

[illegible]

Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

KÖZÖNSÉGES
MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁL-
EGYENLETEK ÉS ALKALMAZÁSAIK
FELADATGYŰJTEMÉNY



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2019

Lektorálta:

Dr. Nagy Gergő

egyetemi adjunktus

Debreceni Egyetem TTK Analízis Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-832-3

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben

dupress.unideb.hu

1. Alapfogalmak

1. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'''(x) = \sin x - x^2 \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletet!

- a) Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- b) Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- c) Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- d) Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?
- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstans együtthatós?
- g) Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvény y , a független változó x .
- b) A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- c) Az egyenlet harmadrendű, mert a legmagasabb rendű derivált $(y'''(x))$ rendje 3.
- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- e) Inhomogén, mert van benne olyan tag $(\sin^2 x)$, amelyik nem tartalmazza az ismeretlen függvényt.
- f) Függvényegyütthatós, mert az $y'(x)$ együtthatója függvény.
- g) Explicit, mert a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve az egyenletből.

2. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'''(x) = 10 \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletet!

- a) Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- b) Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- c) Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- d) Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?

- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstansegyütthatós?
- g) Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvénye y , a független változó x .
- b) A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- c) Az egyenlet harmadrendű, mert a legmagasabb rendű derivált $(y'''(x))$ rendje 3.
- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- e) Homogén, mert minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt.
- f) Konstansegyütthatós, mert a lineáris kombinációban minden együttható konstans.
- g) Explicit, mert a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve.

3. Feladat. Tekintsük az

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 0$$

differenciálegyenletet!

- a) Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- b) Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- c) Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- d) Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?
- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstansegyütthatós?
- g) Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvény x , a független változó t .
- b) A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- c) Az egyenlet másodrendű, mert a legmagasabb rendű derivált $(x''(t))$ rendje 2.

- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- e) Homogén, mert minden tagban szerepel az ismeretlen függvény (vagy annak deriváltja).
- f) Konstansegyütthatós.
- g) Implicit, mert a legmagasabb rendű derivált nincs kifejezve az egyenletből.

4. Feladat. Írjunk fel egy olyan másodrendű differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$$

minden $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás:

Az φ függvény deriváltja

$$\varphi'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - 3c_2 \cdot e^{-3x}.$$

Az φ függvény második deriváltja

$$\varphi''(x) = 4c_1 \cdot e^{2x} + 9c_2 \cdot e^{-3x}.$$

Ezeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \varphi''(x) &= 6c_1 \cdot e^{2x} + 6c_2 \cdot e^{-3x} = \\ &= 6 \cdot (c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}) = 6 \cdot \varphi(x). \end{aligned}$$

Tehát

$$y''(x) + y'(x) - 6 \cdot y(x) = 0$$

egy olyan differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}.$$

5. Feladat. Írjunk fel egy olyan másodrendű differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{5x}$$

minden $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás:

Az φ függvény deriváltja

$$\varphi'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + 5c_2 \cdot e^{5x}.$$

Az φ függvény második deriváltja

$$\varphi''(x) = 4c_1 \cdot e^{2x} + 25c_2 \cdot e^{5x}.$$

Ezeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi''(x) - 7\varphi'(x) &= -10c_1 \cdot e^{2x} - 10c_2 \cdot e^{5x} = \\ &= -10 \cdot (c_1 \cdot e^{2x} + 5c_2 \cdot e^{5x}) = -10 \cdot \varphi(x).\end{aligned}$$

Tehát

$$y''(x) - 7y'(x) + 10 \cdot y(x) = 0$$

egy olyan differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{5x}.$$

6. Feladat. Írjunk fel egy olyan másodrendű differenciálegyenletet, amelynek megoldásfüggvénye

$$y(x) = e^{x^2}.$$

Megoldás:

Mivel

$$y(x) = e^{x^2},$$

ezért

$$y'(x) = 2x \cdot e^{x^2},$$

vagyis

$$y'(x) = 2x \cdot y(x).$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát deriválva azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = 2 \cdot y(x) + 2x \cdot y'(x).$$

Tehát az

$$y''(x) = 2 \cdot y(x) + 2x \cdot y'(x)$$

egy olyan differenciálegyenlet, amelynek

$$y(x) = e^{x^2}$$

megoldása.

7. Feladat. Írjunk fel egy olyan másodrendű differenciálegyenletet, amelynek megoldásfüggvénye

$$y(x) = e^{-x^2}.$$

Megoldás:

Mivel

$$y(x) = e^{-x^2},$$

ezért

$$y'(x) = -2x \cdot e^{-x^2},$$

vagyis

$$y'(x) = -2x \cdot y(x).$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát deriválva azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = -2 \cdot y(x) - 2x \cdot y'(x).$$

Tehát az

$$y''(x) + 2 \cdot y(x) + 2x \cdot y'(x) = 0$$

egy olyan differenciálegyenlet, amelynek

$$y(x) = e^{-x^2}$$

megoldása.

8. Feladat. Igazoljuk, hogy a

$$\varphi(x) = \sin x + \cos x$$

függvény egy megoldása az

$$y''(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek!

Megoldás:

A φ függvény deriváltja

$$\varphi'(x) = \cos x - \sin x.$$

A φ függvény második deriváltja

$$\varphi''(x) = -\sin x - \cos x.$$

Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy az egyenlet bal oldala

$$\begin{aligned}\varphi''(x) + \varphi(x) &= (\sin x + \cos x)'' + (\sin x + \cos x) = \\ &= (\cos x - \sin x)' + \sin x + \cos x = \\ &= -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0,\end{aligned}$$

ami éppen a jobb oldal, tehát a megadott függvény valóban megoldása a megadott egyenletnek.

9. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges c_1 és c_2 valós számok esetén a

$$\varphi(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$$

alakú függvények megoldásai az

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

differentiálegyenletnek.

Megoldás:

Az φ függvény deriváltja

$$\varphi'(x) = c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x}.$$

Az φ függvény második deriváltja

$$\varphi''(x) = c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x}.$$

Behelyettesítve az egyenlet bal oldalába a megfelelő függvényeket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi''(x) - 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) &= c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} - 3 \cdot (c_1 \cdot e^x + \\ &\quad + c_2 \cdot e^{2x}) + 2 \cdot (c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}) = \\ &= c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} - 3c_1 \cdot e^x - \\ &\quad - 6c_2 \cdot e^{2x} + 2c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} = 0,\end{aligned}$$

ami az egyenlet jobb oldala tehát a megadott függvények valóban megoldásai a differentiálegyenletnek.

10. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$y''(x) = 2y(x) + 2x \cdot y'(x)$$

differentiálegyenletnek a

$$\varphi(x) = e^{x^2}$$

függvény megoldásfüggvénye!

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalába behelyettesítve a φ függvényt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= (e^{x^2})'' = (e^{x^2} \cdot 2x)' = \\ &= e^{x^2} \cdot 4x^2 + e^{x^2} \cdot 2.\end{aligned}$$

A jobb oldalba behelyettesítve a φ függvényt

$$\begin{aligned}2 \cdot \varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x) &= 2e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \\ &= 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}\end{aligned}$$

adódik. Tehát

$$\varphi''(x) = 2 \cdot \varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x),$$

vagyis a φ függvény megoldása az

$$y''(x) = 2y(x) + 2x \cdot y'(x)$$

differentiálegyenletnek.

11. Feladat. Bizonyítsuk be definíció szerint, hogy az

$$\{x^2; (x+1)^2; (x+2)^2\}$$

függvényrendszer lineárisan független!

Megoldás:

Tekintsük az

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot (x+1)^2 + \alpha_3 \cdot (x+2)^2 = 0$$

lineáris kombinációt. Ekkor

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot (x^2 + 2x + 1) + \alpha_3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0,$$

tehát

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x^2 + (2\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x^2 + (2\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= \\ = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy teljesülni kell az alábbi egyenleteknek:

$$\left. \begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0\end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva a harmadik egyenletet azt kapjuk, hogy $\alpha_2 = 0$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $\alpha_3 = 0$ adódik. Végül az első egyenletből azt kapjuk, hogy $\alpha_1 = 0$. Tehát a függvényrendszer lineárisan független.

12. Feladat. Bizonyítsuk be definíció szerint, hogy az

$$\{x^2; 2x + 1; (x + 2)^2\}$$

függvényrendszer lineárisan független!

Megoldás:

Tekintsük az

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot x + 1 + \alpha_3 \cdot (x + 2)^2 = 0$$

lineáris kombinációt. Ekkor

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0,$$

tehát

$$(\alpha_1 + \alpha_3) \cdot x^2 + (2\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_3) \cdot x^2 + (2\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= \\ = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy teljesülni kell az alábbi egyenleteknek:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha_1 & + & \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 & + & 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 & + & 4\alpha_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

A második egyenlet kétszereséből kivonva a harmadik egyenletet azt kapjuk, hogy $\alpha_2 = 0$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $\alpha_3 = 0$ adódik. Végül az első egyenletből azt kapjuk, hogy $\alpha_1 = 0$. Tehát a függvényrendszer lineárisan független.

13. Feladat. Lineárisan független-e az

$$\{x^2; x + 1; (x + 2)^2\}$$

függvényrendszer?

Megoldás:

Tekintsük az

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot x + 1 + \alpha_3 \cdot (x + 2)^2 = 0$$

lineáris kombinációt. Ekkor

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0,$$

tehát

$$(\alpha_1 + \alpha_3) \cdot x^2 + (\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0,$$

azaz

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_3) \cdot x^2 + (\alpha_2 + 4\alpha_3) \cdot x + \alpha_2 + 4\alpha_3 &= \\ = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy teljesülni kell az alábbi egyenleteknek:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha_1 & + & \alpha_3 = 0 \\ & \alpha_2 & + 4\alpha_3 = 0 \\ & \alpha_2 & + 4\alpha_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

A második és a harmadik egyenlet ugyanaz, ezért az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, tehát a függvényrendszer lineárisan függő.

14. Feladat. Lineárisan független-e a

$$\{\sin^2 x; \cos^2 x; 1\}$$

függvényrendszer?

Megoldás:

Mivel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ezért

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0,$$

így a zérusvektort nem csak csupa nulla együtthatóval állítják elő a függvények, vagyis lineárisan függők.

15. Feladat. Határozzuk meg az

$$\{1; x; x^2\}$$

függvényrendszer Wronski-determinánsát!

Megoldás:

A Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

16. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\{e^x; e^{2x}; 1\}$$

függvényrendszer Wronski-determinánsát!

Megoldás:

A Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & 1 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & 0 \end{pmatrix} = 2e^{3x}.$$

17. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\{\sin^2 x; \cos^2 x; 1\}$$

függvényrendszer Wronski-determinánsát!

Megoldás:

Mivel

$$(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$

és

$$(\sin 2x)' = 2 \cos 2x,$$

valamint

$$(\cos^2 x)' = -2 \cos x \cdot \sin x = -2 \sin 2x,$$

és

$$(-\sin 2x)' = -2 \cos 2x,$$

továbbá

$$(2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x$$

és

$$(-2 \sin 2x)' = -4 \cos 2x,$$

ezért a Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} \sin^2 & \cos^2 x & 1 \\ 2 \sin 2x & -2 \sin 2x & 0 \\ 4 \cos 2x & -4 \cos 2x & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

18. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

- Mutassuk meg, hogy az $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = e^{3x}$ függvények megoldásai a differenciálegyenletnek!
- Mutassuk meg, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek!
- Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a differenciálegyenlet azon megoldását, amely eleget tesz az $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ feltételeknek!

Megoldás:

- a) Mivel $y_1(x) = e^x$, ezért

$$y_1'(x) = e^x$$

és

$$y_1''(x) = e^x,$$

így

$$y_1''(x) - 4y_1'(x) + 3y_1(x) = e^x - 4e^x + 3e^x = 0,$$

vagyis y_1 megoldása a differenciálegyenletnek.

Mivel $y_2(x) = e^{3x}$, ezért

$$y_2'(x) = 3e^{3x}$$

és

$$y_2''(x) = 9e^{3x},$$

így

$$y_2''(x) - 4y_2'(x) + 3y_2(x) = 9e^{3x} - 12e^{3x} + 3e^{3x} = 0,$$

vagyis y_2 megoldása a differenciálegyenletnek.

- b) Az y_1 és y_2 függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{pmatrix} = 2e^{4x} \neq 0,$$

ezért y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.

- c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- d) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x + 3c_2 \cdot e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = c_1 + c_2.$$

Mivel $y'(0) = 4$, ezért

$$4 = c_1 + 3c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 ismeretlen meghatározásához meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ c_1 & + & 3c_2 & = & 4 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. A két egyenletet kivonva egymásból $c_2 = 1$ adódik, amit az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$. Tehát a keresett megoldás

$$y'(x) = e^x + e^{3x}.$$

19. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

- Mutassuk meg, hogy az $y_1(x) = e^{2x}$ és $y_2(x) = e^{3x}$ függvények megoldásai a differenciálegyenletnek!
- Mutassuk meg, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek!
- Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a differenciálegyenlet azon megoldását, amely eleget tesz az $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$ feltételeknek!

Megoldás:

a) Mivel $y_1(x) = e^{2x}$, ezért

$$y_1'(x) = 2e^{2x}$$

és

$$y_1''(x) = 4e^{2x},$$

így

$$y_1''(x) - 5y_1'(x) + 6y_1(x) = 4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0,$$

vagyis y_1 megoldása a differenciálegyenletnek.

Mivel $y_1(x) = e^{3x}$, ezért

$$y_1'(x) = 3e^{3x}$$

és

$$y_1''(x) = 9e^{3x},$$

így

$$y_1''(x) - 5y_1'(x) + 6y_1(x) = 9e^{3x} - 15e^{3x} + 6e^{3x} = 0,$$

vagyis y_2 megoldása a differenciálegyenletnek.

b) Az y_1 és y_2 függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{pmatrix} = e^{5x} \neq 0,$$

ezért y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

d) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + 3c_2 \cdot e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = c_1 + c_2.$$

Mivel $y'(0) = 5$, ezért

$$5 = 2c_1 + 3c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 ismeretlen meghatározásához meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből $c_2 = 1$ adódik, amit az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$. Tehát a keresett megoldás

$$y'(x) = e^{2x} + e^{3x}.$$

20. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük

$$y''(x) - 7y'(x) + 10y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

- a) Mutassuk meg, hogy az $y_1(x) = e^{2x}$ és $y_2(x) = e^{5x}$ függvények megoldásai a differenciálegyenletnek!
- b) Mutassuk meg, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek!
- c) Írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását!
- d) Adjuk meg a differenciálegyenlet azon megoldását, amely eleget tesz az $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$ feltételeknek!

Megoldás:

- a) Mivel $y_1(x) = e^{2x}$, ezért

$$y_1'(x) = 2e^{2x}$$

és

$$y_1''(x) = 4e^{2x},$$

így

$$y_1''(x) - 7y_1'(x) + 10y_1(x) = 4e^{2x} - 14e^{2x} + 10e^{2x} = 0,$$

vagyis y_1 megoldása a differenciálegyenletnek.

Mivel $y_1(x) = e^{5x}$, ezért

$$y_1'(x) = 5e^{5x}$$

és

$$y_1''(x) = 25e^{5x},$$

így

$$y_1''(x) - 7y_1'(x) + 10y_1(x) = 25e^{5x} - 35e^{5x} + 10e^{5x} = 0,$$

vagyis y_2 megoldása a differenciálegyenletnek.

b) Az y_1 és y_2 függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{pmatrix} = 3e^{7x} \neq 0,$$

ezért y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{5x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

d) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + 5c_2 \cdot e^{5x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = c_1 + c_2.$$

Mivel $y'(0) = 7$, ezért

$$7 = 2c_1 + 5c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 ismeretlen meghatározásához meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ 2c_1 & + & 5c_2 = 7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből $c_2 = 1$ adódik, amit az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$. Tehát a keresett megoldás

$$y'(x) = e^{2x} + e^{5x}.$$

21. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek $\{e^x; e^{3x}\}$ egy alaprendszer!

Megoldás:

Az e^x függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$e^x - 4 \cdot e^x + 3e^x = 0.$$

Az e^{3x} függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$9e^x - 12 \cdot e^x + 3e^x = 0,$$

valamint az e^x , e^{3x} függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{pmatrix} = 2e^{4x} \neq 0,$$

így e^x és e^{3x} lineárisan független függvények.

Tehát e^x és e^{3x} lineárisan független megoldásai a differenciálegyenletnek, így alaprendszert alkotnak.

22. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek $\{e^{3x}; e^{-2x}\}$ egy alaprendszere!

Megoldás:

Az e^{3x} függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0.$$

Az e^{-2x} függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0,$$

valamint az e^{3x} , e^{-2x} függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -5e^x \neq 0,$$

így e^{3x} és e^{-2x} lineárisan független függvények.

Tehát e^{3x} és e^{-2x} lineárisan független megoldásai a differenciálegyenletnek, így alaprendszert alkotnak.

23. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a

$$y''(x) = 2 \sin(y'(x) \cdot y(x)) + y^2(x) \cdot (\sin x + \cos(y(x)))$$

$$y(0) = 0; y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatnak létezik megoldása!

Megoldás:

Mivel

$$f(u; v; w) = 2 \sin(v \cdot w) + v^2 \cdot (\sin u + \cos v)$$

függvény folytonos az $\mathbb{R}^3$ tartomány minden pontjában, így a $P = (0; 0; 2)$ pontban is, ezért a Cauchy-Peano-féle egzisztencia tétel miatt létezik megoldása.

24. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y''(x) = x \cdot y^2(x) + \sin(y'(x)), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható!

Megoldás:

Az

$$f(u; v; w) = u \cdot v^2 + \sin(w)$$

függvény folytonos $\mathbb{R}^3$ minden pontjában, így speciálisan a $P = (0; 0; 1)$ pontban is, továbbá

$$f'_v(u; v; w) = 2uv \quad \Rightarrow \quad f'_v(0; 0; 1) = 0$$

és

$$f'_w(u; v; w) = \cos w \quad \Rightarrow \quad f'_w(0; 0; 1) = \cos 1,$$

így léteznek az f második és harmadik változó szerinti parciális deriváltjai és korlátosak a P pontot tartalmazó valamely nyílt környezetben, ezért a Picard-Lindelöf-féle unicitási tétel szerint a kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

25. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'''(x) = x \cdot y(x) + y'(x) + y''(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható!

Megoldás:

Az

$$f(u; v; w; z) = x \cdot v + w + z$$

függvény folytonos $\mathbb{R}^4$ minden pontjában, így speciálisan a $P = (0; 0; 1; 2)$ pontban is, továbbá

$$f'_v(u; v; w; z) = x \quad \Rightarrow \quad f'_v(0; 0; 1; 2) = 0,$$

valamint

$$f'_w(u; v; w; z) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'_w(0; 0; 1; 2) = 1$$

és

$$f'_z(u; v; w; z) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'_z(0; 0; 1; 2) = 1,$$

így léteznek az f második, harmadik és negyedik változó szerinti parciális deriváltjai és korlátosak a P pontot tartalmazó valamely nyílt környezetben, ezért a Picard-Lindelöf-féle unicitási tétel szerint a kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

2. Közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenletek

26. Feladat. Tegyük fel, hogy $x \geq 0$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = 15 \cdot \sqrt{x}, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 8$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az

$$y''(x) = 15 \cdot \sqrt{x}$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 15 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c_1 = 10 \cdot \sqrt{x^3} + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = 10 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c_1 \cdot x + c_2 = 4 \cdot \sqrt{x^5} + c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a kezdetiérték feltételeket azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} 4 & = & 4 + c_1 + c_2 \\ 8 & = & 10 + c_1 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására $c_2 = 2$ és $c_1 = -2$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 4 \cdot \sqrt{x^5} - 2 \cdot x + 2.$$

27. Feladat. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = 4e^{2x} - \cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az

$$y''(x) = 4e^{2x} - \cos x$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 4 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \sin x + c_1 = 2e^{2x} - \sin x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} + \cos x + c_1 \cdot x + c_2 = e^{2x} + \cos x + c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a kezdetiérték feltételeket azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} 3 &= 2 + c_1 \\ 2 &= 2 + c_1 \end{aligned} \right\},$$

így az egyenletrendszer megoldására $c_1 = 2$ és $c_2 = 0$ adódik. Tehát a kezdeti-érték feladat megoldása

$$y(x) = e^{2x} + \cos x + 1.$$

28. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = 12x^2 - 24x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Az

$$y''(x) = 12x^2 - 24x$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 4x^3 - 12x^2 + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^4 - 4x^3 + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$, ezért $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x^4 - 4x^3.$$

- c) Az $x^4 - 4x^3 = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x^3 kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x^3 \cdot (x - 4) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 4$.

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a $4x^3 - 12x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $4x^2$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$4x^2 \cdot (x - 3) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 3$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 3[$	3	$]3; \infty[$
$y'(x)$	–	0	–	0	+
$y(x)$	$\searrow$	stac. pont	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		0		–27	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $12x^2 - 24x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $12x$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$12x \cdot (x - 2) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; \infty[$
$y''(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		0		–16	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 4x^3 = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 4x^3 = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 = x^4 + 4x^3,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

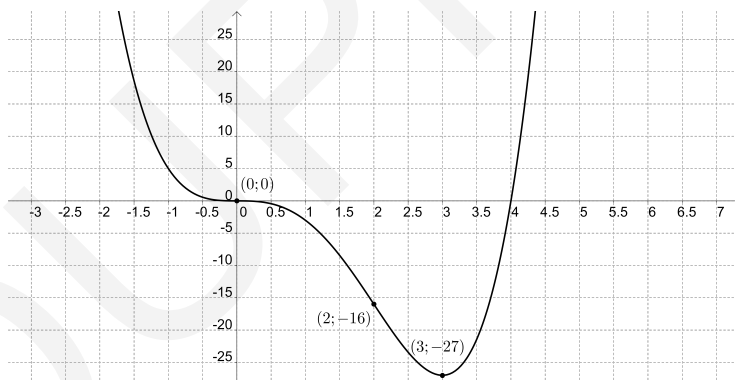
$$-y(x) = -x^4 + 4x^3,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-27; \infty[$.

29. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

kezdetiérték feladatot!

a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

- b) Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- c) Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- f) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- h) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- i) Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- j) Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) Az

$$y''(x) = 6x$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 3x^2 + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^3 + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = -3$, ezért $c_1 = -3$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x^3 - 3x.$$

- c) Az $x^3 - 3x = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei

$$x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}.$$

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a $3x^2 - 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x^2 = 1$, vagyis $x = \pm 1$. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; 1[$	1	$] 1; \infty[$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		2		-2	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $6x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy $x = 0$. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$] 0; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		0	

- f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty.$$

- g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x = \infty.$$

- h) Mivel

$$y(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

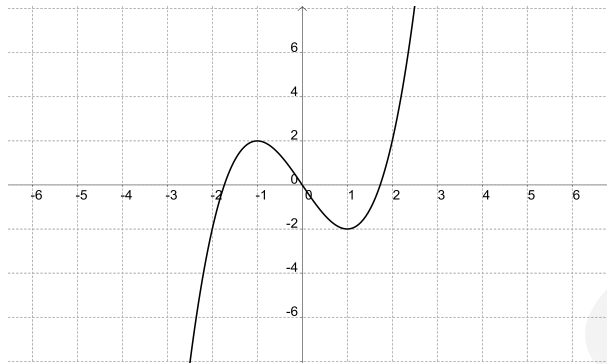
$$-y(x) = -x^3 + 3x,$$

ezért

$$y(-x) = -y(x),$$

így az y függvény páratlan.

- i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $] - \infty; \infty[$.

30. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = 12x^2 - 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexió pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Az

$$y''(x) = 12x^2 - 4$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 4x^3 - 4x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^4 - 2x^2 + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$, ezért $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x^4 - 4x^3.$$

- c) Az $x^4 - 2x^2 = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x^2 kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = \pm\sqrt{2}$.

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a

$$4x^3 - 4x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $4x$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$4x \cdot (x^2 - 1) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 1$ és $x_3 = -1$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; 0[$	0
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$	lok. max.
$y(x)$ értéke		-1		0

x	$]0; 1[$	1	$]1; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		-1	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $12x^2 - 4 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldására $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, illetve $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$] -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$
$y''(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$-\frac{5}{9}$	

x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$] \frac{1}{\sqrt{3}}; \infty[$
$y''(x)$	0	$+$
$y(x)$	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke	$-\frac{5}{9}$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 2x^2 = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 2x^2 = \infty.$$

h) Mivel

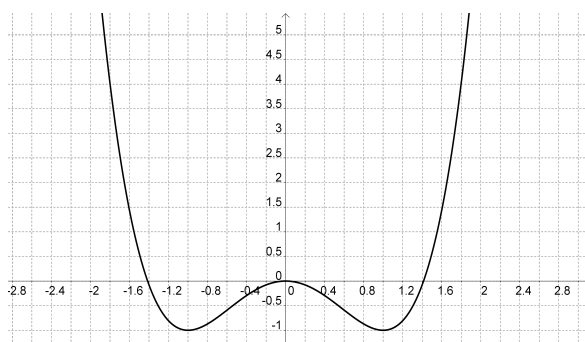
$$y(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 = x^4 - 2x^2,$$

ezért

$$y(-x) = y(x),$$

így az y függvény páros.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-1; \infty[$.

31. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = (x + 2) \cdot e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y'(x) &= (x + 2) \cdot e^x - \int e^x dx = \\ &= (x + 2) \cdot e^x - e^x + c_1 = (x + 1) \cdot e^x + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb parciális integrálással

$$\begin{aligned} y(x) &= \int (x+1) \cdot e^x + c_1 dx = (x+1) \cdot e^x - e^x + c_1 \cdot x + c_2 = \\ &= x \cdot e^x + c_1 \cdot x + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 1$, ezért $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$, így a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x \cdot e^x.$$

- c) Az $x \cdot e^x = 0$ egyenlet megoldása, vagyis az y függvény zérushelye $x = 0$.
 d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az $(x+1) \cdot e^x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = -1$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		$-e^{-1}$	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis az $(x+2) \cdot e^x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = -2$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -2[$	-2	$] - 2; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$-2e^{-2}$	

- f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = -x \cdot e^{-x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

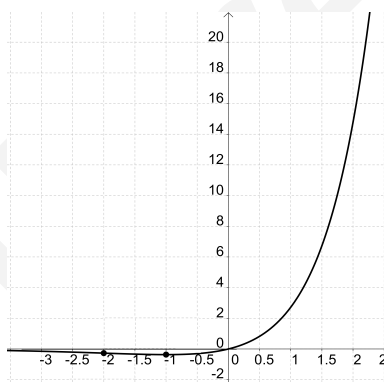
$$-y(x) = -x \cdot e^x,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-e^{-1}; \infty[$.

32. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tekintsük az

$$y''(x) = \frac{2}{x^3} + 2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!

- d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- f) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- h) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0-} y(x)$ határértéket!
- i) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$ határértéket!
- j) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- k) Vázzuk fel az y függvény grafikonját!
- l) Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Az

$$y''(x) = \frac{2}{x^3} + 2 = 2x^{-3} + 2$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -x^{-2} + 2x + c_1 = -\frac{1}{x^2} + 2x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^{-1} + x^2 + c_1 \cdot x + c_2 = \frac{1}{x} + x^2 + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(1) = 2$ és $y'(1) = 1$, ezért $c_1 = 0$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

c) Az

$$x^2 + \frac{1}{x} = 0$$

egyenlet mindkét oldalát szorozva x -szel azt kapjuk, hogy

$$x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 = -1,$$

vagyis $x = -1$.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a

$$-\frac{1}{x^2} + 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + 2x^3 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$] 0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}[$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$] \frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \infty[$
$y'(x)$	$-$	nincs ért.	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	nincs ért.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		nincs ért.		$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	

e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a

$$\frac{2}{x^3} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 + 2x^3 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldására $x = -1$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] -1; 0[$	0	$] 0; \infty[$
$y''(x)$	$+$	0	$-$	nincs ért.	$+$
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	nincs ért.	konvex
$y(x)$ értéke		0		nincs ért.	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + \frac{1}{x} = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \frac{1}{x} = \infty.$$

h) Az $y(x)$ függvény bal oldali határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \frac{1}{x} = -\infty.$$

i) Az $y(x)$ függvény jobb oldali határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \frac{1}{x} = +\infty.$$

j) Mivel

$$y(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

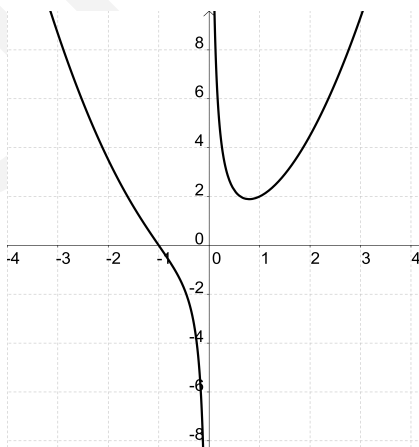
$$-y(-x) = -x^2 - \frac{1}{x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

k) Az y függvény grafikonja:



l) Az y függvény értékkészlete: $] -\infty; \infty[$.

33. **Feladat.** Legyen $x > 0$. Tekintsük az

$$y''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$ határértéket!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Algebrai átalakításokkal

$$y''(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = x^{-2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

adódik. Mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -x^{-1} - \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Az

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x \cdot x^{-2} dx$$

integrált parciális integrálással számoljuk. Az

$$u(x) = \ln x, \quad v'(x) = x^{-2}$$

jelöléssel élve

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx,$$

vagyis

$$\int \ln x \cdot x^{-2} dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} dx,$$

azaz

$$\int \ln x \cdot x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx,$$

így

$$\int \ln x \cdot x^{-2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát

$$y'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c_1 = \frac{\ln x}{x} + c_1.$$

Ebből újabb integrálással kapjuk meg az y függvényt.

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{\ln x}{x} + c_1 dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} + c_1 dx = \\ &= \frac{\ln^2 x}{2} + c_1 \cdot x + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(1) = 1$ és $y'(1) = 1$, ezért $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x.$$

- c) Mivel $x > 0$, és $\ln^2 x \geq 0$, ezért

$$y(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x > 0,$$

így az y függvénynek nincs zérushelye.

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az

$$\frac{\ln x}{x} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x + x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A megoldás közelítő értékét Newton-Raphson módszerrel határozzuk meg. Ehhez tekintsük a

$$g(x) = \ln x + x$$

függvényt és az $x_0 = 1$ kezdő értéket. A Newton-Raphson formula szerint

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)} = x_k - \frac{\ln x_k + x_k}{\frac{1}{x_k} + 1}.$$

A formula szerint

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln x_0 + x_0}{\frac{1}{x_0} + 1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

A következő iterációs lépésben

$$x_2 = x_1 - \frac{\ln x_1 + x_1}{\frac{1}{x_1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{3} \approx 0,5644.$$

A következő iterációs lépésben

$$x_3 = x_2 - \frac{\ln x_2 + x_2}{\frac{1}{x_2} + 1} = 0,5644 - \frac{\ln 0,5644 + 0,5644}{\frac{1}{0,5644} + 1} \approx 0,5671.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$]0; 0,5671[$	$0,5671$	$]0,5671; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		$0,728$	

e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \ln x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldására $x = e$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$]0; e[$	e	$]e; \infty[$
$y''(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$3,22$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln^2 x}{2} + x = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény jobb oldali határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{2} + x = \infty.$$

h) Az y függvény grafikonja:



i) Az y függvény értékkészlete: $[0, 728; \infty[$.

34. Feladat. Legyen $x > 0$. Tekintsük az

$$y''(x) = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$ határértéket!
- Vázzuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Az

$$y''(x) = \frac{1}{x}$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = \ln x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = \int \ln x + c_1 \, dx.$$

Az integrálást a parciális integrálás módszerével végezzük el. Ha bevezetjük az

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \ln x,$$

akkor

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx$$

adódik, vagyis

$$\int \ln x + c_1 \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + c_2,$$

ahol $c_2 \in \mathbb{R}$. Tehát

$$y(x) = x \cdot \ln x - x + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Mivel $y(1) = 0$ és $y'(1) = 1$, ezért $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x \cdot \ln x.$$

c) Az

$$x \cdot \ln x = 0$$

egyenlet megoldása $x \neq 0$ miatt $x = 1$.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az

$$\ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$]0; \frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e}; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		$-\frac{1}{e}$	

e) Mivel

$$y''(x) = \frac{1}{x} > 0,$$

ezért az y függvény értelmezési tartományának minden pontjában konvex.

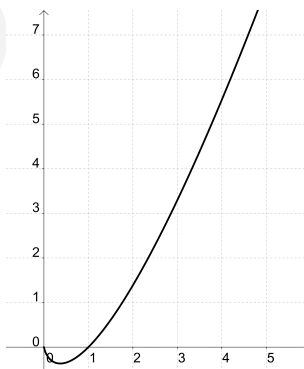
f) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln x = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény jobb oldali határértéke a 0 helyen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} y(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} -x = 0. \end{aligned}$$

h) Az y függvény grafikonja:



i) Az y függvény értékkészlete: $]-\frac{1}{e}; \infty[$.

35. Feladat. Oldjuk meg az

$$\ddot{s}(t) = g$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Az

$$\ddot{s}(t) = g$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = g \cdot t + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

36. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = 6x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot! Oldjuk meg kétféleképpen a feladatot!

1. Megoldás:

Az előző tétel alapján

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \int_0^x \left(3 + \int_0^t 6s \, ds \right) dt = 1 + \int_0^x 3 + [3s^2]_0^t dt = \\ &= 1 + \int_0^x 3 + 3t^2 dt = 1 + [3t + t^3]_0^x = 1 + 3x + x^3. \end{aligned}$$

2. Megoldás:

Mivel

$$y''(x) = 6x,$$

ezért

$$y'(x) = \int 6x \, dx = 3x^2 + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Ezt integrálva

$$y(x) = \int 3x^2 + c_1 \, dx = x^3 + c_1 \cdot x + c_2.$$

Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 3 \cdot 0^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = 0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^3 + 3x + 1.$$

37. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = 6x + \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az $y''(x) = 6x + \cos x$ egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = \int 6x + \cos x \, dx = 3x^2 + \sin x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^3 - \cos x + c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt $y(0) = 1$, így

$$1 = -\cos 0 + c_2 = -1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 2,$$

másrészt $y'(0) = 2$, így

$$2 = 3 \cdot 0^2 + \sin 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^3 - \cos x + 2x + 2.$$

38. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = 6x + 4 \sin x + \cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az $y''(x) = 6x + 4 \sin x + \cos x$ egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = \int 6x + 4 \sin x + \cos x \, dx = 3x^2 - 4 \cos x + \sin x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$. Ebből újabb integrálással

$$y(x) = x^3 - 4 \sin x - \cos x + c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt $y(0) = 3$, így

$$3 = -1 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 4,$$

másrészt $y'(0) = 5$, így

$$5 = -4 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 9.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^3 - 4 \sin x - \cos x + 9x + 4.$$

3. Az $y''(x) = f(x; y'(x))$ alakú differenciálegyenletek

39. **Feladat.** Legyen $x > -1$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = -\frac{y'(x)}{1+x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot! Vázzuk fel a megoldásfüggvény grafikonját!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = -\frac{p(x)}{1+x}$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(x) = -\frac{1}{1+x}$ és $h(p) = p$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = - \int \frac{1}{1+x} dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p| = -\ln |1+x| + c$$

adódik, amiből

$$|p| = e^{-\ln |1+x| + c}.$$

Felhasználva, az $x > -1$ feltételt és a logaritmus definícióját azt kapjuk, hogy

$$|p| = e^{-\ln(1+x)} \cdot e^c = \frac{c_1}{1+x},$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel c_1 tetszőleges konstans, ezért az abszolútérték elhagyható, így

$$p(x) = \frac{c_1}{1+x}.$$

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$y(x) = \int \frac{c_1}{1+x} dx = c_1 \cdot \ln(1+x) + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

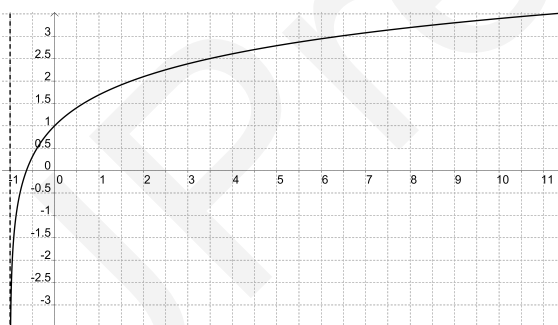
Mivel $y(0) = 1$, ezért $1 = c_2$. Felhasználva, hogy $y'(0) = 1$ azt kapjuk, hogy

$$1 = \frac{c_1}{1+0},$$

így $c_1 = 1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = \ln(1+x) + 1.$$

A függvény grafikonja:



40. Feladat. Legyen $x > 0$. Oldjuk meg a

$$2x \cdot y''(x) + y'(x) = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot! Vázoljuk fel a megoldásfüggvény grafikonját!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = -\frac{p(x)}{2x}$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(x) = -\frac{1}{2x}$ és $h(p) = p$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p| = -\frac{1}{2} \cdot \ln |x| + C_1$$

adódik, amiből

$$p = \frac{c_1}{\sqrt{x}},$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

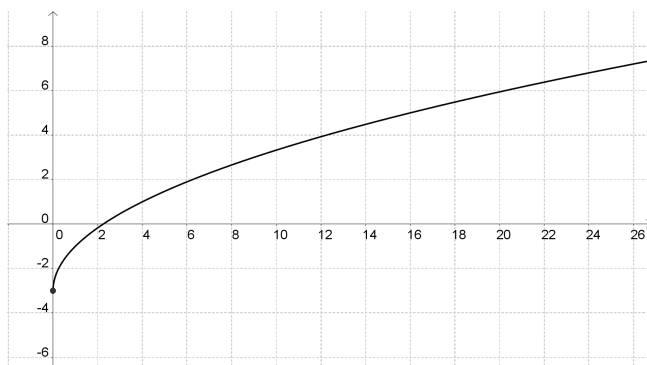
$$y(x) = \int \frac{c_1}{\sqrt{x}} dx = \int c_1 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = 2c_1 \cdot \sqrt{x} + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $y'(1) = 1$, ezért $1 = c_1$. Felhasználva, hogy $y(1) = -1$ azt kapjuk, hogy $c_2 = -3$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = 2 \cdot \sqrt{x} - 3.$$

A függvény grafikonja:



41. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = 2x \cdot (y'(x))^2$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = 2x \cdot p^2(x)$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(x) = 2x$ és $h(p) = p^2$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p^2} dp = \int 2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{p} = x^2 + c_1$$

adódik, amiből

$$p(x) = -\frac{1}{x^2 + c_1},$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$\begin{aligned} y(x) &= \int -\frac{1}{x^2 + c_1} dx = -\int \frac{\frac{1}{c_1}}{\frac{x^2}{c_1} + 1} dx = \\ &= -\frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{c_1}} \right) \cdot \sqrt{c_1} + c_2 = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{c_1}} \right) + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \geq 0$ és $c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

42. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + (y'(x))^2 + 1 = 0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = -1 - p^2(x)$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(x) = 1$ és $h(p) = -1 - p^2$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{1}{1+p^2} dp = \int 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\arctg p = x + c_1$$

adódik, amiből

$$p(x) = \operatorname{tg}(-x - c_1),$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \operatorname{tg}(-x - c_1) dx = - \int \frac{\sin(-x - c_1)}{\cos(-x - c_1)} dx = \\ &= -\ln |\cos(-x - c_1)| + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \geq 0$ és $c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

43. Feladat. Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$y''(x) = \frac{1}{x} \cdot y'(x) + x \cdot \sin x$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = \frac{1}{x} \cdot p(x) + x \cdot \sin x$$

alakú lesz, amely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

A megfelelő homogén egyenlet

$$p'(x) - \frac{1}{x} \cdot p(x) = 0,$$

melynek megoldása

$$p_h(x) = c_1 \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = c_1 \cdot x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg. Tekintsük a

$$p_p(x) = c_1(x) \cdot x$$

függvényt. Ezt behelyettesítve a

$$p'(x) = \frac{1}{x} \cdot p(x) + x \cdot \sin x$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot x + c_1(x) = \frac{1}{x} \cdot c_1(x) \cdot x + x \cdot \sin x,$$

vagyis

$$c_1'(x) = \sin x,$$

amelynek egy primitív függvénye

$$c_1(x) = -\cos x.$$

Tehát a

$$p'(x) = \frac{1}{x} \cdot p(x) + x \cdot \sin x$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$p(x) = c_1 \cdot x - x \cdot \cos x.$$

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$y(x) = \int c_1 \cdot x - x \cdot \cos x \, dx.$$

Az $x \cdot \cos x$ függvény integrálást a parciális integrálás képletével végezzük el. Ha bevezetjük az

$$u(x) = x, \quad v'(x) = e^x$$

függvényeket, akkor

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx,$$

vagyis

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c_2.$$

Tehát

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{x^2}{2} - x \cdot \sin x - \cos x - c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

44. **Feladat.** Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$x \cdot y''(x) = y'(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

helyettesítést. Ekkor

$$p'(x) = y''(x).$$

Ennek megfelelően átírva az egyenletet

$$x \cdot p'(x) = p(x)$$

adódik, vagy explicit alakban felírva

$$p'(x) = \frac{1}{x} \cdot p(x),$$

amely egy szeparábilis differenciálegyenlet. Bevezetve a $h(p) = p$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvényeket, teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{x} dx$$

egyenletnek. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p| = \ln x + c \Rightarrow p = e^{\ln |x| + c} = c_1 \cdot x,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$.

Mivel $y'(x) = p(x)$, ezért

$$y'(x) = c_1 \cdot x,$$

ami egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Ebből integrálással kapjuk, hogy

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{x^2}{2} + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = c_1 \cdot x.$$

Mivel $y'(1) = 2$, ezért $2 = c_1$. Másrészt $y(1) = 0$, így

$$0 = \frac{c_1}{2} + c_2,$$

azaz $c_2 = -1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^2 - 1.$$

45. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) = x$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a $p(x) = y'(x)$ helyettesítést. Ekkor $p'(x) = y''(x)$. Ennek megfelelően átírva az egyenletet

$$p'(x) + 3p(x) = x$$

adódik, amely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet. A megfelelő homogén egyenlet

$$p'(x) + 3p(x) = 0,$$

amelynek általános megoldása

$$p(x) = c_1 \cdot e^{-\int 3 dx} = c_1 \cdot e^{-3x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$p_p(x) = c_1(x) \cdot e^{-3x}$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve a

$$p'(x) + 3p(x) = x$$

egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot e^{-3x} - 3c_1(x) \cdot e^{-3x} + 3c_1(x) \cdot e^{-3x} = x,$$

azaz

$$c_1'(x) = x \cdot e^{3x}.$$

Ebből parciális integrálással kapjuk $c_1(x)$ -et:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \frac{1}{3}x \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{3}x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} \cdot e^{3x} = \\ &= e^{3x} \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \right). \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$p_p(x) = c_1(x)e^{-3x} = e^{3x} \cdot \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) \cdot e^{-3x} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}.$$

Így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$p(x) = C_1 \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}.$$

Mivel $y'(x) = p(x)$, ezért

$$y'(x) = c_1 \cdot e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9},$$

ami egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Ebből integrálással kapjuk, hogy

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9} + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

46. Feladat. Határozzunk meg egy olyan függvényt, amelynek a görbülete minden pontjában 1.

Megoldás:

Tegyük fel, hogy $x > 0$.

A görbület definícióját felhasználva keresünk egy olyan függvényt, amelyre teljesül az

$$\frac{y''(x)}{\left(1 + (y'(x))^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 1$$

differenciálegyenlet.

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = \left(1 + p^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(x) = 1$ és $h(p) = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dp = \int 1 dx.$$

A bal oldalon szereplő integrál elvégzéséhez vezessük be a

$$p = \operatorname{tg} u$$

helyettesítést! Ekkor $u = \operatorname{arctg} p$. Felhasználva az

$$1 + \operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} = \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

összefüggést azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \cos u du = \sin u.$$

Tehát az

$$\int \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dp = \int 1 dx$$

integrálások elvégzése után

$$\sin u = x + c$$

adódik, ahol $u = \operatorname{arctg} p$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Mivel csak egyetlen olyan függvényt keresünk, amely eleget tesz a differenciálegyenletnek, ezért a c konstans elhagyhatjuk, így a $\sin u = x$ egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy $u = \operatorname{arctg} p$

$$\sin(\operatorname{arctg} p) = x.$$

Mivel

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

ezért

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

így

$$\sin(\operatorname{arctg} p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}},$$

vagyis

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = x.$$

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{(y'(x))^2 + 1}} = x.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = x \cdot \sqrt{(y'(x))^2 + 1},$$

így

$$(y'(x))^2 = x^2 \cdot ((y'(x))^2 + 1).$$

Ebből a zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$(y'(x))^2 = x^2 \cdot (y'(x))^2 + x^2.$$

Kifejezve az y' függvényt

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

adódik. Mindkét oldalt integrálva

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

A tetszőleges additív konstans elhagytuk, mivel csak egyetlen függvényt keressünk.

47. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) = y'(x) + e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexió pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = p(x) + e^x$$

alakú lesz, amely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$p'(x) = p(x).$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$p_h(x) = c_1 \cdot e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg. Legyen

$$p_p(x) = c_1(x) \cdot e^x.$$

Ezt behelyettesítve a

$$p'(x) = p(x) + e^x$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot e^x + c_1(x) \cdot e^x = c_1(x) \cdot e^x + e^x,$$

vagyis

$$c_1'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1(x) = x.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$p_p(x) = x \cdot e^x,$$

így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$p(x) = c_1 \cdot e^x + x \cdot e^x,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$.

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$y(x) = \int c_1 \cdot e^x + x \cdot e^x dx.$$

Az $x \cdot e^x$ függvény integrálját parciális integrálással határozzuk meg. Ha bevezetjük az

$$u(x) = x, \quad v'(x) = e^x$$

függvényeket, akkor

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx,$$

vagyis

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c_2.$$

Tehát a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = (x - 1 + c_1) \cdot e^x + c_2$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y'(0) = 0$, ezért $0 = c_1$. Felhasználva, hogy $y(0) = -1$ azt kapjuk, hogy $c_2 = 0$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = (x - 1) \cdot e^x.$$

c) Az

$$(x - 1) \cdot e^x = 0$$

egyenlet megoldása, vagyis az y függvény zérushelye $x = 1$.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az

$$x \cdot e^x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amire $x = 0$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		-1	

e) Az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel

$$y''(x) = e^x + x \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x,$$

ezért az

$$(x + 1) \cdot e^x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amire $x = -1$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$-2e^{-1}$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1) \cdot e^x = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (-x - 1) \cdot e^{-x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

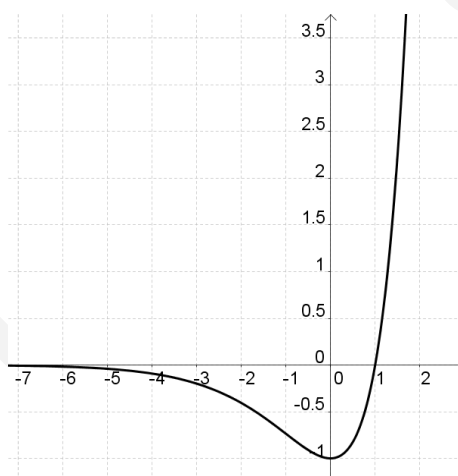
$$-y(x) = -(x - 1) \cdot e^x,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-1; \infty[$.

48. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) - y'(x) = -3x^2 + 6x + 3, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitását és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!

- e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- f) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- h) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- i) Vázzuk fel az y függvény grafikonját!
- j) Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) - p(x) = -3x^2 + 6x + 3$$

alakú lesz, amely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$p'(x) = p(x).$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$p_h(x) = c_1 \cdot e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg. Legyen

$$p_p(x) = c_1(x) \cdot e^x.$$

Ezt behelyettesítve a

$$p'(x) - p(x) = -3x^2 + 6x + 3$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot e^x + c_1(x) \cdot e^x - c_1(x) \cdot e^x = -3x^2 + 6x + 3,$$

vagyis

$$c_1'(x) = (-3x^2 + 6x + 3) \cdot e^{-x}.$$

Ebből a c_1 függvényt parciális integrálással határozhatjuk meg. Ha bevezetjük az

$$u(x) = -3x^2 + 6x + 3, \quad v'(x) = e^{-x}$$

függvényeket, akkor

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \int (-3x^2 + 6x + 3) \cdot e^{-x} \, dx &= \\ &= -(-3x^2 + 6x + 3) \cdot e^{-x} + \int (-6x + 6) e^{-x} \, dx. \end{aligned}$$

Újabb parciális integrálást alkalmazva

$$\begin{aligned} \int (-6x + 6) e^{-x} \, dx &= -(-6x + 6) \cdot e^{-x} - \int 6 \cdot e^{-x} \, dx = \\ &= (6x - 6) \cdot e^{-x} + 6 \cdot e^{-x}, \end{aligned}$$

vagyis

$$c_1(x) = (3x^2 - 6x - 3 + 6x - 6 + 6) \cdot e^{-x} = (3x^2 - 3) \cdot e^{-x}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$p_p(x) = 3x^2 - 3,$$

így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$p(x) = c_1 \cdot e^x + 3x^2 - 3,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$.

Mivel $p(x) = y'(x)$, ezért

$$y(x) = \int c_1 \cdot e^x + 3x^2 - 3 \, dx = c_1 \cdot e^x + x^3 - 3x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y'(0) = -3$, ezért $0 = c_1$. Felhasználva, hogy $y(0) = 0$ azt kapjuk, hogy $c_2 = 0$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = x^3 - 3x.$$

- c) Az $x^3 - 3x = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei

$$x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}.$$

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a $3x^2 - 3 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x^2 = 1$, vagyis $x = \pm 1$. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; 1[$	1	$] 1; \infty[$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		2		-2	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $6x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire azt kapjuk, hogy $x = 0$. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$] 0; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		0	

- f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty.$$

- g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

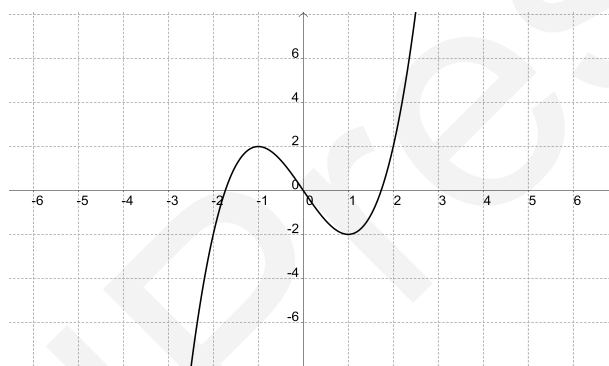
$$-y(x) = -x^3 + 3x,$$

ezért

$$y(-x) = -y(x),$$

így az y függvény páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $] -\infty; \infty[$.

4. Az $y''(x) = f(y(x); y'(x))$ alakú differenciálegyenletek

49. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y''(x) = 2y'(x) \cdot y(x)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(y(x))$$

helyettesítést. Ekkor

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Végrehajtva a helyettesítést a

$$p'(y) \cdot p(y) = 2p(y) \cdot y$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Látható, hogy $p = 0$ megoldás. Ekkor $y'(x) = 0$, így $y = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Most tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor az előbbi egyenletet explicit alakban írva

$$p'(y) = 2p(y)$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$p(y) = y^2 + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $y' = p(y)$, ezért az

$$y'(x) = y^2(x) + c_1$$

egyenlethez jutunk, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek megoldásához tekintsük az

$$\int \frac{1}{y^2 + c_1} dy = \int 1 dx.$$

egyenletet. A bal oldalt átalakítva, majd elvégezve az integrálást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2 + c_1} dy &= \frac{1}{c_1} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right)^2 + 1} dy = \frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right) \cdot \sqrt{c_1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right).\end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right) = x + c_2.$$

Kifejezve y -t

$$y = \sqrt{c_1} \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{c_1} \cdot x + \sqrt{c_1} \cdot c_2) = C_1 \cdot \operatorname{tg}(C_1 \cdot x + C_2).$$

50. Feladat. Oldjuk meg az

$$y(x) \cdot y''(x) = (y'(x))^2$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(y(x))$$

helyettesítést. Ekkor

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Végrehajtva a helyettesítést a

$$y \cdot p'(y) \cdot p(y) = p^2(y)$$

differentiálegyenlethez jutunk.

Látható, hogy $p = 0$ megoldás, így $y = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Most tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor az előbbi egyenletet explicit alakban írva

$$p'(y) = \frac{1}{y} \cdot p(y)$$

adódik. Ez egy szeparábilis differentiálegyenlet.

Vezessük be a $g(y) = \frac{1}{y}$ és $h(p) = p$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$p'(y) = g(y) \cdot h(p)$$

alakú lesz. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(y) dy$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = \int \frac{1}{y} dy.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p| = \ln |y| + c \quad \Rightarrow \quad p(y) = c_1 \cdot y.$$

Mivel $y' = p(y)$, ezért az

$$y'(x) = c_1 \cdot y(x)$$

egyenlethez jutunk, amely egy újabb szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek megoldásához tekintsük az

$$\int \frac{1}{y} dy = \int c_1 dx$$

egyenletet. Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, vagyis

$$y(x) = e^{c_1 \cdot x + c_2} = e^{c_1 \cdot x} \cdot e^{c_2} = C_2 \cdot e^{c_1 \cdot x},$$

ahol $c_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

51. Feladat. Oldjuk meg az

$$y''(x) = \frac{y(x) \cdot (y'(x))^2}{1 + (y(x))^2}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(y(x))$$

helyettesítést. Ekkor

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Végrehajtva a helyettesítést a

$$p'(y) \cdot p(y) = \frac{y \cdot p^2(y)}{1 + y^2}$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Az egyenletet átrendezve

$$p'(y) = \frac{y \cdot p(y)}{1 + y^2}$$

adódik. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(y) = \frac{y}{1+y^2}$ és $h(p) = p$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$p'(y) = g(y) \cdot h(p)$$

alakú lesz. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(y) dy$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2y}{1 + y^2} dy.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p| = \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + y^2) + c \quad \Rightarrow \quad p(y) = c_1 \cdot \sqrt{1 + y^2}.$$

Mivel $y' = p(y)$, ezért az

$$y'(x) = c_1 \cdot \sqrt{1 + y^2}$$

egyenlethez jutunk, amely egy újabb szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek megoldásához tekintsük az

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \int c_1 dx$$

egyenletet. Elvégezve az integrálásokat

$$\operatorname{arsh} y = c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, vagyis

$$y(x) = \operatorname{sh}(c_1 \cdot x + c_2),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

52. Feladat. Oldjuk meg az

$$y(x) \cdot y''(x) = 2 \cdot (y'(x))^2 - 2y'(x)$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(y(x))$$

helyettesítést. Ekkor

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Végrehajtva a helyettesítést a

$$y \cdot p'(y) \cdot p(y) = 2p^2(y) - 2p(y)$$

differentiálegyenlethez jutunk.

Látható, hogy $p = 0$ megoldás, vagyis ekkor $y(x) = c$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Ha $p \neq 0$, akkor az egyenletet p -vel osztva

$$y \cdot p'(y) = 2p(y) - 2 \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{2}{y} \cdot (p - 1)$$

adódik. Ez egy szeparábilis differentiálegyenlet.

Vezessük be a $g(y) = \frac{2}{y}$ és $h(p) = p - 1$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$p'(y) = g(y) \cdot h(p)$$

alakú lesz. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(y) dy$$

egyenletet kell megoldanunk a p ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p-1} dp = 2 \cdot \int \frac{1}{y} dy.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |p-1| = 2 \cdot \ln |y| + c \quad \Rightarrow \quad p-1 = c_1 \cdot y^2,$$

vagyis

$$p(y) = c_1 \cdot y^2 + 1.$$

Mivel $y' = p(y)$, ezért az

$$y'(x) = c_1 \cdot y^2 + 1$$

egyenlethez jutunk, amely egy újabb szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek megoldásához tekintsük az

$$\int \frac{1}{c_1 \cdot y^2 + 1} dy = \int 1 dx$$

egyenletet. Elvégezve az integrálásokat

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{c_1} \cdot y) = x + c_2$$

adódik, vagyis

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{c_1} \cdot (x + c_2)),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5. Másodrendű lineáris konstansegyütthatós homogén differenciálegyenletek

53. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

vagyis az egyik megoldás $\lambda_1 = -5$, a másik $\lambda_2 = -2$.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{-5x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -5c_1 \cdot e^{-5x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$5 = y'(0) = -5c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = -5c_1 - 2c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 értékét az

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ -5c_1 & - & 2c_2 = 5 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Az első egyenletet kettővel szorozva, majd a két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $-3c_1 = 9$, amiből

$c_1 = -3$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 5$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -3e^{-5x} + 5e^{-2x}.$$

54. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2},$$

vagyis az egyik megoldás $\lambda_1 = -1$, a másik $\lambda_2 = -3$.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 3c_2 \cdot e^{-3x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-1 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$4 = y'(0) = -c_1 \cdot e^{-1 \cdot 0} - 3c_2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = -c_1 - 3c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 értékét az

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ -c_1 & - & 3c_2 = 4 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $-2c_1 = 6$, amiből $c_1 = -3$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az

első egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 5$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 5e^{-x} - 3e^{-3x}.$$

55. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis az egyik megoldás $\lambda_1 = 3$, a másik $\lambda_2 = -2$.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$3 = y(0) = c_1 \cdot e^{3 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másképpen

$$4 = y'(0) = 3c_1 \cdot e^{3 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 3c_1 - 2c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 értékét az

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 3 \\ 3c_1 & - & 2c_2 = 4 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Az első egyenletet kettővel szorozva, majd a két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $5c_1 = 10$, amiből

$c_1 = 2$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^{3x} + e^{-2x}.$$

56. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 16 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek $\lambda_1 = 2$, illetve $\lambda_2 = -2$.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$3 = y(0) = c_1 \cdot e^{2 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$2 = y'(0) = 2c_1 \cdot e^{2 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = 2c_1 - 2c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 értékét az

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 3 \\ 2c_1 & - & 2c_2 = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Az első egyenletet kettővel szorozva, majd a két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $4c_1 = 8$, amiből $c_1 = 2$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^{2x} + e^{-2x}.$$

57. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 16 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Mivel

$$\lambda \cdot (\lambda - 4) = 0,$$

ezért a karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = 0$, illetve $\lambda_2 = 4$.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 + c_2 \cdot e^{4x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = 4c_2 \cdot e^{4x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$3 = y(0) = c_1 + c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másképpen

$$2 = y'(0) = 4c_2 \cdot e^{4 \cdot 0} = 4c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 értékét az

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 3 \\ 4c_2 & = & 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $c_2 = \frac{1}{2}$. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe $c_1 = \frac{5}{2}$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{4x}.$$

58. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

miatt $\lambda = -1$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az $y'(x)$ függvényre:

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-x} - c_2 \cdot x \cdot e^{-x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = c_1,$$

így $c_1 = 2$. Másrészt

$$-1 = y'(0) = -c_1 \cdot e^{-0} + c_2 \cdot e^{-0} - c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = -c_1 + c_2.$$

Mivel $c_1 = 2$, ezért $c_2 = 1$.

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^{-x} + x \cdot e^{-x}.$$

59. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

miatt $\lambda = -2$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az $y'(x)$ függvényre:

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-2x} - 2c_2 \cdot x \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1,$$

így $c_1 = 1$. Másrészt

$$0 = y'(0) = -2c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 - 2c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = -2c_1 + c_2.$$

Mivel $c_1 = 1$, ezért $c_2 = 2$.

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} + 2x \cdot e^{-2x}.$$

60. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!

- h) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- i) Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- j) Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

miatt $\lambda = 1$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az $y'(x)$ függvényre:

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$0 = y(0) = c_1,$$

így $c_1 = 0$. Másrészt

$$1 = y'(0) = c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = c_1 + c_2.$$

Mivel $c_1 = 0$, ezért $c_2 = 1$.

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x \cdot e^x.$$

- c) Az $x \cdot e^x = 0$ egyenlet megoldása, vagyis az y függvény zérushelye $x = 0$.

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az $(x + 1) \cdot e^x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = -1$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		$-e^{-1}$	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis az $(x + 2) \cdot e^x = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = -2$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -2[$	-2	$] - 2; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$-2e^{-2}$	

- f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

- g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \infty.$$

- h) Mivel

$$y(-x) = -x \cdot e^{-x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

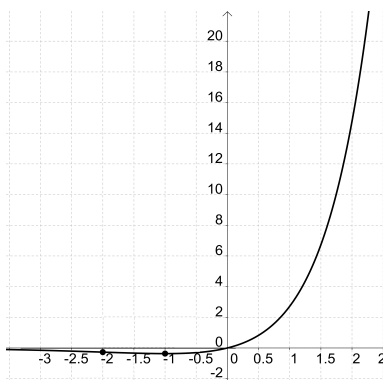
$$-y(x) = -x \cdot e^x,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-e^{-1}; \infty[$.

61. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázzuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 36 - 36 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

miatt $\lambda = -3$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

b) A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az $y'(x)$ függvényre:

$$y'(x) = -3c_1 \cdot e^{-3x} + c_2 \cdot e^{-3x} - 3c_2 \cdot x \cdot e^{-3x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1,$$

így $c_1 = 2$. Másrészt

$$-5 = y'(0) = -3c_1 \cdot e^0 + c_2 \cdot e^0 - 3c_2 \cdot 0 \cdot e^0 = -3c_1 + c_2.$$

Mivel $c_1 = 2$, ezért $c_2 = 1$.

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (x + 2) \cdot e^{-3x}.$$

c) Az $(x + 2) \cdot e^{-3x} = 0$ egyenlet megoldása, vagyis az y függvény zérushelye $x = -2$.

d) Az $y'(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel

$$y'(x) = e^{-3x} - 3 \cdot (x + 2) \cdot e^{-3x} = (-3x - 5) \cdot e^{-3x},$$

ezért az

$$e^{-3x} - 3 \cdot (x + 2) \cdot e^{-3x} = (-3x - 5) \cdot e^{-3x} = 0$$

egyenlet megoldása $x = -\frac{5}{3}$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; -\frac{5}{3}[$	$-\frac{5}{3}$	$] -\frac{5}{3}; \infty[$
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$
$y(x)$ értéke		$\approx 49,47$	

e) Az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel

$$y''(x) = -3 \cdot e^{-3x} - 3 \cdot (-3x - 5) \cdot e^{-3x} = e^{-3x} \cdot (9x + 12),$$

ezért a

$$-3 \cdot e^{-3x} - 3 \cdot (-3x - 5) \cdot e^{-3x} = e^{-3x} \cdot (9x + 12) = 0$$

egyenlet megoldása $x = -\frac{4}{3}$. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; -\frac{4}{3}[$	$-\frac{4}{3}$	$] -\frac{4}{3}; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$\approx 36,4$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) \cdot e^{-3x} = -\infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2) \cdot e^{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{e^{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3e^x} = 0.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (-x - 2) \cdot e^{3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

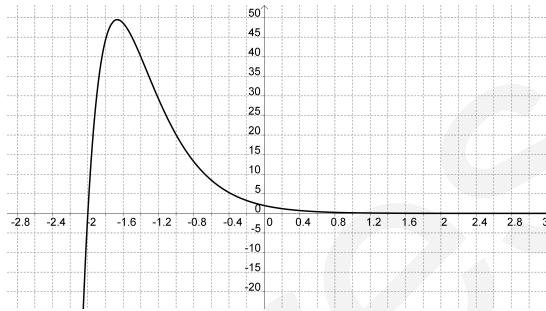
$$-y(x) = (-x - 2) \cdot e^{-3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $] -\infty; 49, 47[$.

62. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4,$$

így az egyetlenek két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk például a $\lambda = -2 + i$ megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét α -val, képzetes részét β -val. Ekkor azt kapjuk, hogy $\alpha = -2$, $\beta = 1$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x - c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x - 2c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 = c_1,$$

így $c_1 = 1$. Másrészt

$$2 = y'(0) = -2c_1 \cdot e^0 \cdot \cos 0 - c_1 \cdot e^0 \cdot \sin 0 - 2c_2 \cdot e^0 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot e^0 \cdot \cos 0 = -2c_1 + c_2.$$

Mivel $c_1 = 1$, ezért $c_2 = 4$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} \cdot \cos x + 4e^{-2x} \cdot \sin x = e^{-2x} \cdot (\cos x + 4 \sin x).$$

Megjegyezzük, hogy azért volt elegendő az egyik komplex számmal dolgozni, mert ha a konjugálttal is felírnánk a megoldást, akkor a koszinusz függvény párossága miatt

$$\cos(-\beta x) = \cos(\beta x),$$

a szinuszos függvény páratlansága miatt

$$\sin(-\beta x) = -\sin(\beta x),$$

így ha a karakterisztikus egyenlet másik megoldásával írjuk fel a differenciálegyenlet megoldását, akkor is ugyanahhoz a megoldáshoz jutunk.

63. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = -16,$$

így egyetlen két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk például a $\lambda = 2i$ megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét α -val, képzetes részét β -val. Ekkor azt kapjuk, hogy $\alpha = 0$, $\beta = 2$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -2c_1 \cdot \sin 2x + 2c_2 \cdot \cos 2x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1,$$

másrészt

$$1 = 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x.$$

64. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot! Vázoljuk fel a megoldásfüggvény grafikonját!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = -4,$$

így egyetlen két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Elegendő az egyik komplex számmal tovább

dolgozni, válasszuk például a $\lambda = i$ megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét α -val, képzetes részét β -val. Ekkor azt kapjuk, hogy $\alpha = 0$, $\beta = 1$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1,$$

másrészt

$$-1 = y'(0) = c_2.$$

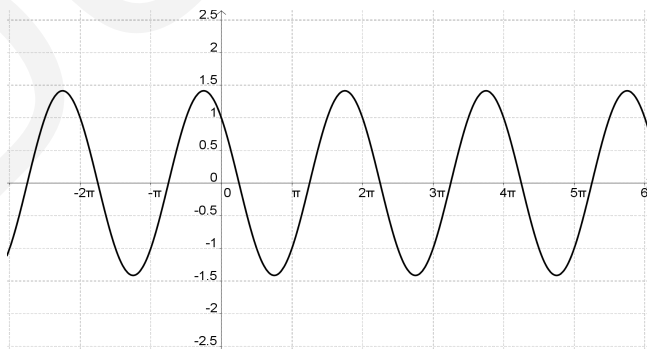
Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \cos x - \sin x.$$

Mivel

$$\begin{aligned} y(x) &= \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right), \end{aligned}$$

ezért a függvény grafikonja:



65. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 9y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot! Vázoljuk fel a megoldásfüggvény grafikonját!

Megoldás:

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 9 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = -9,$$

így egyetlen két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai. A megoldások $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk például a $\lambda = 3i$ megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét α -val, képzetes részét β -val. Ekkor azt kapjuk, hogy $\alpha = 0$, $\beta = 3$. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot \cos 3x + c_2 \cdot \sin 3x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A c_1 és c_2 számok kiszámolásához szükségünk lesz az y' függvényre is:

$$y'(x) = -3c_1 \cdot \sin x + 3c_2 \cdot \cos x.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$1 = y(0) = c_1,$$

másrészt

$$3 = y'(0) = 3c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

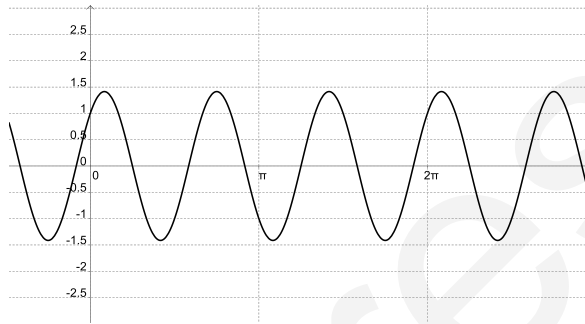
Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \cos 3x + \sin 3x.$$

Mivel

$$\begin{aligned} y(x) &= \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 3x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 3x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 3x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \right), \end{aligned}$$

ezért a függvény grafikonja:



66. Feladat. Írjunk fel olyan másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Megoldás:

Egy olyan differenciálegyenlet, amely megfelel a feltételeknek

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

67. Feladat. Írjunk fel olyan másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Megoldás:

Egy olyan differenciálegyenlet, amely megfelel a feltételeknek

$$y''(x) - 7y'(x) + 10y(x) = 0.$$

68. Feladat. Írjunk fel olyan másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Megoldás:

Egy olyan differenciálegyenlet, amely megfelel a feltételeknek

$$y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0.$$

69. Feladat. Írjunk fel olyan másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek egy megoldása

$$y(x) = e^{-3x} \cdot \cos 2x + e^{-3x} \cdot \sin 2x.$$

Megoldás:

A megoldásfüggvény

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + e^{\alpha x} \cdot (\sin \beta x)$$

alakú, ahol jelen esetben $\alpha = -3$ és $\beta = 2$. Ez azt jelenti, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i.$$

A karakterisztikus egyenlet gyöktényezői alakja

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0,$$

azaz

$$(\lambda - (-3 + 2i)) \cdot (\lambda - (-3 - 2i)) = 0,$$

vagyis

$$(\lambda + 3 - 2i) \cdot (\lambda + 3 + 2i) = 0.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2i \cdot \lambda + 3\lambda + 9 + 6i - 2i \cdot \lambda - 6i - 4i^2 = 0.$$

Elvégezve az összevonást és felhasználva, hogy $i^2 = -1$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

adódik. Ebből felírható egy olyan differenciálegyenlet, melynek karakterisztikus egyenlete az előbbi másodfokú egyenlet:

$$y''(x) + 6y'(x) + 13y(x) = 0.$$

70. Feladat. Írjunk fel olyan másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén differenciálegyenletet, melynek egy megoldása

$$y(x) = e^{2x} + e^{-3x}.$$

Megoldás:

A megoldásfüggvény

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}$$

alakú, ahol jelen esetben $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -3$, amelyek a karakterisztikus egyenlet gyökei. A karakterisztikus egyenlet gyöktényezőssé alakja

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 2) \cdot (\lambda + 3) = 0.$$

A zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Ebből felírható egy olyan differenciálegyenlet, melynek karakterisztikus egyenlete az előbbi másodfokú egyenlet:

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0.$$

6. Másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása konstansvariálással

71. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 48x + 96, \quad y(0) = 42, \quad y'(0) = 18$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével, majd határozzuk meg az $y(1)$ függvényértéket!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 4$, illetve $\lambda_2 = 1$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{4x}$ és $y_2(x) = e^x$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c'_1(x) \cdot y_1(x) + c'_2(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c'_1(x) \cdot y'_1(x) + c'_2(x) \cdot y'_2(x) &= 48x + 96 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c'_1(x) \cdot e^{4x} + c'_2(x) \cdot e^x &= 0 \\ c'_1(x) \cdot 4 \cdot e^{4x} + c'_2(x) \cdot e^x &= 48x + 96 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & e^x \\ 4e^{4x} & e^x \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = -3e^{5x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^x \\ 48x + 96 & e^x \end{pmatrix} = -e^x \cdot (48x + 96),$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-e^x \cdot (48x + 96)}{-3e^{5x}} = (16x + 32) \cdot e^{-4x}.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & 48x + 96 \end{pmatrix} = e^{4x} \cdot (48x + 96),$$

így

$$c_2'(x) = \frac{e^{4x} \cdot (48x + 96)}{-3e^{5x}} = (-16x - 32) \cdot e^{-x}.$$

Mivel ismerjük a c_1' és c_2' függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int (16x + 32) \cdot e^{-4x} dx = \\ &= (16x + 32) \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} - \int 16 \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} dx = \\ &= (-4x - 8) \cdot e^{-4x} + \int 4 \cdot e^{-4x} dx = \\ &= (-4x - 8) \cdot e^{-4x} - e^{-4x} = e^{-4x} \cdot (-4x - 9). \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 c_2(x) &= \int (-16x - 32) \cdot e^{-x} dx = \\
 &= (-16x - 32) \cdot \frac{e^{-x}}{-1} - \int -16 \cdot \frac{e^{-x}}{-1} dx = \\
 &= (16x + 32) \cdot e^{-x} - \int 16 \cdot e^{-x} dx = \\
 &= (16x + 32) \cdot e^{-x} + 16 \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (16x + 48).
 \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\
 &= e^{-4x} \cdot (-4x - 9) \cdot e^{4x} + e^{-x} \cdot (16x + 48) \cdot e^x = \\
 &= -4x - 9 + 16x + 48 = 12x + 39.
 \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x + 12x + 39.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 4c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x + 12.$$

Mivel $y(0) = 42$, ezért

$$42 = c_1 + c_2 + 39.$$

Mivel $y'(0) = 18$, ezért

$$18 = 4c_1 + c_2 + 12.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + 39 &= 42 \\ 4c_1 + c_2 + 12 &= 18 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ 4c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva az első $c_1 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 2$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{4x} + 2e^x + 12x + 39.$$

Az $y(1)$ függvényérték

$$y(1) = e^4 + 2e + 12 + 39.$$

72. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2 - 26x + 32, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 1$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{3x}$ és $y_2(x) = e^x$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 3x^2 - 26x + 32 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{3x} + c_2'(x) \cdot e^x &= 0 \\ c_1'(x) \cdot 4 \cdot e^{3x} + c_2'(x) \cdot e^x &= 3x^2 - 26x + 32 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & e^x \\ 3e^{3x} & e^x \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = -2e^{4x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c'_1(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^x \\ 3x^2 - 26x + 32 & e^x \end{pmatrix} = -e^x \cdot (3x^2 - 26x + 32),$$

így

$$c'_1(x) = \frac{-e^x \cdot (3x^2 - 26x + 32)}{-2e^{4x}} = (1,5x^2 - 13x + 16) \cdot e^{-3x}.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c'_2(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & 3x^2 - 26x + 32 \end{pmatrix} = e^{3x} \cdot (3x^2 - 26x + 32),$$

így

$$c'_2(x) = \frac{e^{3x} \cdot (3x^2 - 26x + 32)}{-2e^{4x}} = (-1,5x^2 + 13x - 16) \cdot e^{-x}.$$

Mivel ismerjük a c'_1 és c'_2 függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 c_1(x) &= \int (1, 5x^2 - 13x + 16) \cdot e^{-3x} dx = \\
 &= (1, 5x^2 - 13x + 16) \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} - \int (3x - 13) \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} dx = \\
 &= (-0, 5x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{16}{3}) \cdot e^{-3x} + \int \left(x - \frac{13}{3}\right) \cdot e^{-3x} dx = \\
 &= \left(0, 5x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{16}{3}\right) \cdot e^{-3x} + \left(x - \frac{13}{3}\right) \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} - \int \frac{e^{-3x}}{-3} = \\
 &= \left(-0, 5x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{16}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{13}{9} - \frac{1}{9}\right) \cdot e^{-3x} = \\
 &= (-0, 5x^2 + 4x - 4) \cdot e^{-3x}.
 \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 c_2(x) &= \int (-1, 5x^2 + 13x - 16) \cdot e^{-x} dx = \\
 &= (1, 5x^2 - 13x + 16) \cdot e^{-x} + \int (-3x + 13) \cdot e^{-x} dx = \\
 &= (1, 5x^2 - 13x + 16) \cdot e^{-x} + (-3x + 13) \cdot \frac{e^{-x}}{-1} + \\
 &+ \int -3 \cdot e^{-x} dx = \\
 &= (1, 5x^2 - 13x + 16 + 3x - 13 + 3) \cdot e^{-x} = \\
 &= (1, 5x^2 - 10x + 6) \cdot e^{-x}.
 \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned}
 y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\
 &= (-0, 5x^2 + 4x - 4) \cdot e^{-3x} \cdot e^{3x} + (1, 5x^2 - 10x + 6) \cdot e^{-x} \cdot e^x = \\
 &= x^2 - 6x + 2.
 \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x + x^2 - 6x + 2.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x + 2x - 6.$$

Mivel $y(0) = 7$, ezért

$$7 = c_1 + c_2 + 2.$$

Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 3c_1 + c_2 - 6.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & + & 2 & = & 7 \\ 4c_1 & + & c_2 & - & 6 & = & 3 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & = & 5 \\ 3c_1 & + & c_2 & = & 9 \end{array} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva az első $2c_1 = 4$ adódik, vagyis $c_1 = 2$ majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 3$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^{3x} + 3e^x + x^2 - 6x + 2.$$

73. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -1$, illetve $\lambda_2 = -2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{-x}$ és $y_2(x) = e^{-2x}$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 4x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{-x} + c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 0 \\ -c_1'(x) \cdot e^{-x} - 2c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 4x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = -e^{-3x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ 4x & e^{-2x} \end{pmatrix} = -4x \cdot e^{-2x},$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-4x \cdot e^{-2x}}{-e^{-3x}} = 4x \cdot e^x.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 4x \end{pmatrix} = 4x \cdot e^{-x},$$

így

$$c_2'(x) = \frac{4x \cdot e^{-x}}{-e^{-3x}} = -4x \cdot e^{2x}.$$

Mivel ismerjük a c_1' és c_2' függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int 4x \cdot e^x dx = \\ &= 4x \cdot e^x - \int 4 \cdot e^x dx = \\ &= 4x \cdot e^x - 4 \cdot e^x = (4x - 4) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int -4x \cdot e^{2x} dx = \\ &= -2x \cdot e^{2x} + \int 2 \cdot e^{2x} dx = \\ &= -2x \cdot e^{2x} + e^{2x} = (-2x + 1) \cdot e^{2x}. \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= e^{-x} \cdot (4x - 4) \cdot e^x + e^{-2x} \cdot (-2x + 1) \cdot e^{2x} = \\ &= 2x - 3. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + 2x - 3.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} + 2.$$

Mivel $y(0) = 5$, ezért

$$5 = c_1 + c_2 + 3.$$

Mivel $y'(0) = -1$, ezért

$$-1 = -c_1 - 2c_2 + 2.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & + & 3 & = & 5 \\ -c_1 & - & 2c_2 & + & 2 & = & -1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ -c_1 & - & 2c_2 & = & -3 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletre összeadva $c_2 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + 2x - 3.$$

74. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 6e^x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -1$, illetve $\lambda_2 = -2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{-x}$ és $y_2(x) = e^{-2x}$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 6e^x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{-x} + c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 0 \\ -c_1'(x) \cdot e^{-x} - 2c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 6e^x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alaplátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = -e^{-3x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-x} \\ 6e^x & e^{-2x} \end{pmatrix} = -6e^{-x},$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-6 \cdot e^{-x}}{-e^{-3x}} = 6e^{2x}.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & 6e^x \end{pmatrix} = 6,$$

így

$$c_2'(x) = \frac{6}{-e^{-3x}} = -6 \cdot e^{3x}.$$

Mivel ismerjük a c_1' és c_2' függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A c_1 függvény:

$$c_1(x) = \int 6 \cdot e^{2x} dx = 3e^{2x}.$$

A c_2 függvény:

$$c_2(x) = \int -6e^{3x} dx = -2e^{3x}.$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= 3e^{2x} \cdot e^{-x} - 2e^{3x} \cdot e^{-2x} = e^x. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + e^x.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} + e^x.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$3 = c_1 + c_2 + 1.$$

Mivel $y'(0) = -2$, ezért

$$-2 = -c_1 - 2c_2 + 1.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + 1 &= 3 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -c_1 - 2c_2 &= -3 \end{aligned} \right\}.$$

A két egyenletre összeadva $c_2 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^x.$$

75. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 20x, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{2x}$ és $y_2(x) = x \cdot e^{2x}$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 20x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{-x} + c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 0 \\ 2c_1'(x) \cdot e^{2x} + (1 + 2x) \cdot c_2'(x) \cdot e^{-2x} &= 20x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & x \cdot e^{2x} \\ 2e^{2x} & (1 + 2x) \cdot e^{2x} \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = -e^{4x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \cdot e^{2x} \\ 20x & (1+2x) \cdot e^{2x} \end{pmatrix} = -20x^2 \cdot e^{2x},$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-20x^2 \cdot e^{2x}}{-e^{4x}} = -20x \cdot e^{-2x}.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 20x \end{pmatrix} = 20x \cdot e^{2x},$$

így

$$c_2'(x) = \frac{20x \cdot e^{2x}}{e^{4x}} = 20x \cdot e^{-2x}.$$

Mivel ismerjük a c_1' és c_2' függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -20x^2 \cdot e^{-2x} dx = \\ &= 10x^2 \cdot e^{-2x} - \int 20x \cdot e^{-2x} dx = \\ &= 10x^2 \cdot e^{-2x} + 10x \cdot e^{-2x} + 5 \cdot e^{-2} = \\ &= (10x^2 + 10x + 5) \cdot e^{-2x}. \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int 20x \cdot e^{-2x} dx = \\ &= -10x \cdot e^{-2x} + \int 10 \cdot e^{-2x} dx = \\ &= -10x \cdot e^{-2x} - 5e^{-2x} = (-10x - 5) \cdot e^{-2x}. \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= (10x^2 + 10x + 5) \cdot e^{-2x} \cdot e^{2x} + (-10x - 5) \cdot e^{-2x} \cdot x \cdot e^{2x} = \\ &= (10x^2 + 10x + 5 - 10x^2 - 5x) \cdot e^{2x} = (5x + 5) \cdot e^{2x}. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + 5x + 5.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{2x} + 2c_2 \cdot x \cdot e^{2x}.$$

Mivel $y(0) = 6$, ezért

$$6 = c_1 + 5.$$

Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 2c_1 + c_2.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & 5 = 6 \\ 2c_1 & + & c_2 = 3 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből $c_1 = 1$ adódik, majd ezt a második egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} + 5x + 5.$$

76. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y(x) = 4x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével! Vázoljuk fel a megoldásfüggvény grafikonját!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Legyen $\alpha = 0$ és $\beta = 2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = \cos 2x$ és $y_2(x) = \sin 2x$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 4x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot \cos 2x + c_2'(x) \cdot \sin 2x &= 0 \\ -2c_1'(x) \cdot \sin 2x + 2c_2'(x) \cdot \cos 2x &= 4x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alaplátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2 \sin 2x & 2 \cos 2x \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = 2 \cdot (\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sin 2x \\ 4x & 2 \cos 2x \end{pmatrix} = -4x \cdot \sin 2x,$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-4x \cdot \sin 2x}{2} = -2x \cdot \sin 2x.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2 \sin 2x & 4x \end{pmatrix} = 4x \cdot \cos 2x,$$

így

$$c_2'(x) = \frac{4x \cdot \cos 2x}{2} = 2x \cdot \cos 2x.$$

Mivel ismerjük a c_1' és c_2' függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int -2x \cdot \sin 2x \, dx = \\ &= -x \cdot (-\cos 2x) - \int \cos 2x \, dx = \\ &= x \cdot \cos 2x - \frac{\sin 2x}{2}. \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int 2x \cdot \cos 2x \, dx = \\ &= x \cdot \sin 2x - \int \sin 2x \, dx = \\ &= x \cdot \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= \left(x \cdot \cos 2x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \cdot \cos 2x + \left(x \cdot \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} \right) \cdot \sin 2x = \\ &= x \cdot \cos^2 2x - \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{2} + x \cdot \sin^2 2x + \frac{\sin 2x \cdot \cos 2x}{2} = \\ &= x \cdot (\cos^2 2x + \sin^2 2x) = x. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot \cos 2x + c_2 \cdot \sin 2x + x.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -2c_1 \cdot \sin 2x + 2c_2 \cdot \cos 2x + 1.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = c_1.$$

Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 2c_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \cos 2x + \sin 2x + x.$$

Legyen

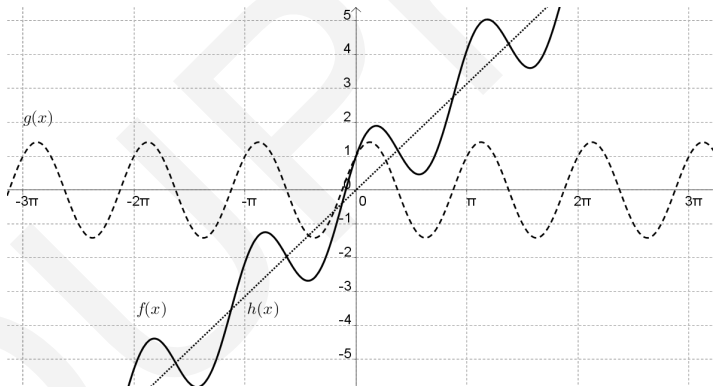
$$y(x) = g(x) + h(x),$$

ahol $g(x) = \cos 2x + \sin 2x$ és $h(x) = x$.

Mivel

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x \right) = \\ &= \sqrt{2} \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{8} \right) \right), \end{aligned}$$

így az y megoldásfüggvény grafikonját megkaphatjuk úgy, hogy a g és h függvények pontonkénti összegét vesszük.



77. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 4 \cdot e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását a konstansvariálás módszerével!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!

- c) Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexió pont szerint az y függvényt!
- f) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- h) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- i) Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet egyetlen megoldása $\lambda = 3$ kétszeres multiplicitással (vagyis $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 3$).

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol $y_1(x) = e^{3x}$ és $y_2(x) = x \cdot e^{3x}$. A c_1 és c_2 ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 4 \cdot e^{3x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az y_1 és y_2 függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{3x} + c_2'(x) \cdot x \cdot e^{3x} &= 0 \\ 3c_1'(x) \cdot e^{3x} + (1 + 3x) \cdot c_2'(x) \cdot e^{3x} &= 4e^{3x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & x \cdot e^{3x} \\ 3e^{3x} & (1 + 3x) \cdot e^{3x} \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det W(x) = e^{6x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c'_1(x) = \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^{3x} \\ 4e^{3x} & (1 + 3x) \cdot e^{3x} \end{pmatrix} = -4x \cdot e^{6x},$$

így

$$c'_1(x) = \frac{-4x \cdot e^{6x}}{e^{6x}} = -4x.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c'_2(x) = \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & 4e^{3x} \end{pmatrix} = 4e^{6x},$$

így

$$c'_2(x) = \frac{4e^{6x}}{e^{6x}} = 4.$$

Mivel ismerjük a c'_1 és c'_2 függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a c_1 és c_2 függvények.

A c_1 függvény

$$c_1(x) = \int -4x \, dx = -2x^2.$$

A c_2 függvény

$$c_2(x) = \int 4 \, dx = 4x.$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= -2x^2 \cdot e^{3x} + 4x^2 \cdot e^{3x} = 2x^2 \cdot e^{3x}. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + 2x^2 \cdot e^{3x} \\ &= (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot e^{3x}. \end{aligned}$$

b) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = (c_1 + 4x) \cdot e^{3x} + (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot 3e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$0 = c_1.$$

Mivel $y'(0) = 2$, ezért

$$2 = c_2 + 3c_1,$$

vagyis $c_2 = 2$. Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x}.$$

c) A $(2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$2x^2 + 2x = 0,$$

vagyis

$$2x \cdot (x + 1) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -1$.

d) Az $y'(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = (4x + 2) \cdot e^{3x} + (2x^2 + 2x) \cdot 3e^{3x} = e^{3x} \cdot (6x^2 + 10x + 2).$$

Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$6x^2 + 10x + 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{52}}{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{6} [$	$\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$	$] \frac{-5-\sqrt{13}}{6}; \frac{-5+\sqrt{13}}{6} [$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$y(x)$ értéke		$\approx 0,0169$	

x	$\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$	$] \frac{-5+\sqrt{13}}{6}; \infty [$
$y'(x)$	0	+
$y(x)$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke	$\approx -0,1777$	

e) Az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény másodrendű deriváltja

$$\begin{aligned} y''(x) &= 3e^{3x} \cdot (6x^2 + 10x + 2) + e^{3x} \cdot (12x + 10) = \\ &= e^{3x} \cdot (18x^2 + 42x + 16). \end{aligned}$$

Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$18x^2 + 42x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 21x + 8 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{153}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{6}.$$

Az másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; \frac{-7-\sqrt{17}}{6} [$	$\frac{-7-\sqrt{17}}{6}$	$] \frac{-7-\sqrt{17}}{6}; \frac{-7+\sqrt{17}}{6} [$
$y''(x)$	+	0	–
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$\approx -0,1184$	

x	$\frac{-7+\sqrt{17}}{6}$	$\left] \frac{-7+\sqrt{17}}{6}; \infty \right[$
$y''(x)$	0	+
$y(x)$	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke	$\approx 0,0121$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben (a L'Hospital-szabály felhasználásával):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x}{e^{-3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2}{-3e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{9e^{-3x}} = 0.\end{aligned}$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (2x^2 - 2x) \cdot e^{-3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

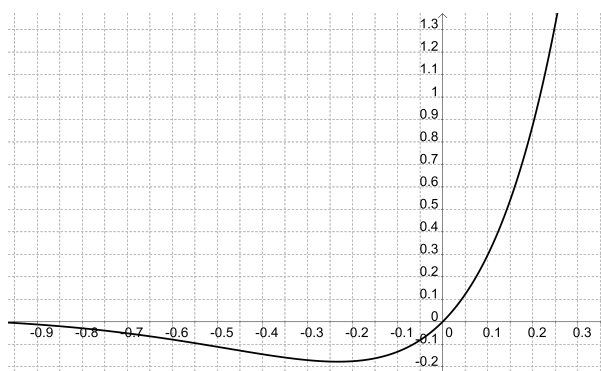
$$-y(x) = (-2x^2 - 2x)e^{3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



7. Másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása próbafüggvénnyel

78. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 14x + 26, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -2$, illetve $\lambda_2 = -1$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = 2A \cdot x + B,$$

az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 2A.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2A + 3 \cdot (2A \cdot x + B) + 2 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C) = 2x^2 + 14x + 26.$$

A bal oldalon felbontva a zárójeleket és a tagokat fokszám szerint rendezve azt kapjuk, hogy

$$2A \cdot x^2 + (6A + 2B) \cdot x + 2A + 3B + 2C = 2x^2 + 14x + 26.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\left. \begin{array}{rcl} 2A & & = 2 \\ 6A + 2B & & = 14 \\ 2A + 3B + 2C & = & 26 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 1$. Ezt felhasználva a második egyenletből az következik, hogy $B = 4$, végül a harmadik egyenletből $C = 6$ adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x^2 + 4x + 6.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + x^2 + 4x + 6.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} + 2x + 4.$$

Mivel $y(0) = 8$, ezért

$$8 = c_1 + c_2 + 6.$$

Mivel $y'(0) = 1$, ezért

$$1 = -c_1 - 2c_2 + 4.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + 6 & = & 8 \\ -c_1 - 2c_2 + 4 & = & 1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -c_1 - 2c_2 & = & -3 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva $c_2 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + x^2 + 4x + 6.$$

79. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 12 \cdot e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -7$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = -2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y'_p(x) = 2A \cdot e^{2x},$$

az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y''_p(x) = 4A \cdot e^{2x}.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4A \cdot e^{2x} - 2A \cdot e^{2x} - 6A \cdot e^{2x} = 12 \cdot e^{2x},$$

vagyis

$$-4A \cdot e^{2x} = 12 \cdot e^{2x},$$

így $A = -3$.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -3 \cdot e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{2x}.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} - 6 \cdot e^{2x}.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$0 = c_1 + c_2 - 3.$$

Mivel $y'(0) = -7$, ezért

$$-7 = 3c_1 - 2c_2 - 6.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & - & 3 & = & 0 \\ 3c_1 & - & 2c_2 & - & 6 & = & -7 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & = & 3 \\ 3c_1 & - & 2c_2 & = & -1 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenlet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet $c_1 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 2$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x} - 3e^{2x}.$$

80. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 10 \cdot e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = -2$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő e^{3x} tag a homogén egyenlet általános megoldásában is szerepel és 3 egyszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért elsőrendű rezonancia lép fel, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{3x}$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = A \cdot (e^{3x} + 3x \cdot e^{3x}).$$

Az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = A \cdot (3e^{3x} + 3e^{3x} + 9x \cdot e^{3x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A \cdot (3e^{3x} + 3e^{3x} + 9x \cdot e^{3x}) - A \cdot (e^{3x} + 3x \cdot e^{3x}) - 6A \cdot x \cdot e^{3x} = 10 \cdot e^{3x},$$

vagyis

$$5A \cdot e^{3x} = 10 \cdot e^{3x},$$

így $A = 2$.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 2x \cdot e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x} + 2x \cdot e^{3x}.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} + 2 \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = c_1 + c_2.$$

Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 3c_1 - 2c_2 + 2.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ 3c_1 & - & 2c_2 & + & 2 & = & 3 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & = & 2 \\ 3c_1 & - & 2c_2 & = & 1 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenlet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet $c_1 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{3x} + e^{-2x} + 2x \cdot e^{2x}.$$

81. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4\sin x + 2\cos x$$

differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerrel! Majd adjuk meg azt a megoldásfüggvényt, amely teljesíti az $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 1$ feltételeket!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 1$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C + D \cdot e^{2x} + E \cdot \sin x + F \cdot \cos x$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = 2A \cdot x + B + 2D \cdot e^{2x} + E \cdot \cos x - F \cdot \sin x.$$

Az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 2A + 4D \cdot e^{2x} - E \cdot \sin x - F \cdot \cos x.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & 2A + 4D \cdot e^{2x} - E \cdot \sin x - F \cdot \cos x - \\ & - 4 \cdot (2A \cdot x + B + 2D \cdot e^{2x} + E \cdot \cos x - F \cdot \sin x) + \\ & + 3 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C + D \cdot e^{2x} + E \cdot \sin x + F \cdot \cos x) = \\ & = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4 \sin x + 2 \cos x, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} & 3A \cdot x^2 + (3B - 8A) \cdot x + 3C - 4B + 2A - D \cdot e^{2x} + \\ & + (2E + 4F) \cdot \sin x + (2F - 4E) \cdot \cos x = \\ & = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4 \sin x + 2 \cos x. \end{aligned}$$

A megfelelő tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\left. \begin{array}{rcl} 3A & & = 3 \\ -8A + 3B & & = 10 \\ 2A - 4B + 3C & & = 19 \\ & - D & = -1 \\ & 2E + 4F & = 4 \\ & - 4E + 2F & = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $B = 6$ adódik. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $C = \frac{41}{3}$. A negyedik egyenletből $D = 1$ adódik. Ha az ötödik egyenlet kétszeresét hozzáadjuk a hatodik egyenlethez, akkor azt kapjuk, hogy $F = 1$, végül ezt visszahelyettesítve az ötödik egyenletbe $E = 0$ adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x^2 + 6x + \frac{41}{3} + e^{2x} + \cos x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x + x^2 + 6x + \frac{41}{3} + e^{2x} + \cos x.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 3c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x + 2x + 6 + 2 \cdot e^{2x} - \sin x.$$

Mivel $y(0) = \frac{2}{3}$, ezért

$$\frac{2}{3} = c_1 + c_2 + \frac{41}{3} + 1 + 1.$$

Mivel $y'(0) = 1$, ezért

$$1 = 3c_1 + c_2 + 6 + 2.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & 2 & = & -13 \\ 3c_1 & + & c_2 & + & 8 & = & 1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & = & -15 \\ 3c_1 & + & c_2 & = & -7 \end{array} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva az első $c_1 = 4$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = -19$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 4e^{3x} - 19e^x + x^2 + 6x + \frac{41}{3} + e^{2x} + \cos x.$$

82. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 2e^x \cdot \operatorname{sh} x.$$

differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Mivel

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

ezért a differenciálegyenlet átírható úgy, hogy

$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = e^{2x} - 1.$$

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 2$, illetve $\lambda_2 = -5$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-5x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő e^{2x} tag a homogén egyenlet általános megoldásában is szerepel és 2 egyszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért elsőrendű rezonancia lép fel, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{2x} + B$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y'_p(x) = A \cdot (e^{2x} + 2x \cdot e^{2x}).$$

Az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y''_p(x) = A \cdot (2e^{2x} + 2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A \cdot (4e^{2x} + 4x \cdot e^{2x}) + 3A \cdot (e^{2x} + 2x \cdot e^{2x}) - 10A \cdot x \cdot e^{2x} - 10B = e^{2x} - 1,$$

vagyis

$$7A \cdot e^{2x} - 10B = e^{2x} - 1,$$

így $A = \frac{1}{7}$ és $B = \frac{1}{10}$.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = \frac{1}{7}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{10}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-5x} + \frac{1}{7}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{10}.$$

83. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 16e^{2x} + 8x$$

differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet egyetlen megoldása $\lambda = 2$ kétszeres multiplicitással (vagyis $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 2$).

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő $16e^{2x}$ tag megoldása a homogén egyenletnek és 2 kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{2x} + B \cdot x + C$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y'_p(x) = A \cdot (2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}) + B.$$

Az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y''_p(x) = A \cdot (2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x^2 \cdot e^{2x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & A \cdot (2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x^2 \cdot e^{2x}) - \\ & - 4A \cdot (2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}) - 4B + \\ & + 4A \cdot x^2 \cdot e^{2x} + 4B \cdot x + 4C = 16 \cdot e^{2x} + 8x, \end{aligned}$$

vagyis

$$2A \cdot e^{2x} + 4B \cdot x - 4B + 4C = 16 \cdot e^{2x} + 8x,$$

így egyrészt $2A = 16$, vagyis $A = 8$, másrészt $4B = 8$, amiből azt kapjuk, hogy $B = 2$. Végül $-4B + 4C = 0$, amiből $C = 2$ adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 8x^2 \cdot e^{2x} + 2x + 2.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + 8x^2 \cdot e^{2x} + 2x + 2 = \\ &= (c_1 + c_2 \cdot x + 8x^2) \cdot e^{2x} + 2x + 2. \end{aligned}$$

84. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 4 \cdot e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását a próbafüggvény módszerrel!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet egyetlen megoldása $\lambda = 3$ kétszeres multiplicitással (vagyis $\lambda_1 = 3$ és $\lambda_2 = 3$).

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő $4e^{3x}$ tag megoldása a homogén egyenletnek és 3 kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért másodrendű rezonancia lép fel, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{3x}$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = A \cdot (2x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x}).$$

Az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = A \cdot (2e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 9x^2 \cdot e^{3x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & A \cdot (2e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 9x^2 \cdot e^{3x}) - \\ & - 6A \cdot (2x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x}) + 9A \cdot x^2 \cdot e^{3x} = \\ & = 4 \cdot e^{3x}, \end{aligned}$$

vagyis

$$2A \cdot e^{3x} = 4 \cdot e^{3x},$$

így $A = 2$.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 2x^2 \cdot e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + 2x^2 \cdot e^{3x} = (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot e^{3x}.$$

b) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = (c_2 + 4x) \cdot e^{3x} + (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot 3e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$0 = c_1.$$

Mivel $y'(0) = 2$, ezért

$$2 = c_2 + 3c_1,$$

vagyis $c_2 = 2$. Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x}.$$

c) A $(2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$2x^2 + 2x = 0,$$

vagyis

$$2x \cdot (x + 1) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -1$.

d) Az $y'(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = (4x + 2) \cdot e^{3x} + (2x^2 + 2x) \cdot 3e^{3x} = e^{3x} \cdot (6x^2 + 10x + 2).$$

Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$6x^2 + 10x + 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{52}}{12} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; \frac{-5-\sqrt{13}}{6} [$	$\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$	$] \frac{-5-\sqrt{13}}{6}, \frac{-5+\sqrt{13}}{6} [$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$y(x)$ értéke		$\approx 0,0169$	

x	$\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$	$\left] \frac{-5+\sqrt{13}}{6}; \infty \right[$
$y'(x)$	0	+
$y(x)$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke	$\approx -0,1777$	

e) Az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény másodrendű deriváltja

$$\begin{aligned} y''(x) &= 3e^{3x} \cdot (6x^2 + 10x + 2) + e^{3x} \cdot (12x + 10) = \\ &= e^{3x} \cdot (18x^2 + 42x + 16). \end{aligned}$$

Mivel $e^{3x} \neq 0$, ezért

$$18x^2 + 42x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 + 21x + 8 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{153}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{6}.$$

Az másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$\left] -\infty; \frac{-7-\sqrt{17}}{6} \right[$	$\frac{-7-\sqrt{17}}{6}$	$\left] \frac{-7-\sqrt{17}}{6}; \frac{-7+\sqrt{17}}{6} \right[$
$y''(x)$	+	0	-
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$\approx -0,1184$	

x	$\frac{-7+\sqrt{17}}{6}$	$\left] \frac{-7+\sqrt{17}}{6}; \infty \right[$
$y''(x)$	0	+
$y(x)$	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke	$\approx 0,0121$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben (a L'Hospital-szabály felhasználásával):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x}{e^{-3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 2}{-3e^{-3x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{9e^{-3x}} = 0.\end{aligned}$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x} = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (2x^2 - 2x) \cdot e^{-3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

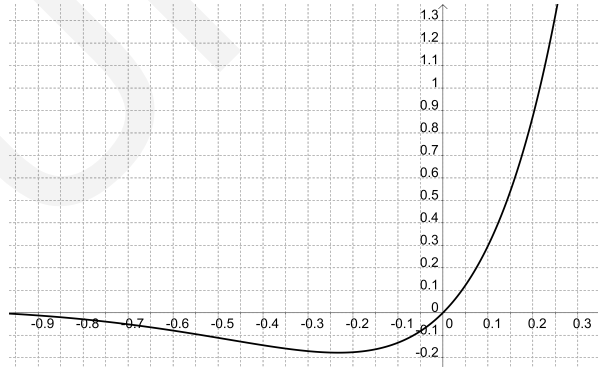
$$-y(x) = (-2x^2 - 2x)e^{3x},$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



85. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Tekintsük az $\lambda = 2 + i$ megoldást. Ekkor a λ komplex szám valós része $\alpha = 2$, képzetes része $\beta = 1$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = 2A \cdot e^{2x},$$

az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 4A \cdot e^{2x}.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4A \cdot e^{2x} - 8A \cdot e^{2x} + 5A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

vagyis

$$A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

így $A = 3$.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x) + e^{2x}.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 2e^{2x} \cdot (c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x) + e^{2x} \cdot (-c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x).$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = c_1 + 1,$$

így $c_1 = 0$. Mivel $y'(0) = 3$, ezért

$$3 = 2c_1 + c_2 + 2.$$

Mivel $c_1 = 0$, ezért $c_2 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{2x} \cdot \sin x + e^{2x} = e^{2x} \cdot (\sin x + 1).$$

86. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 10 \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -3$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y_p'(x) = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x,$$

az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x + 5 \cdot (A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) + \\ & + 6 \cdot (A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) = 10 \sin x, \end{aligned}$$

vagyis

$$(-A - 5B + 6A) \cdot \sin x + (-B + 5A + 6B) \cdot \cos x = 10 \sin x,$$

így az

$$\left. \begin{aligned} 5A - 5B &= 10 \\ 5A + 5B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $A = 1$, amit az első egyenletbe visszahelyettesítve $B = -1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = \sin x - \cos x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + \sin x - \cos x.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} - 3c_2 \cdot e^{-3x} + \cos x + \sin x.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = c_1 + c_2 - 1.$$

Mivel $y'(0) = -4$, ezért

$$-4 = -2c_1 - 3c_2 + 1.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 - 1 &= 1 \\ -2c_1 - 3c_2 + 1 &= -4 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Az egyenletrendszer átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ -2c_1 & - & 3c_2 = -5 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenlet kétszereséhez hozzáadva a második egyenletet $c_1 = 1$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} + e^{-3x} + \sin x - \cos x.$$

87. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 5 \cos x, \quad y(0) = \frac{7}{2}, \quad y'(0) = -6$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel!

Megoldás:

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -3$.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$$

alakban keressük.

Az y_p függvény deriváltja

$$y'_p(x) = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x,$$

az y_p függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x + 4 \cdot (A \cdot \cos x - B \cdot \sin x) + \\ & + 3 \cdot (A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) = 5 \cos x, \end{aligned}$$

vagyis

$$(-A - 4B + 3A) \cdot \sin x + (-B + 4A + 3B) \cdot \cos x = 5 \cos x,$$

így az

$$\left. \begin{aligned} 2A - 4B &= 0 \\ 4A + 2B &= 5 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 2B$, amit a második egyenletbe behelyettesítve $B = \frac{1}{2}$ adódik, így $A = 1$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x} + \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x.$$

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 3c_2 \cdot e^{-3x} + \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x.$$

Mivel $y(0) = \frac{7}{2}$, ezért

$$\frac{7}{2} = c_1 + c_2 + \frac{1}{2}.$$

Mivel $y'(0) = -6$, ezért

$$-6 = -c_1 - 3c_2 + 1.$$

Tehát a c_1 és c_2 konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} &= \frac{7}{2} \\ -c_1 - 3c_2 + 1 &= -6 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 3 \\ -c_1 & - & 3c_2 = -7 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva $c_2 = 2$ adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + 2e^{-3x} + \sin x + \frac{1}{2} \cdot \cos x.$$

8. Másodrendű lineáris konstanssegýtthátós inhomogén differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

88. **Feladat.** Legyen $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény! Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot [f] - f(0)$$

teljesül!

Megoldás:

Felhasználva a Laplace-transzformáció definícióját és a parciális integrálás tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f'(t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[f(t) \cdot e^{-st} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{f(c)}{e^{s \cdot c}} - f(0) - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást.

89. **Feladat.** Legyen $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény! Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathcal{L}[f''] = s^2 \cdot [f] - s \cdot f(0) - f'(0)$$

teljesül!

Megoldás:

Az előző állítás eredményét használva f helyett az f' függvényre azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[f''] = s \cdot \mathcal{L}[f'] - f'(0).$$

Mivel

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0),$$

ezért

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''] &= s \cdot (s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0)) - f'(0) = \\ &= s^2 \cdot \mathcal{L}[f] - s \cdot f(0) - f'(0),\end{aligned}$$

amivel bizonyítottuk az állítást.

90. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $f(t) = 1$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definíciója szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s},\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást.

91. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$f(t) = t \quad (t > 0)$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját és a parciális integrálás tételét alkalmazva

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c t \cdot e^{-st} dt = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^c = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2},
 \end{aligned}$$

ugyanis

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} = 0$$

és a L'Hospital-szabály szerint

$$\begin{aligned}
 \lim_{c \rightarrow \infty} c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{s \cdot c} \cdot s} = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{s \cdot c} \cdot s^2} = 0.
 \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást.

92. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) = 7t + 4$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága és az előbbi feladat eredményé miatt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[7t + 4] = 7\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[4] = \\
 &= 7 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} = \frac{7 + 4s}{s^2} = \frac{4s + 7}{s^2}.
 \end{aligned}$$

93. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) = t^3 + t^2 + 5t + 2$$

függvény Laplace-transzformáltját felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az említett állítást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t^3 + t^2 + 5t + 2] = \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[t^2] + 5\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[2] = \\ &= \frac{3!}{s^4} + \frac{2!}{s^3} + 5 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \\ &= \frac{6 + 2s + 5s^2 + 2s^3}{s^4} = \frac{2s^3 + 5s^2 + 2s + 6}{s^4}.\end{aligned}$$

94. Feladat. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = e^{a \cdot t}$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s) \cdot t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{(a-s) \cdot t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a - s} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s) \cdot c}}{a - s} - \frac{1}{a - s} = \frac{1}{s - a}.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

95. Feladat. Az előző feladat eredményét felhasználva adjuk meg az

$$f(t) = e^{4t} + e^{-3t}$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi feladat eredményét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[e^{4t} + e^{-3t}] = \mathcal{L}[e^{4t}] + \mathcal{L}[e^{-3t}] = \\ &= \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+3+s-4}{(s-4) \cdot (s+3)} = \frac{2s-1}{s^2-s-12}.\end{aligned}$$

96. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) = 7t + 6e^t - 2e^{-t} - 10$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[7t + 6e^t - 2e^{-t} - 10] = 7\mathcal{L}[t] + 6\mathcal{L}[e^t] - 2\mathcal{L}[e^{-t}] - \mathcal{L}[10] = \\ &= \frac{7}{s^2} + \frac{6}{s-1} - \frac{2}{s+1} - \frac{10}{s} = \\ &= \frac{7 \cdot (s-1) \cdot (s+1) + 6s^2 \cdot (s+1) - 2s^2 \cdot (s-1) - 10s \cdot (s^2-1)}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1)} = \\ &= \frac{-6s^3 + 15s^2 + 10s - 7}{s^4 - s^2}.\end{aligned}$$

97. Feladat. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \left(\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} + \int \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1 \right) \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\omega \cdot c)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot c)}{s^2} \right) \cdot e^{-sc} + \frac{\omega}{s^2} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{\omega}{s^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

98. Feladat. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = \cos(\omega \cdot t)$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \int \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \left(\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} - \int \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1 \right) \cdot \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\omega \cdot c)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot c)}{s^2} \right) \cdot e^{-sc} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

99. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(t) = \sin 3t \cdot \sin 2t$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

azt kapjuk, hogy

$$\sin 3t \cdot \sin 2t = \frac{\cos t - \cos 5t}{2},$$

így

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[\sin 3t \cdot \sin 2t] = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}[\cos t - \cos 5t] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}[\cos t] - \mathcal{L}[\cos 5t]) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 25} \right) = \\ &= \frac{24s}{s^4 + 26s^2 + 25}. \end{aligned}$$

100. Feladat. Határozzuk meg az

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját, azaz adjuk meg azt az f generátor-függvényt, amelynek Laplace-transzformáltja F !

Megoldás:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

egyenlet megoldásait. Az egyenlet gyökei

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

azaz $s_1 = -2$, illetve $s_2 = -3$. Ezt felhasználva a másodfokú polinom gyöktényezős alakja

$$s^2 + 5s + 6 = (s + 2) \cdot (s + 3).$$

Ezután meg kell határoznunk az A és B valós számok úgy, hogy

$$\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

teljesüljön. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2s + 3 = A \cdot (s + 3) + B \cdot (s + 2).$$

Felbontva a zárójeleket

$$2s + 3 = As + 3A + Bs + 2B$$

adódik. A tagokat fokszám szerint csökkenő sorrendben csoportosítva azt kapjuk, hogy

$$2s + 3 = (A + B) \cdot s + 3A + 2B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$A + B = 2$$

$$3A + 2B = 3$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az egyenletrendszer megoldására $A = -1$ és $B = 3$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-1}{s + 2} + \frac{3}{s + 3}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s + 2} + \frac{3}{s + 3} \right] = -e^{-2t} + 3e^{-3t} = \\ &= 3e^{-3t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

101. **Feladat.** Legyen $t \geq 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2},$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0) - 3 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$, ezért

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 3s \cdot \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s-2}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2) \cdot (s-2)}.$$

Az $s^2 - 3s + 2$ polinom gyökei $s_1 = 1$ és $s_2 = 2$, így a szorzattá alakított alakja

$$s^2 - 3s + 2 = (s-1) \cdot (s-2),$$

tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-1) \cdot (s-2)^2}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{1}{(s-1) \cdot (s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (s-2)^2 + (s-2) \cdot (s-1) \cdot B + (s-1) \cdot C.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A+B) \cdot s^2 + (-4A-3B+C) \cdot s + 4A+2B-C = 1$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0 \\ 4A - 3B + C &= 0 \\ 4A + 2B - C &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -4 -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -4 -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0 \\ B + C &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkaptuk, hogy $C = 1$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = -1$. Végül az első egyenletből $A = 1$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = e^t - e^{2t} + t \cdot e^{2t}$$

adódik.

102. Feladat. Legyen $t \geq 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y''(t) - 7y'(t) + 12y(t) = 12t + 17, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''(t) - 7y'(t) + 12y(t)] = \mathcal{L}[12t + 17].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y''] - 7\mathcal{L}[y'] + 12\mathcal{L}[y] = 12\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[17]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2},$$

és

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s},$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0) - 7 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) + 12\mathcal{L}[y] = \frac{12}{s^2} + \frac{17}{s}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 0$, ezért

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 7s \cdot \mathcal{L}[y] + 12\mathcal{L}[y] = \frac{12}{s^2} + \frac{17}{s}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^2 - 7s + 12) = \frac{1}{s - 2}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{12 + 17s}{s^2 \cdot (s^2 - 7s + 12)}.$$

Az $s^2 - 7s + 12$ polinom gyökei

$$s_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2},$$

vagyis $s_1 = 3$ és $s_2 = 4$, így az $s^2 - 7s + 12$ gyöktényező alakja

$$s^2 - 7s + 12 = (s - 3) \cdot (s - 4),$$

tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2 \cdot (s - 3) \cdot (s - 4)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{17s + 12}{s^2 \cdot (s - 3) \cdot (s - 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 3} + \frac{D}{s - 4}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$17s + 12 = As \cdot (s - 3) \cdot (s - 4) + B \cdot (s - 3) \cdot (s - 4) + Cs^2 \cdot (s - 4) + Ds^2 \cdot (s - 3),$$

vagyis

$$17s + 12 = A \cdot (s^3 - 7s^2 + 12s) + B \cdot (s^2 - 7s + 12) + C(s^3 - 4s^2) + D \cdot (s^3 - 3s^2).$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + C + D) \cdot s^3 + (-7A + B - 4C - 3D) \cdot s^2 + (12A - 7B) \cdot s + 12B = 17s + 12$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rclclcl} A & & C & + & D & = & 0 \\ -7A & + & B & - & 4C & - & 3D & = & 0 \\ 12A & - & 7B & & & = & 17 \\ & & 12B & & & = & 12 \end{array} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 7-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor -12 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -4 & -3 & 0 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -12 & -12 & 17 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right).$$

Második lépésben a második sor 7-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -12 -szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -12 & -12 & 17 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & -36 & -48 & 12 \end{array} \right).$$

Végül a harmadik sor 4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & -36 & -48 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 16 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 80 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rclcl} A & & C & + & D & = & 0 \\ & B & + & 3C & + & 4D & = & 0 \\ & & 9C & + & 16D & = & 17 \\ & & & 16D & = & 80 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $D = 5$. Ezt visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy $C = -7$. A második egyenletből $B = 1$ adódik. Végül az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 2$.

Tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{7}{s-3} + \frac{5}{s-4}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = 2 + t - 7e^{3t} + 5e^{4t}$$

adódik.

103. Feladat. Legyen $t \geq 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y''(t) - 3y'(t) = 6t + 7, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''(t) - 3y'(t)] = \mathcal{L}[6t + 7].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] = 6\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[7]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2},$$

és

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s},$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0) - 3 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) = \frac{6}{s^2} + \frac{7}{s}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = -1$ és $y'(0) = 0$, ezért

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] + s - 3s \cdot \mathcal{L}[y] - 3 = \frac{6}{s^2} + \frac{7}{s}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^2 - 3s) = \frac{6}{s^2} - s + 3$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-s^3 + 3s^2 + 7s + 6}{s^2 \cdot (s^2 - 3s)},$$

vagyis

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-s^3 + 3s^2 + 7s + 6}{s^3 \cdot (s - 3)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{-s^3 + 3s^2 + 7s + 6}{s^3 \cdot (s - 3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{s - 3}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$-s^3 + 3s^2 + 7s + 6 = As^2 \cdot (s - 3) + Bs \cdot (s - 3) + C \cdot (s - 3) + Ds^3.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + D) \cdot s^3 + (-3A + B) \cdot s^2 + (-3B + C) \cdot s - 3C = -s^3 + 3s^2 + 7s + 6$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rclcl} A & & & + D & = -1 \\ -3A & + & B & & = 3 \\ & - & 3B & + C & = 7 \\ & & & - 3C & = 6 \end{array} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának háromszorosát hozzáadjuk a második sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Második lépésben a második sor háromszorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Végül a harmadik sor háromszorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rclcl} A & & & + D & = -1 \\ & B & & + 3D & = 0 \\ & & C & + 9D & = 7 \\ & & & 27D & = 27 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $D = 1$. Ezt visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy $C = -2$. A második egyenletből $B = -3$ adódik. Végül az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = -2$.

Tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-2}{s} - \frac{3}{s^2} - \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s-3}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = -2 - 3t - t^2 + e^{3t}$$

adódik.

104. Feladat. Legyen $t \geq 0$. Tekintsük az

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 12e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

kezdetiérték feladatot! Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét Laplace-transzformációval!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''(t) - 4y'(t) + 4y(t)] = \mathcal{L}[12 \cdot e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y''] - 4\mathcal{L}[y'] + 4\mathcal{L}[y] = 12 \cdot \mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2},$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0) - 4 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) + 4\mathcal{L}[y] = \frac{12}{s-2}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = 0$ és $y'(0) = 4$, ezért

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 4s \cdot \mathcal{L}[y] + 4\mathcal{L}[y] = \frac{12}{s-2} + 4.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^2 - 4s + 4) = \frac{12}{s-2} + 4$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4s + 4}{(s - 2)^3}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{4s + 4}{(s - 2)^3} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{(s - 2)^2} + \frac{C}{(s - 2)^3}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$4s + 4 = A \cdot (s - 2)^2 + B \cdot (s - 2) + C.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$A \cdot s^2 + (-4A + B) \cdot s + 4A - 2B + C = 4s + 4$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & = 0 \\ -4A & + & B = 4 \\ 4A & - & 2B + C = 4 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 0$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 4$. Végül a harmadik egyenletből $C = 12$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4}{(s - 2)^2} + \frac{12}{(s - 2)^3}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = 4t \cdot e^{2t} + 6t^2 \cdot e^{2t} = (4t + 6t^2) \cdot e^{2t}$$

adódik.

9. Cauchy-Euler differenciálegyenlet

105. **Feladat.** Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$x^2 \cdot y''(x) - 3x \cdot y'(x) + 3y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

1. Megoldás:

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} - 3x \cdot m \cdot x^{m-1} + 3 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) - x^m \cdot 3m + 3 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 - 4m + 3) = 0.$$

Mivel $x > 0$, ezért $x^m \neq 0$, így

$$m^2 - 4m + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis $m_1 = 1$ és $m_2 = 3$. Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^3,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Megoldás:

Vezessük be az $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ helyettesítést és a φ függvény az alábbi módon:

$$\varphi(t) = \varphi(\ln x) = y(x).$$

Ekkor

$$y'(x) = \varphi'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \varphi'(t)$$

és

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{x^2} \cdot \varphi'(t) + \frac{1}{x} \cdot \varphi''(t) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (\varphi''(t) - \varphi'(t)). \end{aligned}$$

Elvégezve a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\varphi''(t) - \varphi'(t) - 3\varphi'(t) + 3\varphi(t) = 0,$$

azaz

$$\varphi''(t) - 4\varphi'(t) + 3\varphi(t) = 0.$$

A kapott egyenlet egy másodrendű lineáris konstans együtthatós differenciálegyenlet. Karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$. Tehát a megoldásfüggvény

$$\varphi(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{3t}.$$

Mivel $t = \ln x$, ezért

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^3,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

106. Feladat. Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$x^2 \cdot y''(x) + 6x \cdot y'(x) + 4y(x) = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -5$$

kezdetiérték feladatot!

1. Megoldás:

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} + 6x \cdot m \cdot x^{m-1} + 4 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) + x^m \cdot 6m + 4 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 + 5m + 4) = 0.$$

Mivel $x > 0$, ezért $x^m \neq 0$, így

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

vagyis $m_1 = -1$ és $m_2 = -4$. Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-4} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} + \frac{-4c_2}{x^5}.$$

Mivel $y(1) = 2$, ezért

$$c_1 + c_2 = 2.$$

Mivel $y'(1) = -5$, ezért

$$-c_1 - 4c_2 = -5.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ -c_1 & - & 4c_2 = -5 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $c_1 = 1$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

2. Megoldás:

Vezessük be az $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ helyettesítést és a φ függvény az alábbi módon:

$$\varphi(t) = \varphi(\ln x) = y(x).$$

Ekkor

$$y'(x) = \varphi'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \varphi'(t)$$

és

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{x^2} \cdot \varphi'(t) + \frac{1}{x} \cdot \varphi''(t) \cdot \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (\varphi''(t) - \varphi'(t)). \end{aligned}$$

Elvégezve a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\varphi''(t) - \varphi'(t) + 6\varphi'(t) + 4\varphi(t) = 0,$$

azaz

$$\varphi''(t) + 5\varphi'(t) + 4\varphi(t) = 0.$$

A kapott egyenlet egy másodrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenlet. Karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -4$. Tehát a megoldásfüggvény

$$\varphi(t) = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{-4t}.$$

Mivel $t = \ln x$, ezért

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4}.$$

Mivel $y(1) = 2$, ezért

$$c_1 + c_2 = 2.$$

Mivel $y'(1) = -5$, ezért

$$-c_1 - 4c_2 = -5.$$

Tehát a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -c_1 - 4c_2 &= -5 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk.

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $c_1 = 1$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}.$$

107. **Feladat.** Tekintsük az

$$x^2 \cdot y''(x) - 6x \cdot y'(x) + 12y(x) = 0, \quad y(1) = -3, \quad y'(1) = -8$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} - 6x \cdot m \cdot x^{m-1} + 12 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) - x^m \cdot 6m + 12 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 - 7m + 12) = 0,$$

így

$$m^2 - 7m + 12 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2},$$

vagyis $m_1 = 3$ és $m_2 = 4$. Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^4,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -3c_1 \cdot x^2 + 4c_2 \cdot x^3.$$

Mivel $y(1) = -3$, ezért

$$c_1 + c_2 = -3.$$

Mivel $y'(1) = -8$, ezért

$$3c_1 + 4c_2 = -8.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = -3 \\ 3c_1 & + & 4c_2 = -8 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az első egyenlet háromszorosát kivonva a második egyenletből azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $c_1 = -4$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -4x^3 + x^4 = x^4 - 4x^3.$$

c) Az $x^4 - 4x^3 = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x^3 kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x^3 \cdot (x - 4) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 4$.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a $4x^3 - 12x^2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $4x^2$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$4x^2 \cdot (x - 3) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 3$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 3[$	3	$]3; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	stac. pont	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		0		-27	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $12x^2 - 24x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $12x$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$12x \cdot (x - 2) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; \infty[$
$y''(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		0		–16	

- f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 - 4x^3 = \infty.$$

- g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 - 4x^3 = \infty.$$

- h) Mivel

$$y(-x) = (-x)^4 - 4 \cdot (-x)^3 = x^4 + 4x^3,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

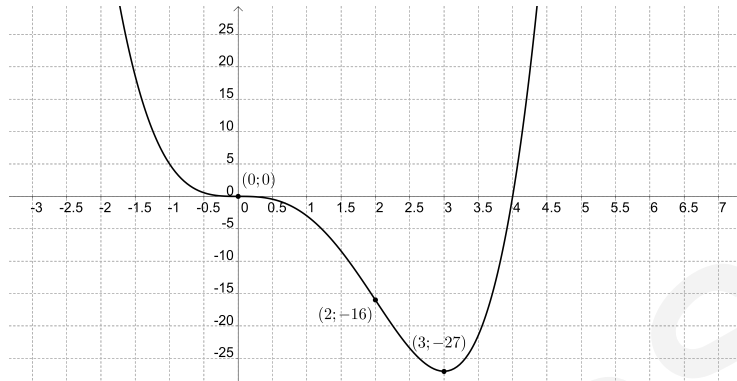
$$-y(x) = -x^4 + 4x^2,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

- i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[-27; \infty[$.

108. **Feladat.** Tekintsük az

$$x^2 \cdot y''(x) - 5x \cdot y'(x) + 8y(x) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} - 5x \cdot m \cdot x^{m-1} + 8 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) - x^m \cdot 5m + 8 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 - 6m + 8) = 0,$$

így

$$m^2 - 6m + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2},$$

vagyis $m_1 = 2$ és $m_2 = 4$. Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^4,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot x + 4c_2 \cdot x^3.$$

Mivel $y(1) = 1$, ezért

$$c_1 + c_2 = 1.$$

Mivel $y'(1) = 0$, ezért

$$2c_1 + 4c_2 = -1.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 1 \\ 2c_1 & + & 4c_2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből azt kapjuk, hogy $c_2 = -1$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $c_1 = 2$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2x^2 - x^4.$$

c) A $2x^2 - x^4 = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x^2 kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot (2 - x^2) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = \pm\sqrt{2}$.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a

$$4x - 4x^3 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $4x$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$4x \cdot (1 - x^2) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 1$ és $x_3 = -1$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; 0[$	0
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0
$y(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$	lok. max.
$y(x)$ értéke		1		0

x	$]0; 1[$	1	$]1; \infty[$
$y'(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	$\nearrow$	lok. min.	$\searrow$
$y(x)$ értéke		1	

e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a

$$4 - 12x^2 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldására $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, illetve $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$] -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		$\frac{5}{9}$	

x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left] \frac{1}{\sqrt{3}}; \infty \right[$
$y''(x)$	0	—
$y(x)$	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke	$\frac{5}{9}$	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - x^4 = -\infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - x^4 = -\infty.$$

h) Mivel

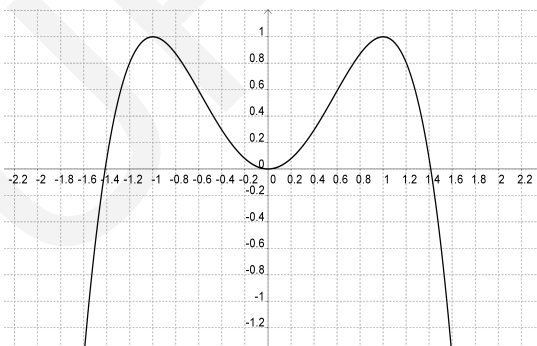
$$y(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4,$$

ezért

$$y(-x) = y(x),$$

így az y függvény páros.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $] -\infty; 1]$.

109. **Feladat.** Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$x^2 \cdot y''(x) + 6x \cdot y'(x) + 4y(x) = x + 1$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$x^2 \cdot y''(x) + 6x \cdot y'(x) + 4y(x) = 0.$$

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} + 6x \cdot m \cdot x^{m-1} + 4 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) + x^m \cdot 6m + 4 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 + 5m + 4) = 0.$$

Mivel $x > 0$, ezért $x^m \neq 0$, így

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

vagyis $m_1 = -1$ és $m_2 = -4$. Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-4} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x + B$$

alakban keressük. Ekkor $y'_p(x) = A$ és $y''_p(x) = 0$. Ezt felhasználva

$$6x \cdot A + 4 \cdot (A \cdot x + B) = x + 1,$$

vagyis

$$10x \cdot A + 4B = x + 1.$$

Tehát

$$A = \frac{1}{10}$$

és

$$B = \frac{1}{4},$$

így az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y_p(x) = \frac{1}{10} \cdot x + \frac{1}{4}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4} + \frac{1}{10} \cdot x + \frac{1}{4},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

10. Függvényegyütthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

110. Feladat. Legyen $x > 0$. Mutassuk meg, hogy $y_1(x) = x$ és $y_2(x) = x^2$ függvények lineárisan függetlenek!

Megoldás:

Mivel a függvények által meghatározott Wronski-determináns

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = x^2 \neq 0,$$

ezért az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek.

111. Feladat. Legyen $x > 0$. Mutassuk meg, hogy $y_1(x) = x$ és $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$ függvények lineárisan függetlenek!

Megoldás:

Mivel a függvények által meghatározott Wronski-determináns

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} = \\ &= 12x^3 + 2x^3 - 6x^3 - 6x^3 = 2x^3 \neq 0, \end{aligned}$$

ezért az y_1, y_2, y_3 függvények lineárisan függetlenek.

112. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy $y_1(x) = e^x$ és $y_2(x) = e^{2x}$ függvények lineárisan függetlenek!

Megoldás:

Mivel a függvények által meghatározott Wronski-determináns

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix} = e^{3x} \neq 0,$$

ezért az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek.

113. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Írjuk fel az

$$x^2 \cdot y''(x) - 2y(x) = 4x^3$$

differentiálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy az

$$y_1(x) = \frac{1}{x}, y_2(x) = x^2$$

függvények megoldások! Adjuk meg az $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ kezdetiérték feladathoz tartozó megoldásfüggvényt!

Megoldás:

Elsőként megmutatjuk, hogy az y_1 és y_2 függvények lineárisan függetlenek. A függvények Wronski-determinánsa

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & x^2 \\ -\frac{1}{x^2} & 2x \end{pmatrix} = 3 \neq 0,$$

így a függvények valóban lineárisan függetlenek. Ezt felhasználva a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cdot x^2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -\frac{c_1}{x^2} + 2c_2 \cdot x.$$

Mivel $y(1) = 2$, ezért

$$2 = c_1 + c_2.$$

Mivel $y'(1) = 1$, ezért

$$1 = -c_1 + 2c_2.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 = 2 \\ -c_1 & + & 2c_2 = 1 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve $c_1 = 1$ adódik. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x} + x^2.$$

114. Feladat. (Abel formula)

Legyen I nyílt intervallum, valamint p és q az I -n értelmezett valós értékű folytonos függvények. Tekintsük továbbá az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet! Bizonyítsuk be, hogy a differenciálegyenlet y_1 és y_2 lineárisan független megoldásfüggvényeiből képzett Wronski-determinánsára teljesül, hogy

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Megoldás:

Az y_1 és y_2 függvényekből képzett Wronski-determináns

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x).$$

A W függvény deriváltja

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1'(x) \cdot y_2'(x) + y_1(x) \cdot y_2''(x) - \\ &\quad - y_2'(x) \cdot y_1'(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x) = \\ &= y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x). \end{aligned}$$

Mivel y_1 megoldásfüggvénye az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) = 0$$

egyenletnek, ezért

$$y_1''(x) = -p(x) \cdot y_1'(x) - q(x).$$

Mivel y_2 megoldásfüggvénye az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) = 0$$

egyenletnek, ezért

$$y_2''(x) = -p(x) \cdot y_2'(x) - q(x).$$

Ezeket behelyettesítve a

$$W'(x) = y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x)$$

összefüggésbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1(x) \cdot (-p(x) \cdot y_2'(x) - q(x)) - \\ &\quad - y_2(x) \cdot (-p(x) \cdot y_1'(x) - q(x)) = \\ &= y_2(x) \cdot p(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot p(x) \cdot y_2'(x) = \\ &= p(x) \cdot (y_2(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot y_2'(x)) = \\ &= -p(x) \cdot W(x). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$W'(x) = -p(x) \cdot W(x).$$

Átrendezve

$$W'(x) + p(x) \cdot W(x) = 0$$

adódik, amely egy elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet, így

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

115. Feladat. Legyen $x > 0$. Tekintsük a

$$4x \cdot y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenletet. Tudjuk, hogy $y_1(x) = \cos \sqrt{x}$ megoldása az egyenletnek. A Wronski-determináns segítségével határozzunk meg egy y_1 -től független megoldásfüggvényt, majd adjuk meg az általános megoldást!

Megoldás:

Ha az egyenletet osztjuk x -szel, akkor azt kapjuk, hogy

$$y''(x) + \frac{1}{2x} \cdot y'(x) + \frac{1}{4x} \cdot y(x) = 0.$$

Az Abel formula szerint az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet két lineárisan független megoldásfüggvényéből képzett Wronski-determinánssra fennáll, hogy

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

vagyis jelen esetben

$$W(x) = c \cdot e^{-\int \frac{1}{2x} dx} = c \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \ln x} = \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Másrészt a Wronski-determináns definíciója szerint

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \sqrt{x} & y_2(x) \\ -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Kiszámolva a determinánst és felhasználva, hogy $W(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$ azt kapjuk, hogy

$$y_2'(x) \cdot \cos \sqrt{x} + \frac{\sin \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot y_2(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}.$$

Az általánosság sérelme nélkül tekinthetjük a $c = 1$ esetet, így az

$$y_2'(x) \cdot \cos \sqrt{x} + \frac{\sin \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

vagyis az

$$y_2'(x) + \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}},$$

inhomogén elsőrendű differenciálegyenlet egy megoldását kell megkeresnünk.

A homogén egyenlet

$$y_2'(x) + \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \cdot y_2(x) = 0.$$

Ennek az általános megoldása

$$y_{2,h}(x) = c \cdot e^{-\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} dx}.$$

Az

$$\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} dx$$

integrálást a $\sqrt{x} = t$ helyettesítéssel végezzük el. Ekkor $x = t^2$, így

$$\frac{dx}{dt} = 2t.$$

A helyettesítés végrehajtása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} dx &= \int \frac{\operatorname{tg} t}{2t} \cdot 2t dt = \\ &= \int \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt = -\ln |\cos t| = -\ln \cos |\sqrt{x}|, \end{aligned}$$

így

$$y_{2,h} = c \cdot \cos \sqrt{x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstanvariálással határozzuk meg. Legyen

$$y_{2,p} = c(x) \cdot \cos \sqrt{x}.$$

Ezt behelyettesítve az

$$y_2'(x) \cdot \cos \sqrt{x} + \frac{\sin \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left(c'(x) \cdot \cos \sqrt{x} + c(x) \cdot \frac{-\sin \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) \cdot \cos \sqrt{x} + \\ & + \frac{\sin \sqrt{x}}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

amiből

$$c'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot \cos^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

adódik, így

$$c(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y_2(x) = \sin \sqrt{x}.$$

Tehát a

$$4x \cdot y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot \cos \sqrt{x} + c_2 \cdot \sin \sqrt{x}.$$

116. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$x \cdot y''(x) - (1+x) \cdot y'(x) + y(x) = 0, \quad y(1) = e - 2, \quad y'(1) = e - 1$$

differenciálegyenletet.

- Tudjuk, hogy $y_1(x) = e^x$ megoldása az egyenletnek. A Wronski-determináns segítségével határozzunk meg egy y_1 -től független megoldásfüggvényt, majd adjuk meg az általános megoldást!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiók pont szerint az y függvényt!

- f) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- h) Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- i) Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- j) Adjuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) Ha $x \neq 0$, akkor az egyenletet osztjuk x -szel, így azt kapjuk, hogy

$$y''(x) - \frac{1+x}{x} \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = 0.$$

Az Abel formula szerint az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet két lineárisan független (legyenek ezek y_1 és y_2) megoldásfüggvényéből képzett Wronski-determinánsra fennáll, hogy

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

vagyis jelen esetben

$$\begin{aligned} W(x) &= c \cdot e^{-\int -\frac{1+x}{x} dx} = c \cdot e^{\int \frac{1}{x} + 1 dx} = \\ &= c \cdot x \cdot e^x. \end{aligned}$$

Másrészt a Wronski-determináns definíciója szerint

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & y_2(x) \\ e^x & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Kiszámolva a determinánst és felhasználva, hogy

$$W(x) = c \cdot x \cdot e^x$$

azt kapjuk, hogy

$$y_2'(x) \cdot e^x - y_2(x) \cdot e^x = c \cdot x \cdot e^x.$$

Az általánosság sérelme nélkül tekinthetjük a $c = 1$ esetet, így az

$$y_2'(x) \cdot e^x - y_2(x) \cdot e^x = x \cdot e^x,$$

vagyis az

$$e^x \cdot (y_2'(x) - y_2(x)) = x \cdot e^x,$$

tehát az

$$y_2'(x) - y_2(x) = x$$

inhomogén elsőrendű differenciálegyenlet egy megoldását kell megkeresnünk.

A megfelelő homogén egyenlet

$$y_2'(x) - y_2(x) = 0.$$

Ennek az általános megoldása

$$y_{2,h}(x) = c \cdot e^{-\int -1 dx} = c \cdot e^x.$$

Tehát

$$y_{2,h} = c \cdot e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstanvariálással határozzuk meg.

Legyen

$$y_{2,p} = c(x) \cdot e^x.$$

Ezt behelyettesítve az

$$y_2'(x) - y_2(x) = x$$

inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x,$$

amiből

$$c'(x) = x \cdot e^{-x}$$

adódik, így

$$\begin{aligned} c(x) &= \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x - 1). \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y_2(x) = e^x \cdot e^{-x} \cdot (-x - 1) = -x - 1.$$

Tehát az

$$x \cdot y''(x) - (1 + x) \cdot y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot (-x - 1).$$

b) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x - c_2.$$

Mivel $y(1) = e - 2$, ezért

$$c_1 \cdot e - 2c_2 = e - 2.$$

Mivel $y'(1) = e - 1$, ezért

$$c_1 \cdot e - c_2 = e - 1.$$

A két egyenletet kivonva egymásból $c_2 = 1$ adódik, majd ezt behelyettesítve valamelyik egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_1 = 1$.

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

c) Az

$$e^x - x - 1 = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$. Ez például látható abból, ha felvázoljuk az e^x és $x+1$ függvények grafikonjait és grafikusan oldjuk meg az $e^x = x+1$ egyenletet.

d) Az $y'(x) = 0$, vagyis az $e^x - 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = 0$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		0	

e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $e^x = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Azonban $e^x > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így az y függvény mindenhol konvex és így nincs inflexiós pontja.

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = \infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x - x - 1 = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = e^{-x} + x - 1,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

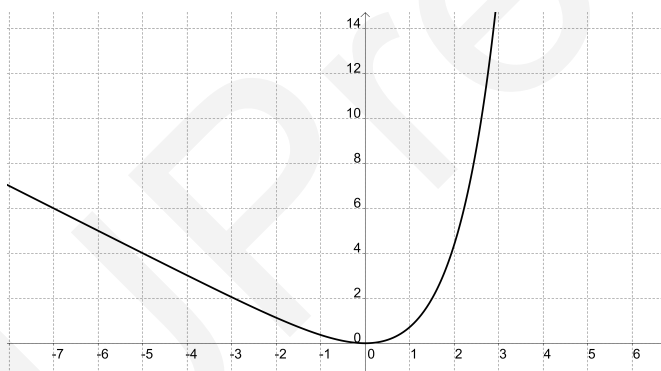
$$-y(x) = -e^x + x + 1,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $[0; \infty[$.

11. Harmadrendű és magasabbrendű lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletek megoldása

117. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y'''(x) &= 6 \\ y(0) &= 0, y'(0) = 0, y''(0) = -6 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázzuk fel az y függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = 6x + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Újabb integrálással azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 3x^2 + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Ismét integrálva mindkét oldalt

$$y(x) = x^3 + \frac{c_1}{2} \cdot x^2 + c_2 \cdot x + c_3$$

adódik, ahol $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(0) = 0$, ezért $c_1 = 0$. Mivel $y'(0) = 0$, ezért $c_2 = 0$. Felhasználva, hogy $y''(0) = -6$ azt kapjuk, hogy $-6 = c_1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^3 - 3x^2.$$

- c) Az $x^3 - 3x^2 = 0$ egyenlet bal oldalán kiemelve az x^2 kifejezést azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot (x - 3) = 0,$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 3$.

- d) Az $y'(x) = 0$, vagyis a

$$3x^2 - 6x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Kiemelve a $3x$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$3x \cdot (x - 2) = 0.$$

Ebből az egyenlet megoldására $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$ adódik. Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; 2[$	2	$]2; \infty[$
$y'(x)$	+	0	−	0	+
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke		0		−4	

- e) Az $y''(x) = 0$, vagyis a $6x - 6 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amire $x = 1$ adódik. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 1[$	1	$]1; \infty[$
$y''(x)$	−	0	+
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke		−2	

f) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x^2 = -\infty.$$

g) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 = \infty.$$

h) Mivel

$$y(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 = -x^3 - 3x^2,$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

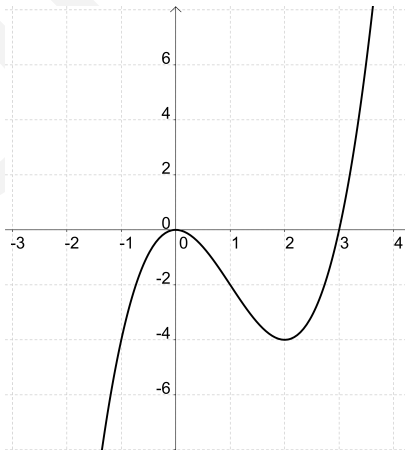
$$-y(x) = -x^3 + 3x^2,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékkészlete: $] -\infty; \infty[$.

118. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) &= 0 \\ y(0) = 9, y'(0) &= 20, y''(0) = 50 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

- b) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = 1$ megoldása, hiszen

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

polinom osztható $\lambda - 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ - (\lambda^3 - \lambda^2) \\ \hline - 5\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ - (-5\lambda^2 + 5\lambda) \\ \hline 6\lambda - 6 \\ - (6\lambda - 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda^2 - 5\lambda + 6) \cdot (\lambda - 1).$$

Vagyis a

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \cdot (\lambda - 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{3x}.$$

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} + 3c_3 \cdot e^{3x},$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} + 9c_3 \cdot e^{3x}.$$

Mivel $y(0) = 9$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 = 9.$$

Mivel $y'(0) = 20$, ezért

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 20.$$

Mivel $y''(0) = 50$, ezért

$$c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 50.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 9 \\ c_1 & + & 2c_2 & + & 3c_3 & = & 20 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 9c_3 & = & 50 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -1 -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 20 \\ 1 & 4 & 9 & 50 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 3 & 8 & 41 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának -3 -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 3 & 8 & 41 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 9 \\ & & c_2 & + & 2c_3 & = & 11 \\ & & & & 2c_3 & = & 8 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = 4$. Ezt vissza-helyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 3$. Végül az első egyenletből $c_1 = 2$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^x + 3e^{2x} + 4e^{3x}.$$

119. Feladat. Legyen $t \geq 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) = 0 \\ y(0) = 9, y'(0) = 20, y''(0) = 50 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t)] = \mathcal{L}[0].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y'''] - 6\mathcal{L}[y''] + 11\mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'''] = s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

továbbá

$$\mathcal{L}[0] = 0,$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) - \\ & - 6 \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0)) + \\ & + 11 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) - 6\mathcal{L}[y] = 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = 9$, $y'(0) = 20$ és $y''(0) = 50$, ezért

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - 9s^2 - 20s - 50 - 6 \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 9s - 20) + \\ & + 11(s \cdot \mathcal{L}[y] - 9) - 6\mathcal{L}[y] = 0. \end{aligned}$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) - 9s^2 - 20s + 54s - 50 + 120 - 99 = 0,$$

vagyis

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) - 9s^2 + 34s - 29 = 0,$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{9s^2 - 34s + 29}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}.$$

Következő lépésben a nevezőt szorzattá alakítjuk. Az $s^3 - 6s^2 + 11s - 6$ polinomnak az $s = 1$ gyöke, így osztható $s - 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve

azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) : (s - 1) = s^2 - 5s + 6 \\
 - (s^3 - s^2) \\
 \hline
 - 5s^2 + 11s - 6 \\
 - (-5s^2 + 5s) \\
 \hline
 6s - 6 \\
 - (6s - 6) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = (s^2 - 5s + 6) \cdot (s - 1).$$

Vagyis a

$$(s^2 - 5s + 6) \cdot (s - 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$s_{2,3} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, így

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = (s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3).$$

Tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{9s^2 - 34s + 29}{(s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{9s^2 - 34s + 29}{(s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 3}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$9s^2 - 34s + 29 = A \cdot (s - 2) \cdot (s - 3) + B \cdot (s - 1) \cdot (s - 3) + C \cdot (s - 1) \cdot (s - 2).$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + B + C) \cdot s^2 + (-5A - 4B - 3C) \cdot s + 6A + 3B + 2C = 9s^2 - 34s + 29$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 9 \\ -5A - 4B - 3C &= -34 \\ 6A + 3B + 2C &= 29 \end{aligned} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 5-szörösét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -6 -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -5 & -4 & -3 & -34 \\ 6 & 3 & 2 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & -25 \end{array} \right).$$

Most a második sor 3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & -25 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 9 \\ B + 2C &= 11 \\ 2C &= 8 \end{aligned} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkaptuk, hogy $C = 4$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 3$. Végül az első egyenletből $A = 2$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-3}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = 2e^t + 3e^{2t} + 4 \cdot e^{3t}$$

adódik.

120. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y'''(x) + 7y''(x) + 14y'(x) + 8y(x) &= 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = -7, y''(0) &= 21 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 = 0.$$

- b) A karakterisztikus egyenletnek
- $\lambda = -1$
- megoldása, hiszen

$$(-1)^3 + 7 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) + 8 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8$$

polinom osztható $\lambda + 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + 6\lambda + 8 \\
 - (\lambda^3 + \lambda^2) \\
 \hline
 6\lambda^2 + 14\lambda + 8 \\
 - (6\lambda^2 + 6\lambda) \\
 \hline
 8\lambda + 8 \\
 - (8\lambda + 8) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8 = (\lambda^2 + 6\lambda + 8) \cdot (\lambda + 1).$$

Vagyis a

$$(\lambda^2 + 6\lambda + 8) \cdot (\lambda + 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-6 \pm 2}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -4$.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot e^{-4x}.$$

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} - 4c_3 \cdot e^{-4x},$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^{-x} + 4c_2 \cdot e^{-2x} + 16c_3 \cdot e^{-4x}.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3.$$

Mivel $y'(0) = -7$, ezért

$$-c_1 - 2c_2 - 4c_3 = -7.$$

Mivel $y''(0) = 21$, ezért

$$c_1 + 4c_2 + 16c_3 = 21.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ -c_1 & - & 2c_2 & - & 4c_3 & = & -7 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 16c_3 & = & 21 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 & -7 \\ 1 & 4 & 16 & 21 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & 18 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának 3 -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 15 & 18 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 9 \\ & - & c_2 & - & 3c_3 & = & -4 \\ & & & & 6c_3 & = & 18 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = 1$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Végül az első egyenletből $c_1 = 1$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-4x}.$$

121. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) + 8y''(x) + 19y'(x) + 12y(x) = 0 \\ y(0) = 4, y'(0) = -12, y''(0) = 42 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 19\lambda + 12 = 0.$$

- b) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = -1$ megoldása, hiszen

$$(-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + 19 \cdot (-1) + 12 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 19\lambda + 12$$

polinom osztható $\lambda + 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 + 8\lambda^2 + 19\lambda + 12) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + 7\lambda + 12 \\
 - (\lambda^3 + \lambda^2) \\
 \hline
 7\lambda^2 + 19\lambda + 12 \\
 - (7\lambda^2 + 7\lambda) \\
 \hline
 12\lambda + 12 \\
 - (12\lambda + 12) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 19\lambda + 12 = (\lambda^2 + 7\lambda + 12) \cdot (\lambda + 1).$$

Vagyis a

$$(\lambda^2 + 7\lambda + 12) \cdot (\lambda + 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-4x}.$$

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 3c_2 \cdot e^{-3x} - 4c_3 \cdot e^{-4x},$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^{-x} + 9c_2 \cdot e^{-3x} + 16c_3 \cdot e^{-4x}.$$

Mivel $y(0) = 4$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 = 4.$$

Mivel $y'(0) = -12$, ezért

$$-c_1 - 3c_2 - 4c_3 = -12.$$

Mivel $y''(0) = 42$, ezért

$$c_1 + 9c_2 + 16c_3 = 21.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 4 \\ -c_1 & - & 3c_2 & - & 4c_3 & = & -12 \\ c_1 & + & 9c_2 & + & 16c_3 & = & 42 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -4 & -12 \\ 1 & 9 & 16 & 42 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 8 & 15 & 38 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának 4-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 8 & 15 & 38 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 4 \\ & - & 2c_2 & - & 3c_3 & = & -8 \\ & & & & 3c_3 & = & 6 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = 2$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Végül az első egyenletből $c_1 = 1$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-x} + e^{-3x} + 2e^{-4x}.$$

122. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = 12, y'(0) = 24, y''(0) = 12 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- a) Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- b) Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- c) Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- d) Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

- b) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = -1$ megoldása, hiszen

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

polinom osztható $\lambda + 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\
 - (\lambda^3 + \lambda^2) \\
 \hline
 - 4\lambda^2 + 4 \\
 - (-4\lambda^2 - 4\lambda) \\
 \hline
 4\lambda + 4 \\
 - (4\lambda + 4) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \cdot (\lambda + 1).$$

Mivel

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^2,$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$. Tehát a $\lambda_1 = -1$ egyszeres multiplicitású, míg a $\lambda_2 = 2$ kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot x \cdot e^{2x}.$$

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot (1 + 2x) \cdot e^{2x},$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^{-x} + 4c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot (4 + 4x)e^{2x}.$$

Mivel $y(0) = 12$, ezért

$$c_1 + c_2 = 2.$$

Mivel $y'(0) = 24$, ezért

$$-c_1 + 2c_2 + c_3 = 2.$$

Mivel $y''(0) = 12$, ezért

$$c_1 + 4c_2 + 4c_3 = 12.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & = & 12 \\ -c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & 24 \\ c_1 & + & 4c_2 & + & 4c_3 & = & 12 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 24 \\ 1 & 4 & 4 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 36 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 36 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 3 & -36 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & & = & 12 \\ & & 3c_2 & + & c_3 & = & 36 \\ & & & & 3c_3 & = & -36 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = -12$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 16$. Végül az első egyenletből $c_1 = -4$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -4e^{-x} + 16e^{2x} - 12x \cdot e^{2x}.$$

123. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0 \\ y(0) = 6, y'(0) = 11, y''(0) = 18 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény zérushelye(i)t!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértéket!
- Vizsgáljuk meg paritás szerint az y függvényt!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

b) Mivel

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3,$$

ezért a karakterisztikus egyenletnek egyetlen gyöke van $\lambda = 1$, háromszoros multiplicitással.

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot x^2 \cdot e^x = \\ &= (c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x. \end{aligned}$$

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$\begin{aligned} y'(x) &= (c_2 + 2c_3 \cdot x) \cdot e^x + (c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x = \\ &= (c_1 + c_2 + c_2 \cdot x + 2c_3 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x, \end{aligned}$$

másodrendű deriváltja

$$\begin{aligned} y''(x) &= (c_1 + 2c_3 + 2c_3 \cdot x) \cdot e^x + \\ &+ (c_1 + c_2 + c_2 \cdot x + 2c_3 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x = \\ &= (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_2 \cdot x + 4c_3 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Mivel $y(0) = 6$, ezért

$$c_1 = 6.$$

Mivel $y'(0) = 1$, ezért

$$c_1 + c_2 = 11.$$

Mivel $y''(0) = 18$, ezért

$$c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 18.$$

Tehát a

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= 6 \\ c_1 + c_2 &= 11 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 18 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből tehát megkaptuk, hogy $c_1 = 6$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 5$. Végül az első egyenletből $c_3 = 1$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (x^2 + 5x + 6) \cdot e^x.$$

e) Az

$$(x^2 + 5x + 6) \cdot e^x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Mivel $e^x \neq 0$, ezért

$$x^2 + 5x + 6 = 0,$$

vagyis

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

így az egyenlet megoldásai, vagyis az y függvény zérushelyei $x_1 = -2$, illetve $x_2 = -3$.

f) Az $y'(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = (2x + 5) \cdot e^x + (x^2 + 5x + 6) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 7x + 11).$$

Mivel $e^x \neq 0$, ezért

$$x^2 + 7x + 11 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Az elsőrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; \frac{-7-\sqrt{5}}{2} [$	$\frac{-7-\sqrt{5}}{2}$	$] \frac{-7-\sqrt{5}}{2}; \frac{-7+\sqrt{5}}{2} [$
$y'(x)$	+	0	–
$y(x)$	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$
$y(x)$ értéke		$\approx 0,0418$	

x	$\frac{-7+\sqrt{5}}{2}$	$] \frac{-7+\sqrt{5}}{2}; \infty [$
$y'(x)$	0	+
$y(x)$	lok. min.	$\nearrow$
$y(x)$ értéke	$\approx -0,0218$	

- g) Az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Az y függvény másodrendű deriváltja

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^x \cdot (x^2 + 7x + 11) + e^x \cdot (2x + 7) = \\ &= e^{3x} \cdot (x^2 + 9x + 18). \end{aligned}$$

Mivel $e^x \neq 0$, ezért

$$x^2 + 9x + 18 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{2},$$

vagyis $x_1 = 6$ és $x_2 = -3$. Az másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -6[$	-6	$] - 6; -3[$
$y''(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$\approx 0,0297$	

x	-3	$] - 3; \infty[$
$y''(x)$	0	$+$
$y(x)$	inflexiós pont	konvex
$y(x)$ értéke	0	

- h) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben (a L'Hospital-szabály felhasználásával):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 5x + 6) \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 6}{e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0. \end{aligned}$$

i) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 5x + 6) \cdot e^x = \infty.$$

j) Mivel

$$y(-x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot e^{-x},$$

ezért

$$y(-x) \neq y(x),$$

így az y függvény nem páros.

Mivel

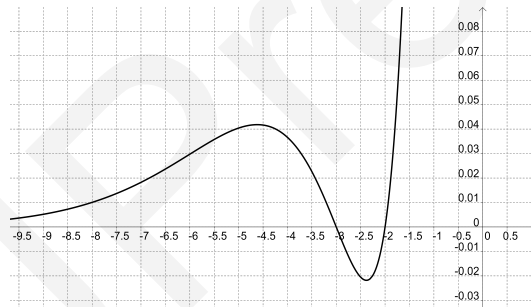
$$-y(x) = (-x^2 - 5x - 6) \cdot e^x,$$

ezért

$$y(-x) \neq -y(x),$$

így az y függvény nem páratlan.

k) Az y függvény grafikonja:



124. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y^{(4)}(x) - 16y(x) &= 0 \\ y(0) &= 3, y'(0) = 2, y''(0) = -4, y'''(0) = -24 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^4 - 16 = 0.$$

b) Mivel

$$\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4) \cdot (\lambda^2 + 4),$$

ezért

$$(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 4$$

és

$$(\lambda^2 + 4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4$$

miatt a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i.$$

c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot \cos 2x + c_4 \cdot \sin 2x,$$

ahol $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - 2c_2 \cdot e^{-2x} - 2c_3 \cdot \sin 2x + 2c_4 \cdot \cos 2x,$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = 4c_1 \cdot e^{2x} + 4c_2 \cdot e^{-2x} - 4c_3 \cdot \cos 2x - 4c_4 \cdot \sin 2x,$$

harmadrendű deriváltja

$$y'''(x) = 8c_1 \cdot e^{2x} - 8c_2 \cdot e^{-2x} + 8c_3 \cdot \sin 2x - 8c_4 \cdot \cos 2x.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 = 3.$$

Mivel $y'(0) = 2$, ezért

$$2c_1 - 2c_2 + 2c_4 = 2.$$

Mivel $y''(0) = -4$, ezért

$$4c_1 + 4c_2 - 4c_3 = -4.$$

Mivel $y'''(0) = -24$, ezért

$$8c_1 - 8c_2 - 8c_4 = -24.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrrrr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ c_1 & - & c_2 & & + & c_4 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & - & c_3 & & = & -1 \\ c_1 & - & c_2 & & & - & c_4 & = & -3 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -1 -szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -6 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának -1 -szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrrrr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ & - & 2c_2 & - & c_3 & + & c_4 & = & -2 \\ & & & & -2c_3 & & & = & -4 \\ & & & & & - & 2c_4 & = & -4 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_4 = 2$, a harmadik egyenletből pedig, hogy $c_3 = 2$. Ezeket visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Végül az első egyenletből $c_1 = 0$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} + 2 \cos 2x + 2 \sin 2x.$$

125. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y^{(5)}(x) - 6y^{(4)}(x) + 5y'''(x) &= 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 7, y''(0) = 28, y'''(0) = 126, y^{(4)}(0) &= 626 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Adjuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 5\lambda^3 = 0.$$

- b) Mivel

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 5\lambda^3 = \lambda^3 \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 5),$$

ezért

$$\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$$

és

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{4,5} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

miatt a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 5, \lambda_5 = 1.$$

- c) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot e^{5x} + c_5 \cdot e^x,$$

ahol $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- d) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = c_2 + 2c_3 \cdot x + 5c_4 \cdot e^{5x} + c_5 \cdot e^x,$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = 2c_3 + 25c_4 \cdot e^{5x} + c_5 \cdot e^x,$$

harmadrendű deriváltja

$$y'''(x) = 125c_4 \cdot e^{5x} + c_5 \cdot e^x,$$

negyedrendű deriváltja

$$y^{(4)}(x) = 625c_4 \cdot e^{5x} + c_5 \cdot e^x.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$c_1 + c_4 + c_5 = 3.$$

Mivel $y'(0) = 7$, ezért

$$c_2 + 5c_4 + c_5 = 7.$$

Mivel $y''(0) = 28$, ezért

$$2c_3 + 25c_4 + c_5 = 28.$$

Mivel $y'''(0) = 126$, ezért

$$125c_4 + c_5 = 126.$$

Mivel $y^{(4)}(0) = 626$, ezért

$$625c_4 + c_5 = 626.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & & c_4 + c_5 = 3 \\ & c_2 + & 5c_4 + c_5 = 7 \\ & 2c_3 + & 25c_4 + c_5 = 28 \\ & & 125c_4 + c_5 = 126 \\ & & 625c_4 + c_5 = 626 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

A negyedik sor -5 -szörösét hozzáadjuk az ötödik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 25 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 125 & 1 & 126 \\ 0 & 0 & 0 & 625 & 1 & 626 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 25 & 1 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 125 & 1 & 126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rrrrrr} c_1 & & & & + & c_5 & = & 3 \\ & c_2 & & + & 5c_4 & + & c_5 & = & 7 \\ & & 2c_3 & + & 25c_4 & + & c_5 & = & 28 \\ & & & & 125c_4 & + & c_5 & = & 126 \\ & & & & & - & 4c_5 & = & -4 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_5 = 1$, a negyedik egyenletből pedig, hogy $c_4 = 1$, a harmadikból azt, hogy $c_3 = 1$, a másodikból azt, hogy $c_2 = 1$, végül az elsőből, hogy $c_1 = 1$.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 1 + x + x^2 + e^{5x} + e^x.$$

126. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) + 4y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = 68 \cdot e^{-3x} \\ y(0) = 2, y'(0) = -2, y''(0) = 3 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletet!
- Adjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Határozzuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Írjuk fel a homogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel!
- Írjuk fel az inhomogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

- a) A megfelelő homogén egyenlet

$$y'''(x) + 4y''(x) + 5y'(x) + 2y(x) = 0.$$

- b) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0.$$

c) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = -1$ megoldása, hiszen

$$(-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 2 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2$$

polinom osztható $\lambda + 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2) : (\lambda + 1) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ - (\lambda^3 + \lambda^2) \\ \hline 3\lambda^2 + 5\lambda + 2 \\ - (3\lambda^2 + 3\lambda) \\ \hline 2\lambda + 2 \\ - (2\lambda + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda^2 + 3\lambda + 2) \cdot (\lambda + 1).$$

Mivel a

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = 0$$

egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Tehát a $\lambda = -1$ kétszeres multiplicitású, míg a $\lambda_2 = -2$ egyszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

d) A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-2x}.$$

e) Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot e^{-3x}$$

alakban keressük. Ekkor az y_p deriváltja

$$y'_p(x) = -3A \cdot e^{-3x},$$

másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 9A \cdot e^{-3x},$$

harmadrendű deriváltja

$$y_p'''(x) = -27A \cdot e^{-3x}.$$

Ezeket visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(-27A + 36A - 15A + 2A) \cdot e^{-3x} = 68 \cdot e^{-3x},$$

vagyis

$$-4A = 68 \quad \Rightarrow \quad A = -17.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -17 \cdot e^{-3x}.$$

f) Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^{-2x} - 17 \cdot e^{-3x}.$$

g) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} + (c_2 - c_2 \cdot x) \cdot e^{-x} - 2c_3 \cdot e^{-2x} + 51 \cdot e^{-3x},$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^{-x} - c_2 \cdot e^{-x} - (c_2 - c_2 \cdot x) \cdot e^{-x} + \\ + 4c_3 \cdot e^{-2x} - 153 \cdot e^{-3x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$c_1 + c_3 - 17 = 2.$$

Mivel $y'(0) = -2$, ezért

$$-c_1 + c_2 - 2c_3 + 51 = -2.$$

Mivel $y''(0) = 3$, ezért

$$c_1 - 2c_2 + 4c_3 - 153 = 3.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & & + & c_3 & = & 19 \\ -c_1 & + & c_2 & - & 2c_3 & = & -53 \\ c_1 & - & 2c_2 & + & 4c_3 & = & 156 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorát hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 \\ -1 & 1 & -2 & -53 \\ 1 & -2 & 4 & 156 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -34 \\ 0 & -2 & 3 & 137 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának 2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -34 \\ 0 & -2 & 3 & 137 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 69 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rcl} c_1 & + & c_3 = 19 \\ c_2 & - & c_3 = -34 \\ c_3 & = & 69 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = 69$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 35$. Végül az első egyenletből $c_1 = -50$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -50e^{-x} + 35 \cdot x \cdot e^{-x} + 69e^{-2x} - 17e^{-3x}.$$

127. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) + 9y''(x) + 26y'(x) + 24y(x) = 24x + 2 \\ y(0) = 2, y'(0) = -10, y''(0) = 29 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletet!
- Adjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Határozzuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Írjuk fel a homogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel!
- Írjuk fel az inhomogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

a) A megfelelő homogén egyenlet

$$y'''(x) + 9y''(x) + 26y'(x) + 24y(x) = 0.$$

b) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0.$$

c) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = -2$ megoldása, hiszen

$$(-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 26 \cdot (-2) + 24 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24$$

polinom osztható $\lambda + 2$ -vel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 7\lambda + 12 \\
 - (\lambda^3 + 2\lambda^2) \\
 \hline
 7\lambda^2 + 26\lambda + 24 \\
 - (7\lambda^2 + 14\lambda) \\
 \hline
 12\lambda + 24 \\
 - (12\lambda + 24) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = (\lambda^2 + 7\lambda + 12) \cdot (\lambda + 2).$$

Mivel a

$$(\lambda^2 + 7\lambda + 12) = 0$$

egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-7 \pm 1}{2},$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$.

d) A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-4x}.$$

e) Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x + B$$

alakban keressük. Ekkor az y_p deriváltja

$$y_p'(x) = A,$$

másodrendű deriváltja $y_p''(x) = 0$, harmadrendű deriváltja $y_p'''(x) = 0$. Ezeket visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$26A + 24A \cdot x + 24B = 24x + 2,$$

így $A = 1$ és

$$26A + 24B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x - 1.$$

f) Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-4x} + x - 1.$$

g) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} - 3c_2 \cdot e^{-3x} - 4c_3 \cdot e^{-4x} + 1,$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = 4c_1 \cdot e^{-2x} + 9c_2 \cdot e^{-3x} + 16c_3 \cdot e^{-4x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 - 1 = 2.$$

Mivel $y'(0) = -10$, ezért

$$-2c_1 - 3c_2 - 4c_3 + 1 = -10.$$

Mivel $y''(0) = 29$, ezért

$$4c_1 + 9c_2 + 16c_3 = 29.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ -2c_1 & - & 3c_2 & - & 4c_3 & = & -11 \\ 4c_1 & + & 9c_2 & + & 16c_3 & = & 29 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -4 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -4 & -11 \\ 4 & 9 & 16 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 12 & 17 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának 5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 12 & 17 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszer

$$\left. \begin{array}{rclcl} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ & & - & c_2 & - & 2c_3 & = & -5 \\ & & & & 2c_3 & = & -8 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = -4$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 13$. Végül az első egyenletből $c_1 = -6$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -6e^{-2x} + 13e^{-3x} - 4e^{-4x} + x - 1.$$

128. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y'''(x) + 10y''(x) + 31y'(x) + 30y(x) = 20 \sin x + 30 \cos x \\ y(0) = 3, y'(0) = -9, y''(0) = 38 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

- Írjuk fel az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenletet!
- Adjuk a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletét!
- Határozzuk meg a karakterisztikus egyenlet gyökeit!
- Írjuk fel a homogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel!
- Írjuk fel az inhomogén egyenlet általános megoldását!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

a) A megfelelő homogén egyenlet

$$y'''(x) + 10y''(x) + 31y'(x) + 30y(x) = 0.$$

b) A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30 = 0.$$

c) A karakterisztikus egyenletnek $\lambda = -2$ megoldása, hiszen

$$(-2)^3 + 10 \cdot (-2)^2 + 31 \cdot (-2) + 30 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30$$

polinom osztható $\lambda + 2$ -vel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 + 21\lambda^2 + 31\lambda + 30) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 8\lambda + 15 \\
 - (\lambda^3 + 2\lambda^2) \\
 \hline
 8\lambda^2 + 31\lambda + 30 \\
 - (8\lambda^2 + 16\lambda) \\
 \hline
 15\lambda + 30 \\
 - (15\lambda + 30) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 10\lambda^2 + 31\lambda + 30 = (\lambda^2 + 8\lambda + 15) \cdot (\lambda + 2).$$

Mivel a

$$(\lambda^2 + 8\lambda + 15) = 0$$

egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-8 \pm 2}{2},$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -5$.

d) A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-5x}.$$

e) Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot \sin x + B \cdot \cos x$$

alakban keressük. Ekkor az y_p deriváltja

$$y_p'(x) = A \cdot \cos x - B \cdot \sin x,$$

másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = -A \cdot \sin x - B \cdot \cos x,$$

harmadrendű deriváltja

$$y_p'''(x) = -A \cdot \cos x + B \cdot \sin x.$$

Ezeket visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(30A - 31B - 10A + B) \cdot \sin x + (30B + 31A - 10B - A) \cdot \cos x \\ = 20 \sin x + 30 \cos x.$$

Tehát az

$$\left. \begin{array}{rcl} 20A & - & 30B = 20 \\ 30A & + & 20B = 30 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Ha az első egyenlet kétszeresét hozzáadjuk a második egyenlet háromszorosához, akkor azt kapjuk, hogy $A = 1$, így $B = 0$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = \sin x.$$

f) Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-5x} + \sin x.$$

g) Az y megoldásfüggvény deriváltja

$$y'(x) = -2c_1 \cdot e^{-2x} - 3c_2 \cdot e^{-3x} - 5c_3 \cdot e^{-5x} + \cos x,$$

másodrendű deriváltja

$$y''(x) = 4c_1 \cdot e^{-2x} + 9c_2 \cdot e^{-3x} + 25c_3 \cdot e^{-5x} - \sin x.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$c_1 + c_2 + c_3 - 1 = 3.$$

Mivel $y'(0) = -9$, ezért

$$-2c_1 - 3c_2 - 5c_3 + 1 = -9.$$

Mivel $y''(0) = 38$, ezért

$$4c_1 + 9c_2 + 25c_3 = 38.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ -2c_1 & - & 3c_2 & - & 5c_3 & = & -10 \\ 4c_1 & + & 9c_2 & + & 25c_3 & = & 38 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg.

Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -4 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & -5 & -10 \\ 4 & 9 & 25 & 38 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 21 & 26 \end{array} \right).$$

Második lépésben a kibővített mátrix második sorának 5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 5 & 21 & 26 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ & & -c_2 & - & 3c_3 & = & -4 \\ & & & & 6c_3 & = & 6 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $c_3 = 1$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $c_2 = 1$. Végül az első egyenletből $c_1 = 1$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-5x} + \sin x.$$

129. Feladat. Írjunk fel olyan harmadrendű lineáris konstansegyütthatós homogén differenciálegyenletet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Megoldás:

Egy olyan differenciálegyenlet, amely megfelel a feltételeknek

$$y'''(x) + y''(x) - y'(x) - y(x) = 0.$$

130. Feladat. Írjunk fel olyan harmadrendű lineáris konstansegyütthatós homogén differenciálegyenletet, amely karakterisztikus egyenletének gyökei

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Megoldás:

A karakterisztikus egyenlet gyöktényezős alakja

$$(\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot (\lambda - \lambda_3) = 0,$$

ami jelen esetben

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) = 0.$$

A zárójeleket felbontva azt kapjuk, hogy

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Egy olyan differenciálegyenlet, amely megfelel a feltételeknek

$$y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0.$$

131. Feladat. Legyen $t \geq 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{aligned} y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t) &= 6e^{2t} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'''(t) - 3y''(t) - y'(t) + 3y(t)] = \mathcal{L}[6e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformáció linearitását

$$\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y''] - \mathcal{L}[y'] + 3\mathcal{L}[y] = 6\mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'''] = s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

továbbá

$$\mathcal{L}[0] = 0,$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) - \\ & - 3 \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0)) - \\ & - (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) + 3\mathcal{L}[y] = \frac{6}{s-2} \end{aligned}$$

algebrai egyenletté.

Mivel $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ és $y''(0) = 0$, ezért

$$s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - 3s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot \mathcal{L}[y] + 3\mathcal{L}[y] = \frac{6}{s-2}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^3 - 3s^2 - s + 3) = \frac{6}{s-2},$$

vagyis

$$\mathcal{L}[y] = \frac{6}{(s^3 - 3s^2 - s + 3) \cdot (s-2)}$$

adódik.

Következő lépésben a nevezőt szorzattá alakítjuk. Mivel

$$\begin{aligned} s^3 - 3s^2 - s + 3 &= s \cdot (s^2 - 1) - 3 \cdot (s^2 - 1) = (s^2 - 1) \cdot (s - 3) = \\ &= (s - 1) \cdot (s + 1) \cdot (s - 3), \end{aligned}$$

ezért

$$\mathcal{L}[y] = \frac{6}{(s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3) \cdot (s+1)}.$$

A kapott törtet parciális törtök összegére bontva

$$\frac{6}{(s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3) \cdot (s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+1}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 6 &= A \cdot (s-2) \cdot (s-3) \cdot (s+1) + B \cdot (s-1) \cdot (s-3) \cdot (s+1) + \\ &+ C \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s+1) + D \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdot (s-3). \end{aligned}$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + B + C + D) \cdot s^3 + (-4A - 3B - 2C - 6D) \cdot s^2 + \\ + (A - B - C + 11D) \cdot s + 6A + 3B + 2C - 6D = 6$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rrrrr} A & + & B & + & C & + & D & = & 0 \\ -4A & - & 3B & - & 2C & - & 6D & = & 0 \\ A & - & B & - & C & + & 11D & = & 0 \\ 6A & + & 3B & + & 2C & - & 6D & = & 6 \end{array} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 4-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -1 -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -6 -szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 11 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -6 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -12 & 6 \end{array} \right).$$

A második sor 2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor 3-szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -12 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -18 & 6 \end{array} \right).$$

A harmadik sor -1 -szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -18 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 6 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rrrrr} A & + & B & + & C & + & D & = & 0 \\ & & B & + & 2C & - & 2D & = & 0 \\ & & & & 2C & + & 6D & = & 0 \\ & & & & & & - & 24D & = & 6 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkapjuk, hogy $D = -\frac{1}{4}$. Ezt visszahe-
lyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2C - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{4}.$$

A második egyenletből

$$B + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -2.$$

adódik.

Végül az első egyenletből következik, hogy

$$A - 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{3}{2}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - 2 \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = \frac{3}{2} \cdot e^t - 2 \cdot e^{2t} + \frac{3}{4} \cdot e^{3t} - \frac{1}{4} e^{-t}.$$

adódik.

12. Differenciálegyenlet-rendszerek

132. **Feladat.** Írjuk fel mátrixos alakban az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 2x \cdot y_1(x) + x^2 \cdot y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) &= 5x \cdot y_1(x) + x^3 \cdot y_2(x) + x + 2 \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer felírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x^2 \\ 5x & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ x + 2 \end{pmatrix}$$

alakban. Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

és

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$A(x) = \begin{pmatrix} 2x & x^2 \\ 5x & x^3 \end{pmatrix}$$

és

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ x + 2 \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer az

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + f(x)$$

formában írható fel.

133. **Feladat.** Írjuk fel mátrixos alakban az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= x^2 \cdot y_1(x) + x^4 \cdot y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) &= 5x \cdot y_1(x) + x^3 \cdot y_2(x) + x^2 + 3 \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

Az egyenletrendszer felírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & x^4 \\ 5x & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 + 3 \end{pmatrix}$$

alakban. Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

és

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^4 \\ 5x & x^3 \end{pmatrix}$$

és

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 + 3 \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer az

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + f(x)$$

formában írható fel.

134. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\{y^{(1)}(x); y^{(2)}(x)\},$$

ahol

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

és

$$y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} \\ 2e^{-3x} \end{pmatrix}$$

alaprendszere az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) - 4y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differentiálegyenlet-rendszernek.

Megoldás:

Két dolgot kell belátnunk. Egyrészt azt, hogy $y^{(1)}$ és $y^{(2)}$ megoldásai az egyenletrendszernek, másrészt azt, hogy lineárisan függetlenek.

Mivel

$$y_1'(x) = -2e^{-2x}$$

és

$$y_2'(x) = -2e^{-2x},$$

ezért

$$-2e^{-2x} = -e^{-2x} - e^{-2x}$$

és

$$-2e^{-2x} = 2e^{-2x} - 4e^{-2x},$$

ezért $y^{(1)}(x)$ megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel

$$y_1^{*'}(x) = -3e^{-3x}$$

és

$$y_2^{*'}(x) = -6e^{-3x},$$

ezért

$$-3e^{-3x} = -e^{-3x} - 2e^{-3x}$$

és

$$-6e^{-3x} = 2e^{-3x} - 8e^{-3x},$$

ezért $y^{(2)}(x)$ megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ e^{-2x} & 2e^{-3x} \end{pmatrix} = e^{-5x} \neq 0,$$

ezért $y^{(1)}$ és $y^{(2)}$ lineárisan függetlenek.

Tehát $\{y^{(1)}; y^{(2)}\}$ alaprendszere a differenciálegyenlet-rendszernek. Ez azt is jelenti, hogy az egyenletrendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y^{(1)}(x) + c_2 \cdot y^{(2)}(x),$$

vagyis

$$y(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} \\ c_1 \cdot e^{-2x} + 2c_2 \cdot e^{-3x} \end{pmatrix},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

135. Feladat. Legyen $x \in]0; \infty[$. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) &= (1+x) \cdot y_1(x) - y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert! Tudjuk, hogy

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

megoldása az egyenletrendszernek. A Liouville-formula segítségével határozzuk meg az egyenletrendszer egy alaprendszerét és adjuk meg az általános megoldást!

Megoldás:

Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

, valamint az

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

és az

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer tömörebb formában is felírható az

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x)$$

alakban. Ekkor

$$\text{tr } A(x) = 1 + (-1) = 0.$$

Az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

megoldása az egyenletrendszernek, így az alaprendszer

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & 1 \\ y_2(x) & x \end{pmatrix}.$$

A $\Phi(x)$ determinánása

$$\det \Phi(x) = x \cdot y_1(x) - y_2(x).$$

Az előbbi tétel szerint

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x 0 \, d\xi} = c_1,$$

így

$$x \cdot y_1(x) - y_2(x) = c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$.

Mivel az eredeti egyenletrendszer első egyenlete szerint

$$y_1'(x) = y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x),$$

ezért

$$y_1'(x) = y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x) = \frac{x \cdot y_1(x) - y_2(x)}{x} = \frac{c_1}{x},$$

vagyis

$$y_1'(x) = \frac{c_1}{x},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$y_1(x) = c_1 \cdot \ln x + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$y_2(x) = x \cdot y_1(x) - c_1 = c_1 \cdot x \cdot \ln x + c_2 \cdot x - c_1.$$

Tehát egy alaprendszer

$$\begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \cdot \ln x - 1 & x \end{pmatrix}.$$

136. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = 4y_1(x) + y_2(x) \end{cases}$$

differentiálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz vagyis az

$$(1 - \lambda)^2 - 4$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)^2 = 4$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$1 - \lambda = 2$$

$$1 - \lambda = -2,$$

vagyis $\lambda_1 = -1$, illetve $\lambda_2 = 3$.

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A + 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor kétszerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = -2t$. Tehát a $\lambda_1 = -1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ehhez tekintsük az

$$A - 3 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ezután a

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor -2 -szerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-2r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = 2t$. Tehát a $\lambda_2 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az alapszisztem

$$\begin{aligned} \Phi &= (s_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \quad s_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} \right) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -2e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -2e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x} \\ -2c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}$$

$$y_2(x) = -2c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{3x}.$$

137. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 5y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert, majd az ahhoz tartozó $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$ kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 5 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(2 - \lambda) \cdot (5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 6$.

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor kétszerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$r_1 + 2r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_1 = -2t$. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ehhez tekintsük az

$$A - 6 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixiot. Ezután a

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első sora a második sor -2 -szerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2r_1 - r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = 2t$. Tehát a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az alapszisztem

$$\begin{aligned} \Phi &= (s_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \quad s_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{6x} \right) = \begin{pmatrix} -2e^x & e^{6x} \\ e^x & 2e^{6x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^x & e^{6x} \\ e^x & 2e^{6x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{6x} \\ c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{6x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = -2c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{6x}$$

$$y_2(x) = c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{6x}.$$

Mivel $y_1(0) = 1$, ezért

$$-2c_1 + c_2 = 1.$$

Mivel $y_2(0) = 1$, ezért

$$c_1 + 2c_2 = 1.$$

Tehát a

$$\left. \begin{array}{rcl} -2c_1 & + & c_2 = 1 \\ c_1 & + & 2c_2 = 1 \end{array} \right\}.$$

A második egyenlet kétszereséhez hozzáadva az első $c_2 = \frac{3}{5}$ adódik. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $c_1 = -\frac{1}{5}$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y_1(x) = -\frac{1}{5} \cdot e^x + \frac{3}{5} \cdot e^{6x}$$

$$y_2(x) = -\frac{1}{5} \cdot e^x + \frac{6}{5} \cdot e^{6x}.$$

138. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = 2y_1(x) \\ y_2'(x) = 2y_2(x) \end{array} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) = (2 - \lambda)^2$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(2 - \lambda)^2 = 0$$

egyenlet, melynek megoldása $\lambda = 2$.

Ehhez létezik két lineárisan független sajátvektor, melyek

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{2x} \cdot s_2,$$

vagyis

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{2x}$$

$$y_2(x) = c_2 \cdot e^{2x},$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

139. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 5y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2'(x) &= -2y_1(x) + 7y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differentiálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 5 \\ -2 & 7 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(5 - \lambda) \cdot (7 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - 12\lambda + 45$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1;2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{2} = 6 \pm 3i,$$

vagyis $\lambda_1 = 6 + 3i$, illetve $\lambda_2 = 6 - 3i$. Legyen $\alpha = 6$ és $\beta = 3$.

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Elegendő meghatározni a $\lambda_1 = 6 + 3i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E_2 = 0 \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 + 3i & 0 \\ 0 & 6 + 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 3i & 5 \\ -2 & 1 - 3i \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{pmatrix} -1 - 3i & 5 \\ -2 & 1 - 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két sor közül az egyik elhagyható, így

$$(-1 - 3i) \cdot r_1 + 5r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = 5t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = (1 + 3i) \cdot t$. Tehát a $\lambda_1 = 6 + 3i$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5t \\ (1 + 3i) \cdot t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Az alaprendszer

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1); \\ e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) - e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) \end{pmatrix}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \left(e^{6x} \cdot \cos(3x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{6x} \cdot \sin(3x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \\ + c_2 \cdot \left(e^{6x} \cdot \cos(3x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{6x} \cdot \sin(3x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = 5c_1 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) + 5c_2 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x),$$

illetve

$$y_2(x) = c_1 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x) + \\ + 3c_2 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x).$$

140. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= -1y_1(x) + 3y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másképpen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egységmatricot a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i,$$

vagyis $\lambda_1 = 2 + i$, illetve $\lambda_2 = 2 - i$. Legyen $\alpha = 2$ és $\beta = 1$.

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Elegendő meghatározni a $\lambda_1 = 2 + i$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E_2 = 0 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + i & 0 \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - i & 2 \\ -1 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{pmatrix} -1 - i & 2 \\ -1 & 1 - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két sor közül az egyik elhagyható, így

$$(-1 - i) \cdot r_1 + 2r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t$, ahol $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = \frac{(1+i)}{2} \cdot t$. Tehát a $\lambda_1 = 2+i$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ \frac{1+i}{2} \cdot t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az alaprendszer

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1); \\ e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) - e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) \end{pmatrix}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \left(e^{2x} \cdot \cos x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{2x} \cdot \sin x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \\ + c_2 \cdot \left(e^{2x} \cdot \cos x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2x} \cdot \sin x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + 2c_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x,$$

illetve

$$y_2(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cdot \cos x - c_1 \cdot e^{2x} \cdot \sin x + \\ + c_2 \cdot e^{2x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x.$$

141. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) = -y_1(x) + 3y_2(x) \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(x) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másképpen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egység mátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz vagyis az

$$(1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, vagyis jelen esetben $\lambda = 2$ kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják, ami jelen esetben

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = t$. Tehát a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1. Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel nem létezik ettől lineárisan független sajátvektor, hiszen a $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása egy, ezért egy általánosított sajátvektort kell bevezetnünk. Ehhez tekintsük az

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot r = s_1$$

egyenletrendszert.

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ezután a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-r_1 + r_2 = 1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_2 = t \in \mathbb{R}$. Ekkor $r_1 = t + 1$. Tehát a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó általánosított sajátaltér:

$$S_\lambda^* = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet-rendszernek egy, a korábbtól lineárisan független megoldása

$$x \cdot s_1 \cdot e^{\lambda x} + s_2 \cdot e^{\lambda x},$$

ami jelen esetben

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az alaprendszer

$$\Phi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x}; \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \right).$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} \\ c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot (x+1) \cdot e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = (c_1 + c_2) \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$y_2(x) = (c_1 + c_2 \cdot (x+1)) e^{2x}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

142. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Oldjuk meg az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= -2y_1(x) + 4y_2(x) - 8y_3(x) \\ y_2'(x) &= -6y_1(x) + 8y_2(x) - 14y_3(x) \\ y_3'(x) &= -3y_1(x) + 3y_2(x) - 5y_3(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Megoldás:

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & 14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában $y'(t) = A \cdot y(x)$, ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & 14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. Az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 4 & -8 \\ -6 & 8 - \lambda & -14 \\ -3 & 3 & -5 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (-2 - \lambda) \cdot (8 - \lambda) \cdot (-5 - \lambda) + \\ &+ 168 + 144 - 24 \cdot (8 - \lambda) + \\ &+ 42 \cdot (-2 - \lambda) + 24 \cdot (-5 - \lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4,\end{aligned}$$

így a karakterisztikus egyenlet

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0$$

egyenlet megoldásai. Az első két tagból emeljünk ki λ^2 -et, a második két tagból pedig 4-et, majd alakítsuk szorzattá az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned}-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 &= 0 \\ \lambda^2 \cdot (1 - \lambda) + 4 \cdot (\lambda - 1) &= 0 \\ (\lambda - 1) \cdot (4 - \lambda^2) &= 0.\end{aligned}$$

Egy szorzat csak akkor lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így az egyenlet megoldásai, vagyis a sajátértékek $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok azok az $r \neq 0$ vektorok, amelyekre

$$A \cdot r = \lambda \cdot r$$

teljesül. Ezt átrendezve az

$$(A - \lambda E_3) \cdot r = 0$$

adódik. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ekkor

$$\begin{aligned} A - 1 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

így meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert. A kapott mátrixban az első sor -2 -szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -1 -szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ezután a második sor -1 -szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ -6 & 7 & -14 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrixból az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} 3r_1 + 4r_2 - 8r_3 &= 0 \\ -r_2 + 2r_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Legyen $r_3 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = 2t$. Ezeket az első egyenletbe behelyettesítve $-3r_1 + 8t - 8t = 0$, azaz $r_1 = 0$. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Egy konkrét olyan sajátvektor, ami a λ_1 sajátértékhez tartozik

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Most meghatározzuk a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A - 2 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer. Az egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben az első sort osszuk el -4 -gyel, majd az első sor 6-szorosát adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -8 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 6 & -14 \\ -3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Végezetül a második sor $-\frac{1}{2}$ -szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A megoldandó lineáris egyenletrendszer tehát:

$$\left. \begin{array}{rcl} r_1 & - & r_2 + 2r_3 = 0 \\ & & - 2r_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

A második egyenletből $r_3 = 0$ adódik. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $r_1 = r_2$. Legyen $r_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_1 = t$. Tehát a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Egy konkrét sajátvektor, amely a λ_2 sajátértékhez tartozik

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Most meghatározzuk a $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ekkor

$$\begin{aligned} A + 3 \cdot E_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -8 \\ -6 & 8 & -14 \\ -3 & 3 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát meg kell oldanunk a

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer. Az egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kapott mátrix harmadik sorát osszuk el -3 -al, és cseréljük fel az első és harmadik sort:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -6 & 10 & -14 \end{pmatrix}.$$

Ezután az első sor 6-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz, majd a második sor -1 -szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{rrcr} r_1 & - & r_2 & + & r_3 & = & 0 \\ & & 4r_2 & - & 8r_3 & = & 0 \end{array} \right\}.$$

A második egyenletből $r_2 = 2r_3$ adódik. Legyen $r_3 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = 2t$. Az első egyenletből $r_1 = t$ adódik. Tehát a $\lambda_3 = -2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$S_{\lambda_3} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Egy konkrét sajátvektor, amely a λ_3 sajátértékhez tartozik

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az alrendszer

$$\begin{aligned} \Phi &= (s_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \quad s_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \quad s_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot x}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-2x} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^x & e^{2x} & 2e^{-2x} \\ e^x & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^x & e^{2x} & 2e^{-2x} \\ e^x & 0 & e^{-2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x} \\ 2c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + 2c_3 \cdot e^{-2x} \\ c_1 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{-2x}$$

$$y_2(x) = 2c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + 2c_3 \cdot e^{-2x}$$

$$y_3(x) = c_1 \cdot e^x + c_3 \cdot e^{-2x}.$$

143. Feladat. Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) + e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert és legyen $y_1(0) = \frac{17}{18}$ és $y_2(0) = -\frac{5}{9}$.

- Adjuk meg a differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakját!
- Írják fel a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását!
- Határozzuk meg az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldását!
- Adjuk meg az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Adjuk meg az y_1' és y_2' függvényeket!

Megoldás:

- a) Az egyenletrendszer felírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

alakban. Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

és

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer az

$$y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$$

formában írható fel.

b) Az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 8, \end{aligned}$$

vagyis

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

amelynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2},$$

azaz $\lambda_1 = 5$ és $\lambda_2 = -1$.

A $\lambda_1 = 5$ sajátérték esetén

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

így a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} -2r_1 + 2r_2 &= 0 \\ 4r_1 - 4r_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

vagyis $r_1 = r_2$, így például egy λ_1 -hez tartozó sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A $\lambda_2 = -1$ sajátérték esetén

$$A + E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

így a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} 4r_1 + 2r_2 &= 0 \\ 4r_1 + 2r_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

vagyis $r_2 = -2r_1$, így például egy λ_2 -höz tartozó sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a homogén egyenletrendszer általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{5x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{-x} \cdot s_2,$$

vagyis

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{5x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$y_h(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x} \\ c_1 \cdot e^{5x} - 2c_2 \cdot e^{-x} \end{pmatrix}.$$

- c) Az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg, vagyis egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + c_2(x) \cdot y^{(2)}(x)$$

alakban keressük, ahol

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

és

$$y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Ekkor teljesülnie kell a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{5x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= e^x \\ c_1'(x) \cdot e^{5x} - 2c_2'(x) \cdot e^{-x} &= e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek. Ez egy lineáris egyenletrendszer a $c'_1(x)$ és $c'_2(x)$ ismeretlenekre vonatkozóan. Az egyenletrendszer alapmátrixa

$$M = \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ e^{5x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánsa

$$\det M = -3e^{4x}.$$

Legyen

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}$$

és

$$M_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} & e^x \\ e^{5x} & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\det M_1 = -2 - e^{-2x}$$

és

$$\det M_2 = e^{4x} - e^{6x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c'_1(x) = \frac{\det M_1}{\det M} = \frac{-2 - e^{-2x}}{-3e^{4x}} = \frac{2}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-6x},$$

illetve

$$c'_2(x) = \frac{\det M_2}{\det M} = \frac{e^{4x} - e^{6x}}{-3e^{4x}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Ezekből

$$c_1(x) = \int \frac{2}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-6x} dx = -\frac{1}{6}e^{-4x} - \frac{1}{18}e^{-6x},$$

és

$$c_2(x) = \int -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{2x} dx = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}e^{2x}.$$

Ezeket felhasználva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + c_2(x) \cdot y^{(2)}(x) = \\ &= \left(-\frac{1}{6}e^{-4x} - \frac{1}{18}e^{-6x} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} + \\ &+ \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}e^{2x} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} + \frac{1}{6}e^x \\ -\frac{1}{6}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} - \frac{1}{3}e^x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

d) Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ c_1 \cdot e^{5x} - 2c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e) Mivel $y_1(0) = \frac{17}{18}$, ezért

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Mivel $y_2(0) = -\frac{5}{9}$, ezért

$$c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = -\frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad c_1 - 2c_2 = 0.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két egyenletet kivonva egymásból $c_2 = \frac{1}{3}$ adódik, így $c_1 = \frac{2}{3}$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ \frac{2}{3}e^{5x} - \frac{2}{3} \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} = \\ &= \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{5}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

és

$$y_2(x) = \frac{2}{3}e^{5x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{13}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x}.$$

f) Az y_1 függvény deriváltja

$$y_1'(x) = \frac{10}{3}e^{5x} - \frac{5}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}x \cdot e^{-x}.$$

Az y_2 függvény deriváltja

$$y_2'(x) = \frac{10}{3}e^{5x} - \frac{1}{2}e^x + \frac{13}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}x \cdot e^{-x}.$$

144. Feladat. Legyen $t > 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 3x(t) + 4y(t) \end{aligned} \right\},$$

$x(0) = 1$; $y(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot.

Megoldás:

Ha vesszük az első egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(x) - x(0) = 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y).$$

Mivel $x(0) = 1$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(x) - 1 = 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y).$$

Ha vesszük a második egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(y) - y(0) = 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y).$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y).$$

Tehát az alábbi algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \mathcal{L}(x) - 1 &= 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \\ s \cdot \mathcal{L}(y) &= 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y) \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(y) = (s - 2) \cdot \mathcal{L}(x) - 1.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$(s - 4) \cdot [(s - 2) \cdot \mathcal{L}(x) - 1] = 3\mathcal{L}(x)$$

adódik, amiből

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{(s - 4) \cdot (s - 2) - 3},$$

vagyis

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{s^2 - 6s + 5}.$$

Ezt felhasználva

$$\mathcal{L}(y) = (s - 2) \cdot \frac{s - 4}{s^2 - 6s + 5} - 1 = \frac{s^2 - 6s + 8 - s^2 + 6s - 5}{s^2 - 6s + 5},$$

tehát

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3}{s^2 - 6s + 5}.$$

A kapott törtek nevezőit szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{(s - 1) \cdot (s - 5)}$$

és

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3}{(s - 1) \cdot (s - 5)}.$$

A kapott törteket parciális törtek összegére bontjuk. Az

$$\frac{s - 4}{(s - 1) \cdot (s - 5)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 5}$$

egyenletet a közös nevezővel szorozva és a tagokat fokszám szerint rendezve

$$(A + B) \cdot s - 5A - B = s - 4$$

adódik. A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & B = 1 \\ -5A & - & B = -4 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $A = \frac{3}{4}$, majd az első egyenletből azt, hogy $B = \frac{1}{4}$.

Tehát

$$\mathcal{L}(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-5}.$$

A

$$\frac{3}{(s-1) \cdot (s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5}$$

egyenletet a közös nevezővel szorozva és a tagokat fokszám szerint rendezve

$$(A+B) \cdot s - 5A - B = 3$$

adódik. A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B & = & 0 \\ -5A - B & = & 3 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $A = -\frac{3}{4}$, majd az első egyenletből azt, hogy $B = \frac{3}{4}$.

Tehát

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-5}.$$

Az $\mathcal{L}(x)$ -re és $\mathcal{L}(y)$ -ra kapott eredményt felhasználva a differenciálegyenlet-rendszer megoldására azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-5} \right) = \\ &= \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-5} \right) = \\ &= -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t}. \end{aligned}$$

145. Feladat. Legyen $t > 0$. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) - 5y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) - y(t) \end{array} \right\},$$

$x(0) = -6$; $y(0) = 0$ kezdetiérték-feladatot.

Megoldás:

Ha vesszük az első egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(x) - x(0) = \mathcal{L}(x) - 5\mathcal{L}(y).$$

Mivel $x(0) = -6$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(x) + 6 = \mathcal{L}(x) - 5\mathcal{L}(y).$$

Ha vesszük a második egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(y) - y(0) = 2\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y).$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(y) = 2\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y).$$

Tehát az alábbi algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \mathcal{L}(x) + 6 &= \mathcal{L}(x) - 5\mathcal{L}(y) \\ s \cdot \mathcal{L}(y) &= 2\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) \end{aligned} \right\},$$

vagyis

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}(x) \cdot (s - 1) &= -5\mathcal{L}(y) - 6 \\ \mathcal{L}(y) \cdot (s + 1) &= 2\mathcal{L}(x) \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s + 1} \cdot \mathcal{L}(x).$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$\mathcal{L}(x) \cdot (s - 1) = -5 \cdot \frac{2}{s + 1} \cdot \mathcal{L}(x) - 6$$

adódik, amiből

$$\mathcal{L}(x) \cdot \left(s - 1 + \frac{10}{s + 1} \right) = -6,$$

vagyis

$$\mathcal{L}(x) \cdot \left(\frac{s^2 + 9}{s + 1} \right) = -6,$$

így

$$\mathcal{L}(x) = \frac{-6s}{s^2 + 9} - \frac{6}{s^2 + 9}.$$

Mindkét oldal Laplace-transzformáltját véve azt kapjuk, hogy

$$x(t) = -6 \cos 3t - 2 \sin 3t.$$

Mivel

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s+1} \cdot \mathcal{L}(x) = \frac{-12}{s^2+9},$$

ezért

$$y(t) = -4 \sin 3t.$$

13. Átviteli elv

146. **Feladat.** Írjunk fel olyan differenciálegyenlet-rendszert, amely ekvivalens az

$$y''(x) + \sin(y(x)) = 0$$

másodrendű differenciálegyenlettel!

Megoldás:

Az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -\sin y_1(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszer ekvivalens a megadott másodrendű differenciálegyenlettel.

147. **Feladat.** Írjunk fel olyan differenciálegyenlet-rendszert, amely ekvivalens az

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenlettel!

Megoldás:

Az átviteli elvet alkalmazva, ha a lineáris differenciálegyenlet

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

alakú, akkor átírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

alakúvá, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tehát a másodrendű differenciálegyenlet ekvivalens az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -6y_1(x) + 7y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerrel.

148. **Feladat.** Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet írjuk át két elsőrendű lineáris egyenletet tartalmazó egyenletrendszerre, majd oldjuk meg a kapott differenciálegyenletrendszert!

Megoldás:

Az átviteli elvet alkalmazva, ha a lineáris differenciálegyenlet

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

alakú, akkor átírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

alakúvá, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tehát a keresett egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -6y_1(x) + 7y_2(x) \end{aligned} \right\}.$$

Első lépésben meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az A mátrixot és a másodrendű egység mátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 7 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(-\lambda) \cdot (7 - \lambda) + 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldása

$$\lambda_{1;2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2},$$

vagyis $\lambda_1 = 1$, illetve $\lambda_2 = 6$.

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Először meghatározzuk a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alaplátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_2 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_1 = t$. Tehát a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ehhez tekintsük az

$$A - 6 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ezután a

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-6r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $r_2 = 6t$. Tehát a $\lambda_2 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 6t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Az alaprendszer

$$\begin{aligned}\Psi &= (s_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \quad s_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot e^{6x} \right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{6x} \\ e^x & 6e^{6x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{6x} \\ e^x & 6e^{6x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{6x} \\ c_1 \cdot e^x + 6c_2 \cdot e^{6x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{6x}$$

$$y_2(x) = c_1 \cdot e^x + 6c_2 \cdot e^{6x}.$$

14. Magasabbrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

149. **Feladat.** Egy pontszerű test egyenes pályán mozog a állandó gyorsulással. Tudjuk továbbá, hogy a $t = 0$ időpillanatban a test sebessége $v(0) = v_0$, továbbá a $t = 0$ időpillanatban a megfigyelés helyén van, azaz $s(0) = s_0$.

- Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
- Adjuk meg a hely-idő függvényt!
- Ha a gyorsulás $5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, akkor határozzuk meg a hely-idő és sebesség-idő függvényeket!

Megoldás:

- a) Mivel

$$a(t) = a \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) = a,$$

ezért ez egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int a \, dt = a \cdot t + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ adódik. Mivel $\dot{s}(t) = v(t)$, ezért azt is kaptuk, hogy

$$v(t) = \int a \, dt = a \cdot t + c_1,$$

Mivel $v(0) = v_0$, ezért

$$v_0 = a \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0,$$

így a sebesség-idő függvény

$$v(t) = a \cdot t + v_0.$$

- b) Mivel

$$\dot{s}(t) = a \cdot t + v_0,$$

ezért mindkét oldalt integrálva

$$s(t) = \int a \cdot t + v_0 \, dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol $c_2 \in \mathbb{R}$. Mivel $s(0) = s_0$, ezért

$$s_0 = a \cdot \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = s_0,$$

így azt kaptuk, hogy a hely-idő függvény

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

c) A sebesség-idő függvény

$$v(t) = 5t + v_0,$$

a hely-idő függvény

$$s(t) = 2,5t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

150. Feladat. Egy szabadon eső test hely-idő függvényére (ha a közegellenállástól eltekintünk) felírható az

$$\ddot{s}(t) = -g$$

differenciálegyenlet, ahol g a gravitációs gyorsulás. Oldjuk meg a differenciálegyenletet!

Tegyük fel, hogy $s(0) = s_0$ és $v(0) = v_0$, vagyis a megfigyelés kezdetén az s_0 helyen tartózkodik a test és v_0 kezdősebességgel rendelkezik. Oldjuk meg a kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az

$$\ddot{s}(t) = -g$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = -g \cdot t + c_1,$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ebből újabb integrálással

$$s(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $s(0) = s_0$, ezért $s_0 = c_2$.

Felhasználva, hogy $v(0) = \dot{s}(0) = v_0$ azt kapjuk, hogy $v_0 = c_1$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$s(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

151. Feladat. Egy gépkocsi $54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ sebességről $5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ lassulással egyenletesen fékez. Kiszámoljuk, hogy mekkora a fékút.

Megoldás:

Mivel

$$v(0) = v_0 = 54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

és $a = -5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, ezért az előbbi modell szerint a hely-idő függvény

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t + s_0,$$

míg sebesség-idő függvény

$$v(t) = -5t + v_0 = -5t + 15.$$

Keressük azt az időpillanatot, amikor a gépkocsi megáll, vagyis azt a t értéket, melyre $v(t) = 0$, így a

$$0 = 15 - 5t$$

egyenletet kell megoldanunk, amelyre azt kapjuk, hogy $t = 3$.

Ha feltesszük, hogy $s_0 = 0$, akkor a mozgás hely-idő függvénye

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t,$$

így

$$s(3) = -2,5 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 22,5 \text{ [m]},$$

vagyis a fékút $22,5 \text{ [m]}$.

152. Feladat. Egy fegyverkísérlet során egy légvédelmi ágyúval egy 45 méter magas dombról tüzelünk függőlegesen felfelé. A lövedék kezdősebessége $40 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ nagyságú. A légellenállást elhanyagoljuk. Az egyszerűség kedvéért számoljunk most $g = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ értékkel!

- Adjuk meg a lövedék földtől való távolságát leíró függvényt!
- Milyen magasan lesz a lövedék két másodperccel a kilövés után?
- Milyen magasra repül fel a lövedék?
- Mennyi idő telik el, amíg földet ér a lövedék?

Megoldás:

a) A lövedék mozgásegyenlete az alábbi:

$$-m \cdot g = m \cdot a(t).$$

Ez az elméleti összefoglalóban szereplő (1) típusú kezdetiérték probléma. A fenti egyenletből $m \neq 0$ miatt azt kapjuk, hogy

$$a(t) = -g.$$

A sebesség-idő függvény:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(\tau) d\tau = v(0) + \int_0^t -g d\tau = v(0) - g \cdot t.$$

A hely-idő függvény:

$$h(t) = h(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau = h(0) + v(0) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a lövedék t másodperccel a fellövés után

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v(0) \cdot t + h(0) = -5t^2 + 40t + 45$$

méter magasságban lesz.

b) A lövedék magassága két másodperccel a fellövés után

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105 \text{ [m]}.$$

c) A lövedék abban az időpillanatban éri el a maximális magasságot, amikor $h'(t) = 0$, azaz

$$-10t + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4,$$

így 4 másodperccel a fellövés után éri el a maximális magasságot. Ekkor a magassága

$$h(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 + 45 = 125 \text{ [m]}.$$

d) A lövedék akkor ér földet, amikor

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 8t - 9 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

adódik, így a fellövés után 9 másodperccel ér földet a lövedék.

153. **Feladat.** Függetlenül felfelé kilövünk egy nyílpuskából egy nyílvesszőt. Legyen a nyílvessző kezdősebessége $v_0 = 49 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Határozzuk meg, hogy a kilövés után mennyi idő múlva tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére, ha a közegellenállástól eltekintünk!

Megoldás:

A függetlenül kilőtt nyílvessző hely-idő függvényére felírható a

$$\ddot{h}(t) = -g$$

közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = -g \cdot t + c_1.$$

Ismét integrálva mindkét oldalt

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ha feltesszük, hogy $h(0) = 0$ és $\dot{h}(0) = v_0$, akkor

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = -4,9t^2 + 49t.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor $h(t) = 0$, így a

$$-4,9t^2 + 49t = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A bal oldalt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$4,9t \cdot (-t + 10) = 0,$$

amiből az egyenlet megoldásaira $t_1 = 0$, illetve $t_2 = 10$ adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kilövés után 10 másodperccel tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére.

154. **Feladat.** Adjuk meg az m tömegű, a vízszintessel α szöget bezáró lejtőre helyezett test hely-idő függvényére vonatkozó differenciálegyenletet, ha a súrlódási együttható $\mu = 0$, vagyis a súrlódástól eltekintünk! Oldjuk is meg a differenciálegyenletet, vagyis adjuk meg a hely-idő függvényt!

Megoldás:

Newton II. törvénye szerint egy test gyorsulása azonos irányú a rá ható erők

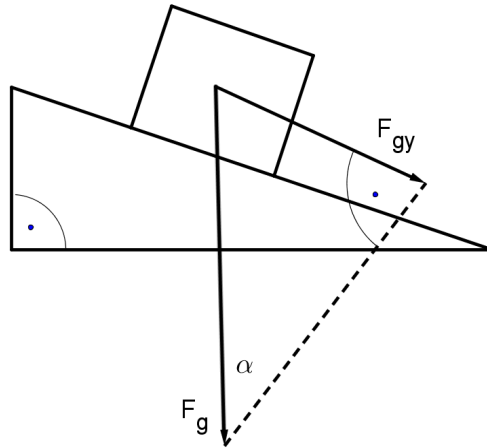
F eredőjével, míg nagysága egyenesen arányos az eredő erő nagyságával és fordítottan arányos a test tömegével, így

$$m \cdot a(t) = F \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{F}{m}.$$

Mivel a test gyorsulása adott t időpillanatban megegyezik a test kitérés-idő függvényének második deriváltjával a t időpillanatban, így

$$\ddot{s}(t) = \frac{F}{m}.$$

Már csak azt kell tudnunk, hogy milyen erők hatnak erre az m tömegű testre. Először tekintsük azt az esetet, amikor a test és a lejtő között fellépő súrlódástól eltekintünk, azaz a μ súrlódási együttható értéke 0.



Ekkor a testre ható F_{gy} gyorsító erőt az

$$F_{gy} = F_g \cdot \sin \alpha$$

összefüggéssel számolhatjuk ki, ahol F_g a nehézségi erő. Mivel $F_g = m \cdot g$, ezért a test kitérés-idő függvényét leíró differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy}}{m} = \frac{F_g \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha,$$

tehát

$$\ddot{s}(t) = g \cdot \sin \alpha,$$

amely egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = g \cdot t \cdot \sin \alpha + c_1.$$

Ismét integrálva

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin \alpha + c_1 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ha feltesszük, hogy $s(0) = s_0$ és $\dot{s}(0) = v_0$, akkor

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot t + s_0.$$

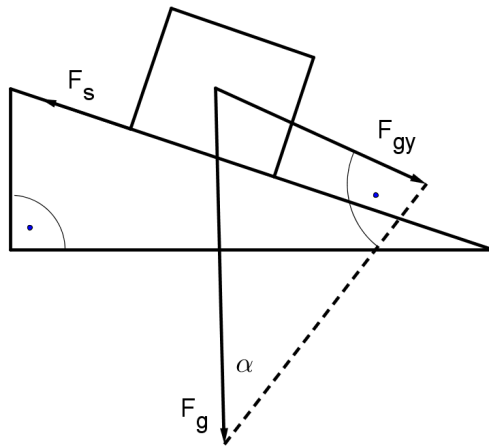
155. Feladat. Adjuk meg az m tömegű, a vízszintessel α szöget bezáró lejtőre helyezett test hely-idő függvényére vonatkozó differenciálegyenletet, ha a súrlódási együttható $\mu > 0$, vagyis a súrlódástól nem tekintünk el! Oldjuk is meg a differenciálegyenletet, vagyis adjuk meg a hely-idő függvényt!

Megoldás:

Ekkor a testre ható eredő erőt az F_{gy} gyorsulási erő és az F_s súrlódási erő különbsége adja, ahol

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Tekintsük az alábbi ábrát:



Tehát a hely-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy} - F_s}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha}{m},$$

tehát

$$\ddot{s}(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha).$$

Ez az egyenlet is egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) dt = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1$$

adódik. Ismét mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1 dt = \\ &= g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ha $s(0) = s_0$ és $\dot{s}(0) = v_0$, akkor a hely-idő függvény

$$s(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0.$$

A két eset megoldását összehasonlítva észrevehetjük azt, hogy a test valóban gyorsabban fog leérni a lejtőaljára abba az esetben, ha a súrlódási együttható értékét nullának tekintjük.

156. Feladat. Egy $\alpha = 30^\circ$ -os lejtőn $v_0 = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ kezdősebességgel elindul egy test. Tudjuk, hogy $s_0 = 50 \text{ [m]}$. Tegyük fel, hogy $\mu = 0$.

- Írjuk fel a hely-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg a differenciálegyenletet!
- Ábrázoljuk a hely-idő függvényt!

Megoldás:

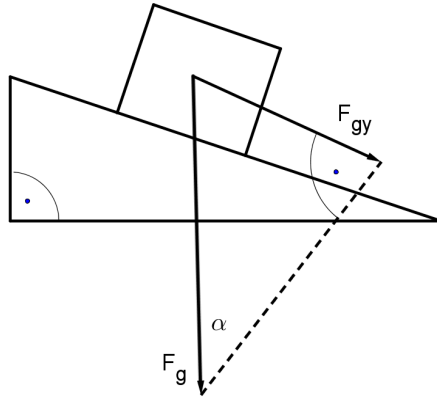
- Newton II. törvénye szerint egy test gyorsulása azonos irányú a rá ható erők F eredőjével, míg nagysága egyenesen arányos az eredő erő nagyságával és fordítottan arányos a test tömegével, így

$$m \cdot a(t) = F \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{F}{m}.$$

Mivel a test gyorsulása adott t időpillanatban megegyezik a test kitérés-idő függvényének második deriváltjával a t időpillanatban, így

$$\ddot{s}(t) = \frac{F}{m}.$$

Már csak azt kell tudnunk, hogy milyen erők hatnak erre az m tömegű testre. Először tekintsük azt az esetet, amikor a test és a lejtő között fellépő súrlódástól eltekintünk, azaz a μ súrlódási együttható értéke 0.



Ekkor a testre ható F_{gy} gyorsító erőt az

$$F_{gy} = F_g \cdot \sin \alpha$$

összefüggéssel számolhatjuk ki, ahol F_g a nehézségi erő. Mivel $F_g = m \cdot g$, ezért a test kitérés-idő függvényét leíró differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy}}{m} = \frac{F_g \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha,$$

vagyis

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{2} \cdot g,$$

amely egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = \frac{g}{2} \cdot t + c_1.$$

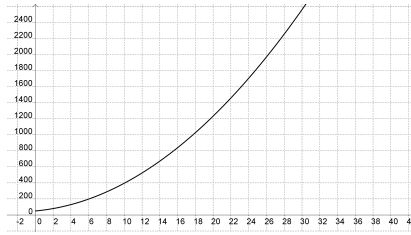
Ismét integrálva

$$s(t) = \frac{g}{4} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ha feltesszük, hogy $s(0) = 50$ és $\dot{s}(0) = 10$, akkor

$$s(t) = 2,4525t^2 + 10t + 50 \text{ [m]}.$$

b) A hely-idő függvény grafikonja:



157. **Feladat.** Egy $\alpha = 30^\circ$ -os lejtőn $v_0 = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ kezdősebességgel elindul egy test. Tudjuk, hogy $s_0 = 50 \text{ [m]}$. Tegyük fel, hogy a súrlódási együttható értéke $\mu = 0,5$.

- Írjuk fel a hely-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg a differenciálegyenletet!
- Ábrázoljuk a hely-idő függvényt!

Megoldás:

- Newton II. törvénye szerint egy test gyorsulása azonos irányú a rá ható erők F eredőjével, míg nagysága egyenesen arányos az eredő erő nagyságával és fordítottan arányos a test tömegével, így

$$m \cdot a(t) = F \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{F}{m}.$$

Mivel a test gyorsulása adott t időpillanatban megegyezik a test kitérés-idő függvényének második deriváltjával a t időpillanatban, így

$$\ddot{s}(t) = \frac{F}{m}.$$

Már csak azt kell tudnunk, hogy milyen erők hatnak erre az m tömegű testre. A testre ható eredő erőt az F_{gy} gyorsulási erő és az F_s súrlódási erő különbsége adja, ahol

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Tehát a hely-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy} - F_s}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha}{m},$$

tehát

$$\ddot{s}(t) = g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Ez az egyenlet is egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) dt = g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot t + c_1$$

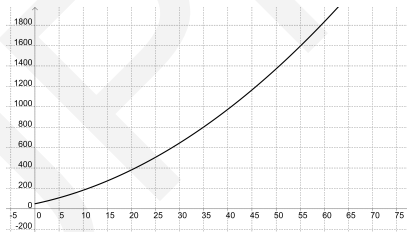
adódik. Ismét mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot t + c_1 dt = \\ &= g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mivel $s(0) = 50$ és $\dot{s}(0) = 10$, ezért a hely-idő függvény

$$s(t) = 0,3286t^2 + 10t + 50.$$

b) A hely-idő függvény grafikonja:



158. Feladat. Amikor a hajótestet vízre bocsátják, a hajótest egy lejtőn csúszik a vízbe. A rögzítő kötelek elvágásától számítva mennyi idő alatt ér a vízbe a hajó, ha a lejtő hossza $l = 50$ [m], a lejtő hajlásszöge $\alpha = 25^\circ$ és a súrlódási együttható értéke $\mu = 0,4$?

Megoldás:

A 155 feladatban megkaptuk, hogy a hely-idő függvényre felírható az

$$\ddot{s}(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$$

differenciálegyenlet. Ez az egyenlet egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) dt = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1$$

adódik. Ismét mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1 dt = \\ &= g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2, \end{aligned}$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ha $s(0) = s_0$ és $\dot{s}(0) = v_0$, akkor a hely-idő függvény

$$s(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0.$$

Mivel most $s(0) = s_0 = 0$ és $v(0) = v_0 = 0$, ezért

$$s(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Ha $s = 50$, $\alpha = 25^\circ$ és $\mu = 0,4$, akkor

$$50 = 9,81 \cdot (\sin 25^\circ - 0,4 \cdot \cos 25^\circ) \cdot \frac{t^2}{2},$$

amiből azt kapjuk, hogy $t = 11,5$ [s]. Tehát 11,5 másodperc alatt csúszik a vízba a hajótest.

159. Feladat. Egy rugóra akasztott test 5,8 [cm]-rel nyújtja meg a rugót. A testet az eredeti helyzetéhez képest 18 [cm]-rel kitérítjük, majd elengedjük, ezáltal rezgésbe hozva a rendszert. Tegyük fel, hogy $v(0) = -13 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

- Írjuk fel a kitérés-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- Adjuk meg a kitérés-idő függvényt!
- Ábrázoljuk a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

- A differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0,$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Mivel

$$m \cdot g = D \cdot \Delta l,$$

ezért

$$\frac{D}{m} = \frac{g}{\Delta l} = \frac{9,81}{0,058} \approx 169,$$

így $\omega = 13$. Tehát a rezgés differenciálegyenlete

$$\ddot{x}(t) + 169x(t) = 0.$$

b) A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 169 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 13i.$$

Ezt felhasználva a kitérés-idő függvény

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(13t) + c_2 \cdot \sin(13t),$$

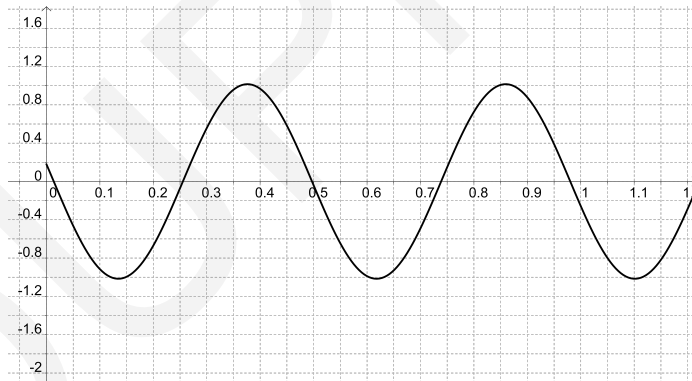
ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ennek a deriváltja

$$\dot{x}(t) = -13c_1 \cdot \sin(13t) + 13c_2 \cdot \cos(13t).$$

Mivel $x(0) = 0,18$, ezért $c_1 = 0,18$. Felhasználva, hogy $\dot{x}(0) = -13$ azt kapjuk, hogy $c_2 = -1$. Tehát a kitérés-idő függvény

$$x(t) = 0,18 \cos(13t) - \sin(13t).$$

c) A kitérés-idő függvény grafikonja:



160. Feladat. Egy $D = 10 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ rugóállandóval rendelkező rugó végén $m = 10 \text{ [kg]}$ tömegű test van, amelynek kitérése a $t = 0$ időpillanatban $s_0 = 0,5 \text{ [m]}$, sebessége $v_0 = 5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

- Írjuk fel a kitérés-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- Adjuk meg a kitérés-idő függvényt!
- Ábrázoljuk a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

a) A differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0,$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Mivel $D = 10$ és $m = 10$, ezért $\omega = 1$. Tehát a rezgés differenciálegyenlete

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0.$$

b) A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Ezt felhasználva a kitérés-idő függvény

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t),$$

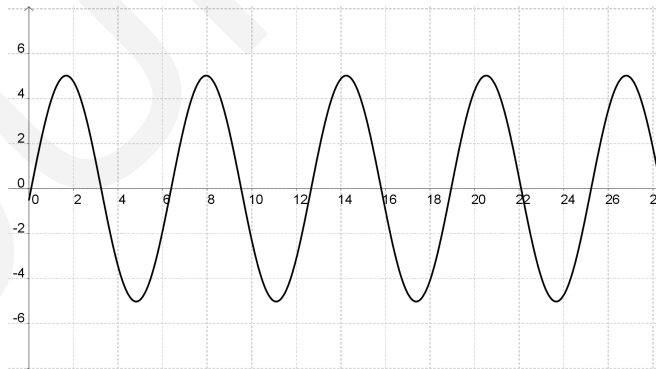
ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ennek a deriváltja

$$\dot{x}(t) = -c_1 \cdot \sin(t) + c_2 \cdot \cos(t).$$

Mivel $x(0) = 0,5$, ezért $c_1 = 0,5$. Felhasználva, hogy $\dot{x}(0) = 5$ azt kapjuk, hogy $c_2 = 5$. Tehát a kitérés-idő függvény

$$x(t) = 0,5 \cos(t) - 5 \sin(t).$$

c) A kitérés-idő függvény grafikonja:



161. Feladat. Egy $D = 10 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ rugóállandóval rendelkező rugó végére egy $m = 10 [\text{kg}]$ tömegű testet akasztunk. A testet meglökjük $v_0 = 0,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ sebességgel.

- a) Írjuk fel a kitérés-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- b) Adjuk meg a kitérés-idő függvényt!
- c) Adjuk meg a körfrekvenciát!
- d) Határozzuk meg az amplitúdót!
- e) Határozzuk meg a periódusidőt!
- f) Ábrázoljuk a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

- a) A differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0,$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Mivel $D = 10$ és $m = 0,1$, ezért

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{100} = 10.$$

Tehát a rezgés differenciálegyenlete

$$\ddot{x}(t) + 100x(t) = 0.$$

- b) A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 10i.$$

Ezt felhasználva a kitérés-idő függvény

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(10t) + c_2 \cdot \sin(10t),$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ennek a deriváltja

$$\dot{x}(t) = -10c_1 \cdot \sin(10t) + 10c_2 \cdot \cos(10t).$$

Mivel $x(0) = 0$, ezért $c_1 = 0$. Felhasználva, hogy $\dot{x}(0) = 0,5$ azt kapjuk, hogy $c_2 = 0,5$. Tehát a kitérés-idő függvény

$$x(t) = 0,5 \sin(10t).$$

- c) A körfrekvencia

$$\omega = 10 \left[\frac{1}{s} \right].$$

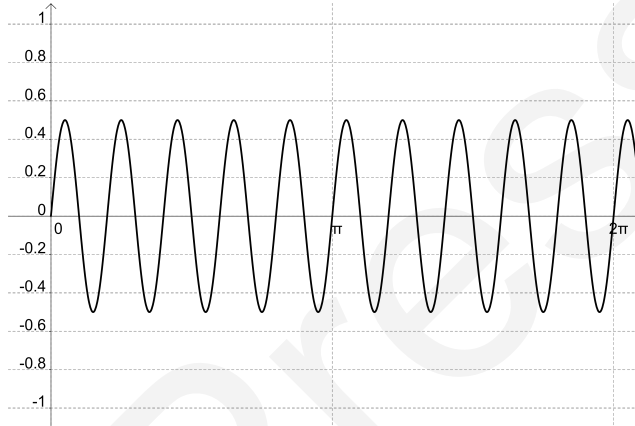
d) Az amplitúdó

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 0,5 \text{ [m]}.$$

e) A periódusidő

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ [s]}.$$

f) A kitérés-idő függvény grafikonja:



162. Feladat. Egy m tömegű testet D rugóállandójú rugóra függesztünk. A rugót megnyújtjuk 10 [cm] -rel, majd elengedjük. Tekintsük azt a rezgést, amikor $m = 0,5 \text{ [kg]}$ és $D = 50 \text{ [N/m]}$. Adjuk meg és ábrázoljuk a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

Az

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

differenciálegyenletben

$$\omega = \sqrt{\frac{50}{0,5}} \left[\frac{1}{\text{s}} \right] = 10 \left[\frac{1}{\text{s}} \right],$$

így az

$$\ddot{x}(t) + 100x(t) = 0$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 10i,$$

így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(10t) + c_2 \cdot \sin(10t).$$

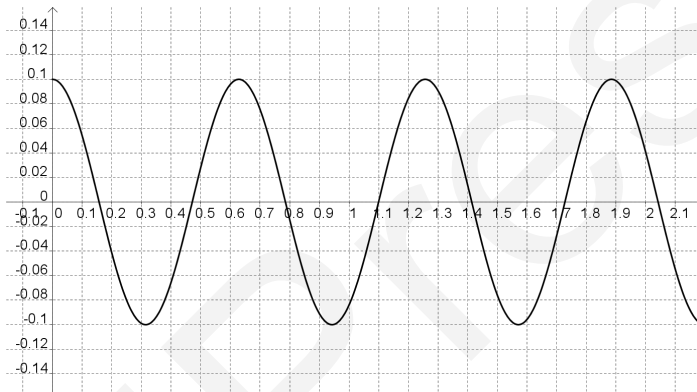
Ekkor

$$\dot{x}(t) = -10c_1 \cdot \sin(10t) + 10c_2 \cdot \cos(10t).$$

Felhasználva, hogy $x(0) = 0, 1$ azt kapjuk, hogy $0, 1 = c_1$. Mivel $\dot{x}(0) = 0$, ezért $0 = c_2$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$x(t) = 0, 1 \cos(10t).$$

A függvény grafikonja:



163. Feladat. Egy gépkocsi futóművét egy próbapadon vizsgálják. A vizsgálat során a futóművet függőleges irányú lengésbe hozzák. A lengetés megszűntével a futómű csillapódó lengőmozgást végez, mozgásegyenlete

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0.$$

Legyen $x(0) = -0,06$ [m], illetve $v(0) = 0$ [$\frac{\text{m}}{\text{s}}$]. Legyen $m = 400$ [kg] az üres gépkocsi rugózott felépítményének egy kerékre eső tömege, $k = 800$ [$\frac{\text{N}}{\text{m}}$] a lengéscsillapító csillapítási tényezője, $D = 2000$ [$\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$] a rugóállandó.

- Írjuk fel a kitérés-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet!
- Oljduk meg a differenciálegyenletet és az arra vonatkozó kezdetiérték feladatot!
- Ábrázoljuk a kitérést az idő függvényében!

Megoldás:

a) Az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0$$

egyenlet mindkét oldalát m -el osztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0,$$

vagyis

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0,$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{5}$$

és

$$\frac{k}{2m} = \frac{800}{800} = 1.$$

Tehát a differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5 \cdot x(t) = 0.$$

b) A differenciálegyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Mivel az egyenlet gyökei komplex számok, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi alakban áll elő:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t),$$

ahol α , illetve β a másodfokú egyenlet valamely komplex gyökének valós, illetve képzetes része. Behelyettesítve az α és β értékeket azt kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

Az $x(t)$ függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) - 2c_1 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) - \\ &\quad - c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t). \end{aligned}$$

Mivel $x(0) = -0,06$ és $\dot{x}(0) = 0$, ezért

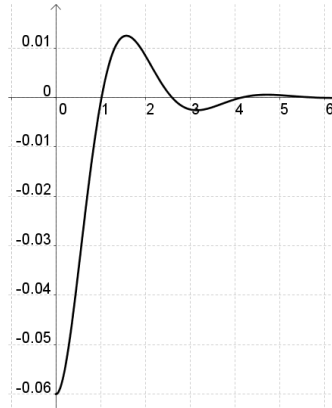
$$-0,06 = c_1$$

$$0 = -c_1 + 2c_2.$$

Az egyenletrendszer megoldásával $c_2 \approx -0,03$ adódik. A kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = -0,06 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) - 0,03 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

c) A kitérés-idő függvény grafikonja:



164. Feladat. Egy 1 [kg] tömegű test $D = 5 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ rugóállandójú rugóra van rögzítve. A rendszer csillapítási tényezője $k = 2 \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right]$. Tegyük fel, hogy $x(0) = 52 \text{ [m]}$ és $v(0) = -39 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. A rendszert gerjesztő erő legyen

$$F(t) = 10 \cos t.$$

Írjuk fel a kitérés-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenletet, majd oldjuk meg a differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladatot és ábrázoljuk a kitérés-idő függvényt!

Megoldás:

Ekkor

$$\kappa = \frac{k}{2m} = 1$$

és

$$\omega^2 = \frac{D}{m} = 5.$$

A megoldandó differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 10 \cos t.$$

A megfelelő homogén egyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 0.$$

Ennek a karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Legyen $\alpha = -1$ és $\beta = 2$. A homogén egyenlet általános megoldása

$$x_h(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$x_p(t) = A \cdot \cos t + B \cdot \sin t$$

alakban keressük. Ekkor

$$\dot{x}_p(t) = -A \cdot \sin t + B \cdot \cos t$$

és

$$\ddot{x}_p(t) = -A \cdot \cos t - B \cdot \sin t.$$

Ezeket behelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\sin t \cdot (-B - 2A + 5B) + \cos t \cdot (-A + 2B + 5A) = 10 \cos t,$$

vagyis

$$\sin t \cdot (-2A + 4B) + \cos t \cdot (4A + 2B) = 10 \cos t.$$

Tehát teljesül az

$$\left. \begin{array}{rcl} -2A & + & 4B = 0 \\ 4A & + & 2B = 10 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = 2B$, amit a második egyenletbe behelyettesítve $B = 1$ adódik, így $A = 2$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$x_p(t) = 2 \cos t + \sin t.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2 \cos t + \sin t$$

vagy másképp

$$x(t) = e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t)) + 2 \cos t + \sin t.$$

Az $x(t)$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = & -e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t)) + \\ & + e^{-t} \cdot (-2c_1 \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot \cos(2t)) - 2 \sin t + \cos t.\end{aligned}$$

Mivel $x(0) = 52$, ezért

$$c_1 + 2 = 52 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 50.$$

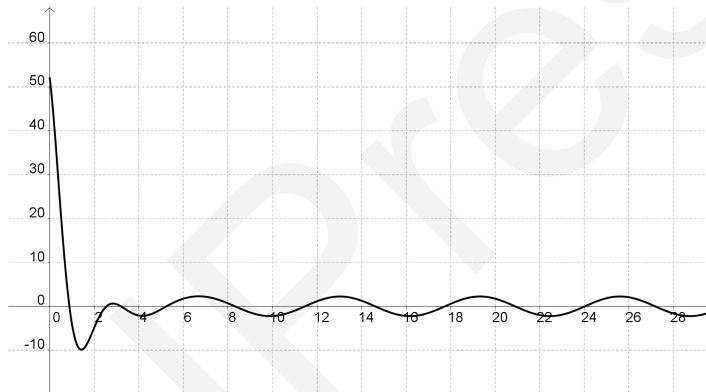
Mivel $v(0) = \dot{x}(0) = -39$, ezért

$$-c_1 + 2c_2 + 1 = -39.$$

Ezen egyenletekből $c_2 = 5$ és $c_1 = 50$ adódik, így a kitérés-idő függvény

$$x(t) = e^{-t} \cdot (50 \cos(2t) + 5 \sin(2t)) + 2 \cos t + \sin t,$$

melynek grafikonja:



Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Csank Lajos – Nagy Attila – Szép Gabriella – Zibolen Bence, *Matematika feladatgyűjtemény III.*, Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [2] Bajcsay Pál – Frey Tamás, *Közönséges differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, 1962.
- [3] Bajcsay Pál, *Matematika III.*, Műegyetemi Kiadó, 1996.
- [4] Bajcsay Pál – Frey Tamás, *Közönséges differenciálegyenletek (második rész)*, Tankönyvkiadó, 1966.
- [5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [6] C. Henry Edwards, David E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 2008.
- [7] Farkas Miklósné, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.
- [9] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [10] Keszei Ernő, *A reakciókinetika alapjai*, ELTE, Budapest, 2015.
- [11] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [12] Kovács Márton, *Reakciókinetika feladatgyűjtemény*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [13] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [14] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [15] Lökös Sándor, *Differenciálegyenletek környezettan alapszakos hallgatóknak*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [16] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [17] Ósz Katalin, *Fizikai kémia II. példatár*, elektronikus jegyzet, <http://web.unideb.hu/uh9v32/peldatar.html>, 2019.
- [18] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [19] K. K. Ponomarjov, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, 1969.
- [20] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [21] Rujp Veronika, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása fizikai példákon keresztül*, ELTE, szakdolgozat, 2013.
- [22] Scharnitzky Viktor, *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, 2001.
- [23] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [24] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [25] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
- [26] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.
- [27] Tóth János – Simon L. Péter – Csikja Rudolf, *Differenciálegyenletek feladatgyűjtemény*, TypoTex, 2011.
- [28] Turányi Tamás, *Fizikai kémiai előadások (reakciókinetika)*, ELTE, Kémiai Intézet, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	4
2. Közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenletek	22
3. Az $y''(x) = f(x; y'(x))$ alakú differenciálegyenletek	46
4. Az $y''(x) = f(y(x); y'(x))$ alakú differenciálegyenletek	66
5. Másodrendű lineáris konstans együtthatós homogén diff. egyenletek	72
6. Másodr. lin. konstansh. inhom. diff. egyenletek megoldása konstansvariálással	92
7. Másodr. lin. konstansh. inhom. diff. egyenletek megoldása próbafüggvénnyel	116
8. Másodr. lin. konstansh. inhom. diff. egyenletek megoldása Laplace-transzformációval	137
9. Cauchy-Euler differenciálegyenlet	155
10. Függvényh. másodrendű lineáris differenciálegyenletek	168
11. Harmadr. és magasabbrendű lin. konstansh. diff. egyenletek megoldása	178
12. Differenciálegyenlet-rendszerek	217
13. Átviteli elv	254
14. Magasabbrendű differenciálegyenletek alkalmazásai	259

