

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

# Függvényegyenletek és alkalmazásaik

Glavosits Tamás

Témavezetők: Dr. Lajkó Károly, egyetemi docens

Dr. Száz Árpád, egyetemi docens



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2018.

## Bevezetés

A disszertáció témája rendezett algebrai struktúrák, illetve ezek rész-halmazain értelmezett függvények és relációk vizsgálata. A dolgozat két részből áll. Az első rész az **1.-9.** fejezeteket foglalja magába és függvényegyenletek megoldásával foglalkozik. Kissé részletesebben: legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $\mathbb{T}^a$  egy archimedeszien rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. Jelölje  $\mathbb{T}_+$ , illetve  $\mathbb{T}_+^a$  a rendezett test, illetve az archimedeszien rendezett test pozitív elemeinek a halmazát. Az első rész legfontosabb függvényegyenletei:

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x), \quad (0.1)$$

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x), \quad (0.2)$$

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right), \quad (0.3)$$

$$F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right), \quad (0.4)$$

ahol a  $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f, \gamma, F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények. A függvényegyenletek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén teljesülnek. (A (0.4) egyenletet **Olkin-Baker függvényegyenlet**nek nevezik.)

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y), \quad (0.5)$$

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y), \quad (0.6)$$

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y), \quad (0.7)$$

$$g_\lambda(\mu xy + x) + g_\mu(xy + y) = g_\mu(\lambda xy + y) + g_\lambda(xy + x), \quad (0.8)$$

$$g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(2xy + y) + g_2(xy + y). \quad (0.9)$$

A (0.5) és (0.6) egyenletekben a  $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények. A (0.7) egyenletben a  $P, Q, R : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények, az  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{T}_+^a$  olyan rögzített paraméterek, melyekre  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . A (0.8) egyenletben a  $g_\lambda, g_\mu : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények, a  $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$  tetszőlegesen rögzített

paraméterek. A (0.9) egyenletben  $g_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  az ismeretlen függvény. A függvényegyenletek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+^a$  esetén teljesülnek.

$$G_1(xy + x) + F_1(y) = G_2(x + y) + F_2(xy) \quad (0.10)$$

A (0.10) egyenletben a  $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények. A függvényegyenlet tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+^a$  esetén teljesül. (A (0.10) egyenlet az úgynevezett **Davison egyenlet**.)

$$\gamma(x(y + 1)) + \gamma(y(x + 1)) = \gamma(x(x + 1)) + \gamma(y(y + 1)), \quad (0.11)$$

$$\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \gamma(x + y) = \gamma\left(\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y} + 1\right)\right) + \gamma\left(\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right), \quad (0.12)$$

$$\gamma(x + y) + \gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \gamma\left((x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) + \gamma(1), \quad (0.13)$$

$$\gamma_\lambda(x + y) = \gamma_\lambda\left(\frac{4xy}{x + y}\right), \quad (0.14)$$

$$f(x + y) = g(xy), \quad (0.15)$$

ahol  $\gamma, \gamma_\lambda, f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  az ismeretlen függvények. A (0.15) egyenletben  $Y$  egy tetszőleges nemüres halmaz. A függvényegyenletek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén teljesülnek.

Az első rész két központi egyenlete a (0.1) és a (0.5) függvényegyenlet, melyek valószínűség-elméleti háttérű egyenletek.

Az első fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.1) egyenlet visszavezethető a (0.2) és a (0.3) egyenletekre, a (0.5) egyenlet a (0.6) és a (0.11) egyenletekre.

A második fejezetben megmutatjuk, hogy a (0.3) és a (0.11) függvényegyenletek folytonos megoldásai meghatározhatóak Gauss-iteráció segítségével ([15] OTDK dolgozat Miskolc 2003 **Daróczy Zoltán** professzor témavezetésével).

A harmadik fejezetben megadjuk a (0.2) egyenlet megoldását.

A negyedik fejezetben megadjuk a (0.15) egyenlet megoldását különböző alaphalmazon értelmezett ismeretlen függvények esetén.

A (0.15) egyenletet a (0.11) egyenlet és a Davison egyenlet (0.15) megoldása során alkalmazzuk.

Az ötödik fejezetben általánosítjuk **Daróczy Zoltán, Lajkó Károly, Székelyhidi László** egy tételét [09]. A tétel alkalmazásaként megadjuk a (0.4) egyenlet általános megoldását  $\mathbb{T}_+$ -n, az általános megoldás  $\mathbb{R}_+$ -on Olkin-Baker egyenlet néven ismert ([34], [03], [32]).

A hatodik fejezetben megadjuk a (0.3) és a (0.11) egyenletek megoldását. A (0.3) egyenlet megoldása közös munka Lajkó Károllyal [17], az egyenletet a (0.4) egyenletre (Olkin-Baker egyenlet) vezetjük vissza. A (0.11) egyenlet megoldása során a (0.11)  $\Leftarrow$  (0.12)  $\Leftarrow$  (0.13)  $\Leftarrow$  (0.14)  $\Leftarrow$  (0.15) gondolatmenetet követjük. A (0.11) egyenlet Pexider változatának megoldása közös eredmény **Lajkó Károllyal** [18].

A hetedik fejezet első részében megadjuk a Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az additivitás a  $\mathbb{T}_+^2$  egy részkúpján teljesül, ahol  $\mathbb{T}$  egy archimedeszien rendezett test. A kapott eredményt a (0.7) egyenlet megoldása során alkalmazzuk. A fejezet második részében általánosítjuk **Rimán János** [35] kiterjesztési tételét arra az esetre, amikor a valós számok testének szerepét egy archimedeszien rendezett sűrű Abel-csoport veszi át.

A nyolcadik fejezet első részében a (0.6) egyenlet megoldását ismertetjük. A (0.6) egyenletet a (0.9) egyenletre vezetjük vissza az alábbi módon: (0.6)  $\Leftarrow$  (0.8)  $\Leftarrow$  (0.9). Az egyenletek megoldása során a Dróczy-Lajkó-Székelyhidi tételt és a (0.7) egyenletet egyaránt alkalmazzuk. A fejezet második részében megmutatjuk, hogy a **Davison**-egyenlet visszavezethető az (0.6) egyenletre.

A kilencedik fejezetben, a korábbi fejezetek eredményeire támaszkodva megadjuk a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek megoldását. Mindkét egyenlet megoldása (valós-valós környezetben) megtalálható az [16] OTDK dolgozatomban (2005. Budapest, **Lajkó Károly** témavezetésével). A (0.1) egyenlet megoldása (általános esetben) közös munka **Lajkó Károllyal** [17].

A disszertáció második része a **10.-13.** fejezetekből áll, témája a lezárások tulajdonságainak vizsgálata, illetve a kapott összefüggések különféle alkalmazásainak bemutatása.

A tizedik fejezet fő eredménye két - kommutativitással kapcsolatos - eredmény (közös munka **Pataki Gergellyel**). Alkalmazásaként megadjuk egy rendezett  $\mathbb{T}$  test feletti  $X$  vektortér bizonyos konvex operátorai, nevezetesen a lineáris, affin, konvex, kúp és konvexkúp lezárások által generált félcsoport Caley-táblázatát, ahol a félcsoport-művelet a kompozícióképzés.

A tizenegyedik fejezet a tizedik fejezet fogalomalkotása által motivált síkgeometriai probléma megoldását tartalmazza (közös munka **Wolfgang Förg Robbal**).

A tizenkettedik fejezet legfontosabb eredménye, hogy ha  $X$  egy csoport,  $A \subset X$  tökéletesen cancellatív, akkor minden  $B \subset A$  additív és antiszimmetrikus halmaz belefoglalható egy olyan  $D \subset A$  additív antiszimmetrikus részhalmazba, amelyre  $A \subset D \cup (-D)$ . (Közös munka **Száz Árpáddal** [20]).

A tizenharmadik fejezetben kritériumot adunk arra nézve, hogy ha  $X, Y$  csoportok,  $R \subset X \times Y$  egy reláció, akkor  $R$ -nek milyen feltételek mellett létezik páratlan szelekciófüggvénye (közös eredmény **Száz Árpáddal** [19]).

# 1. Függvényegyenletek dekompozíciója

Az alábbi tétel megtalálható a [16] OTDK dolgozatban és a [17] cikkben.

**1.2. Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** *Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) függvények akkor és csak akkor megoldásai a*

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (0.1)$$

függvényegyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

minden  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén, ahol a  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvények megoldásai a

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (0.2)$$

függvényegyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, a  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvény megoldása a

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

függvényegyenleteknek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén.

**1.3. Tétel.** *Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) függvények akkor és csak akkor megoldásai a*

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (0.5)$$

függvényegyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

minden  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén, ahol a  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvények megoldásai a

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (0.6)$$

függvényegyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, a  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvény megoldása a

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (0.11)$$

függvényegyenleteknek minden  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén.

## 2. Függvényegyenletek és a Gauss-iteráció

A fejezetben ismertetett eredmények egy része megtalálható a 2005-ben Miskolcon előadott OTDK dolgozatomban (**Daróczy Zoltán** témavezetésével [15]). Megmutatom, hogy a (0.11) és a (0.3) függvényegyenletek folytonos megoldásai  $\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+$ ,  $Y = \mathbb{R}$  esetben meghatározhatóak Gauss-iteráció segítségével. Így a 6. fejezet alapján újabb pozitív példát kaptunk közepeket, illetve azok Gauss-kompozícióját tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciájára.

**2.6. Tétel.** *Definiáljuk az  $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  közepeket*

$$M_1(x, y) \doteq \frac{(\sqrt{4x+1} - 1)(\sqrt{4y+1} + 1)}{4}, \quad (x, y \in \mathbb{R}_+).$$

$$M_2(x, y) \doteq M_1(y, x),$$

módon. Tekintsük a

1.  $\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y))$ ,
2.  $\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y))$ ,

függvényegyenleteket a  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ismeretlen függvénnyel, ahol a függvényegyenletek minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén teljesülnek. Ekkor, mivel az **1.** függvényegyenlet általános megoldása

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol  $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  egy logaritmikus függvény,  $c \in \mathbb{R}$  egy konstans, továbbá

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

így az **1.** és **2.** függvényegyenletek ekvivalensek.

**2.8. Tétel** Definiáljuk az  $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  közepeket

$$M_1(x, y) \doteq \frac{xy + y}{y + 1} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

$$M_2(x, y) \doteq M_1(y, x)$$

módon. Tekintsük a

$$1. \quad \gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)),$$

$$2. \quad \gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y)),$$

függvényegyenleteket a  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ismeretlen függvénnyel, ahol a függvényegyenletek minden  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén teljesülnek. Ekkor, mivel az **1.** függvényegyenlet általános megoldása

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

ahol  $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  egy logaritmikus függvény,  $c \in \mathbb{R}$  egy konstans, továbbá

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

így az **1.** és **2.** függvényegyenletek ekvivalensek.

### 3. A (0.2) $(g(\frac{x+1}{y}) + f(y) = g(\frac{y+1}{x}) + f(x))$ egyenlet megoldása

A fejezetben ismertetett eredmények megtalálhatóak a [16] OTDK dolgozatban és a [17] cikkben.

**3.2 Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** Legyen  $T$  egy rendezett testet,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport és tekintsük a

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (x, y \in T_+) \quad (0.2)$$

függvényegyenletet,  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ismeretlen függvényekkel. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha a  $(g, f)$  pár megoldása a (0.2) egyenletnek, akkor létezik  $l_1, l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  logaritmikus függvények és  $c_1, c_2 \in Y$  konstansok úgy, hogy

$$\begin{aligned} g(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + c_1, \\ f(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

A megfordítás is teljesül.

2. Ha a  $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvénypár mérhető megoldása a (0.2) egyenletnek minden  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, akkor léteznek  $q_1, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  konstansok úgy, hogy

$$\begin{aligned} g(x) &= q_1 \log(x) + q_2 \log(x+1) + c_1, \\ f(x) &= q_1 \log(x(x+1)) + q_2 \log(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

#### 4. A (0.15) $f(x+y) = g(xy)$ egyenletről

A következő tétel 1. állítása [18] közös munka **Lajkó Károly**val.

**4.6. Tétel (T. Glavosits, K. Lajkó)** Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy tetszőleges nemüres halmaz. Ekkor teljesülnek a következő állítások:

1. (T. Glavosits, K. Lajkó) Ha  $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  olyan függvények, amelyekre

$$f(x+y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

akkor létezik  $c \in Y$  úgy, hogy  $f(x) = g(x) = c$  minden  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén.

2. (T. Glavosits) Ha a  $\mathbb{T}_+$  test archimedeszeien rendezett,  $I \subset \mathbb{T}_+$  egy nyílt intervallum, az  $f : I + I \rightarrow Y, g : I \cdot I \rightarrow Y$  függvények olyanok, hogy

$$f(x+y) = g(xy) \quad (x, y \in I),$$

akkor létezik  $c \in Y$  úgy, hogy  $f(x) = g(x) = c$  minden  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén.

## 5. A Daróczy-Lajkó-Székelyhidi (DLSz) Tétel

A fejezetben általánosítom **Daróczy-Lajkó-Székelyhidi** (DLSz) tételét [09].

**5.3. Tétel.** *Legyen  $(X; +, \cdot)$  egy kétműveletes algebrai struktúra, ahol  $+$  egy unér,  $\cdot$  egy binér algebrai művelet, úgy, hogy a  $\cdot$  művelet egységelemes 1 egységelemmel, továbbá a  $\cdot$  bal-disztributív a  $+$  műveletre nézve, azaz*

$$\lambda(x + x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x \in X).$$

*Legyen továbbá  $(Y; +)$  egy Abel-csoport,  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *Létezik egy  $\{a_\lambda : X \rightarrow Y \mid \lambda \in X, a_\lambda \text{ 2-additív}\}$  függvénycsalád és egy  $c : X \rightarrow Y$  függvény úgy, hogy minden  $\lambda \in X$  esetén*

$$\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda) \quad (x \in X).$$

2. *Létezik egy  $a : X \rightarrow Y$  2-additív, egy  $l : X \rightarrow Y$  logaritmusos függvény és egy  $d \in Y$  konstans, melyekkel*

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X).$$

**5.4. Következmény.** *Legyenek  $(X; +, \cdot)$  egy kétműveletes algebrai struktúra, ahol  $+$ ,  $\cdot$  binér algebrai műveletek, úgy hogy a  $\cdot$  művelet egységelemes 1 egységelemmel, továbbá a szorzás balról disztributív az összeadássra nézve, azaz*

$$\lambda(x + x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x, y \in X).$$

*Legyen  $(Y; +)$  egy Abel-csoport,  $\{a_\lambda : X \rightarrow Y \mid \lambda \in X\}$  2-additív függvények családja úgy, hogy  $a_2$  additív,  $c : X \rightarrow Y$  egy függvény. Ekkor, ha az  $f : X \rightarrow Y$  egy olyan függvény, amelyre  $\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda)$  minden  $\lambda, x \in X$  esetén, akkor teljesülnek a következő állítások:*

1. *Az  $a_\lambda$  függvények additívak minden  $\lambda \in X$  esetén.*

2. Létezik  $a : X \rightarrow Y$  additív függvény,  $l : X \rightarrow Y$  logaritmusos függvény és  $d \in Y$  konstans, melyekkel

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X),$$

továbbá  $a = a_2$  és  $l = c$ .

**6. A (0.3)  $(\gamma(\frac{x+1}{y}) + \gamma(\frac{y+1}{x}) = \gamma(\frac{x+1}{x}) + \gamma(\frac{y+1}{y}))$   
és a (0.11)  $(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1))) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)))$   
egyenletek megoldása**

A (0.3) egyenlet megoldása először a [16]-ben szerepel, illetve megtalálható [17]-ban, ami közös munka **Lajkó Károlyal**.

**6.1. Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó)** Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy additív Abel-csoport, a  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  egy olyan függvény, amely megoldása a

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Létezik olyan  $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  logaritmusos függvény és  $c_3 \in Y$  konstans, melyekkel

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

(A megfordítás szintén teljesül.)

2. Ha a  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvény mérhető megoldása a (0.3) függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, akkor léteznek  $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$  konstansok, melyekkel

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(A megfordítás szintén teljesül.)

A (0.11) egyenlet megoldása először a [16]-ben szerepel. Pexider változata megtalálható [18]-ben, ami közös munka Lajkó Károssal.

**6.2. Tétel.** Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy Abel-csoport, a  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  egy olyan függvény, amely megoldása a

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (0.11)$$

függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Létezik  $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  logaritmikus függvény,  $c_3 \in Y$  konstans, melyekkel

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

(A megfordítás szintén teljesül.)

2. Ha a  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvényegyenlet mérhető megoldása a (0.11) függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, akkor léteznek  $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$  konstansok, melyekkel

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(A megfordítás szintén teljesül.)

## 7. Kiterjesztési tételek

Ennek a fejezetnek az első részében megadjuk a korlátozott Pexider-additív függvényegyenlet általános megoldását abban az esetben, amikor az additivitás az  $\mathbb{T}_+^2$  egy részkúpján teljesül.

Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $\xi, \eta \in \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$  úgy, hogy  $0 \leq \xi < \eta \leq +\infty$ . Definiáljuk a  $C_{\xi, \eta} \subset \mathbb{T}_+^2$  kúpot az alábbi módon.

$$C_{\xi, \eta} \doteq \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y < \eta x\}, & \text{ha } \xi \geq 0, \eta > 0; \\ \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y\}, & \text{ha } \eta = +\infty. \end{cases}$$

**7.6. Tétel.** Legyen  $\mathbb{T}$  egy archimedeszien rendezett test,  $Y = Y(+)$  egy Abel-csoport,  $\xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}$   $\eta \in \mathbb{T}_+ \cup \{+\infty\}$  úgy, hogy  $\xi < \eta$ . Az  $f, g, h : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  pontosan akkor megoldásai az

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in C_{\xi, \eta})$$

függvényegyenletnek, ha

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) + c + d \\ g(x) &= a(x) + c & (x \in \mathbb{T}_+), \\ h(x) &= a(x) + d \end{aligned}$$

ahol  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  additív függvény,  $c, d \in Y$  konstansok.

**7.7. Tétel** Legyen  $\mathbb{T}$  egy archimedeszien rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  olyan nemnegatív elemei  $\mathbb{T}$ -nek, melyekre  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . A  $P, Q, R : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  függvények pontosan akkor megoldásai a

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y)$$

függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x) + c + d, \\ Q(x) &= a(x) + c, & (x \in \mathbb{T}_+), \\ R(x) &= a(x) + d \end{aligned}$$

ahol  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  additív függvény,  $c, d \in Y$  konstansok.

A fejezet második részében általánosítjuk **J. Rimán** [35] kiterjesztési tételét.

**7.8. Definíció.** Egy  $X = X(+; \leq)$  rendezett csoportot **sűrűnek** nevezünk, ha minden  $x, y \in X$ ,  $x < y$  esetén

$$]x, y[ \doteq \{z \in X \mid x < z < y\} \neq \emptyset.$$

Az  $]x, y[$  halmazt **nyílt intervallumnak** nevezzük  $x$  és  $y$  végpontokkal.

**7.15. Jelölés.** Legyen  $X = X(+)$  egy algebrai struktúra, ahol  $+$  egy binér algebrai művelet, továbbá legyen  $D \subset X^2$ . Definiáljuk a  $D_x, D_y, D_{x+y}$  halmazokat az alábbi módon

$$\begin{aligned} D_x &\doteq \{u \in X \mid \exists v \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_x &\doteq \{v \in X \mid \exists u \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_{x+y} &\doteq \{z \in X \mid \exists (u, v) \in X : z = u + v\}. \end{aligned}$$

Legyen  $X = X(+)$  egy rendezett csoport,  $\varepsilon > 0$ . Definiáljuk a  $B(x, \varepsilon)$  halmazt

$$B(x, \varepsilon) \doteq ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

módon, ha  $x \in X$ , illetve

$$B(x, \varepsilon) \doteq ]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[ \times ]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$$

módon, ha  $x \in X^2$  és  $x = (x_1, x_2)$ .

**7.16. Definíció.** Legyen  $X = X(+)$  egy rendezett csoport,  $Z \in \{X, X^2\}$ ,  $D \subset Z$ .

- Egy  $x_0 \in Z$  elemet a  $D$  halmaz **belső pontjának** nevezünk, ha létezik  $\varepsilon \in X_+$  úgy, hogy  $B(x_0, \varepsilon) \subset D$ .
- A  $D$  halmazt **nyílt**nak nevezünk, ha minden pontja belső pont.
- Egy  $D \subset Z$  halmazt **összefüggőnek** nevezünk, ha minden  $x, y \in D$  esetén létezik  $B_i = B(x_i, \varepsilon_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) véges sorozat úgy, hogy
  1.  $B_i \subset D$  minden  $i = 0, 1, \dots, n$  esetén.
  2.  $x \in B_0, y \in B_n$ .
  3.  $B_{i-1} \cap B_i \neq \emptyset$  minden  $i = 1, \dots, n$  esetén.
- A  $D \subset Z$  nemüres nyílt halmaz egy  $C \subset D$  részhalmazát a  $D$  halmaz egy **komponensének** nevezzük, ha  $C$  a  $D$ -nek egy tartalmazásra nézve maximális nyílt összefüggő részhalmaza.

**7.19. Tétel.** Legyen  $X$  egy archimédészien rendezett sűrű Abel-csoport,  $D \subset X^2$  egy nyílt halmaz  $\{D_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$  komponensekkel,  $Y$  egy Abel-csoport. Legyenek  $f : D_{x+y} \rightarrow Y$ ,  $g : D_x \rightarrow Y$ ,  $h : D_y \rightarrow Y$  függvények.

1. Ha az  $f$ ,  $g$ ,  $h$  függvények megoldásai az

$$f(x + y) = g(x) + h(y) \quad ((x, y) \in D) \quad (7.1)$$

függvényegyenletnek, akkor léteznek  $a_\lambda : X \rightarrow Y$  additív függvények és  $c_\lambda, d_\lambda \in Y$  konstansok, melyekkel

$$\begin{aligned} f(z) &= a_\alpha(z) + c_\alpha + d_\alpha & (z \in (D_\alpha)_{x+y}), \\ g(u) &= a_\alpha(u) + c_\alpha & (u \in (D_\alpha)_x), \\ h(v) &= a_\alpha(v) + d_\alpha & (v \in (D_\alpha)_y). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Továbbá, ha  $\alpha, \beta \in \Gamma$  úgy, hogy  $\alpha \neq \beta$ , akkor teljesülnek a következők.

- a. Ha  $(D_\alpha)_{x+y} \cap (D_\beta)_{x+y} \neq \emptyset$ , akkor  $a_\alpha = a_\beta$  és  $c_\alpha + d_\alpha = c_\beta + d_\beta$ .
  - b. Ha  $(D_\alpha)_x \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$ , akkor  $a_\alpha = a_\beta$  és  $c_\alpha = c_\beta$ .
  - c. Ha  $(D_\alpha)_y \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$ , akkor  $a_\alpha = a_\beta$   $d_\alpha = d_\beta$ .
2. Ha  $a_\lambda : X \rightarrow Y$  additív függvények és  $c_\lambda, d_\lambda \in Y$  konstansok úgy, hogy **a.**, **b.** és **c.** teljesül, az  $f, g, h$  függvényeket (7.2) szerint definiáljuk, akkor teljesül (7.1).

## 8. A (0.6) $(g(x(y+1))) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y)$ egyenlet általános megoldása

**8.1. Tétel.** Legyen  $\mathbb{T}$  egy archimedeszien rendezett test,  $Y$  egy Abel-csoport. Tekintsük a

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.6)$$

függvényegyenletet  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ismeretlen függvényekkel. Ekkor teljesülnek a következő állítások

1. Ha a  $g, f$  függvények megoldásai a (0.6) egyenletnek, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x) + l_2(x) + c_1, \\ f(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+), \end{aligned}$$

alakúak, ahol  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  additív függvény,  $l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  logaritmikus függvény,  $c_1, c_2 \in Y$  konstansok. (A megfordítás szintén teljesül.)

2. A  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mérhető megoldásai a (0.6) egyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, akkor

$$\begin{aligned} g(x) &= px + q_2 \log(x) + c_1, \\ f(x) &= -px + q_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2, \quad (x \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

alakúak, ahol  $p, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  konstansok. (A megfordítás szintén teljesül)

**9. A (0.1)  $(G_1(\frac{x+1}{y}) + F_1(y) = G_2(\frac{y+1}{x}) + F_2(x))$  és a (0.5)  $(G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y))$  egyenletek megoldása**

Ebben a fejezetben, a korábbi fejezetek eredményeire támaszkodva megadjuk a (0.1) és a (0.5) függvényegyenletek megoldását. Mindkét egyenlet megoldása (valós-valós környezetben) megtalálható az [16] OTDK dolgozatomban. A (0.1) egyenlet megoldása (általános esetben) közös munka **Lajkó Károllyal** [17].

**9.1. Tétel. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** *Megadjuk a (0.1) egyenlet általános, illetve mérhető megoldását.*

1. Legyen  $\mathbb{T}$  egy rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) függvények pontosan akkor megoldásai a

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (0.1)$$

függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) - l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén, ahol  $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2, 3$ ) logaritmikus függvények,  $d_i \in Y$  ( $i = 1, 2, 3$ ) konstansok úgy, hogy  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

2. A  $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) függvények pontosan akkor mérhető megoldásai a (0.1) függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) + p_3 \log(x) + d_1, \\ F_1(x) &= p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) - p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) - p_3 \log(x) + d_3, \\ F_2(x) &= p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) + p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges  $x \in \mathbb{R}_+$  esetén, ahol ahol  $p_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $d_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) konstansok úgy, hogy  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

**9.2. Tétel.** Megadjuk a (0.5) függvényegyenlet általános és mérhető megoldását.

1. Legyen  $\mathbb{T}$  egy archimedeszien rendezett test,  $Y$  egy egyértelműen 2-osztható Abel-csoport. A  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) függvények pontosan akkor megoldásai a

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (0.5)$$

függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{T}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= a(x) + l_2(x) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_3(x(x+1)) + d_2, \\ G_2(x) &= a(x) + l_2(x) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + l_3(x(x+1)) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges  $x \in \mathbb{T}_+$  esetén, ahol  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  additív függvény,  $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$   $i = (1, 2)$  logaritmusos függvények,  $c_j \in Y$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) konstansok úgy, hogy  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

2. A  $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) függvények pontosan akkor mérhető megoldásai a (0.5) függvényegyenletnek tetszőleges  $x, y \in \mathbb{R}_+$  esetén, ha

$$\begin{aligned} G_1(x) &= qx + p_2 \log(x) + p_3 \log(x) + d_1, \\ F_1(x) &= -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) - p_3 \log(x(x+1)) + d_2, \\ G_2(x) &= qx + p_2 \log(x) - p_3 \log(x) + d_3, \\ F_2(x) &= -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + p_3 \log(x(x+1)) + d_4 \end{aligned}$$

alakúak tetszőleges  $x \in \mathbb{R}_+$  esetén, ahol  $q, p_2, p_3, d_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) konstansok úgy, hogy  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

## 10. Lezárások és belsőképzések kommutativitása

A fejezetben található eredmények egy része közös munka Pataki Gergellyel. (Az  $A \subset B$  jelet abban az értelemben használjuk, hogy  $a \in B$  minden  $a \in A$  esetén.) A szükséges fogalmak megtalálhatóak [38]-ban, illetve [23]-ban.

**10.1., 10.2. Definíció** Legyen  $X$  egy halmaz. Azt mondjuk, hogy a  $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  függvény

- **expanzív**, ha  $Y \subset \Psi(Y)$  minden  $Y \in \mathcal{P}(X)$  esetén.
- **kontraktív**, ha  $\Psi(Y) \subset Y$  minden  $Y \in \mathcal{P}(X)$  esetén.
- **idempotens**, ha  $\Psi(\Psi(Y)) \doteq \Psi^2(Y) = \Psi(Y)$  minden  $Y \in \mathcal{P}(X)$  esetén.
- **monoton**, ha  $\Psi(Y) \subset \Psi(Z)$  minden  $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ , melyekre  $Y \subset Z$ .
- **monoton lezárás**, ha *expanzív, idempotens és monoton*.
- **belsőképző operátor**, ha *kontraktív, idempotens és monoton*.

Monoton lezárásokat és monoton belsőképzéseket tetszőleges halmazcsaládok segítségével fogunk generálni az alábbi módon. Legyen  $X$  egy halmaz,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  egy tetszőleges halmazcsalád, definiáljuk a  $\Phi_{\mathcal{A}}, \varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}$  függvényeket

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \varphi_{\mathcal{A}} &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\} & (Y \in \mathcal{P}(X)).\end{aligned}$$

Ekkor a  $\Phi_{\mathcal{A}}$  függvény egy monoton lezárás, amit az  $\mathcal{A}$  halmazcsalád által generált lezárásnak nevezünk. A  $\varphi_{\mathcal{A}}$  függvény egy monoton belsőképző operátor, amit az  $\mathcal{A}$  halmazcsalád által generált belsőképzésnek nevezünk. Ez az értelmezés eltér az univerzális algebraiban megszokottól, mivel ott monoton lezárást csak lezárási rendszer segítségével generálnak.

Ha  $\Psi, \Omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  függvények, akkor használni fogjuk a  $\Psi \preceq \Omega$  jelölést abban az értelemben, hogy  $\Psi(Y) \subset \Omega(Y)$  minden  $Y \in \mathcal{P}(X)$  esetén.

Szintén érdemes megemlíteni, hogy  $Fix(\Psi)$  az alábbi módon definiált halmazcsaládot fogja jelölni

$$Fix(\Psi) \doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \Psi(Y) = Y\}$$

tetszőleges  $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  függvény esetén.

Az alábbi két általános tétel monoton lezárások kommutativitásával kapcsolatban közös munka **Pataki Gergely**el.

**10.11. Tétel. (T. Glavosits, G. Pataki)** Legyen  $X$  egy halmaz, és legyenek  $\Psi, \Omega$  monoton lezárások  $X$ -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a.  $Fix(\Psi) \subset Fix(\Omega)$ .
- b.  $\Omega \preceq \Psi$ .
- c.  $\Psi \circ \Omega = \Psi$ .
- d.  $\Omega \circ \Psi = \Psi$ .

**10.13. Tétel. (T. Glavosits, G. Pataki)** Legyen  $X$  és legyenek  $\Psi, \Omega$  monoton lezárások  $X$ -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a.  $\Omega[Fix(\Psi)] \subset Fix(\Psi)$ .
- b.  $\Psi \circ \Omega \preceq \Omega \circ \Psi$ .
- c.  $\Omega \circ \Psi$  idempotens.
- d.  $\Omega \circ \Psi = \Phi_{Fix(\Psi) \cap Fix(\Omega)}$ .

A fenti két tétel a lin, aff, co, cone, cocone konvex operátorok által generált félcsoport teljes leírásában nyer alkalmazást.

Belsőképzések kommutativitásával kapcsolatban analóg tételek érvényesek.

**10.12. Tétel.** Legyen  $X$  egy halmaz és legyenek  $\psi, \omega$  monoton belsőképzések  $X$ -en. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- a.  $Fix(\omega) \subset Fix(\psi)$ .
- b.  $\omega \preceq \psi$ .
- c.  $\psi \circ \omega = \omega$ .
- d.  $\omega \circ \psi = \omega$ .

**10.14. Tétel.** Legyen  $X$  egy halmaz és legyenek  $\psi, \omega$  monoton belsőképzések  $X$ -en. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

- a.  $\psi[Fix(\omega)] \subset Fix(\omega)$ .
- b.  $\psi \circ \omega \preceq \omega \circ \psi$ .
- c.  $\psi \circ \omega$  is idempotens.
- d.  $\psi \circ \omega = \Phi_{Fix(\psi) \cap Fix(\omega)}$ .

## 11. Lezárások geometriai alkalmazásai

**11.1. Probléma.** Jelölje  $P$  a sík egy rögzített pontját. Jelölje  $\mathcal{F}_n$  a sík összes olyan szabályos  $n$  szögének a halmazát, amelynek középpontja a  $P$  pont, és jelölje  $F_n$  az  $\mathcal{F}_n$  halmazcsalád egy tetszőlegesen rögzített elemét tetszőleges  $n \in \mathbb{Z}_+$  esetén. Keressük az alábbi pont-halmazokat:

$$\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m \mid F_n \subset Y\} \quad (m \geq 3, n \geq 2),$$

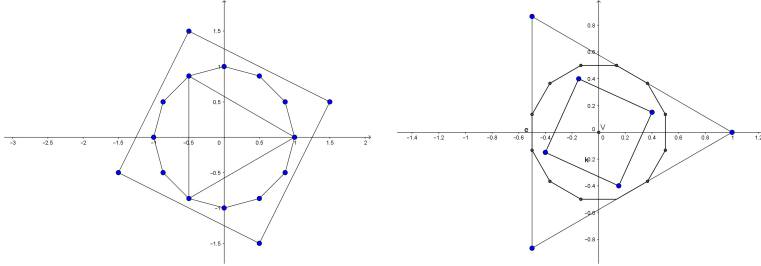
$$\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \subset F_n\} \quad (m \geq 2, n \geq 3).$$

A  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  pont-halmaz meghatározását érintő kérdést a Convexity & Application konferencián ismertettem (2010. szeptember 5-10 Lengyelország, Iwonicz-Zdrój), majd a következő nap **Wolfgang Förg-Rob** megadta a megoldást. A duális síkbeli probléma ( $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$ ) analóg módon kezelhető. A kapott eredményeket az alábbi tétel tartalmazza.

**11.2. Tétel.** Megőrízve a fenti Probléma jelöléseit, a problémák megoldása a következő:

1.  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}(m,n)}$  tetszőleges  $m \geq 3, n \geq 2$  esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  egy olyan szabályos  $\text{lkkt}(m, n)$ -szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:
  - Középpontja a rögzített  $P$  pont;
  - Csúcspontjai között megtalálhatóak a rögzített szabályos  $F_n$  sokszög csúcspontjai.
2.  $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lkkt}(m,n)}$  tetszőleges  $m \geq 2, n \geq 3$  esetén, azaz egy kicsit részletesebben, a  $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  egy olyan szabályos  $\text{lkkt}(m, n)$ -szög, amely az alábbi két tulajdonság által van meghatározva:
  - Középpontja a rögzített  $P$  pont;
  - Oldalegyenesei között megtalálhatóak a rögzített szabályos  $F_n$  sokszög oldalegyenesei.

A Tétel eredményeit az alábbi ábrákkal szemléltetjük, melyek az  $m = 4$ ,  $n = 3$  esetet tartalmazzák.



## 12. A nemnegativitástartomány létezéséről

A fejezetben ismertetett eredmények megtalálhatóak [20]-ben, Közös munka **Száz Árpád**dal.

**12.1. Definíció.** Legyen  $X = X(+)$  egy csoport és legyenek  $D$ ,  $A \subset X$  halmazok úgy, hogy  $D \subset A$ . Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz **szimmetrikus**, ha  $-A \subset A$ .

Azt mondjuk, hogy a  $D$  halmaz

- **antiszimmetrikus**, ha  $D \cap (-D) \subset \{0\}$ .
- **additív**, ha  $D + D \subset D$ .
- az  $A$  halmaz egy **nemnegativitástartománya**, ha  $D$  antiszimmetrikus és  $A = D \cup (-D)$ .
- az  $A$  halmaz egy **additív nemnegativitástartománya**, ha nemnegativitástartománya  $A$ -nak és additív.

**12.4. Definíció.** Legyen  $X = X(+)$  egy félcsoport,  $A \subset X$ . Ekkor az

$$A^\# \doteq \cap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ és } B \text{ additív}\}$$

módon definiált halmazt az  $A$  halmaz **additív lezártjának**, vagy az  $A$  halmaz által generált félcsoportnak nevezzük.

**12.6. Jelölés** Legyen  $X = X(+)$  egy félcsoport. Definiáljuk az  $X_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) és  $X_\infty$  halmazokat

$$X_n \doteq \{x \in X \mid nx = 0\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$X_\infty \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

módon.

**12.7. Jelölés.** Legyen  $X = X(+)$  egy csoport. Definiáljuk az  $F_B \subset X^2$  relációt

$$F_B(x) \doteq ((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# \quad (x \in X)$$

módon tetszőleges  $B \subset X$  esetén.

**12.8. Definíció.** Legyen  $X = X(+)$  egy csoport. Azt mondjuk, hogy az  $A \subset X$  részhalmaz

- **$n$ -kancellatív**, ha  $A \cap X_n \subset \{0\}$ ;
- **végtelen kancellatív**, ha  $A \cap X_\infty \subset \{0\}$ ;
- **tökéletesen kancellatív**, ha tetszőleges  $B \subset X$  additív antiszimmetrikus részhalmaz esetén

$$0 \notin F_B(x) \quad \text{vagy} \quad 0 \in F_B(-x) \quad (x \in A \setminus (B \cup (-B))).$$

**12.9. Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [20])** Legyen  $X = X(+)$  egy csoport. Ekkor teljesülnek a következők.

1. Ha  $A \subset X$  tökéletesen kancellatív, akkor végtelen kancellatív.
2. Ha  $A \subset X$  végtelen kancellatív, és  $A$  elemei kommutálnak, akkor  $A$  tökéletesen kancellatív.

**12.10. Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [20])** Legyen  $X = X(+)$  egy csoport,  $A \subset X$ . Ekkor a következő állítások ekvivalensek.

1.  $A$ -nak létezik egy  $D$  nemnegativitástartománya.
2.  $A$  szimmetrikus és 2-kancellatív.

3.  $A$ -nak minden  $B \subset A$  antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható az  $A$ -nak egy  $D$  nemnegativitástartományába.

**12.11. Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [20])** Legyen  $X = X(+)$  egy tetszőleges csoport,  $A \subset X$ . Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1.  $A$  tökéletesen kancellatív.
2. Az  $A$  minden  $B$  additív antiszimmetrikus részhalmaza belefoglalható egy olyan  $D \subset X$  additív antiszimmetrikus részhalmazba, amelyre  $A \subset D \cup (-D)$ .

## 13. Relációk páratlan szelekcióinak létezéséről

A fejezetben ismertetett eredmények megtalálhatóak [19]-ben, Közös munka Száz Árpáddal.

**13.1. Definíció.** Legyen  $F \subset X \times Y$  egy reláció,  $f \subset X \times Y$  egy függvény. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény az  $F$  reláció **szelekciófüggvénye**, ha értelmezési tartományaik megegyeznek, azaz  $D_F = D_f$ , továbbá minden  $x \in D_F$  esetén  $f(x) \in F(x)$ .

**13.2. Definíció.** Legyenek  $X = X(+)$ ,  $Y = Y(+)$  csoportok  $f : D_f \subset X \rightarrow Y$  egy függvény úgy, hogy értelmezési tartománya szimmetrikus, azaz  $-D_f \subset D_f$ . Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény

- **páros**, ha  $f(-x) = f(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén;
- **páratlan**, ha  $f(-x) = -f(x)$  minden  $x \in D_f$  esetén.

**13.3. Tétel. (T. Glavosits, Á. Száz [19])** Legyenek  $X = (+)$ ,  $Y = Y(+)$  csoportok,  $F \subset X \times Y$  egy reláció. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az  $F$  relációnak létezik páratlan szelekciófüggvénye.
2. Teljesülnek a következők.
  - a.  $f(x) \in Y_2$  minden  $x \in D_F \cap X_2$  esetén.
  - b.  $F(x) \cap -F(x) \neq \emptyset$  minden  $x \in D_F \setminus X_2$  esetén.

## Introduction

The purpose of the dissertation is the investigation of functions and relations, which are defined on ordered structures or on the subsets of ordered structures. The dissertation consists of two parts. The first part contains chapters from **1** to **9**, in this part we give the solutions of some functional equations. Namely, let  $\mathbb{T}$  be an ordered field,  $\mathbb{T}^a$  be an archimedean ordered field,  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. Denote by  $\mathbb{T}_+$  and  $\mathbb{T}_+^a$  the set of all positive elements of an ordered field  $\mathbb{T}$  and an archimedean ordered field  $\mathbb{T}^a$  respectively. The most important functional equations in the first part are:

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x), \quad (0.1)$$

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x), \quad (0.2)$$

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right), \quad (0.3)$$

$$F(x) + G(y) = P(x+y) + Q\left(\frac{x}{y}\right), \quad (0.4)$$

where the functions  $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f, \gamma, F, G, P, Q : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are the unknown functions. The functions satisfy the appropriate equations for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ . (Equation (0.4) is the so-called **Olkin-Baker equation**.)

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y), \quad (0.5)$$

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y), \quad (0.6)$$

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y), \quad (0.7)$$

$$g_\lambda(\mu xy + x) + g_\mu(xy + y) = g_\mu(\lambda xy + y) + g_\lambda(xy + x), \quad (0.8)$$

$$g_2(2xy + x) + g_2(xy + y) = g_2(2xy + y) + g_2(xy + y), \quad (0.9)$$

In equations (0.5) and (0.6) the functions  $G_1, G_2, F_1, F_2, g, f : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  are the unknown functions. In equation (0.7) the functions  $P, Q, R : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  are the unknown functions, and  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{T}_+^a$  are fixed parameters such that  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . In equation(0.8)

the functions  $g_\lambda, g_\mu : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  are the unknown functions, and  $\lambda, \mu \in \mathbb{T}_+ \setminus \{1\}$  are arbitrarily fixed parameters. In equation (0.9) the function  $g_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  is the unknown function. The functional equations are fulfilled for all  $x, y \in \mathbb{T}_+^a$ .

$$G_1(xy + x) + F_1(y) = G_2(x + y) + F_2(xy) \quad (0.10)$$

In equation (0.10) the functions  $G_1, G_2, F_1, F_2 : \mathbb{T}_+^a \rightarrow Y$  are the unknown functions. This equation is fulfilled for all  $x, y \in \mathbb{T}_+^a$ . (Equation (0.10) is the so-called **Davison equation**.)

$$\gamma(x(y + 1)) + \gamma(y(x + 1)) = \gamma(x(x + 1)) + \gamma(y(y + 1)), \quad (0.11)$$

$$\gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \gamma(x + y) = \gamma\left(\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y} + 1\right)\right) + \gamma\left(\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x} + 1\right)\right), \quad (0.12)$$

$$\gamma(x + y) + \gamma\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \gamma\left((x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right) + \gamma(1), \quad (0.13)$$

$$\gamma_\lambda(x + y) = \gamma_\lambda\left(\frac{4xy}{x + y}\right), \quad (0.14)$$

$$f(x + y) = g(xy), \quad (0.15)$$

where the functions  $\gamma, \gamma_\lambda, f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are the unknown functions. In equation (0.15) the set  $Y$  is an arbitrary nonempty set. These equations are fulfilled for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ .

The main functional equations of the first part are the equations (0.1) and (0.5). These equations have probability theory background.

In chapter 1 we show that equation (0.1) can be reduced to the equations (0.2) and (0.3), equation (0.5) can be reduced to equations (0.6) and (0.11).

In chapter 2 we show that the continuous solutions of the equations (0.3) and equation (0.11) can be obtained by the Gaussian iteration. (This results can be found in my OTDK work [15] 2003 Miskolc, with supervisor professor **Z. Daróczy**.)

In chapter 3 we give the solution of equation (0.2).

In chapter 4 we give the solution of equation (0.15) on different domains. We will use the equation (0.15) to solve equation (0.11) and the Davison equation.

In chapter 5 we generalize a Theorem of **Z. Daróczy**, **K. Lajkó**, **L. Székelyhidi** [09]. As an application of the DLSz Theorem we give the general solution of equation (0.4) on  $\mathbb{T}_+$ . This result is well-known on  $\mathbb{R}_+$  (concerning the Olkin-Baker equation see [34], [03], [32]).

In chapter 6 we give the solution of equations (0.3) and equation (0.11). The solution of equation (0.3) is a joint work with **K. Lajkó** [17]. We reduce this equation to equation (0.4) which is the so-called Olkin-Baker equation. To give the solution of the equation (0.11) we use the chain of ideas (0.11)  $\Leftarrow$  (0.12)  $\Leftarrow$  (0.13)  $\Leftarrow$  (0.14)  $\Leftarrow$  (0.15). The solution of the Pexider version of equation (0.11) is a joint work with **K. Lajkó** [18].

In the first part of chapter 7 we give the general solution of a restricted Pexider-additive functional equation, in the case when the equation is fulfilled on the sub-cone of  $\mathbb{T}_+^2$ , where  $\mathbb{T}$  is an ordered field. The obtained result will be used in the case of equation (0.7). In the second part of this chapter we give a generalization of **J. Rimán**'s extension theorem [35]. We use an archimedean ordered Abelian dense group instead of the real line.

In the first part of chapter 8 we give the general solution of equation (0.6) by the following way (0.6)  $\Leftarrow$  (0.8)  $\Leftarrow$  (0.9). Using this method we can solve the equation (0.6). Here we use the equation (0.7) and the DLSz Theorem. In the second part of this chapter we show that the Davison equation can be reduced to the equation (0.6).

In chapter 9, by using some results of the earlier chapters we give the general and measurable solutions of equation (0.1) and equation (0.5). The results, when the domain and the range of the unknown functions are subsets of the real line, can be found in my OTDK work [16] (2005, Budapest, with supervisor K. Lajkó). The general and measurable solution of equation (0.1) is joint work with **K. Lajkó** [17].

The second part of the dissertation contains the chapters from **10** to **13**. In this part we investigated closures, the existence of non-

negativity domains of groups, existence of odd selections of relations, moreover we show some applications.

The main results of chapter 10 are two Theorems concerning the commutativity of monotone closures (joint work with **G. Pataki**). As an application we give the semigroup generated by certain convex operators of a vector space over an ordered field. These convex operators are the linear, affine, convex, cone and convex-cone operators. The semigroup operation is the function-composition.

Chapter 11 contains a geometric problem and its solution motivated by the concepts of chapter 10. (The main result is joint work with **W. Förg-Rob**).

In chapter 12, among others, we show that if  $A$  is a perfectly cancellable subset of a group  $X$ , then every additive and antisymmetric subset  $B$  of the set  $A$  can be extended to an additive antisymmetric subset  $D \subset A$  such that  $A \subset D \cup (-D)$ . (Joint work with **Á. Száz** [20]).

In chapter 13 we give a criterion of existence of an odd selection of a relation  $R \subset X \times Y$ , where  $X$  and  $Y$  are groups. (Joint work with **Á. Száz** [19]).

# 1. Decomposition of functional equations

The following Theorem can be found in my OTDK work [16] and in [17].

**Theorem 1.2. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** *Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) are general solutions of the functional equation*

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (0.1)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$  if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) \end{aligned}$$

for all  $x \in \mathbb{T}_+$ , where the functions  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are the general solutions of the functional equation

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (0.2)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$  and the function  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  is the general solution of the functional equation

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ .

**Theorem 1.3.** *Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) are the general solutions of functional equation*

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (0.5)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$  if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= g(x) + \gamma(x), & F_1(x) &= f(x) - \gamma(x(x+1)), \\ G_2(x) &= g(x) - \gamma(x), & F_2(x) &= f(x) + \gamma(x(x+1)) \end{aligned}$$

for all  $x \in \mathbb{T}_+$ , where the functions  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are the general solutions of the functional equation

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (0.6)$$

for all  $x \in \mathbb{T}_+$ , and the function  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  is the general solution of the functional equation

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (0.11)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ .

## 2. Functional equations and the Gaussian iteration

Some results from this chapter can be found in my OTDK work [15] (2005, Miskolc, with supervisor **Z. Daróczy**). I show that the continuous solutions of functional equations (0.11) and (0.3) (in the case of  $\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+$ , and  $Y = \mathbb{R}$ ) can be obtained by Gaussian iteration. Thus, using the results of chapter 6., we obtain new examples concerning the equivalence between functional equations containing means and functional equation containing the Gaussian iteration of these means.

**Theorem 2.6.** Define the means  $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$\begin{aligned} M_1(x, y) &\doteq \frac{(\sqrt{4x+1} - 1)(\sqrt{4y+1} + 1)}{4}, & (x, y \in \mathbb{R}_+). \\ M_2(x, y) &\doteq M_1(y, x), \end{aligned}$$

Consider the following functional equations

1.  $\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y))$ ,

$$2. \quad \gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y)),$$

with unknown function  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  such that the equations are fulfilled for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Since the general solution of functional equation **1.** is of the form

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

where the function  $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a logarithmic function and  $c \in \mathbb{R}$  is a constant, moreover,

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

thus the functional equations **1.** and **2.** are equivalent.

**Theorem 2.8.** Define the means  $M_1, M_2 : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  by

$$\begin{aligned} M_1(x, y) &\doteq \frac{xy + y}{y + 1} & (x, y \in \mathbb{R}_+). \\ M_2(x, y) &\doteq M_1(y, x). \end{aligned}$$

Consider the functional equations

1.  $\gamma(x) + \gamma(y) = \gamma(M_1(x, y)) + \gamma(M_2(x, y)),$
2.  $\gamma(x) + \gamma(y) = 2\gamma(M_1 \otimes M_2(x, y)),$

with unknown function  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , where the functional equations are fulfilled for all  $x, y \in \mathbb{R}$ . Then, since the general solution of functional equation **1.** is of the form

$$\gamma(x) = l(x) + c \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

where the function  $l : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a logarithmic function and  $c \in \mathbb{R}$  is a constant, moreover

$$M_1 \otimes M_2(x, y) = \sqrt{xy} \quad (x, y \in \mathbb{R}_+),$$

thus the functional equations **1.** and **2.** are equivalent.

### 3. The solution of equation(0.2)

$$\left(g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x)\right)$$

The results presented in this chapter can be found in my OTDK work [16] and in [17].

**Theorem 3.2. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** *Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. Consider the functional equation*

$$g\left(\frac{x+1}{y}\right) + f(y) = g\left(\frac{y+1}{x}\right) + f(x) \quad (x, y \in T_+) \quad (0.2)$$

with unknown functions  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ . Then the following assertions are valid.

1. *If the pair  $(g, f)$  is a solution of functional equation (0.2), then there exist logarithmic functions  $l_1, l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  and constants  $c_1, c_2 \in Y$  such that*

$$\begin{aligned} g(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + c_1, \\ f(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

*The converse statement is also valid.*

2. *If the pair  $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a measurable solution of equation (0.2) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , then there exist constants  $q_1, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  such that*

$$\begin{aligned} g(x) &= q_1 \log(x) + q_2 \log(x+1) + c_1, \\ f(x) &= q_1 \log(x(x+1)) + q_2 \log(x) + c_2 \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

### 4. On the equation (0.15) $f(x+y) = g(xy)$

The first statement of the following Theorem [18] is joint work with **K. Lajkó**.

**Theorem 4.6. (T. Glavosits, K. Lajkó)** *Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be an arbitrary nonempty set. Then the following assertions are valid.*

1. (T. Glavosits, K. Lajkó) If  $f, g : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are functions such that

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+),$$

Then there exists a constant  $c \in Y$  such that  $f(x) = g(x) = c$  for all  $x \in \mathbb{T}_+$ .

2. (T. Glavosits) If the field  $\mathbb{T}_+$  is an Archimedean ordered field,  $I \subset \mathbb{T}_+$  is an open interval,  $f : I + I \rightarrow Y$  and  $g : I \cdot I \rightarrow Y$  are functions such that

$$f(x + y) = g(xy) \quad (x, y \in I),$$

then there exists a constant  $c \in Y$  such that  $f(x) = g(x) = c$  for all  $x \in \mathbb{T}_+$ .

## 5. On the Daróczy-Lajkó-Székelyhidi (DLSz) Theorem

In this chapter I generalise a Theorem of **Z. Daróczy, K. Lajkó and L. Székelyhidi** [09] (DLSz).

**Theorem 5.3.** Let  $(X; +, \cdot)$  be an algebraic structure with two operations, where  $+$  is an unary operation,  $\cdot$  is a binary operation such that there is an identity element  $1$  with respect to the operation  $\cdot$ , that is

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad (x \in X)$$

and the operation  $\cdot$  is left-distributive over the operation  $+$ , that is

$$\lambda(x + x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x \in X).$$

Moreover, let  $(Y; +)$  be an Abelian group and let  $f : X \rightarrow Y$  be a function. Then the following assertions are equivalent.

1. There exists  $\{a_\lambda : X \rightarrow Y \mid \lambda \in X, a_\lambda \text{ 2-additive}\}$  family of functions and a function  $c : X \rightarrow Y$  such that

$$\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda) \quad (x \in X).$$

for all  $\lambda \in X$ .

2. There exists a 2-additive function  $a : X \rightarrow Y$ , a logarithmic function  $l : X \rightarrow Y$  and a constant  $d \in Y$  such that

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X).$$

**Corollary 5.4.** Let  $(X; +, \cdot)$  be an algebraic structure, where the operations  $+$ ,  $\cdot$  are binary algebraic operations such that there is an identity element  $1$  with respect to the operation  $\cdot$ , moreover the multiplication is left-distributive over addition, that is

$$\lambda(x + x) = \lambda x + \lambda x \quad (\lambda, x, y \in X).$$

Let  $(Y; +)$  be an Abelian group, let  $\{a_\lambda : X \rightarrow Y | \lambda \in X\}$  be a family of 2-additive functions such that the function  $a_2$  is additive, and let  $c : X \rightarrow Y$  be a function. If  $f : X \rightarrow Y$  is a function such that  $\Delta_\lambda f(x) = a_\lambda(x) + c(\lambda)$  for all  $\lambda, x \in X$ , then the following assertions are valid.

1. The functions  $a_\lambda$  are additive for all  $\lambda \in X$ .
2. There exists an additive functions  $a : X \rightarrow Y$ , a logarithmic function  $l : X \rightarrow Y$  and a constant  $d \in Y$  such that

$$f(x) = a(x) + l(x) + d \quad (x \in X),$$

in addition  $a = a_2$  and  $l = c$ .

## 6. The solution of equations (0.3)

$$\left(\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right)\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right)$$

and equation (0.11)

$$\left(\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1))\right) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1))$$

Concerning the general solution of equation (0.3) see my OTDK work [16], and also see [17], which is joint work with **K. Lajkó**.

**Theorem 6.1. (T. Glavosits, K. Lajkó)** Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be an additive Abelian group and the function  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  be a solution of the functional equation

$$\gamma\left(\frac{x+1}{y}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{x}\right) = \gamma\left(\frac{x+1}{x}\right) + \gamma\left(\frac{y+1}{y}\right) \quad (0.3)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ . Then the following assertions are valid.

1. There exists a logarithmic function  $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  and a constant  $c_3 \in Y$  such that

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

(The converse statement is valid.)

2. If the function  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a measurable solution of functional equation (0.3) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , then there exist constants  $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$  such that

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(The converse statement is also valid.)

Concerning the solution of equation (0.11) see my OTDK work [16]. Concerning the Pexider version of this equation see [18], which is joint work with **K. Lajkó**.

**Theorem 6.2.** Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be an additive Abelian group and the function  $\gamma : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  be a solution of the functional equation

$$\gamma(x(y+1)) + \gamma(y(x+1)) = \gamma(x(x+1)) + \gamma(y(y+1)) \quad (0.11)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ . Then the following assertions are valid.

1. There exists a logarithmic function  $l_3 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  and a constant  $c_3 \in Y$  such that

$$\gamma(x) = l_3(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{T}_+).$$

(The converse statement is also valid.)

2. If the function  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a measurable solution of functional equation (0.11) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , then there exist constants  $q_3, c_3 \in \mathbb{R}$  such that

$$\gamma(x) = q_3 \log(x) + c_3 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

(The converse statement is also valid.)

## 7. Extension Theorems

In the first part of this section we give the general solution of a restricted Pexider-additive functional equation, when the additivity is fulfilled on a cone of  $\mathbb{T}_+^2$ .

Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $\xi, \eta \in \mathbb{T} \cup \{+\infty\}$  such that  $0 \leq \xi < \eta \leq +\infty$ . Define the cone  $C_{\xi, \eta} \subset \mathbb{T}_+^2$  by the following way

$$C_{\xi, \eta} \doteq \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y < \eta x\}, & \text{if } \xi \geq 0, \eta > 0; \\ \{(x, y) \in \mathbb{T}_+^2 \mid \xi x < y\}, & \text{if } \eta = +\infty. \end{cases}$$

**Theorem 7.7.** Let  $\mathbb{T}$  be an archimedean ordered field,  $Y = Y(+)$  be an Abelian group and  $\xi \in \mathbb{T}_+ \cup \{0\}$ ,  $\eta \in \mathbb{T}_+ \cup \{+\infty\}$  such that  $\xi < \eta$ . The functions  $f, g, h : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are general solutions of the functional equation

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad (x, y \in C_{\xi, \eta})$$

if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) + c + d \\ g(x) &= a(x) + c \\ h(x) &= a(x) + d \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{T}_+)$$

where  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  is an additive function and  $c, d \in Y$  are constants.

**Theorem 7.8.** Let  $\mathbb{T}$  be an archimedean ordered field,  $Y$  be an Abelian group and let  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  be nonnegative elements of the field

$\mathbb{T}$  such that  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . The functions  $P, Q, R : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  are general solutions of the functional equation

$$P((\alpha + \gamma)x + (\beta + \delta)y) = Q(\alpha x + \beta y) + R(\gamma x + \delta y)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$ , if and only if they are of the form

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x) + c + d, \\ Q(x) &= a(x) + c, & (x \in \mathbb{T}_+), \\ R(x) &= a(x) + d \end{aligned}$$

where  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  is an additive function,  $c, d \in Y$  are constants.

In the second part of this section we generalise an Extension Theorem of **J. Rimán** [35].

**Definition 7.8.** An ordered group  $X = X(+; \leq)$  is said to be **dense**, if

$$]x, y[ \doteq \{z \in X \mid x < z < y\} \neq \emptyset.$$

for all  $x, y \in X$ ,  $x < y$ . The set  $]x, y[$  is called an **open interval** with endpoints  $x$  and  $y$ .

**Notation 7.15.** Let  $X = X(+)$  be an algebraic structure with the binary operation  $+$  and let  $D \subset X^2$ . Define the subsets  $D_x, D_y, D_{x+y}$  of the set  $X$  by

$$\begin{aligned} D_x &\doteq \{u \in X \mid \exists v \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_x &\doteq \{v \in X \mid \exists u \in X : (u, v) \in D\}, \\ D_{x+y} &\doteq \{z \in X \mid \exists (u, v) \in X : z = u + v\}. \end{aligned}$$

Let  $X = X(+)$  be a group and let  $\varepsilon > 0$ . Define the set  $B(x, \varepsilon)$  by

$$B(x, \varepsilon) \doteq ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

if  $x \in X$ , and by

$$B(x, \varepsilon) \doteq ]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[ \times ]x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon[$$

if  $x \in X^2$  and  $x = (x_1, x_2)$ .

**Definition 7.16.** Let  $X = X(+)$  be an ordered group and let  $Z \in \{X, X^2\}$ ,  $D \subset Z$ .

- We say that an element  $x_0 \in Z$  is an **inner point** of the set  $D$ , if there exists  $\varepsilon \in X_+$  such that  $B(x_0, \varepsilon) \subset D$ .
- A subset  $D$  of the set  $Z$  is said to be **open**, if every point of the set  $D$  is an inner point of the set  $D$ .
- A subset  $D$  of the set  $Z$  is said to be **connected**, if for all points  $x, y \in D$  there exists a finite sequence  $B_i = B(x_i, \varepsilon_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) such that
  1.  $B_i \subset D$  for all  $i = 0, 1, \dots, n$ .
  2.  $x \in B_0, y \in B_n$ .
  3.  $B_{i-1} \cap B_i \neq \emptyset$  for all  $i = 1, \dots, n$ .
- A nonempty subset  $C$  of a nonempty open set  $D$  is called a **component** of the set  $D$  if it is a maximal open connected subset of the set  $D$ .

**Theorem 7.19.** Let  $X$  be an archimedean ordered dense Abelian group and let  $D \subset X^2$  be an open set with components  $\{D_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$  and let  $Y$  be an Abelian group. Let  $f : D_{x+y} \rightarrow Y$ ,  $g : D_x \rightarrow Y$ ,  $h : D_y \rightarrow Y$  be functions.

1. If the functions  $f, g, h$  are solutions of the functional equation

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad ((x, y) \in D), \quad (7.1)$$

then there exist additive functions  $a_\lambda : X \rightarrow Y$  and constants  $c_\lambda, d_\lambda \in Y$  such that

$$\begin{aligned} f(z) &= a_\alpha(z) + c_\alpha + d_\alpha & (z \in (D_\alpha)_{x+y}), \\ g(u) &= a_\alpha(u) + c_\alpha & (u \in (D_\alpha)_x), \\ h(v) &= a_\alpha(v) + d_\alpha & (v \in (D_\alpha)_y). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Moreover, if  $\alpha, \beta \in \Gamma$  such that  $\alpha \neq \beta$ , then the following assertions are valid.

- a. If  $(D_\alpha)_{x+y} \cap (D_\beta)_{x+y} \neq \emptyset$ , then  $a_\alpha = a_\beta$  és  $c_\alpha + d_\alpha = c_\alpha + d_\beta$ .
  - b. If  $(D_\alpha)_x \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$ , then  $a_\alpha = a_\beta$  és  $c_\alpha = c_\beta$ .
  - c. If  $(D_\alpha)_y \cap (D_\beta)_y \neq \emptyset$ , then  $a_\alpha = a_\beta$   $d_\alpha = d_\beta$ .
2. If the functions  $a_\lambda : X \rightarrow Y$  are additive functions and  $c_\lambda, d_\lambda \in Y$  are constants such that properties **a.**, **b.** and **c.** are fulfilled and the functions  $f, g, h$  are defined by (7.2) then they satisfy the functional equation (7.1).

## 8. The general solution of equation (0.6)

$$(g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y))$$

**Theorem 8.1.** Let  $\mathbb{T}$  be an archimedean ordered field, and let  $Y$  be an Abelian group. Consider the functional equation

$$g(x(y+1)) + f(x) = g(y(x+1)) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{T}_+), \quad (0.6)$$

with unknown functions  $g, f : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$ . Then the following assertions are valid.

1. If the functions  $g, f$  are solutions of functional equation (0.6), then they are of the form

$$\begin{aligned} g(x) &= a(x) + l_2(x) + c_1, \\ f(x) &= -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2 \quad (x \in \mathbb{T}_+), \end{aligned}$$

where  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  is an additive function,  $l_2 : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  is a logarithmic function,  $c_1, c_2 \in Y$  are constants. (The converse statement is valid.)

2. If the functions  $g, f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  are measurable solutions of functional equation (0.6) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , then they are of the form

$$\begin{aligned} g(x) &= px + q_2 \log(x) + c_1, \\ f(x) &= -px + q_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + c_2, \quad (x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

where  $p, q_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  are constants. (The converse statement is also valid.)

## 9. The general solution of equations (0.1)

$$(G_1(\frac{x+1}{y}) + F_1(y) = G_2(\frac{y+1}{x}) + F_2(x))$$

### and equation (0.5)

$$(G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y))$$

In this section, using the results of earlier chapters, we give the general solutions of function equations (0.1) and (0.5). The general solutions of these equations (in the special case, when  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  and  $Y = \mathbb{R}$ ) can be found in my OTDK work [16]. The general solution of equation (0.1) is a joint work with **K. Lajkó**[17].

**Theorem 9.1. (T. Glavosits, K. Lajkó [17])** *We give the general and the measurable solution of functional equation (0.1).*

1. Let  $\mathbb{T}$  be an ordered field and let  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) satisfy the functional equation

$$G_1\left(\frac{x+1}{y}\right) + F_1(y) = G_2\left(\frac{y+1}{x}\right) + F_2(x) \quad (0.1)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$  if and only if, they are of the form

$$\begin{aligned} G_1(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) + l_3(x) + d_1, \\ F_1(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) - l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2, \\ G_2(x) &= l_1(x) + l_2(x+1) - l_3(x) + d_3, \\ F_2(x) &= l_1(x(x+1)) + l_2(x) + l_3\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4 \end{aligned}$$

for all  $x \in \mathbb{T}_+$ , where  $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are logarithmic functions,  $d_i \in Y$  ( $i = 1, 2, 3$ ) are constants such that  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

2. The measurable functions  $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) satisfy the functional equation (0.1) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$ , if and only if they are of the form

$$G_1(x) = p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) + p_3 \log(x) + d_1,$$

$$F_1(x) = p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) - p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_2,$$

$$G_2(x) = p_1 \log(x) + p_2 \log(x+1) - p_3 \log(x) + d_3,$$

$$F_2(x) = p_1 \log(x(x+1)) + p_2 \log(x) + p_3 \log\left(\frac{x+1}{x}\right) + d_4$$

for all  $x \in \mathbb{R}_+$ , where  $p_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $d_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) are constants such that  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

**Theorem 9.2.** We give the general and measurable solution of functional equation (0.5).

1. Let  $\mathbb{T}$  be an archimedean ordered field and let  $Y$  be a uniquely 2-divisible Abelian group. The functions  $G_i, F_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$  ( $i = 1, 2$ ) satisfy the functional equation

$$G_1(x(y+1)) + F_1(x) = G_2(y(x+1)) + F_2(y) \quad (0.5)$$

for all  $x, y \in \mathbb{T}_+$  if and only if, they are of the form

$$G_1(x) = a(x) + l_2(x) + l_3(x) + d_1,$$

$$F_1(x) = -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) - l_3(x(x+1)) + d_2,$$

$$G_2(x) = a(x) + l_2(x) - l_3(x) + d_3,$$

$$F_2(x) = -a(x) + l_2\left(\frac{x}{x+1}\right) + l_3(x(x+1)) + d_4$$

for all  $x \in \mathbb{T}_+$ , where  $a : \mathbb{T} \rightarrow Y$  is an additive function,  $l_i : \mathbb{T}_+ \rightarrow Y$   $i = (1, 2)$  are logarithmic functions,  $c_j \in Y$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) are constants such that  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

2. The measurable functions  $G_i, F_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) satisfy the functional equation (0.5) for all  $x, y \in \mathbb{R}_+$  if and only if

they are of the form

$$G_1(x) = qx + p_2 \log(x) + p_3 \log(x) + d_1,$$

$$F_1(x) = -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) - p_3 \log(x(x+1)) + d_2,$$

$$G_2(x) = qx + p_2 \log(x) - p_3 \log(x) + d_3,$$

$$F_2(x) = -qx + p_2 \log\left(\frac{x}{x+1}\right) + p_3 \log(x(x+1)) + d_4$$

for all  $x \in \mathbb{R}_+$ , where  $q, p_2, p_3, d_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) are constants such that  $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$ .

## 10. Commutativity of monotone closures and monotone inner operators

Some results in this chapter are joint work with **G. Pataki**. (The notation  $A \subset B$  will be used in the sense that  $a \in B$  for all  $a \in A$ .) The fundamental concepts can be found in [38] and in [23].

**Definition 10.1, 10.2.** Let  $X$  be a set. The function  $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  is said to be

- **extensive**, if  $Y \subset \Psi(Y)$  for all  $Y \in \mathcal{P}(X)$ .
- **contractive**, if  $\Psi(Y) \subset Y$  for all  $Y \in \mathcal{P}(X)$ .
- **idempotent**, if  $\Psi(\Psi(Y)) \doteq \Psi^2(Y) = \Psi(Y)$  for all  $Y \in \mathcal{P}(X)$ .
- **monotone**, if  $\Psi(Y) \subset \Psi(Z)$  for all  $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$  such that  $Y \subset Z$ .
- **monotone closure**, if it is extensive, idempotent and monotone.
- **interior operator**, if it is contractive, idempotent and monotone.

We generate monotone closures and monotone interiors by an arbitrary family of sets in the following way. Let  $X$  be a set and

let  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$  be an arbitrary family of sets. Define the functions  $\Phi_{\mathcal{A}}$ ,  $\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}$  by

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{A}}(Y) &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid Y \subset A\} & (Y \in \mathcal{P}(X)), \\ \varphi_{\mathcal{A}} &\doteq \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\} & (Y \in \mathcal{P}(X)).\end{aligned}$$

Then the function  $\Phi_{\mathcal{A}}$  is a monotone closure, which is called a monotone closure generated by the family  $\mathcal{A}$ . Similarly, the function  $\varphi_{\mathcal{A}}$  is a monotone inner operator, which is said to be monotone inner operator generated by the family  $\mathcal{A}$ . This concept of monotone closures generated by a set-family is different to the usual concept of monotone closure generated by a set-family, because in universal algebra the family  $\mathcal{A}$  must be a closure system on the set  $X$ .

We will use the notation  $\Psi \preceq \Omega$  for all function  $\Psi, \Omega : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  in the sense that  $\Psi(Y) \subset \Omega(Y)$  is fulfilled whenever  $Y \in \mathcal{P}(X)$ .

It is also worth mentioning, that  $Fix(\Psi)$  will denote the family of sets defined by

$$Fix(\Psi) \doteq \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid \Psi(Y) = Y\}$$

for all function  $\Psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ .

The following two general Theorems concerning the commutativity of monotone closures is joint work with **G. Pataki**.

**Theorem 10.11. (T. Glavosits, G. Pataki)** *Let  $X$  be a set and let  $\Psi, \Omega$  be monotone closures on the set  $X$ . Then the following assertions are equivalent.*

- a.  $Fix(\Psi) \subset Fix(\Omega)$ .
- b.  $\Omega \preceq \Psi$ .
- c.  $\Psi \circ \Omega = \Psi$ .
- d.  $\Omega \circ \Psi = \Psi$ .

**Theorem 10.13. (T. Glavosits, G. Pataki)** *Let  $X$  be a set and let  $\Psi, \Omega$  be monotone closures on the set  $X$ . Then the following assertions are equivalent.*

- a.  $\Omega[Fix(\Psi)] \subset Fix(\Psi)$ .
- b.  $\Psi \circ \Omega \preceq \Omega \circ \Psi$ .
- c.  $\Omega \circ \Psi$  idempotent.
- d.  $\Omega \circ \Psi = \Phi_{Fix(\Psi) \cap Fix(\Omega)}$ .

The above two Theorems can be used to give the full description of the semi-group generated by the convex operators lin, aff, co, cone, cocone, when the group-operation is the function composition.

Analogously to the monotone closures, one can easily formulate Theorems concerning commutativity of monotone interiors.

**Theorem 10.12.** *Let  $X$  be a set and let  $\psi, \omega$  be monotone interiors on the set  $X$ . Then the following assertions are equivalent.*

- a.  $Fix(\omega) \subset Fix(\psi)$ .
- b.  $\omega \preceq \psi$ .
- c.  $\psi \circ \omega = \omega$ .
- d.  $\omega \circ \psi = \omega$ .

**Theorem 10.14.** *Let  $X$  be a set and let  $\psi, \omega$  be monotone interiors on the set  $X$ . Then the following assertions are equivalent.*

- a.  $\psi[Fix(\omega)] \subset Fix(\omega)$ .
- b.  $\psi \circ \omega \preceq \omega \circ \psi$ .
- c.  $\psi \circ \omega$  is idempotent.
- d.  $\psi \circ \omega = \Phi_{Fix(\psi) \cap Fix(\omega)}$ .

## 11. Geometric applications of closures and interiors

**Problem 11.1.** *Denote by  $P$  an arbitrarily fixed point of the plane. Denote by  $\mathcal{F}_n$  the set of all  $P$ -centered regular  $n$ -gons and let  $F_n$  be*

an arbitrarily fixed element of the set  $\mathcal{F}_n$  for all  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Find the following sets of points

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcap \{Y \in \mathcal{F}_m \mid F_n \subset Y\} & (m \geq 3, n \geq 2), \\ \varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) &\doteq \bigcup \{Y \in \mathcal{F}_m \mid Y \subset F_n\} & (m \geq 2, n \geq 3).\end{aligned}$$

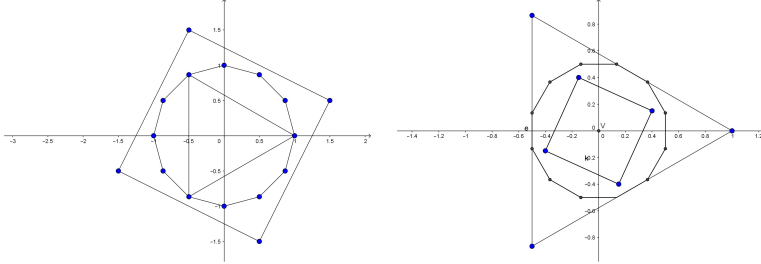
The problem concerning the point-set  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  was first proposed by myself on the conference Convexity & Application, 5-10 September, 2010, Iwonicz-Zdrój (Poland). The following day **Wolfgang Förg-Rob** gave the solution. The dual problem in the plane, concerning the point-set  $(\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n))$ , can be solved analogously. The following Theorem shows the obtained results.

**Theorem 11.2.** *Preserving the notations of the above Problem now we give the solutions.*

1.  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lcm}(m,n)}$  for all  $m \geq 3, n \geq 2$ , that is in details, the point-set  $\Phi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  is a regular  $\text{lcm}(m, n)$ -gon determined by the following two properties
  - Its center is the point  $P$ ;
  - The vertices of the fixed polygon  $F_n$  can be found among the vertices of it.
2.  $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n) \in \mathcal{F}_{\text{lcm}(m,n)}$  for all  $m \geq 2, n \geq 3$ , that is in details, the point-set  $\varphi_{\mathcal{F}_m}(F_n)$  is a regular  $\text{lcm}(m, n)$ -gon determined by the following two properties
  - Its center is the point  $P$ ;
  - The sides of the fixed polygon  $F_n$  can be found among the sides of it.

We illustrate the results of the above Theorem with the following

two figures containing the cases  $m = 4$ ,  $n = 3$ .



## 12. On the existence of nonnegativity domain

The results of this chapter can be found in some articles which are joint works with **Á. Szász**.

**Definition 12.1.** Let  $X = X(+)$  be a group and let  $D, A \subset X$  be sets such that  $D \subset A$ . We say that the set  $A$  is **symmetric**, if  $-A \subset A$ .

We say that the set  $D$  is

- **anti-symmetric**, if  $D \cap (-D) \subset \{0\}$ .
- **additive**, if  $D + D \subset D$ .
- is a **non-negativity domain** of the set  $A$ , if  $D$  is antisymmetric and  $A = D \cup (-D)$ .
- is an **additive non-negativity domain** of the set  $A$ , if it is a non-negativity domain of the set  $A$  and it is additive.

**Definition 12.4.** Let  $X = X(+)$  be a semigroup and let  $A \subset X$ . Then the **additive hull** of the set  $A$  is defined by

$$A^\# \doteq \cap \{B \subset X \mid A \subset B \text{ and } B \text{ is additive}\}$$

**Notation 12.6.** Let  $X = X(+)$  be a semigroup. Define the set  $X_n$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ) and the set  $X_\infty$  by

$$X_n \doteq \{x \in X \mid nx = 0\} \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$X_\infty \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n.$$

**Notation 12.7.** Let  $X = X(+)$  be a group. Define the relation  $F_B \subset X^2$  by

$$F_B(x) \doteq ((B \cup \{x\}) \setminus \{0\})^\# \quad (x \in X)$$

for all  $B \subset X$ .

**Definition 12.8.** Let  $X = X(+)$  be a group. A subset  $A$  of the set  $X$  is said to be

- **$n$ -cancellable**, if  $A \cap X_n \subset \{0\}$ ;
- **infinitely cancellable**, if  $A \cap X_\infty \subset \{0\}$ ;
- **perfectly cancellable**, if

$$0 \notin F_B(x) \quad \text{or} \quad 0 \in F_B(-x) \quad (x \in A \setminus (B \cup (-B)))$$

for all additive antisymmetric  $B \subset X$ .

**Theorem 12.9. (T. Glavosits, Á. Száz [20])** Let  $X = X(+)$  be a group. Then the following assertions are valid.

1. If the set  $A \subset X$  is perfectly cancellable, then it is infinitely cancellable.
2. If the set  $A \subset X$  is infinitely cancellable and the elements of the set  $A$  commute with each other, then the set  $A$  is perfectly cancellable.

**Theorem 12.10. (T. Glavosits, Á. Száz [20])** Let  $X = X(+)$  be a group and let  $A \subset X$ . Then the following assertions are equivalent.

1. There exists a nonnegativity domain  $D$  of the set  $A$ .
2. The set  $A$  is symmetric and 2-cancellable.
3. All antisymmetric subsets  $B$  of the set  $A$  can be extended to a nonnegativity domain  $D$  of the set  $A$ .

**Theorem 12.11.** (T. Glavosits, Á. Száz [20]) *Let  $X = X(+)$  be an arbitrary group and let  $A \subset X$ . Then the following assertions are equivalent.*

1. The set  $A$  is perfectly cancellable.
2. All additive and antisymmetric subset  $B$  of the set  $A$  can be extended to an additive antisymmetric subset  $D$  such that  $A \subset D \cup (-D)$ .

### 13. On the existence of odd selection of relations

The main result of this chapter can be found in [19], which is joint work with Á. Száz.

**Definiton 13.1.** *Let  $F \subset X \times Y$  be a relation and  $f \subset X \times Y$  be a function. We say that the function  $f$  is the **selection** of the relation  $F$ , if the domains of them are equal to each other, that is  $D_F = D_f$ , moreover,  $f(x) \in F(x)$  for all  $x \in D_F$ .*

**Definiton 13.2.** *Let  $X = X(+)$  and  $Y = Y(+)$  be groups and let  $f : D_f \subset X \rightarrow Y$  be a function such that its domain is symmetric, that is  $-D_f \subset D_f$ . The function  $f$  is said to be*

- **even**, if  $f(-x) = f(x)$  for all  $x \in D_f$ ;
- **odd**, if  $f(-x) = -f(x)$  for all  $x \in D_f$ .

**Theorem 13.3.** (T. Glavosits, Á. Száz [19]) *Let  $X = (+)$  and  $Y = Y(+)$  be groups and let  $F \subset X \times Y$  be a relation. Then the following assertions are equivalent.*

1. *There exists an odd selection of the relation  $F$ .*
2. *The following statements hold*
  - a.  *$f(x) \in Y_2$  for all  $x \in D_F \cap X_2$ .*
  - b.  *$F(x) \cap -F(x) \neq \emptyset$  for all  $x \in D_F \setminus X_2$ .*

## Hivatkozások

- [01] J. **Aczél**, J. **Dhombres**, Functional equations in several variables, *Cambridge University Press* (1989).
- [02] B. C. **Arnold**, E. **Castillo**, J. M. **Sarabia**, Conditionally Specified Distributions, Lecture Notes in Statistics, *Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Hong Kong-Budapest* **73** (2006).
- [03] J. A. **Baker**, On the functional equation  $f(x)g(x) = p(x + y)q\left(\frac{x}{y}\right)$ , *Aequationes Math.* **14** (1976) 493–506.
- [04] W. **Benz**, P191R1. Remark, *Aequationes Math.* **20** (1980) 307.
- [05] D. **Blanusa**, The functional equation  $f(x + y - xy) + f(xy) = f(x) + f(y)$ , *Aequationes Math.* **5** (1970) 63–70.
- [06] J. M. **Borwein**, P. B. **Borwein**, Pi and AGM. A study in Analytic Number Theory and Computational Complexity, *John Wiley and Sons., New York* (1987),
- [07] N. G. de **Bruijn**, Functions whose differences belong to a given class, *Nieuw Arch. Wisk.* **23/2** (1951) 194–218.
- [08] B4456 (Javasolta Daróczy Zoltán) *KöMaL.* (2012)/5.
- [09] Z. **Daróczy**, K. **Lajkó**, L. **Székelyhidi**, Functional equations on ordered fields, *Publ. Math. Debrecen* **24** (1977) 173–179.
- [10] Z. **Daróczy**, Zs. **Páles**, Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski-Sutó problem, *Publ. Math. Debrecen* **61/1-2** (2002) 157–218.
- [11] T. M. K. **Davison**, 191. Problem, *Aequationes* **20** (1980) 306.
- [12] **Euklidesz**,  $\Sigma\tau\omicron\chi\epsilon\lambda\alpha$ , (i.e. 300 körül). Magyarul: **Euklidesz**, Mayer Gyula fordításában, *Gondolat* (1983).
- [13] L. **Fuchs**, Partially Ordered Algebraic Systems, *Pergamon Press Oxford* (1963)
- [14] R. **Girgensohn**, K. **Lajkó**, A functional equation of Davison and its generalization, *Aequationes Math.* **60** (2000) 219–224.

- [15] T. **Glavosits**, Függvényegyenletek megoldása iterációval, *OTDK dolgozat, Miskolc* (2003) Témavezető: Z. Daróczy.
- [16] T. **Glavosits**, Karakterizációs problémákból származó függvényegyenletek általános megoldása, *OTDK dolgozat, Budapest* (2005) Témavezető: K. Lajkó.
- [17] T. **Glavosits**, K. **Lajkó**, The general solution of a functional equation related to the characterisation of bivariate distributions, *Aequationes Math.* **70** (2005) 88–100.
- [18] T. **Glavosits**, K. **Lajkó**, Pexiderization of some logarithmic functional equations, *Publ. Math. Debrecen* **89/3** (2016) 355–3064.
- [19] T. **Glavosits**, Á. **Száz**, On the existence of odd selections, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)* **8** (2004) 155–164.
- [20] T. **Glavosits**, Á. **Száz**, On the existence of nonnegativity domains of subsets of groups, *Demonstr. Math.* **37** (2004) 505–516.
- [21] Edited by R. L. **Graham**, J. **Nesetril**, S. **Butler**, The Mathematics of Paul Erdős I, *Springer Part IV. Geometry*, J. **Aczél**, L. **Losoncz**i, Section: Extension of Functional Equations (2013) 447–460.
- [22] A. **Járai**, On measurable solution of functional equations, *Publ. Math. Debrecen* **26** (1979) 17–35.
- [23] J.L. **Kelley**, General Topology, *Springer-Verlag* (1975).
- [24] E. **Kiss**, Bevezetés az algebraiba. Typotex, Budapest (2007)
- [25] M. **Kuczma**, An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality, *Birkhäuser Basel* (2008).
- [26] K. **Lajkó**, Remark to a paper by J. A. Baker, *Aequationes Math.* **19** (1979) 227–231.
- [27] K. **Lajkó**, Remarks on a problem of Davison, Report of Meeting, *Aequationes Math.* **56** (1998) 289.

- [28] K. **Lajkó**, Functional equations in the theory of conditionally specified distributions, *Publ. Math. Debrecen* **58**/1-2 (2001) 141–148.
- [29] K. **Lajkó**, F. **Mészáros**, Density function solution of a functional equation, *47th ISFE, Gargnano, Italy* (2009).
- [30] F. W. **Levi**, Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **35** (1913) 225–236.
- [31] P. **Lorenzen**, Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie, *Math. Z.* **45** (1939) 533–553.
- [32] E. **Lukács**, A characterization of the gamma distribution, *Ann. Math. Statist.* **26** (1995) 319–324.
- [33] S. **Narumi**, On the General Forms of Bivariate Frequency Distributions which are Mathematically Possible when Regression an Variation are Subjected to Limiting Conditions, I., II., *Biometria* **15** (1923) 77–88, 209–221.
- [34] I. **Olkin**, P 138, *Aequationes Math.* **12** (1975) 290–292.
- [35] J. **Rimán**, On an extension of Pexideréquation, *Zbornik Radova Math. Inst. Beograd N. S.* **1**/9 (1976) 65–72.
- [36] C. G. **Small**, Functional Equations and How to Solve Them, *Springer Science+Business Media*, (2007)
- [37] G. **Szász**, Bevezetés a hálóelméletbe, *Akadémia Kiadó* (1959).
- [38] M. L. J. **Van De Vel**, Theory of Convex Structures, *NORTH-HOLLAND AMSTERDAM LONDON NEW YORK TOKYO* (1993).
- [39] H. **Weyl**, Symmetry, *Princeton University Press* (1952).

## Előadások listája

1. *The general solution of a functional equation related to the characterisation of bivariate distributions*. International Students' Conference, 2005. február 9-13. Szczyrk (Lengyelország)
2. *The general solutions of functional equations*, International Student Conference of Analysis, 2006. február 6. Síkfőkút (Magyarország)
3. *Beszámoló az egyetemi éveim alatti kutatómunkámról*, Tanszéki szeminárium, 2006. február 17. Debrecen (Magyarország)
4. *A késő újkőkori tiszai meander és meandrikus motívumainak jellegzetességei*, (Közös előadás Richter Évával) Csalog József Emlékkonferencia, 2008. november 10. Szentes (Magyarország)
5. *Hahn-Banach-féle kiterjesztési tétel bizonyítása infimális konvolúcióval*, Intézeti szeminárium, 2009. november 12. Debrecen (Magyarország)
6. *The infimal convolution and its applications*, The 6<sup>th</sup> International Students' Conference of Analysis, 2010. január 31.-február 3. Síkfőkút (Magyarország)
7. *Szemléltető példák a monoton additív függvények kiterjesztési tételeihez II*, Tanszéki szeminárium, 2010. május 21.-24. Síkfőkút (Magyarország)
8. *The infimal convolution can be used to prove some dominated monotone additive extension theorems*, 8<sup>th</sup> Joint Conference on Mathematics and Computer Science, 2010. július 14.-17. Komárno (Szlovákia)
9. *A Hahn-Banach-féle kiterjesztés egyértelműségének karakterizációja infimális konvolúció alkalmazásával*, Bolyai János Emlékkonferencia, 2010. augusztus 30.-szeptember 4., Budapest-Marosvásárhely (Magyarország-Románia)
10. *Closures and convexity*, Convexity & Applications, 2010. szeptember 5.-10. Iwonicz Zdrój (Lengyelország)

11. *Examples and counter examples concerning the uniqueness of Hahn-Banach extension*, Conference on Inequalities and Applications 10. 2010 szeptember 19.-25.
12. *Conveity and Symmetry 7<sup>th</sup>* International Students' Conference on Analysis, 2011. február 5.-8.
13. *The general solution of a functional equation*, 12<sup>th</sup> Debrecen-Katowice Winter Seminar of Functional Equations and Inequalities, 2012. január 25.-28. Hajdúszoboszló (Magyarország)
14. *Series* (Közös előadás Blahota Istvánnal) International Students' Conference on Analysis, 2012. január 28.-31. Síkfőkút (Magyarország)
15. *Egy függvényegyenlet általános megoldása*, Tanszéki szeminárium, 2012. május 26.-29. Síkfőkút (Magyarország)
16. *On the Davidson functional equation*, The 13<sup>th</sup> Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, 2013. január 30.-február 2. Zakopane (Lengyelország)
17. *Functional equations and exercises*, The 9<sup>th</sup> Students' Conference on Analysis, 2013. február 2.-5. Uston (Lengyelország)
18. *Problémák rendezett struktúrákon I*, Intézeti szeminárium, 2016. március 2. Miskolc (Magyarország)
19. *Problémák rendezett struktúrákon II, Lezárások, Belsőképzések és alkalmazásai*, Intézeti szeminárium, 2016. november 16. Miskolc (Magyarország)