen folgendermaßen geantwortet: „Ich habe daran überhaupt nicht gedacht, nur Punkte darzustellen, wir zeichnen sonst in den Stunden immer stetige Funktionen.” An der Stelle wurde darauf hingewiesen, dass eben vor diesem Problem ein Beispiel besprochen wurde, in dem das Wachstum nur an ganzen Stellen definiert ist (verzinst wird erst am Ende des Jahres, nicht permanent). Die 7., 8. und 9. Aufgabe konnten wieder die Schüler beantworten, die auch die Funktion „richtig“ zeichnen konnten. Bei der 9. Aufgabe konnten sie mathematisch richtig nicht beantworten, warum $\sqrt{2}$ ein richtiger Exponent ist, aber sie haben mit einem „natürlichen“ Zeitsinn argumentiert, nämlich, dass die Zeit stetig ist. In der nächsten Stunde haben wir den Begriff der irrationalen Exponenten mit dem Permanenzprinzip eingeführt. Die Funktion haben wir natürlich wieder mit GeoGebra überprüft.

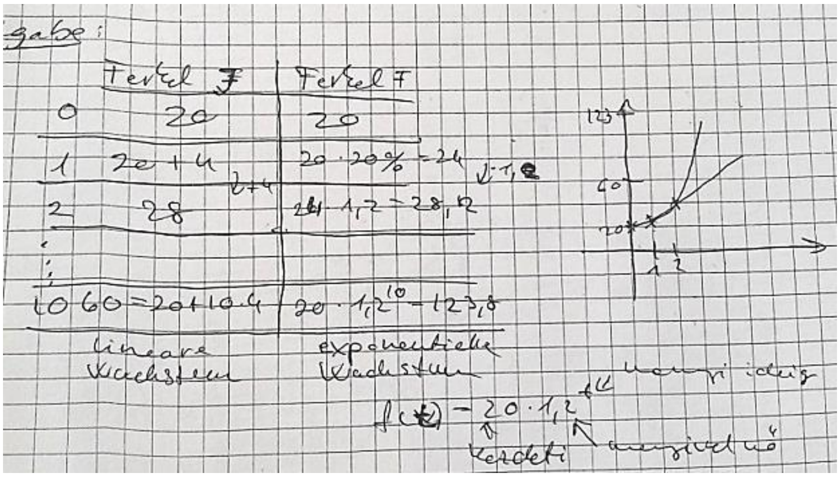


In der nächsten zusammenfassenden Tabelle habe ich die mittlere Zeile „teilweise richtige Antworten mit Hilfe“ wegen der obigen theoretischen Überlegungen mit Absicht ausgelassen:

7. Tabelle: Ergebnisse der 3. Beispiels –eigene Quelle

21 Schüler	1.		2.		4.		5.		6.	
richtige Antworten ohne Hilfe	21	**100,0%**	21	**100,0%**	8	**38,1%**	5	**23,8%**	5	**23,8%**
falsche Antworten/ nicht geantwortet	0	**0,0%**	0	**0,0%**	13	**61,9%**	16	**76,2%**	16	**76,2%**

Die Schüler haben ähnliche Aufgaben für zu Hause bekommen. Bei der Kontrolle in der nächsten Stunde stellte sich heraus, dass sie die Problemstellung gut verstanden haben. Alle Schüler haben die einfachsten Fragen beantwortet, auf die Zusammengesetzten haben aber schon weniger Schüler eine richtige Antwort gegeben.



Ich habe sie ermutigt, bei der Lösung GeoGebra zu verwenden. 10 Schüler haben die Software heruntergeladen, aber nur 5 haben sie wirklich benutzt – ausschließlich die, die auch in der Stunde erfolgreich waren. In der Hausaufgabe war die letzte Frage, dass sie exponentielle Vorgänge suchen müssen. Ich bin dabei auf keine neuen Ideen gestoßen, sie haben die Beispiele der Stunde wiederholt. Ich halte jedoch diese Frage für wichtig, weil sie dabei für sich selbst bewusster gemacht haben, wie alltägliche Vorgänge sind.

3.4.2. Einführung der rationalen Exponenten

Während der Wiederholung wurde schon darauf hingewiesen, dass die Wurzeln auch durch rationale Exponenten ersetzbar sind. Einigen – den besten– Schülern hat das gut gefallen und diese Schüler haben diese Kenntnis schon im ersten Test benutzt. Die Bedeutung dieser rationalen und irrationalen Exponenten haben wir erst bei der Einführung des exponentiellen Begriffs begonnen zu verstehen. In der „Kaffee-Aufgabe“, in der 9. Frage wurde konkret gefragt, welche Bedeutung die rationalen und irrationalen Exponenten haben. Die Schüler haben dort richtig verstanden, was diese Exponenten bedeuten können. Wir haben dann die Frage gemeinsam besprochen. In der nächsten, 8. Stunde kamen wir dazu, die praktische und die mathematische Bedeutung zu sehen und exakt formulieren zu können. Ich bin zur Verwirklichung dieses Zwecks zu einem „klassischen“ Seerosenproblem zurückgekehrt.

<u>Aufgabe:</u> *Auf einem Teich wachsen im Frühling Seerosen, sogar laut Beobachtungen vervierfacht sich die Zahl der Pflanzen alle 10 Tage (also gibt es nach 10 Tagen 4-mal so viele Rosen als vorher). An einem schönen Frühlingstag, nämlich am 15. April gibt es schon 128 Pflanzen auf der Teichoberfläche.*

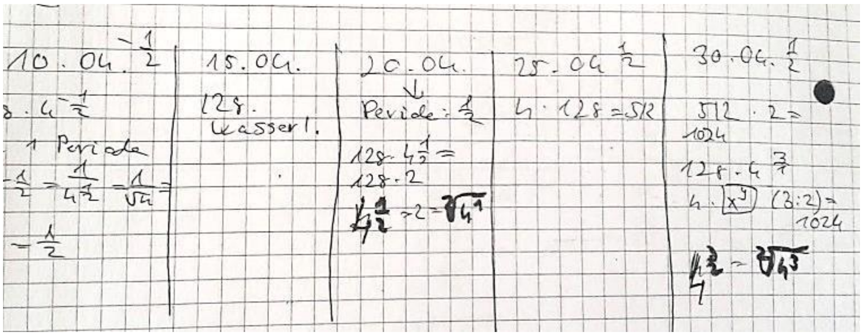
Die 10 Tage und der Wachstumsfaktor 4 wurden von mir herausgefunden, um die rationalen Exponenten darstellen zu können. Die Schüler haben eine Tabelle bekommen, wo einige Werte schon ausgefüllt sind. Einige Hilfsinstruktionen waren auch eingeschrieben.

1. *Fülle die **weißen** Felder der Tabelle aus!*

Tage	05.04. (-10 Tage; -1 Periode)	10.04 (-5 Tage; -½ Periode)	15.04.	20.04. (+5 Tage; ½ Periode)	25.04. (+10 Tage; 1 Periode)
Anzahl der Rosen			128		512
Tage	30.04. (+15 Tage; 3/2 Per.)	05.05. (+20 Tage; 2 Perioden)	10.05. (+25 Tage; 2,5 Per.)	15.05. (+30 Tage; 3 Perioden)	
Anzahl der Rosen		2048		8192	

2. *Schreib bitte nieder, wie du überlegt hast!*

Die zweite Frage bezog sich wieder darauf, dass die Schüler diese Erscheinung mit eigenen Worten formulieren müssen, was hier passiert ist. Die Schüler haben hier in Paaren gearbeitet und versuchten so, die Fragen zu beantworten. Vielen Schülern sind die ganzen Perioden gelungen (10 Tage). Bei einigen Schülern sind auch die halben Perioden herausgekommen, aber sie haben die den Wachstumsfaktor durch zwei geteilt, anstatt ihn mit $\frac{1}{2}$ zu potenzieren. Deshalb gab es entweder keine Überlegungen oder sie waren falsch.



Wir haben anhand des Beispiels den mathematischen Hintergrund besprochen. Sie hatten dazu auf ihren Arbeitsblättern eine kleine Unterstützung bekommen, darauf stand auch die Definition der rationalen Exponenten.

In 10 Tagen gab es 4-mal so viele Seerosen, wie früher. Da das Wachstum exponentiell ist, in diesen 10 Tagen wächst die Rose so viel, wie das Produkt der Wachstumsfaktoren der vorigen zweimal 5 Tagen, also: $4 = q_5 \cdot q_5 \quad \Rightarrow \quad 4 = (q_5)^2 \quad \Rightarrow \quad q_5 = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad q_5 = 2.$

Das bedeutet also, wenn die Periode halbiert wird, wird aus dem Wachstum Quadratwurzel gezogen, also:

Zeitperiode

$$4^{1} = 4; \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^{1}} = 2.$$

Ähnlicher Weise kann man beobachten, wenn die Zeitperiode 3 ist (also $3 \cdot 10 = 30$ Tage vergangen sind), gibt es $4^3 = 64$-mal so viele Seerosen wie ursprünglich. Wenn man dagegen nur 15 Tage betrachtet, ist die Zahl der Seerosen nur 8-mal so viel. Daraus folgt:

Zeitperiode

$$4^{3} = 64; \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{64} = \sqrt[2]{4^{3}} = 8.$$

Aus den obigen ist es klar, wie man die rationalen Exponenten definieren kann: der Zähler des Exponenten ist der Exponent des Radikanden (der Zahl unter der Wurzel), der Nenner des Exponenten ist der Wurzelexponent, also:

Definition: Die $\frac{m}{n}$-te Potenz einer positiven Zahl **a** ist die ***n***-te Wurzel aus der ***m***-ten Potenz von ***a***. Also: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a > 0,\ m \in \boldsymbol{Z},\ n \in (\boldsymbol{N}^{+} \setminus \{1\})$.[13]

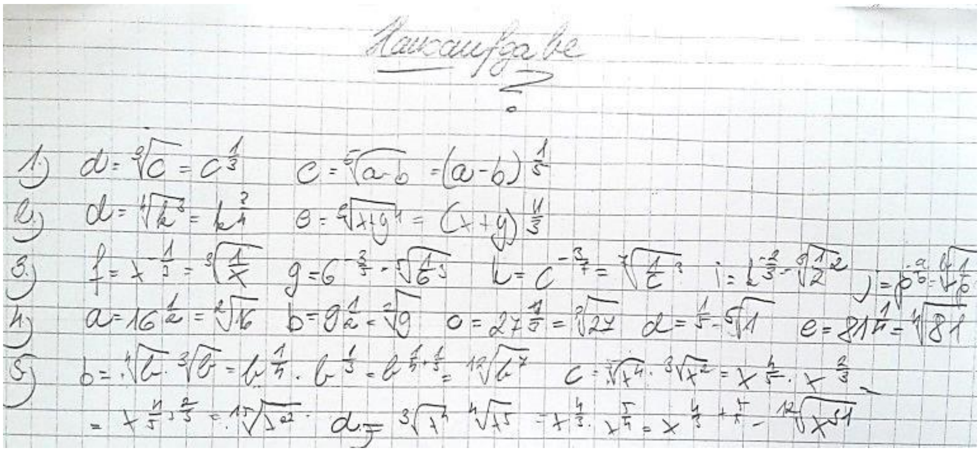
[13] Die Definitionen stammen aus dem Buch Kompendium.

Nach diesem theoretischen Teil haben die Schüler noch eine Frage zur Überlegung bekommen und eine Reihe einfacher Drillaufgaben haben sie zum mechanischen Einüben gelöst.

> *Aufgabe: Erkläre die Richtigkeit der obigen Definition auch für die negativen Exponenten am Beispiel der Seerosen!* ($4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4}} = \frac{1}{2}$, die Zahl der Seerosen schrumpft also in einer halben Periode von 5 Tage auf die Hälfte.)

In der Hausaufgabe mussten die Schüler die Drillaufgaben beenden und habe es war wichtig, dass die Schüler das besprochene Beispiel noch einmal überlegen, und ein ähnliches Problem formulieren, um zu sehen, wie sich der Wachstumsfaktor verändert.

> *Hausaufgabe:*
> *1. Das Arbeitsblatt beenden.*
> *2. Schreibe eine ähnliche Aufgabe wie mit den Seerosen (z.B. Bakterien vermehren sich alle 4 Tage auf das 9-fache). Erkläre daran den Sinn der rationalen Exponenten!*



Die irrationalen Exponenten wurden auch schon bei der „Kaffee-Aufgabe“ erwähnt. Dort haben wir besprochen, dass das Wachstum in der Zeit kontinuierlich ist. So ist es nicht erlaubt, und hat auch keinen Sinn, zeitliche „Sprünge“ zu machen. Weil es zwischen den rationalen Zahlen irrationale gibt, muss man das Potenzieren auch für irrationale Zahlen erweitern. Dabei hält man sich das Permanenzprinzip vor Augen. Ein einfaches Beispiel habe ich ihnen aus dem Buch „Sokszínű matemaika“ auf ihr Arbeitsblatt geschrieben. Wir haben es gemeinsam besprochen und ohne Beweis darauf hingewiesen, dass die Potenzgesetzte auch für die irrationalen Exponenten gültig sind.

Die Schüler mussten einige Potenzwerte mit Taschenrechner berechnen:

$1 < \sqrt{2} < 2$ $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$	$2 = 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 = 4$ $2{,}639 \approx 2^{1{,}4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}5} \approx 2{,}828$ $2{,}657 \approx 2^{1{,}41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}42} \approx 2{,}676$ $2{,}665 \approx 2^{1{,}414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1{,}415} \approx 2{,}667$ $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}665144143 \ldots$

<u>*Aufgabe:*</u> Berechne mit Hilfe des Taschenrechners die folgenden Potenzen!

$2^{\sqrt{3}} \approx$	$3{,}54^{\sqrt{5}} \approx$	$\pi^{\sqrt{7}} \approx$	$3^{\pi} \approx$	$(-8{,}4)^{\sqrt{5}} \approx$

3.4.3. Die exponentielle Funktion

Nachdem die Erweiterung des Potenzbegriffs durchgeführt wurde, haben wir mit der Exponentialfunktion angefangen. Die Form kannten die Schüler schon von der Einführung. Dort haben wir den Funktionsgraphen mehrmals gesehen. Darauf habe ich in der Stunde hingewiesen, und die Schüler haben sich erinnert. Danach kamen die mathematische Definition der Funktion und zwei Grundfunktionen. Die Darstellung habe ich mit Computer – GeoGebra – Punkt für Punkt gemacht, die Diskussion haben wir gemeinsam besprochen.

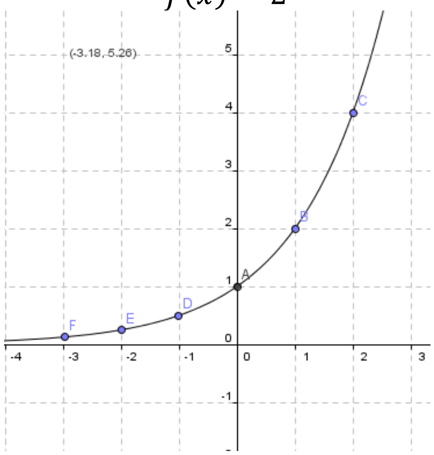
<u>*Definition:*</u> Funktionen, bei denen die Variable x im Exponenten einer Potenz steht, heißen Exponentialfunktionen. Also:

$$f: \boldsymbol{R} \mapsto \boldsymbol{R}^+; f(x) = a^x \quad (a > 0; a \neq 1)$$

<u>*Aufgabe*</u>*: Stelle und diskutiere die folgenden Funktionen:*

$f(x) = 2^x$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. *Wenn es nötig ist, fertige je eine Wertetafel.*

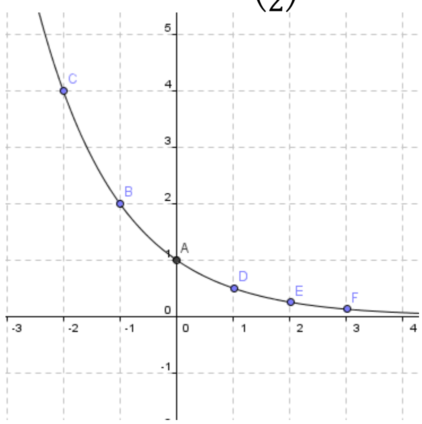
$f(x) = 2^x$



1. Definitionsbereich: $x \in \boldsymbol{R}$

2. Wertebereich: $y \in]0; \infty[$

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

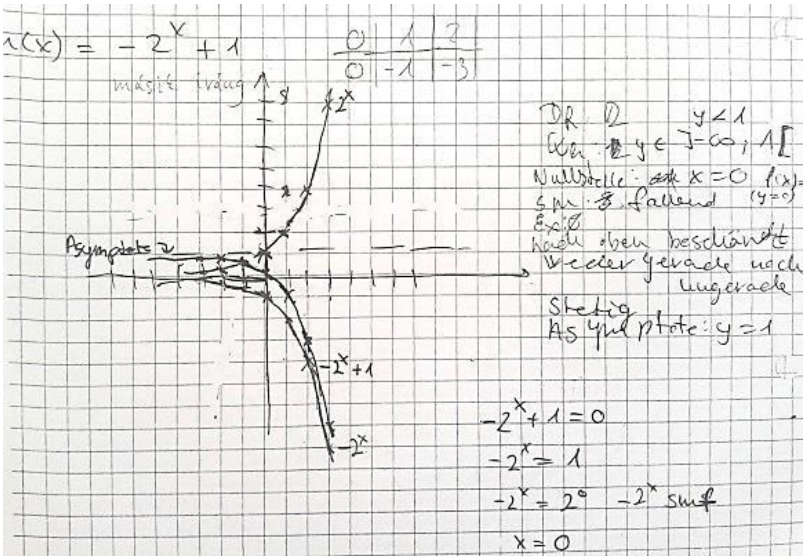


1. Definitionsbereich: $x \in \boldsymbol{R}$

3. Nullstelle: keine *4. Monotonie: str. mon. steigend* *6. Parität: weder gerade noch ungerade* *7. nach unten beschränkt* *8. stetig* *9. Asymptote: y = 0*	*2. Wertebereich: y ∈]0; ∞[* *3. Nullstelle: keine* *4. Monotonie: str. mon. fallend* *6. Parität: weder gerade noch ungerade* *7. nach unten beschränkt* *8. stetig* *9. Asymptote: y = 0*

Bemerkungen:
1. Die Grundfunktionen erreichen die x – Achse nie, sie ist die horizontale Asymptote der Funktion.
2. Die Grundfunktion schneidet die y – Achse immer bei 1.

Nach diesen Grundlagen wurden die Schüler in vier Gruppen aufgeteilt, alle Gruppe aus 4-5 Schülern. Alle Gruppen haben eine Zuordnungsvorschrift bekommen, und sie hatten die Aufgabe, die Funktion darzustellen und zu analysieren. Die Gruppen waren darum gebeten, dass alle Schüler der Gruppe mitdenken, mitarbeiten müssen, nicht einfach die Ergebnisse abschreiben. Für diese Arbeit haben sie 5 Minuten bekommen. Nachdem sie mit der Arbeit fertig waren, musste ein Schüler der Gruppe die Ergebnisse an der Tafel zeigen, wenn es nötig war, erklären und die anderen mussten das natürlich abschreiben. Ich persönlich war auch überrascht, dass die Aufgaben aller Gruppen richtig waren, die ausgewählten Schüler konnten die Funktionen richtig darstellen und analysieren, und die anderen Schüler haben sie verstanden.



Am Ender der Stunde haben wir noch die Möglichkeit gehabt, eine frühere Abituraufgabe zu lösen. Den Schülern wurden nur die ersten zwei Fragen gestellt, weil man hier nur einfach in die angegebene Formel einsetzen musste. Für die dritte Frage mussten sie auch den Begriff des Logarithmus kennen. Dieser Teil der Aufgabe wurde gemeinsam besprochen. Die Fragen waren zwar nicht schwer, der lange Text, aber die scheinbar komplizierten Fragen haben der Mehrheit der Gruppe Probleme bereitet. Mehrere Schüler haben sich so geäußert, dass sie normalerweise im Abitur nicht diese Aufgabe wählen würden – die Aufgabe war eine Wahlaufgabe. Nachdem wir die Aufgabe gemeinsam besprochen haben, waren sie auch erstaunt, wie einfach die Lösungen der ersten zwei Teile sind, und wie viele Punkte man dafür bekommen kann (3 + 7 = 10). Im Teil a) musste man an Stelle von t einfach 0 einsetzten. Im Teil b) musste man die Mengen nach den zweiten 24 Stunden berechnen, dann nach den ersten 24 Stunden, und die zwei Ergebnisse mussten voneinander subtrahiert werden. Das war für einige nur schwer zu verstehen, aber laut des Erwartungshorizonts konnte man für $m(24)$ 2 Punkte, für $m(48)$ 3 Punkte und für die Subtraktion wieder 2 Punkte bekommen. So hätten auch die schwächsten für diesen Teil Punkte bekommen.

Textaufgabe (Abitur 05.2008, 18.a,b): In einem Biolaboratorium hat eine Arbeitsgruppe die Züchtung eines Einzellers beobachtet. Sie haben die Erfahrung gemacht, dass die Masse der Züchtung in Milligramm gemessen durch die Funktion

$$\boldsymbol{m(t) = 0{,}8 \cdot 10^{0{,}02t}}$$

gut angenähert wird, wobei t die vergangene Zeit in Stunden, gemessen von dem Anfang der Beobachtung, bedeutet.

a) Geben Sie die Masse der Züchtung am Anfang der Beobachtung in Milligramm gemessen an!
b) Berechnen Sie, wie viel die Masse der Züchtung sich in den zweiten 24 Stunden der Beobachtung verändert hat! (Geben Sie Ihre Antwort auf eine Dezimalstelle an!)

Hier erschienen die vier Formen der verwendeten Repräsentationen:

Der Text (enaktive):	*Die Tabelle:*	*Der Graph (visuelle):*	*Die Zuordnungsvorschrift (symbolische):*
Durch das alltägliche, realistische Beispiel haben die Schüler gesehen und verstanden, wozu die exponentielle Funktion verwendbar ist, wo die Grenze dieser	Schon auch bei der Einführung haben wir zur übersichtbaren (systematischen) Darstellung der Daten Tabellen benutzt. Bei den	Die Grundfunktionen haben wir durchs Beamer und GeoGebra an die Wand projiziert. Nachdem wir die Transformationsschritte nochmals	Aus der Funktionsgleichung mussten die Schüler den Graphen herstellen – eventuell die Tabelle dazu. In der Textaufgabe mussten die Schüler

Funktion liegen kann. (Wir haben darauf hingewiesen, wenn man auf die Zeit fragt, kann man mit der exponentiellen Funktion die Antwort nur annähernd schätzen, durchs Probieren angeben. Man braucht zur exakten Antwort die Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion.	zwei Grundfunktionen hatten wir auch die Zahlenpaare tabellarisch zusammengefasst. Die Schüler hatten auch während der Darstellung der Graphen die Möglichkeit, Tabelle zu benutzten.	wiederholt haben, mussten die Schüler in Gruppen arbeiten und die Ergebnisse an der Tafel –auch mit GeoGebra – präsentieren.	zwischen dem Text und der Formel den Zusammenhang sehen, sie mussten verstehen, was die Symbole t, bzw. $m(t)$ bedeuten und dementsprechend antworten.

In dem Unterrichtsexperiment spielte die möglichst vielfältige Sichtweise eine wesentliche Rolle. Der Zusammenhang und Wechsel zwischen den Repräsentationen vertieft in den Schülern das concept image der exponentiellen und logarithmischen Vorgänge, es hilft ihnen, dass die Informationen auf vielen Stellen im Gehirn gespeichert werden (s. 1.1.5. Langzeitgedächtnis). Dadurch wird auch das Hervorrufen der Informationen schneller und sicherer.

3.4.4. Exponentielle Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

Nach der gründlichen Einführung des Themas –Einführung der Begriffe, Zusammenhänge, Funktionen– kamen wir dazu, die Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme thematisieren zu können. Die Aufgaben dieses Abschnitts weichen nicht grundsätzlich von den Aufgaben des herkömmlichen Lehrstoffes ab, es wurde in erster Linie auf die zwei Aufgabensammlungen und auf das Lehrbuch gestützt. Dieser Teil erfordert grundsätzlich ein mechanisches Einüben der Vorgänge. Aus dieser Hinsicht ist er für die Schüler mental anstrengend. Bei den Gleichungen und vorwiegend bei den Ungleichungen spielen die verschiedenen Repräsentationen eine wichtige Rolle. Obwohl hier von der enaktiven Repräsentation abstrahiert wurde, wirken die visuelle (GeoGebra) und die symbolische Repräsentation aufeinander.

a) *Exponentielle Gleichungen*
   Für die exponentiellen Gleichungen hat der Stoffverteilungsplan des Gymnasiums drei Stunden gelassen. Diese drei Stunden schienen genug zu sein, da die Erlernten bei den Ungleichungen, Gleichungssystemen und Textaufgaben sowieso wieder vorkommen. Ich wollte aber die Monotonie der Drillaufgaben ein bisschen auflösen.

So haben wir nach dem Einüben der einfachsten Aufgaben ein kleines Spiel gemacht. Es hat den Schülern sehr gefallen, sie machten es mit Freude in Gruppen (vgl.: 3.4.5. Ein kleines Spiel –Trimino)

Lösung exponentieller Gleichungen mit Hilfe der Potenzidentitäten

Einfache Exponentialgleichungen

Unter einfachen Exponentialgleichungen wollen wir Gleichungen der Form $a^x = b$ verstehen, die man problemlos entweder durch Überlegen (Bsp. 1) oder mit Hilfe des dekadischen (natürlichen) Logarithmus und des Taschenrechners (Bsp. 2) lösen kann.

Beispiel 1: $2^x = 8$

$2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3.$

Beispiel 2: $2^x = 7$

$2^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_2 7 \Leftrightarrow x = lg\ 7/\ lg\ 2 = ln\ 7/\ ln\ 2 \approx 2{,}807$ (L5) – später bei Logarithmus

Beispiel (971): *Löse die folgende Gleichung in der Menge der ganzen Zahlen!* $3^{-x} = 243$

Lösung: $3^{-x} = 243 \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^5$.

Da die Exponentialfunktionen über ihren gesamten Definitionsbereich einen streng monotonen Verlauf zeigen, darf man in dieser Gleichung von der Gleichheit der Funktionswerte auch auf die Gleichheit der Argumente schließen, woraus x = –5 folgt.

Nach dieser Einführung haben die Schüler viele Aufgaben bekommen. Sie mussten sie in Gruppen lösen. Diese Gruppen bildeten die Grundlage des späteren Spiels.

Die Themen der drei Stunden waren die folgenden:

- *Lösung exponentieller Gleichungen mit Hilfe der Potenzidentitäten.*
- *Lösung exponentieller Gleichungen mit Hilfe der Potenzidentitäten II.*
- *Lösung quadratischer exponentieller Gleichungen.*

b) *Exponentielle Ungleichungen*

Auch wenn die Gleichungen einem durchschnittlichen Schüler klar sind, können ihm die Ungleichungen einfachster Art kleinere oder größere Probleme bereiten. Während der linearen Ungleichungen müssen sie auf die Vorzeichen bei der Multiplikation und Division aufpassen, bei den einfachen algebraischen Brüchen –wo die andere

Seite der Ungleichung 0 ist– müssen sie den Zähler und Nenner gleichzeitig untersuchen. Bei komplizierteren Aufgaben müssen sie sogar auf viel mehr Dinge achten. Bei den quadratischen Ungleichungen spielen die Lösungen –wenn es sie gibt– eine wichtige Rolle, sie dürfen aber auch nicht einmal das Vorzeichen des quadratischen Gliedes beachten. Bei allen Arten der Ungleichungen ist die Visualisierung, die Darstellung der –möglichen– Lösungen sehr nützlich, manchmal sogar unentbehrlich. Didaktisch betrachtet treffen sich hier der algebraische Term, die Zuordnungsvorschrift, der Graph der Funktion oder mindestens eine Zahlengerade und die Zahlenmengen.

Bei den einfachen exponentiellen Gleichungen müssen die Schüler auch die Basis und den Exponenten des algebraischen Terms gründlich untersuchen. Schon bei den Funktionen haben wir darauf hingewiesen, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigend oder fallend ist. Die Schüler haben wieder Hilfe bekommen, dann mussten sie in Paaren arbeiten und die Ergebnisse einander präsentieren.

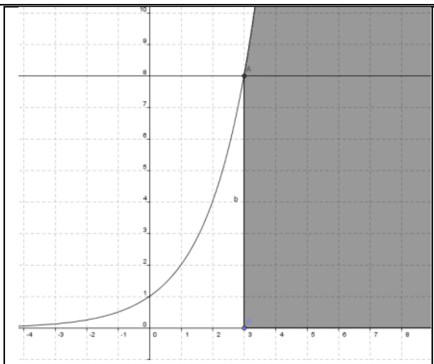
Einfache exponentielle Ungleichungen:

Bemerkung: Bei den exponentiellen Ungleichungen gelten die Regeln wie bei einer linearen, also man darf alle äquivalenten Umformungen durchgeführt, **ABER** wenn man mit einer **negativen** Zahl multipliziert oder durch eine **negative** Zahl teilt, **kehrt die Richtung der Relation um**.

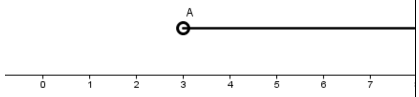
Hier muss man aber auch auf die Basis achten, nämlich bei einer Basis a, wenn $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ ist, **bleibt** die Relation, wenn für a jedoch $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ gilt, **kehrt** die Relation **um**.

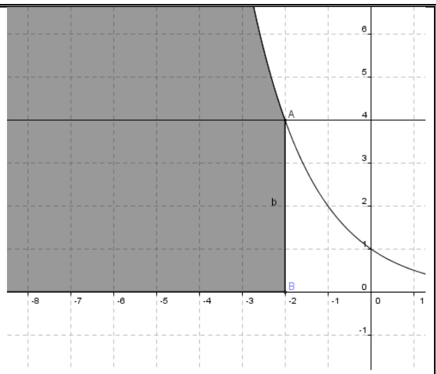
Beispiel:

Wenn a > 1 ist: $2^x > 8\ (= 2^3)$, da 2^x str. mon. steigend ist, bleibt die Relation, also: $x > 3$.	Wenn 0 < a < 1 ist: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4\ (= 2^2)$, da $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ str. mon. fallend ist, kehrt die Relation um, also: $x \leq -2$.

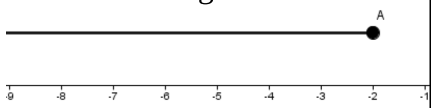


Auf der Zahlengeraden:





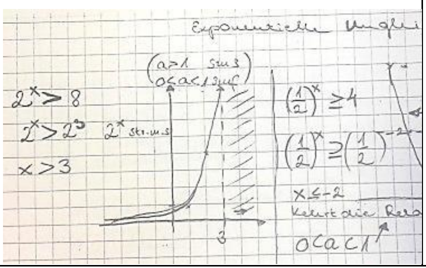
Auf der Zahlengeraden:

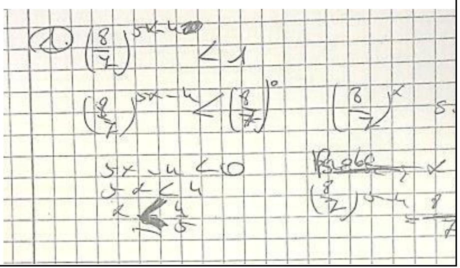


Aufgaben: (Paararbeit)

1. $\left(\frac{8}{7}\right)^{5x-4} < 1$ (Lösung: $x < \frac{4}{5}$)
2. $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x-3} \geq \frac{9}{7}$ (Lösung: $x \leq 1$)
3. $9 \cdot \sqrt[4]{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ (Lösung: $x \leq -\frac{9}{4}$) m

Einige Schüleraufzeichnungen:





Nach den „einfachen“ Ungleichungen haben wir gemeinsam eine mit Absolutbetrag und eine quadratische Ungleichung besprochen.

c) *Exponentielle Gleichungssysteme*
Meiner Meinung nach, und laut der Ergebnisse der Tests, war dieser Teil –zusammen mi den logarithmischen Ungleichungen, der schwierigste und abstrakteste Teil dieses Abschnittes. Die Schüler mussten die schon erlernten Eigenschaften des Potenzierens, Potenzgesetzte, exponentiellen Gleichungen mit den Lösungsverfahren der linearen Gleichungssysteme vereinigen. Es wurde ihnen

vorgeschlagen, wo es möglich ist, neue Veränderliche einzuführen und erst dann das Additionsverfahren oder Einsetzungsverfahren zu verwenden. Ursprünglich wurde es so geplant, dass die Schüler nach einem gemeinsamen Beispiel wieder in Paaren arbeiten. Ich habe aber so beurteilt, dass das Thema für die meisten so zusammengesetzt ist, dass sie lieber nur Fehler begehen werden, falsche Verfahren, Gedanken einprägen werden. Deshalb haben wir in der Stunde gemeinsam gearbeitet. Ich habe den Schülern freien Platz gelassen, die an der Tafel üben möchten. Sie haben die Aufgaben gelöst, wo es nötig war, habe ich sie mit Fragen ermutigt.

Exponentielle Gleichungssysteme:

Bei den exponentiellen Gleichungssystemen kann man die Methoden verwenden, wie bei den linearen, vorher aber lohnt es sich oft, statt der exponentiellen Termen je eine neue Veränderlichen einzuführen. Dann kann man entweder das Additions- oder Einsetzungsverfahren verwenden. Sehen wir zwei, ein einfaches und ein schwierigeres Beispiel!

Beispiel 1:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2^x - 4 \cdot 3^y = -8 \\ \underline{(2)\ 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 18}\end{array}\right\}$$

Lösung:

Führen wir die neuen Veränderlichen ein: $a = 2^x$; $b = 3^x$.

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ a - 4 \cdot b = -8 \\ \underline{(2)\ 3 \cdot a + 2 \cdot b = 18}\end{array}\right\}$$

Wenn man das Einsetzungsverfahren verwendet, dann aus der ersten Gleichung: $a = 4b - 8$. Wenn man in die zweite Gleichung einsetzt, erhält man:

$3 \cdot (4b - 8) + 2b = 18.$

$14b - 24 = 18$

$14b = 42$

$b = 3 \Longrightarrow a = 4$. Daraus: $2^x = 4$ und $3^y = 3$, und weil beide exponentielle Funktionen streng monoton steigend sind, sind x = 2 und y = 1.

Probe!

Beispiel 2:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2 \cdot 9^{x+1} - 3 \cdot 5^{y-1} = 57 \\ \underline{(2)\ 3 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 5^y = 11}\end{array}\right\}$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2\cdot 9\cdot 9^x-\frac{3\cdot 5^y}{5}=57\\ \underline{(2)\ \frac{3\cdot 9^x}{9}+2\cdot 5^y=11}\end{array}\right\}\qquad \begin{array}{l}/\cdot 5\\ /\cdot 9\end{array}$$

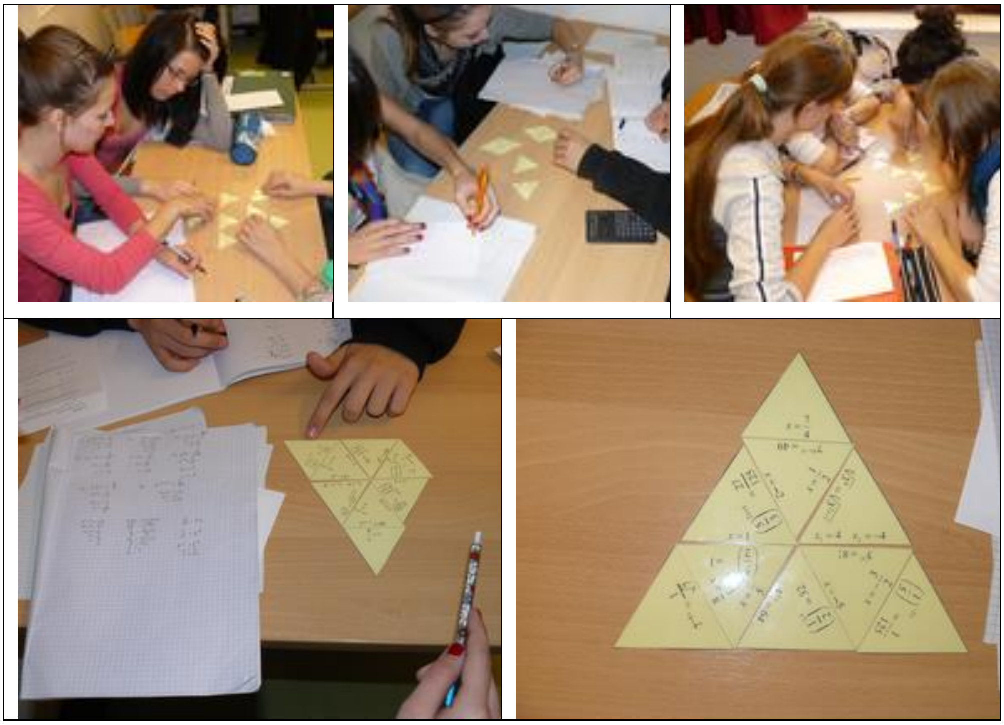
$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 90\cdot 9^x-3\cdot 5^y=285\\ \underline{(2)\ 3\cdot 9^x+18\cdot 5^y=99}\end{array}\right\}\qquad 9^x=a\ und\ 5^y=b$$

Nach Umformungen: a = 3; b= 5. So sind wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion: $x=\frac{1}{2}$ und $y = 1$. **Probe!**

3.4.5. Ein kleines Spiel - Trimino

Um in die Wüste der algebraischen Operationen ein bisschen Wasser zu bringen, damit das Thema nicht so trocken bleibt, haben wir in der Hälfte einer Stunde ein bisschen gespielt. Die Schüler kannten das Spiel schon aus den vorigen Jahren, nicht nur ich, sondern auch die Kollegen verwenden es manchmal in den Stunden – wir haben eine kleine Sammlung von Triminos, Dominos. Wir stellen sie zusammen, vervielfältigen sie und die Blätter werden laminiert. Die fertigen Spiele können auch von anderen Kollegen verwendet werden. Für dieses Thema habe ich selbst ein Trimino zusammengestellt.

Das Spiel besteht aus kleinen, regelmäßigen Dreiecken, auf deren entsprechenden Seiten verschiedene einfache Gleichungen geschrieben werden. (Die Schablone des Spiels ist im Anhang J zu finden.) Die Schüler haben die Aufgabe, zu diesen Gleichungen die entsprechenden Lösungen zu finden, und so aus den kleinen Dreiecken ein großes zu bauen. Zu der Lösung der Aufgabe mussten sie die Gleichungen lösen. Die Gruppen haben verschieden Taktiken gewählt. Es gab solche Gruppen, wo die Aufgaben verteilt wurden, und nach der Lösung versuchten sie die Figur aufzubauen. Es gab aber auch solche Gruppen, die der Reihe nach die Gleichungen lösten, und so begannen sie schon die große Figur aufzubauen. Die schnellste Gruppe war in etwa 10 Minuten fertig, aber die anderen brauchten auch nicht mehr als 15 Minuten mehr. Dabei haben die Schüler große Freude gehabt.



3.4.6. *Exponentielle Textaufgaben*

Dieses Thema war schon in der Einführung berührt worden. Dort wurden die neuen Begriffe –Exponential- und Logarithmusfunktionen– mit Hilfe von einfachen Textaufgaben eingeführt. Am Ende des Themas kehrten wir zu den Textaufgaben zurück. Einerseits, weil die Textaufgaben die Manifestation alltäglicher Probleme bedeuten, wo zur Lösung ein mathematisches Modell gefunden werden muss. Dieses Modell basiert hier natürlich auf den Exponential- und/oder Logarithmusfunktionen. Andererseits, weil im neuen Abitur immer mehr diese Kompetenz gefordert wird. Die Textaufgaben erfordern viele Fähigkeiten von den Schülern.

- Leseverstehen: Eine Schwierigkeit bedeutet für die Schüler der bilingualen Klassen die Sprache. Sie sprechen zwar überwiegend gut Deutsch, das Leseverstehen ist auch bei vielen relativ gut, aber bei einem mathematischen Text reicht das alleine nicht aus. Sie müssen den Inhalt, den Sinn der Aufgabe völlig verstehen, sonst können sie in den weiteren Schritten einfach irregeführt werden.
- Die Schüler müssen aus den richtig verstandenen Informationen die erkennen, die während der Lösung eine Rolle spielen. Die richtigen und konsequenten Bezeichnungen dieser Informationen sind auch erforderlich.

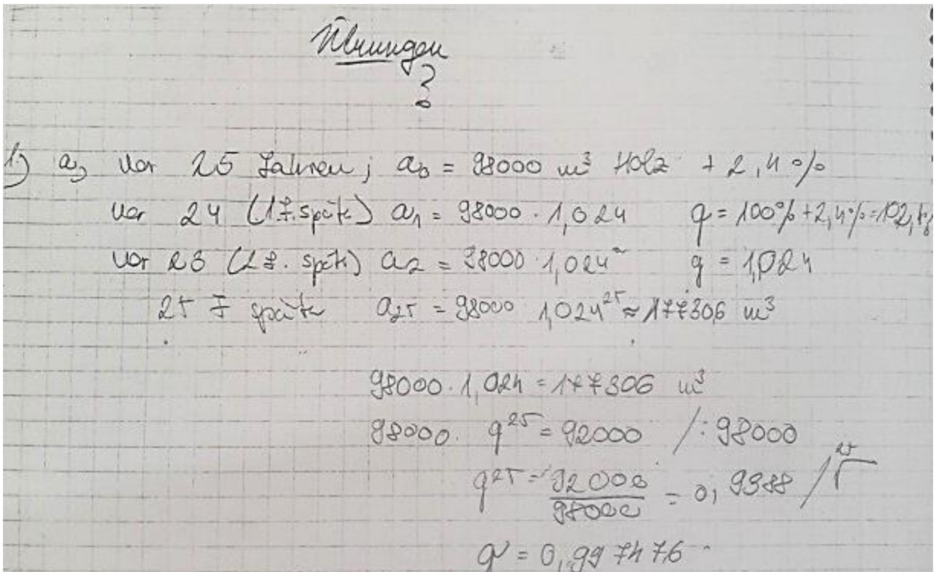
- Sie müssen herausfinden, was gefragt wird, welche Veränderliche(n) sie einführen müssen. Hier ist auch die richtige Bezeichnung der Veränderlichen unentbehrlich.
- Wenn sie die aus der Hinsicht der Lösung wichtigsten Informationen herausgefiltert haben, müssen sie zur Lösung ein entsprechendes mathematisches Modell finden. Die Schüler haben schon in der 11. Klasse ein relativ breites Repertoire von den Modellen, es kann aber auch vorkommen, dass sie etwas –teilweise– Neues verwenden müssen (s. Problemlösen). In diesen Fällen mussten sie die zupassende Gleichung aufstellen. Bei dem Modell darf man auch nicht vergessen, die Grundmenge zu bestimmen.
- Wenn sie das richtige Modell gefunden haben, müssen sie mit diesem Modell die Aufgabe lösen. Sie müssen dabei darauf achten, was die Lösungsmethode des Modells erlaubt, was sie verbietet. Wenn das Modell auf eine einfache quadratische Gleichung führt ($x^2 = 16$), dann verlieren viele Schüler ohne Absicht die negative Wurzel – wenn sie natürlich wissen, dass es in der Aufgabe um z.B. Anzahl der Kinder geht, ist es kein großer Fehler. Sie müssten natürlich darauf hinweisen, dass sie es bei der Angabe der Lösung beachtet haben. In ähnlicher Weise ist es gefährlich, wenn sie während der Lösung der Gleichung eine Extrawurzel bekommen. Durch die Probe oder durch die Untersuchung des Definitionsbereiches und/oder Wertebereiche des Problems kann sich erweisen, dass sie eine falsche Wurzel ist. Es kommt oft vor, das das erhaltene Ergebnis noch nicht die Antwort auf die Frage ist, so müssen sie noch weiterrechnen.
- Wenn die Schüler die Lösung erhalten haben, müssen sie sie ausprobieren. Ein typischer Fehler ist dabei, dass die Schüler den Wert nicht „in den Text“ einsetzten, sondern in die von ihnen erstellte –vielleicht falsche– Gleichung.
- Nach der Probe vergessen die Schüler oft, eine Antwort auf die Frage zu geben. Ich schlage ihnen immer vor, nochmals die Frage zu lesen, nicht einfach den erhaltenen Wert in einen Antwortsatz einzusetzen.

Am Anfang dieses Abschnitts haben wir diese Punkte nochmals besprochen, und ich beharrte mich darauf, sie einzuhalten. Da wir den Logarithmus noch nicht gelernt haben, hätte hier nur solche Aufgaben gestellt werden müssen, bei deren Lösungen man keinen Logarithmus braucht. Wir haben aber schon in der Einführung den Funktionsgraphen der Exponentialfunktion zur Hilfe gerufen. So wurden hier auch auf den Arbeitsblättern der Schüler die entsprechenden Graphen zur Verfügung gestellt. Die Schüler konnten mit diesen Graphen arbeiten. So konnten wir die „umgekehrten“ Fragen mit einem Annäherungswert beantworten. Auf den Arbeitsblättern der Schüler standen sechs Aufgaben für die Stunde und zwei weitere für die Hausaufgabe. (Weitere Aufgaben sind im Anhang D zu finden.) In der Stunde konnten wir –wegen der Einführung– drei Aufgaben lösen, die weiteren drei haben wir in der Wiederholung in der nächsten Stunde gelöst.

Beispiel 1:
Vor 25 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 98 000 m³.

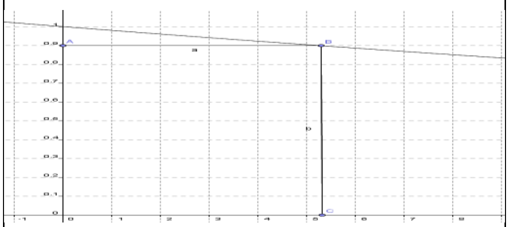
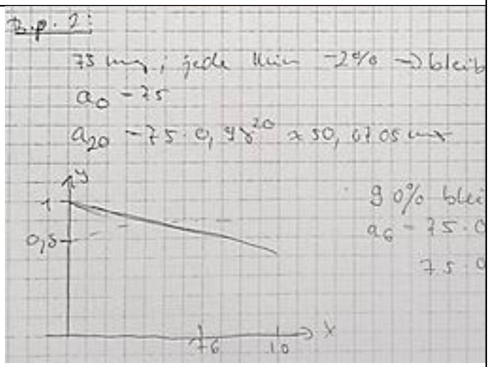
a) Wie groß müsste der Holzbestand heute sein, wenn man mit einem jährlichen Zuwachs von 2,4% rechnet.
b) Tatsächlich beträgt der Holzbestand heute nur noch 92 000 m³. Berechne die jährliche negative Zuwachsrate.

Bei der ersten Frage gab es theoretisch keine Probleme, außer drei Schülern (14,3%) konnten die anderen die Frage beantworten. Aber von diesen 18 Schülern haben 6 als Faktor $2{,}4^{25}$ genommen (28,6%), und es fiel ihnen nicht auf, dass sie ein extrem großes Ergebnis bekommen haben. Nur 12 Schüler konnten die Frage richtig beantworten (57,1%). Bei der zweiten Frage war das Ergebnis, wie erwartet, noch schlechter. Nur 4 Schüler konnten die Frage ohne Hilfe beantworten (19%).

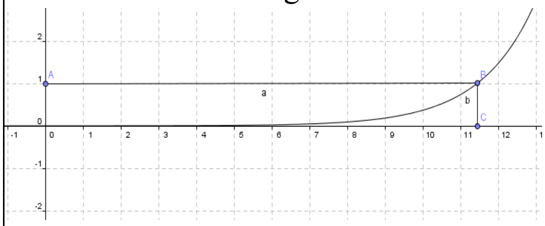


Nach diesem einführenden Beispiel wurde ein exponentieller Rückgang formuliert. Die erste Frage braucht etwa die gleichen Kompetenzen wie im vorigen Beispiel. Hier –anhand des vorigen Beispiels– konnten alle Schüler die Aufgabe anfangen, aber wegen des Rückgangs haben 8 Schüler den Teil nicht zu Ende geführt, oder sie haben wieder ein falsches Ergebnis bekommen (38,1%). Die anderen dagegen haben diesen Teil richtig gelöst (61,9%). In der

Frage b) konnte sich niemand ohne Hilfe zurechtfinden. Als ein bisschen geholfen wurde, haben einige die nötige Funktion gefunden, die man darstellen muss ($f(x) = 0{,}98^x$). Bei der Darstellung haben wir GeoGebra benutzt. Um das Ergebnis besser sehen zu können, wurde die Einteilung der y-Achse verändert. Nach dieser Hilfe konnten schon fast alle Schüler die Frage beantworten (17 Schüler – 80,9%).

Beispiel 2: Ein radioaktiver Stoff verliert in jeder Minute 2 Prozent seiner Masse durch Strahlung. Zu Beginn waren 75 Milligramm vorhanden. a) Wie viele Milligramm sind nach 20 Minuten noch vorhanden? b) Nach welcher Zeit ist etwa 10% des Stoffes zerstrahlt? Durchs Probieren kannst du die Frage beantworten. Du könntest natürlich auch die Funktion zu Hilfe rufen!	
Lösungshilfe: 	

Bei dem letzten Beispiel ist die erste Schwierigkeit, dass die Wachstumsbasis in Minuten (sogar in 30 Minuten) angegeben, die Frage dagegen in Stunden formuliert ist. Ich habe im Voraus damit gerechnet, dass das bei einigen Schülern ein Problem bedeutet. Gleich am Anfang hat ein Schüler danach gefragt. So haben wir das gemeinsam besprochen und alle Schüler konnten den ersten Teil richtig beantworten. In der Frage b) wurde wieder darauf hingewiesen, dass sie die Lösung der Aufgabe durch Probieren oder mit Funktionen annähernd angeben können. Laut des vorigen Beispiels konnten 9 Schüler die Aufgabe beantworten (42,9%), davon 2 durch reines Probieren, die anderen 7 mit der Funktion. Dabei hat auch geholfen, dass die Funktion einfacher darstellbar war. Die Frage c) haben auch diese 9 Schüler richtig beantwortet. Die anderen haben sich damit nicht beschäftigt, sie hatten entweder keine Zeit dafür, oder sie hatten die Lust verloren.

Beispiel 3: In einer Probe eines Kartoffelsalats befinden sich 360 Bakterien. Ihre Anzahl verdoppelt sich jeweils in 30 Minuten. a) Wie viele Bakterien werden es in 3 Stunden sein? b) Wann werden es eine Million Bakterien sein? Löse die Frage durchs Probieren und/oder mit Funktionen! c) Wie viele Bakterien waren es 90 Minuten vor Untersuchungsbeginn?	Lösungshilfe: 

Bei den logarithmischen Textaufgaben spielte die Darstellung eine nicht so wichtige Rolle wie bei den exponentiellen. Man muss hier die Ergebnisse nicht nur „ablesen“, sondern man kann und muss sie mit Hilfe der Logarithmusfunktion mit einer angegebenen Genauigkeit berechnen.

3.5. Der Begriff des Logarithmus

3.5.1. Einführung des Begriffs Logarithmus

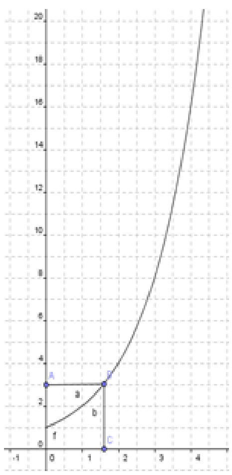
Die Schüler haben die exponentiellen Vorgänge mit Hilfe eines praktischen Beispiels kennengelernt, nämlich in einem Teich wuchsen Wasserlinsen. Wir haben dieses Beispiel sowohl graphisch, als auch algebraisch gelöst. Es wurde dazu Tabellen gefertigt, in denen die ganzen (positiven aber auch negativen) Exponenten gedeutet wurden. Wir konnten sogar die rationalen Exponenten mit Hilfe dieses Beispiels einführen und darauf hinweisen, dass in diesem Beispiel auch die irrationalen Exponenten eine Bedeutung haben. Wir haben damals weiterhin entdeckt, dass die Aufgabe mit den damaligen Kenntnissen nicht immer exakt lösbar war (ohne die Definition des Logarithmus zu wissen). Später haben wir auch weitere Beispiele für exponentielle Vorgänge gesehen.

Ich wollte bei der Einführung des Logarithmus mit einem schon bekannten Problem anfangen. Damit wollte ich mehrere Ziele erreichen:
1. Der Begriff des Logarithmus für die Schüler sehr abstrakt. Wenn sie keine praktischen Anwendungen sehen, verstehen sie den Begriff oft nicht (obwohl sie damit mehr oder weniger richtig rechnen können). Deshalb wurde ein

Beispiel ausgewählt, das sie schon kennen, einmal bearbeitet haben, an welches sie sich erinnern können.

2. Durch das bekannte Problem können sie sich mit Logarithmus (am Anfang noch ohne zu wissen, was das ist) vertraut machen, sie erschrecken sich nicht schon am Anfang vor der abstrakten mathematischen Definition, den Bezeichnungen.

3. An diesem Beispiel kann man leicht und verständlich den Zusammenhang (Funktion – Umkehrfunktion) zwischen den exponentiellen und logarithmischen Rechnungen zeigen, deutlich machen.

19. Stunde: Begriff des Logarithmus an alltäglichen Beispielen	
1 – 20‘	*Besprechung der Ergebnissen der Schularbeit*
20 – 43‘	 *<u>Begriff des Logarithmus an alltäglichen Beispielen</u>* In dem vorigen Teil haben wir gesehen, dass man bei einem exponentiellen Wachstum oder Rückgang nicht alle Fragen exakt beantworten kann. Wenn die Zeit angegeben ist, muss man sie einfach in die entsprechende Formel einsetzen. Wenn aber ein bestimmtes Ziel angegeben ist und nach der Zeit gefragt wird, konnten wir das Problem nur mit Hilfe einer Annäherung (algebraisch oder graphisch) beantworten. In diesem Teil beschäftigen wir uns damit, auch schon diese Richtung deuten zu können, weil diese Probleme im alltäglichen Leben oft vorkommen. **Beispiel:** Die kleine Wasserlinse (lemna minor- kis békalencse) ist eine sehr schnell wachsende Pflanze. Ihre Menge verdoppelt sich jeden Tag, so kann sie schon in kurzer Zeit den ganzen See bedecken. Deshalb ist es sehr wichtig festzustellen, wann sie schon einen bestimmten Anteil (ein Zehntel, Drittel usw.) des Sees bedeckt. Die Größe der bedeckten Fläche war anfangs 1 m^2 groß (Anfangszeit t = 0), 1 Tag später (t = 1) 2 m^2. Dieser Vorgang wird mit der Funktion: $a = f(t) = a^t$. Benutze den Graphen die folgenden Fragen zu beantworten! 1. Wann wird die Wasserlinse 3 m^2, 6 m^2, 12 m^2 groß? Jetzt ohne den Graphen: Wann wird die Wasserlinse 24 m^2 groß? 2. Die gleiche Frage für: 5 m^2, 10 m^2, 20 m^2. Was kannst du entdecken?

In dem vorigen Teil haben wir den Zusammenhang zwischen Fläche (oder Größen) und der Zeit untersucht. Bei diesen war die Fläche von der Zeit abhängig. In diesem Teil fokussieren wir auf den umgekehrten Zusammenhang. Das ist aber nicht einfach, weil im Allgemeinen die unabhängige Variable die Zeit ist. Wenn man aber an die Zeit konzentriert, z.B.:

1. Wann erreicht die Bevölkerung der Erde 8 Milliarden, wenn das Wachstum jährlich so und so ist, und jetzt so viele Menschen leben?

oder

2. Wann hat mein Geld in der Bank den Wert von …€, wenn die Bank …% Zinsen jährlich bezahlt und mein Anfangsanlegen …€ war? o.ä.; dann muss man umgekehrt denken.

Fülle die Tabellen aus!

Fläche (m^2)	1	2	4	8	16	32
Zeit (Tage)	0	1				

Fläche (m^2)	3	6	12	24	48	96
Zeit (Tage)	1,6					

Fläche (m^2)	2,5	5	10	20	40	80
Zeit (Tage)		2,3				

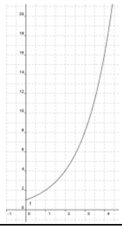
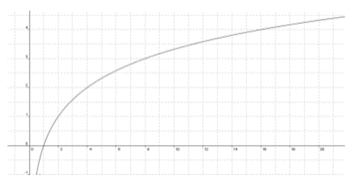
Fläche (m^2)	0,125	0,25	0,5	1		
Zeit (Tage)				0		

Was für einem Gedankengang könntest du folgen, wenn der Graph nicht bekannt wäre?

Im Folgenden wird eine Wertetafel zwischen Fläche und Zeit angegeben, mit deren Hilfe wir die Umkehrfunktion der exponentiellen Funktion darzustellen versuchen:

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
t	0	1	1,58	2	2,32	2,58	2,81	3	3,17	3,32	3,46	3,58	3,70
a	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
t	3,81	3,91	4	4,09	4,17	4,25	4,32	4,39	4,46	4,52	4,58	4,64	4,70

Versuchen wir mal beide Funktionen darzustellen:

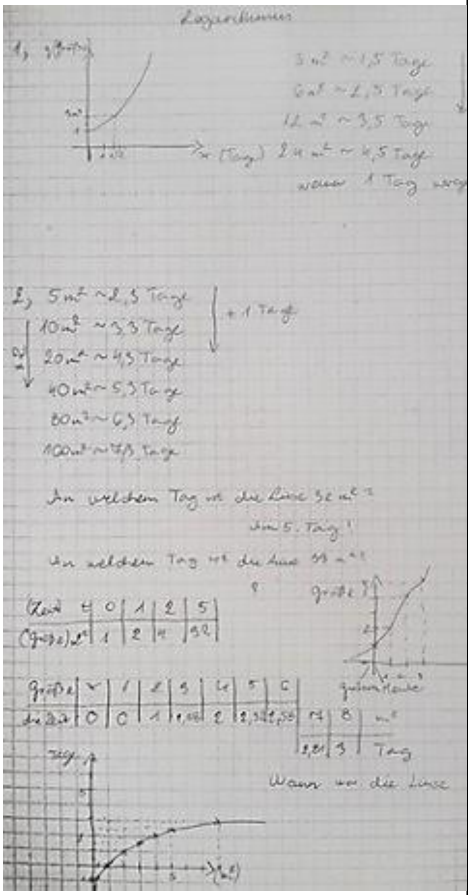
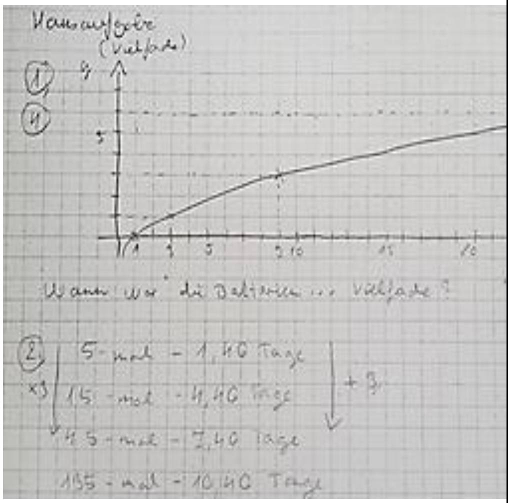
$t \to a\ (Exponentialfunktion)$	$a \to t\ (Umkehrfunktion)$
	

Wie kann man die zwei Graphen miteinander vergleichen?

<table>
<tr>
<td>43 –
45‘</td>
<td>
<u>Hausaufgabe:</u>
Nehmen wir an, ein Bakterium verdreifacht sich jeden Tag. Löse die folgenden Aufgaben:
1. Schreibe die Funktion des Wachstums auf! Stelle sie graphisch dar! (lass dafür im Heft viel Platz!)
2. Benutze den Graphen die folgenden Fragen zu beantworten! Wann gibt es 5-mal, 15-mal, 45-mal so viele Bakterien wie ursprünglich? Jetzt ohne den Graphen: Wann gibt es 135-mal so viele? Was ist die Regel?
3. Fülle die Tabellen aus!
<table>
<tr><td>Vielfache</td><td>1</td><td>3</td><td>9</td><td>27</td><td>81</td><td>243</td></tr>
<tr><td>Zeit (Tage)</td><td>0</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Vielfache</td><td>5</td><td>15</td><td>45</td><td>135</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Zeit (Tage)</td><td>1,46</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Vielfache</td><td>2</td><td>6</td><td>18</td><td>48</td><td>144</td><td></td></tr>
<tr><td>Zeit (Tage)</td><td></td><td>1,63</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>Vielfache</td><td>1/27</td><td>1/9</td><td>1/3</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Zeit (Tage)</td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
</table>
4. Versuche die Umkehrfunktion darzustellen!
</td>
</tr>
</table>

Da die Grundaufgabe für die Schüler schon bekannt war, haben sie schnell und richtig verstanden Wir haben die Aufgabe noch einmal besprochen, darauf hingewiesen, dass jetzt die angegebenen Angaben und gestellten Fragen eben „umgekehrt" formuliert sind als bei den Aufgaben vorher. Deshalb sind auch die Tabellen umgekehrt aufgeschrieben.

In der Hausaufgabe haben die Schüler die Zuordnungsvorschrift nicht angegeben bekommen, aber einen sinnvollen Zusammenhang haben sie –wie in der Stunde –dargestellt. Das Ausfüllen der Tabelle bedeutete ihnen keine Schwierigkeit, fast alle haben sie richtig ausgefüllt (einige haben es sogar schon während der Stunde gemacht).

3.5.2. *Die Logarithmusfunktion*

Anhand dieser Einführung konnten wir in der nächsten Stunde zuerst die der Aufgabe entsprechende „Definition“, dann die mathematische Definition einführen. Die Schüler haben einerseits die Definition verstanden, andererseits haben sie gesehen, wozu man sie verwenden, benutzten kann:

<u>*Logarithmusfunktion, Zusammenhang mit der Exponentialfunktion (Umkehrfunktion)*</u>

Wie schon in der vorigen Stunde darauf hingewiesen wurde, wird oft bei den exponentiellen Vorgängen nicht nach der Größe, sondern nach der Zeit gefragt. Man kehrt also die Richtung der Zuordnung um. Im ersten Fall spricht man über eine **exponentielle Funktion**, im zweiten über eine **Logarithmusfunktion.**

$t \to a\ (Exponentialfunktion)$	$a \to t\ (Logarithmusfunktion)$

In Worten:

***Exponentialfunktion*:** alle fixen Zeitabstände bedeuten eine **fixe Multiplikation der Größe.**
Logarithmusfunktion: alle **fixen Multiplikationen der Größe** passieren **in fixen Zeitabständen.**

Im Beispiel der vorigen Stunde (Wasserlinsen) war der Wachstumsfaktor 2, die Bezeichnung der nötigen Zeit (t) für das Erreichen eine bestimmte Fläche (a) ist:

$$t = \log_{Wachstumsfaktor} a,$$

also in diesem Fall:

$$t = \log_2 a.$$

Der Term z.B.: $\log_2 10$ bedeutet die Zeit, die die Pflanze braucht, aus der Größe von 1 m^2 die Größe von 10 m^2 erreichen zu können, wenn der Wachstumsfaktor 2 ist.

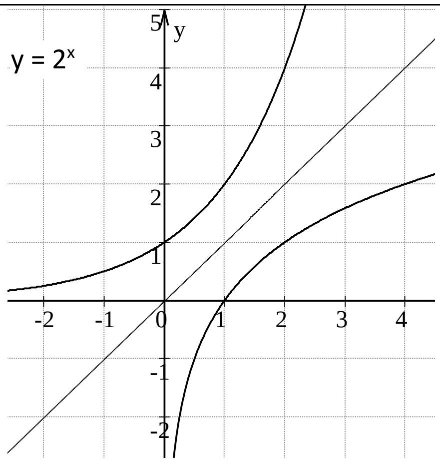
Definition: *Unter dem Logarithmus einer positiven Zahl b zur Basis a (a > 0; a ≠ 1) versteht man diejenige reelle Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.* $x := \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$ *(a, b > 0; a ≠ 1)*
(lies: „x ist der Logarithmus von b zur Basis a genau dann, wenn a hoch x gleich b ist.“)

In der Stunde haben wir die Grundfunktionen besprochen $\left(f(x) = \log_{10} x \ \ und\ g(x) = \log_{0,5} x\right)$, wir haben sie analysiert. Für die Definition der Logarithmusfunktion wurde folgendes angegeben:

Definition: *Die Funktion der Form* $f\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R};\ f(x) = \log_a x\,; a \in R^+\backslash\{1\}$ *heißt Logarithmusfunktion zur Basis a.*

Der Zusammenhang zwischen der Exponential- und Logarithmusfunktion wurde folgendermaßen erklärt:

Zwischen der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie –unter den entsprechenden Bedingungen- zwischen Potenz- und Wurzelfunktionen. Spiegelt man zum Beispiel den Graphen der Funktion $y = log_a x$ an der Geraden $y = x$, dann erhält man den Graphen der Funktion $y = a^x$. Das deutet darauf hin, dass die beiden Funktionen durch einfaches Vertauschen der Veränderlichen x und Funktionswert y auseinander hervorgehen. Sie sind sogenannte Umkehrfunktionen.

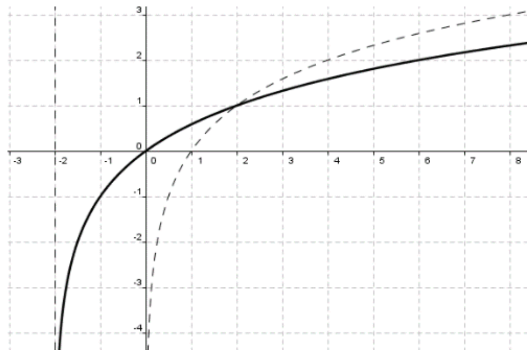


Beispiel 11: $f\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$; $y = \log_2 x$.
Vertausche x und y: $x = \log_2 y$.
Als Exponentialgleichung, wegen der strengen Monotonie der Logarithmusfunktion ist:
$g\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$; $y = 2^x$.
Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion ($\boldsymbol{R}^+$) stimmt mit dem Wertebereich der Exponentialfunktion überein. Ebenso ist der Wertebereich der Logarithmusfunktion ($\boldsymbol{R}$) gleich mit dem Definitionsbereich der Exponentialfunktion. Die beiden Funktionsgraphen sind die Spiegelbilder zueinander an der Achse $y = x$.

Ich möchte hier am Beispiel der Logarithmusfunktion zeigen, wie wir in der Stunde die Kurvendiskussion besprochen und bearbeitet haben. Die Diskussionsschritte haben hier kein Problem mehr bedeutet, weil wir sie ein paar Stunden früher bei der Exponentialfunktion besprochen und wiederholt haben. In der Klasse wurden wieder 4-5 köpfige Gruppen gebildet. In allen Gruppen saß mindesten ein mathematisch begabter Schüler. Nachdem wir die Grundfunktion kennengelernt haben, bekamen die Schüler ein kleines Blatt mit den Funktionen, die sie untersuchen und darstellen müssen. Sie haben insgesamt fünf Funktionen bekommen und hatten dazu zusammen 20 Minuten Zeit. Die Zeit reichte ihnen. Nach dem Ablauf haben wir die Ergebnisse folgendermaßen zusammen kontrolliert: Für die fünf Aufgaben gab es fünf Gruppen. Aus allen Gruppen kam ein freiwilliger Schüler zur Tafel und präsentierte das Ergebnis. Die Funktion mussten sie nicht mit Kreide an die Tafel zeichnen, sie durften die Funktion auch mit dem Computer und Beamer an die Wand projizieren. Dabei musste ich anfangs helfen. Die damalige Version der Software konnte nämlich nur Zehnerlogarithmus darstellen. Es wurde den Schülern gezeigt, wie man Logarithmen verschiedener Basen darstellt. Alle fünf Gruppen haben die Gelegenheit genutzt. Später, als Zusammenfassung haben sie von mir die richtigen Lösungen und als Hausaufgabe drei ähnliche Funktionen bekommen. Ein Beispiel ist das folgende:

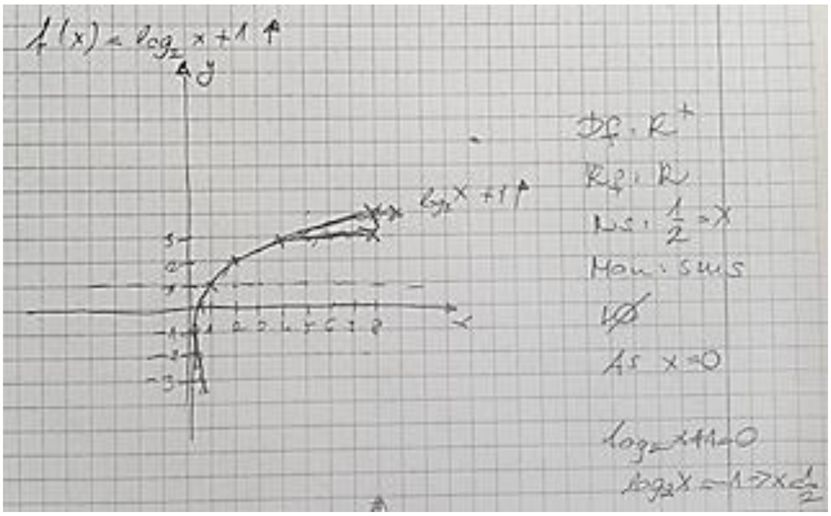
Transformationen der Logarithmusfunktion:

In der nächsten Aufgabe müsst ihr die Funktion darstellen und diskutieren!

3. $\boldsymbol{h(x) = \log_2(x+2) - 1}$ 1. Definitionsbereich: $x \in$ $]-2;\ \infty[$ 2. Wertebereich: $y \in\ \boldsymbol{R}$ 3. Nullstelle: x = 0 4. Monotonie: str. mon. steigend 6. Parität: weder gerade noch ungerade 7. nicht beschränkt 8. stetig 9. Asymptote: x = -2	

Die Aufgaben waren: 1. $f(x) = \log_2 x + 1$; 2. $g(x) = \log_2(x+1)$; 3. $h(x) = \log_2(x+2) - 1$; 4. $i(x) = -\log_3 x$; 5. $k(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x + 2$.

Wie aus dem obigen Beispiel zu sehen ist, kann man mit Hilfe von GeoGebra nicht nur die Grundfunktionen ausgezeichnet darstellen, sondern auch die Transformationen.



Hier hat man mehrere Möglichkeiten. Entweder geht man Schritt für Schritt, man gibt also die entsprechenden Transformationsschritte manuell ein. Oder man kann dazu Schieberegler definieren, womit man die Transformationen einfach, per Mausklick, oder automatisch einstellen kann. Das ist sehr spektakulär. So können die Schüler die Vorgänge nicht nur statisch, sondern auch dynamisch sehen.

Die Bewertung der Aufgaben ist ähnlich der Bewertung der Einzelarbeit. Hier gab es aber fünf Gruppen. Da alle Gruppen sowohl stärkere als auch schwächere Schüler enthalten haben, habe ich die Gruppen als eine Einheit betrachtet und die Auswertung so hergestellt.

5 Gruppen	1.		2.		3.		4.		5.	
richtige Antworten	5	**100,0%**	4	**80,0%**	4	**80,0%**	3	**60,0%**	1	**20,0%**
1, 2 oder 3 falsche Teilantworten	0	**0,0%**	1	**20,0%**	1	**20,0%**	1	**20,0%**	2	**40,0%**
4 oder mehr falsche Antworten/ nicht gelöst	0	**0,0%**	0	**0,0%**	0	**0,0%**	1	**20,0%**	2	**40,0%**

3.5.3. Die Logarithmusgesetze

Es war sehr wichtig, auch die Logarithmusgesetzte anschaulich, durch Alltagsbeispiele und nicht gleich rein mathematisch einzuführen. Bei der Einführung habe ich das bekannte Grundbeispiel mit den Wasserlinsen benutzt. Natürlich, wie es auch bei der Definition des Logarithmus vorgekommen ist, wurden die Gesetze auch mathematisch formuliert und bewiesen. Aber den Sinn hat die Mehrheit der Schüler gut verstanden, sie konnten sie verwenden. Das erste Gesetz wurde zum Beispiel folgendermaßen eingeführt:

Logarithmusgesetze:

Bei der Einführung des Logarithmus haben wir ein Beispiel über Wasserlinsen, die ihre Fläche täglich verdoppeln. Es gab eine Tabelle dazu:

a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
t	0	1	1,58	2	2,32	2,58	2,81	3	3,17	3,32	3,46	3,58	3,70
a	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
t	3,81	3,91	4	4,09	4,17	4,25	4,32	4,39	4,46	4,52	4,58	4,64	4,70

Weiterhin haben wir bei der Definition des Logarithmus festgestellt, dass er die Zeit (t) zum Erreichen einer bestimmten Größe bedeutet, z.B.:

$\log_2 2 = 1$, d.h. wenn der Wachstumsfaktor 2 ist (Basis), dann braucht die Pflanze ***1*** Tag, ihre Fläche verdoppeln (auf 2 m^2) zu können.

Ähnlicher Weise: $\log_2 4 = 2$, also wenn der Wachstumsfaktor 2 ist (Basis), dann braucht sie ***2*** Tage, ihre Fläche vervierfachen (4) zu können.

1. *Erkläre die folgenden Zusammenhänge:*

$\log_2 3 \approx 1{,}58$, $\log_2 5 \approx 2{,}32$, $\log_2 6 \approx 2{,}58$.

Wenn wir die Tabelle weiter studieren, können wir etwas Interessantes entdecken:

$\log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 6 \approx 2{,}58$.

Wie lässt sich das erklären?

Die Antwort ist folgendes: Da der Logarithmus eine Zeit bedeutet, zuerst braucht sie 1 Tag ($\log_2 2$), ihre Fläche verdoppeln zu können, dann noch etwa 1,58 Tage ($\log_2 3$), um die verdoppelte Fläche noch verdreifachen zu können. So vergingen etwa 2,58 Tage, und die Fläche ist jetzt $2 \cdot 3 = 6$-mal so groß.

2. *Erkläre den folgenden Zusammenhang:*

$$\log_2 4 + \log_2 5 = \log_2 20 \approx 4{,}32$$

Bemerkung: bei dem obigen Beispiel könnte man statt $\log_2 2$ einfach 1 schreiben, so sieht der Gleichung folgendermaßen aus:

$1 + \log_2 3 = \log_2 6 \approx 2{,}58.$

3. *Erkläre den folgenden Zusammenhang:*

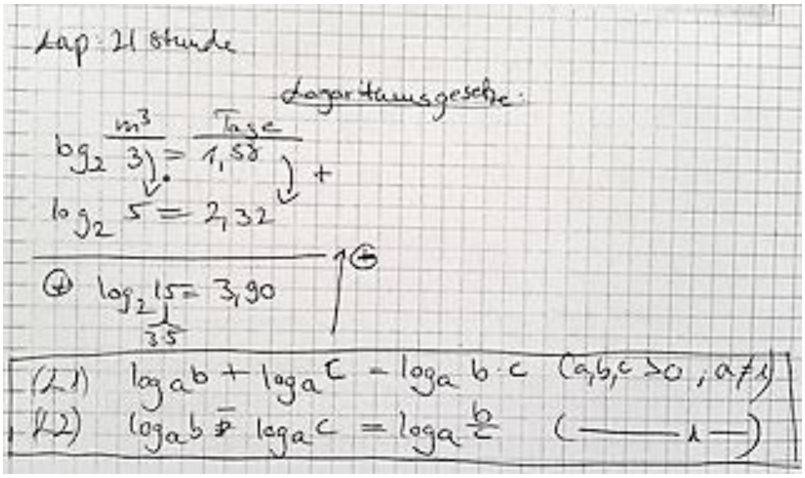
$$2 + \log_2 5 = \log_2 20 \approx 4{,}32$$

Aus den oben erwähnten kommt das erste Gesetz des Logarithmus (L1):

(L1) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ *wenn* $a, b, c > 0$ *und* $a \neq 1$.

Beweis!

Wie hier zu sehen ist, spielt beim Lernen der Text, das Textumfeld eine wesentliche Rolle. Hier wurden Fragen gestellt, den Zusammenhang mussten die Schüler anhand des Textes verstehen und erklären. Sie haben das gerne gemacht. In Paaren versuchten sie die Antwort zu finden und fast alle Paare haben eine richtige Antwort gegeben. Nach der Antwort mussten sie auch das –vermutete– Gesetz formulieren. Das haben die Paare wieder richtig gemacht (alleine die Bedingungen mussten wir gemeinsam besprechen). In ähnlicher Weise sind wir auch bei den anderen Gesetzen verfahren. Die Schüler konnten die Zusammenhänge fast immer sowohl an einem konkreten Beispiel als auch im Allgemeinen richtig beantworten.



Die weiteren drei Logarithmusgesetzte wurden in der Stunde in ähnlicher Weise eingeführt, und wir haben alle mit mathematischen Mitteln bewiesen. Am Ende der Stunde haben wir die Gesetze tabellarisch zusammengefasst.

Wenn man weiterhin überlegt, kann man entdecken, dass die Umkehrrechenart der Addition die Subtraktion ist und der Umkehrehrrechenart der Multiplikation die Division ist. Folgt daraus, dass $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ ist?
Zur Antwort sehen wir mal ein Beispiel:

$$\log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 \left(\frac{10}{2}\right) = \log_2 5 \approx 3{,}32 - 1 \approx 2{,}32$$

Hier scheint die obige Behauptung gültig zu sein. Warum? Da der Logarithmus eine Zeit bedeutet, kann man die Frage folgendermaßen formulieren:
Die Wasserlinse wuchs in $\log_2 10 \approx 3{,}32$ Tagen auf das 10-fache, $\log_2 2 = 1$ Tag früher war er nur die Hälfte, also das 5-fache der ursprünglichen Größe, weil der Wachstumsfaktor 2 ist.
4. *Erkläre den folgenden Zusammenhang:*
$\log_2 15 - \log_2 5 = \log_2 3 \approx 1{,}58.$
So kann man das zweite Logarithmusgesetz formulieren:

(L2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$ $wenn\ a, b, c > 0\ und\ a \neq 1.$

Beweis!

Wenn man die Tabelle weiterhin studiert, kann man entdecken, dass:
$2 \cdot \log_2 2 = \log_2 4 = 2$; $2 \cdot \log_2 3 = \log_2 9 \approx 3{,}17$; $2 \cdot \log_2 5 = \log_2 25 \approx 4{,}64.$
Wie kann man das erklären:
Da $\log_2 2 = 1$ die Zeit bedeutet, die die Wasserlinse braucht, ihre Fläche verdoppeln zu können, kann sie natürlich in der doppelten Zeit ihre Fläche vervierfachen.
5. *Erkläre in Worten die anderen zwei Zusammenhänge!*
Aus dem oberen Gedankengang und aus (L1) kommt der nächste Zusammenhang:
$2 \cdot \log_2 5 = \log_2 5 + \log_2 5 = \log_2(5 \cdot 5) = \log_2 5^2.$
6. *Erkläre mathematisch den nächsten Zusammenhang:* $2 \cdot \log_2 3 = \log_2 9 \approx 3{,}17$*!*
Das kann man verallgemeinern, so entsteht das dritte Logarithmusgesetz:

(L3) $n \cdot \log_a b = \log_a b^n,\ wenn\ a, b > 0\ und\ a \neq 1.$

Beweis!

Mit Absicht wurden die Werte von *n* nicht nur auf positive, ganze, o.ä. Werte abgegrenzt, weil (L3) für alle $n \in \boldsymbol{R}$ Werte definierbar ist. Wir werden aber als (L4) einen Spezialfall besprechen:

Wenn man überlegt, kann man entdecken, dass die Umkehrrechenart der Multiplikation die Division ist und der Kehrrechenart des Potenzierens das Wurzelziehen ist, daraus folgt:

(L4) $\frac{1}{n} \cdot \log_a b = \log_a \sqrt[n]{b},\ wenn\ a, b > 0, a \neq 1\ und\ n \in N^+, n \neq 1$

Beweis!

Logarithmusgesetze zusammengefasst:

(L1) $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)\ \ wenn\ a, b, c > 0\ und\ a \neq 1$

(L2) $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)\ wenn\ a, b, c > 0\ und\ a \neq 1$

(L3) $n \cdot \log_a b = \log_a b^n,\ wenn\ a, b > 0\ und\ a \neq 1$

(L4) $\frac{1}{n} \cdot \log_a b = \log_a \sqrt[n]{b},\ wenn\ a, b > 0, a \neq 1\ und\ n \in N^+, n \neq 1.$

Als Hausaufgabe haben die Schüler ähnliche Probleme bekommen, wie in der Stunde. Es war sehr wichtig, dass sie die Werte nicht nur bestimmen müssen, sondern auch wissen müssen, was sie schreiben. Deshalb haben sie immer die Instruktion bekommen: „*Erkläre ... !*“:

Hausaufgaben

1. Suche aus der Tabelle die folgenden Werte aus, dann erkläre 3 Zusammenhänge in Worten. Die nicht in der Tabelle enthalten sind, versuche sie herauszufinden!

$\log_2 1 =$	$\log_2 4 =$	$\log_2 8 =$	$\log_2 32 =$
$\log_2 2 =$	$\log_2 5 =$	$\log_2 10 =$	$\log_2 40 =$
$\log_2 3 =$	$\log_2 6 =$	$\log_2 12 =$	$\log_2 48 =$
$\log_2 \frac{1}{2} =$	$\log_2 \frac{1}{4} =$	$\log_2 \frac{1}{16} =$	$\log_2 \frac{1}{64} =$

2. *Erkläre den folgenden Zusammenhang:*

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15 = 3{,}91.$$

3. *Erkläre den folgenden Zusammenhang:*

$$\log_2 20 - \log_2 4 = \log_2 5 = 2{,}32$$

4. *Erkläre in Worten und mathematisch die nächsten Zusammenhänge:*

$$2 \cdot \log_2 7 = \log_2 49 = 5{,}62,$$
$$4 \cdot \log_2 3 = \log_2 3^4 = 6{,}34!$$

In der nächsten Stunde konnten wir das letzte Logarithmusgesetz, die Basiswechsel besprechen. Hier benutzte ich nicht mehr das Wasserlinsenbeispiel, weil ich so beurteilt habe, dass das Beispiel hier eher zu Missverständnissen führt als helfen würde. Die Schüler haben hier auch eine Unterstützung bekommen. Wir haben auch den Taschenrechnergebrauch geübt.

Basiswechsel:
In der vorigen Stunde haben wir 4 Logarithmusgesetze kennengelernt. Aber bis jetzt konnten wir zu den Berechnungen keinen Taschenrechner benutzen, weil man mit den meisten höchstens die Logarithmen mit zwei Basen verwenden kann: $\log_{10} b \leftrightarrow log$ und $\log_e b \leftrightarrow \ln$ $(b > 0)$. Bei den neuesten Modellen kann man schon Logarithmen mit beliebigen Basen berechnen, für die komplexeren Aufgaben ist es doch hilfreich, den Basiswechsel zu erlernen.
Wenn man z.B. eine Exponentialfunktion mit der Basis 2 in eine andere mit der Basis 10 umschreiben möchte muss man folgendes bedenken:

$$2^t = 10^{c \cdot t} = (10^c)^t.$$

Aus diesem Zusammenhang kommt, dass $2 = 10^c \Rightarrow \log_{10} 2 = c$ $(\approx 0{,}3010)$.

$$\Downarrow$$

$$2 = 10^{\log_{10} 2}$$

Wenn jetzt $2^t = 27$ ist, dann ist $2^t = \left(10^{\log_{10} 2}\right)^t = \underline{10^{(\log_{10} 2) \cdot t} = 27}$.
Und wenn man jetzt den Zehnerlogarithmus beider Seiten nimmt, dann gilt:

$$(\log_{10} 2) \cdot t = \log_{10} 27$$

$$t = \frac{\log_{10} 27}{\log_{10} 2}$$

Hier haben wir auf zwei neue Zusammenhänge gestoßen, nämlich:

(L5) $\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}, wenn\ a, b, k > 0\ und\ a, k \neq 1.$

Beweis!

In der zweiten Hälfte der Stunde haben die Schüler eine Reihe von einfachen Übungsaufgaben bekommen, die sie in Einzel- und/oder in Paararbeit lösen mussten. Die nächste Stunde verging auch mit der Übung schon komplexerer Aufgaben. Nach der Lösung der Aufgaben haben wir die Ergebnisse besprochen oder die Schüler haben sie an der Tafel präsentiert.

3.5.4. Logarithmische Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt, ähnlich wie bei den exponentiellen Gleichungen, wurde der Stoffverteilungsplan an den Plan der Schule – und so an den ungarischen Nationallehrplan angepasst. So haben wir uns mit diesem Themenbereich sechseinhalb Stunden lang beschäftigt. Die Schüler haben die Aufgaben teils aus ihrem Lehrbuch, teils aus den zwei Aufgabensammlungen bekommen. Die Beispielaufgaben haben wir gemeinsam besprochen, die weiteren Übungen haben sie in erster Linie in Paararbeit geleistet.

24.	Komplexe Aufgaben für die Logarithmusgesetze, einfache Logarithmusgleichungen
25.	Logarithmusgleichungen mit Logarithmusgesetzen
26.	Logarithmusgleichungen mit Verschachtelungen, quadratische logarithmische Gleichungen
27.	Logarithmus im Exponenten, Logarithmus im Exponenten, gemischte exponentielle und logarithmische Gleichungen
28.	Gleichungen mit neuen Basen
29.	Logarithmische Ungleichungen
30.	Logarithmische Gleichungssysteme

Ich möchte hier das Thema „Logarithmische Ungleichungen" hervorheben. In ein paar Fällen wäre es sehr praktisch, die Gleichungen, Gleichungssysteme mit Hilfe von den Funktionsgraphen darzustellen, wie es manchmal in der Grundschule, bzw. in der neunten Klasse gezeigt wird, wenn man über die verschiedenen Lösungsmethoden der Gleichungen spricht. Hier aber, in einer normalen Gymnasialklasse wird oft auf die algebraische Methode Wert gelegt. Bei den Ungleichungen aber ist der Fall anders. Bei den einführenden Aufgaben, und auch bei der Lösung komplizierter Aufgaben ist es wichtig, die Lösungsmenge auch mit der Funktion veranschaulichen zu können. Wir haben dazu anfangs GeoGebra verwendet um den Graphen skizzieren zu können. Anhand der Skizze kann man die Lösungsmenge der Ungleichung einfach angeben. Dabei spielt das Verstehen eine größere Rolle als die exakte Darstellung. Hier wird gezeigt, wie wir die Ungleichungen eingeführt haben. Dazu, wie immer, haben die Schüler das Hilfsblatt ausgedruckt bekommen.

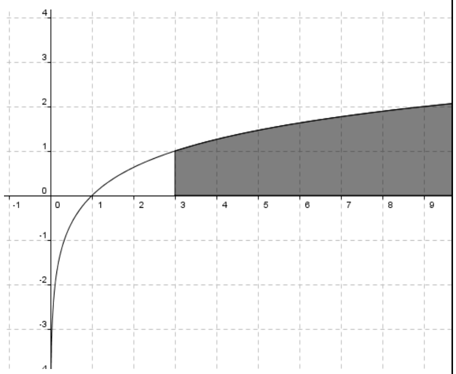
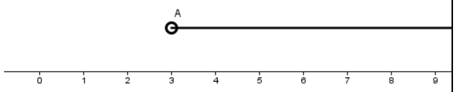
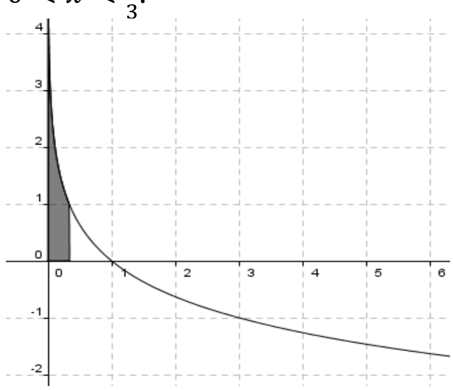
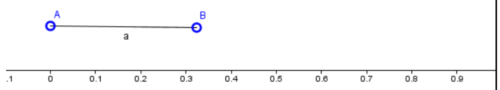
Einfache logarithmische Ungleichungen

Bemerkung: Bei den logarithmischen Ungleichungen gelten die Regeln wie bei einer linearen, also man darf alle äquivalenten Umformungen durchgeführt, **ABER** wenn man mit einer **negativen** Zahl multipliziert oder durch eine **negative** Zahl teilt, **kehrt die Richtung der Relation um**.

Hier muss man aber auch auf die Basis achten, nämlich bei einer Basis a, wenn $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$ ist, **bleibt** die Relation (weil die Funktion in diesem Fall streng monoton steigend ist), wenn für a jedoch $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$ gilt, **kehrt** die Relation **um** (weil die Funktion in diesem Fall streng monoton fallend ist).

Beispiel:

Wenn a > 1 ist: $\log_3 x > 1$ $\log_3 x > \log_3 3$, da $\log_3 x$ str. mon. steigend ist, bleibt die Relation, also:	Wenn 0 < a < 1 ist: $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$ $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, da $\log_{\frac{1}{3}} x$ str. mon. fallend ist, kehrt die Relation um, also:

$x > 3.$  Auf der Zahlengeraden: 	$0 < x < \frac{1}{3}.$  Auf der Zahlengeraden: 

Mit Hilfe der Abbildungen kann man schon besser sehen, warum eben die Relation im ersten Fall bleibt, sich im zweiten umkehrt. So müssen die Schüler die „unverständliche Regel“ nicht einpauken, sondern sie können sie sehen und verstehen.

3.5.5. Logarithmische Textaufgaben

Dieses Thema war schon in der Einführung berührt worden. Dort haben wir die neuen Begriffe –Exponential- und Logarithmusfunktionen– mit Hilfe von einfachen Textaufgaben eingeführt. Am Ende des Themas kehrten wir zu den Textaufgaben zurück. In diesem Abschnitt werden drei Beispiele gezeigt, wie wir in der Stunde GeoGebra zur Darstellung der Vorgänge verwendet haben. Als am Anfang nur die Exponentialfunktion bekannt war, und die Frage umgekehrt aufgestellt wurde, als *nach wie viel Zeit* ein *Volumen so* und *so groß ist*, konnten die Schüler das ohne die Kenntnis der Logarithmusfunktion natürlich nicht beantworten. Mit Hilfe des Funktionsgraphen aber konnten wir das Ergebnis schätzen. Das Problem hier war natürlich, dass die Schüler die Funktion nicht darstellen konnten. Entweder, weil die Basis oder der Exponent zu groß/klein war, oder sie haben die Frage, das Problem überhaupt nicht verstanden. Im ersten Fall konnte den Schülern so geholfen werden, dass wir die Funktion gemeinsam dargestellt haben. Im zweiten Fall versuchte ich den betroffenen Schülern das Problem zu erklären, aber es ist nicht immer gelungen. Dieser Themenbereich war für die Schüler am schwersten. Aber da wir dafür viel Zeit anwenden konnten, waren hier die Ergebnisse nicht so schlecht, wie früher. Sehen wir hier drei Beispiele aus dem Themenkreis logarithmischen Textaufgaben!

Beispiel 1:
Die Erdbevölkerung nimmt jährlich um 2,7% zu. Nach wie vielen Jahren hat sie sich verdoppelt?

In dieser Aufgabe war es für die Schüler schwer, dass eine Angabe „fehlte". Mehrere Schüler haben gefragt, „Wie viele Menschen lebten auf der Erde?" Nur eine Schülerin wusste gleich, dass die Lösung vom Anfangswert unabhängig ist. Es wurde wieder darauf hingewiesen, dass die Bedeutung des Wortes „Logarithmus" „Verhältniszahl" (logos-Verhältnis; arithmós-Zahl) bedeutet. Nach dieser Instruktion konnten die Schüler bis auf einen die entsprechende Gleichung aufschreiben und lösen. Danach mussten die Schüler die Probe durchführen.

Beispiel 2:
Herr Zweifel überlegt, was er mit 20 000 € anfangen soll. a) Bei welchem Zinssatz würde er in 8 Jahren 50% mehr Geld besitzen? b) Welchen Betrag müsste er heute bei einem Zinssatz von 3,5% anlegen, um in 10 Jahren 20 000 € ausgezahlt zu bekommen? c) In wie vielen Jahren wächst das Geld bei einem Zinssatz von 4% mindestens auf das Doppelte des ursprünglichen Wertes?

Bei dieser Aufgabe mussten die Schüler in den Teilaufgaben a)-c) verschiedene Parameter des Zusammenhangs $B(n) = B(0) \cdot (1 + p)^n$ ausdrücken und berechnen. Im Teil a) hätte man p ausrechnen müssen. Drei Schüler hatten schon am Anfang ein Problem damit, den Satz richtig zu verstehen. „50% mehr Geld" haben sie so verstanden, dass Herr Zweifel 10 000 € -statt 30 000 € - Geld besitzen wird. Danach konnten sie die Aufgabe nicht weiterführen. Fünf Schüler haben nur $q = 1 + p$ angegeben, also sie haben auf die Frage nicht geantwortet. Ein Schüler hat sich verrechnet, der Rest hat diesen Teil richtig gelöst. Im Teil b) war $B(0)$ die Frage. Zwei Schüler haben für $1 + p = 3{,}5$ gewählt. So haben sie natürlich auf ein falsches Ergebnis gekommen. Die anderen haben den Teil richtig gelöst. Im letzten Teil musste man den Logarithmus benutzten. Die Frage war ähnlich, wie im ersten Beispiel. Hier war aber auch der Grundwert angegeben. Alle konnten den Teil –anhand des 1. Beispiels lösen. Hier war interessant, dass alle anfangs mit dem Grundwert 20 000 € und mit dem Endwert 40 000 € gerechnet haben. Für meine Schüler war es weiterhin einfacher mit „konkreten" Werten zu arbeiten als mit Verhältnissen.

Beispiel 3:
Eine Pilzkultur wächst pro Tag um 20%. Die Anfangsmasse beträgt 25 g.

a) Bestimme die Pilzmasse für die nächsten 6 Tage und für die 5 Tage, bevor die 25 g erreicht wurden. Fertige eine Tabelle dazu!
b) Gib die Funktionsgleichung des Wachstums an und stelle den Graphen der Funktion im entsprechend skalierten Koordinatensystem!
c) In der Versuchsanordnung ist nur für 110 g Platz. Berechne mit Hilfe der Wachstumsformel, nach wie vielen Tagen der Versuch beendet ist.

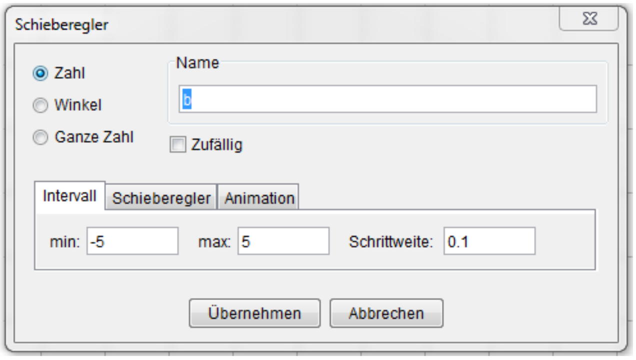
Die Aufgabe diente schon zum Teil als Wiederholung der exponentiellen Vorgänge. In dieser Aufgabe im Teil a) wurde von allen Schülern $q = 1 + p = 1{,}2$ genommen. Die positive Richtung haben die Schüler richtig ausgerechnet, mit der negativen Richtung hatten fünf Schüler Probleme. Anhand der richtigen Tabelle konnten die Schüler das Koordinatensystem zeichnen. Es war interessant, dass mehr als die Hälfte der Schüler das Koordinatensystem folgendermaßen skaliert haben: auf der x-Achse bedeutet jedes Kästchen 1 Tag, auf der y-Achse 1 Kästchen 1 g. So konnten diese Schüler einen relativ kleinen Teil der Funktion darstellen. Die anderen haben die x-Achse ebenso skaliert, die y-Achse jedoch mit 10 g pro Kästchen. Diese Darstellung hat auch den Vorteil, das Ergebnis des Teiles c) schätzen zu können. Im Teil c) musste man den Logarithmus benutzen. Die Rechnung war nicht schwer, nur zwei Schüler haben es falsch gerechnet.

3.6. GeoGebra im Unterricht

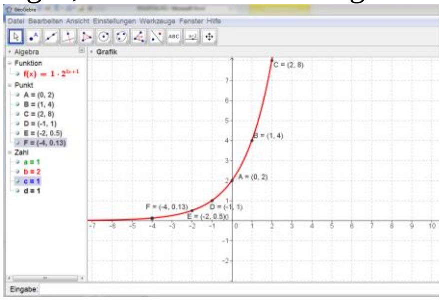
Während meiner Arbeit wurde schon mehrmals darauf hingewiesen, dass ich die Integration der realistischen Methode, mit dem ungarischen Nationallehrplans mit dem örtlichen Lehrplan im Gymnasium für sehr wichtig halte. Aber dabei legte ich immer einen großen Wert darauf, in den Stunden die Errungenschaften der modernen Technik verwenden zu können. So haben wir uns z.B. bei der Einführung einen Videofilm über die exponentiellen Vorgänge angesehen, oder wir haben in einigen Stunden online und offline, teils interaktive Aufgaben gelöst. Zur Zeit des Experiments war keine interaktive Tafel im Zimmer montiert, aber einen Beamer mit Computer und Lautsprecher hatten wir schon. Ich möchte hier kurz zusammenfassen, wie wir in den Stunden in erster Linie GeoGebra benutzt haben.

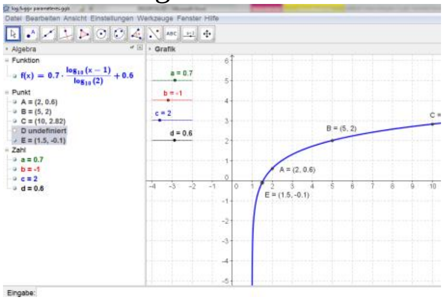
a) *Funktionen*
Alles, was wir in diesen Stunden gelernt haben, hängt in direkter oder indirekter Weise mit den Funktionen zusammen. Schon bei der Einführung des Themas haben sich die Schüler mit der Exponentialfunktion beschäftigt, wo sie die entsprechenden Werte – sowohl an der x-Achse als auch an der y-Achse ablesen mussten. Hier

haben sie noch die Funktion von mir dargestellt bekommen. Als wir mit der gemeinsamen Darstellung der Funktionen angefangen haben, hatten auch die Schüler die Möglichkeit, am Lehrertisch mit dem Computer zu arbeiten. Leider hatten wir die nicht Möglichkeit, in einen Computerraum zu gehen. Aber mehr als die Hälfte der Schüler haben die Software zu Hause heruntergeladen und damit gearbeitet.
Der eine große Vorteil der Software ist, dass die Schüler nicht nur das Tafelbild sehen. Da die Abbildung mit der Hand nie hundert prozentig genau sein kann, lesen sie die Punkte meinen Erfahrungen nach nicht immer genau ab. So entsteht im Heft manchmal ein falscher Graph. Mit der Software kann man die Abbildung –wenn es nötig ist – vergrößern oder verkleinern, damit die Schüler die Einzelheiten oder die Funktion selbst sehen können. Natürlich kann man hier die Transformationen auch Schritt für Schritt durchführen und die Ergebnisse mit verschiedenen Farben und mit einer anderen Schriftart darstellen. Das geht natürlich auch an der Tafel mit den oben genannten Schwierigkeiten.
Hier kommt die zweite Anwendungsmöglichkeit von GeoGebra in Frage. Das Programm kann die Endfunktion nicht nur schrittweise darstellen, sondern auch dynamisch. Man kann die verschiedenen Parameter der Funktion –den Faktor der Potenz, die Basis, den Exponenten– vordefinieren. Je nachdem, wie viele Werte man parametrisieren möchte, kann man Schieberegler definieren. Während der Definition kann man den Namen, das Werteintervall, die Schrittweite, den Typ, die Länge, die Position u.a. angeben. Später kann man alle Werte auch verändern.



Wozu dient der Schieberegler? Man kann die Parameterwerte mit der Hand einstellen oder man kann um eine Animation bitten. In diesem Fall „bewegt sich“ die Funktion von selbst und die Schüler können dabei die Schritte der Transformation gut sehen. Ich habe diese Möglichkeit genutzt und es hat den Schülern sehr gut gefallen. Per E-Mail habe ich ihnen die Datei geschickt. So konnten sie sie zu Hause benutzen. Leider kann man die Animation in gedruckter Form nicht zeigen, aber zwei Einstellungen werden hier dargestellt.





b) *Ungleichungen*
Wenn man Ungleichungen graphisch lösen oder darstellen möchte, kann man unter verschiedenen Möglichkeiten wählen. Entweder werden beide Seiten als Funktionen definiert und dargestellt – eventuell nach einigen Umformungen – oder man kann die Ungleichung auf Null reduzieren und die möglichen Nullstellen untersuchen. Während der Lösung exponentieller und logarithmischer Ungleichungen haben wir beide Möglichkeiten genutzt, abhängig davon wie wir während des Lösungsvorgangs die Effektivität der Methoden beurteilt haben. GeoGebra hat hier wieder viel geholfen. Man konnte einerseits die Schnittpunkte (Nullstellen) sehen, andererseits das Monotonieverhalten der Funktion(en). So konnte man die Lösungsmenge einfacher angeben.

c) *Exponentielle Textaufgaben*
Wie bei den Ungleichungen aber auch bei den Gleichungen kann man für die Darstellung, für die Lösung die Funktionsgraphen sehr gut verwenden. In dem Experiment spielten die Graphen in erster Linie bei den exponentiellen Textaufgaben eine wichtige Rolle, hauptsächlich bei den „umgekehrten" Fragen, die die Schüler ohne die Kenntnis des Logarithmus nur in wenigen Fällen beantworten konnten oder hätten beantworten können. Bei diesen Beispielen hatten die Schüler die entsprechenden Graphen bekommen, weil die Einteilungen der Achsen nicht so einfach waren. Es wurde natürlich auch nicht nach den exakten Werten gefragt, sie mussten nur die Näherungswerte ablesen.

4. Die Tests

Vor dem entwickelnden Unterrichtsexperiment haben die Schüler einen Vortest geschrieben, in dem ihre Vorkenntnisse über das Potenzieren, Wurzelziehen und über die Grundkenntnisse der Funktionen getestet wurden. Der Vortest hat gezeigt, dass sie nur über die Grundlagen verfügen, die abstrakteren Kenntnisse sind entweder sehr lückenhaft oder sie fehlen völlig.

Während der 33 Stunden, die etwa ein Viertel der jährlichen Stundenzahl von den 148 (38 Wochen, wöchentlich 4 Stunden) bedeuteten, wollte ich die Schüler permanent messen. Diese Kleintests und Arbeiten zeigten für mich einerseits, wie die Schüler den aktuellen Lehrstoff verstanden haben und verwenden konnten, andererseits waren diese Tests meiner Ansicht nach eine Hilfe für die Schüler. Sie mussten auf einmal nur den Stoff von 6 – 8 Stunden erlernen und einüben. Bei den Schülern, die relativ große Probleme mit Mathematik und überhaupt mit der Abstraktion hatten, erleichterte diese Methode den Lernprozess.

Nach der kurzen Wiederholung haben die Schüler einen Kleintest geschrieben. Einige Kenntnisse konnten wiederholt, vertieft werden. Das Ergebnis des Tests war 3,27, 0,8 höher als das des Vortest.

4.1.Test der Einführung der exponentiellen Vorgänge

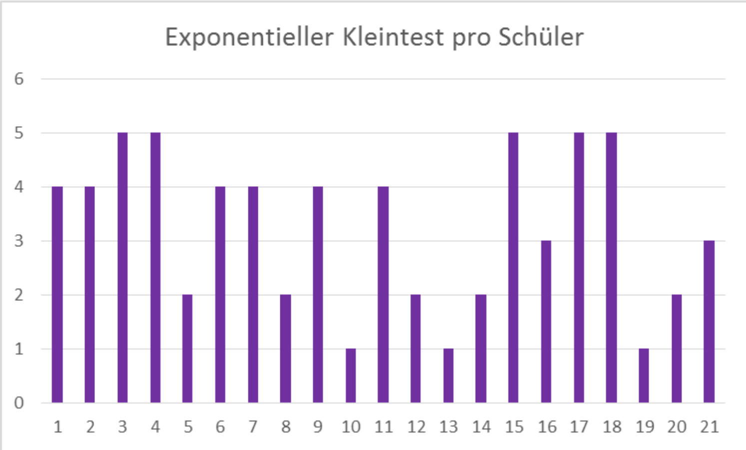
Nach der Wiederholung haben wir die exponentiellen Vorgänge kennengelernt und mit realistischen Aufgaben die rationalen und irrationalen Exponenten eingeführt. Nachdem auch die exponentielle Funktion gezeigt und eingeübt wurde, haben die Schüler einen Kleintest geschrieben. Das Ergebnis des Tests war ähnlich wie das der Wiederholung, was zeigt, dass die realitätsnahe Einführung der Begriffe gut funktioniert hat. Hier wurden nur die rechnerischen Techniken abgefragt: Arbeit mit rationalen Exponenten, n-te Wurzel, die Exponentialfunktion. Die Schüler haben 30 Minuten Zeit bekommen. Das nummerische Ergebnis dieses Tests war 3,24.

Gruppe A	**Gruppe B**
1. Lege fest, ob die Gleichungen bestehen! Begründe! (2+2 Punkte) a) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a$ b) $q^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{\frac{2}{3}} \cdot q^{-\frac{3}{2}} = q^{\frac{16}{9}}$ 2. Schreibe sie mit Hilfe von Potenzen auf! (5×1 Punkte) $.\sqrt[4]{x^3}.....\sqrt[5]{x^7}.....\sqrt[2k]{m^6}...\sqrt[4]{rs^3}.....\sqrt[5]{x^3y^4}$	1. Lege fest, ob die Gleichungen bestehen! Begründe! (2+2 Punkte) a) $x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} = x^2$ b) $b^{\frac{1}{8}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b}}$ 2. Schreibe sie mit Hilfe von Potenzen auf! (5×1 Punkte) $\sqrt[3]{a}....\sqrt[5]{x^7}.....\sqrt[n]{x^r}.....\sqrt[3]{p^2q}......\sqrt[5]{x^3y^4}$

3. Führe die Operationen durch! (5 Punkte) $$\frac{\left(p^{\frac{1}{2}} \cdot p^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{p^3}} =$$	3. Führe die Operationen durch! (5 Punkte) $$\frac{\left(m^{-\frac{1}{2}} \cdot m^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[3]{m^2} \cdot m^{\frac{1}{3}}} =$$
4. Stelle die Funktion dar und führe die Diskussion durch! (6 Punkte) $f(x) = 2^{x+1} - 2$	4. Stelle die Funktion dar und führe die Diskussion durch! (6 Punkte) $f(x) = 3^{x-2} - 1$

Die Aufgaben der zwei Gruppen waren ähnlich, zwischen den Ergebnissen der Gruppen gab es keinen signifikanten Unterschied. Im Folgenden wird auf die typischen Lösungen der Aufgaben hingewiesen, die detaillierte Auswertung mit Schülerlösungen ist im Anhang F zu finden. In den ersten Drei Aufgaben kamen wieder die typischen Fehler vor: die Potenzgesetze waren teilweise oder völlig falsch verwendet. Großes Problem bedeutet für die Schüler weiterhin das richtige Klammerauflösen (vorwiegend in den Aufgaben 2 und 3). Die ersten zwei Aufgaben konnten 15 bzw. 12, die dritte Aufgabe 4 Schüler völlig richtig lösen. Die Funktionen konnten 13 Schüler richtig darstellen und 9 davon richtig diskutieren. Zwei haben Fehler in der Diskussion begangen, zwei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen. An den Lösungen konnte man sehen, dass viele Schüler schon selbstsicherer mit den Funktionen umgehen können, bei ihnen hat sich der Funktionsbegriff entwickelt.

Nachdem der Test in der nächsten Stunde zurückgegeben wurde, haben wir die Aufgaben gründlich besprochen, die typischen Fehler thematisiert. Mehrere Schüler waren der Meinung, dass sie mit ein bisschen mehr Aufmerksamkeit ein besseres Ergebnis hätten erreichen können. Die Verteilung der Noten war pro Schüler die Folgende:



4.2. Großer Test der exponentiellen Vorgänge: Gleichungen, Ungleichungen, Textaufgaben

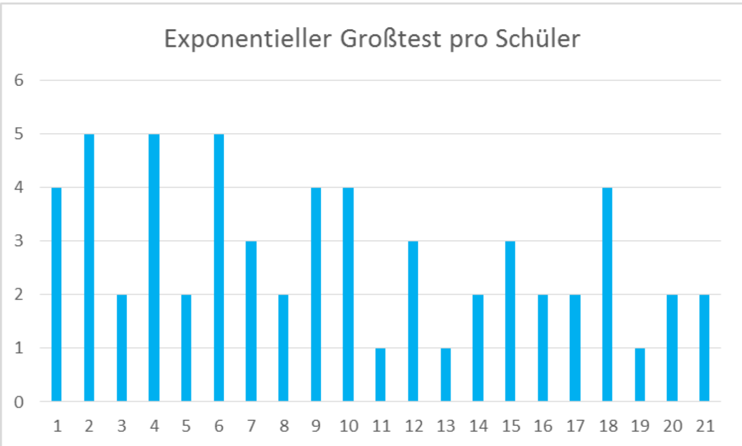
Die komplexeren mathematischen Aufgaben (Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme, Textaufgaben) wurden auch getestet. Diese Arbeit war schon zusammengesetzt und enthielt auch eine Textaufgabe. Die Schüler konnten die Grundlagen der exponentiellen Funktion relativ gut verstehen und wiedergeben. Bei diesen schwierigeren Aufgaben hatten sie aber größere Probleme. Obwohl sie hier wieder besser waren, als im vorigen Jahr und noch besser als im Vortest, war jedoch der Durchschnitt dieser Arbeit 2,81.

Gruppe A	**Gruppe B**
1. Löse die folgenden Gleichungen, Ungleichung, Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlen:	1. Löse die folgenden Gleichungen, Ungleichung, Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlen :
a) $9^x = \frac{1}{729}$ (4 P)	a) $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343}$ (4 P)
b) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \frac{40}{3}$ (5 P)	b) $9^{x-1} + 9^x = 90$ (5 P)
c) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$ (6 P)	c) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ (6 P)
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < 8$ (5 P)	d) $2^{x+2} > \frac{1}{8}$ (5 P)
e) (1) $4^x - 4 \cdot 3^y = -8$ (2) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 3^y = 18$ (7 P)	e) (1) $2 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^y = -16$ (2) $6 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^y = 36$ (7 P)
2. Vor 15 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes 35 000	2. Ein radioaktiver Stoff verliert in jeder Minute 3 Prozent seiner

m^3. Wie groß müsste der Holzbestand heute sein, wenn man mit einem jährlichen Zuwachs von 3,2% rechnet. (5 P)	Masse durch Strahlung. Zu Beginn waren 100 Milligramm vorhanden. Wie viele Milligramm sind nach 20 Minuten noch vorhanden? (5 P)

Die Ausführliche Analyse ist im Anhang G zu finden, hier wird auf die typischen Lösungen und Fehler hingewiesen. In der ersten Aufgabe haben 5 bis 7 Schüler die Teile richtig gelöst, 1-2 die Aufgabe nicht angefangen. Typische Fehler waren zum Teil die falsch verwendeten Potenzgesetzte bzw. einfache Rechnungsfehler (Addition, Multiplikation, Division wurden falsch durchgeführt; die Gleichungen wurden fasch umgeformt – z.B. nur die eine Seite wurde multipliziert). Bei der Ungleichung wurde die ikonische Repräsentation (der Funktionsgraph) bei keinem Schüler verwendet, obwohl diese Methode in den Stunden oft benutzt wurde. Die Textaufgabe konnten insgesamt 6 Schüler richtig lösen: 3 davon mit der entsprechenden Formel, 2 Schritt für Schritt und 1 Schüler hat sicherheitshalber beide Methoden verwendet. Vier Schüler haben sich mit dem Problem nicht beschäftigt. Typischen Fehler waren, dass die Schüler das Wachstumsfaktor nicht richtig angeben konnten (in der Gruppe A statt 1,032 haben einige 1,32 sogar 3,2 geschrieben, in der Gruppe B haben die Schüler das prozentuelle Wachstum nicht aus 1 subtrahiert, sondern dazu addiert – auch mal teilweise falsch.)

Die Verteilung der Noten war pro Schüler die Folgende:



4.3.Logarithmus Kleintest

Den Begriff des Logarithmus haben wir in ähnlicher Weise eingeführt wie bei den exponentiellen Vorgängen. Die Beispiele und Probleme, die den Kindern schon von den exponentiellen Aufgaben gekannten waren, wurden umgekehrt formuliert. Deshalb haben die Schüler den Begriff Logarithmus fast für „selbstverständlich“ gehalten. Die Schüler haben den Übergang zwischen der exponentiellen und logarithmischen Funktion viel harmloser erlebt, wie das laut meiner vorigen Erfahrungen vorgekommen ist. Das Ergebnis des Tests wurde besser als der Durchschnitt der exponentiellen Klassenarbeit, aber es konnte das Niveau des exponentiellen Kleintests nicht erreichen. Das Ergebnis war 3,0.

Gruppe A

1. Bringe in eine einfachere Form! (3 Punkte)

$$2^{\log_2 5} \quad 7^{\log_7 3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 7}$$

2. Schreibe in Logarithmusform die folgenden Identitäten um! (3 Punkte)

$$2^3 = 8 \qquad 4^{\frac{1}{2}} = 2 \qquad 81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{27}$$

3. Gib ohne Taschenrechner die genauen Werte an! (3 Punkte)

$$\log_4 16 = \qquad \log_2 32 = \qquad \log_2 \frac{1}{8} =$$

4. Gib ohne Taschenrechner die genauen Werte an! (6 Punkte)

$$3^{1+\log_3 5} \qquad 5^{2+\log_5 5} \qquad 36^{1-\log_{36} 3}$$

5. Bestimme den genauen Wert des Terms mit Hilfe der Potenzgesetzte! (5 Punkte)

$$2lg2 + 3lg5 + lg18 - 2lg3$$

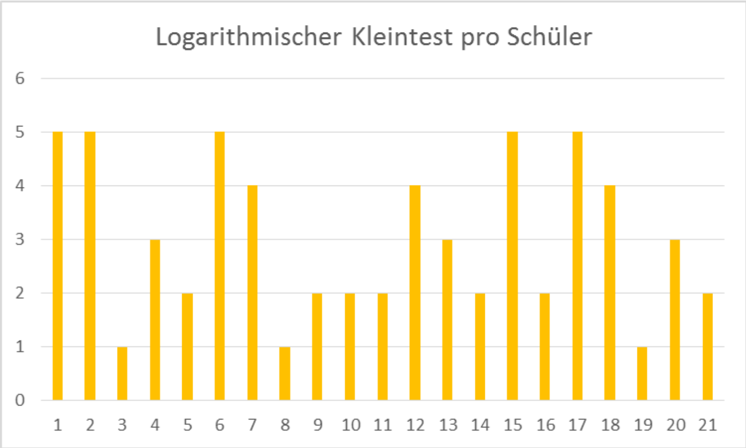
6. Stelle die folgende Funktion dar und charakterisiere sie! (6 Punkte)

$$f(x) = \log_2(x+2) - 1$$

Die ersten drei Aufgaben beschäftigten sich mit der Definition des Logarithmus. Die Mehrheit der Schüler haben die Aufgaben richtig gelöst (14; 15; bzw. 9), entweder mit einem kleinen Rechenfehler oder sie haben die Rechnung nicht zu Ende geführt. In der vierten Aufgabe mussten die Schüler die Definition des Logarithmus, die Logarithmusgesetze und die Potenzgesetzte verwenden. Acht Schüler konnten alle drei Aufgaben richtig lösen, zwei weitere haben die Aufgabe richtig angefangen. Acht Kinder haben die Aufgabe mathematisch falsch angefangen, z.B. die Potenzgesetze konnten sie nicht richtig benutzten. Zwei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen. In der vierten Aufgabe konnten neun Schüler das Richtige Ergebnis erhalten obwohl zwei davon einen logischen Fehler begangen haben. Vier Schüler haben mathematisch richtig gerechnet, sie haben sich aber verrechnet, drei haben die Aufgabe nicht angefangen. Die letzte Aufgabe konnten lediglich nur drei Schüler richtig darstellen und analysieren. 6 Kinder haben nur den Definitionsbereich falsch angegeben, ein Schüler hat nur den Graphen richtig angegeben. Bei den anderen

Schülern gab es verschiedene weitere Fehler: falsche Verschiebung(en), andere Funktionsgraphen (Gerade, Exponentialfunktion) oder ein Schüler hat die Asymptote nicht beachtet. Die Ausführliche Analyse ist im Anhang H zu finden.

Die Verteilung der Noten war pro Schüler die Folgende:



4.4. Zusammenfassende Klassenarbeit

Letztendlich haben die Schüler eine komplexe Klassenarbeit geschrieben, die alle wichtigen Themenbereiche der vorigen 33 Stunden enthalten hat. 60 Minuten standen ihnen zur Verfügung. Die definitionsartigen Fragen und die Funktionen wurden schon in den Kleintests abgefragt. In dieser Klassenarbeit kamen die schwierigeren Aufgaben, wie Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme bzw. eine komplexere Textaufgabe vor. Die vorherigen Kleintests umfassten in erster Linie die Erfordernisse des ersten Teiles des ungarischen Abiturs mittleren Niveaus. Dieser Teil hat ein Gewicht von 30% im Mathematikabitur. Die Aufgaben dieses Großtests gehören in erster Linie zum zweiten Teil des Abiturs, die 70% des Endergebnisses bedeuten. Der Durchschnitt dieser schwierigen Arbeit wurde 3,19.

Gruppe A

1. Löse die Gleichungen in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

a) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 896$ (4 P)

b) $25^x - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$ (5 P)

c) $2\lg 5 + \lg x = 1 - \lg 2$ (5 P)

d) $\lg (x - 4) + \lg (x + 3) = \lg (5x + 4)$ (6 P)

e) $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$ (7 P)

2. Löse die Ungleichungen in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < 8$ (5 P)

b) $\log_5(x+7) > -1$ (6 P)

3. Löse das Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

$\begin{cases} \lg x + 5\lg y = 7 \\ 3\lg x - 2\lg y = 4 \end{cases}$ (6 P)

4. Herr Zweifel überlegt, was er mit 30 000 € anfangen soll.

a) Bei welchem Zinssatz würde er in 6 Jahren 40% mehr Geld besitzen? (3 P)

b) Welchen Betrag müsste er heute bei einem Zinssatz von 4,5% anlegen, um in 15 Jahren 30 000 € ausgezahlt zu bekommen? (3 P)

c) In wie vielen Jahren wächst das Geld bei einem Zinssatz von 5% mindestens auf das Dreifache des ursprünglichen Wertes? (3 P)

Gruppe **B**

1. Löse die Gleichungen in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

a) $7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$ (4 P)

b) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ (5 P)

c) lg (x – 4) + lg (x + 3) = lg (5x + 4) (5 P)

d) $\lg 5x + \lg(x-1) = 1$ (6 P)

e) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ (7 P)

2. Löse die Ungleichungen in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

a) $(2)^{x+3} > 16$ (5 P)

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x+7) < -1$ (6 P)

3. Löse das Gleichungssystem in der Menge der reellen Zahlen! Gib die Bedingungen an, wo es nötig ist!

$\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 2^y = 11 \\ 5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3 \end{cases}$ (6 P)

4. Frau Teuro überlegt, was er mit 50 000 € anfangen soll.

a) Bei welchem Zinssatz würde er in 10 Jahren 80% mehr Geld besitzen? (3 P)

b) Welchen Betrag müsste er heute bei einem Zinssatz von 5,5% anlegen, um in 20 Jahren 50 000 € ausgezahlt zu bekommen? (3 P)

c) In wie vielen Jahren wächst das Geld bei einem Zinssatz von 6% mindestens auf das Vierfache des ursprünglichen Wertes? (3 P)

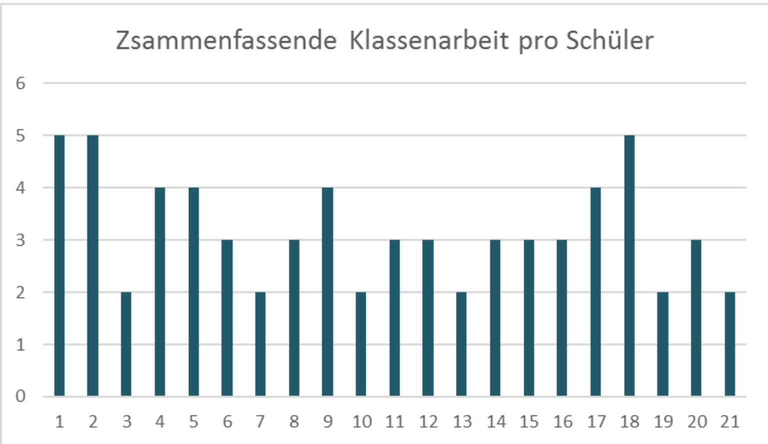
Die ersten zwei Aufgaben waren exponentielle Gleichungen zu lösen. Je sieben Schüler haben die Aufgaben (völlig) richtig gelöst. Im Teil a) konnten noch 5 weiter die Potenzgesetze richtig verwenden. Leider bei drei Kindern kam wieder vor, dass sie die Basis mit dem Koeffizienten zusammengefasst haben. Die nächsten drei Gleichungen waren logarithmische Gleichungen. Die Teile haben 9, 4 und 8 Schüler richtig gelöst. Weiter Schüler haben zum Teil die Logarithmusgesetze richtig verwendet, aber die Termumformungen sind ihnen nicht richtig gelungen.

In der 2. Aufgabe waren einfache Ungleichungen zu lösen, eine exponentielle und eine logarithmische. Bei der exponentiellen Ungleichung gab es nur zwei richtige Lösungen, dagegen bei der logarithmischen insgesamt 7. Das größte Problem hatten die Schüler mit den Basen gehabt, die kleiner als 1 waren (aber größer als 0). Als typische Fehler kann man erwähnen, dass viele Schüler die Potenz- bzw. Logarithmusgesetze falsch verwendet haben. Es gab weitere Probleme mit den einfachen algebraischen Umformungen. Die Lösung hat nur ein Schüler auf der Zahlengeraden dargestellt, niemand hat bei der Lösung die Funktionsgraphen verwendet.

In der dritten Aufgabe mussten die Schüler ein Gleichungssystem lösen. Insgesamt 7 konnten die Aufgabe richtig lösen, 6 davon mit dem Einführen neuer Variablen. Zwei weitere Schüler haben neue Variablen eingeführt, aber sie konnten die Aufgabe nicht weitermachen. Als typische Fehler kann man erwähnen, dass die Schüler die Aufgabe falsch abgeschrieben haben, oder bei der Lösung „einfache“ algebraische Fehler begangen haben. Zweimal kam es leider wieder vor, dass die Basen mit den Koeffizienten zusammengefasst werden: $2 \cdot 2^y \Rightarrow 4^y$. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht angefangen.

Den Teil a) der Textaufgabe haben insgesamt sechs Schüler richtig gelöst, zwei weitere haben den Endwert richtig aufgeschrieben, kamen aber nicht weiter. Zwei konnten den mathematischen Zusammenhang aufschreiben, aber sie machten es nicht weiter. Fünf Schüler haben den Teil falsch angefangen, der Rest hat nichts geschrieben. Den Teil b) haben sieben Schüler richtig gelöst. Die anderen Schüler haben die Aufgabe entweder falsch oder überhaupt nicht angefangen. Diesen Teil haben nur fünf Schüler richtig gelöst, aber nur einer hat bei der Antwort hochgerundet: $23{,}79 \approx 24$. Zwei haben die Grundgleichung aufgeschrieben und zwei weitere wollten die Antwort Schritt für Schritt berechnen, aber sie kamen nicht zu Ende. Drei Schüler haben die Aufgabe falsch angefangen. Neun haben mit ihr überhaupt nicht begonnen.

Wenn man die entsprechenden Aufgaben in der exponentiellen Großtest und der zusammenfassenden Klassenarbeit vergleicht kann man feststellen, dass die Schüler bei der Verwendung der Potenzgesetze, in der Lösung von exponentiellen Gleichungen einen Fortschritt gemacht haben, obwohl die schwächsten immer wieder die typischen Fehler begangen haben. Bei der Ungleichung und dem Gleichungssystem wurde der erste Schritt von mehreren Schülern getan, die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben hat sich wesentlich nicht verändert. Die Textaufgaben konnten in den zwei Arbeiten die gleichen Schüler lösen. Die Ausführliche Analyse ist im Anhang I zu finden. Die Verteilung der Noten war pro Schüler die Folgende:



4.5. Zusammenfassung der Ergebnisse

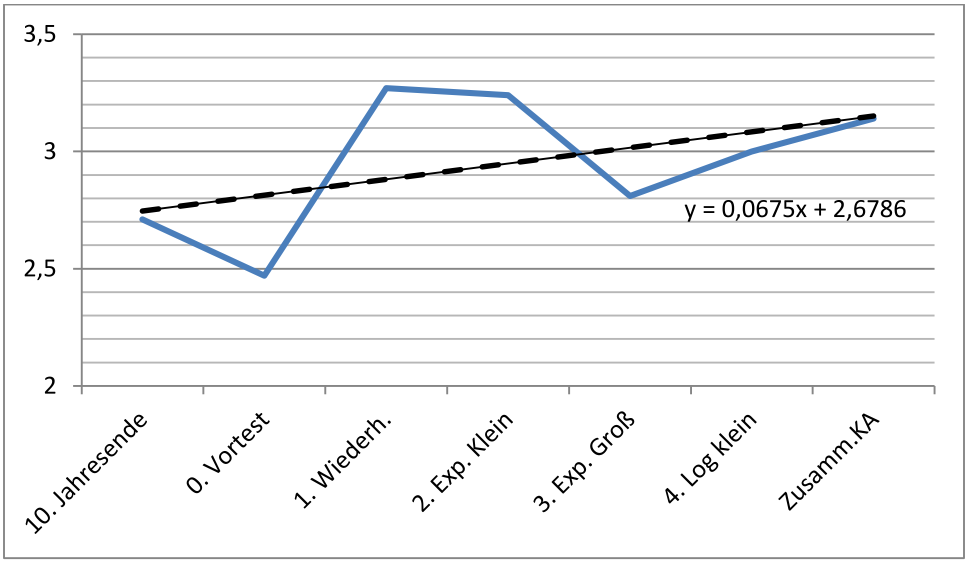
Vor der Auswertung und Zusammenfassung der Ergebnisse muss man betonen, dass das Experiment nicht in einer repräsentativer Weise ausgewählten Schülergruppe durchgeführt worden ist zu der -wegen des entwickelnden Unterrichtsexperimentes- keine Kontrollgruppe zur Verfügung stand. Im vorherigen Jahr hatten die Schüler einen anderen Lehrer als ich, deshalb sind die Notendurchschnitte nur schwer zu vergleichen. Jedoch zeigt sie am Ende der 10. und der 11. Klassen einen kleinen Rückgang (von 2,71 auf 2,57), was ein Zeihen dafür sein kann, dass die Schüler nicht unbedingt wegen der „milderen“ Benotung des neuen Lehrers im geforschten Thema eine überdurchschnittliche Leistung gebracht haben. Aus den Gründen sind die klassischen statistischen Rechnungen nicht oder nur bedingt zu verwenden, die erhaltenen Werte geben nur die Richtlinien der Entwicklung an. Die Forschung stellt deshalb eher qualitative als quantitative Fragen. Jedoch sind die Notendurchschnitte, ihre Varianzen und Variationskoeffizienten wichtige Merkmale dafür, wie tief und einheitlich die Schüler die verschiedenen Lerneinheiten erlernen konnten. Neben den zusammenfassenden Ergebnissen wird die Entwicklung von vier Schüler vorgestellt.

Nach den Ergebnissen des Vortests wurde klar, dass die Schüler wesentliche Probleme mit den mathematischen Begriffen wie Potenzen, Wurzeln und Funktionen haben. Wir mussten zuerst diese Teile wiederholen, um die Erweiterung des Potenzierens, die Exponential- und Logarithmusfunktion erlernen zu können. Im Vergleich mit dem Vortest und den mathematischen Fähigkeiten haben die Schüler den Test aus der Wiederholung richtig geschrieben. Der Notendurchschnitt wurde um etwa 0,9 größer. Typische Fehler kamen hier wie auch leider in den späteren Tests, wieder vor, z.B.: $a^{x+y} = a^x + a^y$, die Koeffizienten wurden mit der Basis der Potenz zusammengefasst, die horizontale Versschiebung des Funktionsgraphen wurde in die entgegengesetzte Richtung durchgeführt, o.ä.

Bei der Einführung der Exponentialfunktion wurde darauf geachtet, dass die Schüler den Sinn –concept image – des mathematischen Inhaltes richtig verstehen und mit Hilfe der richtigen Anwendung der Potenzgesetze die Aufgaben gelöst werden können. Im Kleintest, in dem definitionsartige Aufgaben gestellt und eine Funktion abgefragt wurde, haben die Schüler wieder einen besseren Durchschnitt erreicht. Während der Analyse der Schülerarbeiten stellte sich heraus, dass die Schüler die Exponentialfunktion gut verstanden haben, der Durchschnitt war 3,24. Es kamen aber leider weiterhin typische theoretische Fehler vor: Falsche Verwendung der Potenzgesetze, Probleme mit den Transformationen der Funktion.

Die größte Überraschung für mich bedeutet der nächste Großtest über exponentielle Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme bzw. eine praktische Anwendung. Zwei große Probleme habe ich gesehen. Einerseits haben relativ viele Schüler die einzelnen Aufgaben nicht angefangen, andererseits haben viele Schüler wieder typische theoretische Fehler begangen. Nach der Rückgabe des Tests haben wir die Aufgaben gründlich besprochen. Die Schüler haben sich mit ihren Fehlern auseinandergesetzt. Viele waren auch überrascht, welche Fehler sie begangen haben. Ich habe sie darum gebeten, das Thema nochmals zu Hause zu wiederholen.

Als wir den Logarithmus anfingen, haben wir die Potenzgesetzte bewusst oftmals wiederholt. Das hat scheinbar geholfen. Den schweren und abstrakten Begriff des Logarithmus bzw. die Logarithmusgesetze haben die Schüler durch die realistischen Aufgaben relativ gut verstanden. Sie haben sowohl den logarithmischen Kleintest, als auch die zusammenfassende Klassenarbeit mit einem guten Ergebnis geschrieben (3,19).



Unter den Schüler konnte man aber große Unterschiede entdecken. Nicht nur die Ergebnisse der einzelnen Tests waren unter den Schülern unterschiedlich, sondern auch Standardabweichung der Ergebnisse einzelner Schüler. Es werden hier die Ergebnisse von vier Schülern der Gruppe kurz vorgestellt:

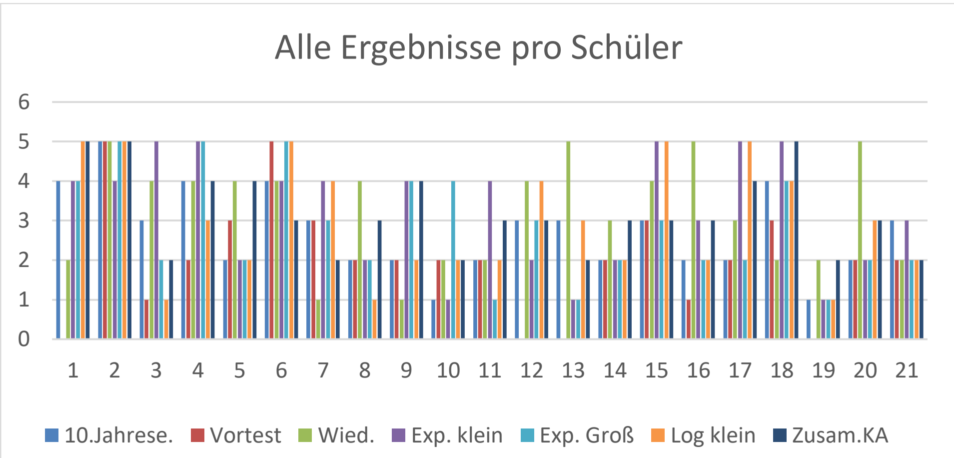
Nr.2 brachte eine sehr ausgeglichene Leistung. Ihr Durchschnitt war: 4,86; Standardabweichung: 0,35. Sie hatte eine 5 am Anfang des Jahres und sie war die einzige, die am Ende der 11. Klasse eine 5 bekommen hat. Die Tests hat sie fast ausschließlich fehlerfrei geschrieben. Der exponentielle Kleintest war bei ihr alleine eine 4. In diesem Test fehlte ihr 1 Punkt für die Fünf, die erste Potenzidentität hat sie falsch geschrieben: $p^{\frac{1}{3}} \cdot p^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{6}}$ hat sie angegeben.

Nr. 19 ist mit einer Eins in die Klasse gekommen, und sie hat leider am Ende des Jahres wieder eine 1 bekommen. Sie konnte nur kurzfristig die einfachsten Informationen speichern, die definitionsartige Aufgaben lösen. Alle geschriebenen Arbeiten hat sie zu Ende gelöst, aber im Allgemeinen hat sie oft schon im ersten oder zweiten Schritt einen theoretischen Fehler begangen. Die gleichen Fehler kamen immer wieder vor: Potenzgesetze wurden falsch verwendet (z. B.: $\left(p^{\frac{1}{2}} \cdot p^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(p^{\frac{2}{4}} \cdot p^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(p^{\frac{6}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$ oder $6 \cdot 3^x = 18^x$, o.ä.); sie konnte weder die Exponential- noch die Logarithmusfunktion darstellen, sie hat die Textaufgaben nicht verstanden, sie konnte sie in eine mathematische Form nicht umformen. Ihr konnte das Unterrichtsexperiment nicht dazu bewegen, den Lehrstoff richtig zu erlernen.

Nr. 9 war in der Klasse ein durchschnittlicher Schüler. Er hatte am Ende des Vorjahres eine 2 aber er konnte dieses Ergebnis am Jahresende auf eine 3 korrigieren – mit einem guten ersten Halbjahr, in dem das Experiment durchgeführt worden ist und mit einem schwachen zweiten Halbjahr. Er hat sowohl im Vortest eine Zwei geschrieben, sogar die Wiederholung ist ihm noch schlechter ausgefallen. Er konnte im in den ersten zwei Tests die Potenzgesetze nicht richtig verwenden, mit der Darstellung und Analyse der Funktionen hatte er auch Schwierigkeiten (im Vortest hat er die Wertetabelle falsch ausgelöst, so bekam er eine „krumme“ Gerade). In dem exponentiellen Kleintest hat er nur bei einem zusammengesetzten Potenzgesetz einen Fehler begangen, ansonsten waren die anderen Aufgaben richtig. Die exponentielle Funktion hat er richtig dargestellt, er konnte die Eigenschaften richtig angeben. Ähnliches kann man über die exponentielle Arbeit sagen – in der Ungleichung hat er die Relation nicht umgedreht, im Gleichungssystem hat er neue Veränderliche eingeführt, aber am Ende hat er die Werte der ursprünglichen Variablen nicht angegeben. Er hat die Potenzgesetzte richtig verwendet. Ihm habe die realistische Einführung viel geholfen, dadurch hat er das Potenzieren, Wurzelziehen richtig verstanden. Nach der Einführung des Logarithmus hatte er wieder Probleme, er konnte im logarithmischen Kleintest die Aufgaben lösen, die mit der Definition zusammenhängen, obwohl er eben die erste Aufgabe falsch gelöst hat. Die Logarithmusfunktion konnte er zwar nicht richtig darstellen, bei den Eigenschaften stellte es sich aus, dass er die Transformationen verstanden hat ($f(x) = \log_2(x+2) - 1$: streng monoton steigend; keine Extrema; Asymptote: $x = -2$; $R_f = \boldsymbol{R}$). Die Note war hier 2. In der zusammenfassenden Klassenarbeit hat er wieder gut geleistet, er hat eine Vier bekommen.

Nr. 17: Dieser Schüler ist mit einer 2 gekommen und am Ende des Jahres hat er wieder eine 2 bekommen. Das Vortest und die Wiederholung haben die Note bestätigt, der Schüler hatte wesentliche Probleme mit Potenzieren, Potenzgesetzen und mit den Funktionen. Der exponentielle Kleintest ist ihm dagegen fast fehlerfrei gelungen, in der 3. Aufgabe hat er den letzten Schritt, die Zusammenfassung falsch gemacht. Die Exponentialfunktion konnte er richtig darstellen, alle Eigenschaften waren richtig. Die exponentielle Großarbeit ist ihm nicht gut gelungen: hier kommen zum Teil alte Fehler zurück: er hat nur die eine Seite der Gleichung 1b) durch 3 geteilt, in 1c) hat er den Koeffizienten mit der Basis zusammengefasst ($6 \cdot 3^x$ ist bei ihm im weiteren Schritt, wenn $3^x = a$ verwendet wird $18a$); bei der Ungleichung hat er die Richtung der Relation falsch angegeben; das Gleichungssystem und die Textaufgabe konnte er nicht lösen. Er erhielt für die Arbeit eine 2. Den logarithmischen Kleintest hat er dagegen fast fehlerfrei geschrieben: sowohl die Definition als auch die Logarithmusgesetze wurden richtig verwendet. Er hat die Logarithmusfunktion (mit der Asymptote) richtig dargestellt und analysiert. In der großen Klassenarbeit hat er wieder die Gesetzte richtig verwendet, aber die Richtung der Relation war falsch. In der letzten Aufgabe konnte sie die Teile a) und b) Lösen und hat angefangen den Teil c) Schritt für Schritt zu berechnen, das ist ihm aber nicht gelungen. Die Note der Klassenarbeit war 4. Diesem Schüler hat die realistische Einführung der neuen Begriffe, der neuen Zusammenhänge viel geholfen, die weitere Teile des Lehrstoffes der Klasse 11 bedeuteten ihm wesentliche Schwierigkeiten.

8. Tabelle: Die Noten der Schüler – eigene Quelle



Wenn man die Tests betrachtet, kann man behaupten, dass die Variationskoeffizienten der Ergebnisse der Tests zwischen etwa 0,315 und 0,471 liegen, der durchschnittliche Variationskoeffizient aller Noten ist 0,43. Das unterstützt die Tatsache, dass es unter den Schülern große Abweichungen gab. Die Arbeit, die von den Noten her am meisten ausgeglichen ist, ist die letzte, zusammenfassende Klassenarbeit (Notendurchschnitt: 3,19; Standardabweichung: 1,01; Variationskoeffizient: 31,7%). Das zeigt mir, dass das Erlernte nach 33 Stunden eingewurzelt ist (s. Anlage).

5. Zusammenfassung, Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein entwickelndes Unterrichtsexperiment – nämlich eine andere Methode für den Unterricht der exponentiellen und logarithmischen Funktionen und ihrer Anwendungen dargestellt. Die Ergebnisse wurden unter die Lupe genommen. Überwiegend drei Sachen motivierten mich das Experiment durchzuführen. (1) Zuerst wollte ich einen anderen Weg finden, auf den die Schülerinnen und Schüler den Begriff Exponential- und Logarithmusfunktion besser, gründlicher und tiefer verstehen können. Es geht hier nicht nur um „gute“ Schüler, sondern auch um solche, die grundlegenden Probleme sogar mit einfacheren mathematischen Begriffen, Sachverhalten, Zusammenhängen haben. In der Gruppe, in der das entwickelnde Unterrichtsexperiment stattfand, wurde sogar Mathematik auf Deutsch unterrichtet, obwohl die Muttersprache der Kinder ungarisch war. Dadurch war die Situation noch schwieriger und deshalb war es noch wichtiger eine Methode zu finden, die den Schülern beim Lernen helfen kann. Ich wollte eine Methode entwickeln, die nicht nur ich, sondern auch andere Kolleginnen und Kollegen erfolgreich verwenden können. Das Gymnasium, der Ort des Experiments war in der günstigen Lage, auch Computer und Beamer sichern zu können. Damit konnte der Lehr- und Lernvorgang viel effektiver gestaltet werden. (2) Die andere Motivation war einerseits, zu den didaktischen Forschungen des Unterrichts von Funktionen beizutragen, andererseits durch diese Forschung der herkömmlichen Mathematikdidaktik neue Impulse zu geben. (3) In Ungarn gibt es kaum entsprechende Unterrichtsmaterialien zum Thema auf Deutsch. Zu dem Experiment wurde deshalb ein deutschsprachiges Unterrichtsmaterial entwickelt.

5.1. Weitere Aspekte der Forschung

Während der Zusammenstellung und Abwicklung des entwickelnden Unterrichtsexperiments wurden drei weitre Aspekte immer vor Augen gehalten: (1) Die begriffliche Entwicklung der Schüler; (2) Die Entwicklung des Funktionsbegriffs der Schüler; (3) Die Entwicklung des Problemlösens der Schüler. In den Stunden wurden die Begriffe bewusst verwendet und von den Schülern wurde auch erwartet sich mathematisch so exakt wie möglich auszudrücken. Der zweite Aspekt war, wie sich der Funktionsbegriff bei den Schülern im Laufe der Zeit entwickeln kann. In den neunten und zehnten Klassen haben sich die Schüler viel mit den Funktionen und ihren Eigenschaften beschäftigt. Die Ergebnisse des Vortests haben mich darauf aufmerksam gemacht, dass die Schüler der unterrichteten Klasse wesentliche Wissenslücken auf diesem Gebiet vorweisen. Der schwächste Teil jedoch war, in dem die Schüler Beispiele für lineare bzw. quadratische Funktionen aus dem Alltagsleben benennen mussten. Diese niederschmetternden Ergebnisse haben mich darin bestärkt, den Schülern während des Unterrichts das Wechseln zwischen den enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationen des Funktionsbegriffes zu erleichtern. Bei der Einführung der exponentiellen und logarithmischen Vorgänge, Funktionen wurden schon die Graphen der Funktionen verwendet. Bei vielen weiteren Aufgaben wurde auf die Eigenschaften der Funktionen hingewiesen und diese benutzt. Die Schüler haben sowohl in den Stunden als auch zu Hause GeoGebra mit Vorliebe benutzt. Die Teilergebnisse der Tests auf diesem Gebiet haben gezeigt, dass mehr Schüler mit den Funktionen und ihrer Anwendungen besser umgehen konnten als vorher. Die dritte Frage ist die Entwicklung des Problemlösens. Probleme lösen zu können verlangt vom Problemlöser einen zusammengesetzten Gedankengang, ein strategisches Verfahren. In der Gruppe bedeuteten in erster Linie die Textaufgaben die Probleme. Die neuen Formulierungen der Aufgaben, die Fragestellungen, die verschiedenen neuen Teilgebiete des Lebens (Vermehrung verschiedener Sachen, Finanzrechnungen, Halbwertszeiten usw.) bedeuteten für die Schüler eine große Herausforderung. Sie mussten die Probleme verstehen, die Zusammenhänge mit den Exponential- und Logarithmusfunktion finden. Deshalb trug in diesem Experiment das richtige Verstehen des Funktionsbegriffs auch zum erfolgreichen Problemlösen bei. Die Schüler mussten die Angaben, die Bedingungen und die Fragen in die mathematische Sprache übersetzen, die wichtigen und unwichtigen Informationen voneinander trennen, Gleichungen, Ungleichungen aufschreiben und auflösen, die Ergebnisse testen und sie interpretieren. Die selbständige Lösung von Textaufgaben hat das schlechteste Ergebnis der Tests gebracht, was für mich nicht überraschend war. Diese Art des Denkens braucht ein ständiges Training in allen Klassenstufen.

5.2. Die Forschungsfragen

Am Anfang des entwickelnden Unterrichtsexperiments wurden zwei Forschungsfragen gestellt.

1. Wie beeinflusst die Effektivität des Unterrichts vom Thema "Exponentielle und logarithmische Vorgänge" die Anwendung der Hauptideen des realistischen Mathematikunterrichts?
2. Wie kann man die Effektivität des Unterrichts vom Thema "Exponentielle und logarithmische Vorgänge" mit Hilfe GeoGebra Software erhöhen?

Die Schüler des entwickelnden Unterrichtsexperiments hatten bedeutende Schwierigkeiten und Mängel, sowohl mit dem Thema Potenzieren als auch mit anderen mathematischen Konstruktionen (Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen, Termumformungen, Verstehen von Textaufgaben, Problemen). Die obige Behauptung stellte sich aus den

Erfahrungen in den Stunden und aus den Ergebnissen der Tests heraus. Nach diesen Beobachtungen war besonders wichtig, die Themen der exponentiellen und logarithmischen Vorgänge so einzuführen, dass die Schüler diese Begriffe schon von Anfang an verstehen können. Dabei haben die einführenden Probleme viel geholfen. Die Schüler haben die Probleme auf „natürliche Weise“ behandelt. Anhand der Stunden und Tests kann man behaupten, dass diese Art der Einführung der obigen Begriffe effektiv war und dabei geholfen hat, die Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion und ihrer Anwendung zu verstehen. Die Probleme, die während der Stunden und Tests vorgekommen sind, stammten oft aus vorigeren mathematischen Mängeln – wie das Auflösen von Gleichungen, grundsätzliche Potenzgesetze. An diesen Mängeln haben wir während den Stunden viel gearbeitet.

Im Klassenzimmer hatten wir Glück mit der technischen Ausstattung. Der Raum verfügte über einen Computer, Beamer und Internetanschluss. Fast in allen Stunden wurden diese elektronischen Mittel benutzt. Der einführende Film von Beutelspacher, die online Aufgaben, aber in erster Linie die Software GeoGebra haben während des Unterrichts sehr viel geholfen. Viele Schüler haben die Software auch zu Hause heruntergeladen und verwendet. Wir haben das Programm bei der Einführung der Begriffe, bei den Funktionen, bei der graphischen Lösung einiger Gleichungen, bei den Ungleichungen, weiterhin bei den Textaufgaben benutzt. Oft haben die Schüler in den Stunden GeoGebra selbst benutzt. Die Software und die technischen Hilfsmittel eindeutig dazu beigetragen haben, den Begriff der Exponential- und Logarithmusfunktion und ihre Anwendungen verstehen zu können.

Es steht bereits im Vorwort steht. Die neuen Herausforderungen des Unterrichts, des Lebens regt die Didaktiker der Mathematik an, immer effektivere Methoden zu finden, mit denen die Lehrer den Schülern die Mathematik nach- und nach beibringen können. Andererseits ist das Spektrum der Schüler immer breiter, die das Abitur ablegen wollen oder studieren möchten. Deshalb ist es wichtig die Mathematik so zu unterrichten, dass auch die Schüler erreicht werden können, die früher dazu keine oder wenig Möglichkeiten hatten. Die verwendete Methode könnte eine Möglichkeit bedeuten, Mathematik auch diesen Schülern näher zu bringen. Die Lehrstoffe der Jahrgänge 11 und 12 sind abstrakt genug, sie mit realistischen Methoden einzuführen, die neuen Zusammenhänge zu entdecken. Diese Themen sind Trigonometrie, Koordinatengeometrie, Folgen, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach dem Experiment habe ich die Schule und zugleich das Schulsystem gewechselt. In der Deutschen Schule Budapest wird nach dem Schulcurriculum von Baden-Württemberg unterrichtet, wo dieses Thema völlig anders gelehrt wird als im ungarischen Schulsystem. Jedoch konnte ich das ausgearbeitete Lehrmaterial sowohl am Anfang des Themas als auch bei der Verständigung der Zusammenhänge gut gebrauchen.

5.3. Ausblick

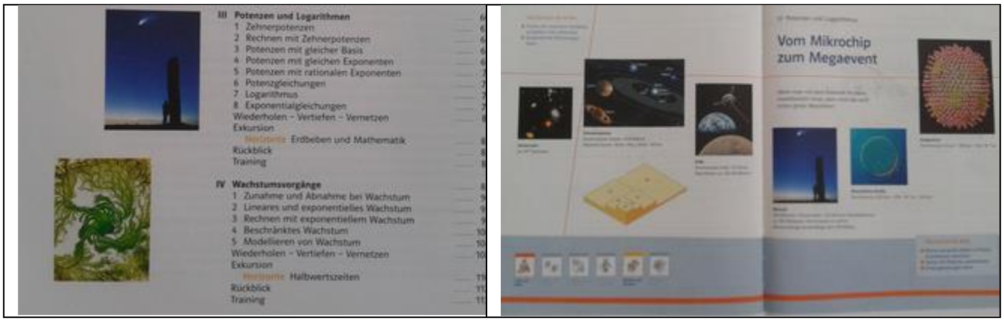
Nach der Auswertung der Ergebnisse habe ich mit den Kollegen im Gymnasium die Erfahrungen besprochen und auch ihnen den Lehrstoff überreicht. Ich wollte ihn auch in den nächsten Jahren verwenden, ergänzen und auch andere Lerneinheiten mit der erprobten Methode bearbeiten. An Ende des Schuljahres habe ich aber sowohl die Schule als auch das Schulsystem gewechselt.

Die neue Schule ist die Deutsche Schule Budapest. Hier wird nach dem Lehrplan von dem Bundesland Baden-Württemberg unterrichtet. Da ich in diesen fünf Jahren dort viele Erfahrungen gesammelt habe, finde ich es sehr aufschlussreich, einen kleinen Überblick zu geben, wie nach diesem Lehrplan mein Forschungsthema unterrichtet wird. Im Gymnasium wird die Lehrbuchserie Lambacher-Schweizer benutzt. Im Gegenteil zu Ungarn, wo das Thema exponentielle und logarithmische Vorgänge in dem 11. Jahrgang unterrichtet wird, kommt es schon in der 9. Klasse vor. Der Aufbau und die Zielsetzungen unterscheiden sich stark vom ungarischen Lehrplan. So ist auch die Struktur anders als die der ungarischen Bücher. Der Bildungsstandard für Mathematik formuliert in den Leitgedanken zum Kompetenzerwerb für Mathematik folgendermaßen: „*Der Mathematikunterricht in den Klassenstufen 9 und 10 ist gekennzeichnet durch zunehmend selbstständiges und bewusstes Lernen. Der Lernfortschritt wird hierbei durch **kooperative Arbeitsformen** unterstützt. Durch die Hinzunahme von Fragestellungen aus anderen Fachgebieten werden die Problemlösefähigkeiten erweitert und eine horizontale Vernetzung auch über Fachgrenzen hinaus erzielt. In diesem Zusammenhang gewinnt **die Methode der Modellbildung** besondere Bedeutung. **Die erweiterte Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners** und der Einsatz moderner Technologien wie Tabellenkalkulation, Grafiksysteme, dynamische Geometriesysteme, Algebrasysteme, Simulationsprogramme sowie das Internet werden im Unterricht gezielt eingesetzt. Neben der Bearbeitung komplexer Aufgaben sind nun auch Zugänge zu neuen Problemtypen sowie die Beschaffung und Auswertung umfangreicherer Datensätze möglich. (...) Die zunehmende mathematische Kompetenz der Schülerinnen und Schüler gestattet die **Bearbeitung komplexerer, realitätsnaher Fragestellungen** unter der Leitidee „Modellierung“. Sie fördert dabei eine zunehmende Funktionskompetenz. Dazu gehört* *insbesondere das Verständnis für den Unterschied zwischen diskreten und kontinuierlichen Betrachtungsweisen.*“[14]

Aus diesen Leitideen habe ich vier hervorgehoben, die ich während meiner Forschung für besonders wichtig gehalten habe:

- *kooperative Arbeitsformen;*
- *die Methode der Modellbildung;*
- *Die erweiterte Nutzung des grafikfähigen Taschenrechners und der Einsatz moderner Technologien wie Tabellenkalkulation, Grafiksysteme, dynamische Geometriesysteme, Algebrasysteme, Simulationsprogramme sowie das Internet werden im Unterricht gezielt eingesetzt.*
- *Bearbeitung komplexerer, realitätsnaher Fragestellungen.*

Diese Züge des Lehrplans finde ich sehr sympathisch. Sie werden wirklich im Lehrbuch gefördert und erwartet. Warum habe ich aber nicht dieses System gewählt? Obwohl die Zielsetzungen dieses Unterrichts meinem Entwicklungsversuch entsprechen, der Weg, die Methoden, wie sie erreicht werden, die konkreten Ziele, die erreicht werden, entsprechen weder dem ungarischen Nationallehrplan noch den Erwartungen, die ich an die Themaeinleitung, an die Einführung mathematischer Zusammenhänge gestellt habe. Das ganze Thema ist in zwei größere Kapitel aufgeteilt. Im ersten Kapitel werden die Potenzen und Logarithmen und einfache Potenz- und Exponentialgleichungen, im zweiten die Wachstumsvorgänge eingeführt.



Im deutschen Unterricht kann man eine Reihe von praktischen Aufgaben finden. Zu allen Abschnitten gibt es ein Paar Drillaufgaben, dann kommen relativ viele Textaufgaben. Als Einführung des Themas wird oft ein offenes Problem gestellt, dann kommen zwei, drei gelöste Beispiele. Die rein mathematischen Zusammenhänge – Definitionen, Sätze – werden oft in rote Kasten gestellt. Die Lehrsätze werden nicht bewiesen.

[14] http://www.bildung-staerkt-menschen.de/service/downloads/Bildungsstandards/Gym/Gym_M_bs.pdf (23.07.2013, p 94)

Wie man in der Thematik des Themenkreises sehen kann, beschäftigen sich die ersten fünf Absätze mit Potenzen. Der Aufbau entspricht überwiegend dem ungarischen Lehrplan, mit der Differenz, dass in Ungarn nach den Potenzidentitäten die Zehnerpotenzen, die wissenschaftliche Schreibwiese unterrichtet wird. Danach kommen einige relativ einfache Potenzgleichungen. Obwohl nur solche Potenzgleichungen angegeben sind, welche nach einigen Umformungen mit einem einfachen wissenschaftlichen Taschenrechner zu lösen sind, wird bei einigen verlangt, die Aufgabe, die Gleichung mit GTR[15] graphisch und algebraisch zu lösen. Es muss hier betont werden, dass die Funktionen in diesem Jahr überhaupt nicht vorkommen, bis auf diese Lektion, wo die Potenzfunktionen kurz besprochen werden. Was für mich am interessantesten ist, dass nach diesem Abschnitt der Begriff des Logarithmus kommt. Die exponentielle Funktion wurde vorher nicht eingeführt, in dieser Lektion ist die Funktion $f(x) = 2^x$ dargestellt und erwähnt, dass die Gleichung $2^x = 16$ einfach zu lösen ist (erst in der nächsten Lektion werden die einfachsten exponentiellen Gleichungen besprochen). Dann kommen die Definition des Logarithmus und eine einzige Identität:

Für den Logarithmus von Potenzen gilt: $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x)$.

Bei den Aufgaben kann man Übungen für die Umschreibung des Logarithmus in Potenzform oder umgekehrt, bzw. einige Rechnungen finden. In diesem Abschnitt kann man weder die Funktion, noch alltägliche Beispiele noch Gleichungen o.ä. finden, ausschließlich diese einzige Lektion. Als ich diesen Abschnitt unterrichtet habe, dann *habe ich meinen Lehrplan für die Einführung verwendet, damit die Schüler den Begriff mindestens ein bisschen tiefer verstehen können*. Aber bis Ende des zweiten Abschnitts hatte ich immer das Gefühl, wenn Logarithmus vorgekommen ist, dass der Begriff den Schülern fremd wirkt. Sie wissen nur, mit welchen Tastenkombinationen mit dem GTR der gefragte Exponent auszurechnen ist. Die letzte Lektion dieses Abschnitts beschäftigt sich mit Exponentialgleichungen –wieder ohne theoretische Einführung.

Im nächsten Abschnitt werden einige Wachstumsvorgänge behandelt. In diesem Teil gibt es überwiegend Textaufgaben verschiedener Art. In der ersten Lektion –Zunahme und Abnahme bei Wachstum– gibt es nur Textaufgaben, alltägliche Beispiele, die ich sehr gut finde. Hier lernen die Schüler zwei wichtige Begriffe kennen: absolute Änderung und relative/prozentuale Änderung. In der zweiten Lektion werden thematisch das lineare und das exponentielle Wachstum miteinander verglichen. Die Vorgänge werden sowohl direkterweise – explizite Darstellung – als auch rekursiv angegeben. Beide Schemen werden sind im Buch zu finden:

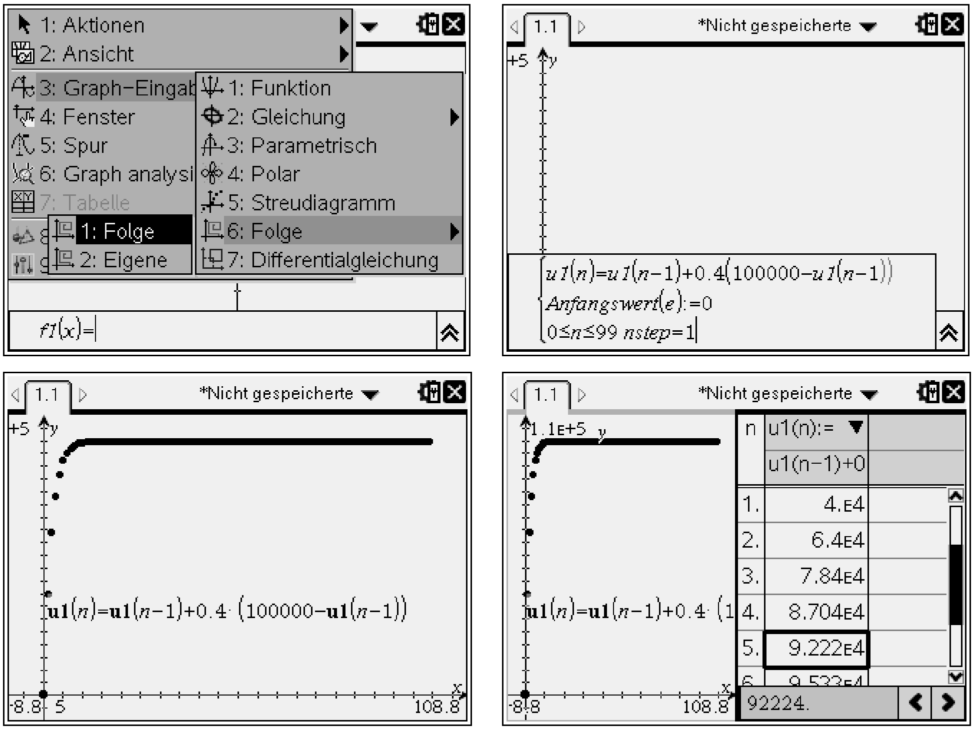
[15] GTR: graphischer Taschenrechner

Lineares Wachstum:	Exponentielles Wachstum:
Schrittweise: $B(n+1) = B(n) + d$	Schrittweise: $B(n+1) = k \cdot B(n)$
Direkt: $B(n) = B(0) + d \cdot n$	Direkt: $B(n) = B(0) \cdot k^n$

Unter den Aufgaben sind sowohl Textaufgaben als auch einfachere Rechnungsaufgaben ohne alltägliches Textumfeld. Die dritte Lektion bespricht das exponentielle Wachstum, in erster Linie mit Hilfe von Finanzaufgaben. Schon am Anfang sind vier ausgearbeitete Beispiele, wo man für alle vier Parameter je ein Beispiel findet: Für $B(n); B(0); k$ und für n. Das Buch zeigt mehrere Möglichkeiten für den GTR-Gebrauch, wie man ihn programmieren kann. In der vierten Lektion kommt man zum beschränkten Wachstum, welches in den ungarischen Schulen nicht unterrichtet wird. Das Buch gibt dazu eine rekursive Formel an. Wenn man das 100. Glied wissen möchte, muss man alle 99 vorliegenden Werte ausrechnen. Wenn man sich verrechnet, sind alle weiteren Werte falsch. Um die Werte höherer Gradzahlen ausrechnen zu können, muss man schon den GTR verwenden. Wir erlernen, wie man den GTR programmieren kann, dann lassen wir die Werte den GTR darstellen und tabellarisch angeben. Die Fragen sind hier zum Teil offen, zum Teil konkret.

Aufgabe 3, Seite 102:
In einem entlegenen Gebiet in Asien sollen 100 000 Menschen vom Flughafen aus mit Medikamenten versorgt werden. Die Anzahl der versorgten Menschen soll mathematisch mit einem Wachstum beschrieben werden.
a) Gib Gründe dafür an, warum ein beschränktes Wachstum zu dieser Beschreibung besser geeignet ist als ein lineares Wachstum oder ein exponentielles Wachstum.
b) Die Anzahl der versorgten Menschen wird mit einem beschränkten Wachstum beschrieben. Man nimmt an, dass monatlich 40% der noch nicht versorgten Menschen erreicht werden können. Wann sind 90% der Menschen versorgt?

Die erste Frage ist sehr wichtig, damit die Schüler überlegen, was der Unterschied zwischen dem linearen, exponentiellen und beschränkten Wachstum ist. Während der Überlegung können die Schüler schon herausfinden, was die Parameter dieses Wachstums sind: $B(0) = 0$; $S = 100\,000$; $c = 0{,}4$ und $B(n) = 90\,000$. Die Formel kannten sie schon: $B(n+1) = B(n) + c \cdot \left(S - B(n)\right)$, wo S die obere Schranke oder das Sättigungsmanko und c den Wachstumsfaktor bedeuten. In diesem Beispiel war n die Frage. Weil das Wachstum rekursiv angegeben ist, muss man hier die Werte der Reihe nach berechnen. Bei welchem Schritt zum ersten Mal die Zahl 90 000 erreicht wird, ist die Antwort. Bei dieser Aufgabe haben wir wieder den GTR benutzt:



Es wurde hier in vier Schritten gezeigt, wie wir den GTR programmiert, bzw. das Ergebnis bekommen haben. Der GTR gibt automatisch für die erste Folge die Bezeichnung $u1(n)$ an. Den Buchstaben u könnte man verändern, den Argumenten n aber nicht. Deshalb müssen die Schüler bei der Angabe das Intervall dafür bei 0 anfangen – automatisch fängt die Nummerierung bei 1 an. Die Ergebnisse sind in erster Linie graphisch, auf Wunsch auch tabellarisch gezeigt. Bei diesem Beispiel kann man das Ergebnis einfach aus der Tabelle ablesen – beim 5. Flug erreicht man den gewünschten Anteil. In dem letzten Abschnitt – Modellieren von Wachstum – werden verschieden Probleme mit den oben genannten drei Wachstumsvorgängen modelliert, man versucht hier das passendste Modell zu finden. Das Buch gibt für die Modellierung die folgende Definition an:

Die mathematische Beschreibung eines realen Wachstums nennt man **Modellierung**. Eine Modellierung stimmt nicht immer mit allen Vorgaben aus der Realität überein.

Hier wird auch der Begriff des logischen Wachstums definiert und noch darauf hingewiesen, dass es weitere Modelle gibt.

Was ist das Ergebnis dieses Vergleichs mit meinem entwickelnden Unterrichtsexperiment? Ich finde den deutschen Lehrplan an einigen Gebieten sehr oberflächlich. In erster Linie dort, wo es am wichtigsten wäre: Bei der

Einführung, Vertiefung der Grundlagen. Das gilt in diesem Themenkreis für die Potenzen, und noch eher gilt es für die Begriffe der exponentiellen und logarithmischen Funktion. Hier fehlen mir auch die entsprechenden Textaufgaben. Was weiterführend als das ungarische Modell ist: Der Gebrauch von technischen Mitteln, in erster Linie vom GTR. Natürlich hat dieser Taschenrechner auch Nachteile, aber ich denke, die Vorteile sind viel mehr, wenn man ihn entsprechend benutzt (Várady, (2013.)). Ich finde noch sehr gut, wie das zweite Kapitel aufgebaut ist. Ich finde die Vielfalt der Aufgaben überzeugend, der Aufbau, die Beispiel sind hervorragend, die Schüler arbeiten damit gern. Was ich noch besonders ausgezeichnet finde, dass neben dem linearen und exponentiellen Wachstum zwei andere besprochen werden, sogar solche Beispiele auch gezeigt werden, die mit diesen Rechnungen exakt nicht zu lösen sind. Deshalb wird die Methode der Modellierung eingeführt. Ich würde gerne den GTR und die weiteren Wachstumsvorgänge mit der Modellierung in das ungarische System integrieren.

5.4. Összefoglalás

A magyar matematikaoktatás jellemzője volt sokáig az absztrakt, formális tárgyalási mód, a modellezési, gyakorlati feladatok elhanyagolása. A több, mint egy évtizedes, magyar és német nyelven történt tanítás során a tizenegyedikes csoportokban sokszor tapasztaltam, hogy az exponenciális és a logaritmus függvényekkel és folyamatokkal kapcsolatos tananyagnál a tanulók egy része különböző nehézségekkel szembesül. A hatványozás és gyökvonás általánosítása, a racionális és irracionális kitevőkkel történő hatványozás átismétlése és megtanulása után gyakran nem értik az exponenciális folyamatokat, nem tudnak exponenciális függvényekkel, egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel biztonságosan dolgozni, a szöveges feladatokat (problémákat) nem, vagy csak részben tudják helyesen értelmezni, megoldani. Még nagyobb probléma tapasztalható a logaritmus függvénnyel kapcsolatban. A függvény szokatlan írásmódja, a részben meglepő azonosságok (pl.: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c\,;\ a, b, c > 0; a \neq 1$), a számológéppel nem mindig közvetlenül kiszámítható eredmények (l. $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$) és az exponenciális és logaritmus függvény közötti kapcsolat jó néhány diák számára nehezen érthető. Különösen igazak a fenti megállapítások a gyengébb osztályok és csoportok esetében.

A fejlesztő kísérlet során, a téma adta lehetőségeket kihasználva, lehetőség nyílt a modern technika használatára is. A függvények ábrázolásánál, transzformálásánál, elemzésénél kihasználtuk a GeoGebra nyújtotta előnyöket, így az ikonikus megjelenítés hatására a diákok számára a szimbolikus reprezentáció is elérhetőbbé vált. A függvényeken túl, egyes egyszerű egyenleteknél valamint egyenlőtlenségeknél is eredményesen fel lehetett használni a számítógép nyújtotta vizuális megjelenítés előnyeit. Az exponenciális problémákban, a logaritmus ismerete nélkül lehetett közelítő értékeket meghatározni. A diákok az órán és sokan közülük otthon is szívesen és eredményesen használták a számítógépet.

A fejlesztő kísérlet célja egy olyan módszer kidolgozása volt, amely segítségével a diákok az exponenciális és a logaritmus függvényt valamint alkalmazásait jobban megérthetik és jobban látják az összefüggéseket, biztonsággal oldanak meg a témakörön belüli feladatokat, problémákat. A tananyag összeállítása során gondosan tanulmányoztam a Nemzeti Alaptantervet, a forgalomban lévő tankönyveket valamint számos, a témával közvetve és közvetlenül foglalkozó szakcikket, szakirodalmat. Megvizsgáltam az utóbbi évek, évtizedek matematikai iskoláit valamint a matematikával kapcsolatban megfogalmazott elvárásokat. A kísérlet a 2010/11-es tanév november elejétől január közepéig zajlott, a pilisvörösvári Friedrich Schiller Gimnáziumban. A kísérleti csoport két osztályból tevődött össze: a 11.c és a 12.s diákjainak egy részéből. A csoportba azok a tanulók kerültek, akik terveik szerint nem kívántak a későbbiekben matematikával foglalkozni, céljuk középtávon a középszintű matematika érettségi sikeres abszolválása volt (az osztályok másik fele külön öt órás emelt szintű matematika csoportba került, ahol az emelt szintű matematika érettségire készültek).

A tananyag összeállításánál, az új tartalmak bevezetésénél, az összefüggések megvilágításánál fontos volt, hogy a tartalmak megfeleljenek a Nemzeti Alaptantervben foglaltaknak, ugyanakkor amennyire csak lehet, valósághoz közeliek legyenek. Ehhez a holland realisztikus matematikatanítás elemeit használtam felt. Ezen felül segítségül hívtam a számítógépet, hogy a függvényeket, egyenleteket, egyenlőtlenségeket, szöveges feladatokat ábrázolni tudjuk. Különösen nagy figyelmet fordítottam arra, hogy pl. a lineáris és az exponenciális változás közötti kapcsolatra és a különbségére rávilágítsunk valamint, hogy a logaritmus fogalma ugyanazzal a példával kerüljön bevezetésre. Az órákon a gimnáziumban forgalomban lévő tankönyvből tanultunk (Kosztolányi: Sokszívű matematika), az egyenletekhez, egyenlőtlenségekhez, egyenletrendszerekhez részben a meglévő példatárakat (Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., és „Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I”.) használtuk. Ezen felül feladatokat kölcsönöztem a www.mathepower.de oldalról is. A realisztikus bevezetéshez, az összefüggések megvilágításához, a szöveges feladatokhoz, függvényekhez általam összeállított feladatokkal is dolgoztunk.

A hipotézisek vizsgálatára a diákokat folyamatosan mértem, az eredményeket, történéseket folyamatosan dokumentáltam:

(1) A mérés előtesztel kezdődött, melyben azt vizsgáltam, hogy milyen mértékben emlékeznek a diákok a korábban megtanult hatványozási, gyökvonási és függvénytani ismeretekre, illetve mennyire tudják őket használni.
(2) A kísérlet során minden fontosabb és nagyobb rész után a diákok tesztet írtak, melyben az elsajátított új anyagrészre vonatkozó tudást mértem.
(3) A kísérlet végén egy összefoglaló nagydolgozatra került sor, mely magában foglalta a kísérlet egész tananyagát.
(4) Az órákról jegyzetek készültek, a diákokkal a folyamatos kommunikáció segítségével feltártuk, mely részek mennek könnyebben, és hol van szükség mélyebb magyarázatokra, esetleg még további gyakorlófeladatokra.
(5) Az órákról hangfelvétel készült, amely segítségével később is fel tudtam idézni az adott tanóra tartalmát.
(6) A diákok beleegyezésével bizonyos órákról fényképek is készültek a munkaformák, a táblakép rögzítéséhez.
(7) A kísérlet végén a tanulók többségének füzete fénymásolásra került az órai és az otthoni munkájuk (a házi feladatok megoldása) dokumentálására.

A fejlesztő kísérlet első hipotézise:

1. A matematikatanítás realisztikus megközelítése gazdagabb concept image-hoz vezet a diákoknál, így a fogalmakat, törvényszerűségeket érthetőbben és hatékonyabban tudják felhasználni.

A diákok többsége a kísérlet elején komoly nehézségekkel és hiányosságokkal küzdött a hatványozás, gyökvonás és a függvényfogalom terén, a konkrét problémákra az előteszt vizsgálata világosan rámutatott. A kísértet során próbáltuk a matematikai összefüggéseket realisztikus tartalommal megtölteni, így segítve a téma jobb megértését. Az órai tapasztalatok, valamint a mérések eredményei alapján megfigyelhető volt, hogy az ilyen „gyakorlatias" példák megoldása során olyan diákok is becsatlakoztak a közös gondolkodásba, akiknek különben nagyobb és mélyebb problémájuk volt a hatványozással, gyökvonással. A teszek eredményei is a hipotézis alátámasztása irányába mutatnak. Külön érdemes kiemelni, hogy a logaritmus bevezetése is az exponenciális példával történt, valamint a logaritmus ismerete nélkül is –az exponenciális függvény grafikonjának felhasználásával- tudtunk kitevőket becsülni. A fent említett szempontok miatt a logaritmus fogalmának bevezetés szinte észrevétlenül történt meg, láthatólag nem okozott a hallgatóknak nehézséget, természetesnek vették a logaritmus definícióját és használatát.

A második hipotézis:

2. A dinamikus computeralgebrai szoftver, a GeoGebra segítségével a diákok motiváltabban dolgoznak, felhasználásával jobban megértik a fogalmakat, tudásuk és képességeik stabilabbak, rugalmasabbak, gazdagabbak és felhasználhatóbbak lesznek.

A fejlesztő kísérlet tanterme számítógéppel, kivetítővel, vetítővászonnal volt felszerelve és elérhető volt az internet is. Az órák nagy részénél aktívan használtuk ezeket az eszközöket, elsősorban a GeoGebra szoftvert, de a témához kapcsolódó matematikai videó részleteket is néztünk. Ezen felül online feladatokat oldottunk meg. Az órákon a diákok aktívan használták a számítógépet. Ők ábrázolták a függvényeket, és otthon is sokan töltötték le és használták. Különösen a szöveges feladatoknál volt hasznos, hogy a szükséges függvényeket a megfelelő koordinátarendszerben tudták ábrázolni, így a közelítő megoldást is le tudták olvasni.

A kutatási során a következő aspektusok is fontosak volta. (1) A diákok fogalmi fejlődése; (2) A diákok függvényfogalmának fejlődése; (3) A diákok problémamegoldó képességének fejlődése. A fogalmi fejlődéssel kapcsolatban elmondható, hogy a realisztikus bevezetés magában foglalja azt a lehetőséget, hogy a diákok megértik a matematikai tartalmat, azonban nem tudják magukat a megfelelő matematikai pontossággal és terminológiával kifejezni. Ezért tudatosan figyeltünk az órákon a szabatos szóhasználatra. A második ponttal kapcsolatban már az előteszten kiderült, hogy a diákoknak komoly problémáik vannak a függvényekkel kapcsolatban. A függvényeket, grafikonjaikat és tulajdonságaikat a bevezetéstől kezdve az egyenleteken keresztül a szöveges feladatokig használtuk, törekedve arra, hogy tudatosan használjuk a megfelelő fogalmakat. A kísérlet végére a diákok függvényfogalma megfigyelhetően fejlődött. A harmadik terület, a problémamegoldás. A fejlesztő kísérlet témaköre kifejezetten nem a problémamegoldásra irányult, azonban a matematika tanításától elválaszthatatlan a problémamegoldás fejlesztése. Ez a kompetencia talán a legnehezebb a diákok számára. A bevezetésben is találkozhattak a tanulók nyitott kérdésekkel, az utolsó fejezetekben pedig konkrétan szöveges feladatokkal foglalkoztunk. Bár a diákok többségénél megfigyelhető volt a fejlődés ezen a téren is, azonban itt további fejlesztés szükséges.

A korábbi tanítási tapasztalataim alapján a tanulóknak komoly nehézségeik vannak a kutatott területen. A fejlesztő kísérlet célja elsősorban az volt, hogy olyan módszert találjak az exponenciális és logaritmikus folyamatok bevezetésére és az ezekkel kapcsolatos matematikai tartalmak megtanítására, megtanulására, amely segítségével a diákok könnyebben elsajátíthatják a vizsgált tananyagot. A számítógép, és az általa nyújtott vizuális reprezentációs előnyöket használtuk ki a tanórákon.

A tesztek eredményei és a diákokkal folytatott beszélgetések alapján a kísérlet során javultak a diákok eredményei. Nagyon jól fogadták a realisztikus megközelítést és együtt tudtuk feltárni a matematikai összefüggéseket. Jelentősen könnyebben értették meg az exponenciális növekedés fogalmát, a racionális és irracionális kitevőjű hatványozást és a logaritmus fogalmát szinte „természetesnek” vették.

Terveim között szerepel, hogy a középiskolai tanagyagból azokat a fejezeteket is hasonlóan feldolgozzam, melyekkel a diákok nem mindennap találkoznak, így a megértésük sokkal nehezebb. Ilyen témakörök lehetnek például a trigonometria, sorozatok, de akár a koordinátageometria, algebrai kifejezések vagy a különböző függvénytípusok is idesorolhatók lehetnek. Érdekes és egyben hasznos kísérletet lehetne tervezni a már fentebb említett magyar és Baden-Württembergi alaptanterveket összehasonlítva, közben mindkettőnek az erényeit kiemelve.

5.5.Summary

Up until now the Hungarian mathematical educational system has been characterized as an abstract formal school system where the demonstrations and the practical exercises were not emphasized enough. Based upon my experience as a calculus teacher for more than one decade, most pupils from class 11 have difficulties with exponential and logarithm functions and their applications. They often do not understand the exponential procedure, cannot manipulate with exponential functions and cannot work confidently with equations, inequations, however the generalization of root and powering and powering with rational and irrational indexes have been already been learnt and reviewed. Furthermore, they cannot or only partly can correctly translate and solve the word problem exercises. The situation is even more serious in connection with logarithm functions. The unfamiliar symbolism of the function, its partly surprising rules (e.g. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c\ ;\ a, b, c > 0; a \neq 1$), the fact that the results cannot always be directly calculated with calculator (see $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$), and the relation between the exponential and logarithm functions are difficult to understand for most pupils. It is especially true in classes and groups that are not very good at mathematics.

During the developmental research pupils had the opportunity to take the opportunities supplied by the topic and use modern technology. They utilized the advantages provided by GeoGebra while plotting, transforming or analysing functions, hence the symbolic representation could be revealed by the pupils as a result of iconic appearance. Besides functions, they could also use the advantages of visualization provided by the computer effectively when they calculated with some equations and inequations as well. In the case of exponential problems, it was possible to determine approximate values without knowing the definition of logarithm. Pupils used the computer in class and many of them at home as well, with pleasure and with good results.

The objective of the developmental research was to work out a method through which pupils can understand the exponential and the logarithmic functions and their applications better, which helps them understand and recognize relations and solve problems and do exercises with bigger confidence within the topic. During the creation of the syllabus I carefully examined the National Curriculum, the school books available, and several special articles and books related closely or mediate to the topic. I examined the mathematical schools and requirements of the recent years and decades. The research was being executed from the beginning of November to the middle of January in the 2010/11 school year in Friedrich Schiller Grammar School in Pilisvörösvár. The research group consisted of pupils from two classes: some pupils from 11.c and some from 12.s. The group consisted of those pupils who did not plan to deal with mathematics in their future; their middle-term plan was to absolve the intermediate mathematical maturity examination. (The other part of the class formed a higher level mathematics group with five special mathematics lessons, where pupils were preparing for the higher level mathematics maturity examination. This means that the greater part of the group was not particularly good at mathematics.

During the creation of the syllabus, the introduction of new contents, and the explanation of connections it was important that the content corresponded with the National Curriculum, but at the same time it had to be as realistic as possible. To reach this, I used the elements of the Dutch realistic mathematics teaching. Furthermore, I used the computer as a tool to represent functions, equations, inequation and word problems. I paid special attention to reflect on the relation and difference between the exponential and linear change and that the logarithm was introduced through the same example. In the lessons we used the available school books (Kosztolányi: „Sokszínű matematika" Colourful Mathematics), for equations, inequations and equation systems we partly used the already given exercise books (Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., and „Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I". „Practice and Exercise Book for the Maturity Examination"). Furthermore, I used some exercises from the www.mathepower.de page. For the realistic introduction, lighting up relations, for world problems and functions we also used exercises that were created by me.

To examine the hypotheses pupils were continually being evaluated, results and events were constantly being recorded.

(1) The evaluation began with a pre-test, in which I examined to what extent pupils remembered knowledge of exponentiation, evolution and functions that had been learnt previously, and to what extent they could utilize this knowledge.
(2) During the research pupils wrote a test after each important and greater chapter, in which their knowledge of the studied new topic was measured. Results of the tests were constantly being evaluated, and in case incompleteness came to light, we supplemented and replaced the missing information integrated into the syllabus.
(3) At the end of the research there was a post-test written that included the whole material of the research.
(4) Minutes were made in the lessons, and through contiguous communication with the pupils we explored which parts were understood better and which parts needed further explanation and practice.
(5) The lessons were audio recorded, which helped me remember the content of each lesson.
(6) With the consent of pupils' photos were made of some lessons to record work forms and the blackboard outlook.
(7) At the end of the research the exercise books of most pupils were photocopied to record their work in the lessons and at home (homework tasks).

The first hypothesis of the developmental research:

1. The realistic concept of mathematics teaching leads to a richer concept image of the pupils. They can apply the concepts and theorems more comprehensively and more effectively.

At the beginning of the research most pupils had serious difficulties with the topics of powering, roots and the phenomena of the function, and the pre-test showed exactly what the actual problems were. During the research we tried to fill the mathematical context with realistic content, thus helping better understanding of the topic. Based on the lessons and the measurements we can say that when we were solving such „practical" exercises those pupils also participated in brainstorming who had bigger and more serious problems with the exponential and roots. The results of the tests also seem to confirm the hypothesis. It has to be emphasized that the introduction of logarithm was also done through the exponential example and that without the knowledge of logarithm –using the exponential function graph- we were also able to estimate exponents. Due to all of these aspects the introduction of logarithm was almost unseen, it did not cause difficulties to pupils, and they took the definition and use of the logarithm for granted.

The second hypothesis:

2. GeoGebra, the dynamic computer algebra software, motivates students to solve the exercises which increases their understanding of their concepts. Students' knowledge and skills become more stable, flexible, deeper and more applicable.

The classroom of the developmental research was equipped with a computer, a projector and a screen, and the internet was also accessible. In most lessons we actively used these tools, mainly the GeoGebra software, but we watched excerpts of mathematical videos connecting to the topic as well. Furthermore, we solved online exercises. Pupils actively used the computer in the lessons. They represented the functions and many of them downloaded and used the software at home. It was especially important in the case of word problems that they could represent functions in the appropriate coordinate system, so they could read off the approximate solution.

During the research the following aspects were important: (1) Pupils' conceptual development; (2) Pupil's concept of functions development; (3) Pupils' problem solving abilities development. In connection with the conceptual development it can be stated that the realistic introduction provides the opportunity that pupils understand the mathematical content, but they still cannot express themselves with the suitable mathematical accuracy and terminology. Therefore, we paid attention to the precise usage of terminology in the lessons. Regarding the second question, the pre-test already pointed out that pupils had serious problems with the functions. Functions, their graphs and characteristics were being used from the introduction, through the equations until the word problems, aspiring to use the appropriate expressions consciously. By the end of the research the function concept of the pupils noticeably developed. The third question was problem solving. The topic of the research was not exactly problem solving, but the development of problem solving abilities is inseparable from mathematics teaching. This competence may be the most difficult area for pupils. They met open questions already in the introduction, and in the last unit the topic was concretely word problems. Although most pupils showed improvement in this area as well, further development is necessary here.

Based on my previous teaching experiences, pupils have serious difficulties in the researched area. The main purpose of the developmental research was to find a method to introduce the exponential and logarithm processes and to teach and learn the relevant mathematical content that helps pupils learn the material more easily. In the lessons we utilized the computer and the opportunities of visual representation that the computer provides.

Based on the test results and the interviews with pupils results improved during the research. They accepted the realistic approach easily and we could explore the mathematical context together. They understood the exponential increase, the rational and irrational exponential considerably more easily, and they took the logarithm almost „for granted”.

I am planning to process those chapters of the secondary school material similarly that pupils are not exposed to generally, and the understanding of which is therefore much more difficult. Such topics may be for example trigonometry, sequences, but even coordinate geometry, algebraic expressions or different function types. It might be an interesting and useful experiment in the same time to compare the curriculum of the above mentioned Baden-Württemberg province and the Hungarian curriculum, emphasizing the advantages of both.

LITERATURVERZEICHNIS

Abfalterer, E. (2007). Foren Wikis Weblogs und Chats im Unterricht, Fachverlag für Medientechnik und –wirtschaft, p. 108

Ábrahám, G.; Dr. Kosztolányiné Nagy E.; Dr. Tóth J. (2011): Matematika 11. – középszint, Maxim Kiadó

Ambrus A. (1995): Bevezetés a matematikadidaktikába, Egyetemi jegyzet, ELTE, Eötvös Kiadó, Budapest

Ambrus A. (2002a): A problémamegoldás (feladatmegoldás) tanításának elméleti alapjai. Új Pedagógiai Szemle

Ambrus A. (2002b): A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban. http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambrus/aarepr.pdf (Heruntergeladen: 16.02.2010)

Bach, G. (2000): Bilingualer Unterricht: Lehren-Lernen-Forschen. In: Bach, G./Niemeier, S. (Hrsg.): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Frankfurt am Main: Peter Lang

Becker, G. E. (1984): Planung von Unterricht, Handlungsorientierte Didaktik, Teil I, Beltz Verlag, Weinheim und Basel p. 104

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.) (1996): Approaches to Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London

Bonk, C.J., & Graham, C.R. (2006). The handbook of blended learning environments: Global perspectives, local designs. San Francisco: Jossey-Bass/Pfeiffer. P. 6

Bruner, J. S. (1966): Toward a theory of instruction, Cambridge, Mass.: Belkapp Press.

Claus, H. J. (1989): Einführung in die Didaktik der Mathematik. Wiss. Buchges, Darmstadt, ISBN 3-534-08736-4.

Czapáry, E.; Gyapjas, F. (2010): Matematika a középiskolák 11. évfolyama számára, Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.

Darwin, C. J.; Turvey, M. T.; Crowder, R. G. (1972): An auditory analogue of sperling partial report procedure – evidence for brief auditory storage. In: Cognitive Psychology. 3(2), S. 255–267.

Der Meraner Lehrplan für Mathematik (1905), Wiederabdruck in: Klein, Felix und Schimmack, Rudolf: Vorträge über den mathematischen

Unterricht an den höheren Schulen, Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts, Leipzig 1907, S. 208-220.

Dönszné Buvári, N.; Emmer, A; Feuerstein, A; Mágocsi, Á.; Mettler, M.; Némethyné Mihály, M.; Várady, F.; Wendland, H.; Zeuner, L. (2000): Kompendium. Schülerarbeitsbuch Mathematik für den deutschsprachigen Fachunterricht an ungarischen Gymnasien. Fachgruppe DFU/Mathematik und Physik, Budapest

Engbersen, A (2009): Comparison of teaching exponential and logarithmic functions based on mathematics textbook analysis, Teaching Mathematics and Computer Science, Published by the Institute of Mathematics, and Faculty of Informatics University of Debrecen, Hungary

European Comission (2006): Content and language integrated learning (CLIL) at school in Europe. Unter: http://eacea.ec.europa.eu/portal/page/portal/Eurydice/ PubContents?pubid=071EN, p. 6

Freudenthal, H. (1973): Mathematics as an Educational Task. Reidel, Dodrecht

Freudenthal, H. (1991): Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1997): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Ernst Klett Verlag, Stuttgart

Friesen, N (2012):Report Defining Blended Learning, http://learningspaces.org/papers/ Defining_Blended_Learning_NF.pdf (Herunterladen: 21.03.2013)

Gardner, H. (1991): The unschooled mind. How children think and how schools should teach. Fontana Press London

Garrison, D. & Vaughan, N. (2008). Blended learning in higher education: Framework, principles, and guidelines. San Francisco, CA: John Wiley & Sons. p. 5

Gerhard Leitner: Gedächtnis und mentale Modelle. http://melville.uni-klu.ac.at:8080/greybox/m01/201c_PC_2.html (Herunterladen: 30.05.2013)

Gerrig, R., J.; Zimbardo, P., G. (2008).: Psychologie. München: Pearson Education Deutschland GmbH p. 276

Graham, C.R. (2006). Blended learning systems: Definition, current trends, and future directions. In C.J. Bonk & C.R. Graham (Eds.), The handbook of blended learning: Global perspectives, local designs (pp. 3–21). San Francisco: JosseyBass/Pfeiffer.

Gravemeijer, K.P.E. (1994a): Developing Realistic Mathematics Education. CD-ÿ Press / Freudenthal Institute. 25(5), p. 443-471..

Gravemeijer, K.P.E. (1994b): Educational development and developmental research inmathematics education. Journal for Research in Mathematics Education. Utrecht, The Netherlands.

Greeno, J. G. (1988): Situations, mental models, and generative knowledge (Report No. IRL 88–0005). Institute for Research on Learning. Palo Alto, CA

Haju, S.; Czeglédi, I.; Hajdu S. Z.; Kovács Z. (2012): Matematika 11. évfolyam – Gondolkodni jó

Hámori J. (1999): Az emberi agy aszimmetriái, Budapest-Pécs, Dialóg Campus Kiadó

Hentzschel, J.: http://tu-dresden.de/die_tu_dresden/fakultaeten/fakultaet_sprach_literatur_und_kulturwissenschaften/germanistik/ndl_didaktik/lehre/folder.2009-04-01.7577226048/ material_literaturdidaktik/ Sozialformen.doc Heruntergeladen am 4.06.12

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1995): The Didactical use of models in realistic mathematics education. Paper presented at the symposium on "Developing realistic mathematics education: A Dutch perspective". Annual Meeting of the American Educational Research Association. April 18. 1995 San Fancisco

Kátai, Z. (2005): Proof without words. Teaching Matematics and Computer Science 311-312.

Kieren S. - Pirie T. (1994): rowth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? In Cobb, P.: Learning mathematics. Constructivist and interactionist theories of mathematical development. Kluwer Academic Publishers Dordrecht

Kilpatrick, W. H. (1918): The project method. Teachers College Record, 19(4), 319-335.

Kommission der Europäischen Gemeinschaften: Förderung des Sprachenlernens und der Sprachenvielfalt: Aktionsplan 2004 – 2006. Brüssel 2003

Koepsell, A; Jannack, W. (2002): Einführung in diesen Baustein unter dem Aspekt der veränderten Unterrichtskultur. In: Unterrichtsbaustein

Funktionen. Regionale Lehrerfortbildung. Bezirksregierung Hannover. Lernwerkstatt Mathematik. http://www.fachmoderator-mathematik.de/fileadmin/Unterricht/ Funktionaler%20Zusammenhang/Baustein_Funktionen.pdf (Heruntergeladen: 12.08.2012)

Kosztolányi József-Kovács István-Pintér Klára-Urbán János-Vincze István (2003): Sokszínű matematika (középiskola 11. osztály), MOZAIK Kiadó, Szeged

Lambacher-Schweizer: Mathematik für Gymnasien, Ausgabe Baden-Württemberg, Schülerbuch, Band 5 (9. Schuljahr) 978-3-12-734391-5 (3-12-734391-4)

Landsman, N. (2008): Where have all the students gone? (Sag, wo die Studenten sind.) Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) 01/2009; 17(1). http://www.math.ru.nl/~landsman/DMV.pdf

Lange, J. de (1996): Using and Applying Mathematics in Education. in: A.J. Bishop, et al. (eds). 1996. International handbook of mathematics education, Part one. 49-97. Kluwer academic publisher

Leuders, T. (2010). Mathematikdidaktik - Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II., Berlin: Cornelsen. p.199

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen im Mathematikunterricht. In.: KREINER, K.(Hrsg):

IMST² Newsletter Jahrgang 2 / Ausgabe 8 / Winter 2003/04

Maresch, R. (2002): Der PISA-Schock, http://www.heise.de/tp/artikel/12/12929/1.html

MATEMATIKAI KOMPETENCIATERÜLET „A", Matematika 11. évfolyam TANULÓK KÖNYVE 1. FÉLÉV, Sulinova, Educatio Társadalmi Szolgáltató Nonprofit Kft: Heruntergeladen am 12.02.13 vom http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/11-evfolyam/1_diak_munkafuzetek_es_eszkozok/h-amat1101_diak-mf_1felev.pdf (S. 56-143.)

Meir Ben-Hur (2006): Concept-Rich Mathematics Instruction Building a Strong Foundation for Reasoning and Problem Solving, Association for Supervision and Curriculum Development (USA)

Miller, G. A. (1956): The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. In: Psychological Review. 63, S. 81–97.

Niendieck, J; Adler L. (2008): Das sensorische Gedächtnis, Universität Bremen WS 07/08, http://www.unconscious-learning.uni-bremen.de/Sensorisches_Gedaechtnis.pdf

Orosz, Gy.; Gerőcs, L.; Paróczay, J. (2005): Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. - NT-16125/I, Nemzeti Tankönyvkiadó

Otten, E./Wildgage, M. (2003): Content and Language Integrated Learning. Eckpunkte einer "kleinen" Didaktik des bilingualen Sachfachunterrichts. In: Wildhage, M./Otten, E. (Hrsg.): Praxis des bilingualen Unterrichts, Berlin: Cornelsen Verlag, S. 12-45.

Piaget, J (1997): Az értelem pszichológiája. Kairosz Kiadó, Budapest

Pólya Gy. (1971): A gondolkodás iskolája. Gondolat Kiadó Budapest

Pólya, Gy. A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, 1985, 129-

130 (I).

Post, R. - Behr, T. - Lesh, M. (1987): Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In Janvier, C.: Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum Hillsdale, NJ, p.33-40.

PR Newswire. (March 5, 1999). Interactive Learning Centers Announces Name Change to EPIC Learning. http://www.thefreelibrary.com/Interactive+Learning+ Centers+ Announces+ Name+Change+to+EPIC +Learning.-a054024665

Reber, P. (2010): What Is the Memory Capacity of the Human Brain? Scientific American Mind May, http://www.scientificamerican.com/article.cfm?id=what-is-the-memory-capacity

Schoenfeld, A. Mathematical Problem Solving. Academic Press, INC., New York, 1985, p. 74

Skemp, R. R. (2005): A matematikatanulás pszichológiája. Edge 2000 Kiadó, Budapest

Skinner, B. F. (1958): Teaching Machines. Science. 128:969-77.

Sperling, G. (1960): The information available in brief visual presentations. In: Psychological Monographs. 74(11), S. 1–29.

Stalker, H., & Horn, M. B. (2012): Classifying K–12 blended learning. Mountain View, CA: Innosight Institute, Inc.

http://www.innosightinstitute.org/innosight/wp-content/uploads/2012/05/Classifying-K-12-blended-learning2.pdf (Heruntergeladen: 30.05.2013)

Stankov, G. (2008): Konkrét és képi reprezentációk használata a hetedikosztályos algebratanításban. Egyetemi doktori (PhD) értekezés, Debreceni Egyetem, Természettudományi Doktori Tanács, Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen

Streefland, L. (1985): Searching for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (towards a theory). Educational Studies in Mathematics. 16, p. 75-94.

Streefland, L. (1991): Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), Realistic Mathematics Education in Primary School. p. 93-118. Freudenthal Institute, Netherlands

Szűcs, K. (2009): Schwierigkeiten im nichtfachspezifischen fremdsprachigen Mathematikunterricht, Egyetemi doktori (PhD) értekezés, Debreceni Egyetem, Természettudományi Doktori Tanács, Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen, p. 66

Tall, D. - Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Journal Educational Studies in Mathematics, 12 no. 2,

Treffers, A. (1987): Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991): Didactical background of a mathematics program for primary education. In: L. Streefland (ed), Realistic Mathematic Education in Primary School, CD-β Press/ Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands, pp. 21-56.

Tulodziecky, G. (2007). Handlungs- und entwicklungsorientierte Medienpädagogiktheoretische Grundlagen, Umsetzung und Forschung. In W. Sesnik, M. Kerres, & H. Moser, Jahrbuch Medienpädagogik 6. Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften. p. 110 – 111.

Vámos, Á. (2008): A kétnyelvű oktatás tannyelv-politikai problématörténete és jelenkora, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Vámos, Á.: The function of foreign language at the school-leaving examination and language pedagogy in bilingual education p. Paper 175. In: Assessment for a creative world, Brisbane, Ausztrália, 2009.09.13-2009.09.18. (2009)

Vancsó Ö.; Szabadi L.; Székely P.; Szász A.; Mezei J.; Nagyné Szokol Á.; Dömel A.; Marosvári P. (2006): Matematika 11. osztályosok számára, Műszaki kiad

Várady, F (2012): Teaching exponential and logarithmic functions and their applications through the software GeoGebra, University of Miskolc Miskolc, ISBN 978-963-661-988-6

Várady, F (2013): Using graphical calculators in teaching functions; In: Szendrő K, Soós M (szerk.) Proceedings of the 4th International Conference of Economic Sciences. 602 p. Konferencia helye, ideje: Kaposvár, Magyarország, 2013.05.09-2013.05.10. Kaposvár: Kaposvár University, pp. 96-103. (ISBN:978-963-9821-62-0)

Vásárhelyi Éva (2002): A vizuális reprezentáció fontossága a matematikaoktatásban. Tanártovábbképzés. ELTE TTK Matematikai Szakmódszertani Csoport http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/vasar/vizualis.pdf

Wachsmuth, I. (1981): Two modes of thinking- also relevant for the learning of mathematics. In For the learning of mathematics 2. (2),

Wendlandt, H. (2011): Das deutschsprachige Abitur in Ungarn: Ein zeitgemäßes Mittel der Schülerförderung. In: Deutschunterricht für Ungarn 2011/1-2.

Wertheimer, M. (1959): Productive thinking. Harper and Row New York

Wittman, E. Ch. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Friedr. Vieweg &Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden p. 101-103.

Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

ANHANG

Anhang A: Sozialformen im Unterricht

	Frontalunterricht	Einzelarbeit	Partnerarbeit	Gruppenarbeit
Vorteile	- binnen kurzer Zeit viele Schüler erreichbar - nicht von Medienausstattung abhängig - hohe Planbarkeit für Lehrer - Höchstmaß an Informationsvermittlung 1) - besonders bei schwierigen Themen geeignet - höhere Flexibilität, da direkt auf Schüler-verhalten, fortge-schrittene Zeit etc. eingegangen werden kann - kann Schüler motivieren, kennt vorhandenen Wissensstand, kann auf Lernniveau Rücksicht nehmen	- Schüler erarbeitet sich Selbstvertrauen und hohes Maß an Selbstständigkeit - eher Leistungsniveau des Einzelnen feststellbar, so kann Aufgabenstellung an jeden Einzelnen angepasst werden - konzentrationsför-dernd - einfache und schnelle Durchführung	- Förderung v. Kommunikation u. Interaktion - Schüler lernen einander zu helfen (starke/schwache Schüler) - selbst Erarbeitetes merkt man sich besser ← ebenso → - ist Art Vorbereitung der Schüler auf die Ansprüche der Gruppenarbeit (soziales Verhalten, Kommuni-kationsbereitschaft etc. Schulen); relativ konfliktarm - entspricht eher Situationen im täglichen Leben und Beruf →	- Höchstmaß an Interaktion und Kommunikation → verlagert sich auch in Frontalunterricht/ mehr Mitarbeit der Schüler - mehrere Themen können behandelt werden, da viele Gruppen - Klassengefühl stärken - Schüler lernen von und mit anderen Schülern ← Kontaktfähigkeit gehemmter Schüler 3) - komplexere Aufgaben möglich, da mehrere Personen - Bereitschaft zu kreativen Denkprozessen steigt
Nachteile	- verhindert Interaktion zwischen Schüler - Schüler als bloße Objekte - problematisch, wenn Lehrer auf sachlicher und formaler Ebene Lücken aufweist 2)	- Lehrer kann bei großer Klassenstärke nicht für jeden gleichermaßen helfend und beratend sein	- kein Ergebnis, wenn Kooperationsbereitschaft der Schüler fehlt → - für manche Schüler ist Zurückstellung des individualistischen Denkens u. hohe Kompromissfähigkeit schwierig →	- hoher Zeitaufwand, da später auch noch Auswertung nötig - schwache Schüler könnten untergehen - Gefahr der ungleichmäßigen Aufgaben-verteilung ← - hohes Maß an Selbstkritik und sozialen Umgangsformen notwendig

				- Gefahr, dass Qualität der Ergebnisse sinkt - Benotung schwierig 4) - kann an fehlender Methodenkompetenz des Lehrers scheitern

1. Höchstmaß an Informationsvermittlung, da Lehrer eher qualitative Unterscheidung v. best. Informationsquellen machen und Wichtigkeit der Informationen abwägen kann, einfacheren Zugang zu versch. Informationsquellen hat
2. - qualitative Ebene: sachliche und formale Kompetenz des Lehrers mangelhaft
   - quantitative Ebene: Zu häufig wird Lehrervortrag eingesetzt, was zur Einschränkung der aktiven Beteiligung der Schüler u. zur Unaufmerksamkeit führt.
3. In kleinen Gruppen trauen sich Schüler oft mehr zu und gehen eher aus sich heraus. → Ich-Stärkung sowie Entwicklung zu einer mündigen Persönlichkeit
4. - Individualnote: individuelle Leistung eines jeden Schülers schwer einzuschätzen
   - Gruppennote: einige Schüler könnten sich benachteiligt fühlen, andere werden für ihre Faulheit bestraft → Spannungen in der Klasse

   Kompromisslösung: Teilnoten für Sozialverhalten in der Gruppe, Gruppenarbeitsergebnis, individuelle Leistung in der Gruppe und erstelltes Arbeitsprotokoll (Inhalt: Arbeitsprozess, -ergebnisse, Schwierigkeiten, Verbesserungsmöglichkeiten, ungelöste Probleme) eines jeden Schülers.

Anhang B: Stoffverteilungsplan

1.	Vortest für Potenzen, Funktionen
2.	Erfahrungen des Vortestes; Wiederholung: Potenzen (Definitionen, Potenzgesetze für ganze Exponenten)
3.	Wiederholung: Wurzelziehen (Definition, Wurzelgesetze, Quadrat-, n-te Wurzel)
4.	Wiederholung: Wurzelziehen (Teilweises Radizieren, Faktor unter die Wurzel bringen, Rationalmachen des Nenners, Verschachtelung von Wurzelausdrücken)
5.	Wiederholung: Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Diskussionsschritte, Übungsaufgaben
6.	Kurztest
7.	Exponentielles Wachstum, exponentieller Rückgang an alltäglichen Beispielen
8.	Potenzen mit rationalen Exponenten (sogar an alltäglichen Beispielen), Aufgaben
9.	Potenzen mit rationalen Exponenten (Fortsetzung), irrationalen Exponenten, die Exponentialfunktion
10.	Aufgaben für die Exponentialfunktionen, Diskussion
11.	Lösung exponentieller Gleichungen mit Hilfe der Potenzidentitäten
12.	Lösung exponentieller Gleichungen mit Hilfe der Potenzidentitäten II.
13.	Lösung quadratischer exponentieller Gleichungen
14.	Lösung exponentieller Ungleichungen algebraisch und mit Hilfe von Funktionen
15.	Lösung exponentieller Gleichungssysteme
16.	Exponentielle Textaufgaben
17.	Zusammenfassung
18.	Kleine Klassenarbeit
19.	Begriff des Logarithmus an alltäglichen Beispielen
20.	Logarithmusfunktion, Zusammenhang mit der Exponentialfunktion (Kehrfunktion)
21.	Logarithmusgesetze im Textumfeld
22.	Basiswechsel, Arbeit mit Taschenrechner
23.	Aufgaben für die Logarithmusgesetze
24.	Komplexe Aufgaben für die Logarithmusgesetze, einfache Logarithmusgleichungen
25.	Logarithmusgleichungen mit Logarithmusgesetzen
26.	Logarithmusgleichungen mit Verschachtelungen, quadratische logarithmische Gleichungen

27.	Logarithmus im Exponenten, Logarithmus im Exponenten, gemischte exponentielle und logarithmische Gleichungen
28.	Gleichungen mit neuen Basen
29.	Logarithmische Ungleichungen
30.	Logarithmische Gleichungssysteme
31.	Textaufgaben für logarithmisch lösbare Probleme
32.	Zusammenfassung
33.	Zusammenfassende Klassenarbeit

Anhang C: Lehrbüchervergleich

	Exponentielle Vorgänge							Log.
	Wiederholung, *reelle Exponenten, n-te Wurzel*	Exp.-Einführung mit **Textaufgaben**	**Dekontextulaisierung**	**Mechanisches Einüben**	**Verallgemeinerung**	**Rekontextualisierung**	Alltägliche Beispiele, **Realisation**	Eiführung von **Log.** durch **ähnliche Beispiele** wie bei **Exp.** (Vertiefung)
a) Kosztolányi	ja, nur mathematisch	nein	nein, im ganzen Abschnitt nur eine praktische Aufgabe	ja	ja, durch mathematische Mittel	nein	nein	ja, am Ende einige praktische Anwendungen
b) Ábrahám	ja, nur mathematisch	nein	nein, nur eine Textaufgabe	ja	ja, durch mathematische Mittel	nein	nein	ja, aber das ist die einzige Textaufgabe
c) Czapári	fast kaum	nein	nein	ja, wenig	ja, durch mathematische Mittel	nein	nein	nein
d) Hajdu	wenig	ja, aber keine andere in diesem Teil	zum Teil wird die Theorie durch dieses Beispiel eingeführt	ja	ja, durch mathematische Mittel	nein	in diesem Teil nicht, bei Log. ja	eine andere, aber Textaufgabe
e) Vancsó	wenig	ja	ja, viele Beispiele	ja	ja, durch mathematische Mittel	ja	ja	nein, aber später viele Textaufgaben
f) Sulinova	ja, auch mit Textaufgaben	nein	nur teilweise, lieber bei log. Teil	ja	ja, durch mathematische Mittel	nein	nur teilweise, lieber bei log. Teil	nein
g) Lambacher	Als neues Material eingeführt, viele Drill- und Textaufgaben	nein	ja, viele verschiedene Textaufgaben	ja	nein, nur einfache Gleichungen	nein	ja	nein, aber viele praktische Anwendungen

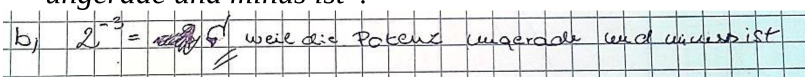
Anhang D: Ausführliche Ergebnisse und Analyse des Vortests

			Schüler																			
		Maximale Punktzahl																		**Durchschnitt**	**%**	**Stand.Abw.**
Aufg	Teila		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17			
1.	a)	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,94	4,1	0,24
	b)	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0,18	7,7	0,39
	c)	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0,53	2,9	0,51
	d)	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0,88	8,2	0,33
	e)	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0,5	1	0,56	5,9	0,50
	f)	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0,5	0,26	6,5	0,44
2.		4	2	0	1	4	2	2	0	4	0	0	3	0	0	0	3	3	0	1,41	5,3	1,54
3.	A	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0,47	1,2	0,51
	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0,88	8,2	0,33
	C	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0,76	6,5	0,44
	b)	2	2	1	1	2	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0,65	2,4	0,70
	c)	5	2	4	4	5	5	2	2	0	2	0	2	2	0	4	5	4	2	2,65	2,9	1,73
4.	a) Tab	2	0	0	2	2	1	0	2	2	0,5	2	0	0,5	2	0	2	1	0	1,00	0,0	0,92
	a) Dars	2	0	0	2	2	2	0	0	2	1	2	0	2	1	0	2	2	0	1,06	2,9	0,97
	a) Zuo.v.	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0,24	1,8	0,66
	b) Versch	2	2	2	1	2	0	0	2	2	2	1	1	2	0	1	2	2	1	1,35	7,7	0,79
	b) Dars.	2	2	2	2	2	0	0	2	2	2	0	0	2	0	0	2	2	0	1,18	8,8	1,01
	c) lin	2	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0,29	4,7	0,69
	c) quad	2	0	0	0	2	0	0	2	2	1	2	1	0	0	0	2	2	0	0,82	1,2	0,95
	d) Bp.lin.	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0,47	7,1	0,51
	d) Bp.quad.	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00	,00	0,00
Ergebnisse:		36																			5,9	
Prozent:																						

Tabelle: Ergebnisse des Vortests – eigene Quelle

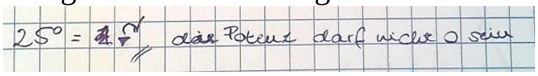
	Aufg.	**1.**						**2.**	**3.**				
	Teila.	***a)***	***b)***	***c)***	***d)***	***e)***	***f)***		***A***	***B***	***C***	***b)***	***c)***
$\bar{x}$		0,94	0,18	0,53	0,88	0,56	0,26	1,41	0,47	0,88	0,76	0,65	2,65
%		94,12	17,65	52,94	88,24	55,88	26,47	35,29	41,18	88,24	76,47	32,35	52,94
σ		0,24	0,39	0,51	0,33	0,5	0,44	1,54	0,51	0,33	0,44	0,7	1,73
	Aufg.	**4.**									***Ergebnis*:**		
	Teila.	***a)*** *Tab.*	***a)*** *Darst.*	***a)*** *Zuo.v.*	***b)*** *Versch.*	***b)*** *Darst.*	***c)*** *lin.*	***c)*** *quad.*	***d)*** *Bp. lin.*	***d)*** *Bp. Quad.*			
$\bar{x}$		1	1,06	0,24	1,35	1,18	0,29	0,82	0,47	0	**16,59**		
%		50	52,94	11,76	67,65	58,82	14,71	41,18	47,06	0	**45,9**		
σ		0,92	0,97	0,66	0,79	1,01	0,69	0,95	0,51	0			

1. Aufgabe: *Potenzberechnung ohne Taschenrechner*
   a) $3^4 =$
   Diesen Teil haben fast alle richtig gelöst, bis auf eine Schülerin, die als Ergebnis $27 \cdot 3 = 71$ angegeben hat. Sie wusste also auch, was man machen muss, sie hat sich einfach verrechnet.
   b) $2^{-3} =$
   Nur drei Schüler konnten das richtige Ergebnis angeben. Ganz merkwürdig ist es, was die anderen Schüler geantwortet haben, wie sie denken:
   - 4 Schüler haben nichts geschrieben
   - 4 haben einfach als Ergebnis -8 angegeben
   - 2 Schüler haben die folgende Formel mit dem Ergebnis angegeben: $2^{-3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$
   - 1 Schüler hat einfach $(-2)(-2)(-2)$ geschrieben
   - 1 Schüler hat ein ähnliches Ergebnis angegeben: $(-2)(-2)(-2) = -6$
   - 1 Schüler hat -18 geschrieben
   - 1 Schüler hat das Symbol ↯ gesetzt, und er hat als Begründung folgendes angegeben: „*weil die Potenz ungerade und minus ist*".

   c) $25^0 =$

9 Schüler wussten richtig, was die nullte Potenz einer von Null verschieden Zahl bedeutet.

- 5 Schüler haben 25 geschrieben
- 3 Schüler heben so gemeint, dass diese Potenz nicht definiert ist, sie haben die folgenden geschrieben:
  „↯ *die Potenz darf nicht 0 sein*“ – dieser Schüler hat den vorigen Teil auch nicht gedeutet
  
  „↯ *keine Lösung*“
  „*nincs értelmezve*“

d) $\frac{2^3}{3} =$

Nur zwei Schüler haben die Aufgabe falsch gelöst. Der eine hat $\frac{18}{3}$, der andere „*nincs értelmezve*“ geschrieben. Die anderen sind aber in die Falle des Bruches nicht hineingefallen.

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$

Neun Schüler haben die Aufgabe richtig gelöst. Die anderen haben die folgenden Fehler begangen:

- 1 Schüler hat den Näherungswert der Basis (falsch gerundet) angegeben (0,66), und das Ergebnis mit Taschenrechner berechnet – obwohl der Taschenrechner nicht erlaubt war (0,287496).
- Die anderen falschen Antworten wären theoretisch richtig gewesen, also der Zähler und Nenner wurden getrennt potenziert, aber die Potenzwerte wurden falsch angegeben. z. B.: $\frac{6}{27}; \frac{12}{27}; \frac{8}{24}; \frac{8}{9}$.

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

Interessanterweise konnten diesen Teil 4 Schüler richtig lösen, zwei davon, die auch den Teil b) richtig gelöst haben, und zwei weitere Schüler. Von denen hat nur ein Schüler das Ergebnis nicht in Potenzform gelassen, also die Aufgabe völlig so gelöst, wie gedacht war.

- 5 Schüler haben einfach das Vorzeichen vor den Bruch gebracht, also $-\frac{8}{27}$ geschrieben.
- 3 Schüler haben diese Frage nicht beantwortet.
- Die anderen haben verschiedene falsche Ergebnisse geschrieben, was bei fast allen gemeinsam war, dass sie das

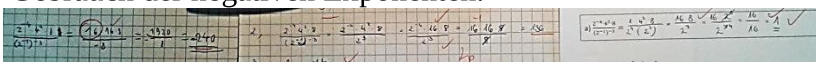
Vorzeichen vor den Bruch gebracht haben, z. B.: $\frac{-18}{-9}$; $-\frac{6}{27}$; $-\frac{1}{3}$; -287496; $\frac{2}{27}$.

2. Aufgabe: *Berechne ohne Taschenrechner den genauen Wert der folgenden Potenzen. Das Ergebnis darf in Bruchform aufgeschrieben werden. Benutze dazu die Definitionen und Identitäten der Potenzen!*

$$\frac{2^{-4} \cdot 4^2 \cdot 8}{(2^{-1})^{-3}} =$$

Bei dieser Aufgabe interessierte mich, wie die Schüler mit zusammengesetzten Potenztermen mit konkreten Werten umgehen können. In der Instruktion stand, dass sie bei der Lösung die Potenzidentitäten benutzen müssen, aber wenn sie manchmal – wo es möglich war – die Werte zuerst ausgerechnet haben, habe ich auch die entsprechende Punktzahl angegeben. Die maximale Punktzahl dieser Aufgabe war 4, die nur zwei Schüler erreicht haben, sie haben die Aufgabe richtig gelöst und das richtige Ergebnis berechnet.

- 3 Schüler haben 3 Punkte bekommen, weil sie die Aufgabe richtig gelöst haben, aber sie nicht beendet haben.
- 3 Schüler haben 2 Punkte bekommen, weil sie bestimmte Zusammenhänge richtig, einige falsch benutzt haben.
- 2 Schüler haben die Aufgabe überhaupt nicht angefangen.
- Die weiteren Schüler haben schon am Anfang eine Reihe von fatalen Fehlern begangen. Solcher war u.a. der falsche Gebrauch der negativen Exponenten.



3. Aufgabe: *Löse die Aufgaben!*

   a) *(2006.02. (2)) Entscheide von den folgenden Gleichungen, ob sie richtig oder falsch sind bei allen reellen Werten?*
   Diese Aufgabe war im oben genannten Jahr eine Abiturfrage (2), hier mussten sich die Schüler nur ohne Begründung entscheiden, ob die Gleichungen richtig oder falsch sind.

      A. $b^3 + b^7 = b^{10}$
      In diesem Teil haben nur 7 Schüler eine richtige Antwort gegeben (dass die Gleichung falsch ist), ein Schüler hat nichts geschrieben, die anderen haben – ohne Ausnahme – keine Begründung für ihre falsche Wahl gegeben (das hat auch nicht die Aufgabe erwartet). Das Ergebnis ist für mich sehr verblüffend, da sie die Multiplikation mit der Addition vertauschen, und um dieses Vertauschen machen sie keine Sorge. Sie hätten hier nur sehr einfache Zahlen einsetzten können – z.B. die 1 – um die Falschheit der Aussage sehen

zu können. Währen der Auswertung habe ich sie darauf aufmerksam gemacht, und sie waren sehr erstaunt, dass man so etwas machen kann. In der 11. Klasse ist für viele in der Klasse noch nicht klar, dass in einem mathematischen Term den Buchstaben entsprechende Zahlenwerte entsprechen könn(t)en.

B. $(b^3)^7 = b^{21}$

Diesen Teil haben nur zwei Schüler falsch geschrieben. Diese zwei Schüler haben sonst die zwei wenigsten Gesamtpunktzahlen erreicht. Die Potenzen von Potenzen haben schon auch viele in der 2. Aufgabe im Nenner richtig berechnet, obwohl es da zwei negative Exponenten gab. Ein Schüler hat sich mit der Aufgabe nicht beschäftigt.

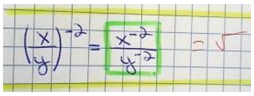
C. $b^4 b^5 = b^{20}$

Diese Frage wurde auch von fast allen Schülern richtig beantwortet. Drei haben eine falsche Antwort gegeben, die zwei, die allen drei Fragen falsch beantwortet haben, und ein weiterer Schüler. Ein Schüler hat sich mit der Aufgabe nicht beschäftigt.

b) *(2005.05. (6)) Bringe den folgenden Term in eine möglichst einfache Form* $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = !$

Diese Aufgabe war wieder eine Abituraufgabe im oben angegebenen Zeitpunkt. Sie war ganz ähnlich wie die Aufgabe 1. f), mit dem Unterschied, dass hier statt Zahlen Buchstaben stehen. Das Resultat war auch sehr ähnlich. Die Aufgabe wurde nur von zwei Schülern völlig richtig gelöst, sie haben auch 1. f) richtig beantwortet. 7 Schüler haben die Hälfte der Punktzahl bekommen, weil sie etwas richtig angefangen haben. Sie konnten aber die Aufgabe nicht beenden.

- 1 Schüler hat $\left(\frac{y}{x}\right)^2$, 1 Schüler $\frac{y^2}{x^2}$ als richtige Lösung angegeben.
- 7 Schüler haben die Aufgabe nur angefangen: $\frac{x^{-2}}{y^{-2}}$ geschrieben.

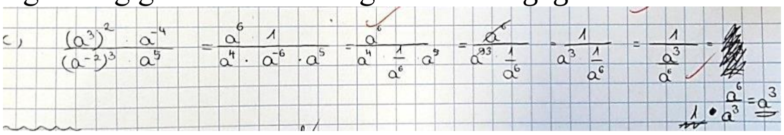


- 3 Schüler haben hier nichts geschrieben.
- Weitere falsche Lösungen waren z.B.: $\frac{x^2}{y^2} = x^{-2}y^2$; $\left(\frac{x^{-2}}{y}\right)$.

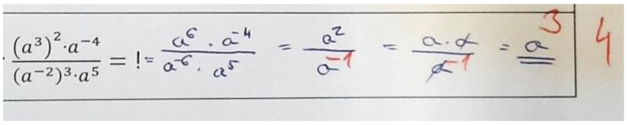
Den Definitionsbereich hat kein Schüler untersucht, nicht einmal die Aufgabe hat darauf hingewiesen!

c) *Bringe den folgenden Term in eine möglichst einfache Form:* $\frac{(a^3)^2 \cdot a^{-4}}{(a^{-2})^3 \cdot a^5} = !$

Für diesen Teil konnte man höchstens 5 Punkte bekommen. Diese Punktzahl haben 3 Schüler erreicht, sie haben also die Aufgabe völlig richtig gelöst und das Ergebnis a^3 angegeben.



- 7 Schüler haben die Klammern aufgelöst und $\frac{a^6 \cdot a^{-4}}{a^{-6} \cdot a^5}$ geschrieben. Einige haben das so gelassen, die anderen haben sie falsch weitergemacht. Sie haben je 2 Punkte bekommen.
- 4 Schüler konnten nur den letzten Schritt nicht machen, nämlich $\frac{a^2}{a^{-1}}$ nicht beenden. Sie haben je 4 Punkte bekommen.



- 1 Schüler hat nichts geschrieben.
- Die anderen Schülern haben schon beim Anfang falsch überlegt, z.B.: $\frac{a}{-a} = -1; oder \frac{a}{a} = 1.$

4. Aufgabe

In dieser Aufgabe wollte ich im Bilde sein, wie sich die Schüler an die Funktionen, an ihre Transformationen, Darstellung erinnern. Ich habe so gedacht, dass es reicht, die zwei einfachen Funktionsklassen – die lineare und die quadratische – abzufragen. Im letzten Teil habe ich auf die praktischen Anwendungen der Funktionen gefragt. Da ich die ungarische Unterrichtsmethode kenne, ich war im Voraus schon fast sicher, dass dieser Teil ihnen am schlechtesten gelingt. Am Ende hat sich mein Verdacht bestätigt. Eben aus diesem Grund habe ich dieses entwickelnde Unterrichtsexperiment angefangen, damit sich diese Lage ändert.

a) *Fülle die fehlenden Werte der Tabelle aus, zeichne die folgende* ***lineare*** *Funktion im kartesischen Koordinatensystem, dann gib die Zuordnungsvorschrift an:*

X	-3	-1	0		4	
f(x)	-10	-6		2		8

A. Die richtigen Werte der Tabelle wurden von 7 Schülern gefunden.

- 5 Schüler haben überhaupt nichts geschrieben.
- 2 Schüler haben nur *f*(0) richtig ausgerechnet.
- 1 Schüler hat *f*(0) und *f*(4) richtig ausgerechnet, die andere Richtung ist ihm nicht gelungen.
- 1 Schüler hat alles falsch berechnet.
- 1 Schüler hat aus beiden Richtungen je eine richtige Berechnung.

B. Die Darstellung ist 8 Schülern richtig gelungen.

- 6 Schüler haben sich mit der Darstellung überhaupt nicht beschäftigt. Interessanterweise ein Schüler, die die Tabelle richtig ausgefüllt hat, hat den Graphen nicht dargestellt.
- Bei einem Schüler, der die Tabellenwerte teilweise falsch berechnet hat, war die lineare Funktion „krumm“.
- Bei einem Schüler war die Steigung der Geraden richtig, aber die y-Achsenabschnitt falsch.
- Bei einem Schüler bestand der Graph aus richtigen isolierten Punkten.

C. Die Zuordnungsvorschrift konnten nur 2 Schüler richtig angeben.

- 1 Schüler hat einfach $\frac{2}{4}x$ geschrieben.
- Die anderen Schüler haben überhaupt nichts geschrieben.

b) *Zeichne die folgende* ***quadratische*** *Funktion im kartesischen Koordinatensystem:* $f(x) = (x+2)^2 - 4$

Ich habe hier die Bewertung Aufgabe in zwei Teile zerlegt: für die Verschiebungen konnte man 2 Punkte, für die richtige Parabel weitere zwei Punkte bekommen.

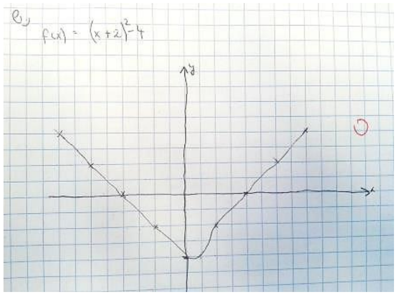
A. Die Verschiebungen konnten 9 Schüler richtig verwenden.

- 5 Schüler haben die Parabel entweder vertikal oder horizontal richtig verschoben, die horizontale bedeutete für sie – wegen der umgekehrten Richtung – eine Schwierigkeit.

- Die anderen haben beide Verschiebungen verfehlt, ein Schüler hat nichts gezeichnet.

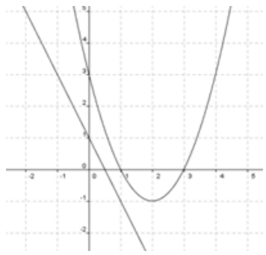
B. Die Form der Parabel

- 9 Schüler haben die Aufgabe völlig richtig gelöst.
- 4 Schüler haben zwar eine Parabel gezeichnet, aber sie haben sie entweder gestreckt oder gestaucht.



- 2 haben die richtige Form gefunden, wegen der Verschiebung war aber die Aufgabe falsch.
- 1 Schüler hat eine V-Form gezeichnet.
- 1 Schüler hat nichts geschrieben.

c) *Gib die Zuordnungsvorschriften der folgenden, mit ihren Graphen angegebenen Funktionen an!*



Bei der linearen Funktion konnten nur 2 Schüler die richtige Zuordnungsvorschrift angeben, bei der quadratischen 6. Das fand ich sehr interessant, da ich gedacht habe, dass die, der linearen einfacher ist. Vielleich hat bei der quadratischen der vorige Teil geholfen.

A. Lineare Funktion

- 6 Schüler haben nichts geschrieben.
- 6 Schüler haben etwas total Falsches geschrieben.
- 1 Schüler hat $-2x$ geschrieben.

B. Quadratische Funktion

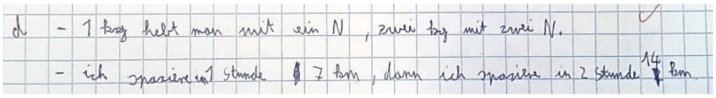
- 5 Schüler haben nichts geschrieben.
- 2 Schüler haben etwas total Falsches geschrieben.
- Weitere Lösungen waren: $(x+2)^2-1$; $(x+2)^2-4$; $(x+2)^2+2$.

d) *Gib solche alltäglichen Probleme an, die mit linearer oder quadratischer Funktionen lösbar sind (z.B.: wenn ich eine Flasche Cola kaufe, bezahle ich 200 Ft, bei zwei Flaschen 400 Ft usw. (lineare Funktion))*

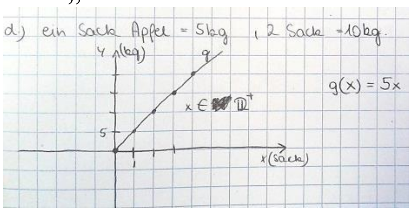
Ich habe den Schülern mit dem Beispiel geholfen, weil sie solche Aufgabenstellung früher nicht oder sehr selten gehört haben. Ich habe gehofft, dass sie mindesten in der Physikstunde solche Vorgänge kennengelernt haben (z.B. die verschiedenen Arten der Bewegungen). Ich habe gehofft, dass sie zu den linearen Funktionen vielleicht ein anderes Beispiel angeben können.

A. Lineare Funktion

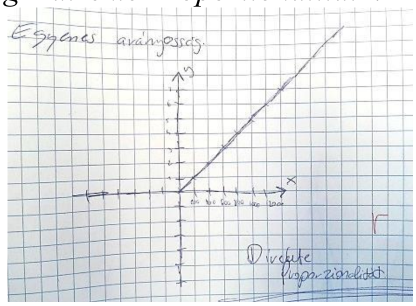
- 1 Schüler gibt sogar zwei andere Beispiele wie meine an:



- 7 Schüler haben hier ein ganz ähnliches Beispiel angegeben, wie ich.
- Ein Schüler hat dazu sogar die Zuordnungsvorschrift angegeben, und er hat die Funktion dargestellt. Der Fehler der Zuordnungsvorschrift und der Darstellung ist, dass sie beide in der Menge der natürlichen Zahlen hätte definieren müssen, oder im Text angeben müssen, dass man auch „Teilsäcke“ kaufen kann.

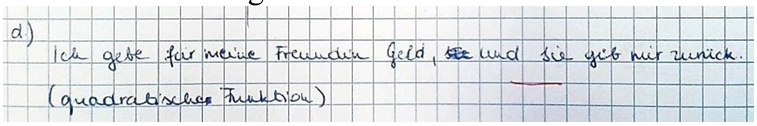


- Ein weiterer Schüler hat den Graphen der Zuordnung dargestellt – ohne Zuordnungsvorschrift und mit dem gleichen Fehler des Definitionsbereiches.
- Ein Schüler hat einfach hingeschrieben: „*egyenes arányosság – direkte Proportionalität*“.



- 4 Schüler haben ein Koordinatensystem gezeichnet, wo die Achsen vertauscht sind, und eine lineare Funktion, ohne Text.
- Die anderen haben nichts geschrieben.

B. Für die quadratische Funktion ist ein Versuch gekommen, das sehr merkwürdig ist:


d)
Ich gebe für meine Freundin Geld, ~~sie~~ und sie gib mir zurück.
(quadratische Funktion)

Anhang E: Ausführliche Analyse der Wiederholung

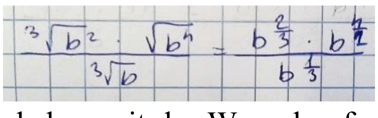
1. Aufgabe: In dieser Aufgabe kamen sowohl Potenzterme als auch Wurzelterme vor. Während der Wiederholung haben wir die Wurzelterme in Wurzelform gelöst. Im Test habe ich den Schülern nicht vorgeschrieben, wie sie sie lösen müssen.

   A. $\frac{3^{-4}\cdot 9^{2}\cdot 27}{\left(3^{-1}\right)^{-3}} =$; $\frac{\left(b^{3}\right)^{2}\cdot b^{-4}}{\left(b^{-2}\right)^{3}\cdot b^{5}} =$

   - Die erste Aufgabe wurde nur von 3 Schülern völlig richtig gelöst. Für mich war interessant, dass den Term mit konkreten Zahlen ein Schüler, mit Buchstaben zwei Schüler gelöst haben.
   - Alle Schüler haben die Aufgabe angefangen, 4 Schülern konnte ich leider keinen Punkt geben.
   - Die anderen Schüler haben die Aufgabe teilweise richtig gelöst. Typischer Fehler war, dass nach dem richtigen Klammerauflösen viele Schüler die Exponenten nicht oder falsch zusammenfassten, in erster Linie in der Relation des Bruches.

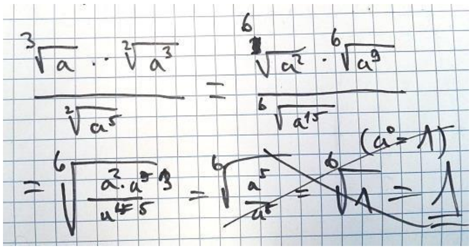
   B. $\frac{\sqrt[3]{b^{2}}\cdot\sqrt{b^{4}}}{\sqrt[3]{b}} =$; $\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a^{3}}}{\sqrt{a^{5}}} =$

   - Nur 1 Schüler konnte die Aufgabe völlig richtig lösen, 1 weiterer Schüler kam bis zum letzten Schritt.
   - 4 Schüler versuchten, die Wurzeln in Potenzform umschreiben[16], 2 ist es richtig gelungen, bei den weiteren Rechnungen haben sie sich verrechnet. 2 Schüler bekamen nach der Umformung ganze Exponenten heraus.



   - 3 Schüler haben mit der Wurzelumformung richtig angefangen, aber falsch weitergerechnet.

[16] Die rationalen Exponenten haben wir exakt in der 8. Stunde besprochen und geübt. Ich habe in der Stunde nur darauf hingewiesen, dass die Wurzeln durch Potenzen ersetzbar sind. Auf Anfrage der besten Schüler habe ich kurz gezeigt, wie es läuft, so haben 4 Schüler im Test diese Methode verwendet.

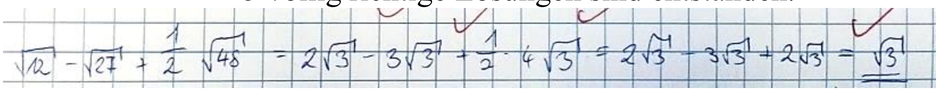


- Die anderen Schüler haben keinen Punkt bekommen.

2. Aufgabe: $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$; $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$

   In dieser Aufgabe mussten die Schüler die verschiedenen Wurzeloperationen verwenden (natürlich ohne Taschenrechner).

   - 5 völlig richtige Lösungen sind entstanden.



   - 1 Schüler hat nur im letzten Schritt einen Fehler begangen.
   - 4 Schüler haben die Aufgabe richtig angefangen, aber die nächsten Schritte waren zumindest teilweise falsch.
   - Die anderen haben schon am Anfang Fehler begangen, aber alle haben die Aufgabe angefangen.

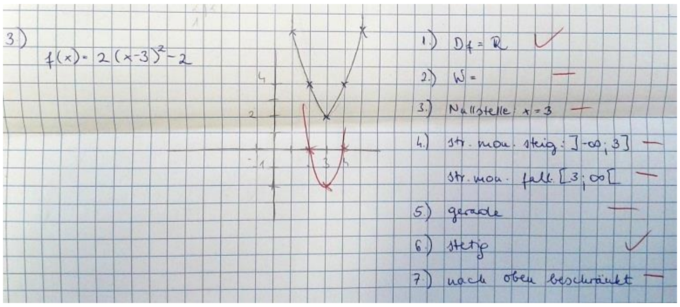
3. Aufgabe: Stelle die Funktionen dar und diskutiere sie!

   $f(x) = 2(x-3)^2 - 2$; $f(x) = -(x+1)^2 + 3$

   A. Darstellung
      - 10 Schüler haben die angegebene Funktion richtig dargestellt.
      - 5 Schüler haben entweder die eine Transformation verfehlt oder die Form der Parabel war nicht exakt.
      - Nur zwei Schüler haben die Aufgabe völlig verfehlt, der eine davon kannte die Parabelform, aber beide Verschiebungen waren falsch, der andere hat nichts Erwähnenswertes gemacht.

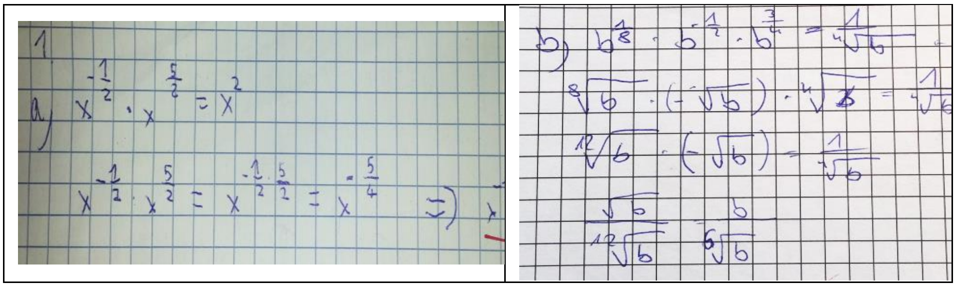
   B. Charakterisierung

      Da die Schüler die Eigenschaften der Funktionen aus dem Graphen ablesen, war die Verteilung der Ergebnisse ähnlich wie im Teil A).

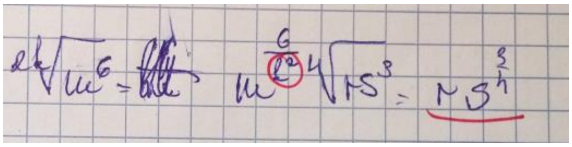

3.)
f(x) = 2 (x-3)² - 2
1.) Df = R
2.) W =
3.) Nullstelle: x = 3
4.) str. mon. steig:]-∞; 3]
str. mon. fall. [3; ∞[
5.) gerade
6.) stetig
7.) nach oben beschränkt

Anhang F: Ausführliche Analyse des exponentiellen Kleintests

<u>Aufgabe 1</u>: Sowohl im Teil a) und im Teil b) wurden 15 richtige Antworten gegeben. In drei Fällen davon wurde keine Erklärung angegeben, nur die Wörter RICHTIG oder FALSCH. Bei sechs Schülern wurde eine falsche Schlussfolgerung gezogen, zweimal davon ohne Begründung. Bei den restlichen vier Schülern wurden die Potenzgesetzte falsch verwendet – bei der Multiplikation gleicher Basen wurden auch die Exponenten miteinander multipliziert oder die Potenzen wurden fasch in Wurzelform angegeben.

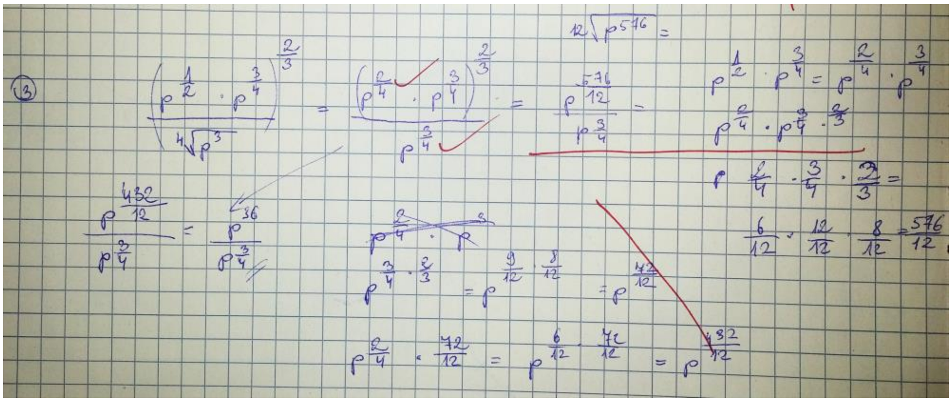


<u>Aufgabe 2</u>: Zwölf Schüler haben alle fünf Teile richtig gelöst. Als typische Fehler kann man bezeichnen, dass im Term $\sqrt[4]{rs^3}$ nur s^3 mit $\frac{1}{4}$ potenziert wurde. Bei fünf Schülern wurde so als Lösung $rs^{\frac{3}{4}}$ angegeben. Bei weiteren drei Schülern wurden im Term $\sqrt[5]{x^3y^4}$ die Exponenten von x und y multipliziert und durch 5 geteilt. Sie haben als Ergebnis $xy^{\frac{12}{5}}$ geschrieben. Noch für den Term $\sqrt[2k]{m^6}$ wurden zwei verschiedene falsche Lösungen angegeben: $\sqrt[2]{mk^6}$ und $m^{\frac{6}{k^2}}$.



<u>Aufgabe 3</u>: In diesem Test war für die Schüler diese Aufgabe am schwersten. Eine Schülerin hat die Aufgabe überhaupt nicht angefangen. Die meist begangenen Fehler waren einerseits, dass sechs Schüler bei der Multiplikation der Basen auch die Exponenten multipliziert haben. Andererseits haben fünf Schüler die Klammer nicht richtig aufgelöst. Sie haben entweder die Exponenten nicht multipliziert oder addiert, oder bei der Multiplikation zweier Brüche haben sie nur die Zähler miteinander multipliziert. Bei einem Schüler wäre die Aufgabe theoretisch richtig gelöst, er hat sich aber bei der Addition verrechnet: für 8+3 hat er 10

bekommen. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht beendet, zwei haben das Ergebnis am Ende nicht gekürzt. Völlig richtig konnten die Aufgabe nur vier Schüler lösen.



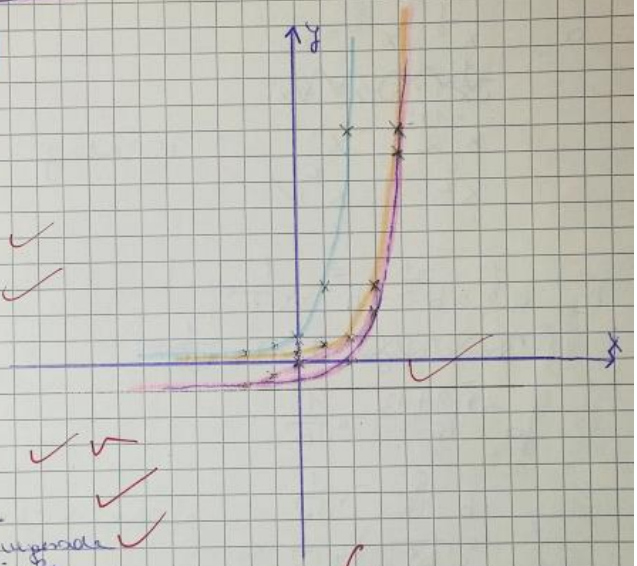
<u>Aufgabe 4</u>: Die vierte Aufgabe konnten neun Schüler völlig richtig lösen. Sowohl die Darstellung als auch die Diskussion enthalten keine Fehler. Es gab darunter solche, die gleich die transformierte Funktion angegeben haben aber auch solche, die die Transformationen Schritt für Schritt durchführten. Bei einem Schüler wurde der Wertebereich falsch angegeben (Gruppe A: $]-1;\infty[$), obwohl die Darstellung richtig war, bei einem anderen war dafür $\boldsymbol{R}$ angegeben, aber auch die untere Schranke des Funktionsgraphen war falsch (-1). Vier Schüler haben sowohl den Graphen als auch die Diskussion falsch angegeben und es gab zwei Schüler, die richtig dargestellt aber nicht diskutiert haben. Bei zwei Schülern wurden zwar richtige Elemente der Diskussion gefunden, ich hatte aber das Gefühl, dass sie lieber getippt haben (Monotonieverhalten, Extremstellen – keine; Beschränktheit). Zwei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen.

4.)

$f(x) = 3^{x-2} - 1$

Grundfunktion 3^x

3^{x-2}



Df: $x \in \mathbb{R}$

Rf: $y \in \,]-1, \infty[$

Nullstelle:

$3^{x-2} - 1 = 0$

$3^{x-2} = 1$

s. m. steigend

keine extrem stellen

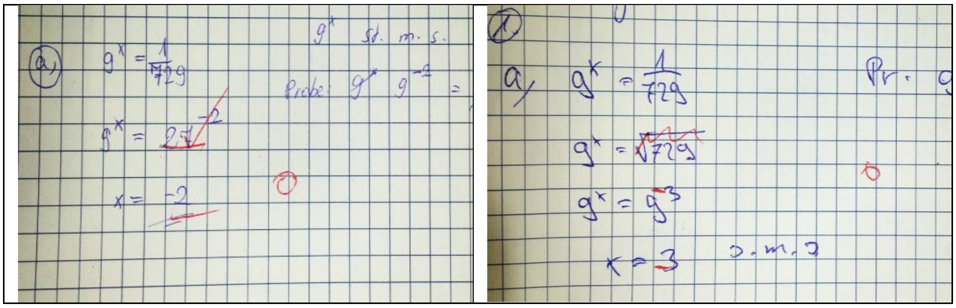
weder gerade noch ungerade

nach ~~unten~~ oben beschränkt

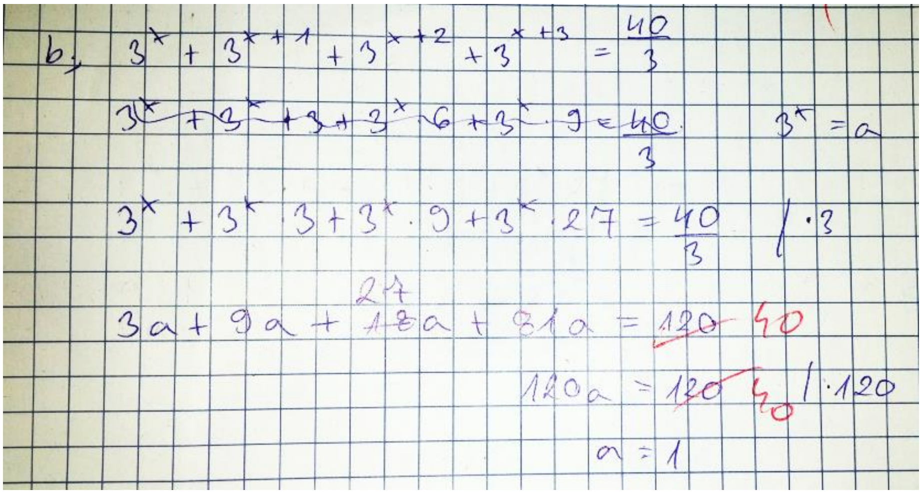
6

Anhang G: Ausführliche Analyse des exponentiellen Großtests

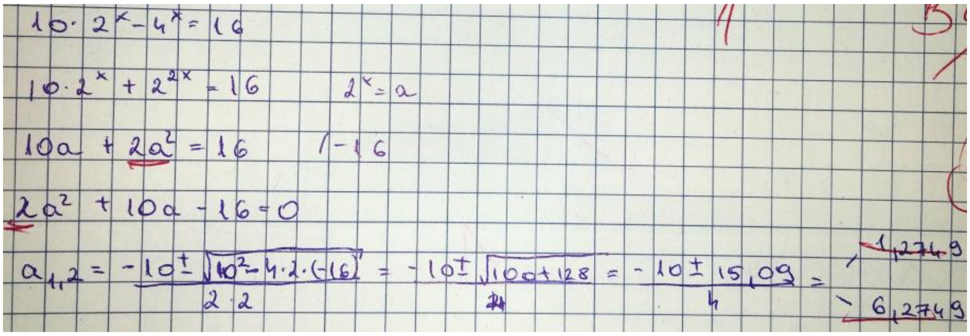
Aufgabe 1. a): Die Aufgabe wurde von sieben Schülern völlig richtig gelöst. Es gab einen Schüler, der die Aufgabe richtig angefangen aber nicht beendet hat. Es gab zwei solche, die sich im letzten Schritt verrechnet, verschrieben haben: bei dem einen stand $x = \frac{12}{5} = 2^{\frac{12}{5}}$, bei dem anderen $7^{\frac{5x}{20}} = 7^{\frac{12}{20}} \Rightarrow x = 0{,}4$. Wieder zwei Schüler haben ein falsches Ergebnis bekommen, sogar die Probe durchgeführt und dort „eingesehen", dass die falsche Lösung richtig wäre: $9^x = 27^{-2} \Rightarrow x = -2; Probe: 9^{-2} = \frac{1}{729}$; im zweiten Fall $x = 3 \Rightarrow 9^3 = \frac{1}{729}$. Ein Schüler hat die Aufgabe völlig falsch angefangen: $\sqrt[4]{7^x} = \sqrt[5]{343} \Rightarrow \frac{7^x}{4} = \frac{343}{5}$. Zwei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen.



Aufgabe 1. b): Die Aufgabe haben fünf Kinder richtig gelöst, eins hat sie nicht angefangen. Bei zwei Schülern trat der gleiche Fehler auf, sie haben für 3^{x+1} den Term $3^x + 1$ geschrieben. Bei sechs Schülern wurde 3^x bzw. 9^x mit einem anderen Buchstaben ersetzt (z.B. mit a). In einer Arbeit bekam der Schüler aus der Gleichung $120a = 40 \Rightarrow a = 0{,}3$, leider konnte er nicht weiterkommen. Ein weiterer hat als Lösung der Gleichung $3^x = 0{,}33 \Rightarrow x = 1$ bekommen. Zwei Schüler haben bei der Multiplikation den gleichen Fehler begangen: $\frac{40}{3} \cdot 3 = 120$.

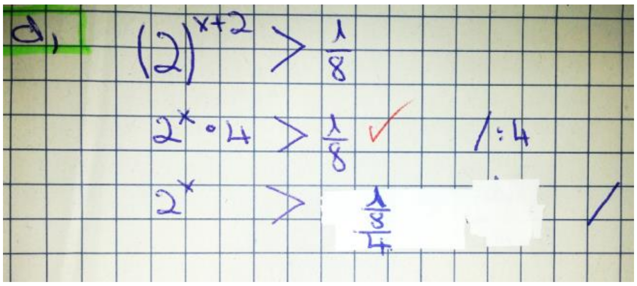


Aufgabe 1. c): Die Aufgabe haben fünf Schüler völlig richtig gelöst. Ein Kind hat die Lösungen für die neue Variable ermittelt, er hat aber daraus x nicht ausgerechnet. Auch die Probe hat er mit der neuen Variable durchgeführt. Bei einem Schüler wurde die eine Lösung durchs Probieren gefunden (Gruppe B, $x = 1$), er hat sogar die Probe für diese Lösung richtig durchgeführt. Bei drei Kindern ist vorgekommen, dass sie den Typ der Aufgabe richtig erkannt haben für 3^x bzw. für 2^x eine neue Variable eingeführt haben. In den nächsten Schritten haben sie leider die Koeffizienten mit der Basis zusammengefasst. So haben sie natürlich eine falsche Lösung bekommen: $10 \cdot 2^x + 2^{2x} = 16 \quad (a = 2^x) \quad \Rightarrow 10a + 2a^2 = 16$. Zwei Schüler haben richtig erkannt, dass es hier ursprünglich um eine quadratische Gleichung geht, nach den grundsätzlichen Umformungen konnten sie die Aufgabe nicht fortsetzen. Drei haben die Aufgabe falsch angefangen und zwei weitere beschäftigten sich mit der Aufgabe nicht –oder was sie geschrieben haben, haben sie durchgestrichen.



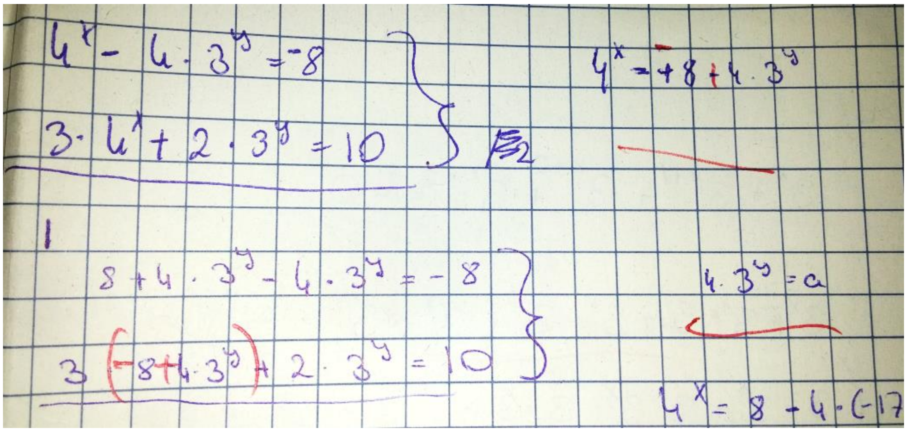
Aufgabe 1. d): Bei dieser Aufgabe hätte die richtige Darstellung des Funktionsgraphen geholfen, die richtige Lösung anzugeben. Kein Schüler hat diese Möglichkeit ausgenutzt, obwohl wir dieses Mittel während der

Übung immer benutzt haben. Von fünf Kindern habe ich eine richtige Lösung bekommen, interessanterweise war auch ein Schüler dabei, dem nur diese Aufgabe richtig gelungen ist. Zwei haben die Aufgabe schon falsch begonnen, weitere zwei haben sie nicht angefangen. Die Schüler haben die verschiedensten Fehler begangen, drei z.B. haben bei dem Kehrwert der Basis nicht den entgegengesetzten Exponenten benutzt: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$. Bei einem Schüler wurde das Monotonieverhalten der Funktion $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ nicht beachtet (er hat sogar geschrieben, dass $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ streng monoton steigend ist, deshalb hat er die Richtung der Relation nicht verändert. Bei mehreren Schülern fehlte nur das Beenden der Aufgabe. Sie wurden von dem Relationszeichen „gestört". Mehrere haben nach dem Verteilen der korrigierten Arbeiten gesagt, wenn die Aufgabe eine Gleichung gewesen wäre, hätten sie sie lösen können. Vielleicht war das der Grund dafür, dass diese Schüler die Potenzgesetze richtig verwendet haben, aber nicht weiterkommen konnten. Interessante Anfänge waren zum Beispiel: $2^{x+2} > \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{x} > \frac{\frac{1}{8}}{4}$, oder $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < 8 \Rightarrow \frac{1^{x+3}}{2^{x+3}} < 8 \Rightarrow 1^{x+3} < 8 \cdot 2^{x+3}$, aber von hier aus wurde die Aufgabe nicht, oder falsch beendet.



Aufgabe 1. e): Diese Aufgabe war die komplexeste. Hier mussten die Schüler die Struktur der Aufgabe verstehen, die Potenzgesetze verwenden. Es war empfehlenswert, eine neue Variable einzuführen. Die Schüler mussten die Aufgabe (mit den neuen Variablen) lösen, die „alten" Variablen bestimmen und zum Schluss mussten sie die Probe durchführen. Die Aufgabe wurde wieder von fünf Schülern richtig gelöst. Vier Schüler haben sich verrechnet, zum Beispiel haben sie die ausgedrückten Variablen falsch eingesetzt, oder die Klammern falsch aufgelöst. Drei Schüler haben wieder die Basis mit dem Koeffizienten zusammengefasst: $3 \cdot 4^{x} \Rightarrow 12^{x}$. Drei Schüler haben die Aufgabe angefangen, aber nicht beendet, vier

weitere haben andere Fehler bei der Rechnung begangen. Zwei Kinder haben die Aufgabe nicht angefangen.



Aufgabe 2: Für die Textaufgabe habe ich für beide Gruppen je eine relativ einfache Aufgabe gewählt. In der Gruppe A war die Schwierigkeit, dass sich die Frage auf den heutigen Stand bezieht. Man musste mit dem Wachstumsfaktor von $k = 1{,}032$ rechnen. In der Gruppe B wurde ein exponentieller Rückgang gefragt. Die Schwierigkeit dabei ist, dass die Schüler mit einem Rückgangsfaktor von $k = 0{,}97$ rechnen mussten. In der Gruppe A haben vier Schüler die Aufgabe richtig gelöst, zwei davon mit der Formel, andere zwei Schritt für Schritt. In der Gruppe B waren zwei solche, die mit der Aufgabe kein Problem hatten. Ein Schüler hat sie mit der Formel, ein weiterer sowohl mit der Formel, als auch Schritt für Schritt gelöst. Als ich nachher gefragt habe, warum er beide Methoden durchgeführt hat, hat er geantwortet, „Die Lösung war mir so sicherer“. Für mich war interessant, dass es in der Gruppe A vier Kinder gab, die die Aufgabe überhaupt nicht angefangen haben, dafür in der Gruppe B „nur“ zwei. Ein Schüler wollte das Problem mit direkter Proportionalität lösen, ihm ist das aber nicht gelungen. In der Gruppe A waren die falschen Wachstumsfaktoren: $k = 1{,}32; k = 3{,}2; k = 0{,}32$. In der Gruppe B: $k = 1{,}03 \Rightarrow 100 \cdot 1{,}03^{20}; k = 3$. Im zweiten Fall hat der Schüler sogar „sorgfältig“ geantwortet, „Nach 20 Min. ist noch $3{,}4868^{11}$ mg des rad. Stoffes vorhanden.“ Einerseits ist dem Schüler nicht aufgefallen, dass aus 100 mg eine enorm große Menge „geblieben“ ist, zweitens konnte er das Ergebnis des Taschenrechners nicht richtig deuten, das richtige Ergebnis wäre: $3{,}4868 \cdot 10^{11}$.

2) Daten:

• radioaktiver Stoff → verliert in jeder 3. Min. → 3 Prozent seiner Masse • Beginn → 100 Milligramm

Frage: Wie viel mg sind es noch nach 20 Minuten?

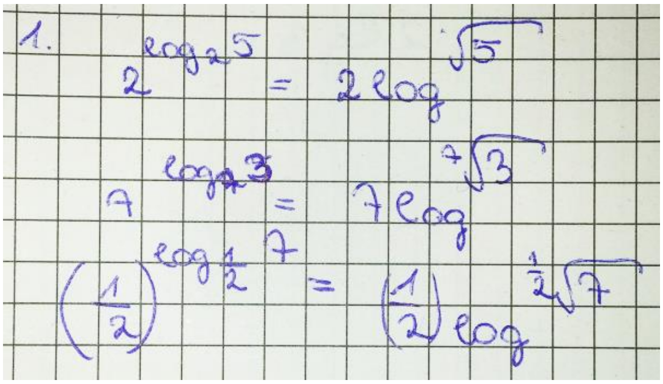
Rechnung:

$$100 \cdot 3^{20} = 3{,}4868^{11} \text{ mg}$$

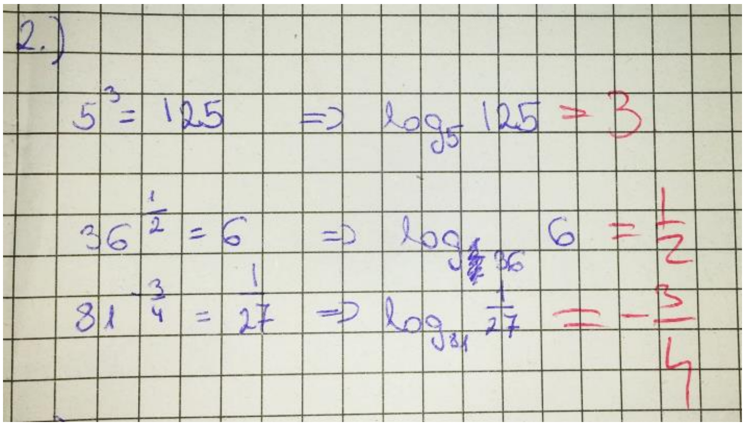
Antwort: Nach 20 Min. ist noch $3{,}4868^{11}$ mg des rad. Stoffes vorhanden.

Anhang H: Ausführliche Analyse des logarithmischen Kleintests

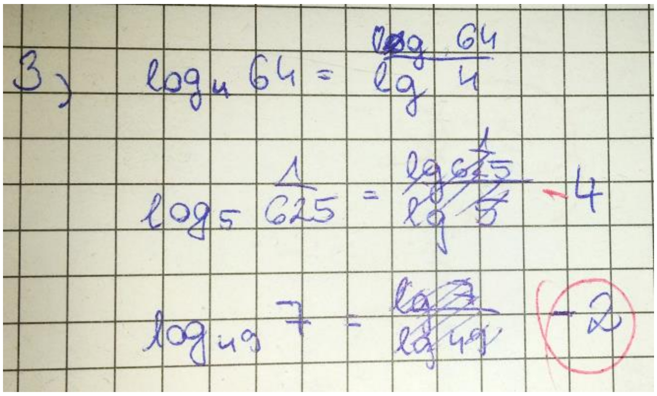
Aufgabe 1: In dieser Aufgabe wurde nach der Definition des Logarithmus gefragt. Völlig richtige Lösungen haben 14 Schüler angegeben, ein weiteres Kind hat bei den ersten zwei Termen richtig geantwortet, beim dritten hat er folgendes geschrieben: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}7} = \frac{7}{3}$. Zwei Schüler haben den Exponenten umgeformt, den einfacheren, genaueren Term jedoch nicht. Sie haben Folgendes geschrieben: $4^{\log_4 5} = 4^{1,160}$, bzw. $4^{\log_4 5} = 4^{\frac{lg5}{lg4}}$. Ein Schüler hat die Definition konsequent falsch verwendet, scheinbar den Sinn des Logarithmus nicht verstanden. Er hat z.B. geschrieben: $4^{\log_4 5} = 4$. Ein Schüler hat für alle drei Terme falsche Dezimalbrüche angegeben, er konnte aber nicht erklären, wie er überlegt hat. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht angefangen. Bei einem Schüler habe ich schon von der Bezeichnung her etwas Unsinniges gesehen, z. B.: $7^{\log_7 3} = 7\log^{\sqrt[7]{3}}$, was nicht einmal der Schüler erklären konnte.



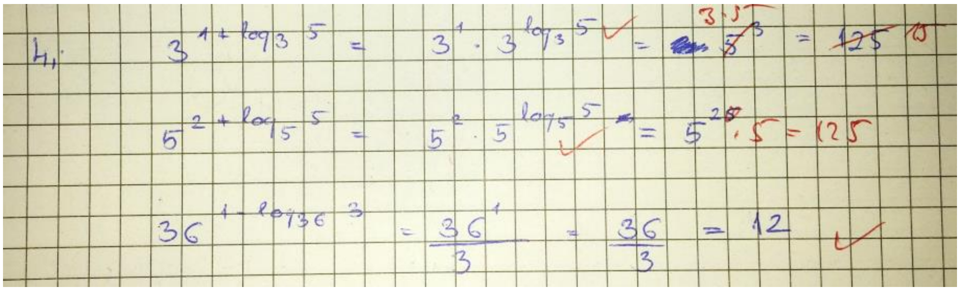
Aufgabe 2: Die Aufgabe beruhte wieder auf der Definition, bzw. auf der möglichen Umformulierung einer Potenz in einen Logarithmus. Die Aufgabe bedeutete für die Mehrheit der Schüler kein Problem, 15 von ihnen haben die Aufgabe richtig gelöst. Interessanterweise gab es fünf weitere Schüler, die eine oder zwei Umformungen richtig durchgeführt haben, aber bei den restlichen nicht, z.B.: $36^{\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow \log_{36}\frac{1}{2} = 6$ o.ä. Ein Schüler hat die Umformung nicht beendet: $5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125$.



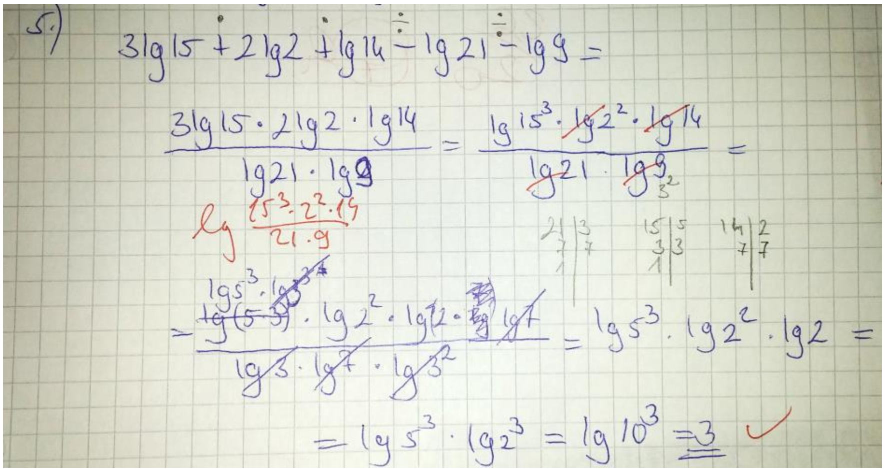
Aufgabe 3: Neuen Schüler haben alle Aufgaben richtig gelöst, bei den anderen gab es einen Fehler (6 Schüler), zwei Fehler (5 Schüler) und bei einem Schüler waren alle Lösungen falsch. Das Problem bedeutete in erster Linie die nicht ganzen und die negativen Exponenten. Solche Fehler waren z.B.: $\log_2 \frac{1}{8} = -8$ oder $\log_{49} 7 = 0{,}2$.



Aufgabe 4: In diesem Teil mussten die Schüler die Definition des Logarithmus mit den Potenzgesetzten gemeinsam benutzen. Das bedeutete schon bei mehreren Schülern ein Problem. Acht Schüler konnten die drei Teile richtig lösen. Bei einem war eine Lösung richtig die anderen zwei nicht: $3^{1+\log_3 5} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 5} = 5^3 = 125$. Bei einem Schüler wurde in allen drei Teilen der erste Schritt richtig getan, aber nicht weitergeführt: $2^{1+\log_2 5} = 2^{\log_2 5} \cdot 2$. Acht Schüler begannen die Aufgabe schon vom Anfang an falsch. Diejenigen, die schon die erste Aufgabe falsch gelöst haben, haben die gleichen Fehler begangen: $2^{1+\log_2 5} = \log_2 6$, oder $2^{1+\log_2 5} = 2log1 \cdot log2 \cdot log5$, o.ä. Ein Schüler hat zwar die Aufgabe angefangen, aber das Geschriebene hat er durchgestrichen. Zwei Kinder haben mit der Aufgabe nicht angefangen.

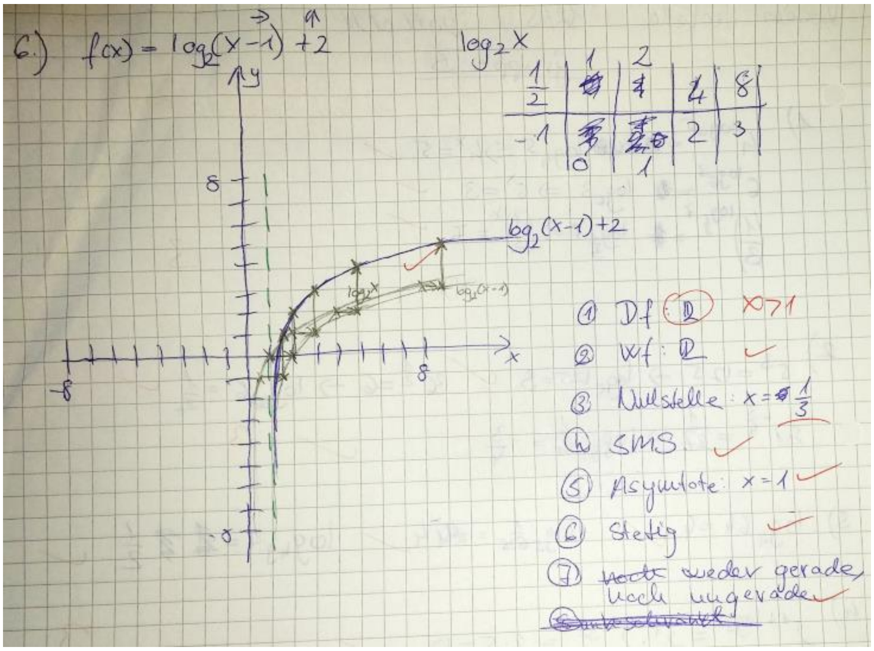


Aufgabe 5: In dieser Aufgabe mussten die Schüler die Logarithmusgesetzte richtig anwenden können, am Ende die Definition des Logarithmus benutzen. Neun Schüler haben das richtige Endergebnis bekommen, zwei davon haben aber einen theoretischen Fehler begangen. Bei dem einen fehlte während der Umformungen „*lg*“, am Ende kam es wieder zurück. Bei dem anderen wurde ein typischer Fehler begangen: $3lg15 + 2lg2 + lg14 - lg21 - lg9$ wurde folgendermaßen umgeformt: $\frac{lg15^3 \cdot lg2^2 \cdot lg14}{lg21 \cdot lg9}$, am Ende hat er ein richtiges Ergebnis bekommen. Diese falsche Art der Zusammenfassung haben noch weitere drei Schüler gemacht. Vier Schüler haben theoretisch richtig gerechnet, sich aber während der Rechnung verrechnet. Ein Schüler hat die Aufgabe gut angefangen, aber theoretisch falsch beendet. Drei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen.



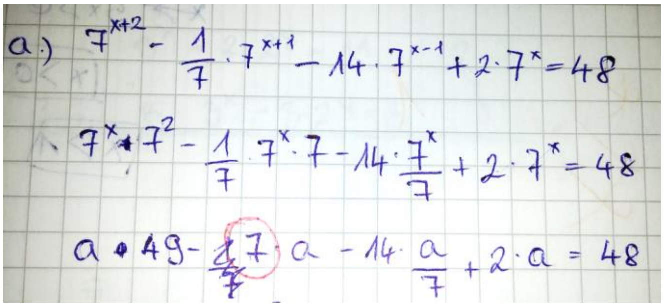
Aufgabe 6: Völlig richtig haben die Aufgabe drei Schüler gelöst. Weitere sechs Kinder haben den Definitionsbereich verfehlt, alle haben dafür $D_f = \boldsymbol{R}$ geschrieben ohne ihn entsprechend einzuschränken. Bei einem weiteren Schüler habe ich eine richtige Darstellung gefunden, die Diskussion dazu war aber falsch. Drei Schüler haben noch bei der horizontalen Verschiebung die falsche Richtung gewählt, dementsprechend waren einige Diskussionsschritte falsch. Fünf Schüler haben einen anderen

Graphen gezeichnet – Gerade, Exponentialfunktion, oder sie haben die Asymptote nicht beachtet.

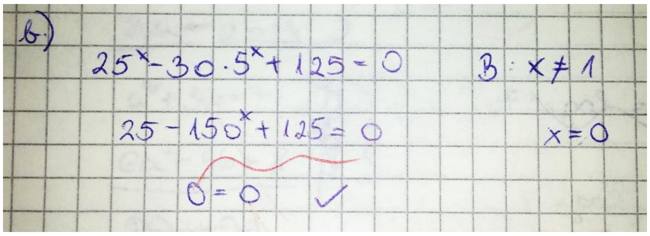


Anhang I: Ausführliche Analyse der zusammenfassenden Klassenarbeit

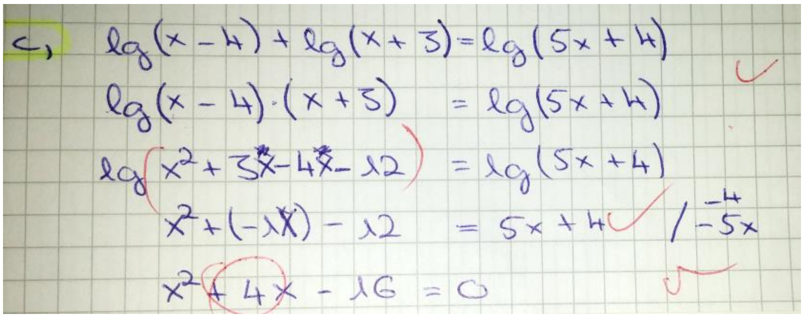
Aufgabe 1. a): Fünf Schüler haben die Aufgabe völlig richtig, mit Probe gelöst. Bei zwei Kindern kam es vor, dass sie die Aufgabe bis zum vorletzten Schritt richtig gelöst haben, aber sich bei der „einfachsten“ mathematischen Rechnung verrechnet haben. Bei dem einem kann man sehen: $7^x \cdot 48 = 48 \Rightarrow 7^x = 0 \Rightarrow x = 1$; bei dem anderen kommt etwas Ähnliches vor. Drei Schüler haben nach den richtigen Umformungen neue Veränderliche eingeführt: $2^x = a$, während der Lösung der erhaltenen linearen Gleichung haben sie rechnerische Fehler begangen. Fünf Kinder haben den ersten Schritt, die Umformungen der Exponenten richtig durchgeführt, aber falsch weitergemacht. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht angefangen. Fünf haben sie falsch angefangen und gelöst.



Aufgabe 1. b): Sieben Schüler haben die Aufgabe richtig gelöst, entweder haben sie eine neue Veränderliche eingeführt und am Ende haben sie *x* ausgerechnet, oder sie haben die Aufgabe auf dem direkten Weg gelöst. Bei weiteren drei Kindern kam es vor, dass sie beim Berechnen des Wertes der neuen Variable aufgehört haben. Drei Schüler haben die Basis mit dem Koeffizienten zusammengefasst: $30 \cdot 5^x = 150^x$ o.ä. Zwei haben die Basis falsch aufgelöst: $4^x = 2 \cdot 2^x$ bzw. $25^x = 5^2 \cdot 5^x$. Bei einem weiteren Schüler kam ein Fehler beim Abschreiben der Aufgabe vor, deshalb wurde sie falsch gelöst: $(2^2)^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 9 \cdot 2^x - 8 = 0$. Drei Schüler haben die Aufgabe falsch angefangen, zwei weitere haben sie überhaupt nicht begonnen.

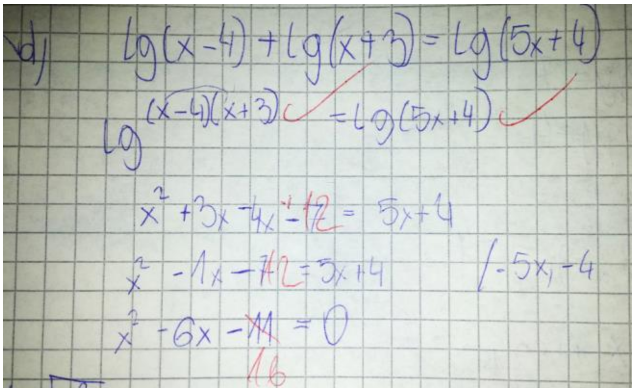


Aufgabe 1. c): Die Aufgabe haben neun Schüler richtig gelöst, aber einer von ihnen hat weder Bedingungen geschrieben, noch hat er eine Probe durchgeführt. Ein Schüler hat die Näherungswerte von $\lg 2$ und $\lg 5$ mit Taschenrechner ausgerechnet (Gruppe A) und am Ende hat er die Gleichung $\lg x = -0{,}6979$ bekommen. Er hätte die Definition des Logarithmus richtig verwendet, wenn er nicht mit $+0{,}6979$ gerechnet hätte. Ein anderer Schüler hat sich beim letzten Schritt verrechnet, ein weiterer hat bei der Umformung von $1 - \lg 2 \Rightarrow \lg\frac{1}{2}$ geschrieben. Bei einem Schüler kam aus der Gleichung $5^2 x = 5 \Rightarrow x = 5$ heraus. Ein Kind hat die Logarithmusgesetzte richtig verwendet, er hat eine quadratische Gleichung bekommen (Gruppe B). Bei der Umformung der Gleichung hat er sich verrechnet. Deshalb war die Lösung falsch. Zwei Schüler haben die Logarithmusgesetzte im ersten Schritt richtig benutzt, später haben sie Fehler begangen. Der Rest hat die Aufgabe nicht angefangen.

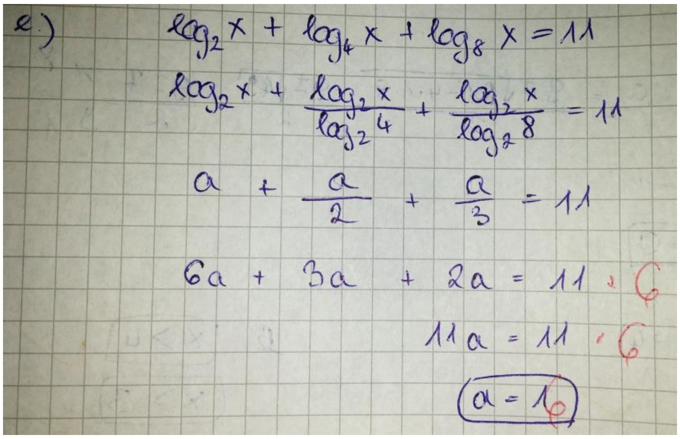


Aufgabe 1. d): Interessanterweise ist diese Aufgabe viel schwächer gelungen, als die vorherige. Es gab Schüler, die den Teil c) richtig gelöst und hier theoretische Fehler begangen haben –z.B. bei den Logarithmusgesetzen. Völlig richtig haben die Aufgabe nur vier Schüler gelöst. Zwei Schüler haben die Logarithmusgesetzte richtig verwendet, aber sich bei der erhaltenen quadratischen Gleichung verrechnet, z.B.: hat ein Schüler die Klammer folgendermaßen aufgelöst: $(x-4)(x+3) \Rightarrow x^2 + 3x - 4x - 7$, statt an der Stelle der Konstante -12 zu bekommen. Ein weiterer Schüler hat die linke Seite der Gleichung $\lg 5x + \lg(x-1) = 1$ richtig zusammengefasst, die rechte Seite hat er nicht in den Logarithmus umgeformt, er hat $5x(x-1) = 1$ geschrieben und damit weitergerechnet.

Neun Schüler haben die Logarithmusgesetzte schon am Anfang falsch verwendet. Drei Schüler haben den Teil nicht angefangen.

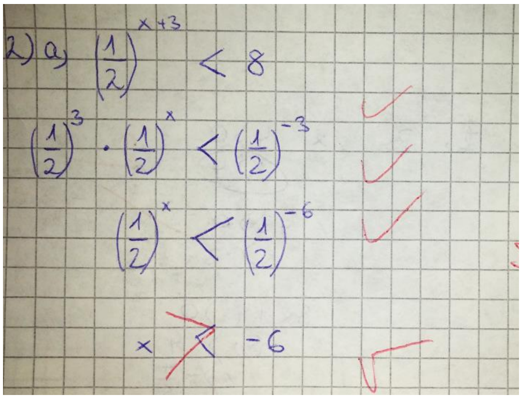


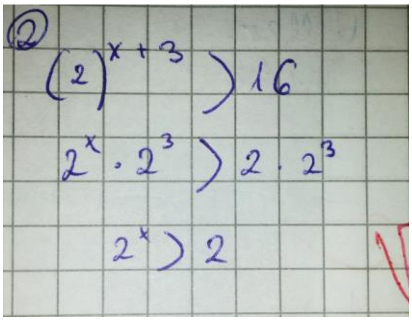
Aufgabe 1. e): In dieser Aufgabe bedeutete der Basiswechsel die Schwierigkeit. In den Stunden haben wie besprochen, dass der Wert der neuen Basis –entsprechend der Definition des Logarithmus – theoretisch frei wählbar wäre, aber es lohnt sich auch, praktische Überlegungen durchzuführen. Fast alle Schüler, die die Aufgabe angefangen haben, haben als neue Basis die 2 gewählt, ein Schüler die 4, ein weiterer die 16. Acht Schüler haben die Aufgabe völlig richtig gelöst, ein Schüler hat einen Fehler bei der linearen Gleichung begangen – er hat nicht beide Seiten mit 6 multipliziert, so war die Lösung weiterhin falsch. Ein typischer Fehler, der aus der Grundschule stammt. Vier Schüler konnten die Basis richtig wechseln, aber die Aufgabe nicht weiterführen. Zwei Schüler kamen nur bis zur Bedingung, sechs haben die Aufgabe nicht angefangen.



Aufgabe 2. a): In dieser Aufgabe waren einfache Ungleichungen zu lösen, eine exponentielle und eine logarithmische. In der Gruppe A war die Basis der exponentiellen Funktion kleiner als eins, in der Gruppe B war die Basis

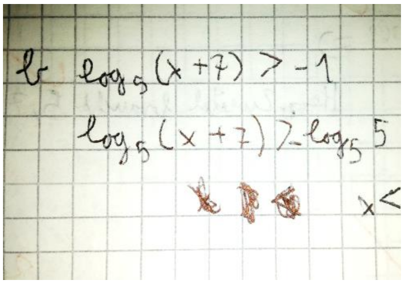
der Logarithmusfunktion kleiner als eins. In diesen Teilen mussten die Schüler besonders auf das Monotonieverhalten der betroffenen Funktionen aufpassen. In der Gruppe A haben zwei Schüler die Aufgabe richtig gelöst, ein weiterer hat die Richtung der Relation nicht beachtet. Ein Schüler hat zwar darauf hingewiesen, dass die Funktion $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ streng monoton fallend ist, er hat aber die Richtung der Relation nicht verändert. Vier Schüler haben die Klammer $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$ aufgelöst, konnten aber nicht weiterkommen. Zwei von ihnen versuchten mit $\frac{1^{x+3}}{2^{x+3}}$ weiter zu arbeiten, andere zwei haben den obigen Term folgendermaßen aufgelöst: $\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^3$, aber sie kamen nicht weiter voran. Ein Schüler hat die Aufgabe falsch angefangen, ein Schüler hat sie überhaupt nicht angefangen. Für mich war interessant, dass kein Schüler für die Basis der Exponentialfunktion ihren Kehrwert genommen hat, bzw. kein Schüler die Funktionen und die Lösungen graphisch dargestellt hat. Nur ein Schüler hat nach der algebraischen Lösung die möglichen Werte auch auf einer Zahlengeraden dargestellt. Die letzte Behauptung trifft auch auf die anderen Ungleichungen zu. In der Gruppe B gab es fünf richtige Lösungen. Ein Schüler hat die Aufgabe folgendermaßen angefangen: $(2)^{x+3} > 16 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 > 2 \cdot 2^3 \Rightarrow 2^x > 2$, er konnte von hier aus die Aufgabe leider nicht beenden. Ein Schüler hat $16 = 2^3$ geschrieben und mit diesem falschen Wert die Aufgabe weitergeführt. Ein weiteres Kind konnte nur 16 in Zweierpotenzform richtig aufschreiben, und zwei haben die Potenz falsch aufgelöst: für $(2)^{x+3}$ hat der eine $2^x + 8$, der andere $2^x + 2^3$ geschrieben. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht angefangen.

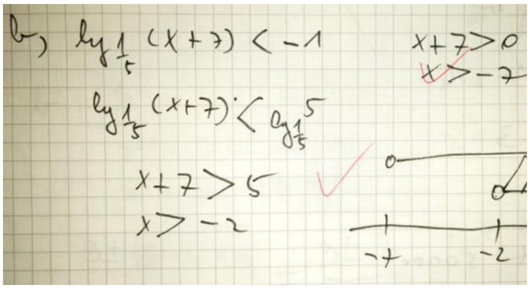




Aufgabe 2. b): Gruppe A: Vier Schüler haben die Aufgabe richtig gelöst. Ein Schüler hat die folgenden Umformungen gemacht: $\log_5(x+7) > -1 \Rightarrow \log_5(x+7) > -\log_5 5 \Rightarrow x < -12$. Die erste Umformung war noch richtig, aber bei der zweiten wurde das negative Vorzeichen einfach

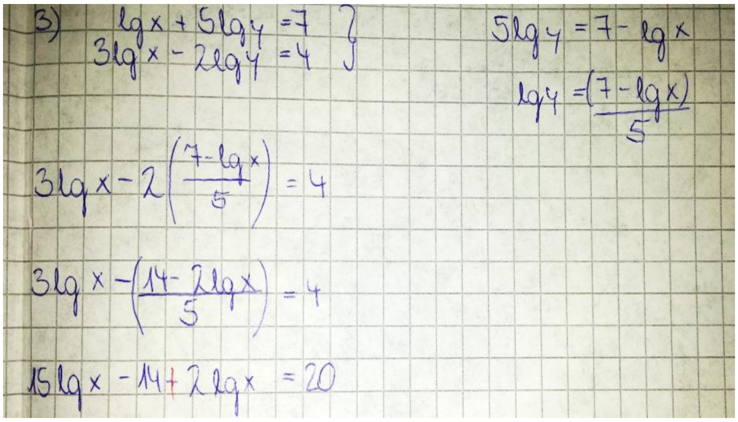
vor 5 gestellt und wegen dieses Vorzeichens hat der Schüler die Richtung der Relation gedreht. Bei den logarithmischen Umformungen kamen die folgenden theoretischen Fehler vor: Bei zwei Schülern wurde $\log_5 x \cdot \log_5 7 > \log_5 \frac{1}{5}$ geschrieben. Ein Schüler hat folgendes geschrieben: $\log_5 x + \log_5 7 > -1$, bei einem weiteren kam $x + 7 > \log_5 -1$ vor. Zwei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen. In der Gruppe B haben drei Schüler die Aufgabe richtig gelöst, einer davon hat die Lösung auf der Zahlengeraden richtig dargestellt. Vier Schüler haben nicht auf die Richtung der Relation geachtet, drei von ihnen haben sogar keine Anfangsbedingung aufgeschrieben. So haben sie eine falsche Lösung angegeben. Ein Kind hat die Logarithmusgesetzte falsch benutzt: $\log_{\frac{1}{5}}(x+7) \ \Rightarrow \log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} x$, drei Schüler haben die Aufgabe nicht angefangen.





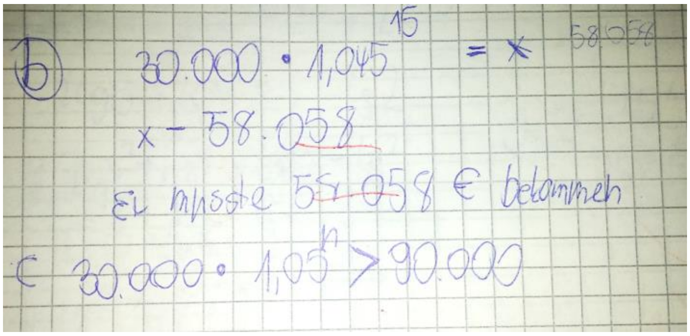
Aufgabe 3: Beide Gruppen mussten je ein Gleichungssystem lösen, die Gruppe A ein logarithmisches, die Gruppe B ein exponentielles. Es lohnte sich, neue Variablen einzuführen. Dann war leicht ersichtlich, dass ein einfaches lineares Gleichungssystem zu lösen war. Vier Schüler haben in der Gruppe A die Aufgabe richtig gelöst, drei haben neue Veränderliche eingeführt, ein Schüler nicht. Zwei Schüler, die das Einsetzungsverfahren gewählt haben, haben die Klammer nach dem Einsetzten falsch aufgelöst, sie haben das negative Vorzeichen nicht beachtet, deshalb später ein falsches Ergebnis bekommen. Ein Schüler hat die Aufgabe falsch abgeschrieben. Statt der richtigen zweiten Gleichung hat er $3\lg x \oplus 2\lg y = 4$ (statt $\ominus$)geschrieben und deshalb ein falsches Ergebnis bekommen. Zwei Kinder haben die neuen Variablen richtig eingeführt, konnten aber die Aufgabe nicht weiterlösen. Einer hat sie nicht angefangen. In der Gruppe B war die Lage ähnlich wie in der Gruppe A. Vier Schüler haben die Aufgabe richtig gelöst, alle haben neue Veränderliche verwendet. Einmal kam es vor, dass nach richtigem Einsetzen die Klammer falsch aufgelöst wurde. Zweimal wurden neue Variablen eingeführt, die Aufgabe wurde aber nicht fortgesetzt. In einem Fall wurden die neuen Variablen falsch eingesetzt. So war der weitere Lösungsweg falsch. Zweimal kam es leider wieder vor, dass die Basen mit

den Koeffizienten zusammengefasst werden: $2 \cdot 2^y \Rightarrow 4^y$. Ein Schüler hat die Aufgabe nicht angefangen.

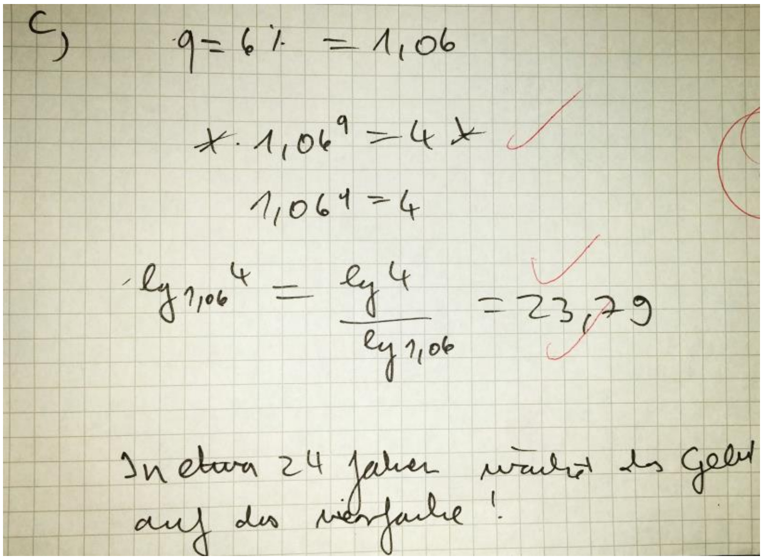


Aufgabe 4. a): Die Textaufgabe bestand aus drei Teilen. Man musste den Zusammenhang $B(n) = B(0) \cdot q^n$ verwenden, wobei $B(0)$ den Basiswert, $B(n)$, den Endwert nach n Perioden, $q = 1 + p$ den Wachstumsfaktor und n die Anzahl (bzw. bei einer nicht ganzen Zahl den Wert) der Perioden bedeutet. Im Teil *a)* musste man den Zinssatz p, im Teil *b)* den Basiswert $B(0)$, im Teil *c)* den Wert der Perioden n berechnen. Die zwei Gruppen waren wesentlich gleich, nur die Angaben zeigten einen kleinen Unterschied. Deshalb gebe ich die Ergebnisse zusammenfassend an. Den Teil haben sechs Schüler richtig gelöst. Vier Schüler haben 40% bzw. 80% des Grundwertes, bzw. den Endwert berechnet, konnten aber nicht weiterkommen. Zwei Schüler haben den richtigen Zusammenhang $30.000q^6 = 42.000$ aufgeschrieben, aber rechneten nicht weiter. Fünf Schüler haben den Teil falsch angefangen, der Rest hat nichts geschrieben.

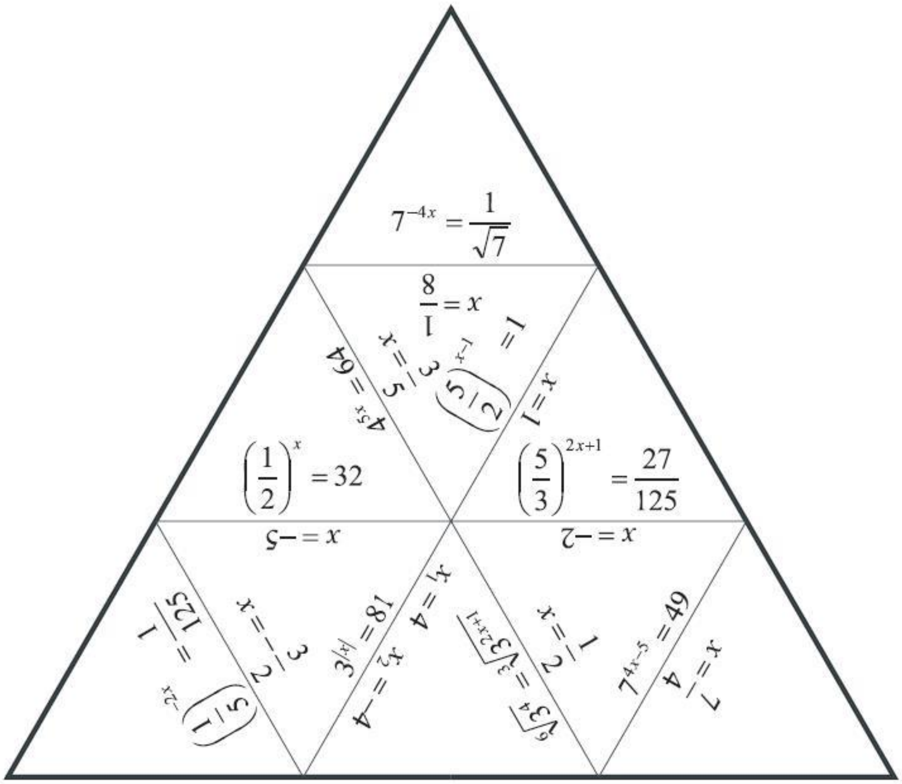
Aufgabe 4. b): Diesen Teil haben sieben Schüler richtig gelöst. Die anderen Schüler haben die Aufgabe entweder falsch oder überhaupt nicht angefangen. Unter den falschen Anfängen kann man $x \cdot 0{,}05^{20}$ oder $30.000 \cdot 1{,}045^{15} = x \Rightarrow 58.058$ finden. Hier wurden $B(0)$ und $B(n)$ offensichtlich vertauscht.



Aufgabe 4. c): Diesen Teil haben nur fünf Schüler richtig gelöst, aber nur einer hat bei der Antwort hochgerundet: $23{,}79 \approx 24$, „In etwa 24 Jahren wächst das Geld auf das Vierfache“. Zwei Schüler haben die Grund(un)gleichung aufgeschrieben, aber sie haben sie nicht weitergerechnet: $30.000 \cdot 1{,}05^n > 90.000$. Zwei Schüler haben angefangen, die Werte Jahr für Jahr zu berechnen. Der eine ist wegen Zeitmangel nicht zum Ende gekommen, der andere hat die ersten 9 Jahre ausgerechnet, kam bis 46.539. Er hat „entdeckt“, dass die Werte Jahr für Jahr etwa um 2 Tausend Euro wachsen. So kam er Schritt für Schritt auf das Ergebnis, dass das Geld nach 31 Jahren auf das Dreifache wächst. Drei Schüler haben die Aufgabe falsch angefangen. Neun haben mit ihr überhaupt nicht begonnen.



Anhang J: Trimono



Anhang K: Exponentielle Textaufgaben

16. Stunde

Beispiel 3:

Im Jahre 1800 lag die durchschnittliche Körpergröße eines Mannes in Mitteleuropa noch bei 1,60 m. Bis zum Jahr 1900 hatte sich dieser Wert schon auf 1,74 m erhöht.

a) Berechne das durchschnittliche jährliche prozentuale Wachstum.
b) Wie groß wäre bei gleicher Steigerung die durchschnittliche Körpergröße der Männer im Jahr 2000?

Bei Frauen gab es seit 1900, damals durchschnittlich 1,62 cm groß, eine jährliche Zunahme der Körpergröße von 0,12%.

c) Welche Durchschnittsgröße müssten 1997 die Frauen erreicht haben?

Beispiel 5:

Eine Bakterienart vermehrt sich derart, dass sie sich alle 4 Tage verdreifacht. Zu Beginn der Beobachtung sind 60 Bakterien vorhanden.

a) Bestimme die Funktionsgleichung f, wobei y die Anzahl der Bakterien und x die Anzahl der Tage angibt.
b) Stelle eine Wertetabelle für eine Zeitspanne von 5 Tagen vor und 5 Tagen nach Beobachtungsbeginn auf! (Runde auf ganze Zahlen!)
c) Zeichne den Graphen für den angegebenen Bereich und wähle: x-Achse: 1 cm – 1 Tag y-Achse: 1cm – 20 Bakterien
d) Wie viele Bakterien müssen zu Beobachtungsbeginn vorhanden gewesen sein, wenn nach 432 Stunden 1600 Bakterien entstanden sind?
e) Eine andere Bakterienart vermehrt sich alle 2 Tage um 50%. Nach wie vielen Tagen sind bei dieser Bakterienart aus 80 Bakterien 2210 entstanden?

Beispiel 6:

Eine Elektronikfirma produzierte vor 5 Jahren noch 66 500 Steuereinheiten jährlich, heute dagegen nur noch 52 825.

a) Berechne den prozentualen jährlichen Rückgang und stelle eine Funktionsgleichung auf.
b) Wann wird die Firma bei gleichbleibender Abnahme mit einer Produktion unter 40 000 Einheiten rechnen müssen?
c) Zeichne mit Hilfe einer Funktionsgleichung einen Graphen und überprüfe das rechnerische Ergebnis von b)!
d) Die Firma will kräftig investieren und hofft, dass die heutige Produktion sich nur noch 2 Jahre gleichbleibend vermindert und dann jährlich um 2,4% wachsen wird. Mit welcher Produktion ist nach dieser Vermutung in 7 Jahren zu rechnen?

Hausaufgaben:

Aufgabe 1: Der Wertverlust für einen PKW beträgt durchschnittlich 11% jährlich.

Herr Martens kauft sich jetzt einen neuen Wagen für 26 413 €. Gleichzeitig verkauft er sein kleines Zweitauto für 12 600 € und legt diesen Betrag zu 3,2% Zinsen an.

Sobald der angesparte Betrag genauso groß ist wie der spätere Erlös für den großen Wagen, will Herr Martens wieder ein neues Auto kaufen.

a) Wann wird Herr Martens sich ein neues Auto kaufen? Löse die Frage durchs Probieren und/oder mit Funktionen!

b) Wie viel Geld wird er dann zur Verfügung haben?

Aufgabe 2:

In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule wird alle 15 Sekunden gemessen.

a) Bei Sorte A beträgt die Schaumhöhe zu Beginn der Messung 8 cm, sie nimmt jeweils um 9% ab. Wie groß ist sie nach einer Minute?

b) Man spricht von „sehr guter Bierschaumhaltbarkeit“, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls größer als 120 s ist. Ist dies bei Sorte A erfüllt?

c) Bei Sorte B soll bei einer Anfangshöhe von 7 cm erreicht werden, dass nach
5 Minuten noch mindestens 2 cm vorhanden sind. Welche Abnahmerate (in Prozent) darf nicht unterschritten werden? Löse die Frage durchs Probieren

Anhang L: Publikationen

Idegen nyelven megjelent referált, lektorált publikációk

[1] Várady F. (2015): Introduction of differential calculus in theclass 10 with graphical calculator. ANNALES MATHEMATICAE ET INFORMATICAE 45: pp. 161-177. (2015)

[2] Várady, F. (2014).: Ein anderer Weg bei dem Logarithmusunterricht: Ein entwickelndes Unterrichtsexperiment. TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE 12:(1) pp. 1-16.

Egyéb idegen nyelvű publikációk

[3] Várady, F. (2012).: Computergestützter Unterricht von Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Anwendungen. In: Péter Körtesi (szerk.) Proceedings of theConference on the History of Mathematics and Teaching of Mathematics: CEEPUS coordination meeting of the network: Active Methods in Teaching Mathematics and Informatics, Sárospatak 24-26 May 2012. Konferencia helye, ideje: Miskolc, Magyarország, 2012.05.23 -2012.05.27. Miskolc: Miskolci Egyetem, 2012. Paper 23. (ISBN:9789636619886)

[4] Várady, F (2013): Using graphical calculators in teaching functions. In: Szendrő Katalin, Soós Mihály (szerk.) Proceedings of the 4th International Conference of Economic Sciences. 595 p. Konferencia helye, ideje: Kaposvár, Magyarország, 2013.05.09 -2013.05.10. Kaposvár: Kaposvár University, 2013. pp. 96-103. (ISBN: 978-963-9821-62-0)

Idegen nyelven megjelent lektorált publikációk

[5] Várady, F (2013): Solving differential calculus problems with graphic calculators in a secondary grammar school. In: A Ambrus, É Vásárhelyi (szerk.) Problemsolving in mathematics education: Proceedings of the 15th ProMath conference. 240 p. Eger, Magyarország, 2013.08.30 -2013.09.01. Budapest: Eötvös Loránd University, Paper Solving. 23 p.

[6] Várady, F. (2012): Das Verstehen der Begriffe Stetigkeit einer Funktion und Differenzialquotienten mit Unterstützung von GeoGebra. AGORA: A BGF KVIFK KULTURÁLIS - TUDOMÁNYOS FOLYÓIRATA 9: pp. 113-133. (2012)

Egyéb magyar nyelvű publikáció

[7] Várady F. (2011): A differenciálszámítás bevezetésének és a függvényelemzés megértésének segítése a GeoGebra szoftver alkalmazásával. ECONOMICA (SZOLNOK) 4: pp. 90-96.