



1949

**METAKOGNITÍV TEVÉKENYSÉGEK VIZSGÁLATA KÖZÉPISKOLÁSOK
MATEMATIKAI PROBLÉMAMEGOLDÁSÁNAK KIVITELEZÉSI ÉS ELLENŐRZÉSI
SZAKASZA SORÁN**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Kiss Márton

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20.

*.....
a jelölt aláírása*

Tanúsítom, hogy Kiss Márton doktorjelölt 2020- 2024 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20..

*.....
a témavezető aláírása*

**METAKOGNITÍV TEVÉKENYSÉGEK VIZSGÁLATA KÖZÉPISKOLÁSOK
MATEMATIKAI PROBLÉMAMEGOLDÁSÁNAK KIVITELEZÉSI ÉS
ELLENŐRZÉSI SZAKASZA SORÁN**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Kiss Márton okleveles középiskolai fizikatanár és okleveles középiskolai matematikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök:

Dr.

tagok:

Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2024

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, Herendiné Dr. Kónya Eszternek, aki megismertette velem a matematika didaktikai kutatások módszereit, munkámat rendszeresen hasznos tanácsokkal, odaadóan és lelkiismeretesen segítette, illetve a szakmai nyitottságból és sokoldalúságból példát mutatott számomra.

Hálás vagyok Dr. Ambrus Andrásnak a lelkesítő szakmai beszélgetésekért, a felém tanúsított bizalmáért, biztatásáért.

Köszönetet mondok tanítómnak és valamennyi tanáromnak, oktatómnak, akik annak idején egyengették utamat.

Köszönet illeti a kutatásokban szereplő tanulókat és tanárjelölteket, akiktől igen sokat tanultam. Köszönet azoknak az iskoláknak és tanároknak, akik lehetővé tették a kutatásaim elvégzését.

Nagyon hálás vagyok a családomnak a szeretetért és a törődésért, ami erőt adott a munkámhoz. Köszönöm szüleimnek a támogatásukat, testvéremnek és sógoromnak a segítségüket, feleségemnek a megértését, türelmét és segítségét.

Tartalomjegyzék

Bevezető	6
1. Elméleti áttekintés	8
1.1. A matematika tanításának célja és felfogása – a problémamegoldás mint eszköz a gondolkodásra nevelésben.....	8
1.2. A metakogníció fogalma és összetevői	10
1.3. A metakogníció és a matematikai teljesítmény	15
1.4. A matematikai problémamegoldás és a metakogníció	16
1.5. A metakogníció fejlődése és tanítása	22
1.6. A metakogníció mérése	26
2. Kutatási kérdések	27
3. Tanulói metakognitív tevékenységek ösztönzése és megfigyelése irányított írásbeli problémamegoldás során.....	29
3.1. Bevezető	29
3.2. Kutatási kérdések	29
3.3. Módszerek	29
3.3.1. Minta	29
3.3.2. Mérőeszköz	30
3.3.3. Eljárás.....	31
3.3.4. Elemzési szempontok	31
3.4. Eredmények és tapasztalatok.....	37
3.5. Kutatási kérdések és válaszok	43
3.6. Összegzés és következtetések.....	44
3.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal	44
3.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára	45
3.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján.....	45
4. Fejlesztő kísérlet tanulói meggyőződések felülírására	46
4.1. Bevezető	46
4.2. Kutatási kérdések	46
4.3. Módszerek	46
4.3.1. Minta	47
4.3.2. Mérőeszköz	47
4.3.3. Eljárás.....	50
4.3.4. Elemzési szempontok	50
4.4. Eredmények és tapasztalatok.....	52
4.5. Kutatási kérdések és válaszok	62
4.6. Összegzés és következtetések.....	63
4.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal	64

4.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára.....	64
4.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján.....	64
5. A problémamegoldás ellenőrzési szakaszának elemzése a „hangosdolgozatok” segítségével	66
5.1. Bevezető	66
5.2. Kutatási kérdések	66
5.3. Módszerek	67
5.3.1. Minta	67
5.3.2. Eljárás.....	67
5.3.3. Mérőeszköz	68
5.3.4. Elemzési szempontok	69
5.4. Eredmények és tapasztalatok.....	71
5.5. Kutatási kérdésekre és válaszok	79
5.6. Összegzés és következtetések.....	79
5.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal	80
5.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára.....	81
5.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján.....	81
6. Tanárjelöltek óráinak megfigyelése	82
6.1. Bevezető	82
6.2. Kutatási kérdések	82
6.3. Módszerek	82
6.3.1. Minta	83
6.3.2. Mérőeszköz	83
6.3.3. Eljárás.....	83
6.3.4. Elemzési szempontok	84
6.4. Eredmények és tapasztalatok.....	86
6.5. Kutatási kérdések és válaszok	92
6.6. Összegzés és következtetések.....	92
6.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal	93
6.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára.....	93
6.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján.....	93
7. Konklúzió és további kutatási lehetőségek.....	94
Irodalom	98
Összefoglaló	106
Summary	109
Függelék.....	112

Bevezető

A dolgozat kiindulópontja az a tapasztalat volt, hogy a tanulók többsége matematikából nagyon ritkán ellenőrzi az általa elvégzett munkát és annak eredményét a problémamegoldás során (Kiss, 2017; Kiss & Kónya, 2018). Ez azt jelenti, hogy az ilyen tanulók nem maradnak kapcsolatban a szöveggel, nem ellenőrzik a lépéseket, az eredményeket, és nem értékelik azokat sem menet közben, sem a „kész” állapotban. Ez ugyanakkor nem csak tanulási, hanem tanítási probléma is. A tanulók nem ismerik az említett tevékenységek jelentőségét és nincsenek azokhoz hozzászoktatva. Ebben a dolgozatban középiskolás tanulók nyomon követő (monitoring) és ellenőrző (control) tevékenységeit vizsgáljuk a problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakaszában (Lester, 1985). Az említett tevékenységek mint metakognitív tevékenységek, a kognitív folyamatok és azok eredményeinek dinamikus nyomon követését és ellenőrzését jelentik. A megfelelő minőségű metakognitív tevékenységeknek az adott probléma sikeres megoldásán kívül azért is van jelentőségük, mert a tanulók ezáltal valamilyen szinten tudatosítják a probléma megoldása során alkalmazott ismereteket és módszereket, és többet tanulnak a probléma megoldásából. A metakognitív tevékenységek például a problémamegoldáson keresztül kapcsolódnak a Skemp (1971/2005) által sokat emlegetett értelmes tanuláshoz.

A matematikai problémamegoldás egyes nehézségei többnyire a gyenge metakognitív tevékenységekkel hozhatók összefüggésbe (Lester, 1985; Silver, 1985; Schoenfeld, 1985, 1987). A metakognícióval kapcsolatos kutatások azt mutatják, hogy a sikeres problémamegoldók képesek reflektálni a problémamegoldó tevékenységükre, hatékony stratégiák állnak rendelkezésükre az összetett és ismeretlen problémák kezelésére, és hatékonyan szabályozzák (akár tudat alatt is) a felmerülő stratégiákat. A kezdők ezzel szemben kevesebb problémamegoldó stratégiával rendelkeznek, kevésbé vannak tudatában ezek hasznosságának és nem használják azokat hatékonyan (Schoenfeld, 1992). Összességében a metakogníció jelentősége elsősorban abban áll, hogy a mindennapi érvelés és a tudományos gondolkodás, valamint a társas interakciók szempontjából kulcsfontosságúnak tűnik (Schneider & Artelt, 2010).

A dolgozat bevezető fejezete után egy szakirodalmi áttekintés következik az 1. fejezetben, majd a kutatási kérdéseket részletezzük a 2. fejezetben. Az ezt követő négy fejezetben (3-6. fejezetek) négy kutatást mutatunk be, melyek a diákok nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek megvalósulását és körülményeit vizsgálják a matematikai problémamegoldás során.

A dolgozatot a kutatási kérdésekre adott válaszok és a kutatás eredményeinek összegzése, illetve az előbbieket felhasználására tett pedagógiai javaslatokat magába foglaló 7. fejezet zárja.

A kutatási fejezetek címei és fő kérdései:

3. fejezet: Tanulói metakognitív tevékenységek ösztönzése és megfigyelése irányított írásbeli problémamegoldás során

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

4. fejezet: Fejlesztő kísérlet tanulói meggyőződések felülírására

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

5. fejezet: A problémamegoldás ellenőrzési szakaszának elemzése a „hangosdolgozatok” segítségével

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

6. fejezet: Tanárjelöltek óráinak megfigyelése

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

1. Elméleti áttekintés

1.1. A matematika tanításának célja és felfogása – a problémamegoldás mint eszköz a gondolkodásra nevelésben

A matematika tanításának célrendszere sokrétű és összetett, de az egyik legfontosabb cél a diákok gondolkodási képességeinek fejlesztése. Schoenfeld (1992) kiemeli, hogy a matematikaoktatás céljai attól is függenek, hogy az ember mit ért matematikán és annak megértésén. Ezek nagyon eltérőek lehetnek. A nézőpontok egyik véglete szerint a matematikai tudásunk a tények és eljárások összessége, amelyeket megbízhatóan tudunk használni. Ennek a szemléletnek az egyik következménye, hogy az oktatás a tudás tartalmi összetevőire összpontosít és a tanuló tudását a tartalom elsajátított mennyiségével jellemzi. A nézőpontok másik oldala a matematikát a „minták tudományaként” azonosítja és a hangsúlyt a minták tapasztalati bizonyítékok alapján történő keresésére helyezi. A matematikai tartalom helyett vagy inkább mellett elsősorban a folyamatra összpontosít. Schoenfeld (1992) szerint az előbbi nézőpontra épülő, csupán a matematikai tények és eljárások elsajátítását előíró tanterv súlyosan elszegényedik. Bár természetesnek és ártalmatlannak tűnhet a tudásnak ez a felfogása, komoly következményei vannak. Sok ember számára meghatározó tapasztalat a matematikával kapcsolatban a matematikával való találkozás az iskolában. Elsősorban erre a tapasztalatra építik a tudományágról való felfogásukat, ebből alakítják ki a matematika értelmét és azt is, hogy hogyan használják a matematikát. A szakirodalom egyre nagyobb része a matematikatanulást eredendően szociális és kognitív tevékenységként fogja fel, alapvetően konstruktív tevékenységként, nem pedig befogadó tevékenységként (Schoenfeld, 1992).

A matematikaoktatás egyik fontos célja az is, hogy a tanulók kompetens problémamegoldóvá váljanak. A kifejezés többféle értelmezése miatt azonban a cél aligha egyértelmű. A problémamegoldás történeti áttekintése alapján Stanic és Kilpatrick (1989) a problémamegoldás mint kontextus szerepét többek között az új készségek fejlesztésének eszközeként azonosítják. A tanulási célokat illetően Ambrus (1995) szerint az egyik alapvető kérdés, hogy milyen tartalmak és eljárások teszik lehetővé a célok elérését? A problémamegoldás beépítése a matematikaórákba számos lehetőséget kínál például a fogalmi megértés és az algoritmikus készségek fejlesztésére, szemben azzal, amikor a tanárok kizárólag rutinfeladatokra összpontosítanak (Kónya & Kovács, 2023).

A probléma és a problémamegoldás az évek során többféle, gyakran egymásnak ellentmondó jelentéssel bírt. Számos cikk (Schoenfeld, 1992; Barkatsas, 1996) bemutatja, hogy a kutatók között nincs egyetértés abban, hogy mi is a probléma fogalma, és még nagyobb nézeteltérés mutatkozik, amikor a problémamegoldás természetét próbálják meghatározni. Úgy tűnik, az egyetértés hiánya főként annak köszönhető, hogy a matematikai problémamegoldás bizonyos mértékig olyan összetettnek tűnik, hogy nem lehet teljes pontossággal és részletességgel meghatározni és leírni.

Pólya György munkássága a problémamegoldás terén nemzetközileg mérföldkőnek számít, hatása széleskörű a matematika tanulásával és tanításával kapcsolatos kutatásokban. Pólya (1967/1970) szerint a problémamegoldás az, amikor *„megfelelő tennivalót keresünk tudatosan, amely alkalmas valamilyen világosan megfogalmazott, de közvetlenül meg nem közelíthető cél elérésére”* (Pólya, 1967/1970, p. 129). A dolgozatban a probléma definícióját a matematikai problémamegoldás terén szintén maradandót alkotó Lénárd Ferencről (1964/1971) választottuk, miszerint *„problémának nevezzük a szó legáltalánosabb értelmében azt a helyzetet, amelyben bizonyos célt el akarunk érni, de a cél elérésének útja számunkra rejtve van”* (Lénárd,

1964/1971, p. 43). Ehhez hasonló megfogalmazásban a probléma az, amikor egy cél megvalósításához egy vagy több akadállyal kell megbirkózni (Jackson, 1983; Pintér, 2012). A probléma helyett „csak” feladatról beszélünk, ha az akadályok leküzdése, vagyis a megoldás folyamata rutinszerűen kivitelezhető a tanuló által. Ami az egyik tanuló számára probléma, a másik számára nem feltétlenül az. Azt, hogy egy tanuló számára mi a probléma, több tényező befolyásolja (például a motiváció is), de most csak kognitív tekintetben értelmezzük. A problémákat Pólya (1945/1977) két fő részre osztotta: meghatározó és bizonyító problémákra. A meghatározó problémáknál a probléma ismeretlenjének a megtalálása a cél, a bizonyító problémáknál pedig egy állítás igazságtartalmát kell belátni. A dolgozatunkban meghatározó problémák fordulnak elő.

Az értekezésünkben szereplő kutatási fejezetek szorosan kapcsolódnak a problémamegoldáshoz, így lehetőséget teremtenek a tanulói megértés típusainak és minőségének megfigyelésére is (Kónya & Kovács, 2023). Ehhez fő szempont kell legyen annak a vizsgálata, hogy a diák hogyan és miért tette azt, amit tett egy matematikai probléma megoldása során. Önmagában a tanuló által adott válasz helyességének értékelése keveset mondó lenne a tanuló megértéséről és gondolkodási folyamatairól (Lester, 1994). A diákok munkáinak megfigyelését és elemzését nem könnyíti meg, hogy a matematikai problémamegoldás nagyon összetett jelenség. Ennek ellenére vagy ebből adódóan Ambrus (1995) szerint a matematika tanításában fokozottan fennáll a veszélye annak, hogy kizárólag a kognitív célokat veszik figyelembe a tanárok. Schoenfeld (1992) a problémamegoldásban megjelenő matematikai tudást és viselkedést öt, egymással összefüggő összetevőre osztotta fel:

- Kognitív erőforrások, tudásbázis (The knowledge base)
Intuíciók és informális ismeretek, tények, algoritmikus eljárások, rutinszerű nem algoritmikus eljárások és a matematikai területen való munkavégzés elfogadott szabályainak tudása.
- Heurisztikus (problémamegoldó) stratégiák (Problem solving strategies)
Ábrák rajzolása, a megfelelő jelölések bevezetése, a kapcsolódó problémák felhasználása, a problémák újrafogalmazása, a visszafelé történő gondolkodás, a próbálgatás és ellenőrzési eljárások stb. A tanulóknak tisztában kell lenniük azzal, hogy a heurisztikus stratégiák téves megoldási ötletekhez is vezethetnek, ezért szükséges az ellenőrzés.
- Nyomon követés és ellenőrzés (Monitoring and control)
A kognitív tevékenységek során (például a problémamegoldás folyamatában) a kognitív erőforrások elosztásáért felel, nyomon követi, hogy mit csinál az egyén és mennyire használja fel az ezekből a megfigyelésekből származó információkat arra, hogy irányítsa, ellenőrizze a problémamegoldó műveleteit. A nyomon követés (monitoring) és az ellenőrzés (control) az egyik fő összetevője a metakogníció fogalmának (Schoenfeld, 1987). A dolgozatban ezen tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek vizsgálatával foglalkozunk.
- Meggyőződések és érzelmek (Beliefs and affects)
Az egyén matematikai világmépe, az egyén viselkedését meghatározó (nem feltétlenül tudatos) tényezők összessége, beleértve az önmagáról, a környezetről, a témakörökről és a matematikáról alkotott meggyőződéseket.

- Gyakorlatok (Practices)

Egy adott gondolkodói vagy egyéb közösség tevékenységmintái. Például az iskolai szokások és az osztálytermi környezet elősegítő vagy hátráltató szerepet játszik a tanulók matematikai problémamegoldó teljesítményében.

Pintér (2012) a problémamegoldást 3 fő összetevőre osztotta: kognitív, metakognitív és affektív részekre.

- Kognitív összetevő

Például fogalmak, összefüggések, problémamegoldási lépések és stratégiák tudása. A kognitív tevékenységek a cselekvésben vesznek részt.

- Metakognitív összetevő

A metakogníció a cselekvés kiválasztásában, megtervezésében, nyomon követésében, ellenőrzésében és értékelésében vesz részt.

- Affektív összetevő

Például azok a tapasztalatok, hogy egy probléma megoldása milyen nehézségekkel járhat (többszöri újrakezdés és próbálkozás, hosszú töprengési időszak stb.), megfelelő hozzáállás kialakítása, önbizalomszint.

A két modellt összevetve a Schoenfeld (1992) modelljében szereplő Kognitív erőforrások és a Heurisztikus stratégiák az előbbi háromtényezős modellből a Kognitív összetevőhöz tartoznak, a Nyomon követés és ellenőrzés, illetve részben a Meggyőződések és érzelmek a Metakognitív összetevőhöz, a Gyakorlatok, illetve a Meggyőződések és érzelmek egy része az Affektív összetevőhöz tartoznak. A dolgozat szempontjából az előbbi modellekből a Nyomon követést és ellenőrzést, tágabb értelemben a Metakognitív összetevőt emeljük ki és vizsgáljuk a továbbiakban.

1.2. A metakogníció fogalma és összetevői

A metakogníció története a metamémória (Flavell, 1971) kifejezés megjelenésével kezdődött, ami az egyén saját tudását jelentette az információk tárolásáról és visszakereséséről. Ennek megfelelően a metamémória magában foglalta az egyén memóriájának működésével, nehézségeivel és stratégiáival kapcsolatos ismereteit.

A metamémória fogalmát alapul véve néhány évvel később Flavell (1976, 1979, 1987) klasszikus tanulmányai bevezették a metakogníció fogalmát. A metakogníció az egyén saját kognitív folyamataira vonatkozó tudása és e folyamatok aktív megfigyelése (nyomon követése), következetes szabályozása és irányítása (ellenőrzése).

Amióta Flavell (1976) bevezette a metakogníció kifejezést, vita folyik arról, hogy mi is valójában a metakogníció, és hogyan lehet azt megérteni. Flavell által és alapján több hasonló definíciót olvashatunk a nemzetközi és a magyar szakirodalomban a metakogníció meghatározására. A magyar nyelvű szakirodalom a metakogníciót eleinte jellemzően úgy írta körül, mint kognícióra vonatkozó kogníciót (cognition about cognition) vagy gondolkodást a gondolkodásról (Szendrei, 2005; Csíkos, 2016). Szendrei (2005) meghatározásában a metakogníció a mentális folyamatainkról való gondolkodást, a reflektivitás tudatos elemeit jelenti. Zsigmond (2008) definíciójában a metakogníció az információk feldolgozásának és reprezentálásának tudatos ellenőrzése és szabályozása. Hogy milyen szerepkört tölt be a metakogníció, azt Csíkos (2016, p. 8) a következőképpen fogalmazta meg:

„[...] amint a tanulók elsajátították az alapokat, a képességük, hogy gondolkodjanak az adott területen azon alapszik, hogy tisztázzák a célokat, megértsék a fontos fogalmakat, nyomon kövessék a megértést, tisztázzák a zűrzavart, megfelelő irányba vivő sejtéseket fogalmazzanak meg, és ehhez megfelelő cselekvést válasszanak.”

A metakogníció nevezéktana változatos, ami megnehezíti a tájékozódásunkat ezen a területen (Csíkos, 2007). A fogalom megjelenésétől számítva majd 20 év munkája után Flavell és munkatársai (2002) a metakogníció két fő összetevőjét állapították meg: (1) a metakognitív tudást és (2) a metakognitív készségeket (Brown, 1987; Veenman 2006; Csíkos, 2016; Desoete et al., 2019; Zhao et al., 2019).

(1) A metakognitív tudást (metacognitive knowledge) a szakirodalom említi deklaratív metatudás néven is (Csíkos, 2007), amely az egyén saját információfeldolgozási képességeiről, valamint a kognitív feladatok természetéről és az ilyen feladatokkal való megbirkózási stratégiákról való tudására vonatkozik. A metakognitív tudáshoz hozzátartoznak az önmagunk és mások tudására vonatkozó ismereteink és meggyőződéseink (beliefs) is, amelyek már részben az affektív személyiségkörhöz sorolhatók (Csíkos, 2016), és nem vezetnek automatikusan a megfelelő stratégiai viselkedéshez (Veenman, 2017). Lucangeli és munkatársai (2019) a metakognitív tudást Cornoldira (2015) hivatkozva úgy definiálták, mint az elme működésével kapcsolatos egyéni attitűdöket, ismereteket és érzéseket, amelyek segítenek értelmezni a különböző kognitív folyamatok működését és szerepét.

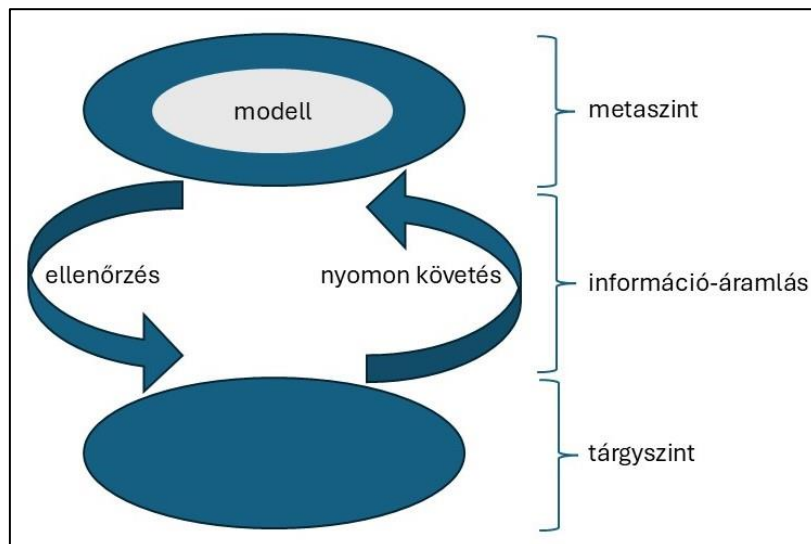
(2) A metakognitív készségeket (metacognitive skills) megtaláljuk a szakirodalomban metakognitív tevékenységek, procedurális metatudás, metakognitív stratégiák vagy metakognitív kontroll (Csíkos, 2007; Lucangeli et al., 2019) néven is. A metakognitív készségek a saját kognitív tevékenységek tervezésével (planning), nyomon követésével (monitoring) és ellenőrzésével (control) kapcsolatos folyamatokat jelentik (Csíkos, 2016). A dolgozat további részében mi a metakognitív tevékenységek elnevezést használjuk.

A metakogníciónak létezik más, több összetevős elméleti felosztása is (Flavell, 1979; Csíkos, 2007; Temur et al., 2019), de a dolgozatban, ahogyan a nemzetközi szakirodalomban is a legtöbben, a fent említett kétösszetevős felbontást használjuk. Összességében a metakognitív tudás és metakognitív tevékenységek megkülönböztetése széles körben elfogadott a pedagógiai- és a fejlődépszichológiában (Schneider & Artelt, 2010). Bár ezeket a komponenseket általában egymástól viszonylag függetleneknek tekintik, empirikus kutatási eredmények arra utalnak, hogy kölcsönösen befolyásolhatják egymást (Schneider et al., 1987; Schraw, 1994). Például bizonyos hibák elkövetésére való hajlam ismerete fokozott nyomon követési tevékenységhez vezethet. Több vizsgálat kapcsolatot talált a metakognitív tudás és a nyomon követési pontosság között (Schraw, 1994).

Fontosnak tartjuk még megemlíteni Nelson és Narens (1990/1992) modelljét, ami egy tárgyszintre és egy metasziintre osztja az emberi gondolkodást (lásd 1. ábra). A tárgyszint a kognitív folyamatainkat öleli fel, a metasziint pedig megfigyeli és irányítja a tárgyszintet. A két szint között folyamatos az információ-áramlás, valamint a nyomon követés és ellenőrzés az időbeli fázisokon áthúzódva végig jelen van a gondolkodás, így a problémamegoldás során is (Schneider, 1998). A metasziint az aktív nyomon követési folyamatok által tájékozódik a tárgyszint aktuális állapotáról. Például a problémamegoldás folyamán kapott válaszból való

magabiztosságunk megítélése vagy másképp a sikeresség érzése a nyomon követési folyamatokhoz tartozó összetevő (Schneider, 1998). Magabiztosság alatt azt értjük, hogy az ember milyen mértékben hisz különböző mentális műveletek sikerében (Fleming, 2023). Schneider szerint (1998) a nyomon követési folyamatok által szerzett információk megváltoztathatják a metaszint helyzetmodelljét és végül ellenőrzési tevékenységekhez vezethetnek. A metaszint módosíthatja az ellenőrzési tevékenységek által a tárgyszintű folyamatot, de fordítva ez nem működik, illetve amíg a metaszintnek van modellje a tárgyszintről, ez fordítva nem igaz (Schneider, 1998). Csíkos (2008) megemlíti, hogy Nelson és Narens elméletét érte olyan kritika, hogy elsősorban a metakognitív tevékenységek vizsgálatához alkalmas és a metakognitív tudás nem jelenik meg benne. Később viszont már a finomított modelljükben a metaszinten belül elkülönítve szerepel a modell kifejezés (lásd 1. ábra), ami a metakognitív tudásra utal. A finomított modell által váltak értelmezhetővé például a tervezés metakognitív tudáselemei is (Csíkos, 2008).

1. ábra: A metakogníció Nelson-Narens-modellje (Nelson, 1996)



Csíkos (2004) szerint a tárgyszinttel és a metaszinttel rendelkező kétszintű modell logikus és nem igényli további metaszintek bevezetését. „A gondolkodás metaszintjének nevezzük a tervezés, nyomon követés és ellenőrzés szintjét, és definíció szerint az lesz a gondolkodás tárgyszintje (fogalmazhatunk másképpen is: rutinszerűen működő, algoritmikus szintje), amelyre vonatkozott a tervezés, nyomon követés vagy ellenőrzés.” (Csíkos, 2004, p. 6). Az pedig, hogy egy gondolkodási folyamat tárgyszinten vagy metaszinten zajlik, a gondolkodótól, a problémától és a kontextustól függ (Csíkos, 2004). Emiatt a metaszintű (metakognitív) és tárgyszintű (nem-metakognitív) folyamatok aránya ugyanazon személynél eltérő lehet problémától és kontextustól függően (Csíkos, 2022b). Mivel a problémák különböznek a metakognitív folyamatok iránti igényüket tekintve, az erősen rutinszerű feladatok csak kevés metakognitív szabályozást igényelnek, ami nem meglepő (Schneider, 2010). A nagyobb kihívást jelentő feladatok megkövetelhetik a metakognitív folyamatok magasabb szintű (vagy bizonyos esetekben alacsonyabb szintű) bevonását, de a feladat megoldása során a vizsgaszerű stresszhelyzetek is befolyásolhatják a metakognitív folyamatok bekapcsolását (Csíkos, 2022b). Az előbb említett tényezők miatt is nehéz megállapítani, hogy a személy milyen fejlődési fázisban van a metaszintű folyamatok terén. Ugyanakkor fontos kiemelni, hogy a magasabb szintű vagy élénkebb metakognitív aktivitás nem minden esetben előremutató és nem feltétlen jelent magasabb szintű kognitív teljesítményt (Csíkos, 2022b).

Kahnemannál (2011) ugyan nem jelenik meg a metakogníció kifejezés, de az emberi gondolkodást a Nelson-Narens modellhez hasonlóan két szintre osztotta. Az 1. rendszer gyors és automatikus, ami a tárgyszintnek feleltethető meg a Nelson-Narens modellben. A 2. rendszer lassú és tudatos, ami a metas szintnek feleltethető meg. A 2. rendszer működéséhez nagyfokú figyelemre van szükség, éppen ezért nem is tud folyamatosan aktív maradni. A fáradtság és egyéb figyelemelterelő tényezők könnyen kizökkentik a feladatából.

A Nelson-Narens modellben a metakogníció működéséhez nincs feltétlenül szükség az egyén tudatos közreműködésére. Hasonlóképpen Diana és Reder (2004) értelmezésében a metakogníció egy adott kognitív állapotról szóló információra vonatkozik, emiatt lehet tudattalan is. A legtöbb esetben azonban a metakogníció értelmezése legalább olyan szintű tudatosságot feltételez az egyéntől, hogy az illető képes beszámolni a gondolatairól. Mi a továbbiakban ilyen tudatosságot értelmezünk a metakognícióra vonatkozóan.

A dolgozatban elsősorban a metakognitív tevékenységekkel foglalkozunk, amik Schoenfeld (1992) metakognitív modelljében éppen a Nelson-Narens modellben is említett nyomon követési és ellenőrzési folyamatoknak feleltethetők meg. Röviden önszabályozás (self-regulation) néven is említi ezeket Schoenfeld (1992), és szerinte a nyomon követés és ellenőrzés a metakogníció azon részei, amelyek a kognitív tevékenységek és a problémamegoldás során a kognitív erőforrások elosztását végzik. A nyomon követésnek és ellenőrzésnek mint metakognitív tevékenységeknek központi elemei a megoldási folyamat helytállóságának és az előre haladásnak a valós idejű követése és értékelése, valamint az ezekre válaszként adott döntéshozatal és cselekvés (Schoenfeld, 1987, 1992). Fontos hangsúlyozni, hogy a nyomon követés alatt tehát egy aktív megfigyelést értünk, aminek az következményeként bekapcsolhatnak az ellenőrző, szabályozó tevékenységek, ahogyan a Nelson-Narens modell tárgyalásánál is láttuk. Schoenfeld (1992) szerint, amikor egy matematikai problémán dolgozunk, a nyomon követő tevékenység által rájöhethetünk arra, hogy a probléma sokkal összetettebb, mint ahogyan azt először gondoltuk. Beindulnak az ellenőrző, szabályozó tevékenységek és talán inkább újrakezdjük és újra értelmezni próbáljuk a probléma szövegét. Tehát a problémamegoldás közepette figyelemmel kísérjük, hogy milyen irányba haladunk. Ha úgy tűnik, hogy a megfelelő irányba tartunk, akkor folytatjuk a megkezdett utat. Ha hibát találunk vagy megtorpanunk, akkor a megfelelő átgondolás után akár más lehetőségeket is kereshetünk a probléma megoldására. A nyomon követő és ellenőrző folyamatok kiváltásához Schoenfeld a következő kérdések megfogalmazását javasolja: Mit csinálók? Miért csinálom? Hogyan tud ez segíteni? Vezet-e ez valahová? Nem kéne valami mást kipróbálni?

Általánosan elismert, hogy a metas szintű folyamatok fontos összetevői a matematikai problémamegoldó viselkedésnek (Schoenfeld, 1987). Csíkos (2004, 2007, 2008) szerint a gondolkodás metas szintjének nevezzük a tervezés, nyomon követés és ellenőrzés szintjét. Schoenfeld nem emelte ki a tervezést, de láthatjuk, hogy bizonyos értelmezésekben a szakirodalom az előbb említett három fő tevékenységkört említi metakognitív tevékenységekként. A tervezés megjelenésével a problémamegoldás időben egymást követő fázisai is értelmezhetők. Kutatásunkban a tervezés folyamatával közvetlenül nem foglalkozunk, így az elméleti áttekintésben sem kap hangsúlyos szerepet a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekhez képest.

A metakognitív tevékenységek a matematikai problémamegoldás során sokszínűek és átfogóak lehetnek (Jacobs és Paris, 1987; Kluwe, 1987; Schraw & Moshman, 1995; Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007). Az alábbiakban a nyomon követéshez és ellenőrzéshez kapcsolódó részfeladatok két csoportját mutatjuk be.

(1) A kognitív feldolgozás nyomon követése és ellenőrzése:

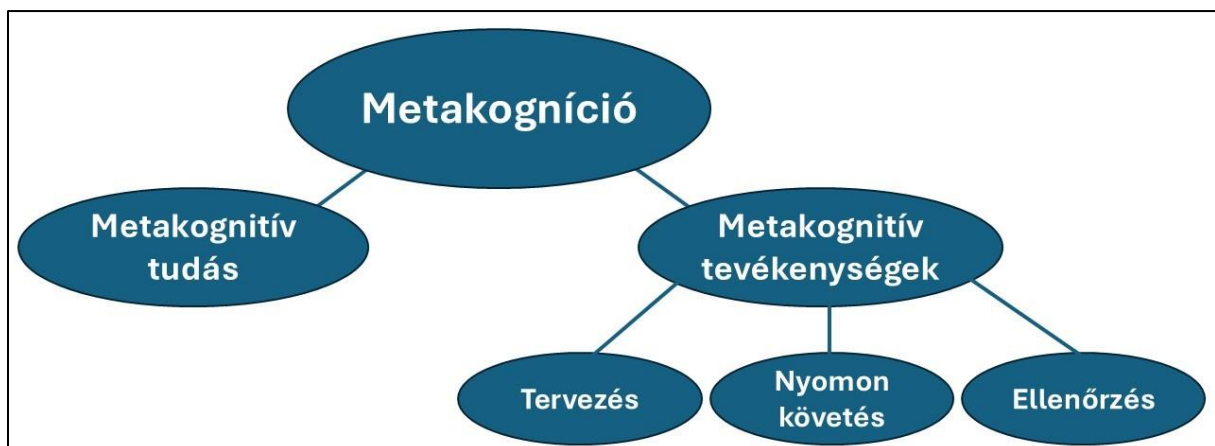
- a probléma követelményeinek és körülményeinek nyomon követése és ellenőrzése
- az alkalmazott jelölés vagy ábrázolás ellenőrzése
- a megoldás során használt fogalmak leírása, magyarázata
- a megoldás során használt fogalmak leírásához és magyarázatához használt szaknyelv nyomon követése és ellenőrzése
- a (témaszpecifikus) számítás nyomon követése és ellenőrzése
- az alkalmazott eszközök és eljárások érvényességének vagy megfelelőségének nyomon követése és ellenőrzése
- az érvelés vagy állítás következetességének nyomon követése és ellenőrzése (lépésenként vagy átfogóan)
- az esetlegesen téves elképzelés feltárása

(2) A kognitív feldolgozás eredményének értékelése:

- az eredmények és a kérdések közötti megfelelés ellenőrzése
- a kapott eredmény valószerűségének ellenőrzése (arra válaszolt-e a megoldó, amire kellett vagy az eredmény reális-e)

A metakogníció fogalmát tárgyaló fejezetünket Flavell meghatározásával kezdtük, miszerint a metakogníció az egyén saját kognitív folyamataira vonatkozó tudása és e folyamatok aktív megfigyelése (nyomon követése), következetes szabályozása és irányítása (ellenőrzése). Ez a definíció összhangban van a fejezetben eddig leírtakkal. A metakogníció két fő összetevője jól azonosítható. Az egyén saját kognitív folyamataira vonatkozó tudása, a metakognitív tudásnak felel meg. A folyamatok aktív megfigyelése, következetes szabályozása és irányítása pedig a metakognitív tevékenységeknek. Az aktív megfigyelés a nyomon követést takarja, a következetes szabályozás és irányítás pedig tágran értelmezve az ellenőrzési folyamatokat jelenti. Mindezek a Nelson-Narens modell metasztintű folyamataival is párhuzamba állíthatók. A 2. ábrán szemléltetjük a dolgozatunk fókuszában álló nyomon követő és ellenőrző tevékenységek elhelyezkedését a metakogníció fogalomkörén belül.

2. ábra: A nyomon követő és ellenőrző tevékenységek elhelyezkedése a metakogníció fogalomkörén belül



1.3. A metakogníció és a matematikai teljesítmény

Schoenfeld (1987) szerint a metakogníció többletértéke a matematikaoktatásban például abban rejlik, hogy segíti a tanulókat a matematikai fogalmak mélyebb megértésében és az összefüggések felismerésében. A metakogníció legfontosabb szerepe a matematikatanulásban a saját gondolkodási folyamatokról való tudás megszerzése, valamint a megfelelő nyomon követési és ellenőrzési tevékenységek kialakítása (Schneider, 2010).

A kutatók felvetették azt a kérdést, hogy a metakognitív tevékenységek általános vagy terület-specifikus készségek. Vannak tanulmányok, amelyek azt találták, hogy a metakognitív tevékenységek terület-specifikus készségként indulnak és később válnak általánossá (Veenman & Spaans, 2005; Van der Stel & Veenman, 2014). A kutatások jellemzően azt mutatják, hogy a metakognitív tevékenység inkább általános mint sem matematika-specifikus jelenség az egyén tanulási folyamatában (Desoete, 2019; Zhao et al., 2019).

A metakogníció és a matematikai teljesítmény közötti kapcsolatot számos kutatás vizsgálta. Többek között a 2003-as PISA felmérések 1433 15 éves tanuló mintája alapján azt mutatták, hogy az egyén metakognitív fejlettségi szintje és a matematikai teljesítménye közötti kapcsolat jelentős (Schneider & Artelt, 2010). A metakognitív fejlettségi szint alatt azt értjük, hogy az egyén milyen mértékben sajátított el metakognitív tudást és tevékenységeket (Flavell, 1978) és azokat mennyire tudja adaptívan alkalmazni. Ezt a fejlettségi szintet viszont nehéz megállapítani, hiszen már utaltunk rá, hogy a metakognitív fejlődés különböző képeket mutathat az egyéni, probléma és kontextus jellemzőiktől függően. A kutatók arról számolnak be, hogy a metakognitív fejlettségi szint a matematikai teljesítmény egyik legfontosabb előrejelzője (Depaepe et al., 2010; Schneider & Artelt, 2010; Verschafel et al., 2017). Emellett azt is megállapítják, hogy a metakognitív tudás és a metakognitív tevékenységek a matematikai teljesítmény különálló előrejelzői, illetve a metakognitív fejlettségi szint összefügg a problémamegoldó stratégiákkal és a tanulási stratégiákkal (Zhao et al., 2019; Desoete, 2019). A problémamegoldó döntéshozatala egy matematikai probléma megoldása során függhet az egyén metakognitív fejlettségi szintjétől (Erbas, 2012).

Verschaffel (1999) arra a megállapításra jutott, hogy a metakogníció különösen fontos a matematikai problémamegoldás folyamatában. Lester (1982) szerint az egyén metakognitív tudása és metakognitív tevékenységei jelentős szerepet játszanak a sikeres matematikai problémamegoldásban a problémamegoldási folyamat bármely szakaszában. A matematikai problémamegoldás során a megfelelő metakognitív tevékenységek lehetővé teszik, hogy a tanuló a tudását és készségeit rugalmas, adaptív módon alkalmazza. Ezt azért is fontos szem előtt tartani, mert nemzetközi tanulmányok kimutatták, hogy a tanulók nem teljesítenek jól az egyénél több lépést igénylő matematikai problémáknál (Kramarski, 2008).

Számos vizsgálat tárt fel jelentős összefüggést a nyomon követő, ellenőrző tevékenységek és a matematikai teljesítmény között általános iskolásoknál (Özsoy, 2011), valamint középiskolásoknál (Tobias & Everson, 2009; Roderer & Roebbers, 2013). A hibás nyomon követés és ellenőrzés a releváns tartalmi tudás aktiválásában és a kognitív folyamatok szabályozásában hiányosságokhoz vezethet (Hacker et al., 2008). Ennek következtében a nyomon követés és ellenőrzés minősége rövid távon befolyásolja az adott feladatban nyújtott teljesítményt, hosszú távon pedig a matematikai problémamegoldásra vonatkozó kognitív és metakognitív tudás felhalmozódását (Lingel et al., 2019).

1.4. A matematikai problémamegoldás és a metakogníció

Dolgozatunkban a problémamegoldó és a metakognitív tevékenységek együttesére matematikai gondolkodásként hivatkozunk. Mason és munkatársai (1982/2010, p. viii) tapasztalatai szerint a matematikai gondolkodás a következőkkel fejleszthető:

- a problémában megfogalmazott kérdések következetes megválaszolásával;
- a megoldás során szerzett tapasztalatokra való reflektálással;
- az intuíciók és a cselekvések összekapcsolásával;
- a problémamegoldás folyamatának utólagos tanulmányozásával;
- a tanultak korábbi tapasztalatainkhoz való illesztésével (asszimiláció és akkomodáció).

Vegyük észre, hogy a második, negyedik és ötödik pontok a Pólya György (1945/1977) által felállított problémamegoldó modell és folyamat (4)-es szakaszának tevékenységeköréhez kapcsolódnak. A Pólya-modell négy fázisa:

- (1) A feladat megértése
- (2) Tervkészítés
- (3) A terv végrehajtása
- (4) A megoldás vizsgálata (Visszatekintés)

Pólya A gondolkodás iskolája (1945/1977) című könyvében ezen lépéseket segítő kérdésekkel és utasításokkal látta el, amik az egyes szakaszok végrehajtását, tehát a problémamegoldás folyamatát támogatják és vezetik egy saját belső párbeszéd fenntartásával. Az egyes szakaszokban és a hozzájuk kapcsolódó kérdésekben metakognitív tevékenységeket (tervezés, nyomon követés, ellenőrzés) azonosíthatunk.

Schoenfeld (1985, 1992) kutatásai alapján azt találta, hogy Pólya modellje túl általános. Részletesebb, konkrétabb lépésekre és utasításokra van szüksége a tanulóknak ahhoz, hogy fejlődjön a problémamegoldó képességük. Lester (1985) azt nehezményezte a Pólya-modellben, hogy a metakognitív folyamatok nem expliciten szerepelnek benne, ezért egy kognitív-metakognitív problémamegoldó modellt hozott létre a Pólya-modell kiegészítésére. Lester (1985) problémamegoldó modelljének egyik alapelve, hogy a metakognitív összetevők irányítják a kognitív tevékenységeket. Lester modellje a következő szakaszokból áll, amelyek mindegyike kognitív és metakognitív tevékenységeket is tartalmaz, utóbbiak zárójelben szerepelnek:

- (1) Tájékozódási szakasz (stratégiai viselkedés a probléma felmérésére és megértésére)
- (2) Szervezési szakasz (a viselkedés megtervezése és a cselekvések kiválasztása)
- (3) Kivitelezési szakasz (a viselkedés szabályozása a tervek megvalósítása érdekében, lépések végrehajtása és nyomon követése)
- (4) Ellenőrzési szakasz (a meghozott döntések és a végrehajtott tervek eredményeinek értékelése)

Az 1. táblázatban a Pólya- és a Lester-modell szakaszainak néhány lehetséges mozzanatát mutatjuk meg.

1. táblázat: Pólya és Lester modelljének lehetséges mozzanatai szakaszonként

Pólya-modell (1945) néhány utasítása	Példák metakognitív elemekre Lester (1985) modelljéből
<p>A feladat megértése:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Értelmezzük a feladat szövegét és fogalmazzuk meg saját szavainkkal a feladatot, esetleg játsszuk el! - Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki? - Van-e adathiány, adattöbblet, ellentmondás? - Rajzoljunk, szemléltessünk! Vezessünk be alkalmas jelölést! 	<p>Tájékozódási szakasz:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Kulcsszavakat keresek, amik útbaigazítanak. - Számomra túl nagyok a problémában szereplő számok. - Típusfeladatnak tűnik. - Nem tudom mit tegyek a megoldás érdekében. - Ez nem hasonlít a korábban megoldott feladatokhoz.
<p>Tervkészítés:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Keressünk hasonló feladatot vagy tegyük egyszerűbbé a kitűzött feladatot! Hogyan tudom felhasználni? - Bontsuk részekre a feladatot! - A megoldás folyamatának ábrázolása. - A megoldáshoz szükséges eszközök, módszerek meghatározása. 	<p>Szervezési szakasz:</p> <ul style="list-style-type: none"> - A problémát úgy tudom megoldani, hogy ... - Nem vagyok benne biztos, de szerintem ezzel a módszerrel megoldható egy ilyen probléma. - Ez egy típusfeladat, amit úgy fogok megoldani, mint a többit.
<p>A terv végrehajtása:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Haladjunk lépésenként! - Ellenőrizzünk lépésenként! 	<p>Kivitelezési szakasz:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ez bonyolult. Figyelmesen kell haladnom a lépésekkel. - Ez a módszer nem működik. Megpróbálok mást kell keresni. - Ki kell mondjam mit csinálok, mert segít a nyomon követésben.
<p>A megoldás vizsgálata (Visszatekintés):</p> <ul style="list-style-type: none"> - Ellenőrizzük az eredmény realitását és helyességét! - Ellenőrizzük a következtetések helyességét! - Határozzuk meg a megoldás kulcsmozzanatait, tudatosítsuk a megoldási módszert! - Keressünk másik megoldási módszert! - Keressünk kapcsolatot más problémákkal! - Keressünk következményeket, általánosítást! - Fogalmazzunk meg új kérdéseket a problémához! 	<p>Ellenőrzési szakasz:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Nem voltam figyelmes. Jobban kell ellenőriznem a lépéseimet. - Nem vagyok benne biztos, hogy ez a terv megfelelő. Jobb, ha újra átnézem. - Nem vagyok biztos benne, hogy értem a feladatot. Inkább újra elolvasom. - Az eredmény túl nagynek tűnik. Ellenőriznem kell. - Úgy gondoltam, hogy ez egy típusfeladat, de szerintem mégsem.

Lester modellje abban tér el Pólyáétól, hogy az utolsó szakasz nem tartalmazza a kulcsmozzanatok és a megoldási módszer tudatosítását, másik megoldási módszer keresését, kapcsolódást más problémákhoz, a következmények és az általánosítás lehetőségének vizsgálatát, illetve az új kérdések vagy probléma alkotását. Már az utolsó szakasz elnevezése is árulkodó, hiszen a Lester-modellben ez a szakasz nem a megoldás vizsgálata, hanem az ellenőrzés nevet viseli. Ennek megfelelően Lester inkább az ellenőrzési folyamatot

hangsúlyozza. Az általa felsorolt mozzanatok párhuzamba állíthatók a nyomon követéshez és ellenőrzéshez kapcsolódó részfeladatokkal, melyeket korábban részletesen tárgyaltunk (lásd 14. oldal).

- A tájékozási és szervezési szakasz értékelése: a reprezentációk megfelelősége, a döntések megfelelősége, a tervek és a célok összhangja.

A felsoroltak a következő nyomon követő és ellenőrző tevékenységekhez kapcsolódnak: a probléma követelményeinek és körülményeinek nyomon követése és ellenőrzése; az alkalmazott jelölés vagy ábrázolás ellenőrzése; az alkalmazott eszközök és eljárások érvényességének vagy megfelelőségének nyomon követése és ellenőrzése.

- A kivitelezési értékelése: lépések eredményeinek ellenőrzése, a részeredmények összhangja a tervekkel és a probléma körülményeivel, a végeredmény összhangja a probléma körülményeivel.

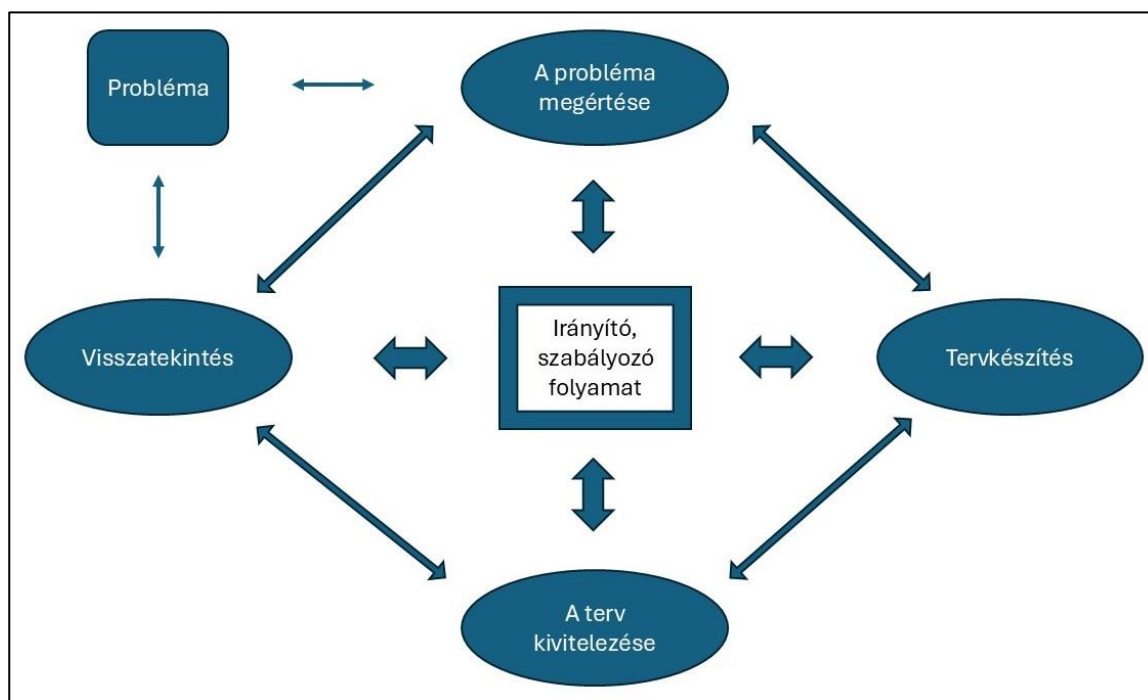
Ezek az alábbi nyomon követő és ellenőrző tevékenységekkel azonosíthatók:

témaspécifikus számítás nyomon követése és ellenőrzése; az érvelés vagy állítás következetességének nyomon követése és ellenőrzése (lépésenként vagy átfogóan); az esetlegesen téves elképzelés feltárása; az eredmények és a kérdések közötti megfelelő ellenőrzése; a kapott eredmény valószerűségének ellenőrzése.

Dolgozatunkban elsősorban a Lester-modell kivitelezési és ellenőrzési szakaszaiban vizsgáljuk a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit.

A problémamegoldás folyamatához és modelljeihez fontos megemlíteni, hogy a problémamegoldás nem egy lineáris lépéssorozat. Az említett modellek alkotói mind felhívták a figyelmet arra, hogy egy dinamikus, ciklikus folyamatról van szó (Ambrus, 1995). Wilson és munkatársainak (1994) ábrája (lásd 3. ábra) ezt szemlélteti. Az egyes szakaszok sorrendje nem állandó, hanem alkalmazkodik a felmerülő helyzetekhez, így rugalmas a szakaszok kapcsolata. Mindez tehát azt is jelenti, hogy a visszatekintés fázisának nem feltétlenül csak a problémamegoldási folyamat végén kell bekövetkeznie, hanem kapcsolódhat a többi fázishoz is. A probléma megértése, a terv kidolgozása és a terv végrehajtása közben is megvalósulhat egy rugalmas folyamat részeként, amelynek során a problémamegoldók ide-oda cikáznak a fázisok között (Pólya, 1945/1977; Lesh & Zawojewski, 2007; Ohelndorf, 2017). Ez párhuzamba állítható azzal, amit már említettük a 11. oldalon, hogy a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek, az egyes fázisokon áthúzódva végig jelen vannak a problémamegoldás során (Schneider, 1998). A 3. ábra közepén láthatjuk, hogy az irányító, szabályozó folyamatok felügyeletével működik a modell, amelyek a metaszintű folyamatoknak felelnek meg a Nelson-Narens modell értelmezésében (lásd 11-12. oldal).

3. ábra: A problémamegoldás dinamikus, ciklikus folyamatának szemléltetése



Tehát a fázisok kapcsolata rugalmas, sőt a tapasztalatok szerint a gyakorlatban a tervekészítési és a kivitelezési fázisokat nehéz szétválasztani, lényegében párhuzamosan zajlanak. Ennek megfelelően például Mason és munkatársai (1982/2010) a problémák megoldásának folyamatát három fő szakaszra osztották:

- (1) Belépés
- (2) Támadás
- (3) Felülvizsgálat

A felülvizsgálatot további három részre osztották (ellenőrzés, reflexió, kiterjesztés), és ez felosztás tartalmazza az általunk kiemelten vizsgált ellenőrzés részt. Az alábbiakban részletesen bemutatjuk a modell által leírt teljes folyamatot, mert a nyomon követésnek és ellenőrzésnek szerepe van minden szakaszban.

A belépési szakasz akkor kezdődik, amikor először találkozunk a kérdéssel, és akkor ér véget, amikor már beleéltük magunkat a probléma megoldásának megkezdésébe. A belépési szakasz sokaknak csak annyit jelent, hogy egyszer-kétszer elolvassák a problémát, majd azt várják, hogy rögtön a megoldáshoz vezető úton találják magukat. Ez azonban ritkán lehetséges. A belépési fázisban végzett munka megalapozza a támadási fázis hatékonyságát, ezért szükséges megfelelő időt szánni rá. A támadás gyakran azért nem sikeres, mert gond van a probléma megértésével. Két fő feladatunk van a belépési szakaszban: elsajátítani a megadott információkat, és kideríteni, hogy mit is kérdez valójában a probléma. A kutatások szerint a sikeresebb problémamegoldók sokkal több időt töltenek a probléma megértésével, elemzésével, reprezentálásával, megoldási terv készítésével, tehát a megoldás kezdeti lépéseivel, mint a kevésbé sikeres társaik (Schoenfeld, 1992).

A gondolkodás akkor lép a támadás fázisába, amikor úgy érezzük, hogy a probléma körülményei és célja belénk ivódta. A fázis akkor fejeződik be, amikor a problémát feladjuk vagy megoldjuk. A támadás fázisában végbemenő matematikai tevékenységek összetettek és változatosak. A támadás során többféle megközelítést lehet alkalmazni, többféle tervet lehet megfogalmazni és kipróbálni. Egy-egy új terv megvalósításakor a munka nagy ütemben

haladhat. Másrészt, amikor már minden ötletet kipróbáltunk, hosszú töprengési időszakok jellemezhetik a fázist, amikor új felismerésre vagy új megközelítésre kell várni. A nehézségek megoldására tett kísérletek maradhatnak a támadási fázison belül, vagy visszavezethetnek a belépéshez. Akár feladtuk, akár megoldottuk a problémát, elengedhetetlen a harmadik fázis, a felülvizsgálat.

A három fázis közül a támadás tűnhet a legfontosabbnak, mivel ez foglalja magában a nyilvánvaló matematikai tevékenység nagy részét. Ennek azonban éppen az ellenkezője a helyzet. A legtöbbször azért sikertelenek egy probléma megoldásában, mert nem fordítanak kellő figyelmet a belépés és a felülvizsgálat szakaszára. A felülvizsgálatnak szentelt idő a korábban megoldott problémákra is vonatkozik, mert a tapasztalatokból való tanulás a gondolkodásunk kulcsfontosságú mozzanatainak áttekintését is magában foglalja. Ha megfelelő minőségben megtörténik a felülvizsgálat, akkor az egyes problémák tanulságait sokkal nagyobb valószínűséggel tudjuk alkalmazni a későbbiekben.

A felülvizsgálat során visszatekinthetünk a történetekre, hogy ellenőrizzük, fejlesszük és bővítsük gondolkodási képességeinket, és megpróbáljuk általánosabb kontextusba helyezni a megoldásunkat. Egy hiba vagy hiányosság felfedezése visszavezethet a belépéshez vagy a támadáshoz (ciklikus folyamat). Csak a megrekedésből és annak elfogadásából lehet megtanulni, hogyan lehet kilépni belőle. Ha egy érdekes új kérdésre derül fény, esetleg a megoldás általánosítása révén, az egész folyamat újrakezdődik. A tanulás nagy része a felülvizsgálati fázis eredményeként jön létre, de ezt a tevékenységet túl gyakran figyelmen kívül hagyják.

Mason és munkatársai (1982/2010) további három részre osztották a felülvizsgálati szakaszt, amely tehát döntő fontosságú a matematikai gondolkodás fejlesztéséhez. A felülvizsgálat magában foglalja, hogy ellenőrizzük tevékenységünket, és reflektálunk a kulcsfogalmakra és kulcsmozzanatokra. Illetve tartalmazza az előretekintést is, hogy a folyamatokat és az eredményeket tágabb kontextusba terjeszthessük ki. A felülvizsgálat három fázisának ismertetését Mason és munkatársai (1982/2010) könyvének idevonatkozó részeiből saját fordításban közöljük.

(3a) A levezetés ellenőrzése (Check)

Az ellenőrzés részeit pontonként párhuzamba állítjuk a nyomon követő és ellenőrző tevékenység megfelelő részfeladataival (lásd 14. oldal). Ezeket a felsorolt tevékenységek után zárójelben tüntetjük fel. „Egy problémánál többféle ellenőrzést kell elvégezni:

- Ellenőrizni kell aritmetikailag és algebrailag a számítási hibák elkerülése érdekében. (témaszpecifikus számítás ellenőrzése)
- Ellenőrizni kell, hogy célravezető számításokat alkalmaztunk-e. (az alkalmazott eszközök és eljárások érvényességének vagy megfelelőségének nyomon követése és ellenőrzése)
- Ellenőrizni kell a feltételezések következményeinek helytállóságát. (az érvelés vagy állítás következetességének nyomon követése és ellenőrzése)
- Ellenőrizni kell, hogy valóban megválaszoltuk-e az eredeti kérdést. (az eredmények és a kérdések közötti megfelelés ellenőrzése, a kapott eredmény valószerűségének ellenőrzése)

A hibák keresése azáltal, hogy pontosan megismételjük azt, amit már megtettünk, rossz módja az ellenőrzésnek. Más, akár egyszerűbb módszerekkel próbálkozva ellenőrizhetjük a végeredményünk helyességét. Hogyan lehetünk teljesen biztosak abban, hogy nem követtünk

el hibát? Nem feltétlenül lehetünk biztosak benne. Vannak eredmények, amelyeket a matematikusok hosszú évekig helyesnek fogadtak el, mégis utólag hibákat találtak bennük. Az ellenőrzés tehát nehéz feladat.” (Mason et al., 1982/2010, p. 37)¹

Lucangeli és munkatársai (2019) arra a következtetésre jutottak, hogy a metakognitív és matematikai teljesítményeket hibaelemzéssel gazdagító pszichopedagógiai beavatkozások hatékonyan segíthetik elő mind a metakognitív tevékenységek, mind a matematikai teljesítmény fejlődését 2. osztálytól 9. osztályig. Mason és munkatársai (1982/2010) szerint sokkal többet lehet tanulni egy sikertelen próbálkozásból, mint egy gyorsan megoldott problémából, feltéve, hogy komolyan átgondoljuk a problémát és újra végig gondoljuk a megoldás módját. Pólya (1945/1977) és Schoenfeld (1992) is fontosnak tartja, hogy a tanulók sokat tanulhatnak hibás megoldásaikból is, amennyiben feltárják és elemzik az ehhez vezető gondolatmeneteiket. Ezért az ilyen esetek kezelését érdemes tanítani.

(3b) Reflexió a kulcsgondolatokra és a kulcsmozzanatokra (Reflect)

„A reflektálás az egész felülvizsgálati fázis központi eleme, talán a legfontosabb tevékenység a matematikai gondolkodás fejlesztéséhez. A közhellyel ellentétben nem tanulunk a tapasztalatainkból. Vagyis csak akkor, ha reflektálunk arra, amit tettünk. Össze kell szedni és rendszerezni a levezetés kulcsgondolatait és kulcsmozzanatait. A kulcsgondolatok felidézése és szemléletessé tétele a módja annak, hogy felépítsük a tapasztalatainkat, a matematikai trükkök tárházát. A kulcsmozzanatok felidézésében nagy segítség, ha van egy írásos beszámoló a gondolkodásunkról.” (Mason et al., 1982/2010, p. 38)²

(3c) Kiterjesztés tágabb kontextusra (Extend)

„A kiterjesztés kéz a kézben jár a reflexióval. Ahogy visszanezünk, hogy mi volt a fontos, a megértés növekszik, és a korábbi fáradtságos munka néha váratlanul értékes eredményt hozhat még egy kis plusz erőfeszítéssel.” (Mason et al., 1982/2010, p. 38-39)³

Dolgozatunk elsősorban a Pólya- és Lester-féle modellek (3) és (4), illetve a Mason-modell (2) és (3) fázisában megvalósuló nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket vizsgálja. A Pólya-féle és a Mason-féle modellek utolsó fázisának tevékenységkörét így szűkebben, inkább csak az ellenőrzés és bizonyos szintű reflexió szempontjából vizsgáljuk. A 2. táblázatban összefoglaljuk és párhuzamba állítjuk a tárgyalt modellek szakaszait.

2. táblázat: A három általunk ismertetett modell összehasonlítása

Pólya (1945/1977)	Lester (1985)	Mason és munkatársai (1982/2010)	
A feladat megértése	Tájékozódási szakasz	Belépés	
Tervkészítés	Szervezési szakasz	Támadás	
A terv végrehajtása	Kivitelezési szakasz		
A megoldás vizsgálata	Ellenőrzési szakasz	Ellenőrzés	Felülvizsgálat
		Reflexió	
		Kiterjesztés	

A három problémamegoldó modell áttekintéséből láthatjuk, hogy a nyomon követés és ellenőrzés mint metakognitív tevékenységek minden fázisban megvalósulnak vagy megvalósulhatnak. Ugyanakkor jellemzően a modellek utolsó fázisaiban aktívabbak a nyomon

¹ A szerző saját fordítása.

² A szerző saját fordítása.

³ A szerző saját fordítása.

követő és ellenőrző tevékenységek (Garofalo & Lester 1985). A megoldás megszületését követő fázisról (az ismertetett modellek utolsó fázisa) azonban több kutató megállapította, hogy a legelhanyagoltabb fázis (Wilson et al., 1993; Cai & Brook, 2006; Jacobbe, 2007; Ohlendorf, 2017; Mason, 2022). Ohlendorf (2017) összegyűjtötte azokat a lehetséges okokat, amik miatt nehéz rávenni a tanulókat a visszatekintő tevékenységekre. Erős és berögzült az a tanulói meggyőződés, hogy a problémamegoldás egyetlen célja, hogy a feladat szövegében megfogalmazott kérdésre válaszoljunk. Az előírt tananyaggal gyorsan kell haladnia a tanárnak ahhoz, hogy időben sikerüljön mindent átvenni, így bizonyos tevékenységek háttérbe szorulnak. A számonkérés és értékelés módjai nem vagy csak minimálisan helyeznek hangsúlyt a visszatekintésre. A felsoroltak a visszatekintés fázis gátjai, de egyúttal a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek akadályozó tényezőiről is beszélhetünk. Ugyanakkor ezen tevékenységek fontosságát és elvárását jelzi a magyar Nemzeti Alaptanterv 5. alapelve is, amely tartalmazza a következőt: „*A tanuló fejlessze a logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai és rendszerező gondolkodását.*” (NAT, 2020, p. 328). Bár ez nagyon tág értelmezést ad a megvalósíthatóság szempontjából, párhuzamba állítható a metakognitív tudással és tevékenységekkel.

1.5. A metakogníció fejlődése és tanítása

A metakognitív fejlettségi szint mint tényező, hasznosnak tűnik a matematikai teljesítmény egyéni különbségeinek magyarázatára, de arra a kérdésre, hogy a matematikában gyengén teljesítő tanulók a metakogníció terén is eltérően teljesítenek-e, még nem kaptunk választ (Desoete, 2019). Számos intervenciós vizsgálat bizonyította, hogy a "normál" tanulók és a különösen alacsony matematikai teljesítményűek is jelentősen profitálnak a metakognitív oktatási eljárásokból (Schneider & Artelt, 2010). Schneider (2008) összefoglalójából kiderül, hogy a metakognitív tudás és a metakognitív tevékenységek fejlődési útja különböző. Az előbbi fejlődési pályája egyenletesnek mondható, a metakognitív tevékenységek viszont nem mutatnak ilyen egyértelmű fejlődési mintát. Hasonló tapasztalatra hívja fel a figyelmet Alexander és munkatársai (1995) tehetséges gyerekek körében végzett kutatása, amely azt mutatta, hogy a metakognitív tudás egyenletesen fejlődik, a metakognitív tevékenységek esetében azonban ez nem mondható el. Bár a kutatásból kiderült, hogy a magas szintű intelligencia és kognitív teljesítmény nem feltétlenül jelentenek magas szintű metakognitív tevékenységet, a kognitív és a metakognitív fejlődés szorosan összefügg. A kognitív fejlődést jellemzi, hogy növekszik a metaszintről a tárgyszintre átkerülő gondolatok száma (Csíkos, 2016). Többek között erre és a metakognitív tevékenységek változására ad példát a következő idézet.

„A legegyszerűbb alapléveleti számolási feladatot (például: mennyi $5+2$?) az óvodás gyermek egész sor metakognitív stratégia működtetésével oldja meg. Először eldönti, értelmes és megoldható-e számára a feladat, majd valamilyen számolási stratégiát keres, és annak működését felügyeli, amikor az ujjain kiszámolja a végeredményt. Ez a gondolat vezethet oda, hogy bizonyos problémák, feladatok a gyermek számára metakognitív stratégiák felhasználását igénylik, a felnőtt számára pedig a gondolkodás tudatos kontrollja nélkül, algoritmikusan megoldhatók. Ez az önmagában természetes fejlődési útnak tartható jelenség azonban visszaüthet, amikor egy készség fejlődése az automatizáltság magas szintjére jut. Ha alapléveletekkel jól bánó gyermek egy szöveges feladatban találkozik két számadattal, és meglátja a „nagyobb” szót, akkor a metakogníció

kikapcsolása mellett szinte bizonyosan összeadja a két számadatot, és a kapott újabb számot tekinti végeredménynek.” (Csíkos, 2016, p. 67-68)

Csíkos (2022a) szerint metakognitív (metaszintű) és nem metakognitív (tárgyszintű) folyamatok kezdetektől való állandó jelenléte figyelhető meg az alapképességeink fejlődésében. A fejlődést pedig az jelentheti, hogy a korábbi metaszintű folyamatok automatizmusokká válnak és így újabb metaszintű folyamatok kaphatnak teret.

Széles körű egyetértés van abban, hogy a gyermekek metakogníciójának fejlesztése révén elősegíthető a kognitív fejlődés (Schneider & Artelt, 2010). A Flavell és társai által végzett korai kutatásokból az volt levonható, hogy a metakognitív fejlődés nagy része 8-9 éves korig befejeződik (Kreutzer et al., 1975). Más kutatások szerint azonban amellet, hogy a metakognitív képességek meglehetősen lassan fejlődnek az iskolai évek során, kimutatták, hogy még a serdülőknél és a felnőtteknél is van további lehetőség a fejlődésre (Brown et al., 1983; Weil et al., 2013). Schneider (2008) azt találta, hogy a metakognitív tudással kapcsolatos eredmények folyamatos javulást mutatnak gyermek- és serdülőkorban, viszont a metakognitív tevékenységek fejlődésére vonatkozó eredmények nem mutatnak ilyen meghatározott fejlődési ívet az életkor szerint. A megfigyelt életkori trendek szignifikánsak az ellenőrző tevékenységek esetében, de nem hangsúlyosak a nyomon követő tevékenységek tekintetében. Schneider (2010) összefoglalója ugyanakkor hangsúlyozza az oktatási kontextusok fontosságát a fejlődési változások szempontjából, A dolgozatunk kutatási ürt kíván betölteni azzal, hogy a középiskolás korosztály metakognícióját vizsgálja a matematika terén.

A metakogníció fejlesztésének elengedhetetlen feltétele a tanárok, illetve a tanítási folyamat vizsgálata a témában. Depaepe és munkatársai (2010) kimutatták, hogy a tanárok ritkán, vagy egyáltalán nem foglalkoznak a metakognitív tevékenységek használatának "hogyan" és "miért" kérdéseivel. Dignath és Büttner (2018) megerősítették, hogy a tanárok főként kognitív és csak nagyon kevés metakognitív stratégiát tanítanak, ami arra utal, hogy szükségük lehet a metakognícióval kapcsolatos képzésre és explicit utasításokra. Desoete és Veenman (2006) azt találták, hogy a tanárok hajlandóak erőfeszítést tenni a metakogníció tanítására a tanórákon belül, de szükségük van az eszközökre ahhoz, hogy a metakogníciót a tanórák szerves részeként valósítsák meg. Wafubwa és munkatársai (2022) tanulmánya 213 kenyai matematikatanár metakognícióról alkotott felfogását és bizonyos háttértényezőket metakognícióra gyakorolt hatását vizsgálták. A tanulmány egyik fontos üzenete, hogy a tanárok csak akkor tudják a diákokat metakognitívvá nevelni, ha ők maguk is metakognitívak. Szükség van arra, hogy a tanárok tudatosan alkalmazzanak metakognitív tevékenységeket és ezeket megfelelően bemutassák, tanítsák a diákoknak. Az említett kutatás eredményei is rámutatnak arra, hogy a tanárokat képezni kell a metakogníció középiskolai megvalósítása terén. A tanárok a metakognitív tevékenységek alkalmazását akadályozó okok között említették a nagy osztálylétszámot, a nagy munkaterhelést és a motivációjuk hiányát.

A metakognícióról a kutatók többsége azt állítja, hogy tanulható és tanítani kell (Schneider & Artelt, 2010; Baten & Desoete, 2019; Hacker et al., 2019; Lucangeli et al., 2019; Shilo & Kramarski, 2019). Donker és munkatársainak (2014) metaanalízise 2000 és 2012 közötti kutatások alapján megerősítette a metakognitív ismeretek oktatásának jelentőségét az írás, olvasás, a természettudományok és a matematika területén is az általános és középiskolás korosztálynál. A matematikai készségek fejlesztése érdekében a metakognitív készségeket explicit módon kell tanítani, mivel azok nem fejlődnek spontán módon a közvetett tapasztalatokból. (Desoete & Veenman 2006; Ader 2019). Ennek egyik eszköze, hogy a tanulókat metakognitív-matematikai diskurzusokba vonják be, amely közben a metakognitív tevékenységeket „hogyan” és „miért” kérdésekkel váltják ki. Cohors-Fresenborg és Kaune

(2001) és Kaune (2006) olyan matematikai tantervet dolgozott ki, amely előtérbe helyezte a metakognitív tevékenységeket és bizonyította a diskurzusokra kiemelt hangsúlyt fektető tanítás jelentőségét a matematikai problémák megértése szempontjából. Kutatásaik szerint az osztályban zajló tanulási folyamat csak akkor vezethet mély megértéshez, ha a kapcsolódó metakognitív tevékenységeket a tanár jól megtervezi és koherens megbeszélés, vita valósul meg, vagyis a tartalom elsajátításában a tanuló aktívan részt vesz, mind saját, mind társai gondolatmenetét folyamatosan nyomon követi és ellenőrzi. Például a megoldáshoz való eljutás módjának megvitatása lehetővé teszi, hogy a diákok megmagyarázzák gondolkodásukat, illetve arra is lehetőséget ad, hogy tanuljanak a többi tanulótól, és hatékonyabb problémamegoldási módszereket fejlesszenek ki (Ohlendorf, 2017). Azon tanárok számára, akik információkat szeretnének gyűjteni diákjaik metakognitív folyamatairól, az osztálytermi megbeszélés hatékony módszer (Csíkos, 2022b). A tanulók aktív bevonásához, a tanulói metakognitív tevékenységek ösztönzéséhez és a hatékony tanuláshoz az órai beszélgetéseknek „diskurzivitást” kell tartalmaznia (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Nowińska, 2016). A diskurzivitás és a negatív diskurzivitás kifejezésekkel az órán elhangzott tanári megnyilvánulásokat akarjuk osztályozni és minősíteni.

- A diskurzivitás a vita koherenciájának és pontosságának támogatása érdekében végzett tanári tevékenységeket jelenti. Diskurzív tevékenységekre példa a tanulók ötleteinek, stratégiáinak, elképzeléseinek és téves elképzeléseinek pontos újrafogalmazása és összehasonlítása, illetve összekapcsolása a matematikai fogalmakkal vagy érvelésekkel. Akár maga a tanár teszi meg az előző példákat, akár a tanulókból váltja ki ezeket a tevékenységeket, diskurzivitásról beszélünk.
- Ezzel szemben a „negatív diskurzivitás” olyan szóbeli megnyilvánulás a tanár részéről, amely negatívan befolyásolja a szóban forgó fogalom tanulói megértését. Ilyenek például azok a kérdések, amikre a tanár maga válaszol, vagy a kérdés megértése nélkül is egyértelmű a tanuló számára, hogy a tanár milyen választ vár, vagy a tanár nem megfelelő szavakat használ és nem egyértelmű mondatokat fogalmaz meg, vagy a tanár érvelésének a felépítése logikailag helytelen, vagy a tanár egy oda nem illő gondolatot emel be a beszélgetésbe.

A diskurzivitás, az osztálytermi megbeszélés mint pedagógiai eszköz megjelenése és elvárása nem újkeletű a magyar matematikaoktatásban. A Varga Tamás nevével fémjelzett 1978-ban bevezetett általános iskolai matematika tanterv módszertani alapelvei között megtaláljuk a tanulók szóbeli és írásbeli kifejezőképességének formálását, az önálló véleményalkotásuk fejlesztését és a viták ösztönzését (Varga, 1988).

A magyar tanítási gyakorlatban azonban mindezek ellenére az osztálytermi diskurzusok jelenléte nem általános. Ennek okai sokfélék lehetnek. Egyik lehetséges magyarázat arra, hogy a tanárok miért részesítik előnyben a tanárközpontú óraszervezést a tanulóközpontúval szemben a tanárok kognitív terhelésével függ össze. Ha tanulók az órán megkapják a lehetőséget az önálló gondolkodásra és a megfigyeléseik saját szavakkal történő megfogalmazására, akkor a tanár könnyen kerülhet olyan helyzetbe, hogy a kognitív terhelése növekszik (Kónya & Kovács, 2020). A kognitív terhelés a munkamemóriában (rövidtávú memóriában) az információfeldolgozás során keletkezett terhelést jelenti (Ambrus, 2015). Ennek oka az, hogy a tanárnak váratlan helyzeteket kell azonnal megértenie, értékelnie, majd döntenie arról, hogy hogyan kezelje a felmerült helyzetet. A tanár ezt a fajta terhelést jellemzően úgy csökkenti, hogy számára minél kiszámíthatóbbá teszi a tanórát, vagyis például

a diákok megnyilvánulásait és felvetéseit, a tanulók közötti vitákat háttérbe szorítja és inkább ő beszél és magyaráz (Kónya & Kovács, 2020). A tanulóközpontú óravezetésből adódó kognitív terhelés azonban úgy is csökkenthető, hogy a tanár saját munkájára rendszeresen reflektálva minél több várható tanulói reakcióra készül fel. Hasznos lehet az is, ha a tanár ismer széles körben alkalmazható általános és speciális kérdéseket, sémákat, amiket használhat bizonyos helyzetekben (Kónya & Kovács, 2020).

Kramarski és munkatársai (2013) rendszerezték azokat az általános és tartalom-specifikus kérdéseket, amelyek egyúttal támogatják a tanulók metakognitív tevékenységeit a matematikai problémamegoldás során és kapcsolódnak a különböző problémamegoldó-modellek fázisaihoz. Ezeket a kérdéseket a tanulók feltehetik maguknak vagy a tanár ezen kérdésekkel ösztönözheti a tanulóit a szükséges tevékenységekre.

Általános kérdések: különböző helyzetekben használhatók, a figyelem összpontosítására vagy a tanulók gondolkodásának ösztönzésére szolgálnak, függetlenül a tartalmi területtől.

- A megértést segítő kérdések (például: Mi a probléma?)
- Az összekötő kérdések (például: Mi a különbség vagy hasonlóság? Hogyan igazolom a következtetésemet?)
- A stratégiai kérdések (például: Mi a stratégia? Miért?)
- A reflexiós kérdések (például: Van-e értelme a megoldásnak? Elégedett vagyok-e azzal, ahogy a feladattal szembéztem? Megoldható-e a feladat másképp?)

Tartalom-specifikus kérdések: konkrét matematikai tartalomhoz köthetők, az esetleges tartalmi megakadás, például hiányzó tudáselem pótlását szolgálja vagy adott tartalomhoz köthető megoldási stratégia felelevenítését ösztönzi. Például: Milyen lépéseket kell tennem egy ilyen típusú feladat megoldása során? Mit csinálnék másképp legközelebb egy hasonló típusú feladat megoldása során?

A metakognitív tevékenységek oktatásának a tanulói teljesítményre gyakorolt pozitív hatásait de Boer és munkatársainak (2018) tematikus áttekintése is megerősítette. Kutatások azt találták a siker okának, hogy a metakognitív tevékenységek tanítását a diákok számára beépítették a mindennapokba és nem elszigetelten valósították meg, hanem a tantervbe integrálták, illetve a tanárok nem egyetlen tevékenység használatát hangsúlyozták, hanem a tantárgynak, az időbeli korlátoknak és a feladat egyéb követelményeinek megfelelő eljárások rugalmas alkalmazását tanították (Schneider & Artelt, 2010; Desoete, 2019). Cornoldi és munkatársai (1995) egy olyan programot dolgoztak ki, amely a metakogníció fejlesztésére összpontosított, és tanulási nehézségekkel küzdő és nem küzdő gyerekeknél is hatékonyan bizonyult.

Ennek az alfejezetnek a zárásaként meg kell jegyeznünk, hogy a metakogníciót adaptív módon, szükségszerűen kell tanítani és használni, és nem szabad elhanyagolni a természetesen és automatikusan működő kognitív készségek kialakításához szükséges rengeteg gyakorlást sem (Csíkos, 2022b). Éppen ezért is a tanárok fejlesztése és a pedagógusképzés szempontjából Duffy (2005) az adaptív szakértelem fontosságát hangsúlyozta. Veenman (2013) például arról számol be, hogy a metakognitívan kompetens tanulóknak nem kellene további képzésben részesülniük a metakogníció terén, mivel az zavarhatja a metakognitív tevékenységek spontán használatát. Azt, hogy kiket tekinthetünk metakognitívan kompetens tanulóknak, valamilyen mérésből következtetjük, és különösen a metakognitív tevékenységek szempontjából a különböző mérőeszközök és eredményei között nem könnyű szintézist találni.

1.6. A metakogníció mérése

Az egyén metakognitív folyamatainak és metakognitív fejlettségi szintjének mérése foglalkoztatja a kutatókat. A szakirodalomban lényegi különbség van a metakognitív tudás és a metakognitív tevékenységek mérőeszközei között (Csíkos, 2016). A metakognitív tudás mérése szinte megegyezik a tárgyi tudás mérésére alkalmas eszközökkel, tesztekkel. A metakognitív tevékenységek méréséhez a metakognitív tudáshoz képest gyorsabb működéséből és markánsabb tartalomhoz kötöttségéből adódóan az eszközök összetettebbek. A metakognitív tevékenységek mérésére használt módszereket aszerint csoportosítjuk, hogy a mérés a problémamegoldás folyamatához képest előbb, menetközben, avagy utólagosan történik (Csíkos, 2004). A problémamegoldás folyamata előtt és után elsősorban kérdőívek és szóbeli interjúk segítségével mérnek. A feladatmegoldás folyamata utáni mérések során az elsődleges cél a feladatmegoldás felidézése. A valós idejű (online) mérési eszközök például a szemmozgás-vizsgálat (eye-tracking), a megfigyelések (observations) és a hangosan gondolkodtatás (think-aloud protocol).

A dolgozatunkban is alkalmazott hangosan gondolkodtatásnál a problémamegoldónak a megoldás közben szóban folyamatosan be kell számolnia a gondolatairól, amelyek többek között a tervezésről, tanácsalanságról, a feladat elemzéséről, számítások elvégzéséről, vagy az eredmény ellenőrzéséről szólnak (Csíkos, 2016). A hangosan gondolkodtatás módszere a tudatos metakognitív tapasztalatok mozzanatait ragadja meg (Jaušovec, 1994) és nagy pontossággal mutathatja meg az interjúalanyok szubjektív tapasztalatait (Petitmengin, 2006). Azonban azt is szem előtt kell tartani, hogy a kognitív készségeink működéséről gyakran nehezen tudunk szóban nyilatkozni, amihez még azt is hozzá kell tenni, hogy Libet (2002) kutatásai szerint a tudatos döntésekhez nagyjából fél másodperces időegységek társíthatók. Ez azt is jelenti, hogy ha problémamegoldás közben hozunk egy döntést, az csak egy kicsivel később válik tudatossá. Ebből az is következik, hogy a metakognitív tevékenységek gyorsasága megakadályozhatja az egyént abban, hogy a folyamattal egyidejűleg szóban is beszámoljon róluk. A későbbi tudatos hozzáférés és a szóbeli beszámoló lehetősége azonban megmarad (Csíkos, 2016). Az imént felsorolt hátrányok mérsékelhetők, ha például a problémamegoldás befejezését követően kérünk szóbeli beszámolót (retrospective verbal report) a tanulóktól, amikor elmondják, hogy mit csináltak és hogyan gondolkodtak a folyamat során (Baker & Cerro, 2000).

A 3. és 4. fejezetben található kutatásainkban a tanulók problémamegoldás folyamata közben végzett írásbeli munkáiban figyeljük meg a metakognitív tevékenységeket, illetve az arra utaló jeleket. Az 5. fejezetben a hangosan gondolkodtatás és szóbeli beszámoló módszerét együtt alkalmazzuk. Majd a 6. fejezetben osztálymegbeszélés, vagyis szóbeli megnyilvánulások alkalmával a problémamegoldás folyamata közben és után figyeljük meg a tanulókat metakognitív tevékenységre ösztönző helyzeteket.

2. Kutatási kérdések

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységekkel kapcsolatos empirikus vizsgálatainkhoz négy fő kutatási kérdést fogalmaztunk meg és mindegyikről a dolgozat egy-egy fejezete számol be. A fő kutatási kérdésekre további kérdések segítségével kerestük a válaszokat.

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

K1.1. Milyen jellegű ellenőrző tevékenységeket végeznek a tanulók írásban?

K1.2. Van-e különbség az ellenőrző tevékenységek minőségében a megoldás helyességétől függően?

K1.3. Észreveszik-e a tanulók az elkövetett hibát és tudják-e azt javítani?

Ebben a kutatásban 9. osztályos tanulók írásbeli munkáiban kerestük a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre utaló nyomokat. A vizsgálatot nem előzte meg a metakognitív tevékenységekkel kapcsolatos célzott beavatkozás. Tehát arra voltunk kíváncsiak, hogy beavatkozás nélkül mit figyelhetünk meg.

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

K2.1. Kialakítható-e egy adott témakör tanítása során az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

K2.2. Milyen nyomon követő és ellenőrző tevékenységek figyelhetők meg egy olyan feladat megoldása során, amelynek több, akár ellentmondást is tartalmazó megoldása van?

Ebben a kutatásban egy 9. osztályban megvalósuló fejlesztő kísérlet eredményességét és a metakognitív tevékenységekre vonatkozó hatását vizsgáltuk. A beavatkozásunk egy meggyőződés, vagyis egy metakognitív tudáselem felülírására irányult és ezáltal kapcsolódott a metakognitív tevékenységekhez.

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

K3.1. Azonosíthatók-e nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a szóbeli magyarázat által adott többletinformációkban?

K3.2. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa a feladatok témakörétől?

K3.3. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől?

Ebben a kutatásban 11-12. osztályos tanulók írásbeli problémamegoldása és a hozzá tartozó szóbeli magyarázatuk kapcsolatát elemeztük. Kerestük a metakognitív tevékenységek megjelenését, illetve azok jellemzőit a tanulók szóbeli megnyilvánulásai alapján.

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

K4.1. Előfordulnak-e tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kiváltására alkalmas helyzetek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

K4.2. Ha igen, hogyan kezeli a tanárjelölt ezeket a helyzeteket?

K4.3. Milyen tényezők befolyásolhatják a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését az osztálytermi megbeszélésben a tanárjelöltek óráin?

Ebben a kutatásban tanárjelöltek óráit elemeztük, abból a szempontból, hogy a kiemelt órarészletben hogyan kezelték a tanulókat metakognitív tevékenységekre ösztönző helyzeteket a frontális munka során. Megfigyeltük, hogy mi jellemezte ezeket a helyzeteket és javaslatokat tettünk arra, hogy hogyan lehetett volna egy-egy párbeszédet folytatni vagy másképp vezetni.

A 3. táblázat a négy kutatás néhány fő jellemzőjét mutatja be, mielőtt az egyes fejezetekben részletesen is tárgyalnánk azokat.

3. táblázat: A négy kutatás fő jellemzői

Kutatási kérdések	Mit vizsgáltunk?	Előzetes beavatkozás	Korosztály	Létszám	Korpusz
K1	problémamegoldás írásban	beavatkozás nélkül	9. évfolyamot kezdők	111 tanuló	feladatlap
K2	problémamegoldás írásban	fejlesztő kísérlet hatása	9. osztály	29 tanuló	feladatlapok
K3	írásbeli problémamegoldás kiegészítése szóbeli magyarázattal	célzott beavatkozás nélkül	11-12. osztály	27 tanuló	feladatlapok és hangfelvételek
K4	problémamegoldást követő osztálymegbeszélés	beavatkozás nélkül	9-12. osztály, végzős tanárjelöltek	7 tanárjelölt	órai feljegyzések és az órák leirata

3. Tanulói metakognitív tevékenységek ösztönzése és megfigyelése irányított írásbeli problémamegoldás során

3.1. Bevezető

Ebben a fejezetben bemutatott kutatással az volt a célunk, hogy betekintést nyerjünk 9. osztályos diákok nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek jellemzőibe az önálló írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza (Lester, 1985) során. Egy kombinatorikai problémát tartalmazott az általunk szerkesztett feladatlap, amelyen írásbeli utasításban kértük a tanulóktól a megoldásuk lépéseinek indoklását, utána pedig az írásbeli ellenőrzést a megoldásuk helyességét illetően. Megfigyeléseinket nem előzte meg semmilyen célzott beavatkozás vagy fejlesztés ezen a területen.

Az ellenőrzés különösen nehéz feladat a tanulóknak, ha kombinatorikai problémáról van szó. A kombinatorikai problémák többsége nem oldható meg mechanikusan, hanem kritikai gondolkodást igényel, így aktiválja a metakognitív tevékenységeket, a stratégiai tervezést, ezáltal javíthatja a matematikai teljesítményt (Csíkos et al., 2012).

3.2. Kutatási kérdések

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

K1.1. Milyen jellegű ellenőrző tevékenységeket végeznek a tanulók írásban?

K1.2. Van-e különbség az ellenőrző tevékenységek minőségében a megoldás helyességétől függően?

K1.3. Észreveszik-e a tanulók az elkövetett hibát és tudják-e azt javítani?

3.3. Módszerek

A kutatás módszere a tanulók részletes írásbeli utasításokkal támogatott írásbeli munkáinak (scaffolding módszer) kvalitatív tartalomelemzése egy mérési pontban lezajlott felmérés után.

3.3.1. Minta

A metakogníció szempontjából az általános iskolás korosztályhoz képest ritkábban vizsgált középiskolásokat akartuk megfigyelni, mégpedig az általános iskola után közvetlenül következő 9. évfolyamot. Kutatásunkban három magyar középiskola 111 9. osztályos diákja vett részt. Két csoport emelt óraszámú matematikával (heti 5 óra), két csoport nyolcosztályos gimnáziumi, egy műszaki, egy gazdasági és egy informatika irányultságú csoport (heti 4 matematika óra). Igyekeztünk olyan tanulókat bevonni a kutatásba, akik valószínű, hogy kedvelik a tantárgyat és az átlagnál jobb képességűek, hiszen olyan profilt választottak, amely a középiskolában a kötelezőnél nagyobb heti óraszámot biztosít a matematikatanuláshoz. Azért is választottunk ilyen csoportokat, mert feltételezhető, hogy tisztában vannak a szükséges tárgyi ismeretekkel és ismernek olyan eljárásokat, stratégiákat, amelyekkel a választott probléma megoldható. Nem lett volna kedvező számunkra, ha a tanulók nem tudnak mit kezdeni a kitűzött problémával. Illetve úgy gondoltuk, hogy az általunk tervezett vizsgálódást célszerűbb az átlagosnál jobb teljesítményű tanulókkal kezdeni és később esetleg hozzájuk viszonyítani. A tanulókat kódokkal jelöltük (például A1, F5 stb.), a későbbiekben így fogunk rájuk hivatkozni.

3.3.2. MÉRŐESZKÖZ

Egy feladatlapot állítottunk össze, amely tartalmazott egy kombinatorikai problémát és azt Pólya (1945/1977) problémamegoldó modelljének kérdéseire igazodó konkrét írásbeli utasításokkal láttuk el. Például a megoldás kivitelezésekor a lépések indoklását kértük („Oldd meg a feladatot! Minden egyes lépésedet indokold!”), majd a megoldás ellenőrzését (“Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizd! Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?”). Ily módon a Lester-modell (1985) kivitelezési és ellenőrzési szakaszát kívántuk életre kelteni. A feladatlaphoz fűzött utasításokkal az úgynevezett „scaffolding” módszerrel próbáltuk támogatni a diákok problémamegoldását, illetve a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit. A scaffolding olyan támogatása a tanulóknak, amely lehetővé teszi számukra, hogy magasabb tevékenységi szinten dolgozzanak (Gonulal & Loewen, 2018). A módszer egyik fő eleme az irány fenntartása (direction maintenance), amely segít abban, hogy a tanulói tevékenységek az adott cél felé tartsanak.

A tanulók ezekben a fázisokban elvégzett munkáit elemeztük. A diákok nem kaptak külön képzést az általunk adott utasításokról.

A kombinatorikai problémánál két feltételnek is eleget tevő pozitív egész számok darabszámát kellett meghatározni. A probléma a következő volt:

A 2006 olyan szám, amelyben a legkisebb helyi értéken álló számjegy háromszorosa a legnagyobb helyi értéken álló számjegynek. Hány ilyen 2000-nél kisebb pozitív egész szám van?⁴

A megoldási módszer lehetett például az esetszétválasztás a szorzási módszerrel vegyítve vagy a keresett számok felsorolása. A megoldás:

Mivel 2000-nél kisebb számokat keresünk, így a négyjegyű számok körében a legnagyobb helyiértéken, vagyis az ezresek helyén csak az 1-es számjegy szerepelhet, aminek következtében az egyes helyiértéken 3-as kell, hogy álljon:

1 □ □ 3

A százások, illetve a tízesek helyén is szerepelhet 0-tól 9-ig bármelyik számjegy, így ez $10 \cdot 10 = 100$ darab négyjegyű számot jelent. (szorzási módszer)

A háromjegyű számok körében a százások helyén állhat az 1, a 2 vagy a 3-as számjegy is (esetszétválasztás). Az egyesek helyiértékén pedig rendre a 3-szoros értékek szerepelnek, azaz a 3, a 6 vagy a 9:

1 □ 3

2 □ 6

3 □ 9

A tízesek helyén 0-tól 9-ig szerepelhetnek a számok, vagyis esetenként 10 szám kerülhet szóba. Összesen $3 \cdot 10 = 30$ darab háromjegyű számot lehet így képezni.

A kétjegyű számokat vizsgálva pedig összesen 3 szám elégíti ki a feladat feltételeit: a 13, a 26 és a 39.

⁴ Ez a probléma a 7. osztályosoknak szóló 2006-os Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei fordulójának 17. feladata volt.

Összesítve a négy-, a három- és a kétjegyű eseteket, azt kapjuk, hogy $100 + 30 + 3 = 133$ darab olyan szám van, amely kisebb 2000-nél és teljesül, hogy a legnagyobb helyiértéken szereplő számjegy háromszorosa áll a legkisebb helyiértéknek megfelelő helyen. Olyan problémát akartunk adni a diákoknak, amelyet „józan ésszel”, speciális tantárgyi tudás nélkül meg lehet oldani. A probléma megoldása után utasításokkal próbáltuk kiváltani a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit. Elvártuk, hogy ellenőrizzék, pontosan a megadott feltételekkel oldották-e meg a problémát, ellenőrizzék az ötletüket és a megoldásuk lépéseit, esetleg ellenőrizzék a végeredmény valóságtartalmát. Arra törekedtünk, hogy a megoldás ellenőrzése ne igényeljen bemagolt eljárást. Erre a célra alkalmas egy kombinatorikai probléma, amelynek nehézsége, hogy nincsenek jól bevált és megbízható ellenőrzési stratégiák (Mashiach Eizenberg & Zaslavsky, 2003). Ezért azt vártuk, hogy a diákok munkája tükrözni fogja az ellenőrzéssel, értékeléssel kapcsolatos egyéni gondolkodást, hozzáállást, megítélést és ismereteket.

3.3.3. Eljárás

A felmérések 2018 és 2022 között születtek, az éppen aktuális tanév 2. hetében. A matematika órán kiosztott problémára önálló munka során kb. 25 perce volt a diákoknak. Mivel a tanév elején történt a felmérés, a tanulók még az általános iskolai tudásuk alapján oldották meg a problémát.

3.3.4. Elemzési szempontok

A diákok munkáinak elemzésekor induktív módon alakítottuk ki a vizsgált szempontok kategóriáit.

1. szempont: A megoldás helyessége

Először a tanulók megoldásait osztályoztuk. Válaszaikat öt kategóriába soroltuk, amit a 4. táblázat foglal össze.

4. táblázat: A tanulói megoldások kategorizálása

Kód	Kódleírás
Helyes megoldás	A tanuló megkapta a helyes (133) végeredményt.
Lényegében helyes megoldás	A tanuló gondolatmenete helyes, de számolási hibát vétett, vagy hiányzik a végeredmény kiírása.
Hiányos megoldás	A tanuló 10 számjegy helyett 9-cel számolt vagy a két feltétel közül csak az egyiket vette figyelembe. Akármelyik eset áll fenn, más hibát nem vétett a tanuló.
Helytelen megoldás	Az előző három kategóriák egyikébe sem tartozik, vagyis a tanuló gondolatmenete részben vagy egészében helytelen.
Nincs	A tanuló nem foglalkozott a problémával.

A *helyes megoldást* ismerjük, a többi kategóriához mutatunk egy-egy példát a tanulóktól: A 4. ábrán egy *lényegében helyes megoldást* látunk. A C8-as tanuló a köztes helyiértékeknél először a 10 helyett csak 9 számjeggyel számolt, és észrevette majd javította (nyomon követési és ellenőrzési mozzanat) a hibáját, kivéve egy esetnél, ezért kapott a 133 helyett 132 számot válaszként.

A B9-es tanuló megoldása (6. ábra) azért tartozik a *helytelen megoldás* kategóriájába, mert bár figyelembe vette a két feltételt (2000-nél kisebb és a háromszoros kapcsolat) és a köztes helyiértékeken is 10 számjegyet szerepeltetett, kizárólag a négyjegyű esettel számolt a megoldás során.

6. ábra: A B9 tanuló helytelen megoldása

• Oldd meg a feladatot! Minden egyes lépésedet **indokold!**

mivel 2000-nél
kisebb számok
kellenek és a
0 nem kerülhet
előre

$\frac{1}{1} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 100$ féle

mivel $1 \cdot 3 = 3$

mert bármilyen
számok kerülhetnek
ide: 0-9-ig

0-9

2. szempont: Az ellenőrzési szakasz jellemzése, minősége

A tanulók azon megnyilvánulásait, amelyeket arra adtak, hogy „Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizd! Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?” - négy kategóriába soroltuk:

5. táblázat: Az ellenőrzések kategorizálása

Kód	Kódleírás
Másik módszer	A tanuló az eredeti megoldásban használt módszer helyett egy másikat használt.
Teljes folyamat	A tanuló a teljes megoldási folyamatról adott áttekintést, ellenőrzést vagy újra megoldotta a problémát.
Felszínes	A tanuló a megoldásának legalább egy, de nem az összes lépéséről adott áttekintést, ellenőrzést, vagy a számolását ellenőrizte, vagy konkrét példát adott a keresett számokra.
Nincs ellenőrzés	A tanuló kifejezte véleményét a megoldásának helyességéről egy mondatban általánosan vagy nem írt semmit.

A következőkben néhány tanulói példát mutatunk az ellenőrzési típusokra.

A 7. ábrán a D9-es tanuló eredeti megoldása látható. A komplementer módszerrel határozta meg, hogy hány darab szám felel meg a feltételeknek.

7. ábra: D9 megoldása komplementer módszerrel

• Oldd meg a feladatot! Minden egyes lépésedet **indokold!**

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10 \cdot 10 = 333$$

a két számjegy 3-ig lejjebb lehet, a maradék 1 10 felcsúszva
 ↓ -1- , - maradék 2 10 felcsúszva

DE: a négy számjegy csak 2-vel, vagy 1-ig elcsúszhat
 ↓ komplementer lépés

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 1 \cdot 10 \cdot 10 \\ \hline 1 \end{array} = 100 \text{ számjegy}$$

$333 - 100 = 233$ ~~szám felel meg a feltételnek~~

2000-nél kisebb
 ↓ 2×10^6 számjegy
 ↓ komplementer lépés

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 1 \cdot 10 \cdot 10 \\ \hline 1 \end{array} = 100 \text{ számjegy}$$

$233 - 100 = 133$ ~~szám felel meg a feltételnek~~

A 8. ábra pedig azt mutatja, hogy a D9-es tanuló ellenőrzésként az eredetitől egy kissé eltérő módszerrel oldotta meg a problémát. Itt ugyanúgy nézte az eseteket, de egyből csak a szóba jöhető számokkal foglalkozott. Bizonyos szinten új nézőpontból végezte el a tanuló a szóba jöhető számok összeszámolását.

8. ábra: D9 ellenőrzése az eredeti megoldásától kissé eltérő módszerrel

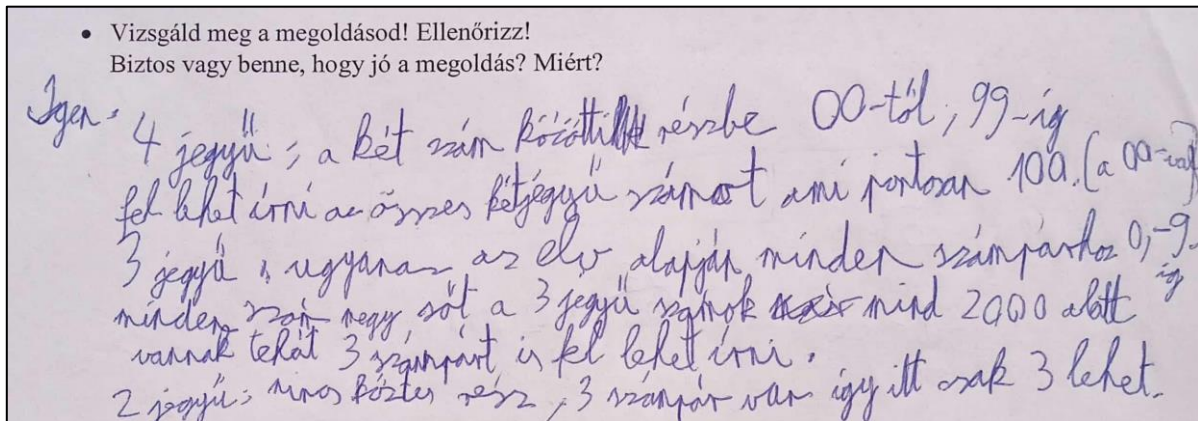
• Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizz!
 Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 3 \end{array} + \begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 3 \cdot 10 \end{array} + \begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ \hline 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \end{array} = 133 \checkmark$$

nem jó! → $\begin{array}{r} \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{r} \square \\ \square \\ \square \end{array} + \begin{array}{r} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} = \leftarrow$ az összes összeg = 133 és az a jó...

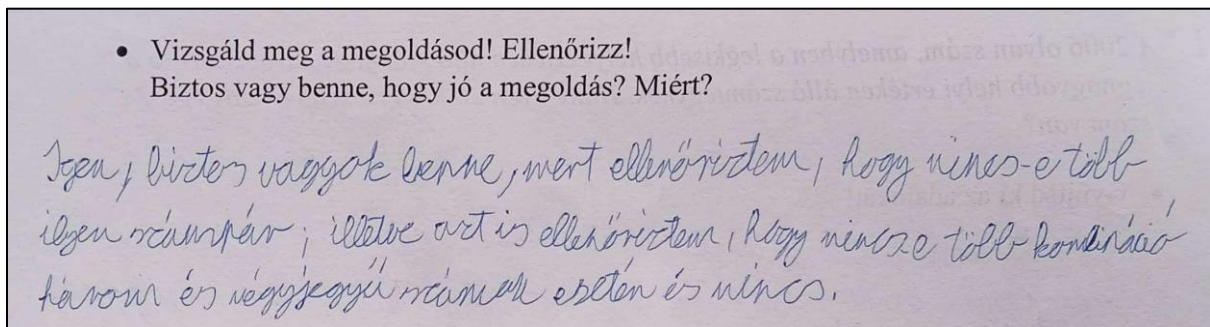
A 9. ábrán az A1-es tanuló a megoldás *teljes folyamatát* áttekintette. Az A1-es diák kitér a két-három- és négyjegyű esetekre, a 2000-nél kisebb feltételre, a legnagyobb és legkisebb helyiértéken szereplő számpárokra, illetve a köztes helyiértéken szereplő számjegyekre is. Tehát a megoldás minden mozzanata említésre kerül.

9. ábra: A1 helyes megoldó ellenőrzése



A 10. ábrán az F13-as tanuló a megoldás *teljes folyamatát* próbálta áttekinteni, ellenőrizni, igaz rövidebben, mint az A1-es társa. Az ellenőrzéséből is éppen az hiányzik, ami a megoldásából, vagyis a probléma szövege által említett 2000-nél kisebb feltétel.

10. ábra: F13 hibás megoldó ellenőrzése



Felszínes áttekintés, ellenőrzés: Írásbeli áttekintés, ellenőrzés a megoldási folyamat egyes lépéseire, de nem az összes lépésre (pl. "mert háromszor 3-nál nagyobb számjegy már kétjegyű szám" - utalva arra, hogy milyen esetek jöhetnek szóba a legnagyobb és legkisebb helyiértékek esetén). Ehhez a kategóriához tartoznak azok is, akik vagy csak néhány példát soroltak fel a keresett számokra, vagy újra elvégeztek egy korábban elvégzett számítást (pl.: $100+30+3=133$).

Például a 11. ábrán láthatjuk, hogy az F17-es tanuló röviden újraszámolta az egyes eseteknél szóba jöhető számokat és ebből a végeredményt. Észrevehető, hogy a 132-t javította 133-ra, amit egyébként a megoldásában is megtett.

11. ábra: Az F17 helyes megoldó felszínes ellenőrzése

• Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizz!
Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?
 $132 = 3 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 133$
igen mert a megoldást az ellenőrzés során megbastam

A 12. ábrán látható a példa, amikor egy tanuló (C2) mindössze egy mondatban kifejezi magabiztosságát a megoldást illetően, bármiféle írásbeli ellenőrzés nélkül. Tegyük hozzá, hogy nem volt helyes a megoldása.

12. ábra: C2 hibázó megoldó ellenőrzése

• Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizz!
Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?
Biztos vagyok benne, mert tudom.

Ha valaki ebbe a kategóriába került, attól még a megoldás kivitelezése során adódhatott eredményt módosító áthúzás. Tehát ez a kategorizálás (az ellenőrzések minősítése) kizárólag az ellenőrzési szakaszhoz tartozó kérdéseinkre adott írásbeli válaszokat vizsgálta.

Megjegyzendő, hogy a diákok ellenőrzéseit csak az írásbeli munkájuk alapján vizsgáltuk. A tanulók esetleg le nem írt ellenőrzéseiről nincs információnk.

3. szempont: A nyomon követő és ellenőrző tevékenységek hatása a megoldásra (akár a kivitelezési szakasz, akár az ellenőrzési szakasz során)

Első szempontként azt vizsgáltuk, hogy a megoldásban történt-e olyan áthúzás, ami az eredményt módosította? Ha volt, az utal arra, hogy vagy a kivitelezési vagy az ellenőrzési szakasz során nyomon követő tevékenység hatására ellenőrző folyamat indult el (valóban ellenőrzés történt) és megváltozott a megoldás valamely részletéről vagy egészéről alkotott gondolata a tanulónak.

Második szempontként azt vizsgáltuk, hogy az írásbeli munkák alapján az ellenőrzési szakaszban („Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizz! Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?”) volt-e valamilyen észrevehető hatása a megoldásra? Tehát azt kerestük, hogy akadt-e olyan tanuló, aki az ellenőrzés hatására vette észre a hibáját és esetleg javította vagy módosította is a megoldását.

3.4. Eredmények és tapasztalatok

1. szempont: A megoldás helyessége

A 6. táblázat az egyes megoldási kategóriákhoz tartozó tanulók arányát mutatja be. Az eredményekből azt látjuk, hogy a mintában szereplő 111 diák kb. egyharmada tudta helyesen megoldani a problémát. A tanulók 9%-a nem írt semmit a papírra, vagyis nincs nyoma, hogy foglalkoztak volna a problémával. Ezen 10 tanuló munkája a továbbiak szempontjából értékelhetetlen, így a későbbi elemzéshez a minta 101 főre szűkült.

6. táblázat: Az egyes megoldási kategóriákhoz tartozó tanulók

Kód	%
Helyes megoldás	30,6
Lényegében helyes megoldás	6,3
Hiányos megoldás	17,1
Helytelen megoldás	36,9
Nincs	9,0
Összesen	100

2. szempont: Az ellenőrzés minősége

A 7. táblázatból látszik, hogy a 101 tanuló közel 57%-a próbálkozott valamilyen típusú ellenőrzéssel (*másik módszerrel, teljes folyamatra* vonatkozóan vagy *felszínesen*).

7. táblázat: Az egyes ellenőrzési kategóriához tartozó tanulók száma

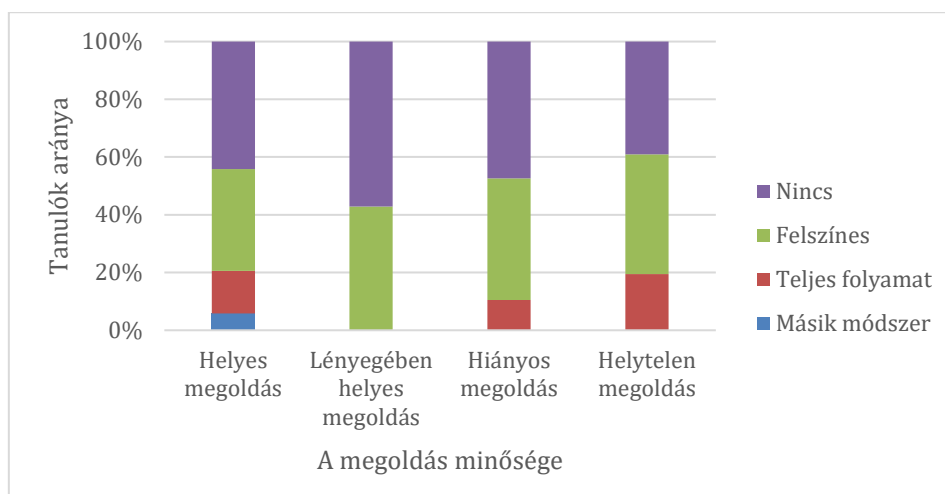
Kód	%
Másik módszer	2,0
Teljes folyamat	14,9
Felszínes	39,6
Nincs ellenőrzés	43,6
Összesen	100

A próbálkozók közül a legtöbben (40 fő) csak *felszínesen* kísérelt meg ellenőrizni. Mondhatni, csak minden hatodik diák (15 fő) ellenőrzése vonatkozott a *teljes megoldási folyamatra* vagy próbálta *másik módszerrel* belátni, hogy helyes végeredményt kapott-e (2 fő).

A 13. ábra azt mutatja, hogy megoldás minőségének függvényében milyen jellegű ellenőrzésekkel próbálkoztak a tanulók. Mindkét tanuló, akik *más módszerrel* oldották meg a feladatot az ellenőrzésnél, helyes megoldók voltak. Érdekesnek tűnhet, hogy a *teljes folyamatot* ellenőrizni próbálók aránya a helytelen megoldást adók között a legnagyobb (19,5%). Ezt a megállapítást óvatosan kell kezelni, mert a legtöbb esetben, az ezen kategóriához tartozó diákok által adott helytelen megoldás levezetése rövid és felületes volt, így az ellenőrzés során kevesebb részletre kellett kitérniük ahhoz, hogy a *teljes megoldási folyamatra* vonatkozó ellenőrzés kategóriájába soroljuk őket. Sőt, azt is tegyük hozzá, hogy a *másik módszerrel* való megoldással, mint ellenőrzési kategóriával együtt nézve már nem előzik meg a helyes megoldókat. Érdekes az az eredmény is, hogy a helytelen megoldók között a legkisebb az aránya az *ellenőrzéssel nem próbálkozó* tanulóknak (39%). A helyes megoldóknál a tanulók 44%-a nem próbálkozott ellenőrzéssel. Ehhez a tapasztalathoz fontos megemlíteni, hogy a helyes megoldók között többen voltak, akik csak a véleményüket írták le arról, hogy helyes

vagy sem a megoldásuk, és ezzel a *nincs ellenőrzés* kategóriában tartózkodnak. Ez torzítja az arányokat.

13. ábra: Az ellenőrzés típusai a megoldás függvényében



Az eddigi elemzés és a 13. ábra alapján azt vizsgáltuk, hogy a tanulók a megoldásuk minőségének függvényében milyen típusú ellenőrzést adtak. Úgy tűnik, hogy az ellenőrzés típusa független attól, hogy milyen minőségű megoldást adtak a tanulók. Ehhez függetlenségvizsgálatot készítettünk khi-négyzet próbával is, amelynél a nullhipotézisünk az volt, hogy a tanulók ellenőrzési tevékenységének típusa nem függ a tanulók megoldásának minőségétől. A 8. táblázat az erre vonatkozó kontingenciatáblázat, ami alapján $\chi^2(9) = 6.620, p = 0.677 \ngtr 0.05$, vagyis nem kaptunk szignifikáns eredményt. Ez alapján a nullhipotézist megtartjuk, tehát a tanulók ellenőrző tevékenységeinek típusa valóban független a megoldás minőségétől.

8. táblázat: Kontingenciatáblázat az egyes kategóriákhoz tartozó tanulók létszáma alapján

A megoldás minősége	Az ellenőrzés minősége				Összesen
	Nincs	Felszínes	Teljes folyamat	Másik módszer	
Helytelen	16	17	8	0	41
Hiányos	9	8	2	0	19
Lényegében helyes	4	3	0	0	7
Helyes	15	12	5	2	34
Összesen	44	40	15	2	101

Ezután két részre osztottuk a mintánkat a tanulók által adott megoldások minősége alapján. *Helyesen* és *lényegében helyesen* megoldókra (ők lettek a „helyes” megoldók), illetve *hiányosan* és *helytelen* megoldókra (ők lettek a „helytelen” megoldók). Majd az ellenőrzési kategóriákat is két osztályba rendeztük. A *másik módszerrel* vagy a *teljes megoldási folyamat* áttekintésével ellenőrző tanulók képezték az „alapos” kategóriát, a *felszínes* ellenőrzést végzők vagy az írásbeli *ellenőrzést nem adó* tanulók alkották a „felszínes” kategóriát. Mindezt azért tettük, mert két-két független és függő változóval is készíteni akartunk függetlenségvizsgálatot khi-négyzet próbával, amelynél a nullhipotézisünk ugyanaz volt, mint az előbb. Ebben az esetben a 9. táblázat az erre vonatkozó kontingenciatáblázat, ami alapján

$\chi^2(1) = 0.003, p = 0.957 \neq 0.05$, vagyis most sem kaptunk szignifikáns eredményt. Ez alapján a nullhipotézist ismét megtartottuk, tehát a tanulók ellenőrző tevékenységeinek típusa ekkor is független a megoldás minőségétől.

9. táblázat: Kontingenciatáblázat az egyes kategóriákhoz tartozó tanulók létszáma alapján

Az ellenőrzés minősége			
A megoldás minősége	Felszínes	Alapos	Összesen
Helytelen	50	10	60
Helyes	34	7	41
Összesen	84	17	101

Korábban a 7. táblázatban láthattuk, hogy a tanulók majdnem 44%-a (44 fő) az ellenőrzések szempontjából a *nincs ellenőrzés* kategóriába tartozott. Közülük 29-en hagyták üresen az ehhez az utasításhoz tartozó részt a feladatlapon. A kategória többi 15 tanulója csak egy mondatban kifejezte véleményét a megoldása helyességéről. A 10. táblázat ezeket a mondatokat tartalmazza. A táblázatból látszik, hogy ezen 15 tanuló közül 7-en nem oldották meg *helyesen* (vagy *lényegében helyesen*) a problémát, ennek ellenére mind a 7-en, többnyire magabiztosan, egy mondatban kifejezték, hogy véleményük szerint helyesen dolgoztak. Náluk nem volt nyoma annak, hogy a sikeresség érzése gyengült volna az ellenőrzési szakaszban. Érdekesség, hogy volt 3 tanuló, mindhárom a *helyesen* vagy *lényegében helyesen* megoldók kategóriájából, akik azt válaszolták, hogy nem biztosak a megoldásuk helyességében. Vagy legalábbis 3-an merték ezt kifejezni. Náluk biztosan megjelent a sikeresség érzésének gyengülése az ellenőrzési szakaszban.

10. táblázat: Tanulói megnyilvánulások a „nincs ellenőrzés” kategóriából

A tanulók megnyilvánulása	A megoldás helyessége	A sikeresség érzése gyengült
Biztos vagyok benne, mert lejegyeztem az összes megoldást és ennyi számot lehet a megadottak szerint helyesen leírni.	Helyes	nem
Biztos vagyok benne, hogy jó a megoldásom, mert szerintem jól alkalmaztam ennél a feladatnál a kombinatorikát.	Helyes	nem
Igen, biztos vagyok a megoldásomban, mert szerintem jól gondolkoztam.	Helyes	nem
Biztos vagyok benne.	Helyes	nem
Igen, mert a legkisebbtől a legnagyobbig kiválogattam a számokat.	Helyes	nem
Nem. Nem tudom hogyan kell megcsinálni.	Helyes	igen
Nem. ?	Helyes	igen
Nem vagyok benne biztos, sőt amellettt vagyok inkább, hogy hibás. Mert nincs más ötletem.	Lényegében helyes	igen
Szerintem jó a megoldásom, mert próbáltam számba venni az összes lehetőséget.	Hiányos	nem
Igen, mivel megnéztem minden lehetséges számot, és leírtam őket.	Hiányos	nem
Igen, biztos vagyok benne, mert szerintem jól oldottam meg.	Hiányos	nem
Biztos vagyok benne, mert tudom.	Hiányos	nem
Igen biztos vagyok benne, és azért, mert máshogy nem tudtam volna megoldani.	Helytelen	nem
Igen, mert ez az összes variáció. (Szerintem)	Helytelen	nem
113 db. Szerintem jó a megoldás.	Helytelen	nem

Többen kijelentették a meggyőződésüket vagy véleményüket, hogy helyes a megoldásuk, s bár nincs írásban nyoma, akár újra átgondolhatták a megoldásukat.

3. szempont: A nyomon követő és ellenőrző tevékenységek hatása a megoldásra (akár a kivitelezési szakasz, akár az ellenőrzési szakasz során)

Elsőként azt vizsgáltuk, hogy a megoldásban van-e áthúzás, olyan, ami az eredményt módosította? Ha van, az utal arra, hogy vagy a kivitelezési vagy az ellenőrzési szakasz során a nyomon követő tevékenység hatására megváltozott a megoldás valamely részletéről vagy egészéről alkotott gondolata a tanulónak.

A 11. táblázatból az látszik, hogy a *helyes* vagy *lényegében helyes* megoldók között nagyobb volt az aránya azoknak, akiknél a megoldás folyamán olyan áthúzás történt, ami befolyásolta az eredményt. Összességében pedig a diákok valamivel több mint felére volt jellemző ez a mozzanat.

11. táblázat: A megoldás minősége és az áthúzóok száma

Megoldás minősége	Fő	Áthúzóok száma	%
Helyes vagy lényegében helyes megoldás	40	27	67,5
Hiányos vagy helytelen megoldás	61	30	49,2
Összesen	101	57	56,4

Második alszemponként azt vizsgáltuk, hogy az írásbeli munkák alapján az ellenőrzési szakasznak van-e valamilyen észrevehető hatása a megoldásra? Tehát azt kerestük, hogy van-e olyan tanuló, aki az ellenőrzés hatására vette észre a hibáját és esetleg javította vagy módosította is a megoldását. (Ha nem találunk ilyet, de az ellenőrzésben ott van az a részlet, amit a megoldás során módosított az jelenthet kompetensebb ellenőrzést.)

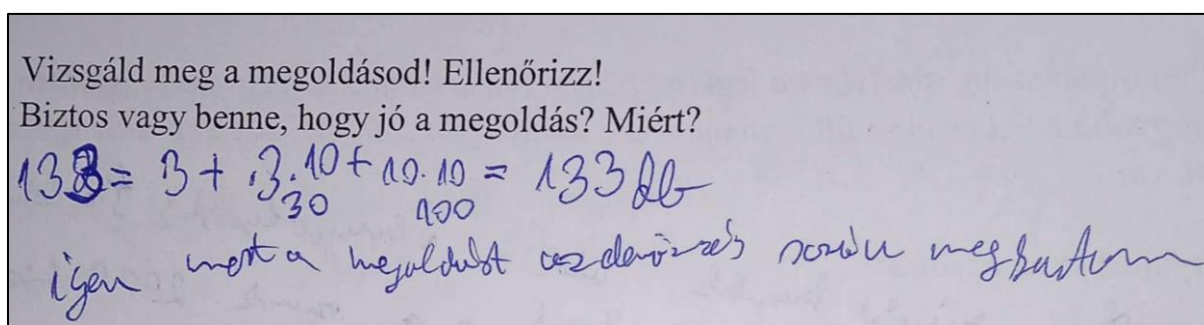
Ezt a szempontot először a helyes vagy lényegében helyes megoldók között vizsgáltuk: A 12. táblázat azt mutatja, hogy *helyes* vagy *lényegében helyes* megoldást adó 40 tanuló közül 27-en tettek eredményt módosító áthúzást a levezetés során. Ezen 27 tanuló közül 12 főnél az ellenőrzés során helyesen jelent meg az a része a levezetésnek, amire a módosítás vonatkozott. Egy tanulónál tudtuk azt azonosítani, hogy szinte biztosan az ellenőrzési szakasz kérdéseinek hatására történt a módosítás a megoldás levezetésében. Ha valakinek szerepelt az áthúzásra vonatkozó részlet az ellenőrzésében, megvan az esélye, hogy annak hatására vette észre a hibáját, de ezt csupán az írásbeli munkákból nehéz kideríteni.

12. táblázat: A helyes megoldást adó tanulók módosításairól

	fő
Helyes vagy lényegében helyes megoldás.	40
Van benne eredményt módosító áthúzás.	27
Az ellenőrzésben megjelenik a módosított rész helyesen.	12
Biztosan az ellenőrzés hatására történt a módosítás.	1

Olyan példát nem találtunk, hogy valaki megjegyezte volna az ellenőrzés során, hogy hibát talált a megoldásban. Az írásbeli munkák alapján mindössze egy tanulóval (F17, lásd 14. ábra) feltételezhetjük szinte biztosan, hogy az ellenőrzés alkalmával javította a 132-es végeredményt 133-ra. Ráadásul a tanuló ellenőrzése a felszínes kategóriába sorolható, de ez is elég volt ahhoz, hogy észrevegye a hibáját. Erről írásban külön megjegyzést nem tett.

14. ábra: F17-es tanuló felszínes ellenőrzése



A 15. ábrán kivehető, hogy az F17-es tanuló a megoldásában a 29-et 30-ra módosítja részeredményként, majd a végeredményt is javítja 132-ről 133-ra. Onnan valószínűsíthető, hogy az ellenőrzés során jött rá a hibára, hogy ott is át kellett írnia a 132-t, mint első

végeredményt. Ha már a megoldásnál észrevette volna, akkor vélhetően az ellenőrzésnél már nem szerepelt volna a 132, a hibás érték.

15. ábra: F17 tanuló megoldása

• Oldd meg a feladatot! Minden egyes lépésedet **indokold!**

13; 26; 39; 103; 113; 123; 133; 143; 153; 163; 173; 183; 193; 203; 213; 223; 233; 243
 253; 263; 273; 283; 293; 303; 313; 323; 333; 343; 353; 363; 373; 383; 393
 1003; 1013; 1023; 1033; 1043; 1053; 1063; 1073; 1083; 1093; 1103
 1123; 1113; 1133; 1143; 1153; 1163; 1173; 1183; 1193; 1203; 1213
 1223; 1233; 1243; 1253; 1263; 1273; 1283; 1293; 1303; 1313; 1323
 1333; 1343; 1353; 1363; 1373; 83; 93; 03; 13; 23; 33
 43; 53; 63; 73; 83; 93; 03;

10-100 = 3 db
 100-1000 = ~~30 db~~ 30 db
 1000-2000 = 100 db

összesen 133 db van mert a tízesek között lehet a 100-000-ig
~~30 db~~ 30 db mert ott még lehet változtatni a tízesek helyen álló számot 0-9-ig
 1000-2000-ig lehet változtatni 0-9-ig a századok is lehet változtatni
 Lapozz! 10x 10x 10x 100

A második alszempont vizsgálata a nem hibátlan megoldóknál:

A lényegében helyes kategóriát azért vizsgáltuk ebben az esetben is, mert az ellenőrzés során nekik is lett volna „észre venni valójuk”.

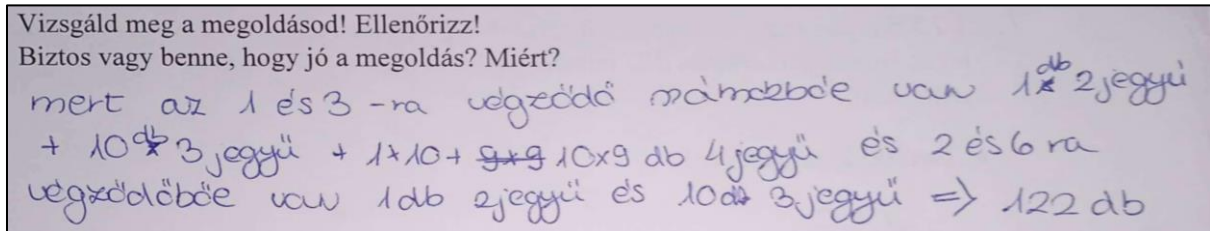
A 13. táblázatból látható, hogy a 67 nem hibátlan megoldó közül mindössze 11 tanuló volt (16,4%), aki az ellenőrzés során foglalkozott a hibás helyzettel. Közülük 9-en nem vették észre a hibájukat, ugyanaz maradt a végeredményük. Kettő tanuló volt, akiknek az ellenőrzés más megoldást (szintén hibás) adott. Közülük az egyik (D8) bár más végeredményre jutott az ellenőrzés során, de nem reagált rá semmit, sem a megoldás levezetésénél, sem az ellenőrzésnél.

13. táblázat: A nem helyes megoldók ellenőrzéseiről

Megoldás minősége	fő	Az ellenőrzésben megjelenik a hibás részlet	Az ellenőrzés által más végeredményhez jutott	Feltűnik számára az eltérés és van következménye
Lényegében helyes	7	0		
Hiányos	19	2	0	
Helytelen	41	9	2	1
összesen	67	11	2	1
		16,4%	18,2%	

Egyetlen tanuló volt (F1) a nem hibátlan megoldók közül, akiről valószínűsíthető, hogy az ellenőrzésnél felfedezte az egyik hibáját (lásd 16. ábra). Javította az $1 \times 10 + 9 \times 9$ helyett $1 \times 10 + 10 \times 9$ db négyjegyű számra a részeredményt. A végeredményt is módosította ennek megfelelően, de ez azért nem lett helyes, mert nem számolt a (3;9) számpárral járó esetekkel. Tehát nem fedezte fel minden hibáját a tanuló.

16. ábra: F1 tanuló ellenőrzése



Hasonlóan az F17-hez, onnan valószínűsíthető, hogy a visszatekintés során jött rá a hibára F1, hogy ott módosítás történt, és ez a módosítás a megoldásánál is megfigyelhető volt.

3.5. Kutatási kérdések és válaszok

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

K1.1. Milyen jellegű ellenőrző tevékenységeket végeznek a tanulók írásban?

Nagyon kevesen, de voltak, akik ellenőrzésként másik módszerrel oldották meg a feladatot. Többen igyekeztek áttekintést adni a teljes megoldási folyamatukról. A legtöbben viszont felszínes ellenőrzésekkel próbálkoztak, azaz, vagy csak néhány lépését ellenőrizték a megoldási folyamatnak, vagy egy műveletsort számoltak újra, vagy néhány példát soroltak fel a szóba jöhető számok közül. A mintában szereplő tanulók majdnem fele viszont nem adott írásbeli ellenőrzést. Közöttük voltak olyanok, akik nem hagyták üresen ezt a részt, hanem megjegyezték, hogy biztosak a megoldásuk helyességében vagy éppen bizonytalanok benne. A kapott eredmény realitását senki sem értékelte írásban, vagyis nem vizsgálták, hogy valóban elképzelhető-e, hogy annyi szám elégíti ki a feladat feltételeit, amit eredményül kaptak.

K1.2. Van-e különbség az ellenőrző tevékenységek minőségében a megoldás helyességétől függően?

A megoldás helyességének függvényében nem volt szignifikáns különbség abban, hogy milyen típusú ellenőrzést választottak a tanulók. A megoldás helyességétől függetlenül minden megoldástípus esetén a felszínes ellenőrzést végzők vagy a nem ellenőrzők voltak többségben.

K1.3. Észreveszik-e a tanulók az elkövetett hibát és tudják-e azt javítani?

A helyes vagy lényegében helyes megoldók között nagyobb volt az aránya azoknak, akiknél a megoldás folyamán olyan áthúzás történt, ami befolyásolta az eredményt. Összességében pedig a diákok valamivel több mint felére volt jellemző, hogy észrevettek egy hibát, áthúzták és javítani próbálták azt. Tehát a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeknek van írásbeli bizonyítéka. A helyes vagy lényegében helyes megoldók sem feltétlenül úgy jöttek rá a helyes megoldásra, hogy közben nem vétettek volna valamilyen hibát. Náluk stabilabb volt a tárgyi tudás és hatékonyabban működtek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek. Az utólagos ellenőrzésre való utasításunkhoz tartozó rész kidolgozása a tanulók jelentős többségénél nem

mutatta azt a minőséget (ha egyáltalán írtak oda valamit), ami alkalmas lett volna a megoldásuk ellenőrzésére.

3.6. Összegzés és következtetések

Ennek a kutatásnak az volt a célja, hogy betekintést nyerjünk 111 magyar 9. osztályos középiskolás diák önálló problémamegoldás közbeni nyomon követő és ellenőrző tevékenységeibe. Vizsgálódásunk egy osztályteremben önállóan, írásban megoldott kombinatorikai problémán keresztül zajlott. Fontos hozzátenni, hogy utasításban mi kértük a tanulóktól a lépéseik indoklását (kivitelezési szakasz), illetve a megoldás ellenőrzését (ellenőrzési szakasz). Tehát próbáltuk őket irányítani a feladatlapon megfogalmazott utasításokkal és kérdésekkel. Mindaz, amit vizsgáltunk nem biztos, hogy spontán is bekövetkezett és megmutatkozott volna az írásbeli munka során. A kérdések és utasítások által tehát a kognitív feldolgozási folyamat nyomon követése és ellenőrzése vagy a folyamat eredményének ellenőrzése fokozottabban valósulhattak meg.

A tapasztalat azt mutatta, hogy többnyire az először leírt gondolat és megoldás volt a meghatározó a problémamegoldás folyamata során. Ha volt írásban nyoma a metakognitív tevékenységeknek, akkor azok inkább a kivitelezési szakasz közben valósulhattak meg, mint a kognitív feldolgozás nyomon követése és ellenőrzése. A levezetéseknel tett sok tanuló áthúzás erre enged következtetni. Másrészt pedig a megfelelő tárgyi tudás is befolyásolhatta az ellenőrzés minőségét és sikerét. Az általunk feltett ellenőrzési szakaszhoz tartozó kérdést inkább formalitásnak és kötelezőnek tekintették a tanulók, vagy éppen nem találtak megfelelő ellenőrző stratégiát és így nem tudták objektívan ellenőrizni a megoldásukat. Jellemző volt, hogy ellenőrzésként a tanulók újra levezették a megoldást vagy annak egy-két lépését. Ez nem lebecsülendő, hiszen nem zárja ki a hiba felfedezésének lehetőségét.

Összességében elmondhatjuk, hogy a kivitelezés során bekövetkező ellenőrzés valószínűleg természetes módon megjelenik a tanulóknál, viszont az utólagos ellenőrzési szakaszt egyrészt formalitásnak tekintik és nem akarnak vagy nem tudnának meggyőződni a megoldásuk helyességéről. Többen azt is gondolhatták, hogy mivel a megoldásuk nem „hasraütés”-szerű volt, hanem számításokat végeztek hozzá, tehát van egy általuk kialakított gondolatmenet, ami megoldáshoz vezetett, akkor biztosan igazuk is van. A nézőpontváltás ritkán fordult elő a tanulóknál. Véleményünk szerint tapasztalataink hátterében az áll, hogy a tanulók nincsenek hozzászoktatva a megoldás levezetésén kívüli más szempontokkal való foglalkozáshoz és nem ismerik a jelentőségét. A dolgozatban szereplő minta esete rámutat arra, hogy a diákokat meg kell tanítani, hogyan ellenőrizzék a saját munkájukat, sőt egyáltalán igényük legyen ellenőrizni.

3.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal

Kutatásunk a hazai és bizonyos tekintetben a nemzetközi szakirodalomban kutatási űrt tölt be azzal, hogy középiskolás tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit vizsgálta a scaffolding módszerrel támogatott önálló problémamegoldás során.

Tapasztalataink kapcsolódnak ahhoz, hogy az ellenőrző, visszatekintő szakasz a legelhanyagoltabb fázis a problémamegoldás során és nehéz rávenni a tanulókat a visszatekintő tevékenységekre (Wilson et al., 1993; Cai & Brook, 2006; Jacobbe, 2007; Ohlendorf, 2017; Mason, 2022).

A mintánkban szereplő tanulók írásbeli munkáinak elemzése alapján nem tudjuk egyértelműen megerősíteni azt a feltételezést, hogy azok a diákok, akik sikeresebben oldanak meg egy problémát, mint társaik, megfigyelhetően helyesebben és kompetensebben reflektálnak a megoldásukra, mint a kevésbé sikeres társaik (lásd 6. oldal, Schoenfeld, 1992). Az

eredményeink azt mutatták, hogy a tanulók által választott ellenőrzési módszer nem függ a megoldásuk minőségétől.

Az általunk vizsgált tanulók ellenőrzési módszerei és azok hatékonysága alapján csatlakozunk Mason és munkatársainak (1982/2010) azon megállapításához, hogy a hibák keresése azáltal, hogy pontosan megismételjük azt, amit már megtettünk, rossz módja az ellenőrzésnek. Az ilyen típusú ellenőrzésnek az is lehetett az oka, hogy egy kombinatorikai problémánál általában nincs jól bevált és megbízható ellenőrzési stratégia (Mashiach Eizenberg & Zaslavsky, 2003). A kombinatorikai feladatra vonatkozó konkrét ellenőrzési protokoll hiánya nem könnyítette meg a gondolkodást. Ezért az ellenőrzés a diákoktól vélhetően szokatlan megközelítést igényelt.

3.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára

Az eredményeink és tapasztalataink azt mutatják, hogy hangsúlyt kell fektetni a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek képzésére. Láthattuk, hogy a tanulók önállóan az általunk kért utasítások ellenére sem tudtak (hatékony) ellenőrzést adni a problémamegoldás ellenőrzési szakasza során. Azt is tapasztaltuk, hogy a diákok vélhetően nem érzik a jelentőségét az ellenőrzésnek. Ennek megváltozásához pedig az ellenőrzésre vonatkozó tanári hozzáállás, a számonkérések módszerei meghatározóak lehetnek.

3.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján

Érdeemes lehet az ellenőrzés minél több eszközét, stratégiáját megismertetni a tanárjelölteknek. Fontos az ellenőrzés jelentőségének, hasznosságának és tekintélyének kiépítése is az idevonatkozó elmélettel és kapcsolódó gyakorlati példákkal, amikhez a dolgozat néhány tanulói példája is alkalmas lehet.

A bemutatott kutatással foglalkozik a következő publikáció

Kiss, M., & Ambrus, A. (2023). How students control their work in mathematical problem-solving process. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education (ProMath 2022)* (pp. 113–123). Aristotle University of Thessaloniki.

4. Fejlesztő kísérlet tanulói meggyőződések felülírására

4.1. Bevezető

Ez a fejezet egy fejlesztő kísérletet mutat be, amelyet egy matematikából átlagos teljesítményű 9. osztályban hajtottunk végre. A kísérlet célja az volt, hogy felülírja a vizsgált osztályban azokat a meggyőződéseket, miszerint: Minden matematikai feladatnak van megoldása, és pontosan egy megoldása van (Schoenfeld, 1992). Vagyis a tanulók által implicit módon igaznak tartott szubjektív elképzeléseket (Op't Eynde et al., 2002) akartunk felülírni. A szóban forgó meggyőződések a tanulóknak a tananyagról és matematikáról alkotott tudásához (Schoenfeld, 1985, Ambrus, 1995) tartoznak.

A metakognitív tudás magában foglalja a megismerésről való tudást, amely az egyénre, a feladatra és a stratégiákra vonatkozik. Ebbe beletartoznak önmagunk és mások tudására vonatkozó ismereteink és a meggyőződéseink (Csíkos, 2016), és nem vezetnek automatikusan a megfelelő stratégiai viselkedéshez (Veenman, 2017). A kutatások azt mutatják, hogy a metakognitív tudás és a metakognitív tevékenységek kölcsönösen befolyásolhatják egymást (Schneider et al., 1987; Schraw, 1994). Tehát annak elfogadása, hogy egy feladatnak nem feltétlenül pontosan egy megoldása van, azaz van olyan feladat, aminek nincs megoldása és van olyan feladat, aminek több megoldása van, a feladatra vonatkozó metakognitív tudásként értelmezhető. Ez fokozhatja a metakognitív tevékenységeket, köztük például a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket. A kialakítandó metakognitív tudás tehát két, egymással szoros kapcsolatban lévő korábbi meggyőződés felülírását jelenti.

A kutatásban a tanulók jelzett metakognitív tudásában bekövetkező fejlődést vizsgáltuk, illetve azt, hogy a korábbi meggyőződések milyen hatással vannak a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeikre az adott problémák megoldása során.

4.2. Kutatási kérdések

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

K2.1. Kialakítható-e egy adott témakör tanítása során az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

K2.2. Milyen nyomon követő és ellenőrző tevékenységek figyelhetők meg egy olyan feladat megoldása során, amelynek több, akár ellentmondást is tartalmazó megoldása van?

4.3. Módszerek

A fejlesztő kísérletünk magán hordozza az akciókutatás módszerének és az önkontrollos pedagógiai kísérlet bizonyos jegyeit. Az akciókutatás jegyei közül teljesült a kutatásunkban, hogy kis mintával és kontrollesoport nélkül dolgoztunk, illetve a kutató helyszíni jelenléte tanárként meghatározó volt. Azonban a trianguláció és a ciklikusság elve csak korlátozottan valósult meg. A trianguláció egy jelenség több szempontból történő vizsgálata, amely szempontok ugyanazt az eredményt igazolják (Csíkos, 2020b). A ciklikusság pedig azt jelenti, hogy az adatgyűjtés, adataelemzés és az eredmények értelmezése alkotta ciklus több alkalommal megvalósul a kutatás során úgy, hogy a következő ciklus megtervezéséhez már az előző ciklusok tapasztalatait is figyelembe veszik (Csíkos, 2020a). A kutatásunkban csak egy ciklus zajlott le. A szerző kutatóként a témavezetőjével együttműködve tervezte és követte nyomon

tesztenként a fejlesztés folyamatát. Az adatgyűjtés, az adatelemzés és az eredmények értelmezése is az említett két kutató által történt, elsősorban kvalitatív és részben kvantitatív elemzési módszerekkel. A szerző tanárként vonta be az osztály tanulóit a fejlesztő tevékenységbe.

A fejlesztő kísérletünk az önkontrollos kísérleti módszer jegyeit abban hordozza, hogy egy tervszerű pedagógiai beavatkozás történt és nem volt kontrollcsoport, illetve a folyamat elején történt egy felmérés, amely eredménye meghatározott egy kiindulópontot (Csíkos, 2020b). Ehhez az állapothoz képest vizsgáltuk a változást a fejlesztés során úgy, hogy közben azt a tényezőt, amit a meggyőződés jelentett felül akartuk írni.

4.3.1. Minta

A kutatás 2019-ben valósult meg egy 9. évfolyamos osztályban. Tanári szempontból azért akartunk 9. osztályt vizsgálni, mert fontos, hogy a középiskolában minél korábban tájékozódjunk a tanulók meggyőzéseiről és fejlődést indítsunk ezen a területen is. Kutatói szempontból pedig azért tartottuk alkalmasnak a 9. évfolyamot, mert a gyakrabban kutatott általános iskolai korosztály után ők képviselik a következő szintet. A mintában szereplő csoport műszaki irányultságú technikai osztály volt és 29 fiúból állt, akik matematikából átlagos teljesítményűnek mondhatók. Az osztályban hetente három matematika óra volt, az osztályátlag félévkor 3,10 volt, év végén pedig 3,14 lett.

4.3.2. Mérészköz

A 14. táblázatból látható, hogy a fejlesztő kísérlet során mikor és milyen tesztet írtak a diákok. A fejlesztési folyamat egy előteszttel indult, amit 11 tanóra követett és közben az 5. órán írtak a tanulók egy köztestesztet, végül pedig egy utótesztet. Másfél hónappal később írt még az osztály egy késleltetett tesztet. A köztes- és az utóteszt egyben dolgozatok is voltak, amikre jegyet kaptak a tanulók. A fejlesztő kísérlet során minden teszt után történt adatelemzés és az eredmények értelmezése a két kutató által, amiket a folyamat további kivitelezésében felhasználtunk.

14. táblázat: A kutatásban megvalósult mérések és azok időbeni ütemezése

Mérészköz	Előteszt	Köztesteszt	Utóteszt	Késleltetett teszt
Óra sorszáma	0. tanóra	5. tanóra	12. tanóra	29. tanóra
Dátum	2019. 03. 11.	2019. 03. 25.	2019. 04. 15.	2019. 06. 03.

Már az előteszttel együtt az összes teszt úgy lett összeállítva, hogy olyan feladatokat is kaptak a diákok, amelyeknél több esettel kellett számolni, illetve észre kellett venni és tudni kellett kezelni az esetlegesen megjelenő ellentmondást tartalmazó („nem létező”) esetet. Mint ahogyan a tanórákon, úgy a dolgozatokban sem csak a több megoldást vagy ellentmondást tartalmazó feladatok szerepeltek, de az elemzésben ezeket a feladatokat emeljük ki. Minden teszt geometriai feladatokból állt.

Az előteszt öt feladatából az első feladatnak több megoldása volt, a második pedig egy ellentmondást tartalmazott. A feladatokat általános iskolai ismeretekkel meg lehetett oldani. A köztesteszt két feladatából az egyik több megoldást és ellentmondást tartalmazott. Az utóteszt három feladatából az egyik több megoldást és ellentmondást is tartalmazott. A késleltetett teszt egyetlen feladata több esetet és ellentmondást tartalmazott. Az elő- és utótesztre 45 perce volt a diákoknak, a köztestesztre 25 perce, a késleltetett tesztre 10 perce.

Előteszt 1. feladata⁵

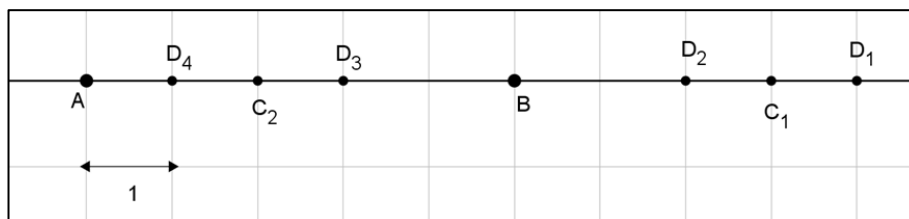
Anna, Béla, Cili és Dani egy egyenes mentén sorakoztak fel. Annától Béla 5 méterre, Bélától Cili 3 méterre, Cilitől pedig Dani 1 méterre van. Hány méterre lehet Annától Dani?

Megoldás:

A feladatnak négy különböző megoldása van, a gyerekek elhelyezkedésétől függően (lásd 17. ábra).

Annától Dani vagy 1 méterre vagy 3 méterre vagy 7 méterre vagy 9 méterre van.

17. ábra: Az előteszt 1. feladatának megoldása



Előteszt 2. feladata⁶

Egészítsd ki a táblázatot (18. ábra)! A táblázatban az α, β, γ egy háromszög belső szögei, az α', β', γ' pedig ugyanazon háromszög külső szögei.

18. ábra: Az előteszt 2. feladatához tartozó táblázat

α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	50°				70°
	80°		110°	120°	

Megoldás:

Egy háromszög belső és külső szögeire vonatkozóan három összefüggésnek kell megfelelni ($\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; $\alpha + \beta' + \gamma' = 360^\circ$; $\alpha + \alpha' = 180^\circ$). A táblázat kitölthető, ha ezek közül két összefüggést használunk, de a harmadik segítségével ellenőrizhető a válasz. A táblázat első sorából hiányzó értékek sorrendben: 110° ; 160° ; 130° . A második sorban ellentmondást kapunk ($\beta + \beta' \neq 180^\circ$) a szögekre vonatkozó összefüggésekből, tehát ilyen adatokkal nem létezik háromszög.

Köztesteszt feladata⁷

Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 6 cm és 16 cm. Mekkora az alaphoz tartozó magasság hossza?

Megoldás:

Ebben a feladatban két különböző esetet kell figyelembe venni, mivel a szövegből nem derül ki, hogy melyik érték tartozik a háromszög alapjához és melyik a száraihoz (lásd 19. ábra).

Az első esetben az alaphoz tartozó magasság (m) a Pitagorasz-tétel segítségével meghatározható: $3^2 + m^2 = 16^2$, amiből $m \approx 15,7$ cm.

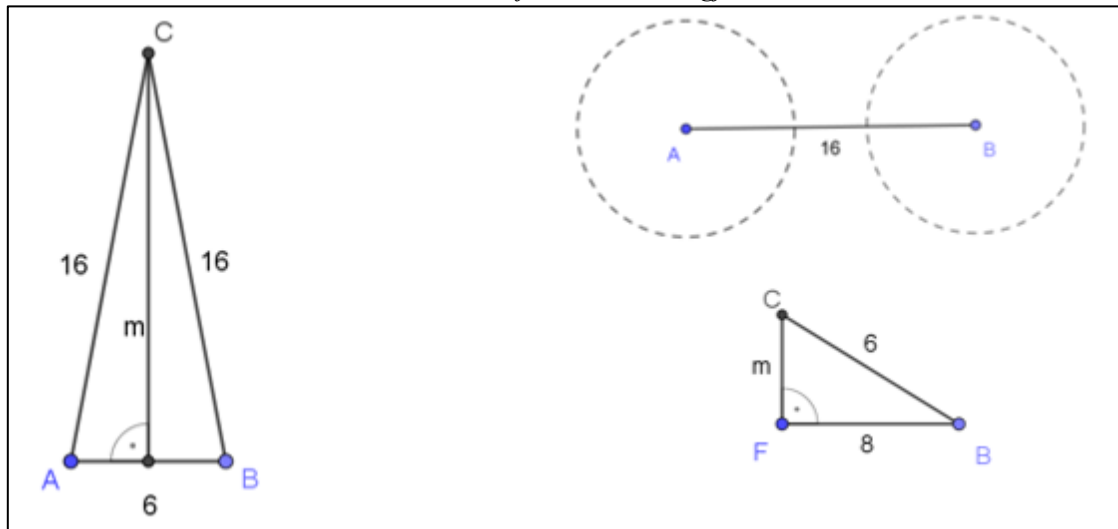
⁵ Kovács és Kónya (2019) kutatásában szereplő feladat.

⁶ Árki és munkatársai (2009/2011) Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 9-10. művének 49. oldalán található 1309-es feladata alapján született a kitűzött feladat.

⁷ Árki és munkatársai (2009/2011) Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 9-10. művének 49. oldalán található 1317-es feladata alapján született a kitűzött feladat.

A második esetben azonban ellentmondást kapunk. A háromszög oldalai között fennálló összefüggésből következik ($6+6 \not> 16$), hogy nincs olyan háromszög, amelynek a szárai 6 cm-esek, az alapja pedig 16 cm.

19. ábra: A köztetteszt feladatában megjelenő két eset



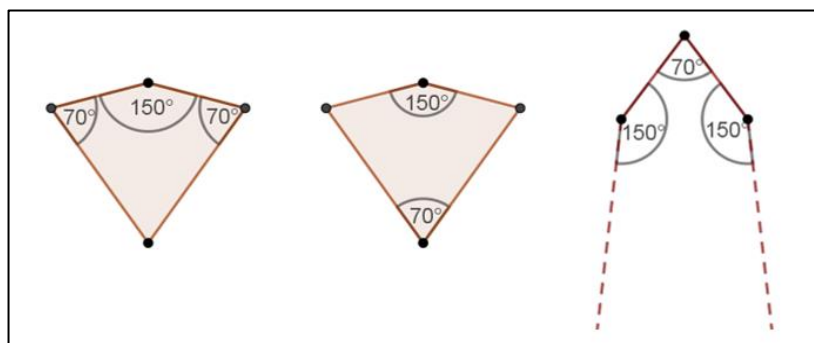
Utóteszt feladata⁸

Egy deltoid két belső szögének nagysága 70° és 150° . Mekkora a deltoid másik két belső szöge?

Megoldás:

Ebben a feladatban három különböző esetet kell figyelembe venni (lásd 20. ábra), mivel a szöveg nem tért ki rá, hogy az egyes szögek hol helyezkednek el. Az első esetben a hiányzó szög nagysága 70° . A második esetben a két hiányzó szög egyaránt 70° -os. Ez az eset így tulajdonképpen nem is különbözik az elsőtől, ennek ellenére külön vizsgálatot igényel. A harmadik esetben pedig ellentmondást kapunk, ami a konvex négyszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tétel segítségével igazolható ($150^\circ + 150^\circ + 70^\circ > 360^\circ$).

20. ábra: Az utóteszt feladatában megjelenő három eset



Késleltetett teszt feladata

Ugyanaz volt, mint a köztetteszt vizsgált feladata.

⁸ Kosztolányi és munkatársai (2001/2008) Sokszínű Matematika 9. Tankönyvének 129. oldalán szereplő 3. példa alapján született a kitűzött feladat.

4.3.3. Eljárás

A fejlesztő kísérlet egy teljes geometriai témakört (háromszögek, négyszögek, sokszögek) lefedett a középszintű, normál kilencedikes tananyagból. A fejlesztés során a normál tananyagtól nem történt eltérés, a középszintű érettségi követelményeknek megfelelő tanmenet szerint tanult az osztály. Minden órán előfordult a pontosan egy megoldást adó feladatok mellett legalább egy olyan feladat, amelynek több megoldása volt vagy ellentmondást tartalmazott. Az órákon nem esett arról szó, hogy egy fejlesztő kísérlet történik és hogy téves meggyőződések felülírása a cél. Ez azért fontos, mert nem akartuk, hogy ez utóbbi tényező befolyásolja a kutatás eredményeit. Ettől még a feladatok megoldásának megbeszélésekor elhangzottak olyan tanári mondatok mint: „Miért ne lehetne egy feladatnak több megoldása?” vagy „Létezhet-e olyan eset, hogy egy feladatnak nincs megoldása?”. Minden tesztet követő órán osztálymegbeszélés történt az előforduló feladatok megoldásáról.

4.3.4. Elemzési szempontok

A tanulók írásbeli munkáit elemeztük és a tanulói meggyőződéseket implicit módon azonosítottuk. A matematikai tudásból indultunk ki és abból következtettünk arra, hogy milyen meggyőződések befolyásolhatták a diákokat. A kutatás szempontjából a tanulók áthúzott munkáit, valamint a tisztázati részeket is figyelembe vettük. A tanulók számára adott értékelésnél azonban csak arra járt pont, ami tisztázati rész volt. Azoknál a feladatoknál, ahol több esetet vagy ellentmondást tartalmazott a megoldás, ott minden különböző eset pontokat ért, illetve pontokat ért az ellentmondás megállapítása és indoklása is. Amikor több esetet említünk a fejezetben, az esetleg ellentmondásra vezető esettel is egy esetként számolunk. Három szempont szerint elemezzük az osztály írásbeli munkáit. Az egyes szempontoknál a következő kategóriákat határoztuk meg induktív módon, amelyek egy-egy szemponton belül részhalmoz kapcsolatban állnak egymással, tehát nem diszjunkt kategóriákat képeztünk.

1. szempont: az ellentmondásra vezető esetről szól

A későbbi vizsgálatokhoz az egyes szinteket pontszámmal látjuk el.

- „Foglalkozott az ellentmondásra vezető esettel” kategória azon tanulókat tartalmazza, akik foglalkoztak az ellentmondásra vezető esettel, akár észrevették a levezetés során az ellentmondást, akár nem. Ennek a kategóriának részhalmoz a következő. (1 pont)
 - Az „és felismerte az ellentmondást” kategóriába azon tanulók tartoznak, akik áthúzták az ellentmondásos esetet vagy nem húzták át, hanem odaírták például, hogy „nem létezik”, esetleg meg is indokolták, hogy miért nem. Ennek a kategóriának részhalmoz a következő. (2 pont)
 - Az „és az ellentmondást a megoldás részeként kezelte” kategóriába soroltuk azokat a tanulókat, akik nem húzták át az ellentmondásos esetet, hanem legalább azt megjegyezték, hogy például „*ilyen háromszög nem létezik.*” Ennek a kategóriának részhalmoz a következő. (3 pont)
 - Az „és indokolta az ellentmondást” kategória pedig azt jelentette, hogy a tanuló az ellentmondás általa vélt okát is leírta. Például, hogy „*ilyen háromszög nem létezik, mert az oldalhosszak nem felelnek meg a háromszögegyenlőtlenségnek.*” (4 pont)

2. szempont: a megoldás több esetéről szól

- A „Több esettel foglalkozott” kategória jegyzi azokat a tanulókat, akik több esetet vizsgáltak a levezetés során. Ennek a kategóriának részhalmaza a következő.
 - Az „és első esetként nem ellentmondásos esettel foglalkozott” kategória azon diákokat tartalmazza, akik úgy vizsgáltak több esetet a megoldás során, hogy első esetként nem ellentmondást kaptak. Ez azért fontos, mert a tanulók több eset keresésére vonatkozó tudatosságára utal.

3. szempont: a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre utaló mozzanatokról szól

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megnyilvánulásaira az írásbeli munkák alapján leginkább egy-egy tanulói áthúzásból, javításból volt lehetőségünk következtetni. Így az áthúzás és javítás nélkül dolgozó tanulók többsége nem szolgáltat plusz információval számunkra ebben a tekintetben. Ettől függetlenül természetesen náluk is megvalósulhattak az említett metakognitív tevékenységek.

- Az „Áthúzás és módosítás történt” kategória azt jelenti, hogy a tanuló a levezetésének egy részét vagy az eredményt áthúzta, hogy helyette a tisztázatban szereplő változtatást vegye figyelembe a tanár. Az áthúzás vonatkozhatott rajzra, számolásra, eredményre vagy például konkrétan a Pitagorasz-tételre, de jelenthette az ellentmondásos eset áthúzását is. Ennek a kategóriának részhalmaza a következő.
 - Az „és a módosítás hibára vonatkozott” kategóriába azok a tanulók sorolhatók, akik objektíven, matematikailag valóban hibás részletet húztak át és próbálták azt javítani. Ha valaki a megoldása során áthúzta az ellentmondásos esetet, az a kódoláskor nem tartozott ebbe a kategóriába, bár attól még nincs kizárva, hogy valamelyik tanuló annak tekintette. Ennek a kategóriának részhalmaza a következő.
 - Az „és sikerült javítani a hibát” kategóriához pedig azok tartoznak, akik matematikailag helyesen módosították az áthúzott részt.

A teszteken nyújtott teljesítmények alapján kiválasztottunk négy tanulót, akiről esettanulmányokat is készítettünk. A kiválasztásnál szempont volt, hogy a négy tanuló egymástól különböző fejlődési szinteket mutasson a fejlesztési folyamat során és az osztályban jellemző teljesítmények egy-egy típusát képviselje. Az eredmények mélyebb elemzése érdekében a tanulók fejlődési folyamatát 4 szintre osztottuk:

- (1) A feladat megértése
- (2) A témában szükséges tárgyi tudás elsajátítása
- (3) Több eset és ellentmondás felismerése
- (4) Az előbbi tudatos kezelése és magyarázata

A fejlesztéstől elvárt szint legalább a (3)-as volt, hiszen a fejlesztő kísérlet célja az volt, hogy diákok felismerjék, ha egy feladatnak több megoldása van vagy ellentmondást tartalmaz. A fejlődési szinteket az előtesztek és korábbi kutatásunk (Kiss, 2019) tapasztalatai alapján határoztuk meg.

Vigotszkij (1967) elméletét is bevontuk az elemzésbe. Ennek lényege, hogy a tanulónak ne csak az aktuális fejlettségi szintjét vizsgáljuk, hanem vegyük figyelembe a lehetséges fejlődési szintjét is. „*Mint a kertésznek, ha meg kívánja ítélni kertjének állapotát, nem szabad csupán a kifejlett gyümölcsöt hozó almafákat tekintenie, hanem figyelembe kell vennie a fejlődő fákat is ...*” (Vigotszkij, p. 271). A tanuló aktuális és lehetséges (potenciális) fejlettségi szintje közötti távolságot jelenti a Vigotszkij által bevezetett legközelebbi fejlődési zóna elnevezés. A diák

aktuális fejlettségi szintjének megállapításához alkalmas az önálló problémamegoldás során nyújtott teljesítmény. A lehetséges fejlettségi szint meghatározásához megfigyelik, hogy a tanuló hogyan old meg az előzőnél nehezebb problémát, ha közben a tanár segít a tanulónak például irányító kérdésekkel vagy kidolgozott példákkal. Vigotszkij szerint egy tanuló a fejlesztése során csak az arra vonatkozó legközelebbi fejlődési zóna szintjét képes elérni.

Az előteszt eredményei alapján határoztuk meg azt, hogy ki milyen szinten volt a fejlesztés megkezdése előtt. A tanulók lehetséges fejlődési szintjének megállapítására alkalmasnak tartottuk a köztes- és utótesztet, ugyanis abban az időszakban, amikor ezek a felmérések megvalósultak, folyamatos, tanári irányítás mellett végzett gyakorlásnak voltak kitéve a tanulók. A késleltetett tesztet pedig a tanulók aktuális fejlettségi szintjének meghatározására találtuk megfelelőnek, mert azt éppen más matematikai témakör tanulása alkalmával, azaz a geometriai kontextusból kiszakítva írták meg a tanulók másfél hónappal a fejlesztő kísérlet befejezése után. Egy tanuló legközelebbi fejlődési zónájáról, csak akkor állíthatjuk, hogy tartalmazott egy adott szintet, ha azt legalább egy teszt alkalmával elérte.

4.4. Eredmények és tapasztalatok

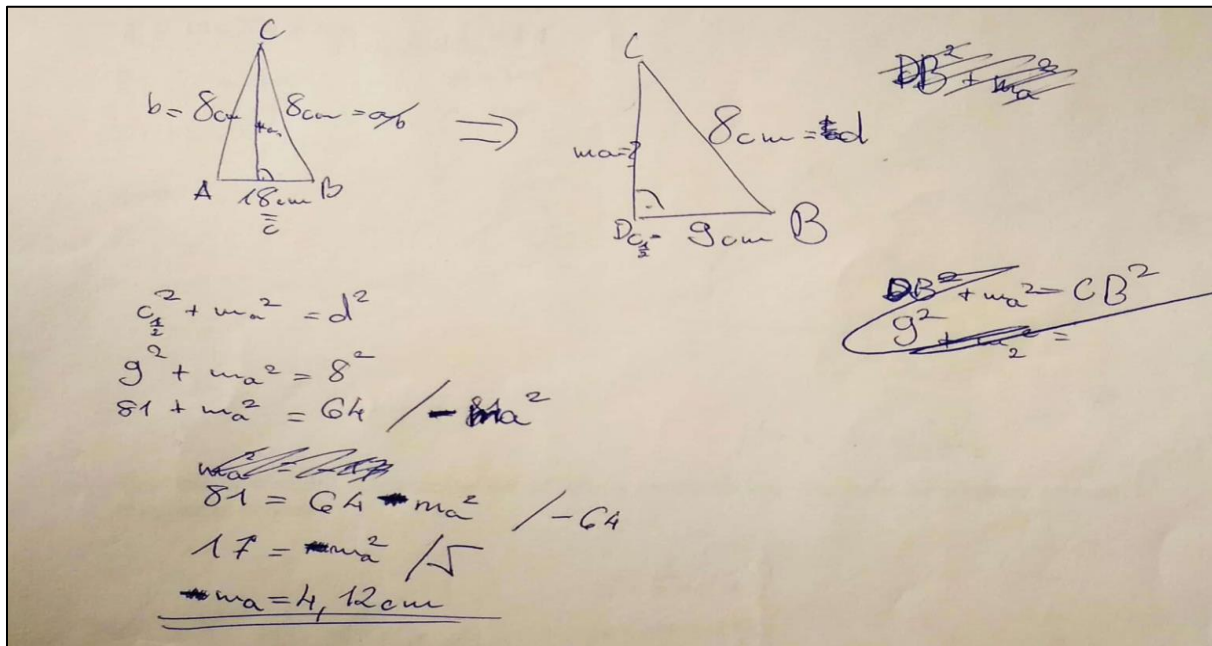
Először az osztály eredményeit mutatjuk be néhány példával úgy, hogy közben nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre vonatkozó tapasztalatokat is említünk. Ezek után következnek majd az esettanulmányok.

1. szempont: az ellentmondásra vezető esetről

Ellentmondást a következő feladatok tartalmaztak: az előteszt 2. feladata, a köztes-, az utó- és a késleltetett teszt bemutatott feladatai.

Tanulságos például a közttesztben adott egyik tanulói megoldás. A 21. ábra azt mutatja, hogy egy tanuló az ellentmondásos esettel dolgozott (8 cm-es szárak, 18 cm-es alap). Külön megrajzolta a derékszögű háromszöget is a tanuló, de ennek ellenére sem bukkant rá az ellentmondásra, vagyis, hogy az átfogó (8 cm) rövidebb egy befogónál (9 cm). A Pitagorasz-tétel behelyettesítésénél nem lett volna gond, de így nem kaphatott pozitív végeredményt a hiányzó oldalra, az m_a -ra. Negatív eredményhez jutott és ezt nem tartotta elfogadhatónak, ezért áthúzta a negatív előjelet. Ez az írásbeli bizonyítéka a tanuló nyomon követő és ellenőrző tevékenységének, ami ebben a helyzetben nem vezetett a hiba megtalálásához. Az eredmény önkényes befolyásolása elérhetőbbnek tűnt számára, mintsem az ellentmondást megállapítsa. A metakognitív tevékenysége olyan szempontból aktív volt, hogy a negatív magassághosszt elvetette. A hiba megfelelő javításához viszont vagy az hiányzott, hogy nem ellenőrizte (alaposan) az addig leírtakat vagy nem rendelkezett a szükséges tárgyi tudással (Pitagorasz-tétel alkalmazása, háromszög-egyenlőtlenség) a hiba észrevételéhez.

21. ábra: A tanuló a köztestesztben módosította a negatív előjelet



Fontos még megemlíteni, hogy az előteszt 2. feladatánál a táblázat 2. sorában volt ellentmondás. Erre vonatkozóan sok áthúzás és módosítás látható a diákok munkáiban, ami azt mutatja, hogy a tanulók egy részénél működtek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek, így feltűnhetett számukra, hogy valami „nem jön ki”. Ennek ellenére csak egy tanuló (lásd 22. ábra) adott olyan írásbeli megnyilvánulást, ami biztosan az *ellentmondás felismerését* jelentette. Ez a tanuló a feladat által megadott egyik szögértéket módosította azért, hogy feloldja az ellentmondást. A 22. ábrán látszik, hogy áthúzta az adott 120° -os szöveget, majd módosította 100° -ra, hogy minden összefüggés teljesüljön a háromszög belső és külső szögeit illetően. Ezt a „megoldást” választotta például ahelyett, hogy odaírta volna, hogy nem létezik háromszög ilyen adatokkal.

22. ábra: Az előteszt 2. feladatában a tanuló módosítja az adatokat, hogy feloldja az ellentmondást

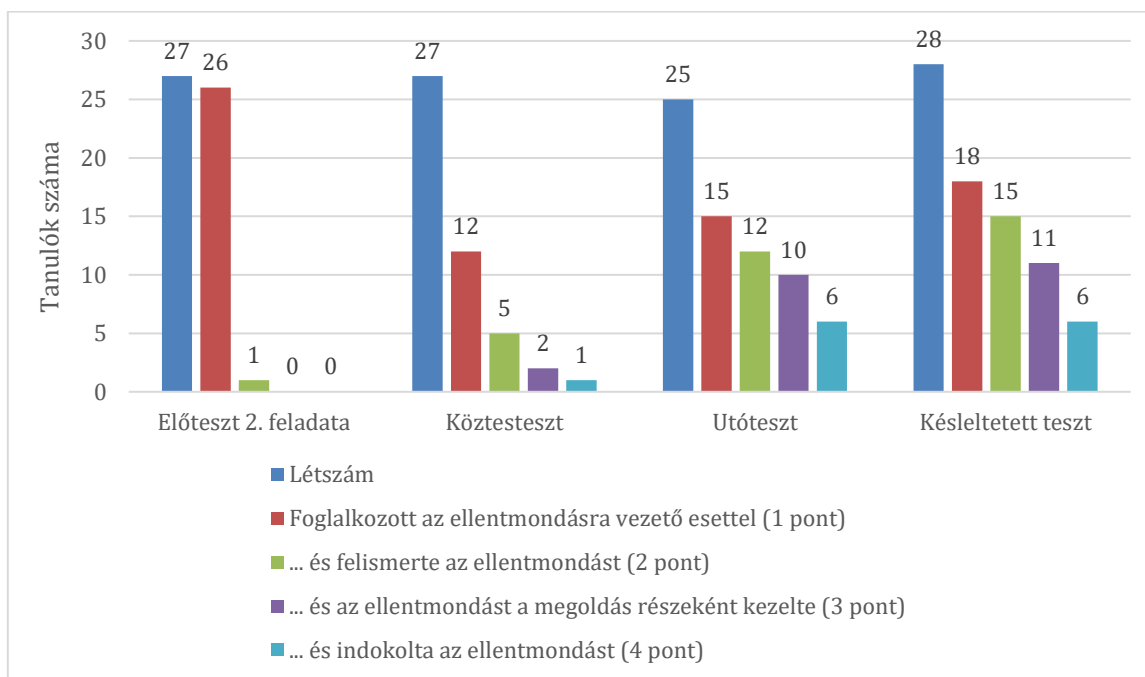
α	β	γ	α'	β'	γ'
20°	50°	110°	160°	130°	70°
120° 70°	80°	30°	110°	120° 100°	150°

A többi három tesztben a megoldás levezetését, nem pedig kiegészítést igénylő feladatokban találkozhattak ellentmondással a diákok. Minthogy a kiegészítés során könnyebben feltűnhet az ellentmondás, valószínűleg ez is hozzájárult ahhoz, hogy a *Foglalkozott az ellentmondásra vezető esettel* kategóriához tartozó érték az előteszt 2. feladatában szinte 100%-os (23. ábra). Az *és felismerte az ellentmondást* kategóriától kezdve már van írásbeli nyoma a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységeknek. Akár az ellentmondás áthúzása, akár annak megjegyzéssel történő kiegészítése történt, ahhoz a tanulónak a kognitív folyamat legalább bizonyos részét nyomon kellett követni, illetve értékelnie kellett a kognitív folyamat eredményét. A fejlesztés elején jellemző jelenség volt a tanulóknál, hogy ha „nem jött ki az eredmény”, akkor sem gondoltak arra, hogy az ellentmondást jelenthet. Láthatjuk a 23. ábrán, hogy az előteszt utáni teszteken az *ellentmondás felismerése*, illetve annak *megfelelő kezelése* gyakoribb volt. Az utótesztnél az ellentmondást felismerő diákok közel 83%-a, a késleltetett

tesztnél közel 73% már a megoldás részeként kezelte az ellentmondást. A köztestesztnél ez az érték csak 40% volt. Közülük az ellentmondás indoklására az előző kategóriába tartozók közel fele vállalkozott az utolsó három tesztnél. A köztestesztnél ez mindössze egy tanulót jelentett, az utó- és késleltetett tesztnél 6-6 tanuló indokolt.

Megjegyezzük, hogy például a köztestesztnél, ahol 12 diák foglalkozott az ellentmondásos esettel, közülük 5 olyan tanuló volt, aki nem alkalmazta helyesen a Pitagorasz-tételt. Ez negatívan befolyásolhatta őket az ellentmondás felismerésében. Tehát ezeknél a tanulóknál a témában szükséges tárgyi tudás elsajátítása (2. szint) hiányos volt.

23. ábra: A tesztek eredményei az ellentmondások felismeréséről és kezeléséről



Úgy látjuk, hogy a tanulóknál az ellentmondásos eset megfelelő kezelése a köztestesztnél mutatott teljesítményekhez képest fejlődött az utótesztre, és ez a fejlődési szint nem esett vissza a késleltetett tesztre.

Ennek igazolására a 23. ábra adatai alapján egyoldali hipotézisvizsgálatot végeztünk a Wilcoxon-féle előjeles rangpróbával. A tanulókhöz pontszámokat rendeltünk tesztenként. (Az előteszttel ebben az esetben nem foglalkoztunk.) Egy tanuló annyi pontot kapott egy tesztnél nyújtott összpontszámként, ahányadik szintre jutott az a 23. ábrán látható rangsorban. A tanulók ezen pontszámait hasonlítottuk össze tesztenként.

A köztes- és utóteszten szerzett pontszámok összehasonlítása

Nullhipotézis: A köztesteszt pontjainak mediánja nem kisebb, mint az utóteszt pontjainak mediánja.

A 15. táblázatot figyelembe véve a Wilcoxon-féle előjeles rangpróba eredménye $W = 32.000$, $z = -2.107$, $p = 0.018$, azaz a nullhipotézist elvetjük. Ez arra utal, hogy a köztesteszt pontjainak mediánja szignifikánsan kisebb, mint az utóteszt pontjainak mediánja.

15. táblázat: A köztes- és utóteszt pontjait összehasonlító leírás

	N	Átlag	SD	SE	Variációs együttható
Köztesteszt	27	0.741	1.059	0.204	1.430
Utóteszt	25	1.720	1.696	0.339	0.986

A köztes- és késleltetett teszten szerzett pontszámok összehasonlítása

Nullhipotézis: A köztesteszt pontjainak mediánja nem kisebb, mint a késleltetett teszt pontjainak mediánja.

A 16. táblázatot figyelembe véve a Wilcoxon-féle előjeles rangpróba eredménye $W = 20.000$, $z = -2.675$, $p = 0.004$, azaz a nullhipotézist elvetjük. Ez arra utal, hogy a köztesteszt pontjainak mediánja szignifikánsan kisebb, mint az késleltetett teszt pontjainak mediánja.

16. táblázat: A köztesteszt és a késleltetett teszt pontjait összehasonlító leírás

	N	Átlag	SD	SE	Variációs együttható
Köztesteszt	27	0.741	1.059	0.204	1.430
Késleltetett teszt	28	1.786	1.618	0.306	0.906

Az utó- és késleltetett teszten szerzett pontszámok összehasonlítása

Nullhipotézis: Az utóteszt és a késleltetett teszt pontjainak mediánjai között nincs szignifikáns különbség.

A 17. táblázatot figyelembe véve a Wilcoxon-féle előjeles rangpróba eredménye $W = 69.500$, $z = -0.331$, $p = 0.378$, azaz a nullhipotézist megtartjuk.

17. táblázat: Az utóteszt és a késleltetett teszt pontjait összehasonlító leírás

	N	Átlag	SD	SE	Variációs együttható
Utóteszt	25	1.720	1.696	0.339	0.986
Késleltetett teszt	28	1.786	1.618	0.306	0.906

A Wilcoxon-féle előjeles rangpróbák alapján is látható tehát, hogy a tanulóknál az *ellentmondásos eset megfelelő kezelése* a köztestesznél mutatott teljesítményekhez képest fejlődött az utóteszt idejére, és ez a fejlődési szint nem esett vissza a késleltetett tesztre.

2. szempont: a megoldás több esetéről

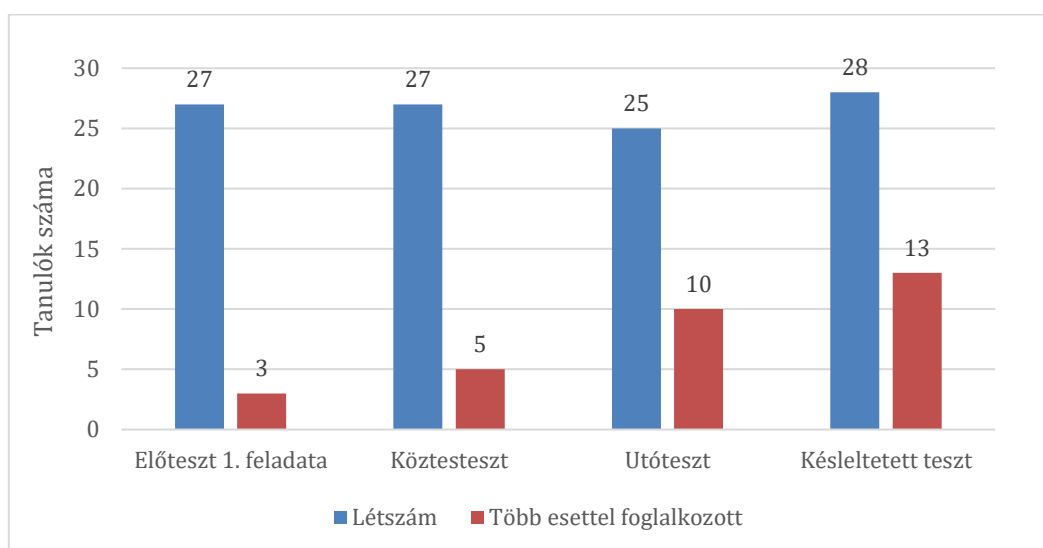
Az előteszt 1. feladatán kívül a többi teszt vizsgált feladataiban úgy jelent meg a több eset, hogy az esetek közül egyik ellentmondásos eset volt. Emiatt befolyásolta a több esetről szóló eredményeket az ellentmondás felismerése és kezelése.

Két tanuló volt, akik az előteszt 1. feladatánál tudta, hogy több esetet kell figyelembe venni a megoldáshoz, sőt megtalálták mind a négy esetet. A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeik a több eset keresése szempontjából aktívak voltak. Rajtuk kívül volt egy tanuló, akinek eszébe jutott a több lehetséges eset, de áthúzta valamennyit és csak ugyanazt az elvárt megoldást adta, hasonlóan a többiekhez (Kovács & Kónya, 2019). Ennél a tanulónál is nyoma van írásban az előbb említett szempontból a metakognitív tevékenységeknek, de nála

valószínűleg erősebb lehetett az a meggyőződés, hogy pontosan egy megoldása lehet egy matematikai feladatnak.

Az előteszt 1. feladatánál tehát 3 olyan tanuló volt, aki *több esettel foglalkozott* (24. ábra). Ennél a feladatnál nem volt ellentmondásos eset. A további teszteknel egyre jobb lett a teljesítmény a több eset észrevételét tekintve. Az utó- és késleltetett tesztél már a tanulók 40 illetve 46%-a *foglalkozott több esettel* a megoldás során. Mindkét utóbbi tesztél több olyan tanuló is volt (7, illetve 5 fő), aki úgy vizsgált több esetet, hogy első esetként már kaptak egy lehetséges megoldást. Ez azt mutatja, hogy ők tudatosan kerestek további esetet. Akik első esetben ellentmondást kaptak és utána vizsgáltak másik esetet, abból a meggyőződésből is vizsgálhatták azt, miszerint minden matematikai feladatnak kell, hogy legyen megoldása. Ugyanakkor ők is kereshették ugyanolyan tudatossággal a további eseteket, mint azon tanulók, akik nem az ellentmondásos esetet találták meg először.

24. ábra: A tesztek eredményei a több esetről



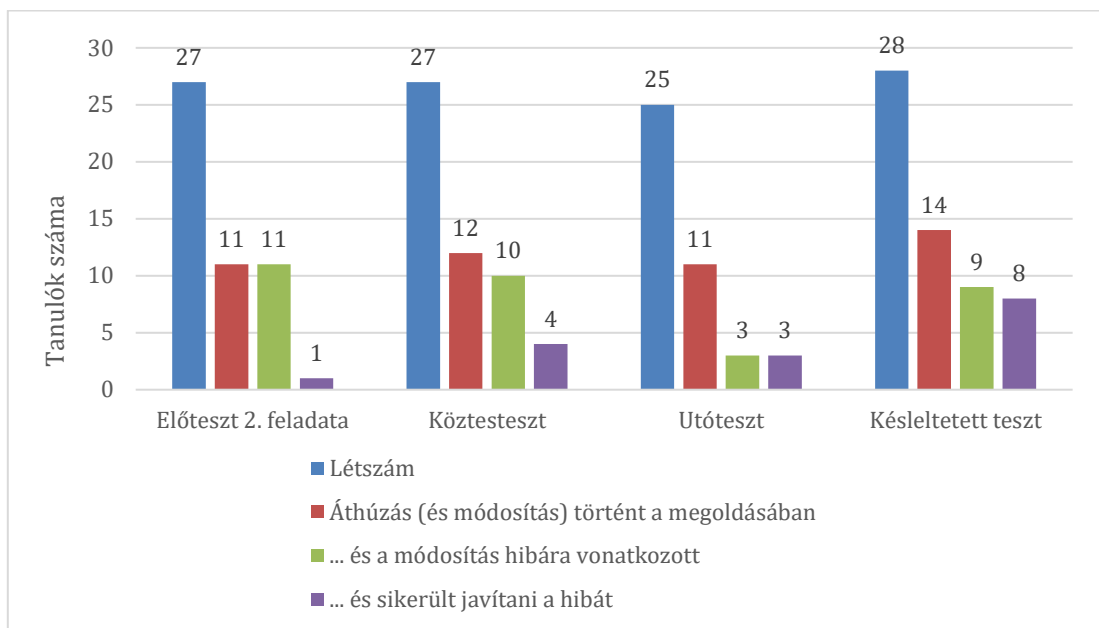
Az elemzésből azt látjuk, hogy a tanulóknak a több eset észrevételében mutatott teljesítménye fejlődött az elő- és közteszthez képest az utótesztre, és ez a fejlődés nem esett vissza a késleltetett tesztre. Ezt McNemar-Bowker-teszttel, párosított dichotomikus adatok összehasonlításával is megvizsgáltuk.

Az elő- és közteszt összehasonlításában még nem találtunk szignifikáns eredményt ($\chi^2(3) = 1.000, p = 0.801$). Ugyanakkor az elő- és utóteszt, valamint az elő- és késleltetett teszt összehasonlításának eredményei szignifikánsak ($\chi^2(2) = 7.667, p = 0.022$, és $\chi^2(3) = 10.000, p = 0.019$).

3. szempont: nyomon követő és ellenőrző tevékenységekről

A 25. ábrán látható, hogy az egyes teszteknel közel ugyanannyi tanulónál *történt áthúzás és módosítás* a megoldás levezetése közben. Ezen tanulónál az írásbeli munkákban található áthúzások és módosítások utalnak arra, hogy a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek bizonyos szinten működtek. Azok közül, akiknél *a módosítás hibára vonatkozott*, az utó- és késleltetett tesztél a tanulók áthúzás utáni módosítási kísérletei majdnem minden esetben *javították az elkövetett hibát*. A köztesztnél ez a javítani próbálók 40%-ra volt jellemző, és többnyire a Pitagorasz-tétel nem megfelelő alkalmazása okozta a gondot. A késleltetett teszt esetében szinte csak számolási hibák fordultak elő. Mindezek azt is jelentik, hogy a tanulók tárgyi tudása stabilabb lett.

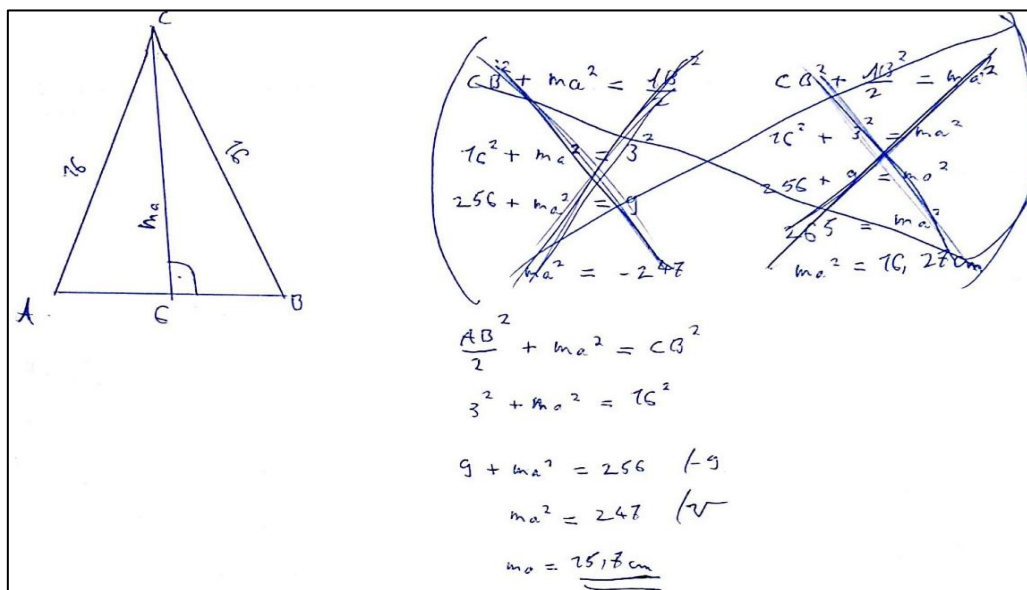
25. ábra: A metakognitív tevékenységekre utaló módosítási kísérletek és hatékonyságuk az egyes teszteknél



Az áthúzásokkal kapcsolatos metakognitív tevékenységek tehát közel ugyanannyi tanulónál jelentek meg a tesztekben, de a hibák javításának sikeressége a szükséges tárgyi tudás fejlődésével, az esetleges korábbi meggyőződés felülírásával, illetve a több eset és ellentmondás tudatos kezelésével haladt együtt.

A 26. ábra arra mutat példát, hogy egy tanulónál áthúzás és módosítás történt, és a módosítás olyan hibára vonatkozott, amit sikerült javítani (3. kategóriába tartozó megoldás). Látható, hogy az első két áthúzott próbálkozásnál nem megfelelően helyettesített a tanuló a Pitagorasztételbe és kapott először és másodszor is ellentmondásos végeredményt. A hibára valószínű mindkét esetben az eredmény értelmezéséből jött rá. Először negatív értéket kapott a magasságra, másodszor pedig egy befogó hosszabb lett, mint az átfogó. A tanuló kitartó volt és a harmadik próbálkozása helyes megoldásra vezetett. Ez egy jó példa arra, amikor az írásbeli munka utal egy tanuló gazdag nyomon követő és ellenőrző tevékenységeire.

26. ábra: A tanuló a köztestesztben felismerte a hibáját, amit kitartóan és sikeresen javított



Esettanulmány négy, eltérő fejlődési szintet mutató tanulóról

Az első tanuló (S1) jellemzése:

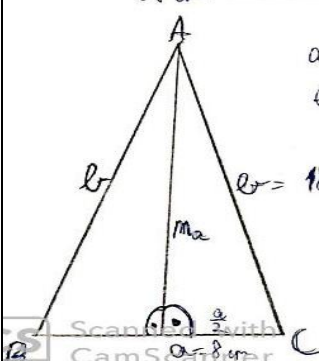
Már az előteszt megírásakor rendelkezett olyan stabil tárgyi tudással és megfelelő metakognitív készségekkel ahhoz, hogy egy új témakör feladatánál fel tudta ismerni a több esetet és az ellentmondást. Korábban a 22. ábrán (lásd 53. oldal) az ő munkáját mutattuk be, amikor az előteszt 2. feladatánál a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek után feloldotta az ellentmondást. Egyedül az ő aktuális fejlettségi szintje tartozott már az elő- és köztesteszt alapján a (4)-es szinthez. Az általunk vizsgált feladatokat hibátlanul oldotta meg, amihez a megoldás igényes és pontos kidolgozása is társult. Minden alkalommal felismerte, hogy több eset is megfelel a feltételeknek és meg tudta állapítani az esetleges ellentmondást, illetve helyesen kezelte és indokolta is azokat. A tanuló az általunk felállított rangsorban szintet már nem léphetett. Félévi osztályzata 5-ös volt, év végi osztályzata 5-ös lett. Tárgyi tudása és korábban megszerzett metakognitív készségei mindvégig alkalmasak voltak arra, hogy a több esetet vagy ellentmondást tartalmazó megoldásokat helytállóan tudja kezelni.

A 27. ábrán látszik, hogy példa értékűen indokolta a köztestesztben az ellentmondásos esetet, illetve helyesen megoldotta a megfelelő esetben a feladatot.

27. ábra: S1 precíz levezetése a köztestesztben

1. Egy egyenlő szárú háromszög két oldala 8 cm és 18 cm. Mekkora az alaphoz tartozó magasság hossza?

A háromszög egyenlőtlenység alapján nincs olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai 8 cm hosszúak és az alapja 18 cm hosszú.
Tehát ezen egyenlő szárú háromszög alapja 8 cm, szárai 18 cm hosszúak.



$a = 8 \text{ cm}$
 $b = 18 \text{ cm}$

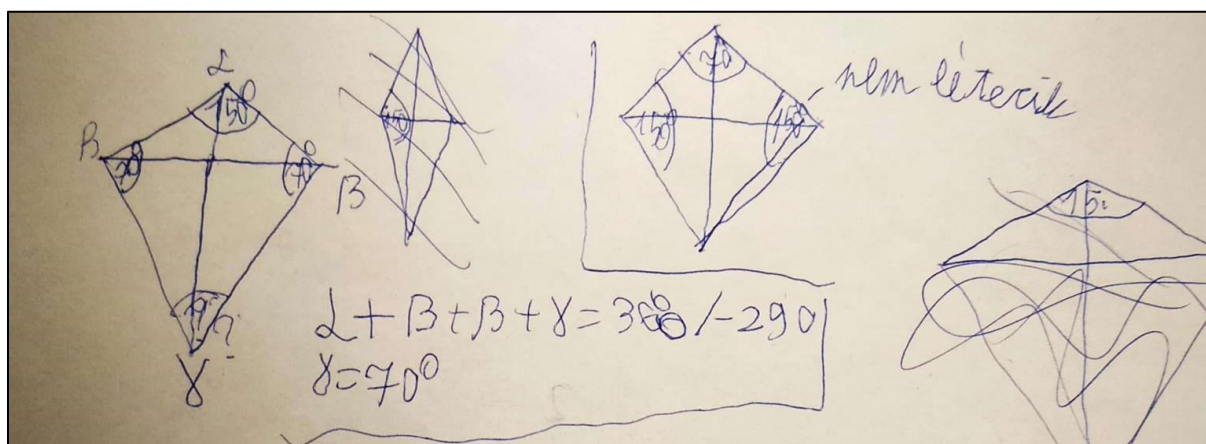
PIT-T.A.
 $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 = b^2$
 $4^2 + m_a^2 = 18^2$
 $16 + m_a^2 = 324 \quad | -16$
 $m_a^2 = 308$
 $m_a \approx 17,55 \text{ cm}$

A második tanuló (S2) jellemzése:

Az előteszt 1. feladatában csak egy megoldást talált meg a négy esetből, illetve a 2. feladatban hiányzott a megfelelő tartalmi tudása az ellentmondás felismeréséhez, de a metakognitív tevékenységek nyoma látszik az áthúzásából. A köztestesztben helyesen alkalmazta a Pitagorasz-tételt, itt nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre utaló jeleket is találtunk. Először a Pitagorasz-tételbe az egyenlőszárú háromszög alapjának hosszát helyettesítette be az alap felének hossza helyett, ezzel végig is számolt, de utána áthúzta és rájött a helyes levezetésre. Ennek feltétele volt a szükséges tárgyi tudás is.

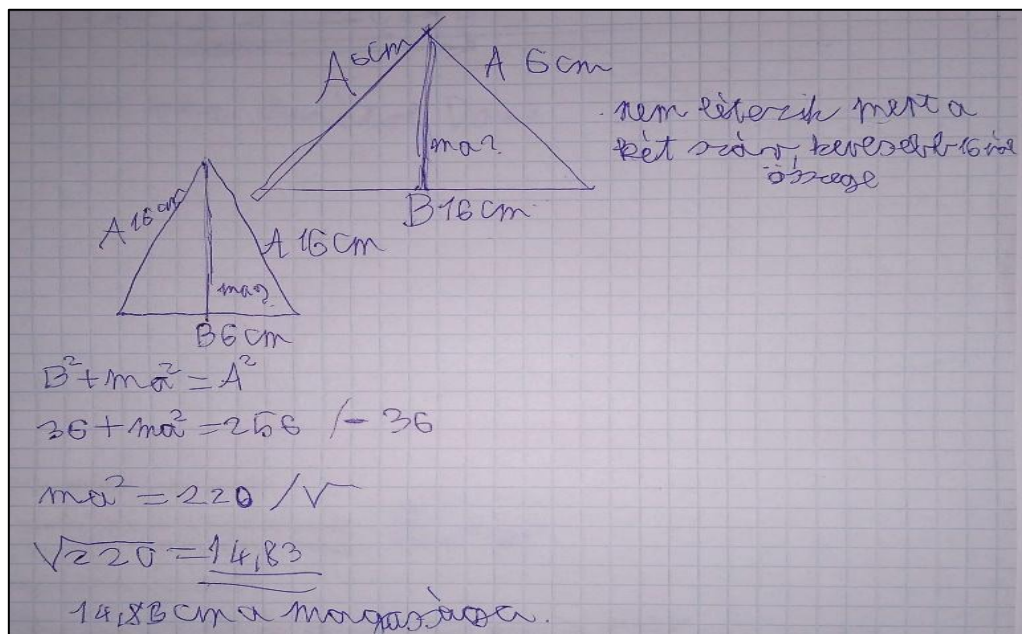
A 28. ábráról úgy tűnik, hogy az utótesztben tudatosan kereshette a több esetet, mert egy megoldás után vizsgált másik esetet is. Az ellentmondást tartalmazó második esetet nem húzta át, hanem a megoldás részének tekintette. Az ellentmondás okára viszont nem tért ki.

28. ábra: S2 az utótesztben több esetet keresett és felismerte az ellentmondást is



A késleltetett tesztnél már indokolta is az ellentmondást. A 29. ábrán látható, hogy a tanuló a következőt írta: „nem létezik [a háromszög], mert a két szár összege kevesebb 16-nál”. Foglalkozott a másik esettel is, ahol megkapta a (közelítőleg) helyes végeredményt.

29. ábra: S2 észrevette és indokolta az ellentmondást, illetve megtalálta mindkét esetet



Az utó- és késleltetett teszteken nyújtott teljesítmény alapján a tanuló rendelkezik a témakörhöz szükséges tárgyi tudással és él benne az a metakognitív tudás, hogy egy probléma megoldása során létezhet több eset és ellentmondás is. Ennek felismerését és a magyarázatát több, mint egy hónap után a geometriai témakör kontextusából kiszakadva érte el. A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeiről is több bizonyíték van az írásbeli munkái alapján. Minden általunk meghatározott szintet érintett, mondhatni fokozatosan történt a fejlődése. Legközelebbi fejlődési zónája tartalmazta a (4)-es szintet, amit a késleltetett teszten teljesített. Félévi osztályzata 2-es volt, év végi osztályzata 3-as lett.

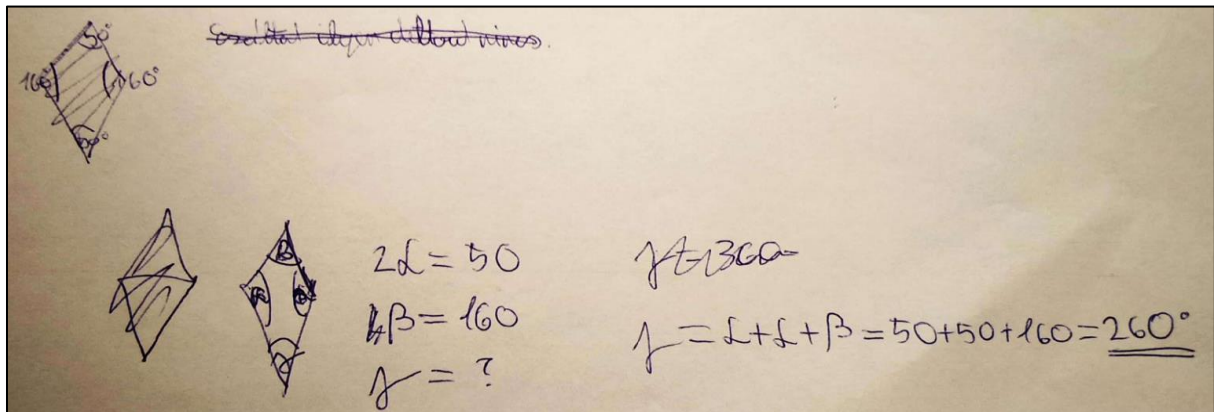
A harmadik tanuló (S3) jellemzése:

Az előteszt 1. feladatában a négy eset közül csak egyet vizsgált meg. A 2. feladatnál és a köztettesztben sem vette észre az ellentmondást. Az előteszt két feladata alapján a (2)-es szintet érte el, tehát a szükséges tárgyi tudás szintjét. Az órák alapján viszont az volt a tapasztalat, hogy

hiányzik a megfelelő tárgyi tudása geometriából. A köztestesztnél nem tudta alkalmazni a Pitagorasz-tételt, ami nem tűnt fel neki. Metakognitív tevékenységekre utaló áthúzásokat nem találtunk az elő- és köztestesztben.

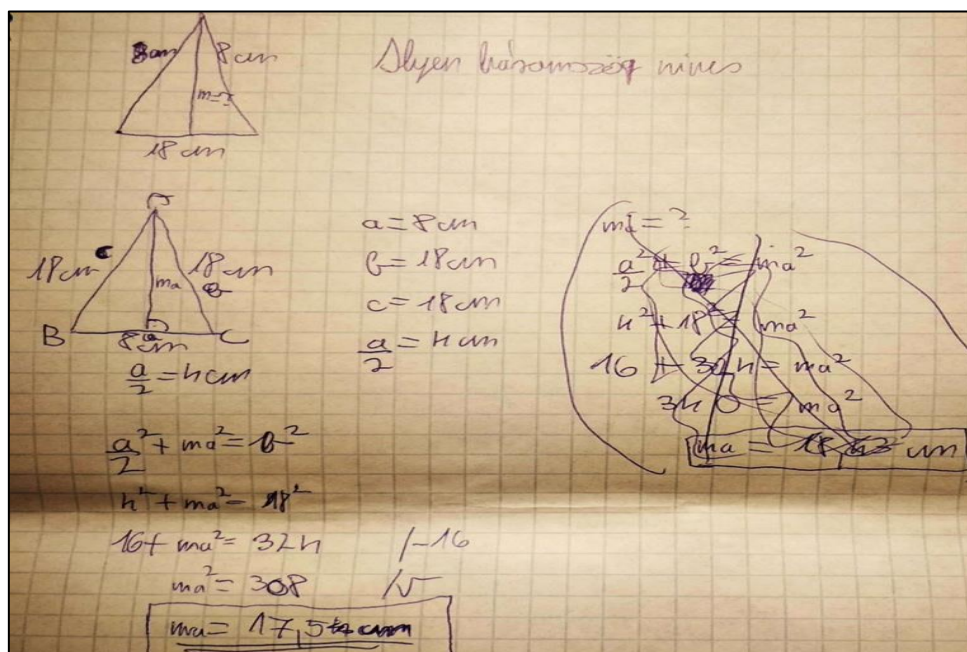
A 30. ábra mutatja, hogy az utóteszt során is bizonytalan volt a tanuló tárgyi tudása, mert a deltoid negyedik szögének értékét a másik három belső szög összegével adta meg. Az ellentmondást felismerte és le is írta, hogy „Ezáltal ilyen deltoid nincs.”, de utólag aztán áthúzta (lásd 30. ábra). Ehhez a megnyilvánuláshoz a kognitív és a metakognitív tudás hiánya egyaránt hozzájárult.

30. ábra: S3 az utótesztnél nem tudta kezelni az ellentmondást és tárgyi tudása hiányos



A 31. ábra bemutatja, hogy a késleltetett tesztben már tudta kezelni az ellentmondásos esetet, mert odaírta az első eset mellé, hogy „Ilyen háromszög nincs.”. Az indoklás hiányzik, de ez enélkül is előrelépés volt ennél a tanulónál. A másik esetben először nem alkalmazta helyesen a Pitagorasz-tételt, de észrevette és sikerült javítani a hibát. Feltűnhetett számára, hogy egy befogó hosszabb lett, mint az átfogó. Ez a mozzanat a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeiről tesz tanúbizonyságot. A késleltetett teszt alkalmával (3)-as szintet sikerült elérnie. Félévi osztályzata 4-es volt, év végi osztályzata 4-es lett.

31. ábra: S3 a késleltetett tesztben tudta kezelni az ellentmondást

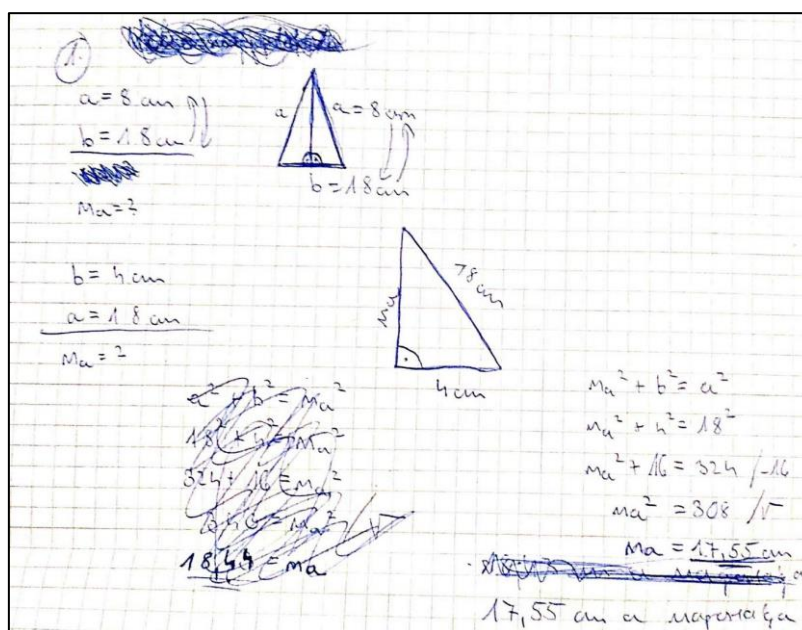


A negyedik tanuló (S4) jellemzése:

Az előteszt két feladatánál sem több esetet nem vett észre, sem ellentmondást. A tárgyi tudása is hiányos volt, illetve metakognitív tevékenységekre utaló jelet sem találtunk az írásbeli munkájában. A köztestesztnél nem tudta alkalmazni a Pitagorasz-tételt helyesen és nem is vette észre a hibáját, illetve csak egy esetet vizsgált. Az utótesztben a deltoidnak helyesen adta meg a további szögeit, de itt is csak egy esetet vizsgált. Viszont metakognitív tevékenységet mutatott, mert a deltoid belső szögeinek összegét ellenőrizte, hogy 360° -kal egyenlő.

A késleltetett tesztben, amikor megrajzolta az első ábrát, rájött, hogy az eset ellentmondásos, de részletes magyarázat helyett egyszerűen megcserélte az oldalak hosszát, ahogyan arra a 32. ábrán a nyilak utalnak. Ezt követően helyesen számította ki az új esetben a háromszög magasságát. Megjelent a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre utaló mozzanat, mert a Pitagorasz-tételt először nem megfelelően alkalmazta (lásd az áthúzást a 32. ábrán), de aztán sikerült javítania. A Pitagorasz-tételhez kapcsolódó tartalmi tudása fejlődött a köztesteszthez képest. Az ellentmondást még nem kezelte a megoldást részeként, tehát a (3)-as szintet nem, csak a (2)-est érte el a tanuló.

32. ábra: S4 a késleltetett tesztben észreveszi az ellentmondást



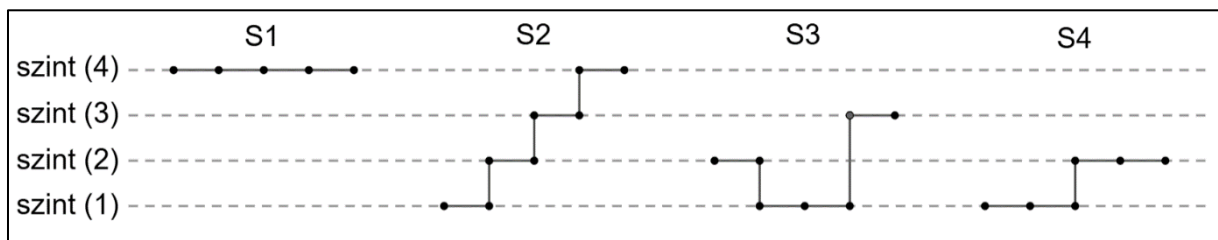
A négy tanuló fejlődési folyamata

A 33. ábra az esettanulmányokban szereplő négy tanuló fejlődési szintjeit mutatja be. Az egységnyi, vízszintes szakaszok azt jelzik, hogy a négy teszt alkalmával milyen szintet teljesítettek. A kiválasztott négy diák közül három (S1, S2, S3) elérte az általunk kitűzött legalább (3)-as szintet, vagyis eljutottak a több eset és az ellentmondás felismerésének szintjéig. A késleltetett tesztnél már az S2 tanuló is elérte azt a (4)-es szintet, amin az S1 tanuló mindvégig tartózkodott. Ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy egyforma tudással és képzettséggel rendelkeznek a témát és a fejlesztést illetően, hanem csak azt, hogy mindkét diák képes volt a több eset és az ellentmondás felismerésére, tudatos kezelésére és magyarázatára. Az S1 tanulónál a fejlesztő kísérlet eredménye a stabilitás megőrzésén kívül az eszközeink segítségével nem mérhető. S2 tanulónál azonban látványos fejlődést mutathatunk ki. S3 tanuló

egyik tesztnél sem érte el a (4)-es szintet. Ennek az lehet az oka, hogy a legközelebbi fejlődési zónája vélhetően nem tartalmazta ezt a szintet, de az elvárt (3)-as szint elérhető volt számára és sikerült teljesítenie. S4-nek a legközelebbi fejlődési zónája vélhetően még a (3)-as szintet sem tartalmazta, mert egyszer sem sikerült azon a szinten teljesítenie. Őt a (2)-es szintre juttatta el a beavatkozás.

Érdeemes megjegyezni azt a különbséget, hogy míg S2 tanuló osztályzatai félévkor és év végén gyengébbek voltak, mint S3 osztályzatai, S2 mégis megelőzte a fejlettségi szint tekintetében. A 33. ábráról azt is leolvashatjuk, hogy bár minden tanuló ugyanazt a fejlesztést kapta, mégsem tudott mindenki ugyanúgy fejlődni.

33. ábra: A négy tanuló fejlődési üteme a négy teszt alapján



4.5. Kutatási kérdések és válaszok

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

K2.1. Kialakítható-e egy adott témakör tanítása során az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

Az eredmények alapján a kezdeti egy diákhöz képest a vizsgált tanulók közel felénél volt megfigyelhető a fejlesztés során vagy után az említett metakognitív tudás. A tanulók majdnem fele az utó- és késleltetett tesztnél már tudatosan kereshette a több esetet, mert annak ellenére, hogy találtak egy megoldást, további esetet is vizsgáltak. Az ellentmondást kevesen tudták megindokolni, de annak felismerését és megoldásként való kezelését is sikerként tartjuk számon.

K2.2. Milyen nyomon követő és ellenőrző tevékenységek figyelhetők meg egy olyan feladat megoldása során, amelynek több, akár ellentmondást is tartalmazó megoldása van?

A több esetet vagy ellentmondást tartalmazó megoldások alkalmas terepet nyújtottak a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek megnyilvánulására. Erre a több eset vagy ellentmondás észrevételéből, illetve a tanulók munkáiban megfigyelt áthúzásokból következtettünk. Az ellentmondás értelmezése, vagyis egy kognitív folyamat eredményének értékelése gyakran tapasztalható volt a tanulók írásbeli munkáiban, attól függetlenül, hogy az általuk kapott ellentmondás matematikailag helyes vagy helytelen volt. Annak mérlegelése, hogy lehet-e több megoldása a feladatnak, a kognitív folyamat feldolgozásával kapcsolatos nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket igényelte. Ilyenre is láttunk több példát, akár úgy, hogy a tanulók egy eset után még további megoldást kerestek, akár úgy, hogy néhány tanuló (tévesen) elvetette a további megoldás(oka)t.

4.6. Összegzés és következtetések

A fejezetben egy fejlesztő kísérletet mutattunk be, ami egy 13 tanórán megvalósuló kísérlet volt matematikából átlagos teljesítményű 29 fős 9. osztályban. A fejlesztő kísérlet közvetlen célja azon meggyőződések felülírása volt, miszerint: Minden matematikai feladatnak van megoldása, és pontosan egy megoldása van (Schoenfeld, 1992). Elő-, köztes-, utó- és késleltetett tesztek alapján vizsgáltuk a tanulók fejlődésének mértékét. Arra is kíváncsiak voltunk, hogy a több megoldást vagy ellentmondást tartalmazó problémák, milyen hatással vannak a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeire. A több esetet vagy ellentmondást tartalmazó feladatok megoldása a tanulók ezen metakognitív tevékenységei szempontjából is nagyobb igénybevételt jelenthettek, mint a pontosan egy megoldással bíró feladatok egy része.

A kezdeti alig néhány tanulóhoz képest az utó- és késleltetett tesztnél már közel az osztály fele elérte az általunk megfogalmazott és kitűzött (3)-as szintet, vagyis felismerték, amikor több esetet kellett vizsgálni a megoldása során, és felismerték az ellentmondást tartalmazó esetet is. A fejlesztő kísérletünk célja az osztály közel felénél megvalósult. A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket szükségesnek tartjuk ahhoz, hogy egy tanuló egy feladatnál felismerje azt, hogy akár ellentmondást is kaphat vagy éppen több esetet kell figyelembe vennie a megoldás során. A vizsgált metakognitív tudásban megmutakozó fejlődés támogatta a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek fejlődését azáltal, hogy az új és szokatlan terület (nem pontosan egy megoldással járó feladatok) ösztönözte alkalmazásukat.

Az előbbiekből kiindulva azokról a tanulókról, akik legalább a (3)-as szintet elérték, biztosan kijelenthetjük, hogy a tesztekben találtunk a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeikre utaló írásbeli mozzanatot. A 4 tanulóra vonatkozó esettanulmányból látjuk, hogy az (1)-es vagy (2)-es szinten tartózkodó tanulóknál is előfordulhattak nyomon követő és ellenőrző tevékenységek, de a tárgyi vagy a több eset és ellentmondás felismerésére vonatkozó metakognitív tudáselemek hiánya szűkíti a lehetőségeik körét. Tehát az általunk felállított fejlődési szintek a metakognitív írásbeli megnyilvánulásaihoz is kapcsolódnak. Bár a hibátlanul dolgozó tanulók sem feltétlenül szolgáltattak nyomot az írásbeli munkájukban a metakognitívra vonatkozóan.

A négy tanuló esettanulmányának tapasztalatai, hogy az általunk induktívan felállított fejlődési szintek használhatók a tanulók aktuális és lehetséges fejlődési szintjeinek vizsgálatára, illetve hogy az osztályzatai alapján gyengébb (S2) tanuló jobban teljesített a metakognitív fokozottabban igénylő feladataink kapcsán, mint a jobb jegyekkel rendelkező társa (S3).

A fejleszthetőség ütemének és mértékének szempontjából meghatározónak bizonyult a tanulók tárgyi tudása (Kiss & Kónya 2020, 2021; Kiss, 2021). Az eredmények azt mutatják, hogy a tárgyi tudás szerepe szükséges, de nem elégséges feltétele volt az általunk középpontba állított metakognitív tudáselem kialakításának. Ha valaki nem érte el legalább a (3)-as szintet, annak oka adódhatott a tárgyi tudás hiányosságai mellett a mélyen rögzült meggyőződésekkel vagy a megfelelő nyomon követő és ellenőrző tevékenységek hiányából is. Voltak olyan tanulók, akiknek vélhetően a legközelebbi fejlődési zónájuk nem tartalmazta a legalább (3)-as szintet, azaz nem voltak alkalmasak az egységes fejlesztésre.

Az ellentmondás okát kevés tanuló tudta megadni, vagyis úgy tűnik, hogy ehhez a fejlesztő kísérlet a vizsgált csoportban nem bizonyult elegendőnek. Meglepő eredmény, hogy a másfél hónappal a fejlesztést és témakör lezárását követően a késleltetett tesztnél nem volt gyengébb az osztály teljesítménye a tárgyi tudást, a több eset felismerését és az ellentmondás felismerését illetően, mint az utótesztnél.

Az áthúzásokkal kapcsolatos nyomon követő és ellenőrző tevékenységek arányban ugyanannyi tanulónál jelentek meg a tesztekben, de a hibák javításának sikeressége a szükséges tárgyi tudás fejlődésével, az esetleges korábbi meggyőződés felülírásával, illetve a több eset és ellentmondás tudatos kezelésével haladt együtt.

4.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal

Kutatásunk a hazai szakirodalomban kutatási űrt tölt be azzal, hogy középiskolás tanulók metakognitív tudását és metakognitív tevékenységeit próbálta fejleszteni matematikából.

Eredményeinkkel kapcsolódunk ahhoz, miszerint a serdülőknél is van további lehetőség a fejlődésre (Brown et al., 1983; Weil et al., 2013).

Az általunk említett meggyőzések felülírásához hozzájárulhattak a diákok metakognitív tevékenységei, illetve fordítva, a szóban forgó meggyőződés felülírásával a tanulók metakognitív tevékenységeit is fejleszthettük, ami kapcsolódik ahhoz az eredményhez, hogy Schraw (1994) kapcsolatot talált a metakognitív tudás és a nyomon követési pontosság között, illetve, hogy a metakognitív tudás és a metakognitív tevékenységek kölcsönösen befolyásolhatják egymást (Schneider et al., 1987; Schraw, 1994).

A nagyobb kihívást jelentő feladatok megkövetelhetik a metakognitív folyamatok magasabb szintű (vagy bizonyos esetekben alacsonyabb szintű) bevonását (Csíkos, 2022b). Ehhez a megállapításhoz is tudunk kapcsolódni, ugyanis a tapasztalataink azt mutatták, hogy a több esetet vagy ellentmondást tartalmazó problémák megoldása alkalmas terepe a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek gazdag írásbeli megnyilvánulására.

A 4 tanuló érintő esettanulmányunk tapasztalataival hozzájárultunk a Desoete (2019) által emlegetett dilemmához, vagyis, hogy továbbra sem világos, hogy a matematikában gyengén teljesítő tanulók a metakognitív terén is eltérő teljesítményt nyújtanak-e a közepesen vagy jól teljesítő társaikhoz képest. A kutatásunk esettanulmányában megfigyelhető volt, hogy az osztályzatai alapján gyengébb tanuló jobban teljesített a metakognitív fokozottabban igénylő feladataink kapcsán, mint a jobb jegyekkel rendelkező társa.

4.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára

Mivel láttuk, hogy metakognitív szempontból hasznos a több esettel vagy ellentmondással járó problémák megoldása, így emiatt is szükséges a tanári nyitottság a nem pontosan egy megoldással járó problémák gyakorlására. A fejlesztő kísérletünkben minden órán előfordult több esetet vagy ellentmondást tartalmazó feladat. Úgy gondoljuk, hogy ha minden órán nincs is rá szükség, akkor is tudatosan, egy témakör tanítása során rendszeresen elő kell venni az ilyen típusú feladatokat.

A véleményünk az, hogy az általunk tárgyalt és ahhoz hasonló, a problémamegoldást hátráltató meggyőzések kialakulását és fennmaradását erősen meghatározza a szaktanár és az adott osztályban kialakuló tanulási környezet is. Ez alapján viszont az általunk bemutatott fejlődés hatása nem biztos, hogy megmutatkozik más tanórán, más tanárnál.

4.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján

A kutatás kiindulóproblémája miatt a tanárképzésben is szükségesnek ítéljük azon meggyőzések hangsúlyozását, megbeszélését és helyreigazítását, amik negatívan befolyásolják a diákok matematikai teljesítményét és a matematikához való hozzáállását (lásd ezen meggyőzéseket: Schoenfeld, 1992, p. 69)

Úgy gondoljuk, hogy a több esetet és ellentmondást tartalmazó feladatok órai beépítésének megfelelő arányáról érdemes lehet vitát folytatni a hallgatókkal.

A bemutatott kutatással foglalkoznak a következő publikációk

- Kiss, M., & Kónya, E. (2020). Is it possible to develop metacognition in mathematics classroom environment? *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), 123–132. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0485>
- Kiss, M., & Kónya, E. (2021). Do students analyze and evaluate the result of their problem solving activity? In B. May-Tatsis, K. Tatsis, & E. Swoboda (Eds.), *Critical thinking in mathematics: Perspectives and challenges* (pp. 143–152). ISBN: 978-83-7996-903-6
- Kiss, M. (2021). Fejlesztőkísérlet matematikaórán egy meggyőződés felülírására. In G. Molnár & E. Tóth (Eds.), *Új kutatások a neveléstudományokban 2021: A neveléstudomány válaszai a jövő kihívásaira* (pp. 54–72).

5. A problémamegoldás ellenőrzési szakaszának elemzése a „hangosdolgozatok” segítségével

5.1. Bevezető

Ebben a fejezetben egy olyan kutatásról lesz szó, ami egy 29 fős 11-12. osztály tanulóinak metakognitív tevékenységeit vizsgálja a problémamegoldás ellenőrzési szakaszában (Lester, 1985) az úgynevezett „hangosdolgozatok” által.

Az online oktatás alatt az említett osztályban a tanulók számonkérése abból állt, hogy egy meghatározott időkereten belül az otthon megoldott feladatok levezetését lefénnyképezve fel kellett tölteni egy felületre, illetve hangfelvételt is kellett készíteni és mellékelni, amiben röviden elmagyarázták a diákok az egyes feladatok megoldását (Kiss & Kónya, 2022). A hangosdolgozat értékes eszköznek tűnik a diákok nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek ösztönzésére és megfigyelésére, mivel a feladat írásbeli megoldása utáni szóbeli magyarázat a tanulókat a problémamegoldási folyamat újragondolására készítette, lehetőséget teremtve az ellenőrzésre és a reflexióra (Mason et al., 1982/2010). Mondhatjuk azt is, hogy a tanulóknak a Pólya-féle (1945/1977) visszatekintés fázisának bizonyos lépéseivel kellett foglalkozniuk, amely a legelhanyagoltabb fázis, ahogy azt számos nemzetközi kutatás is mutatja (Wilson et al., 1993; Cai & Brook, 2006; Jacobbe, 2007; Ohlendorf, 2017; Mason, 2022).

A tanulók szóbeli magyarázatára a problémamegoldás után került sor, viszont mégsem volt teljesen lezárta a folyamat, mert akár a hangfelvétel során is módosíthatták munkáikat a diákok. Libet (2002) szerint a tudatos döntésekhez közel fél másodperces időegységek társíthatók. Ez azt is jelenti, hogy ha problémamegoldás közben hozunk egy döntést, az csak egy kicsivel később válik tudatossá. Ebből az is következik, hogy a metakognitív tevékenységek jelenléte megakadályozhatja az egyént abban, hogy a folyamattal egyidejűleg szóban is beszámoljon róluk. A későbbi tudatos hozzáférés és a szóbeli beszámoló lehetősége azonban megmarad (Csíkos, 2016). A hangosdolgozatok illeszkednek az előbbi elgondoláshoz, mert a kutatásunkban a tanulók szóbeli magyarázata időben később történt, mint a gondolataik leírása. Lásd bővebben az elméleti tárgyalást a dolgozat 26. oldalán (Jaušovec, 1994; Baker & Cerro, 2000; Libet, 2002; Petitmengin, 2006; Csíkos, 2016).

5.2. Kutatási kérdések

A szóbeli magyarázatokat az írásbeli megoldások tükrében elemeztük, a leírtakhoz képest többletinformációkat keresve a tanulók gondolkodási folyamatáról. A következő kutatási kérdéseket fogalmaztuk meg:

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

K3.1. Azonosíthatók-e nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a szóbeli magyarázat által adott többletinformációkban?

K3.2. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa a feladatok témakörétől?

K3.3. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől?

5.3. Módszerek

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére és megfigyelésére alkalmazott módszerünk ötvözi a valós idejű hangosan gondolkodtatás eljárását (think-aloud protocol) a megoldást felidéző utólagos szóbeli beszámolók (retrospective verbal reports) módszerével. Utólagos a beszámoló abból a szempontból, hogy a tanulók az írásbeli munkájuk befejezése után magyarázták el a megoldásukat, ugyanakkor valós idejű is, mert a megoldások még nem kerültek leadásra a hangfelvétel előtt, tehát volt lehetőség észrevételekre, módosításokra, így sok mozzanatában élő maradt a folyamat. A tanulók írásbeli és szóbeli munkáit elsősorban kvalitatív tartalomelemzéssel értékeljük.

Baker és Cerro (2000) megjegyzik, hogy a szóbeli beszámolók módszerét leginkább hallgatóknál ajánlott alkalmazni. Ennek az az oka, hogy a fiatalabb tanulók még kevésbé produktívak a hangosan gondolkodás terén. A kutatásunkban szereplő diákok 17-18 évesek, így feltételezhetjük, hogy náluk a hangosan gondolkodásnak nincs fejlődésbeli akadálya.

Felsorakoztatjuk a hangosan gondolkodtatás eljárásának néhány korlátját (Baker & Cerro, p. 104)⁹:

- (1) A hangosan gondolkodás zavarhatja a feladat feldolgozását.
- (2) A kognitív folyamatok nem biztos, hogy tudatossá válnak a beszámoló alatt.
- (3) Az egyéni jellemzők, mint az életkor, a motiváció, a szorongás, a verbális képességek és az önfeltárási hajlandóság befolyásolhatják a válaszadást.
- (4) Az utasítások, a kérdések típusa és a használt módszerek bizonyos típusú válaszok adására ösztönözhetik a résztvevőket.
- (5) A feladatnak elég nehéznek, összetettnek és újszerűnek kell lennie ahhoz, hogy metakognitív tevékenységeket igényeljen.
- (6) A hangosan gondolkodtatás eljárásából származó eredményeket nehéz pontozni.

A kutatásunkban az (1), (2) és a (3)-as pontok kiküszöbölését segíthette, hogy a megoldáshoz képest utólagos szóbeli magyarázatot kértünk a tanulóktól, amit ráadásul nem iskolai környezetben tettek meg. A (4)-es pontot az mérsékelhette, hogy a szóbeli magyarázatokhoz, csak egy rövid és általános utasítást adtunk meg. A (5)-ös pontban megfogalmazott tényezők közül a feladatok nehézsége és összetettsége kellő kihívást jelenthetett a diákoknak a metakognitív tevékenységek szempontjából. Az utolsó ponttal kapcsolatban hasonló tapasztalatokat szereztünk a pontozás megtervezése során.

5.3.1. Minta

A mintánkban egy 11-12. osztály összesen 29 diákja szerepelt. Ennek az osztálynak heti négy matematika órája volt 11. és 12. évfolyamon is, csoportbontás nélkül. A tanulók matematikából átlagos vagy átlag alatti teljesítményűnek mondhatók. A kutatásra a 2019/2020-as és a 2020/2021-es tanévben került sor. A kutatás által érintett időszakban a COVID-19 pandémia miatt az iskolák csak 2020. szeptember 1-től november 11-ig voltak nyitva, egyébként az ezen kívüli időszakban online oktatás zajlott. A tanulókat S1-től S29-ig kódokkal jelöltük és a későbbiekben így fogunk rájuk hivatkozni.

5.3.2. Eljárás

Az iskolabezárás miatt a diákok otthon oldották meg a dolgozatként összeállított feladatlapokat. Matematika tantárgyból a mintánkban szereplő osztálynál ez úgy történt, hogy miután a tanulók

⁹ A szerző saját fordítása.

egy adott időpontban megkapták egy online felületen a dolgozat feladatait, a rendelkezésre álló időn belül a következőket kellett tenniük:

- Megoldani papíron a feladatokat.
- Lefényképezni az írásbeli munkájukat.
- Hangfelvételeket készíteni, amelyben elmagyarázzák a feladatok megoldását ("Foglalja össze és magyarázza el szóban a megoldást 1-2 percen!").
- Beküldeni az írásbeli és szóbeli munkát az online felületen.

A feladat megoldására, a fényképek elkészítésére, a szóbeli magyarázatok mobiltelefonnal történő rögzítésére és mindezek online felületen való beküldésére 60 perc állt a tanulók rendelkezésére. A tanár az írásbeli munka mellett a szóbeli magyarázatot is pontozta, ezek alapján született meg a dolgozat érdemjegye. A kutatásban két dolgozat (lásd 18. táblázat) tapasztalatait elemezzük.

18. táblázat: A két dolgozat néhány jellemzője

Dolgozat témaköre	Feladat (db)	Időpont	Tanulók (fő)	Időtartam (perc)
1. Kombinatorika	3	2020. május 26.	27	60
2. Mértani sorozat	3	2020. november 16.	27	60

5.3.3. Mérőeszköz

A kombinatorika dolgozat feladatai és megoldásvázlatai¹⁰

A dolgozat három kombinatorikai feladatot tartalmazott. A feladatok egy-egy kombinatorikai struktúra (modell) kiválasztását és helyes alkalmazását igényelték.

(K1) *Jani a szelektív hulladékgyűjtő szigetre vitt 6 egyforma üres üveget, 5 egyforma összelapított műanyag palackot és 11 ugyanolyan fajta üres konzervdobozt. Útközben arra gondolt, hogy összevissza fogja bedobálni egymás után a megfelelő hulladékgyűjtőbe a szemétdarabokat. Hányféle sorrendben szabadulhat meg Jani a nála lévő felesleges holmiktól?*

Megoldás: A feladat reprezentálható ismétléses permutációval. Összesen $\frac{22!}{6! \cdot 5! \cdot 11!} = 325909584$ féle sorrendben szabadulhat meg Jani a holmiktól.

(K2) *Az iskola végzős diákjai próbaérettségire jelentkeztek matematikából. Minden tanuló egy olyan háromjegyű kódszámot kapott, amely a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből három különbözőt tartalmaz. Hány különböző kódszámot tudnak kiosztani?*

Megoldás: A feladat reprezentálható ismétlés nélküli variációval. Összesen $\frac{8!}{(8-3)!} = 336$ darab különböző kódot tudnak kiosztani.

(K3) *Tegnap matematikaóra elején a 33 fős osztály négy tanulója röpdolgozatot, utána történelemórán öt diák forráselemzést írt. Hányféleképpen választhatták ki a tanárok a dolgozatokat írókat, ha nem vették figyelembe egymás döntését, azaz egy diák akár mindkét tárgyból írhatott?*

¹⁰ Mindkét dolgozatnál több feladatsor készült, a tanulókat több csoportra osztva. Ezek felépítésükben, matematikai tartalmukban megegyeztek, csak szövegezésükben tértek el, ezért a párhuzamos feladatsorokat nem ismertetjük.

Megoldás: A feladat két ismétlés nélküli kombináció szorzataként reprezentálható. Összesen $\binom{33}{4} \cdot \binom{33}{5} = 9711789120$ - féleképpen válaszhatták ki a dolgozatírókat.

A mértani sorozat dolgozat feladatai és megoldásvázlatai

A dolgozat november 16-ra esett, így a tananyag nagy részét még az iskolában tanulták a diákok. A számonkérés témája a mértani sorozat volt. Az első feladat rutinfeladatnak számított. A második és a harmadik feladatok valós helyzetet feldolgozó problémák voltak, a második feladat hasonló volt a harmadikhoz, de egyszerűbb.

(M1) *Egy mértani sorozat harmadik eleme -64, hetedik eleme -1024. Határozd meg a sorozat első tagját, a hányadosát és az első tíz tag összegét!*

Megoldás: A mértani sorozat harmadik és hetedik elemét felírjuk a sorozat első tagjával kifejezve. $-64 = a_1 \cdot q^2$, $-1024 = a_1 \cdot q^6$. Így kaptunk egy egyenletrendszerrel, ahol a sorozat első tagja és a hányadosa a két ismeretlen. Kifejezve $a_1 = \frac{-64}{q^2}$, majd két megoldást kapunk a sorozat hányadosára: $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$. Innen mindkét esetben az $a_1 = -4$. A sorozat első tíz tagjának az összege az első esetben 1364, a második esetben pedig -4092 .

(M2) *Egy család megfigyelte, hogy az elmúlt időszakban átlagosan minden évben 1,2-szer annyit költött benzinre, mint az előző évben. Eszerint, ha 2014-ben 144000 Ft-ot fizettek benzinért, akkor mennyi pénzt költhetett 2009-ben benzinre a család?*

Megoldás: A feladat reprezentálható mértani sorozattal a következő választásokkal: $a_6 = 144000$, $q = 1,2$, és 2009-es adat a kérdés, vagyis a_1 . Az $a_6 = a_1 \cdot q^5$ egyenletbe behelyettesítve, majd rendezve kapjuk, hogy $a_1 \approx 57870$, vagyis kb. 57870 Ft-ot költött a család benzinre 2009-ben.

(M3) *A vadon élő koalák száma egyre kevesebb Ausztráliában. Felmérések szerint a koalák száma évente átlagosan 9%-kal csökken. 2009-ben mindössze 43000 vadon élő koalát számoltak össze a kontinensen. Számold ki, hogy ilyen mértékű csökkenés mellett hány év múlva esik a 2009-es adat 60%-a alá a koalák száma Ausztráliában!*

Megoldás: A feladat reprezentálható mértani sorozattal a következő módon:
 $a_0 = 43000$, a 43000 60%-a 25800, azaz $a_n = 25800$, a 9%-os csökkenés miatt $q = 0,91$, és n , vagyis az évek száma a kérdés. Megoldva az $a_n = a_0 \cdot 0,91^n$ egyenletet $n \approx 5,42$, azaz 6 év múlva esik a 2009-es adat 60%-a alá a koalák száma Ausztráliában.

5.3.4. Elemzési szempontok

A tanulók szóbeli magyarázatait elemeztük az írásbeli megoldásaik alapján, többletinformációkat keresve a tanulók gondolkodási folyamatáról. A szóbeli magyarázatokban az írásbeli munkákhoz képest megjelenő többletinformációkat kerestük és kódoltuk, amelyekhez metakognitív tevékenységeket társítottunk. A kutatási kérdésekre a válaszokat a tanulók írásbeli és szóbeli munkájának elemzésével induktívan felállított kódrendszer segítségével kerestük.

A hangfelvételek a következő módon kerültek elemzésre:

1. Azonosítottuk a kódolási egységeket, azaz megkerestük a felvételek azon részeit, amelyek többletinformációt (hozzáadott információt) tartalmaztak, azaz nem csak a papíron leírtakat ismételték a diákok. Egy felvétel egynél több ilyen egységet is tartalmazhatott.
2. A tartalomelemzés módszerét alkalmazva először ezeket az egységeket kódoltuk három szempont szerint: A hozzáadott információ
 - a megoldás egy lépésére (röviden a továbbiakban: *lépés*), vagy
 - egy teljes gondolatmenetre, a megoldás modelljére (röviden a továbbiakban: *gondolatmenet*), vagy
 - a kapott eredmény értékelésére, ellenőrzésére (röviden a továbbiakban: *eredmény*)

vonatkozott.

Például *lépésként* kódoltuk az egységet, ha a tanuló a megoldás egyik lépését indokolta, *gondolatmenetként*, ha a választott stratégiát vagy modellt magyarázta, vagy *eredményként*, ha kitért arra, hogy a kapott eredmény összhangban van-e a problémahelyzettel, esetleg ennek megfelelően módosította is azt. Ezek a kódok szorosan kapcsolódnak a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekhez. A *lépés* és *gondolatmenet* típusú többletinformációk a kognitív feldolgozás nyomon követéséről és ellenőrzéséről szólnak, az *eredmény* típus pedig a kognitív feldolgozás eredményének értékeléséről, ellenőrzéséről.

A 34. ábra segítségével a kódolási rendszerünket szemléltetjük.

34. ábra: Az S13 írásbeli megoldása a 2. dolgozat 3. feladatára

$p = 9\%$
 $T_0 = 43.000$
 $n = ?$
 $T_n = ?$
 $25.800 = 43.000 \cdot (1 - \frac{p}{100})^n$
 $0,6 = 0,91^n$
 $\lg 0,6 = \lg 0,91^n$
 $\lg 0,6 = n \cdot \lg 0,91 \quad / : \lg 0,91$
 $\frac{\lg 0,6}{\lg 0,91} = n$
 $n \approx 5,42$
 $n = 5$
 5 év után esik 60% alá a koalák száma Ausztráliában

A megoldáshoz tartozó hangfelvétel szövege dőlt betűvel van szedve, ahol a többletinformációk és a típusuk egységenként félkövér betűtípussal van kiemelve:

„**A 3. feladatnál ugye csak a kamatlábat, a százalékot meg az alapot tudtuk** (S13-1. egység, **gondolatmenet**) és ugye én ebből kiszámoltam itt oldalt a T_n -et százalékszámítással, aztán kijött az eredmény, azt egyből be is helyettesítettem a képletbe. **És itt a zárójelben azért van mínusz, mert csökkent abban akkor, és ugye azért lett mínusz.** (S13-2., **gondolatmenet**) A 0,6 úgy jött ki, hogy a 25800-at elosztottam a 43000-rel. A $0,91^n$ az meg ugye a zárójelben lévő feladat. **Bevezettük a tízes alapú logaritmust, mert ezzel ki lehet számolni az n-et.** (S13-3., **lépés**) Aztán úgy rakosgattam, számolgattam inkább úgy mondom, hogy az egyenletet úgy tudjam rendezni, hogy megkapjam az n-et. **Ki is jött, hogy 5,42 és az n hiába nem haladja meg**

a tizedesvessző után az ötöt, akkor is lefele kell csökkenteni, mert ugye a feladat is az volt, hogy csökken (S13-4., eredmény) és ugye ide is szöveges választ írtam, mert ez is egyben egy szöveges feladat volt.”

Az S13-1, -2, -3. egységek a kognitív feldolgozás nyomon követésére és ellenőrzésére vonatkozó tevékenységekhez tartoznak. Az S13-1. egység kifejezetten a feladat körülményeinek ellenőrzésére alkalmas. Az S13-2. és -3. egységek az alkalmazott eljárások érvényességének vagy megfelelőségének nyomon követésére és ellenőrzésére szolgálhatnak. Az S13-4. egység már a kognitív feldolgozás eredményének értékelésére, ellenőrzésére utaló metakognitív tevékenységet jelenít meg. A tanuló az eredmény és a kérdés közötti megfelelést ellenőrizte és értelmezte az eredményét a szöveges válasz megfogalmazása előtt, az már egy másik dolog, hogy sajnos téves elképzelés alapján.

5.4. Eredmények és tapasztalatok

Az eredményeket a szóbeli magyarázatokban található többletinformációk száma és típusai alapján vizsgáljuk. Ezek a többletinformációk utalnak a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre, ahogy arról korábban már szóltunk.

A szóbeli magyarázatokban azonosított többletinformációk száma és típusai

A kombinatorika dolgozatot 27 diák írta meg. Három tanuló egyik feladat megoldásához sem készített hangfelvételt, illetve volt még 3 tanuló, aki egy-egy feladathoz nem készített hangfelvételt. A többiek mindegyikhez készítettek, így összesen 69 hangfelvétel állt rendelkezésünkre az elemzéshez. 54 felvételen (78,3 %) azonosítottunk többletinformációt. Azok a tanulók, akik hangfelvételt készítettek (24 fő), a szóbeli magyarázatok során legalább egy feladatnál többletinformációt szolgáltattak. (19. táblázat)

A mértani sorozat dolgozatot ugyancsak 27-en írták meg. Minden tanuló készített legalább egy feladathoz hangfelvételt. Összesen 3 feladathoz nem csatoltak hangfelvételt, így 78 szóbeli magyarázatot elemezhetünk, melyek között 40 (51,3 %) tartalmazott többlet információt. Ezek a felvételek 19 diákhoz tartoztak. (19. táblázat)

19. táblázat: A hangosdolgozatok általános jellemzői

	Kombinatorika dolgozat	Mértani sorozat dolgozat
Létszám	27	27
Legalább egy hangfelvételt készítő tanulók száma	24	27
Többletinformációt adó tanulók száma	24	19
Összes hangfelvétel száma	69	78
Többletinformációt tartalmazó hangfelvételek száma	54	40

A 20. táblázat azt mutatja, hogy a tanulók többsége nem csak egy feladat szóbeli magyarázata során tudott többletinformációval szolgálni az írásbeli megoldáshoz képest. A kombinatorika dolgozatnál több tanulónál találtunk a szóbeli magyarázatokban többletinformációt, mint a mértani sorozat dolgozatnál. Az előbbinél nagyobb volt azon tanulók aránya is, akik mindhárom feladatnál adtak többletinformációt a hangfelvétel során.

20. táblázat: Hány feladatnál adtak többletinformációt a tanulók?

	Kombinatorika dolgozat (fő)	Mértani sorozatok dolgozat (fő)
Többletinformációt adó tanulók száma	24	19
Pontosan 3 feladatnál	11	6
Pontosan 2 feladatnál	8	19
Pontosan 1 feladatnál	5	4

A 21. táblázatban pedig az látható, hogy a tanulók többségének hangfelvételei nem csak egyfajta információtypust (*lépés, gondolatmenet vagy eredmény*) tartalmaztak. Míg közülük a mértani sorozatok dolgozatnál a tanulók közel háromnegyede legalább 2 féle információtypust adott a szóbeli magyarázatokban, addig a kombinatorika dolgozatnál ez az arány nem éri el a diákok felét.

21. táblázat: Hányféle információtypust tartalmaznak egy-egy tanuló szóbeli magyarázatai?

	Kombinatorika dolgozat (fő)	Mértani sorozatok dolgozat (fő)
Többletinformációt adó tanulók száma	24	19
Pontosan 3 félét	2	8
Pontosan 2 félét	9	6
Pontosan 1 félét	13	5

Mindkét dolgozat esetén a tapasztalat azt mutatja, hogy a szóbeli magyarázatok alkalmasak az írásbeli munkák kiegészítésére, hiszen ezáltal a tanár (és a kutató is) mélyebb betekintést nyerhet a tanuló gondolkodási folyamatába.

A 22. táblázat azt összegzi, hogy egy adott típusú többletinformáció hány tanulónál fordult elő. A kombinatorika dolgozatban a gondolatmenet típusú többletinformáció fordult elő a legtöbb tanulónál, míg a mértani sorozatban a három többletinformáció-típust közel ugyanannyi tanulónál figyelhetjük meg.

22. táblázat: Hány tanulónál fordult elő egy adott típusú többletinformáció?

	Kombinatorika dolgozat (fő)	Mértani sorozat dolgozat (fő)
lépés	8	14
gondolatmenet	21	16
eredmény	8	11
összesen	24	19

A 22. táblázat alapján az olvasható ki, hogy a *gondolatmenet* típusú többletinformációk majdnem minden tanulónál megjelentek. Lényegében a dolgozatokban szereplő utasítás közvetlenül értelmezve ezt kérte a tanulóktól ("Foglalja össze és magyarázza el szóban a megoldást 1-2 percen!"). A *lépésre* és az *eredményre* vonatkozó többletinformációk közel egyforma számú tanulónál jelentek meg mindkét dolgozat esetében. A *lépés* és *eredmény* típusúhoz tartozó létszám a 2. dolgozatban (mértani sorozat) nem sokkal maradt el a *gondolatmenet* típusúétól.

Az eredmény értékelésére, ellenőrzésére (röviden *eredmény* típus) vonatkozó többlet információkat külön is elemeztük, hogy az ellenőrző tevékenységről pontosabb képet kapjunk, illetve azért, hogy az előző két, írásbeli munkák elemzésén alapuló kutatási fejezetből nyert

tapasztalatainkat ki tudjuk egészíteni a szóbeli magyarázatokból nyerhető tapasztalatokkal. Olyan helyzeteket kerestünk, ahol a tanuló a hangfelvétel során megkérdőjelezte a korábban leírt megoldását, vagyis a sikeresség érzése gyengült nála. Vizsgáltuk, hogy ezeknél a helyzeteknél történt-e áthúzás vagy módosítás az írásbeli munkában. Ez kapcsolódik a korábbi fejezetek „áthúzás és módosítás” kategóriáihoz, de itt már az áthúzások, módosítások körülményeiről való tájékozódásunkat az utólagos hangfelvétel segítette.

Minden *eredmény* típusú többletinformáció 3 új kódot kapott:

A megoldás helyessége: 1: helyes, 0: hibás

A megoldás megkérdőjelezése (a sikeresség érzése gyengült): 1: igen, 0: nem

A válasz módosítása (áthúzással vagy anélkül): 1: igen, 0: nem.

A következő táblázatban számszerűsítünk néhány tapasztalatot az *eredmény* típusú többletinformációkról. A 23. táblázatból látható, hogy a két dolgozatban összesen 27 ilyen többletinformációt azonosítottunk. Ezek közül mindössze 3 tartozik helyes megoldáshoz. A hibás megoldáshoz tartozó többletinformációk több mint a fele (15 db) magában foglalja a megoldás megkérdőjelezését is. Közülük 7 kapcsolódik olyan mozzanathoz, amiben a tanuló a leírt megoldást vagy végeredményt elveti és javítani próbál. Sajnos a helyes megoldást egyik esetben sem sikerült megtalálni. A 23. táblázat összesítése alapján a két dolgozat témakörét illetően nincs lényeges különbség a tapasztalatokban.

23. táblázat: Az *eredmény* típusú többletinformációk részletes jellemzése

Eredmény kódok	Kombinatorika dolgozat (db)	Mértani sorozat dolgozat (db)	Összesen (db)
A megoldás helyes (1XX)	2	1	3
Hibás megoldás megkérdőjelezése a válasz módosítása nélkül (010)	3	5	8
Hibás megoldás megkérdőjelezése a válasz módosításával (011)	2	5	7
Hibás megoldás megkérdőjelezés nélkül (00X)	3	6	9
Összesen	10	17	27

A 24. táblázat néhány példát mutat be az *eredmény* típusú többletinformációk kódolásáról.

24. táblázat: *Példák az eredmény típusú többletinformációkra és azok kódolására*

Tanuló	Feladat	A kódolt egység idézete	Kód	Leírás
S28	K2	de nézzük meg ezt képlettel is, ..., aminek az eredménye ugyancsak 3024.	100	Ellenőrizte a megoldását úgy, hogy más módon is megoldotta a feladatot. Ő volt az egyetlen tanuló, aki ellenőrzéssel próbálkozott.
S6	M3	...és ugye 0,43 jött ki, vagyis 0,439, és kerekítettem, hogy 44 év. Szerintem.	010	Hibás megoldás, hibás értelmezés. A "szerintem" megnyilvánulása bizonytalanságra, megkérdőjelezésre utal.
S12	M2	Szóval ezzel az összeggel elrontottam, mert így is 1484064 jött ki, de így is többet költöttek 2009-ben, mint 2014-ben, ami ugye nem lehet, főleg úgy, hogy öt éven át 1,2-szer többet költöttek, mint az előzőben, úgyhogy ez nem jó.	011	Nem tartotta reálisnak az eredményét, amit javítani próbált egy osztással. Az újabb végeredményt is megkérdőjelezte. Helyesen indokolva megállapította, hogy helytelen az újabb végeredménye is.
S16	M3	5,9 lesz az n. És mivel évekről van szó, így felfele kell kerekítenünk. Tehát 6 év kell ahhoz, hogy 60% alá essen a koalák száma.	000	Helyesen indokolva értelmezte a hibás végeredményt.

A 24. táblázat példáiban a szóbeli magyarázatokból nyert többletinformációk és a hozzátartozó leírások szemléltetik, hogy a hangfelvételek által mennyivel részletesebb képet kaptunk az áthúzások körülményeiről, a tanulók kétségeiről, gondolkodásáról, az eredmény értékeléséhez, ellenőrzéséhez való hozzáállásról és azokról a körülményekről, amik írásban nem jelentek meg. A szóbeli magyarázat lehetőséget adott a tanulók számára, hogy észrevegyék az esetleges hibájukat. Az *eredmény* kategóriába tartozó többletinformációknál gazdagon megjelentek a kapott válasz megkérdőjelezésére utaló helyzetek. Voltak tanácstalan tanulók, de voltak, akik próbálkoztak a javítással.

A szóbeli magyarázatokban azonosított többletinformációk száma és típusai feladatonként

A 25. táblázat az egyes többletinformáció-típusok előfordulásának számát mutatja be a kombinatorikai dolgozatnál feladatonként.

25. táblázat: *Hány darab többletinformációt azonosítottunk feladatonként az egyes információ típusokból? (Kombinatorika dolgozat)*

	Összesen (db)	lépés (db)	gondolatmenet (db)	eredmény (db)
Összesen	72	11	51	10
1. feladat	22	2	17	3
2. feladat	25	3	19	3
3. feladat	25	6	15	4

Elmondható, hogy a kombinatorikai dolgozat 3 feladata nagyon hasonló tapasztalatokkal szolgált. Ugyanazzal, ami összességében is megállapítható. A *lépés* típusú többletinformációk közel egyforma számban jelentek meg az *eredmény* típusú információkkal. A többletinformációk jelentős része a *gondolatmenet* típusba tartozik mindhárom feladat esetén. Ez nem meglepő, mert a 3 feladat hasonló nehézségű volt és hasonló gondolkodásmódot igényelt.

A 26. táblázatból láthatjuk, hogy a mértani sorozatok dolgozat 1. feladatnál a *lépés* típusú, a 2. feladatnál jelentős fölényrel a *gondolatmenet* típusú többletinformációból volt a legtöbb, míg a 3. feladatnál kiegyenlített volt a típusok közötti megoszlás. Az 1. feladathoz kapcsolódó többletinformációk száma a legalacsonyabb, 18 egység, míg a 2. és 3. feladat esetében ezek a számok 30 és 31.

26. táblázat: *Hány darab többletinformációt azonosítottunk feladatonként az egyes információ típusokból? (Mértani sorozat dolgozat)*

	Összesen (db)	lépés (db)	gondolatmenet (db)	eredmény (db)
Összesen	79	24	38	17
1. feladat	18	10	8	0
2. feladat	30	3	18	9
3. feladat	31	11	12	8

Ez az eredmény megerősíti, hogy az 1. feladat inkább rutinfeladat volt a diákok számára, amelyben a megoldás módja hagyományos volt, így a diákok nem érezték szükségét annak, hogy részletesebben kifejtsék a megoldás teljes gondolatmenetét, ugyanakkor annak szükségét érezték, hogy a levezetés egy-egy kritikusnak gondolt lépését megindokolják. Ennél a feladatnál senki sem akarta vagy nem tudta értelmezni az eredményt. A 2. és a 3. feladat valós szövegezésű probléma volt. Ezek megoldásánál a modell megtalálása és helyes alkalmazása a megoldás fontos eleme. A szöveges feladatok több önálló gondolkodást igényeltek és így az

írásbeli munkához fűzött szóbeli magyarázatok is több és többféle többletinformációt tartalmaztak.

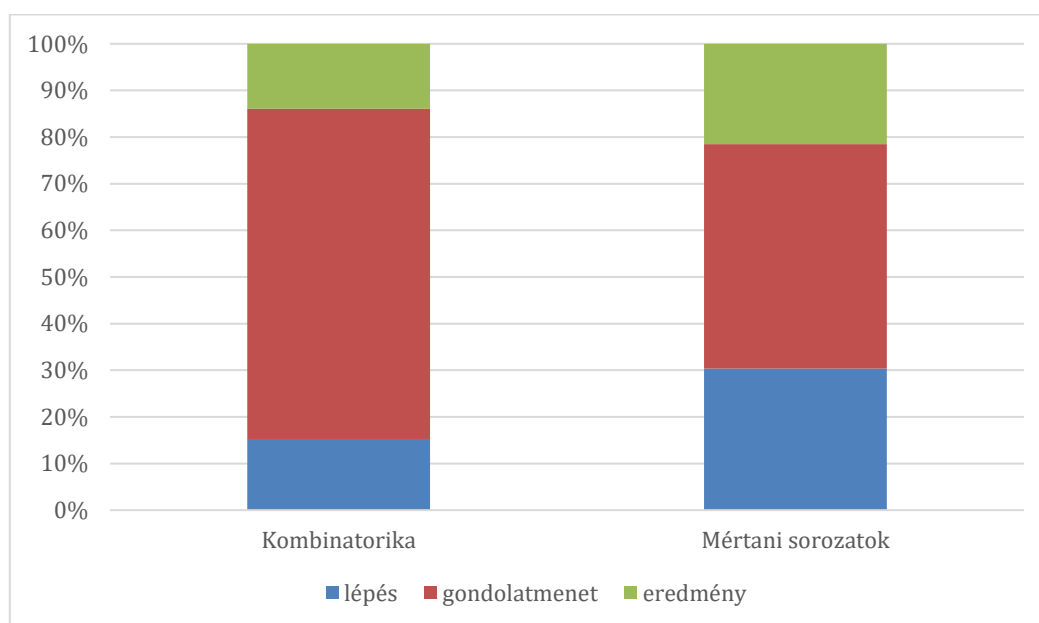
A mértani sorozatot számonkérő dolgozatban kiegyensúlyozottabb volt a többletinformációk megoszlása a típusok között. A kombinatorikai dolgozatnál toronymagasan a *gondolatmenet* típusra vonatkoztak a többletinformációk.

A mértani sorozatokhoz tartozó 2. és 3. feladathoz adandó válasz megkövetelte az eredmények értelmezését (elsősorban a kerekítés miatt), míg az 1. feladatnál és a kombinatorikai dolgozatnál inkább csak a realitás vizsgálatára lehetett vagy kellett támaszkodnia a tanulóknak.

Az elemzés alapján látszik, hogy a feladat témaköre és típusa (rutin vagy probléma) befolyásolja a többletinformációk típusát, ez pedig a kapcsolódó metakognitív (nyomon követő és ellenőrző) tevékenységek típusára és számára is utal.

A 35. ábra szemlélteti a két dolgozatnál azonosított többletinformációk típusainak arányát.

35. ábra: Az egyes többletinformáció típusok aránya témakörönként



A 35. ábráról az látszik, hogy a különböző típusú többletinformációk számának eloszlása függ a számonkérés témakörétől. Ennek alátámasztására khi-négyzet próbával függetlenségvizsgálatot végeztünk. A nullhipotézisünk az volt, hogy a különböző típusú többletinformációk számának eloszlása nem függ a számonkérés témakörétől. A khi-négyzet teszt szignifikáns különbséget mutatott ($\chi^2(2) = 8.24, p = 0.016$), tehát a nullhipotézist elvetettük, azaz a különböző típusú többlet információk számának eloszlása függ a számonkérés témakörétől.

A szóbeli magyarázatokban azonosított többletinformációk száma a tanulók kognitív teljesítményének függvényében

A 36. és 37. ábra a dolgozat írásbeli részében elért pontszámok függvényében mutatja be a többletinformációk számát tanulónként.

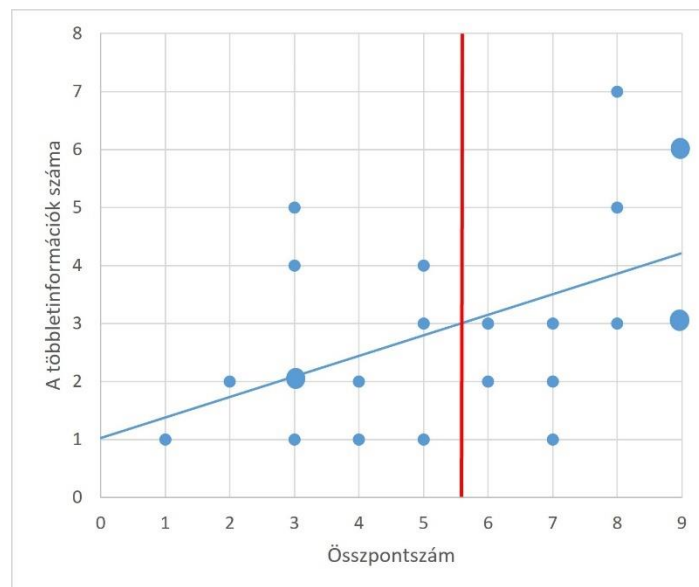
A kombinatorika dolgozatban legfeljebb 9 pontot lehetett elérni az írásbeli munka alapján. A 36. ábrán a pontok azt a 24 tanulót jelölik, akiknek a szóbeli magyarázata tartalmazott többletinformációt. A kis kék pont egy tanulót, a nagy kék pont két tanulót jelent. A

többletinformatiót szolgáltató tanulók átlagpontszáma 5,6 pont, amit az ábrán a piros egyenes szemléltet.

A tanulók pontszáma és a többletinformatiók száma közötti kapcsolatot vizsgálva, a Spearman-féle korrelációs együttható közepes erősségű pozitív kapcsolatot mutatott ($\rho = 0.512$), amely statisztikailag szignifikáns volt ($p = 0.011, n = 24$). Ez azt jelenti, hogy a két változó között szignifikáns pozitív kapcsolat áll fenn, vagyis ahogy a pontszám növekszik, a többletinformatiók száma is nő.

A lineáris regressziós elemzés azt mutatta, hogy a pontszám és a többletinformatiók száma között mérsékelt pozitív kapcsolat áll fenn, $R^2 = 0.258$ és korrigált $R^2 = 0.225$ értékekkel. A pontszám szignifikáns előrejelzője a többletinformatiók számának ($\beta=0.355, p = 0.011$). Az y tengelymetszet (intercept) azonban nem szignifikáns ($p = 0.205$), ami azt jelzi, hogy a modell konstans értéke önmagában nem járul hozzá a többletinformatiók számának magyarázatához. A 36. ábrán a kék egyenes a regressziós egyenes.

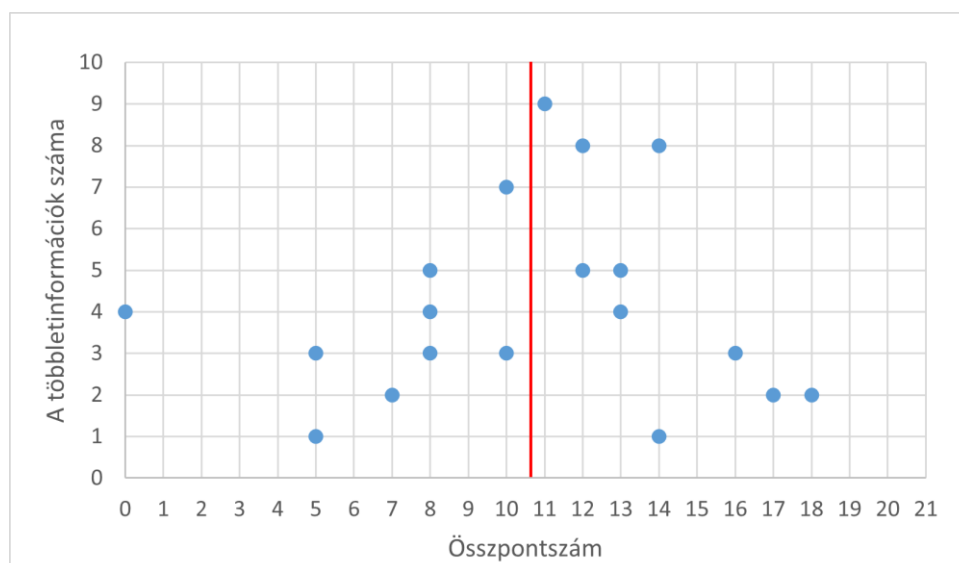
36. ábra: A többletinformatiók száma a pontszámok függvényében diákonként a kombinatorika dolgozatban



A mértani sorozat dolgozatban 21 pontot lehetett szerezni az írásbeli munkával. A 37. ábrán a kék pontok azt a 19 tanulót jelölik, akiknek a szóbeli magyarázatában megjelent többletinformatió. Az átlagpontszámuk 10,6 pont, amit a piros egyenes szemléltet.

A Spearman-féle rangkorreláció elemzése szerint a pontszám és a többletinformatió között nincs szignifikáns kapcsolat, $\rho(19) = 0.007, p = 0.977$.

37. ábra: A többletinformációk száma a pontszámok függvényében diákonként a mértani sorozatok dolgozatban



Ugyan a statisztikai vizsgálat nem mutat szignifikáns kapcsolatot a két változó között, az ábrát értelmezve azt megállapíthatjuk, hogy a mértani sorozat dolgozaton elért írásbeli eredmény és a többletinformációk száma más mintázatot ad, mint amit a kombinatorika dolgozatnál láttunk. A mértani sorozatot felőlelő dolgozatnál azok a tanulók adták a legtöbb plusz információt, akiknek a pontszámai közel voltak az átlaghoz. Itt a magasabb pontszámot elért tanulók jellemzően nem egészítették ki írásbeli megoldásukat további szóbeli információkkal, még akkor sem, ha azok meglehetősen vázlatosak voltak. Ugyanakkor a gyengébben teljesítő diákok hangfelvételeiben is sok érdekes és tanulságos információt találtunk.

Az alábbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi azokat a tanulókat, akik összességében a legtöbb többletinformációt nyújtották. Minthogy a többletinformációk száma az írásbeli feladatmegoldást követő metakognitív tevékenységek számával hozható összefüggésbe, őket nevezhetjük a „legmetakognitívabbnak”.

Ki a „legmetakognitívabb” tanuló a szóbeli magyarázatok többletinformációi alapján?

A 27. táblázat összesítéséből látszik, hogy a két hangosdolgozat alapján a legtöbb többletinformációt nyújtó tanulók a két dolgozat írásbeli összpontszámát tekintve nem teljesítettek kiemelkedő szinten. Sőt S25 igencsak gyenge írásbeli eredményt ért el.

27. táblázat: Az első három „legmetakognitívabb” tanuló a többletinformációk száma alapján

	Hány feladat szóbeli magyarázata tartalmaz többletinformációt? (max. 6 db)	A többletinformációk száma (db)	Az írásbeli munkára kapott pontszám (max. 30 pont)
S13	6	14	21
S25	5	11	13
S12	5	10	22

A 27. táblázat bizonyos tekintetben kapcsolódik ahhoz a tapasztalathoz, amit az előző két diagram alapján is láthatunk (lásd 36. és 37. ábra), hogy nem szükséges feltétele a többletinformációk és az általuk a szóbeli magyarázatokban felfedezhető metakognitív tevékenységek intenzív jelenléte a kiemelkedő írásbeli teljesítménynek.

5.5. Kutatási kérdésekre és válaszok

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

K3.1. Azonosíthatók-e nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a szóbeli magyarázat által adott többletinformációkban?

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket három többletinformáció-típushoz társítottuk: A megoldás egy lépésének indoklásához (*lépés*), a választott stratégia vagy modell magyarázatához (*gondolatmenet*), az eredmény értékeléséhez és ellenőrzéséhez (*eredmény*). Az előbbi kettő a kognitív feldolgozás nyomon követését és ellenőrzését, az utóbbi pedig elsősorban a kognitív feldolgozás eredményének értékelését és ellenőrzését, mint metakognitív tevékenységeket igényli. A szóbeli magyarázatokban nagy számban jelentek meg az írásbeli megoldáshoz képest többletinformációk. Mindhárom típusra találhatók példák, de a legtöbb a megoldás modelljére, egy teljes gondolatmenetre vonatkozott. Ez azt jelzi, hogy a szóbeli magyarázatok alkalmasak arra, hogy a tanulóknak nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket váltsanak ki, és arra is, hogy a kiváltott tevékenységeket tanárként, kutatóként megfigyelhessük.

K3.2. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa a feladatok témakörétől?

Igen, a két dolgozatnál megjelenő többletinformációk és ezáltal a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa eltérő mintázatot mutat a két témakörben, és a feladattípusokban is. A kombinatorika dolgozathoz kapcsolódó többletinformációk elsősorban a teljes gondolatmenetre vonatkoztak, míg a mértani sorozat dolgozatban nagyobb számban voltak jelen a lépés és az eredmény típusú többletinformációk. Ez arra utal, hogy az utóbbi témakörben az ellenőrző tevékenységnek hangsúlyosabb szerep jut. Ezen kívül a feladatok típusa (rutin vagy probléma) is befolyásolta a többletinformációk számát és típusát. A problémánál több és változatosabb többletinformációkat azonosítottunk.

K3.3. Függ-e a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől?

A kombinatorika dolgozatban függ, a mértani sorozat dolgozatban nem függ a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől. Tehát a tapasztalataink azt mutatják, hogy erre a kérdésre adható választ a témakörtől függően lehet megadni. A kombinatorika dolgozatnál elért nagyobb írásbeli pontszám a többletinformációk számának növekedésével járt együtt. A mértani sorozatot felölelő dolgozatnál viszont azok a tanulók adták a legtöbb plusz információt a szóbeli magyarázatban az írásbeli munkákhoz képest, akiknek a pontszámai közel voltak az átlaghoz. A módszer létjogosultságát mutatja, hogy a módszer révén feltárható metakognitív tevékenységek hozzájárulhatnak a nem kiemelkedő teljesítményű tanulók gondolkodásmódjának megismeréséhez, így az esetleges gondolkodási hibák javításához is.

5.6. Összegzés és következtetések

A fejezetben egy 29 fős 11-12. osztály tanulóinak nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit vizsgáltuk a problémamegoldás Pólya-féle visszatekintési fázisában. Két írásbeli számonkérés alkalmával a tanulóknak hangfelvételt kellett készíteniük az írásbeli munkájuk utáni szóbeli magyarázatukról. A tanulók egy-két kivételtől eltekintve minden feladathoz készítették

hangfelvételt, összesen 147 darabot. A szóbeli magyarázatokban kerestük az írásbeli munkához képest többletinformációk számító tanulói megnyilvánulásukat. Ezeket a többletinformációkat három típusba soroltuk, amikhez nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kapcsolhatók. A többletinformáció vonatkozhatott a megoldás egy lépésére; egy teljes gondolatmenetre, a megoldás modelljére; a kapott eredmény értékelésére, ellenőrzésére. Mindkét dolgozat esetén a tapasztalat azt mutatta, hogy a szóbeli magyarázatok alkalmasak az írásbeli munkák kiegészítésére. A tanulók jelentős többsége többletinformációval szolgált a megoldási folyamatról, illetve a hangfelvételek több mint fele tartalmazott többletinformációt. A szóbeli magyarázat lehetősége valóban biztosította a problémamegoldó folyamatban egyébként elhanyagolt visszatekintő fázist. A megoldás során hibázó tanulók között nagy számban voltak olyanok, akik megkérdőjelezték az eredményt, és csaknem felük javítani is próbálta a hibát. Abban, hogy ez senkinél sem sikerült, valószínűleg a tárgyi tudás hiánya játszotta a döntő szerepet.

A két dolgozat szóbeli magyarázataiban azonosított tanulói többletinformációk és az általuk megmutatkozó nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége különböző kapcsolatban volt a tanulók írásbeli teljesítményével. Míg a kombinatorika dolgozatnál az írásbeli pontszám növekedésével a többletinformációk száma is gyarapodott, addig a mértani sorozat dolgozatnál az átlag körül teljesítő tanulók több többletinformációt adtak, mint a legjobban teljesítők.

Tapasztalataink azt is mutatják, hogy a kiemelkedő írásbeli teljesítménynek nem szükséges feltétele a hangfelvételek többletinformációinak és így az általuk a szóbeli magyarázatokban felfedezhető metakognitív tevékenységek intenzív jelenléte.

Elmondhatjuk, hogy a hangosdolgozatok módszere, ami ötvözte a hangosan gondolkodtatás és az utólagos szóbeli beszámoló módszerét, alkalmas volt a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek ösztönzésére és megfigyelésére. A szóbeli magyarázatok által részletesebb képet kaptunk a tanulók tudásáról, gondolkodásáról

5.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal

Kutatásunk a hazai szakirodalomban kutatási űrt tölt be a hangosdolgozatok módszerének alkalmazásával a középiskolás diákok metakognitív tevékenységeinek megfigyelésére és ösztönzésére a matematikai problémamegoldás során. Ezzel bizonyos mértékben a nemzetközi szakirodalom szerint is a legelhanyagoltabbnak számító visszatekintő fázist akartuk életre kelteni.

A mértani sorozatok témakörénél az átlagpontszám körül teljesítő tanulók adták a legtöbb hozzáadott információt. Ez a tapasztalatunk kapcsolódik ahhoz a megállapításhoz, amire Csíkos (2007) felhívta a figyelmet, vagyis, hogy Alexander és munkatársai (1995) tehetséges gyerekek körében végzett kutatása azt mutatta, hogy a magas szintű intelligencia és kognitív teljesítmény nem feltétlenül jelentenek magas szintű metakognitív tevékenységet. Arra a dilemmára pedig, miszerint továbbra sem világos, hogy a matematikában gyengén teljesítő tanulók a metakognitív terén is eltérő teljesítményt nyújtanak-e a közepesen vagy jól teljesítő társaikhoz képest (Desoete, 2019), a mintánkból nyert tapasztalat azt mutatta, hogy a metakognitív tevékenységek terén a gyengébben teljesítő tanulók is kiemelkedhetnek. Kutatásunkban ezt a jelenséget a két matematikai témakör egyikében, a mértani sorozatoknál figyeltük meg. A másik, a kombinatorika témakörben ugyanakkor a legjobban teljesítőknél jelentkezett a legtöbb metakognitív tevékenységre utaló információ.

Az, hogy a gyengébben teljesítőknél is észleltünk metakognitív tevékenységeket, megteremtheti annak lehetőségét, hogy ezek a diákok célzott képzéssel valóban

profitálhassanak a későbbiekben a metakognitív eljárások alkalmazásából. Számos beavatkozást eszközölő vizsgálat bizonyította, hogy a "normál" tanulók és a különösen alacsony matematikai teljesítményűek is jelentősen profitálnak a metakognitív oktatási eljárásokból (Schneider & Artelt, 2010).

5.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára

Pedagógiai kihívást jelent, hogy a középiskolás korosztály tanulóit szóra bírjuk, különösen matematikából. A hangosdolgozatok módszere megfelelő lehetőségnek tűnik erre. Fontos eleme ennek a módszernek, hogy a diákokat ösztönzi a kulcsgondolatokra és kulcsmozzanatokra való reflexióra. A reflektálás a problémamegoldás központi eleme, talán a legfontosabb tevékenység a matematikai gondolkodás fejlesztéséhez, vagy legalábbis az kellene, hogy legyen, mert csak akkor tanulunk a tapasztalatainkból, ha megtörténik az arra való reflektálás is (Mason et al., 1982/2010). A módszert nem csak számonkérés formájában, hanem házi feladatként, szorgalmi feladatként is fel lehet adni. Tanári szempontból kétségkívül időigényes a hangfelvételek elemzése, de általuk különböző, más formában kevésbé megnyilvánuló szempontokat is megismerhet, értékelhet a tanár. A szóbeli feleletek alkalmával kevés diák tud megnyilvánulni egy-egy tanórán, a hangfelvétel készítésével viszont mindenki. Meg kell azonban jegyezni azt is, hogy míg a szóbeli felelet során a tanár tud kérdezni, segíteni, irányítani, addig a hangfelvételek esetén erre nincs lehetősége.

5.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján

A tanárjelöltek számára is hasznos lehet a hangosdolgozatok módszerének kipróbálása részben saját tanulmányaik során, részben tanítási gyakorlatuk alatt. A szakmódszertani órákon hasznos lehet egyrészt kész hangfelvételek elemzése, másrészt további elemzési és értékelési szempontok megvitatása a módszer kibővítése és hatékonyságának növelése érdekében.

A bemutatott kutatással foglalkozik a következő publikáció

Kiss, M., & Kónya, E. (2022). Written test with oral explanation during the pandemic. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3835–3842). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

6. Tanárjelöltek óráinak megfigyelése

6.1. Bevezető

Ebben a fejezetben tárgyalt kutatásunk kiindulópontja az a tapasztalat, hogy a metakognitív tevékenységek nem kapnak elég hangsúlyt a matematika órákon előforduló osztályszintű megbeszélések alkalmával. Felmerül a kérdés, hogy ezen tevékenységek kiváltásának módját célszerűen kell-e fejleszteni a tanárképzésben, vagy a képzés végére spontán módon is beépül a tanárjelöltek tanítási gyakorlatába. Több kutató hangsúlyozza, hogy a metakognitív tevékenységek tanítása alig fordul elő az iskolai oktatásban, vagyis a tanároknak szükségük lehet a metakognícióval kapcsolatos képzésre, explicit utasításokra és eszközökre ahhoz, hogy a metakogníció fejlesztése is szerepet kapjon a tanórákon (Desoete & Veenman, 2006; Depaepe et al., 2010; Dignath & Büttner, 2018; Wafubwa et al., 2022). Cohors-Fresenborg és Kaune (2001) szerint az osztályban zajló tanulási folyamat csak akkor vezethet mély megértéshez, ha a kapcsolódó metakognitív tevékenységek kidolgozottak és koherens osztálytermi viták valósulnak meg. Kutatásunk a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését vizsgálja középiskolai tanítási gyakorlatukat töltő, végzős, matematika szakos tanárjelöltek óráinak frontális szakaszában. Hét tanárjelölt óráját elemezzük, abból a szempontból, hogy egy-egy általunk kiemelt órarészletben hogyan kezdeményeztek, kezeltek olyan helyzeteket, amelyekben a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységére lehetőség nyílik. Megvizsgáljuk, hogy mennyire sikerült bevonni a diákokat a beszélgetésbe, és elemezzük a tanárjelöltek erre ösztönző és gátló megnyilvánulásait. Ezek az osztálybeszélgetések a diákok önálló problémamegoldását követően történtek, annak eredményeit tárgyalták, vagyis elsősorban a problémamegoldás ellenőrzési szakaszára (Lester, 1985) összpontosítottak. Kutatásunk olyan órarészletekre összpontosít, amelyben lehetősége volt a tanulóknak a hibakeresésre vagy hibaelemzésre. Lucangeli és munkatársai (2019) szerint a hibaelemzés hatékony módja lehet mind a metakognitív tevékenységek, mind a matematikai teljesítmény fejlődésének elősegítésére. Megfigyeléseinket nem előzte meg célzott beavatkozás vagy fejlesztés ezen a területen sem a tanárjelöltek sem a diákok szempontjából.

6.2. Kutatási kérdések

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

K4.1. Előfordulnak-e tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kiváltására alkalmas helyzetek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

K4.2. Ha igen, hogyan kezeli a tanárjelölt ezeket a helyzeteket?

K4.3. Milyen tényezők befolyásolhatják a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését az osztálytermi megbeszélésben a tanárjelöltek óráin?

6.3. Módszerek

A kutatásunk instrumentális esettanulmány (Stake, 1995), amely egy esetet vizsgál részletesen és szisztematikusan, hogy választ kapjon a felmerült kutatási kérdésekre és ezáltal betekintést nyerjen egy helyzetbe, jelenségbe. Érdekes olyan esetet vagy eseteket kiválasztani, amelyek jól reprezentálnak más eseteket, de egy jól sikerült instrumentális esettanulmány nem azon múlik, hogy az eset tipikusságát tudjuk-e biztosítani. A műfaj igazi feladata a részletezés és

megismerés, nem pedig az általánosítás. Ugyanakkor lehetnek helyzetek vagy tevékenységek, amelyek újra és újra előfordulnak, így bizonyos mértékben tehetünk általánosításokat.

6.3.1. Minta

Kutatásunk mintáját a képzésük utolsó tanévében járó hét olyan tanárjelölt alkotta, akik középiskolákba kihelyezve éppen az összefüggő tanítási gyakorlatukat töltötték. A kutatás céljából a tanárjelölteknek egy-egy óráját látogattuk meg a 2021/2022-es tanév 1. félévében. A hét tanárjelölt közös képzésben vett részt ugyanazon az egyetemen és hallgatói csoportban, de hét különböző gimnáziumban végezték a gyakorlatukat. Az óralátogatások után a részletes elemzésre kerülő órarészletet aszerint választottuk ki, hogy a többi esetben szerzett tapasztalatainkat minél jobban reprezentálja.

6.3.2. Mérőeszköz

Valamennyi tanárjelölt összeállított egy óratervet a tanórához és elküldte nekünk. Az óraterveken nem változtattunk, előzetes bekérésükkel csak az volt a célunk, hogy a tanárjelöltek felkészülten érkezzenek a tanórákra. Az óralátogatások alkalmával ketten (a dolgozat szerzője és témavezetője) készítettünk feljegyzéseket az órán tapasztaltakról, illetve hangfelvétellel rögzítettük az osztálymegbeszéléseket. Később elkészítettük a hangfelvételek átiratait. A feljegyzések és átiratok alapján az órán elhangzottakat pontosan rekonstruálni tudtuk, s ezek alapján került sor az elemzésre.

6.3.3. Eljárás

A tanárjelöltek felé nem volt elvárásunk, hogy melyik osztályban és melyik témakörben tartsanak órát. A kérésünk egyrészt az volt, hogy hogy legyen az órának legalább egy olyan epizódja, amelyben vagy egy feladat megoldásának hibás levezetését mutatják be, és azt kell a tanulóknak elemeznie, vagy pedig egy kitűzött feladat önálló (csoportos) megoldását követően közösen beszélnek meg valakinek a nem teljesen hibátlan megoldását. Másrészt azt kértük még a tanárjelöltektől, hogy minél többet beszéltesék a diákokat, azaz törekedjenek arra, hogy a tanulók aktívan vegyenek részt az osztálymegbeszélésben. Előzetes felkészítést az elvárásainkkal kapcsolatban nem kaptak sem a diákok, sem a tanárjelöltek, sem a vezetőtanáraik. Tehát előzetes beavatkozás nélkül tettünk megfigyeléseket a tanárjelöltek óráira vonatkozóan.

A 28. táblázat a mintában szereplő hét tanárjelölt megfigyelt óráinak és a kiválasztott órarészleteknek a jellemzőit foglalja össze. Az órarészletek nem egyforma időtartamot öleltek fel. Egy-egy órarészlet hosszát az adott helyzet határozta meg.

28. táblázat: A vizsgált órarészletek néhány jellemzője

Tanárjelölt	Évfolyam	Témakör	Az órarészlet feladata
T1	9.	Arányosság	Az egyik csoport hibás megoldásának megbeszélése.
T2	12.	Négyzetgyökös egyenletek (ismétlés)	Egy négyzetgyökös egyenlet tipikus hibát tartalmazó levezetésének elemzése, a hiba felismerése.
T3	10.	Másodfokú egyenletek	Négy egyenlethez két-két különböző levezetése közül a helyes levezetések kiválasztása.
T4	9.	Szöveges feladatok megoldása egyenlettel	Egy egyenlet két különböző levezetésének elemzése, a hiba felismerése.
T5	9.	Lineáris egyenletek	Egy hibás egyenletmegoldás elemzése.
T6	9.	Algebrai kifejezések	Annak kiválasztása, hogy három adott algebrai kifejezés közül melyik ekvivalens az eredetivel.
T7	10.	Négyzetgyökös egyenletek	Egy négyzetgyökös egyenlet tipikus hibát tartalmazó levezetésének elemzése, a hiba felismerése.

6.3.4. Elemzési szempontok

A megfigyelt tanórákat először abból a szempontból vizsgáltuk, hogy melyik az a része, amit ki tudunk emelni a további elemzés céljából. Ehhez először olyan órarészletet vagy órarészleteket kellett azonosítanunk, amelyekben spontán vagy direkt módon jelent meg egy feladat hibás megoldásának levezetése. Ha több ilyen órarészletet is találtunk, akkor a két kutató (a szerző és a témavezető) közös megegyezéssel a legtöbb interakciót tartalmazó órarészletet választotta ki, mindegyik órából egyet.

A kiválasztott órarészletekben a 29. táblázatban látható kódokkal láttuk el a tanárjelöltek és a diákok egyes megnyilvánulásait.

29. táblázat: Az osztálymegbeszélésen előforduló megnyilvánulások típusai és kódjai

A megnyilvánulás típusa	A megnyilvánulás kódja
Tanárjelölt kérdez	T?
Tanárjelölt válaszol	T!
Diák kérdez	S?
Diák válaszol	S!

Ezek után párbeszéd egységeket azonosítottunk. Egy párbeszéd egység alatt az osztálymegbeszélés olyan egymást követő hozzászólásait értjük, amelyek tartalma szorosabban kapcsolódik össze a teljes megbeszélés gondolatkörén belül. Az ilyen párbeszéd egységeknél mindig megfigyelhető volt egy-egy nyitó gondolat, amihez az azt követő megnyilvánulások szorosan kapcsolódtak. A kódolásnál ugyanahhoz a párbeszéd egységhez tartozó megnyilvánulások ugyanazt a számot kapták a T vagy az S betűjel után. Például: T1?, S1! egy

két hozzászólásból álló párbeszédegység kódjai, vagy az S2?, T2?, S2! egy három megnyilvánulást tartalmazó párbeszédegység kódjai.

Ezeknek a kódoknak a segítségével határoztuk meg, hogy egy adott párbeszédegységnél a diákok közötti (lásd később: S-S), a tanárjelölt és diákok közötti párbeszéd (T-S) vagy a tanárjelölt önválasza (T-T) volt a legjellemzőbb.

Az elemzés során azonosítottuk a tanárjelöltek megbeszélést, vitát támogató és akadályozó megnyilvánulásait is. A megnyilvánulások kategorizálására a Cohors-Fresenborg és Kaune (2007) által kidolgozott kategóriarendszert¹¹ vettük alapul. Ha a tanárjelölt hozzászólása támogatta a megfelelő diskurzust, akkor a D (diskurzivitás) betűjelet kapta kódként, ha akadályozta, akkor az ND (negatív diskurzivitás) kóddal láttuk el, ha pedig semlegesnek ítéltük ebből a szempontból, akkor nem kapott kódot. Diskurzivitást támogat egy tanári hozzászólás például, ha a tanár kikéri a tanulók véleményét egy osztálytársuk állításáról. A negatív diskurzivitásra példa, ha a kérdése sugalmazó, szinte tartalmazza a választ.

Az objektivitás biztosításának céljából minden tanárjelölt órarészletét ketten kódoltuk, kétszer, egymástól függetlenül. Utána összevetettük a kódokat, az eltérő eseteket megbeszéltük és együtt döntöttünk a végleges kód mellett.

Az elemzés további része az egyes órai megnyilvánulásokhoz fűzött szubjektív megjegyzéseinkkel és szöveges értékelésünkkel folytatódott. Ebben a lépésben a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek ösztönzésére alkalmas helyzeteket azonosítottuk és számoztuk. Majd megvizsgáltuk, hogy ezekből a helyzetekből adódóan hány esetben sikerült a tanulókból az említett tevékenységekre utaló megnyilvánulásokat kiváltani. Az ösztönzésre alkalmas helyzet kétféleképpen jöhetett létre: a tanuló által vagy a tanárjelölt által. Egy-egy ilyen helyzetnél azt figyeltük meg, hogy a tanárjelölt hogyan kezelte a lehetőségeket és hogyan folytatódott az óra menete a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek szempontjából. Egy nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre alkalmas lehetőséget lezártnak minősítettünk, ha a tanárjelölt adott választ a saját maga vagy a diák által kialakított helyzetre vagy távol kerültek a kiindulási helyzettől, vagyis elmúlt a metakognitív szempontból értékes helyzet kibontakoztatásának a lehetősége.

A lezártnak minősített helyzetekhez tanítási tapasztalataink alapján javaslatokat fűztünk arra nézve, hogy hogyan lehetett volna folytatni a párbeszédet és milyen kérdéssel lehetett volna akár kedvezőbb az óra folytatása. Fontos hangsúlyoznunk, hogy a párbeszédegységekhez fűzött javaslatainkat a tanulságok levonása és a helyzet eredményes kezelésének bemutatása motiválta, nem pedig a tanárjelölteket akartuk számonkérni olyan helyzetek megoldásáról, amikre direkt felkészítést nem kaptak.

Miután kódoltuk és megjegyzésekkel láttuk el az órarészletek megnyilvánulásait, a következő szempontok alapján elemeztük és jellemeztük az órarészleteket:

- Hány nyomon követő és ellenőrző tevékenységre ösztönző helyzet alakult ki az órarészletben? Hogyan lett egy-egy ilyen helyzet kihasználva?
- Hány darab diskurzivitást (D) és negatív diskurzivitást (ND) jelentő megnyilvánulása volt a tanárjelöltnek?
- Hány darab diákok közötti (S-S), tanárjelölt és diákok (T-S), tanárjelölt önválasza (T-T) típusú párbeszédegység fordult elő az órarészletben?

¹¹ https://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/fileadmin/didaktik/Projekte_KM/Kategoriensystem_EN.pdf

A mintánkban szereplő hét tanárjelölt egy-egy órarészlete közül a dolgozatban egy jelölt órarészletét és annak elemzését mutatjuk be részletesen.

Az általunk kiválasztott tanárjelölt (T1) órájának és csoportjának rövid bemutatása

A tanárjelölt egy nyelvi előkészítő, ötévfolyamos 9. osztály 17 fős csoportjának tartott órát egy nagyvárosi gimnáziumban 2021 őszén, jelenléti oktatásban. A csoportnak heti 3 matematikaórája van, ezeket több, mint két hónapja a tanárjelölt tartja. A tanárjelölt szerint a képességeket tekintve a csoport nem homogén, kedves és közvetlen tanulókból áll, az órákon aktívak, de néha fegyelmelni kell egy-két diákot.

A csoport a 9. osztályos tananyag szerint halad, de lassabban, mint egy nem ötévfolyamos 9. osztályban. A megfigyelt órát megelőzően az egyenes és fordított arányosság, illetve a százalékszámítás gyakorlásával foglalkoztak. A kutatásba bevont óra célja az említett témákhoz kapcsolódó, korábbi évek kompetenciaméréseiből származó összetett feladatok közös, csoportos és önálló megoldása volt. Az óratervben a tanárjelölt az óra didaktikai feladatai között említette a tanulók kommunikációs készségének a fejlesztését is.

Az 1. feladatot a diákok a tanárjelölttel közösen oldották meg. Egy egyszerű arányossági feladat volt. A feladat nem okozott különösebb gondot a tanulóknak, mégis a vártnál több időt vett igénybe, mert nem a legegyszerűbb utat választották a megoldáshoz.

A 2. feladatot volt az, amit az általunk kiválasztott órarészlet tartalmaz, ennek részletes bemutatására a következőkben kerül sor. A feladatmegoldás csoportmunkában történt. Az óraterv szerint a tanárjelölt 5 percet szánt a csoportmunkára és 5 percet az osztálytermi megbeszélésre. A valóságban mindez 17 percet vett igénybe.

Az óra további két feladat megoldásával folytatódott, az egyik szintén csoportmunkában, a másik önállóan.

A 2. feladat és megoldása:

Klári a konyhája falát lila színűre szeretné festeni. A lila festéket három színből: kékből, pirosból és sárgából keverik ki számára. A keverékben a kék, piros és sárga színek aránya 4:5:1. A raktárban 6 liter kék, 9 liter piros és 2 liter sárga festéket találtak. Legfeljebb hány liter lila színű festéket lehet kikeverni a raktárban lévő készletekből?

Megoldásvázlat: A lehető legtöbb lila festéket úgy kapjuk, ha a 6 liter kék festéket 4 egységnek tekintjük, így egy egységnek 1,5 liter festék felel meg. Ekkor a pirosból $5 \cdot 1,5 = 7,5$ literre van szükség, sárgából pedig $1 \cdot 1,5 = 1,5$ literre. Ebből összesen 15 liter lila színű festék keverhető ki. A másik két szín maximális mennyiségéből kiindulva ellentmondáshoz jutunk.

A tanárjelölt 4-5 fős csoportokat alakított és arra kérte az egy csoportban lévő tanulókat, hogy közösen oldják meg a feladatot és ha többféle ötlet is felmerül, beszéljék meg. Volt olyan csoport, ahol csak néhány tag beszélgetett, a többiek önállóan dolgoztak. Közben kérdezgette a tanárjelölt a csoportokat, hogy kell-e segítség, hogyan haladnak, mennyi időre van még szükségük stb. Aztán egy idő után nem várt tovább és kezdetét vette az osztálymegbeszélés, aminek a kiválasztott és elemzett részletét a továbbiakban bemutatjuk.

6.4. Eredmények és tapasztalatok

Az alábbiakban (30. táblázat) a kiválasztott órarészletet, annak elemzését és az ahhoz fűzött megjegyzéseinket mutatjuk be. A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket ösztönző vagy az azokra utaló megnyilvánulásokat az átláthatóság kedvéért **bordóval** jelöljük. A tanárjelölt hozzászólásai a T betű után következnek, a diákoknak pedig fiktív neveket adtunk.

30. táblázat: A kiválasztott órarészlet bemutatása és elemzése

T: Jó. Nézzük, nézzük együtt!	
Bence: Tanárnó, nem biztos, hogy jó irányba haladtunk...	S1!
<p>- (1.) Nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzet, ami a diák által, spontán jön létre. A tanuló bizonytalansága arra utal, hogy a kognitív feldolgozás során működött a nyomon követő és ellenőrző tevékenysége. A sikeresség érzése gyengült nála. Alkalmas helyzet volt arra, hogy a tanárjelölt olyan kérdéseket tegyen fel, amelyekkel vitát indíthat minél több tanulót bevonva.</p>	
T: Hogy indultatok el, Bence?	T1? D
<p>- A tanárjelölt fenntartja a helyzetet, mert nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre ösztönzhet a kérdés. Bár ezt megelőzhetne volna az a kérdés a tanulók felé, hogy miből gondolják úgy, hogy nem jó irányba haladtak, vagy, hogy az addigi munkájuk mely részében bizonytalanok. Ez metakognitív szempontból akár értékesebb kérdés lehetett volna, mert a tanulóknak indokolnia kellett volna a válasz során a kétséges helyzet körülményeit, okait.</p>	
Bence: Mi úgy indultunk el, hogy a 4-et, az 5-öt és az 1-et felírtuk x-be, és csináltunk egy egyenletet.	S1!
T: Tudjuk, hogy a festékek aránya 4:5:1.	T1! D
T: És mit tudunk még? Hány liter festék?	T2? ND
<p>- A tanárjelölt fenntartja a helyzetet, mert az első, nyílt kérdés még erre alkalmas lehetett. A második, zárt kérdéssel viszont inkább elkezdtek lépésenként újra megoldani a feladatot együtt, abban bízva, hogy majd kiderül a hiba. Helyette hasznosabb lehetett volna, ha a csoport ismerteti az addigi munkáját.</p>	
Bence: 6 liter kék, 9 liter piros és 2 liter sárga.	S2!
T: Jó. Ezeket tudjuk.	T2!
Bence: Igen, ezeket felírtuk úgy, hogy $4x+5x+x$ az ugye $10x$, egyenlő, és összeadtuk a 6-ot a 9-et meg a 2-t, ami 17.	S2!
<p>- Itt lezártnak tekintjük a felmerült lehetőséget. A tanulótól tapasztalhattunk bizonyos szintű ellenőrző tevékenységet a számításokra vonatkozóan, de nem alakult ki sem vita, sem a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek informatív megnyilvánulása.</p>	
T: Mi ezzel a probléma?	T3? D
<p>- (2.) Nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzet, amit a tanárjelölt tudatosan hozott létre. Ez a nyílt kérdés több tanuló bevonására és vita kialakítására is alkalmas. Bár a kérdés rögtön elárulja azt is, hogy hibás az egyenletfelírás. A tanárjelölt bevonhatta volna a többi csoport tanulóit egy kevésbé leleplező kérdéssel, kérve, hogy alkossanak véleményt Bence megoldásáról.</p>	
T: A megoldás nem veszi figyelembe az arányokat. Mert az összes festéket összeöntötték és ugye nem biztos, hogy ugyanannyi, ...	T3! ND
<p>- A tanárjelölt nem tudta kibontakoztatni a lehetőséget. Magának válaszolt (önválasz), ráadásul nem egyértelműen. Próbálkozhatott volna másik kérdéssel (pl.: Mit nem vesz figyelembe ez a megoldás?). Nem tudta bevonni a tanulókat egy megbeszélésbe.</p>	
Dénes: 17.	S4!
<p>- A diákok nem értették meg a tanárjelölt előző magyarázatát.</p>	
T: Nem biztos, hogy ha összeöntöd az összes festéket, akkor ezek az arányok jól jönnek ki.	T4! ND

- Itt lezártunk tekintjük a felmerült lehetőséget. Újra magának válaszolt, egy másik kérdés feltevése helyett. Nem alakult ki sem vita, sem tanulói nyomon követő, ellenőrző tevékenység.	
T: Szóval, ... ugye itt 1,7 jött ki, amit többször is hallottam itt sutyorogni.	T4!
Bence: Akkor a miénk fixen nem jó, tanárnő?	S5?
- (3.) Nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzet, ami a diák által spontán jön létre. A tanárjelöltnek lehetősége van arra, hogy ellenőriztesse a tanulókkal az 1,7-es értéket. A diák nem értette meg az imént, hogy mit nem vett figyelembe a megoldása során.	
T: Hát nézzük meg! Hogyha x az 1,7, akkor...	T5! D
- A tanárjelölt fenntartja a helyzetet. Jó, hogy nem válaszolt egyből, hanem teret ad az ellenőrzésre és az ellentmondás belátása felé akarja terelni a tanulókat. A többiekhez is intézhetett volna kérdést, például, hogy ki tudja ezek alapján megmagyarázni, hogy miért nem jó a csoport megoldása.	
Bence: 6-szor 1,7, és akkor beszoroztuk, ...	S5!
Bence: De hogy minek ...	S5?
- (4.) Nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzet, ami a diák által jön létre.	
T: Igen, aztán beszoroztad 4-gyel is, ...	T5! ND
- A tanárjelölt nem tudta kibontakoztatni az utóbbi lehetőséget. Itt lezártunk tekintjük a (3.) és (4.) felmerült lehetőségeket is, mert a tanárjelölt hamar átveszi az irányítást, illetve a „de hogy minek” megjegyzésben rejlő bizonytalanságra rákérdézhetett volna. Metakognitív szempontból értékes tanulói megnyilvánulás volt, amit ki lehetett volna fejtenni.	
Bence: 5-tel is, akkor megkaptuk, hogy a kékből hány liter kell, ... az arányoknak megfelelően, igen, ha ezt megkaptuk, aztán a pirosat is, amit ...	S5!
T: És kijött?	T6? ND
- (5.) Nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzet. Tanárjelölt által jött létre. A kognitív feldolgozás eredményének értékelésére sarkallná a tanulót, ugyanakkor túl direkt és sugalmazó a kérdés. (Helyette pl.: Mit kaptál? Hogyan értékeled az eredményt?)	
Bence: A kékből 6,8 liter kell, ami már nem jó!	S6!
- Kiderült, hogy hibás a megoldás. A tanuló válasza ellenőrző tevékenységre utal, de a hiba okát továbbra sem találja.	
T: Igen, ez már sok. ... Szóval ez sajnos nem jó. Volt-e, aki másképp csinálta ¹² ?	T6? D
- Itt lezártunk tekintjük a felmerült lehetőséget. Jó, hogy a tanárjelölt nem kezdte el magától a helyes megoldás ismertetését, hanem megkérdezte a többi tanulót.	

¹² Az óra a megoldás megbeszélésével folytatódott, amelynek a leírása a Függelékben olvasható.

A 31. táblázat azt mutatja, hogy a vizsgált órarészletben milyen típusú párbeszéd fordultak elő. Elsősorban a tanár és a diák közötti (T-S) párbeszédet azonosítottunk, illetve volt példa arra, hogy a tanárjelölt megválaszolta a saját kérdését (T-T). Diákok közötti (S-S) párbeszédre nem találtunk példát.

31. táblázat: A párbeszéd típusok előfordulása a bemutatott órarészletben

Párbeszéd típusa	Előfordulás (db)
Tanárjelölt önválasza (T-T)	2
Tanárjelölt és diák vagy diákok közötti (T-S)	4
Diákok közötti (S-S)	0

A 32. táblázatban azt láthatjuk, hogy a tanárjelölt megnyilvánulásaiban ugyanannyi diszkurzív elem volt, mint amennyi negatív diszkurzivitást jelentő elem.

32. táblázat: A tanárjelölt diszkurzív és negatív diszkurzív megnyilvánulásainak száma a bemutatott órarészletben

A tanárjelölt megnyilvánulásának minősége	Előfordulás (db)
diszkurzivitás	5
negatív diszkurzivitás	5

A 33. táblázatból azt tudjuk meg, hogy összesen 5 nyomon követő és ellenőrző tevékenység ösztönzésére alkalmas helyzet alakult ki, amelyekből 2 a tanárjelölttől indult, 3 pedig a diákoktól. Ezek közül egy-egy helyzetben ítéltük meg úgy, hogy a tanárjelöltnek sikerült a felmerült lehetőséggel élni és nyomon követő, ellenőrző tevékenységre ösztönözni a tanulót.

33. táblázat: A nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre ösztönző helyzetek

	Tanárjelölt által	Diák által	Összesen
nyomon követő és ellenőrző tevékenység ösztönzésére alkalmas helyzet teremtése	2	3	5
nyomon követő és ellenőrző tevékenység történt	1	1	2

T1 tanárjelölt órarészletének összegzése

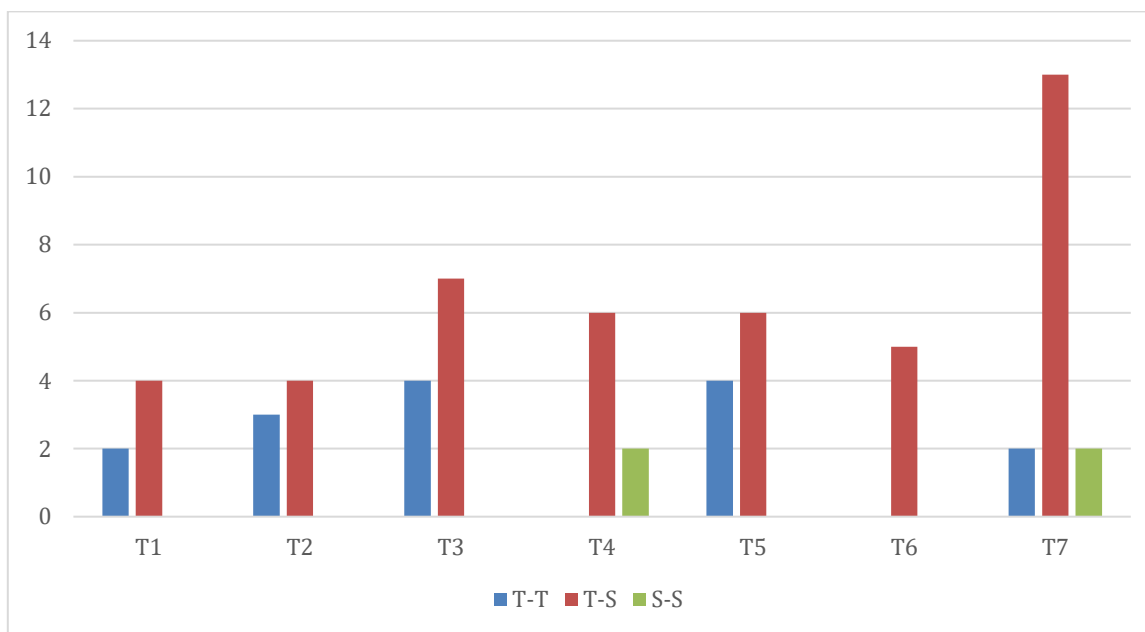
Az órán spontán módon alakult ki az a helyzet, hogy egy hibás megoldást kellett vizsgálni osztálymegbeszélés keretében. Egy csoport hibás megoldása indította a megbeszélést, melynek során a tanárjelölt segítségével látta be a csoport, hogy hibás a megoldásuk. A tanárjelölt a helyes levezetés bemutatásának a lehetőségét ügyesen meghagyta egy másik csoportnak. Ahogyan az órarészlethez fűzött megjegyzéseinkből és a 33. táblázatból látszik, az órarészlet remek lehetőséget nyújtott a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kiváltására és bekapcsolására, de ezek egy része kihasználatlanul maradt, más része pedig csak korlátozott mértékben lett kibontakoztatva. Az általunk azonosított 5 lehetőség közül 2 esetben találtunk nyomon követő és ellenőrző tevékenységre utaló megnyilvánulást a tanulóktól, de azok sem voltak igazán elmélyült mozzanatok. A tanárjelölt ugyanannyi (5) alkalommal tett a megbeszélést és vitát támogató megnyilvánulást, mint azokat akadályozó hozzászólást. Negatív diszkurzivitással jellemezhető tanári megnyilvánulások voltak az önválaszok, a sugalmazó kérdések, megjegyzések. A negatív diszkurzivitás többször hátráltatta a tanulói metakognitív tevékenységek létrejöttét és a vita, dinamikus párbeszéd kialakítását. A tanárjelölt erősen irányította az órarészletet, hamar átvette a szót és kevés teret hagyott a diákoknak. Megpróbálta

ravezetni őket a megoldásukban rejlő hibára, ám ez nem sikerült. Nem vont be több tanulót a beszélgetésbe, holott a helyzet többször alkalmas lett volna vita kialakítására. Jellemzően a tanárjelölt és egy diák közötti párbeszéd valósult meg. Diákok közötti párbeszédre nem volt példa. Összességében érezhető volt, hogy a diákok nem érzik a pontos megfogalmazás szükségességét, mert a tanár törekszik arra, hogy az elnagyolt kifejezéseket is megértse, értelmezze.

A hét esettanulmány összesített eredményei és tapasztalatai

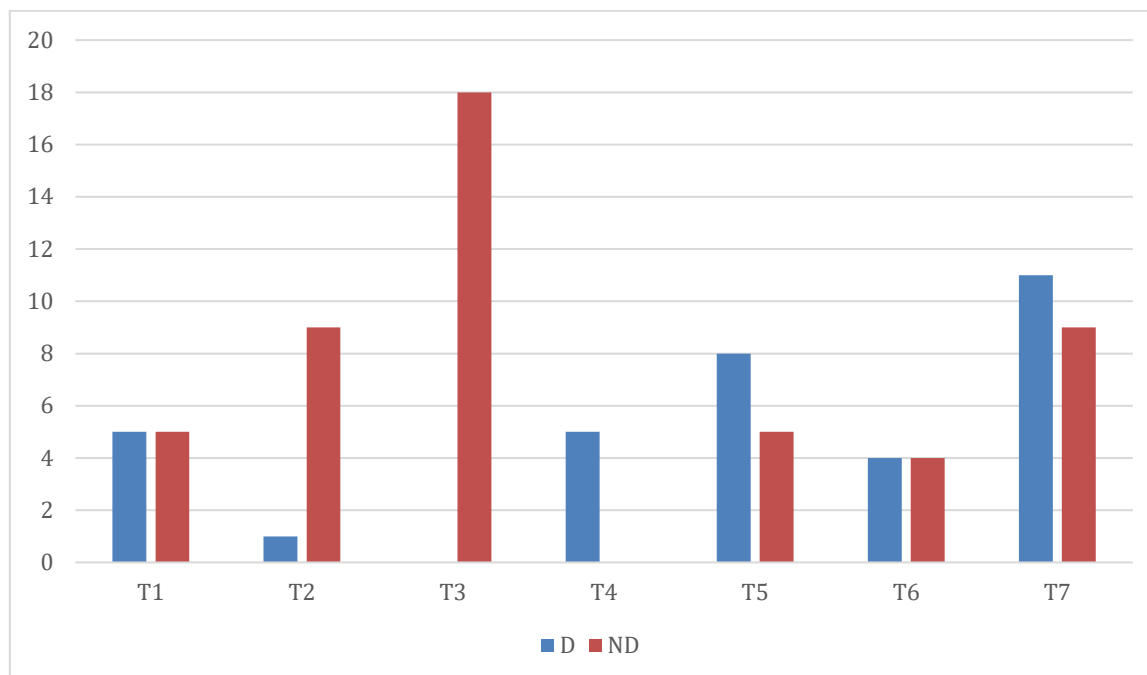
A 38. ábráról láthatjuk, hogy a párbeszédetek többsége a tanárjelölt és diák vagy diákok közötti (T-S) párbeszéd volt, ami nem meglepő. Itt hozzá kell tenni azt, hogy ezeket a párbeszédet többnyire hosszú, vagy legalábbis a diákok megnyilvánulásánál hosszabb tanári megszólalás jellemezte. A diákok gyakran szűkszavúan nyilatkoztak. A hét tanárjelölt közül ötnél megfigyelhető volt az a jelenség, hogy „magával beszélt”, vagyis önválaszai voltak (T-T párbeszéd). Tehát ha feltett egy kérdést, akkor saját maga válaszolt rá vagy esetleg egy gondolategység kifejtése után magánál tartva a szót kezdett egy újabb gondolatmenetet, anélkül, hogy a diákokat kérdezte volna. A diákok közötti párbeszéd (S-S) nagyon ritka volt. Mindössze 2 tanárjelölt órarészletében volt erre példa.

38. ábra: Párbeszédetek típusai a tanárjelöltek óráin



A 39. ábra a diszkurzivitásként (D) és negatív diszkurzivitásként (ND) azonosított megnyilvánulások eloszlását mutatja be tanárjelöltenként. Három tanárjelölnél a diszkurzív megnyilvánulások voltak többségben, két tanárjelölnél a diszkurzív és negatív diszkurzív esetek száma megegyezett, míg két tanárjelölnél a negatív diszkurzívítás száma volt magasabb. Kiemelendő, hogy volt egy tanárjelölt, akinél csak diszkurzívítást azonosítottunk és volt egy tanárjelölt, akinél csak negatív diszkurzívítást.

39. ábra: Diszkurzivitás és negatív diszkurzivitás aránya a tanárjelöltek részéről



A 34. táblázatban tanárjelöltenként láthatjuk az órarészletben a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ösztönzésére alkalmas helyzetek számát, illetve azt, hogy ezek közül hány esetben azonosítottuk az említett tevékenységeket a tanulói megnyilvánulások alapján. T3 kivételével mindegyik tanárjelöltnél találtunk alkalmas és sikeresen megvalósított helyzeteket. A helyzetek száma alapján nem állíthatjuk rangsorba a tanárjelölteket, hiszen különböző időtartamú és intenzitású órarészleteket elemeztünk.

34. táblázat: A nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre alkalmas potenciális helyzetek és a megvalósulásuk

Tanárjelölt	Nyomon követő és ellenőrző tevékenység ösztönzésére alkalmas helyzet (db)	Nyomon követő és ellenőrző tevékenység jött létre (db)
T1	5	2
T2	2	1
T3	0	0
T4	6	4
T5	4	2
T6	3	1
T7	7	5

A 39. ábra és a 34. táblázat összevetéséből megfigyelhető, hogy annál a tanárjelöltnél (T3), akinél nem találtunk diszkurzivitásra utaló megnyilvánulást, nem jött létre sem általa tudatosan, sem a diákok által spontán, a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre alkalmas helyzet. A 38. és 39. ábra, illetve a 34. táblázat adatai alapján a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre alkalmas helyzeteket leghatékonyabban kihasználó tanárjelöltek (T4 és T7) órarészleteiben fordult elő kizárólag diákok közötti párbeszéd (S-S), és ők azok, akiknél a diszkurzivitás volt többségben.

6.5. Kutatási kérdések és válaszok

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

K4.1. Előfordulnak-e tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kiváltására alkalmas helyzetek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

Igen, egy tanárjelölt órarészletét kivéve, több olyan helyzetet is azonosítottunk egy-egy órarészletben, amelyek kiválóan alkalmasak voltak arra, hogy abból tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység bontakozhasson ki. Az alkalmas helyzeteket vagy a tanárjelölt (többnyire) tudatosan, vagy a diákok spontán váltották ki.

K4.2. Ha igen, hogyan kezeli a tanárjelölt ezeket a helyzeteket?

Az esetek valamivel több mint felében sikerült nyomon követő és ellenőrző tevékenységre ösztönözni tanulót. Ugyanakkor ezek közül sok eset többet ígért annál, mint ami megvalósult, vagyis több helyzetet metakognitív szempontból értékesebben ki lehetett volna használni.

K4.3. Milyen tényezők befolyásolhatják a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését az osztálytermi megbeszélésben a tanárjelöltek óráin?

A tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység összefüggést mutatott a párbeszéd típusával (T-D, D-D vagy T-T), valamint a tanárjelöltek megnyilvánulásainak diszkurzív vagy negatív diszkurzív voltaival. További, a dolgozatban részletesen nem elemzett tényezőnek tűnik a tanárjelölt matematikai háttere, kérdéskultúrája, és az óra közvetlen irányításának mértéke.

6.6. Összegzés és következtetések

A fejezet instrumentális esettanulmányként hét, ezen belül részletesen egy végzős tanárjelölt egy-egy olyan középiskolásoknak tartott óráját vizsgálta, amelyeken azt kértük, hogy biztosítsanak lehetőséget a diákok szóbeli megnyilvánulásaira egy feladat hibás megoldásának elemzése során. A kutatás a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek ezen körülmények közötti megjelenésére összpontosított. A kutatásunk feltáró jellegű volt, a tanárjelölteket nem számonkérni akartuk, hanem képet szeretnénk volna kapni arról, hogy az általunk vizsgált téren milyen készségekkel rendelkeznek és miben van még szükségük fejlesztésre.

Összességében elmondható, hogy az elemzett órarészletek feladatai és a kialakult helyzetek sokkal több lehetőséget tartogattak a diákok osztálymegbeszélésbe való bevonására, illetve a nyomon követő és ellenőrző tevékenységeik ösztönzésére és megnyilvánulására, mint ami megvalósult. Mindezeket a következő tapasztalatok akadályozhatták. Nagyon nehezen vagy szinte egyáltalán nem alakult ki vita, dinamikus párbeszéd a diákok vagy a tanárjelölt és a diákok között. Az osztálymegbeszélések során jellemzően a tanárjelölt és diákok közötti párbeszéd és a tanárjelölt önválaszai fordultak elő. Diákok közötti párbeszéd két tanárjelölt óráját leszámítva egyáltalán nem jött létre. A tanárjelöltek gyakran tettek fel sugalmazó, önválaszoló kérdéseket vagy éppen válaszoltak saját maguknak. Túlzott irányítást figyeltünk meg. Azt is meg kell jegyeznünk, hogy befolyásolhatta a tanárjelöltek sikerességét például a tanulók tárgyi tudása, aktivitásra való hajlandósága és az összeszokottságuk, valamint az eddigi tanulási tapasztalataik hatása is.

6.6.1. A kutatás eredményeinek kapcsolata a szakirodalommal

Kutatásunk a hazai szakirodalomban kutatási úrt tölt be azzal, hogy a tanulói metakognitív tevékenységek szempontjából vizsgálta a tanítási gyakorlatukat középiskolában töltő, végzős, matematikaszakos tanárjelöltek egy-egy óráját.

Kutatási tapasztalataink kapcsolódnak a szakirodalomban tárgyalt azon megállapításokhoz, miszerint a tanárok nem fektetnek hangsúlyt a diákok metakognitív tevékenységekre való tanítására, illetve a metakognícióval kapcsolatos képzésre, explicit utasításokra és eszközökre van szükségük ahhoz, hogy a metakogníciót beépítsék a matematika órákba (Desoete & Veenman, 2006; Dignath & Büttner, 2018; Wafubwa et al., 2022).

A tanárjelöltek és a tanárok mentiségére szolgálhat az a megállapítás miszerint, ha a tanulók az órán megkapják a lehetőséget az önálló gondolkodásra és a megfigyeléseik saját szavakkal történő megfogalmazására, akkor a tanár olyan helyzetbe kerülhet, amikor a kognitív terhelése növekszik (Kónya & Kovács, 2020). Ennek oka az, hogy a tanárnak váratlan helyzeteket kell azonnal kezelnie.

6.6.2. A kutatás jelentősége a gyakorló tanárok számára

Ha az előbb említett kognitív terhelését a tanár úgy csökkenti, hogy számára minél kiszámíthatóbbá teszi a tanórát, vagyis például a diákok megnyilvánulásait és felvetéseit, a tanulók közötti vitákat háttérbe szorítja és inkább ő beszél és magyaráz, akkor az ellentmond a disszertációban követett módszertani elveknek és szemléletnek. Kutatásunk tapasztalataiból látható, hogy a hasonló helyzetek nem ösztönzik a tanulók metakognitív tevékenységeit.

Ezen módszerek helyett a tanár a kognitív terhelését úgy is csökkentheti, ha például reflektív magatartást gyakorol, vagy minél több tanulói reagálásra készül fel előzetesen egy általa kitűzött probléma kapcsán, illetve ismer széles körben alkalmazható általános és speciális kérdéseket, sémákat (Kónya & Kovács, 2020). Alkalmask lehetnek erre például a Kramarski és munkatársai (2013) által megkülönböztetett általános és kontextus-specifikus kérdések vagy felszólítások (lásd 25. oldal), amelyek ráadásul a matematikai problémamegoldás metakognitív tevékenységeit is támogatják.

6.6.3. Javaslatok a tanárképzés számára a kutatás eredményei alapján

Kutatási fejezetünk egyik fő mondanivalója a tanárképzés számára, hogy a tanárokat képezni kell a metakogníció középiskolai megvalósítása terén. Wafubwa és munkatársai (2022) szerint a tanárok csak akkor tudják a diákokat metakognitívvá nevelni, ha ők maguk is metakognitívak. Szükség van arra, hogy a tanárok ismerjenek és tudatosan alkalmazzanak metakognitív tevékenységeket, valamint ezek használatát tanítsák is diákjaiknak. A fejezetben bemutatott órarészlet azt is példázza, hogy hasonló órák vagy órarészletek önálló és csoportos elemzése értékes eszköz lehet a tanárképzésben mindezek elsajátításához. Úgy gondoljuk, hogy ezek az elemzések segíthetnek abban, hogy a tanárjelöltek tapasztalatokat gyűjtsenek valós osztálytermi helyzetekről, s egy-egy eset továbbgondolása pedig fejlesztheti kérdéskultúrájukat, reflektív habitusukat.

A bemutatott kutatással foglalkozik a következő publikáció

Kiss, M., & Kónya, E. (2023). Analysis of metacognitive activities in pre-service teachers' lessons – Case study. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3602–3603). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME

7. Konklúzió és további kutatási lehetőségek

A dolgozat kiindulópontja az a tapasztalat volt, hogy a tanulók többsége matematikából nagyon ritkán ellenőrzi az általa elvégzett munkát és annak eredményét a problémamegoldás során (Kiss, 2017; Kiss & Kónya, 2018). Ez vezetett minket abba az irányba, hogy a dolgozatban középiskolás tanulók nyomon követő (monitoring) és ellenőrző (control) tevékenységeit, mint metakognitív tevékenységeket vizsgáljuk a problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakaszában (Lester, 1985). Négy, módszerében különböző kutatásban próbáltuk ösztönözni és megfigyelni a diákok említett tevékenységeit az írásbeli vagy szóbeli munkájuk során. A kutatásaink jelenségek, eredményei összekapcsolhatók és kiegészítik egymást. A megfogalmazott kutatási kérdéseinkre kvalitatív és kvantitatív elemzési módszerekkel kerestük a válaszokat, amelyeket az alábbiakban röviden ismertetünk.

Az 1. kutatásban 111 9. osztályos diák nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit próbáltuk támogatni és megfigyelni az önálló írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során. Írásbeli utasításban kértük a tanulóktól a megoldásuk lépéseinek indoklását, utána pedig az írásbeli ellenőrzést a megoldásuk helyességét illetően. Megfigyeléseinket nem előzte meg célzott beavatkozás.

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

A tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységeknek találtunk írásbeli bizonyítékát. Összességében a diákok valamivel több mint felére volt jellemző, hogy észrevettek egy hibát a kivitelezési szakasz során, áthúzták és javítani próbálták azt. A helyes vagy lényegében helyes megoldók között nagyobb volt az aránya azoknak, akiknél a megoldás folyamán olyan áthúzás történt, ami befolyásolta az eredményt. Náluk stabilabb volt a tárgyi tudás és hatékonyabban működtek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek.

Az általunk utasítással kért ellenőrzési szakaszban a tanulók többsége felszínes ellenőrzésekkel próbálkozott, azaz, vagy csak néhány lépését ellenőrizték a megoldási folyamatnak, vagy egy műveletsort számoltak újra, vagy néhány példát soroltak fel a szóba jöhető számok közül. A mintában szereplő tanulók majdnem fele viszont nem adott írásbeli ellenőrzést. A megoldás helyességének függvényében nem volt lényeges különbség abban, hogy milyen típusú ellenőrzést választottak a tanulók. A megoldás helyességétől függetlenül minden megoldástípus esetén a felszínes ellenőrzést végzők vagy a nem ellenőrzők voltak többségben.

A tapasztalataink tehát azt mutatták, hogy az ellenőrző tevékenységek többnyire csak a kivitelezési szakaszban jelentek meg. Az ellenőrzési szakasz gyakran formalitást jelentett a tanulók számára vagy nem tudtak vele mit kezdeni.

A 2. kutatásban egy fejlesztő kísérletet hajtottunk végre egy matematikából átlagos teljesítményű 9. osztályban. A kísérlet célja az volt, hogy felülírja a vizsgált osztályban azokat a meggyőződéseket, miszerint: Minden matematikai feladatnak van megoldása, és pontosan egy megoldása van (Schoenfeld, 1992). A tanulók elő-, köztes-, utó- és késleltetett teszteken mutatott írásbeli munkáit elemeztük.

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

Az eredmények alapján a vizsgált 29 tanuló közel felénél volt megfigyelhető a fejlesztés során vagy után az említett metakognitív tudás. Az előteszt szerint a kiindulóállapotban ez egy tanulónál volt jelen.

A több esetet vagy ellentmondást tartalmazó megoldások alkalmas terepet nyújtottak a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek megnyilvánulására. Erre a több eset vagy ellentmondás észrevételéből, illetve a tanulók munkáiban megfigyelt áthúzásokból következtettünk. Az áthúzásokkal kapcsolatos nyomon követő és ellenőrző tevékenységek arányban ugyanannyi tanulónál jelentek meg a tesztekben, de a hibák javításának sikeressége a szükséges tárgyi tudás fejlődésével, az esetleges korábbi meggyőződés felülírásával, illetve a több eset és ellentmondás tudatos kezelésével haladt együtt. Az ellentmondás értelmezése, vagyis egy kognitív folyamat eredményének értékelése gyakran tapasztalható volt a tanulók írásbeli munkáiban. Annak mérlegelése, hogy lehet-e több megoldása a feladatnak, a kognitív folyamat feldolgozásával kapcsolatos nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket igényelte. Ilyenre is láttunk több példát, akár úgy, hogy a tanulók egy eset után még további megoldást kerestek, akár úgy, hogy néhány tanuló (tévesen) elvetette a további megoldás(oka)t.

A 3. kutatásban egy 29 fős 11-12. osztály tanulóinak nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit vizsgáltuk a problémamegoldás Pólya-féle visszatekintési fázisában. Két írásbeli számonkérés alkalmával a tanulónak hangfelvételt kellett készíteniük az írásbeli munkájuk utáni szóbeli magyarázatukról. A szóbeli magyarázatokban kerestük az írásbeli munkához képest többletinformációk számító tanuló megnyilvánulásukat, amikhez nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kapcsolunk. A megfigyeléseinket nem előzte meg célzott beavatkozás.

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket három többletinformáció-típushoz társítottuk: A megoldás egy lépésének indoklásához, a választott stratégia vagy modell magyarázatához, az eredmény értékeléséhez és ellenőrzéséhez. Az előbbi kettő a kognitív feldolgozás nyomon követését és ellenőrzését, az utóbbi pedig elsősorban a kognitív feldolgozás eredményének értékelését és ellenőrzését, mint metakognitív tevékenységeket igényli. A szóbeli magyarázatokban nagy számban jelentek meg az írásbeli megoldáshoz képest többletinformációk. Ez azt jelzi, hogy a szóbeli magyarázatok alkalmasak arra, hogy a tanulóknál nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket váltsanak ki.

A két dolgozatnál megjelenő többletinformációk és ezáltal a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa eltérő mintázatot mutatott a két témakörben (kombinatorika és mértani sorozat), és a feladattípusokban (rutin vagy probléma) is.

A kombinatorika dolgozatban függött, a mértani sorozat dolgozatban nem függött a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől. A kombinatorika dolgozatnál elért nagyobb írásbeli pontszám a többletinformációk számának növekedésével járt együtt. A mértani sorozatot felölelő dolgozatnál viszont azok a tanulók adták a legtöbb plusz információt a szóbeli magyarázatban az írásbeli munkákhoz képest, akiknek a pontszámai közel voltak az átlaghoz. Tapasztalataink azt is mutatják, hogy a kiemelkedő írásbeli teljesítménynek nem szükséges feltétele a szóbeli magyarázatok többletinformációinak intenzív jelenléte.

A 4. kutatásban a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését vizsgáltuk középiskolai tanítási gyakorlatukat töltő, végzős, matematika szakos tanárjelöltek óráinak frontális szakaszában. Hét tanárjelölt óráját elemeztük, abból a szempontból, hogy egy-egy általunk kiemelt órarészletben hogyan kezdeményeztek, kezeltek olyan helyzeteket, amelyekben a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységére lehetőség nyílik. Megfigyeléseinket nem előzte meg célzott beavatkozás vagy fejlesztés ezen a területen sem a tanárjelöltek sem a diákok szempontjából.

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

Egy tanárjelölt órarészletét kivéve, több olyan helyzetet is azonosítottunk egy-egy órarészletben, amelyek kiválóan alkalmasak voltak arra, hogy abból tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység bontakozhasson ki. Az alkalmas helyzeteket vagy a tanárjelölt (többnyire) tudatosan, vagy a diákok spontán váltották ki. Az esetek valamivel több mint felében sikerült nyomon követő és ellenőrző tevékenységre ösztönözni tanulókat. Ugyanakkor ezek közül sok eset többet ígért annál, mint ami megvalósult, vagyis több helyzetet metakognitív szempontból értékesebben ki lehetett volna használni. A tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység összefüggést mutatott a párbeszéd típusával, valamint a tanárjelöltek megnyilvánulásainak diszkurzív vagy negatív diszkurzív voltaival.

Kutatásaink a hazai és bizonyos tekintetben a nemzetközi szakirodalomban kutatási űrt töltenek be azzal, hogy középiskolás tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit, illetve ezen metakognitív tevékenységeket támogató lehetőségeket vizsgáltuk különböző módszerekkel az önálló problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során.

Az 1. és 2. kutatásunk a diákok írásbeli munkájában, a 3. és 4. kutatásunk pedig elsősorban a tanulók szóbeli megnyilvánulásai alapján vizsgálta a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre utaló jeleket és ezen metakognitív tevékenységek támogatásának lehetőségeit.

A négy kutatás néhány közös jellemzője:

- középiskolás tanulókra összpontosított
- a problémamegoldáshoz kapcsolódott
- megfigyelte a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket
- ösztönözte a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket
- az előbbi pontra alkalmas lehetőséget vizsgált

Kutatásaink közös tapasztalata és üzenete:

Mind a négy kutatás tapasztalatai azt mutatták, hogy a tanulók egy részénél az ösztönzések hatására, illetve spontán módon megjelentek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek, de ezek megfelelő és adaptív alkalmazását a hatékonyság érdekében tanítani kell. A hatékony alkalmazáshoz szükséges tényezőnek bizonyult a tanulók megfelelő tárgyi tudása.

Fontosnak tartunk még valamit kiemelni a dolgozatunkban hangsúlyosnak tekintett metakognitív tevékenységek ösztönzésével kapcsolatban. Számos előnyt és jelentőségét megemlítettük a metakogníciónak a problémamegoldás és a matematikatanítás terén. Ugyanakkor arról sem szabad megfeledkeznünk, hogy a magasabb szintű vagy élénkebb metakognitív aktivitás nem minden esetben előremutató és nem feltétlen jelent magasabb szintű kognitív teljesítményt (Csíkos, 2022b). A metakogníciót adaptív módon kell tanítani és

használni, és nem szabad elhanyagolni a természetesen és automatikusan működő kognitív készségek kialakításához szükséges rengeteg gyakorlást sem (Csíkos, 2022b).

A kutatásaink gyakorlatra vonatkozó jelentőségének összefoglalása

Az 1. kutatásunk eredményei és tapasztalatai azt mutatták, hogy hangsúlyt kell fektetni a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek képzésére. A mintánkban szereplő tanulók az általunk kért utasítások ellenére sem tudtak (hatékony) ellenőrzést adni a problémamegoldás ellenőrzési szakasza során. A diákok vélhetően nem érzik a jelentőségét az ellenőrzésnek. A pozitív irányú változás tekintetében az ellenőrzéshez való tanári hozzáállás, a számonkérések módszerei meghatározóak lehetnek.

A 2. kutatásunkban azt tapasztaltuk, hogy metakognitív szempontból hasznos a több esettel vagy ellentmondással járó problémák megoldása, így emiatt is szükséges a tanári nyitottság a nem pontosan egy megoldással járó problémák gyakorlására. Véleményünk szerint a problémamegoldást hátráltató meggyőződések kialakulását és fennmaradását erősen meghatározza a szaktanár és az adott osztályban kialakuló tanulási környezet is.

A 3. kutatásunkban alkalmazott módszer, a tanuló önálló írásbeli munkájához kapcsolt szóbeli magyarázat hangfelvétele egy lehetséges megoldást kínál arra a pedagógiai kihívásra, hogy a középiskolás korosztály tanulóit szóbeli megnyilvánulásra bírjuk (matematikából). Fontos eleme ennek a módszernek, hogy a diákokat ösztönzi a kulcsgondolatokra és kulcsmozzanatokra való reflexióra.

A 4. kutatás tapasztalatai alapján láttuk, hogy egyrészt a túlzott tanári irányítás és a megfelelő kérdések hiánya következtében a diákok megnyilvánulásai és felvetései, a tanulók közötti viták könnyen háttérbe szorulnak, amik a tanulók metakognitív tevékenységeinek ösztönzését is akadályozzák. Ennek a jelenségnek oka lehet a tanár kognitív terhelése, ami úgy is csökkenthető, ha a tanár reflektív magatartást gyakorol, vagy minél több tanulói reagálásra készül fel előzetesen egy általa kitzűzött probléma kapcsán, illetve ismer széles körben alkalmazható általános és speciális kérdéseket, sémákat, amiket használhat bizonyos helyzetekben (Kónya & Kovács, 2020).

További kutatási lehetőségek és irányok

A jövőben az 1. kutatás módszerét tervezzük kipróbálni nagyobb mintán és más témakörökben is, illetve célunk a 9. évfolyam után a 12. évfolyamos tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek megfigyelése az alkalmazott módszerrel.

A 2. kutatásban bemutatott fejlesztő kísérletet más osztályokban és más tanárokkal is megvalósítanánk kontrollcsoportok bevonásával.

A 3. kutatásban két dolgozatnál alkalmaztuk a módszerünket, ami hozott a témakörtől függő eredményeket. Elsődleges célunk különböző témakörök területén folytatni a tapasztalatszerzést. Másrészt a 12. évfolyamos korosztály mellett a 9-es tanulók szóbeli magyarázatait is vizsgálnánk és bővítenénk a mintánkat.

A 4. kutatásnál a további irányokat elsősorban a nagyobb tapasztalattal rendelkező gyakorló tanárok hasonló körülmények közötti megfigyelése és bizonyos mértékű felkészítés hatásának a megfigyelése jelentik.

Irodalom

- Ader, E. (2019). What would you demand beyond mathematics? Teachers' promotion of students' self-regulated learning and metacognition. *ZDM*, 51(4), 613–624. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01054-8>
- Alexander, J. M., Carr, M., & Schwanenflugel, P. J. (1995). Development of metacognition in gifted children: Directions for future research. *Developmental Review*, 15(1), 1–37. <https://doi.org/10.1006/drev.1995.1001>
- Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába*. ELTE Eötvös Kiadó.
- Ambrus, A. (2015). *A matematika tanulás-tanítás néhány kognitív pszichológiai kérdése*. *GRADUS*, 2(2), 63–73.
- Árki, T., Konfárné Nagy, K., Kovács, I., Trembeczki, Cs. & Urbán, J. (2009/2011). *Sokszínű Matematika Feladatgyűjtemény 9-10*. (3rd ed.). Mozaik Kiadó.
- Baker, L., & Cerro, L. C. (2000). Assessing metacognition in children and adults. In G. Schraw & J. Impara (Eds.), *Issues in the measurement of metacognition* (pp. 99-145). Buros Institute of Mental Measurements.
- Barkatsas, A. N., & Hunting, R. (1996). A review of recent research on cognitive, metacognitive and affective aspects of problem solving. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 4(4), 7–30.
- Baten, E., & Desoete, A. (2019). Metacognition and motivation in school-aged children with and without mathematical learning disabilities in Flanders. *ZDM*, 51(4), 679–689. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-01024-6>
- Brown, A. L. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 65–116). Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, A. L., Bransford, J. D., Ferrara, R. A., & Campione, J. C. (1983). Learning, remembering, and understanding. In J. H. Flavell & E. M. Markham (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol. 3. Cognitive development* (pp. 77–166). Wiley.
- Cai, J., & Brook, M. (2006). Looking Back in Problem Solving. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, 196, 42–45.
- Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2001). Mechanisms of the taking effect of metacognition in understanding processes in mathematics teaching. In *Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries: Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics* (pp. 29–38). SUB Göttingen.
- Cohors-Fresenborg, E., & Kaune, C. (2007). Modelling classroom discussions and categorising discursive and metacognitive activities. In D. Pitta-Pantazi & G. Pilippou (Eds.), *Proceedings of CERME5* (pp. 1180–1189). University of Cyprus.
- Cornoldi, C., Carretti, B., Drusi, S., & Tencati, C. (2015). Improving problem solving in primary school students: The effect of a training programme focusing on metacognition and working memory. *British Journal of Educational Psychology*, 85(3), 424–439. <https://doi.org/10.1111/bjep.12083>
- Cornoldi, C., Lucangeli, D., Caponi, B., Falco, G., Focchiatti, R., & Todeschini, M. (1995). *Matematica e Metacognizione*. Erickson.

- Csíkos, C. (2004). Metakogníció a tanulásban és a tanításban: Az EARLI 10. konferenciájának kutatási eredményei. *Iskolakultúra*, 14(2), 3–11.
- Csíkos, C. (2007). *Metakogníció: A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája*. Műszaki Kiadó.
- Csíkos, C. (2008). Az IRA (Index of Reading Awareness) kérdőívvel végzett longitudinális felmérés eredményei. *Magyar Pedagógia*, 108(2), 97–134.
- Csíkos, C. (2016). *A gondolkodás stratégiai összetevőinek fejlesztése iskoláskorban* [Akadémiai doktori értekezés]. http://real-d.mtak.hu/959/7/dc_1156_15_doktori_mu.pdf
- Csíkos, C. (2020a). Akciókutatások és pedagógiai kísérletek párhuzamai és különbözőségei. *Neveléstudomány* | *Oktatás–Kutatás–Innováció*, 8(4), 12–20. <https://doi.org/10.21549/NTNY.31.2020.4.1>
- Csíkos, C. (2020b). *A neveléstudomány kutatómódszertanának alapjai*. ELTE Eötvös Kiadó.
- Csíkos, C. (2022a). A metakognícióelmélet 21. századi szerepvállalásáról: – a számolási készség metakognitív és nem metakognitív komponenseinek példáján. *Iskolakultúra*, 32(11), 18–29. <https://doi.org/10.14232/iskkult.2022.11.18>
- Csíkos, C. (2022b). Metacognitive and non-metacognitive processes in arithmetic performance: Can there be more than one meta-level? *Journal of Intelligence*, 10(3), 53. <https://doi.org/10.3390/jintelligence10030053>
- Csíkos, C., Sztányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children’s mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, 81. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9360-z>
- de Boer, H., Donker, A. S., Kostons, D. D. N. M., & van der Werf, G. P. C. (2018). Long-term effects of metacognitive strategy instruction on student academic performance: A meta-analysis. *Educational Research Review*, 24, 98–115. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2018.03.002>
- Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers’ metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: Analysis and impact on students’ beliefs and performance. *ZDM*, 42(2), 205–218. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0221-5>
- Desoete, A., & De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM*, 51(4), 565–575. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w>
- Desoete, A., & Veenman, M. (2006). Metacognitions in mathematics: Critical issues on nature, theory, assessment and treatment. In A. Desoete & M. Veenman (Eds.), *Metacognition in mathematics education* (pp. 1–10). Nova Science.
- Diana, R. A., & Reder, L. M. (2004). Visual versus verbal metacognition: Are they really different? In D. T. Levin (Ed.), *Thinking and Seeing: Visual Metacognition in Adults and Children* (pp. 187–201). MIT Press.
- Dignath, C., & Büttner, G. (2018). Teachers’ direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition and Learning*, 13(2), 127–157. <https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x>

- Donker, A. S., de Boer, H., Kostons, D., Dignath van Ewijk, C. C., & van der Werf, M. P. C. (2014). Effectiveness of learning strategy instruction on academic performance: A meta-analysis. *Educational Research Review*, *11*, 1–26. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2013.11.002>
- Duffy, G. G. (2005). Developing metacognitive teachers: Visioning and the expert's changing role in teacher education and professional development. In S. E. Israel, C. C. Block, K. L. Bauserman, & K. Kinnucan-Welsch (Eds.), *Metacognition in literacy learning: Theory, assessment, instruction, and professional development* (pp. 299–314). Erlbaum.
- Erbas, A. K., & Okur, S. (2012). Researching students' strategies, episodes, and metacognitions in mathematical problem solving. *Quality & Quantity*, *46*(1), 89–102. <https://doi.org/10.1007/s11135-010-9329-5>
- Flavell, J. H. (1971). First discussant's comments: What is memory development the development of? *Human Development*, *14*(4), 272–278. <https://doi.org/10.1159/000271221>
- Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–235). Erlbaum.
- Flavell, J. H. (1978). Metacognitive development. In J. M. Scandura & C. J. Brainerd (Eds.), *Structural/process theories of complex human behavior* (pp. 213–245). Sijthoff and Noordhoff.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906–911. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906>
- Flavell, J. H. (1987). Speculations about the nature and development of metacognition. In F. E. Weinert & R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp. 21–29). Erlbaum.
- Flavell, J. H., Miller, P. H., & Miller, S. A. (2002). *Cognitive development* (4th ed.). Pearson.
- Fleming, S. M. (2023). Metacognition and confidence: A review and synthesis. *Annual Review of Psychology*, *75*(1), 241–268. <https://doi.org/10.1146/annurev-psych-022423-032425>
- Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(3), 163–176. <https://doi.org/10.2307/748391>
- Gonulal, T., & Loewen, S. (2018). Scaffolding technique. In J. I. Lontas (Ed.), *The TESOL encyclopedia of English language teaching* (pp. 1–5). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118784235.eelt0180>
- Hacker, D. J., Bol, L., & Keener, M. C. (2008). Metacognition in education: A focus on calibration. In J. Dunlosky & R. A. Bjork (Eds.), *Handbook of metamemory and memory* (pp. 429–455). Psychology Press.
- Hacker, D. J., Kihara, S. A., & Levin, J. R. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM*, *51*(4), 601–612. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01040-0>
- Herendiné Kónya, E., & Kovács, Z. (2020). Kognitív terhelés a problémaközpontú matematikaórákon. In S. Bordás (Ed.), *MÓDSZEREK, MŰVEK, TEÓRIÁK: A X. Tantárgypedagógiai Nemzetközi Tudományos Konferencia előadásai: Értekezések, tudományos dolgozatok* (27.) (pp. 279–288). Eötvös József Főiskolai Kiadó.

- Herendiné Kónya, E., & Kovács, Z. (2023). The role of procedural and conceptual understanding in problem solving. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education: ProMath 2022* (pp. 97–111). Aristotle University of Thessaloniki.
- Jackson, K. F. (1983). *The art of solving problems*. Bulmershe College.
- Jacobbe, T. (2007). Connecting research to teaching: Using Pólya to overcome translation difficulties. *The Mathematics Teacher*, 101(5), 390–393. <https://doi.org/10.5951/MT.101.5.0390>
- Jacobs, J. E., & Paris, S. G. (1987). Children's metacognition about reading: Issues in definition, measurement, and instruction. *Educational Psychologist*, 22(3–4), 255–278.
- Jaušovec, N. (1994). Metacognition in creative problem solving. In M. A. Runco (Ed.), *Problem finding, problem solving and creativity* (pp. 77–95). Ablex.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Penguin Books.
- Kaune, C. (2006). Reflection and metacognition in mathematics education—Tools for the improvement of teaching quality. *ZDM*, 38(4), 350–360. <https://doi.org/10.1007/BF02652795>
- Kiss, M. (2017). *A megértés és a memória szerepe a problémamegoldás módszerének kiválasztásában* [OTDK-dolgozat].
- Kiss, M. (2019). *A feladatmegoldás „feldíszítése”? – Metakognitív tevékenységek a problémamegoldás során* [OTDK dolgozat].
- Kiss, M. (2021). Fejlesztőkísérlet matematikaórán egy meggyőződés felülírására. In G. Molnár & E. Tóth (Eds.), *Új kutatások a neveléstudományokban 2021: A neveléstudomány válaszai a jövő kihívásaira* (pp. 54–72).
- Kiss, M., & Ambrus, A. (2023). How students control their work in mathematical problem-solving process. In I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education (ProMath 2022)* (pp. 113–123). Aristotle University of Thessaloniki.
- Kiss, M., & Kónya, E. (2018). Mi a sorsa egy megtanított ismeretnek? In P. Markó (Ed.), *„Használni akartam, nem tündökölni”* (pp. 163–175). Druk-ker Kft.
- Kiss, M., & Kónya, E. (2020). Is it possible to develop metacognition in mathematics classroom environment? *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), 123–132. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0485>
- Kiss, M., & Kónya, E. (2021). Do students analyze and evaluate the result of their problem solving activity? In B. May-Tatsis, K. Tatsis, & E. Swoboda (Eds.), *Critical thinking in mathematics: Perspectives and challenges* (pp. 143–152). ISBN: 978-83-7996-903-6
- Kiss, M., & Kónya, E. (2022). Written test with oral explanation during the pandemic. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3835–3842). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Kiss, M., & Kónya, E. (2023). Analysis of metacognitive activities in pre-service teachers' lessons – Case study. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztanyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3602–3603). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

- Kluwe, R. H. (1987). Executive decisions and regulation of problem solving. In F. Weinert & R. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding* (pp. 31–64). Erlbaum.
- Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J. & Vincze, I. (2001/2008). *Sokszínű Matematika 9. Tankönyv* (8th ed.). Mozaik Kiadó.
- Kovács, Z., & Kónya, E. (2019). How do novices and experts approach an open problem? In Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper, & L. Jukić Matić (Eds.), *Towards new perspectives on mathematics education* (pp. 245-260). Element.
- Kramarski, B. (2008). Promoting teachers' algebraic reasoning and self-regulation with metacognitive guidance. *Metacognition and Learning*, 3(2), 83–99.
- Kramarski, B., Weiss, I., & Sharon, S. (2013). Generic versus context-specific prompts for supporting self-regulation in mathematical problem solving among students with low or high prior knowledge. *Journal of Cognitive Education and Psychology*, 12(2), 197–214. <https://doi.org/10.1891/1945-8959.12.2.197>
- Kreutzer, M. A., Leonard, C., Flavell, J. H., & Hagen, J. W. (1975). An interview study of children's knowledge about memory. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 40(1), 1–60. <https://doi.org/10.2307/1165955>
- Lénárd, F. (1964/1971). *A problémamegoldó gondolkodás*. Akadémiai Kiadó.
- Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Information Age Publishing.
- Lester, F. K. (1982). Building bridges between psychological and mathematics education research on problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 55–85). The Franklin Institute Press.
- Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41-69). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 660–675. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.25.6.0660>
- Libet, B. (2002). The timing of conscious events: Libet's experimental findings and their implications. *Consciousness and Cognition*, 11, 291–299.
- Lingel, K., Lenhart, J., & Schneider, W. (2019). Metacognition in mathematics: Do different metacognitive monitoring measures make a difference? *ZDM*, 51(4), 587–600. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01062-8>
- Lucangeli, D., Fastame, M. C., Pedron, M., Porru, A., Duca, V., Hitchcott, P. K., & Penna, M. P. (2019). Metacognition and errors: The impact of self-regulatory trainings in children with specific learning disabilities. *ZDM*, 51(4), 577–585. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01044-w>
- Mashiach Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2003). Cooperative problem solving in combinatorics: The inter-relations between control processes and successful solutions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 389–403. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.001>

- Mason, J. (2022). Consequences of a virtual encounter with George Pólya. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 20(2), 173-182. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2022.0531>
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982/2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Pearson.
- NAT 2020. *A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról*. Korm. Rendelet. (2020). Magyar Közlöny, 17. <https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megttekintes> Utolsó letöltés: 2024.08.14.
- Nelson, T. O. (1996). Consciousness and metacognition. *American Psychologist*, 51, 102–116.
- Nelson, T. O., & Narens, L. (1990/1992). Metamemory: A theoretical framework and new findings. In T. O. Nelson (Ed.), *Metacognition: Core readings* (pp. 117-129). Allyn and Bacon.
- Nowińska, E. (2016). The design of a high inference rating system for an evaluation of metacognitive-discursive teaching and learning quality. In S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, D. Potari, & M. Ribeiro (Eds.), *ERME Topic Conference on Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development* (pp. 46–55). <https://hal.archives-ouvertes.fr/ETC3/>
- Ohlendorf, M. (2017). Pólya's phase looking back in the classroom. In A. Ambrus & É. Vásárhelyi (Eds.), *Problem solving in mathematics education: Proceedings of the 19th ProMath conference August 30 - September 1, 2017 in Budapest* (pp. 90-96). Eötvös Loránd University.
- Op't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics-related beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 13–37). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47958-3_2
- Özsoy, G. (2011). An investigation of the relationship between metacognition and mathematics achievement. *Asia Pacific Education Review*, 12(2), 227–235. <https://doi.org/10.1007/s12564-010-9129-6>
- Petitmengin, C. (2006). Describing one's subjective experience in the second person: An interview method for the science of consciousness. *Phenomenology and the Cognitive Sciences*, 5, 229–269. <https://doi.org/10.1007/s11097-006-9022-2>
- Pintér, K. (2012). *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról* [Disszertáció]. Szegedi Tudományegyetem. <https://doktori.bibl.u-szeged.hu/id/eprint/1456/>
- Pólya, G. (1945/1977). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó.
- Pólya, G. (1967/1970). *A problémamegoldás iskolája I*.
- Roderer, T., & Roebbers, C. M. (2013). Children's performance estimation in mathematics and science tests over a school year: A pilot study. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 11(1), Article 1.
- Schneider, W. (1998). The development of procedural metamemory in childhood and adolescence. In G. Mazzoni & T. O. Nelson (Eds.), *Metacognition and cognitive neuropsychology: Monitoring and control processes* (pp. 1-21). Erlbaum.
- Schneider, W. (2008). The development of metacognitive knowledge in children and adolescents: Major trends and implications for education. *Mind, Brain, and Education*, 2, 114–121. <https://doi.org/10.1111/j.1751-228X.2008.00041.x>

- Schneider, W. (2010). The development of metacognitive competences. In: B. Glatzeder, V. Goel, & A. Müller (Eds) *Towards a Theory of Thinking. On Thinking*. (pp. 203-214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-03129-8_14
- Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 42(2), 149–161. <https://doi.org/10.1007/s11858-010-0240-2>
- Schneider, W., Körkel, J., & Weinert, F. E. (1987). The effects of intelligence, self-concept, and attributional style on metamemory and memory behavior. *International Journal of Behavioral Development*, 10, 281–299.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan Publishing.
- Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1987). What's all that fuss about metacognition? In *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189–215). Lawrence Erlbaum Associates.
- Schraw, G. (1994). The effect of metacognitive knowledge on local and global monitoring. *Contemporary Educational Psychology*, 19, 143–154.
- Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review*, 7(4), 351–371. <https://doi.org/10.1007/BF02212307>
- Shilo, A., & Kramarski, B. (2019). Mathematical-metacognitive discourse: How can it be developed among teachers and their students? Empirical evidence from a videotaped lesson and two case studies. *ZDM Mathematics Education*, 51(4), 625–640. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-01016-6>
- Silver, E. A. (Ed.). (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Lawrence Erlbaum Associates.
- Skemp, R. R. (1971/2005). *The psychology of learning mathematics*. Edge 2000.
- Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. SAGE Publications.
- Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1–22). National Council of Teachers of Mathematics.
- Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó.
- Temur, Ö. D., Özsoy, G., & Turgut, S. (2019). Metacognitive instructional behaviours of preschool teachers in mathematical activities. *ZDM Mathematics Education*, 51(4), 655–666. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01069-1>
- Tobias, S., & Everson, H. T. (Eds.). (2009). The importance of knowing what you know: A knowledge monitoring framework for studying metacognition in education. In *Handbook of metacognition in education* (pp. 1–27). Routledge.
- van der Stel, M., & Veenman, M. V. J. (2014). Metacognitive skills and intellectual ability of young adolescents: A longitudinal study from a developmental perspective. *European Journal of Psychology of Education*, 29(1), 117–137. <https://doi.org/10.1007/s10212-013-0190-5>

- Varga, T. (1988). Mathematics education in Hungary today. *Educational Studies in Mathematics*, 19(3), 291–298.
- Veenman, M. (2006). The role of intellectual and metacognitive skills in math problem solving. *Educational Psychologist*, 41(1), 15–24.
- Veenman, M. V. J. (2013). Training metacognitive skills in students with availability and production deficiencies. In *Applications of self-regulated learning across diverse disciplines: A tribute to Barry J. Zimmerman* (pp. 299–324). Information Age Publishing.
- Veenman, M. V. J. (2017). Learning to self-monitor and self-regulate. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (Eds.), *Handbook of research on learning and instruction* (2nd ed., pp. 233–257). Routledge.
- Veenman, M. V. J., & Spaans, M. A. (2005). Relation between intellectual and metacognitive skills: Age and task differences. *Learning and Individual Differences*, 15(2), 159–176. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2004.12.001>
- Verschaffel, L. (1999). Realistic mathematical modelling and problem solving in the upper elementary school: Analysis and improvement. In J. H. M. Hamers, J. E. H. Van Luit, & B. Csapo (Eds.), *Teaching and learning thinking skills: Contexts of learning* (pp. 215–240). Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Van Dooren, W., & Star, J. (2017). Applying cognitive psychology-based instructional design principles in mathematics teaching and learning: Introduction. *ZDM Mathematics Education*, 49(4), 491–496. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0861-9>
- Vigotskij, L. S. (1967). *Gondolkodás és beszéd*. Akadémiai Kiadó.
- Wafubwa, R. N., Csikos, C., & Opoku-Sarkodie, R. (2022). In-service mathematics teachers' conception and perceptions of metacognition in their teaching experience. *SN Social Sciences*, 2(2), 21. <https://doi.org/10.1007/s43545-022-00321-y>
- Weil, L. G., Fleming, S. M., Dumontheil, I., Kilford, E. J., Weil, R. S., Rees, G., Dolan, R. J., & Blakemore, S. J. (2013). The development of metacognitive ability in adolescence. *Consciousness and Cognition*, 22(1), 264–271. <https://doi.org/10.1016/j.concog.2013.01.004>
- Zhao, N., Teng, X., Li, W., Li, Y., Wang, S., Wen, H., & Yi, M. (2019). A path model for metacognition and its relation to problem-solving strategies and achievement for different tasks. *ZDM Mathematics Education*, 51(4), 641–653. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01067-3>
- Zsigmond, I. (2008). *Metakognitív stratégiák*. Scientia Kiadó.

Összefoglaló

A dolgozatunkban középiskolás tanulók nyomon követő (monitoring) és ellenőrző (control) tevékenységeit vizsgáltuk a problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakaszában. Az elméleti áttekintéshez kapcsolódva 4 kutatási fejezetben vizsgáltuk az említett tevékenységek írásbeli és szóbeli megjelenését a tanulóknál, illetve kerestük ezen metakognitív tevékenységek ösztönzésére alkalmas módszereket, körülményeket. Kutatásunk messze nem lezárt, mert további minták és témakörök bevonásával, a módszerek apró változtatásával további értékes tapasztalatokkal gazdagodhatunk a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megfigyelése és támogatása terén.

Az 1. kutatásban 9. osztályos diák nyomon követő és ellenőrző tevékenységeit próbáltuk ösztönözni és megfigyelni az önálló írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során, és a szakaszok megvalósítását utasításban kértük a tanulóktól.

K1. Hogyan jelenik meg a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenysége az írásbeli problémamegoldás kivitelezési és ellenőrzési szakasza során?

A tanulók több mint felére volt jellemző, hogy észrevettek egy hibát a kivitelezési szakasz során, áthúzták és javítani próbálták azt. A helyes megoldók között nagyobb volt az aránya azoknak, akiknél a megoldás folyamán olyan áthúzás történt, ami befolyásolta az eredményt.

Az általunk utasítással kért ellenőrzési szakaszban a tanulók többsége felszínes ellenőrzésekkel próbálkozott, illetve a diákok majdnem fele viszont nem adott írásbeli ellenőrzést. A megoldás helyességének függvényében nem volt lényeges különbség abban, hogy milyen típusú ellenőrzést választottak a tanulók.

A tapasztalataink tehát azt mutatták, hogy az ellenőrző tevékenységek többnyire csak a kivitelezési szakaszban jelentek meg.

A 2. kutatásban egy fejlesztő kísérletet hajtottunk végre egy 9. osztályban. A kísérlet célja az volt, hogy felülírja a vizsgált osztályban azokat a meggyőződéseket, miszerint: Minden matematikai feladatnak van megoldása, és pontosan egy megoldása van (Schoenfeld, 1992). A tanulók elő-, köztes-, utó- és késleltetett teszteken mutatott írásbeli munkáit elemeztük.

K2. Hatással van-e a nyomon követő és ellenőrző tevékenységekre az a metakognitív tudás, hogy egy feladatnak több, ezen belül akár ellentmondást tartalmazó megoldása is lehet?

Az eredmények alapján a vizsgált 29 tanuló közel felénél volt megfigyelhető a fejlesztés során vagy után az említett metakognitív tudás. Az előteszt szerint a kiindulóállapotban ez egy tanulóval volt jelen.

A több esetet vagy ellentmondást tartalmazó megoldások alkalmas terepet nyújtottak a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek megnyilvánulására. Erre a több eset vagy ellentmondás észrevételéből, illetve a tanulók munkáiban megfigyelt áthúzásokból következettünk. Az áthúzásokkal kapcsolatos nyomon követő és ellenőrző tevékenységek arányban ugyanannyi tanulóval jelentek meg a tesztekben, de a hibák javításának sikeressége a szükséges tárgyi tudás fejlődésével, az esetleges korábbi meggyőződés felülírásával, illetve a több eset és ellentmondás tudatos kezelésével haladt együtt.

A 3. kutatásban egy 29 fős 11-12. osztályban két írásbeli számonkérés alkalmával a tanulóknak hangfelvételt kellett készíteniük az írásbeli munkájuk utáni szóbeli magyarázatukról. A szóbeli magyarázatokban kerestük az írásbeli munkához képest többletinformációnak számító tanulói megnyilvánulásukat, amikhez nyomon követő és ellenőrző tevékenységek kapcsolunk. A megfigyeléseinket nem előzte meg célzott beavatkozás.

K3. Hogyan tükröződnek a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek az írásbeli problémamegoldást követő szóbeli magyarázatban?

A nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket három többletinformáció-típushoz társítottuk: A megoldás egy lépésének indoklásához, a választott stratégia vagy modell magyarázatához, az eredmény értékeléséhez és ellenőrzéséhez. Az előbbi kettő a kognitív feldolgozás nyomon követését és ellenőrzését, az utóbbi pedig elsősorban a kognitív feldolgozás eredményének értékelését és ellenőrzését, mint metakognitív tevékenységeket igényli. A szóbeli magyarázatokban nagy számban jelentek meg az írásbeli megoldáshoz képest többletinformációk. Ez azt jelzi, hogy a szóbeli magyarázatok alkalmasak arra, hogy a tanulóknál nyomon követő és ellenőrző tevékenységeket váltsanak ki.

A két dolgozatnál megjelenő többletinformációk és ezáltal a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa eltérő mintázatot mutatott a két témakörben (kombinatorika és mértani sorozat), és a feladattípusokban (rutin vagy probléma) is.

A kombinatorika dolgozatnál elért nagyobb írásbeli pontszám a többletinformációk számának növekedésével járt együtt. A mértani sorozatot felölelő dolgozatnál viszont azok a tanulók adták a legtöbb plusz információt a szóbeli magyarázatban az írásbeli munkához képest, akiknek a pontszámai közel voltak az átlaghoz.

A 4. kutatásban a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megjelenését vizsgáltuk középiskolai tanítási gyakorlatukat töltő, végzős, matematika szakos tanárjelöltek óráinak frontális szakaszában. Hét tanárjelölt óráját elemeztük, abból a szempontból, hogy egy-egy általunk kiemelt órarészletben hogyan kezdeményeztek, kezeltek olyan helyzeteket, amelyekben a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységére lehetőség nyílik.

K4. Hogyan jelennek meg a tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenységek a tanárjelöltek óráinak frontális szakaszaiban?

Egy tanárjelölt órarészletét kivéve, több olyan helyzetet is azonosítottunk egy-egy órarészletben, amelyek kiválóan alkalmasak voltak arra, hogy abból tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység bontakozhasson ki. Az alkalmas helyzeteket vagy a tanárjelölt (többnyire) tudatosan, vagy a diákok spontán váltották ki. Az esetek valamivel több mint felében sikerült nyomon követő és ellenőrző tevékenységre ösztönözni tanulót. Ugyanakkor ezek közül sok eset többet ígért annál, mint ami megvalósult, vagyis több helyzetet metakognitív szempontból értékesebben ki lehetett volna használni. A tanulói nyomon követő és ellenőrző tevékenység összefüggést mutatott a párbeszéd típusával, valamint a tanárjelöltek megnyilvánulásainak diszkurzív vagy negatív diszkurzív voltával.

Kutatásaink tapasztalatai azt mutatták, hogy a tanulókat nyomon követő és ellenőrző tevékenységek megfelelő és adaptív alkalmazását a hatékonyság érdekében tanítani kell. A hatékony alkalmazáshoz szükséges tényezőnek bizonyult a tanulók megfelelő tárgyi tudása.

Saját eredmények

1. kutatás:

- A tanulók ellenőrző tevékenységeinek típusa független a megoldásuk minőségétől.

2. kutatás:

- A több esetet vagy ellentmondást tartalmazó megoldások alkalmas terepet nyújtottak a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek írásbeli megnyilvánulására. Ehhez kapcsolódóan az általunk induktívan felállított fejlődési szintek vizsgálata, használható módszer a tanulók aktuális és lehetséges fejlődési szintjeinek vizsgálatára.

3. kutatás:

- A hangosdolgozatok módszere alkalmas volt a tanulók nyomon követő és ellenőrző tevékenységeinek ösztönzésére és megfigyelésére. Az általunk kért szóbeli magyarázatok a tanulók írásbeli munkáihoz képest jelentős többletinformációval szolgáltak a tanulók gondolkodásáról.
- A két dolgozatnál megjelenő többletinformációk és ezáltal a nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége és típusa eltérő mintázatot mutatott a két témakörben (kombinatorika és mértani sorozat), és a feladattípusokban (rutin vagy probléma) is.
- A kombinatorika dolgozatban függött, a mértani sorozat dolgozatban nem függött a szóbeli magyarázatban azonosított nyomon követő és ellenőrző tevékenységek mennyisége a tanulók írásbeli teljesítményétől.

4. kutatás

- Szükség van a tanárjelöltek képzésére a tanulói metakognitív tevékenységek órai megvalósítása és kibontakoztatása terén.

Summary

In our paper, we examined the monitoring and control activities of high school students during the execution and verification phases of problem solving. In connection with the theoretical overview, we explored the written and oral manifestations of these activities in students across four research chapters, and we sought methods and circumstances conducive to stimulating these metacognitive activities. Our research is far from complete, as further valuable insights can be gained into the observation and support of students' monitoring and control activities by incorporating additional samples and topics and making slight modifications to the methods.

In the first study, we aimed to stimulate and observe the monitoring and control activities of 9th-grade students during the implementation and verification phases of independent written problem solving, asking students to follow specific instructions for these phases.

Q1 How do students' monitoring and control activities manifest during the execution and verification phases of written problem solving?

More than half of the students noticed an error during the execution phase, crossed it out, and attempted to correct it. Among those who arrived at the correct solution, a higher proportion had made corrections that affected the outcome. In the verification phase, which we explicitly instructed students to carry out, most students attempted superficial checks, and nearly half provided no written verification. There was no significant difference in the type of verification chosen by students depending on the correctness of their answers. Our findings thus indicated that control activities mainly appeared during the execution phase.

In the second study, we conducted a developmental experiment in a 9th-grade class. The experiment aimed to challenge the prevailing beliefs in the class that every mathematical problem has exactly one solution (Schoenfeld, 1992). We analyzed students' written work in pre-, intermediate, post-, and delayed tests.

Q2 Does the metacognitive knowledge that a problem can have multiple, potentially contradictory solutions affect monitoring and control activities?

The results showed that nearly half of the 29 students displayed the mentioned metacognitive knowledge during or after the intervention. According to the pre-test, only one student exhibited this knowledge initially. Solutions containing multiple cases or contradictions provided a suitable context for students to engage in monitoring and control activities. This was inferred from the identification of multiple cases or contradictions and the observed cross-outs in students' work. The ratio of monitoring and control activities related to cross-outs was the same across the tests for the same number of students, but the success of error correction progressed with the development of necessary subject knowledge, the revision of previous beliefs, and the conscious management of multiple cases and contradictions.

In the third study, 29 students from grades 11-12 were asked to record their verbal explanations following written assessments on two occasions. In these verbal explanations, we looked for student expressions that provided additional information compared to the written work, which we linked to monitoring and control activities. Our observations were not preceded by targeted intervention.

Q3 How are monitoring and control activities reflected in verbal explanations following written problem solving?

We associated monitoring and control activities with three types of additional information: justification of a solution step, explanation of the chosen strategy or model, and evaluation and control of the result. The first two require the monitoring and control of cognitive processing, while the latter primarily involves evaluating and verifying the outcome of cognitive processing as metacognitive activities. The verbal explanations contained significantly more additional information than the written solutions, indicating that verbal explanations are suitable for eliciting monitoring and control activities in students.

The amount and type of additional information, and thus the monitoring and control activities, exhibited different patterns across the two topics (combinatorics and geometric sequences) and task types (routine or problem-solving). Higher written scores in the combinatorics test were associated with an increase in the amount of additional information. However, in the geometric sequences test, the students who provided the most additional information in their verbal explanations compared to their written work were those with scores close to the average.

In the fourth study, we examined the manifestation of students' monitoring and control activities during the frontal segments of lessons taught by senior math teacher trainees during their high school teaching practice. We analyzed the lessons of seven teacher trainees to see how they initiated and handled situations in specific lesson segments where students had the opportunity to engage in monitoring and control activities.

Q4 How do students' monitoring and control activities manifest during the frontal segments of teacher trainees' lessons?

In all but one of the observed lesson segments, we identified several situations that were highly conducive to the development of students' monitoring and control activities. These situations were either consciously initiated by the teacher trainee (in most cases) or spontaneously by the students. In slightly more than half of these cases, students were successfully prompted to engage in monitoring and control activities. However, many of these cases held more potential than was realized, meaning that more metacognitive value could have been derived from these situations. The students' monitoring and control activities were related to the type of dialogue and the discursive or non-discursive nature of the teacher trainees' expressions.

Our research findings suggest that students need to be taught the appropriate and adaptive application of monitoring and control activities to ensure effectiveness. A necessary factor for effective application was found to be the students' adequate subject knowledge.

Key Findings

First Study:

The type of control activities students engage in is independent of the quality of their answers.

Second Study:

Solutions containing multiple cases or contradictions provided a suitable context for students to express monitoring and control activities in writing. The examination of the inductively established developmental levels related to this is a useful method for assessing students' current and potential developmental levels.

Third Study:

The method of audio-recorded explanations was suitable for stimulating and observing students' monitoring and control activities. The verbal explanations we requested provided significantly more additional information about the students' thinking than their written work.

The amount and type of additional information, and thus the monitoring and control activities, exhibited different patterns across the two topics (combinatorics and geometric sequences) and task types (routine or problem-solving).

In the combinatorics test, the amount of monitoring and control activities identified in the verbal explanations depended on the students' written performance, while in the geometric sequences test, it did not.

Fourth Study:

There is a need to train teacher trainees in implementing and fostering students' metacognitive activities during lessons.

- Vizsgáld meg a megoldásod! Ellenőrizz!
Biztos vagy benne, hogy jó a megoldás? Miért?

- Oldd meg más módszerrel is a feladatot!

- Alkoss a kitűzöthöz hasonló, de könnyebb feladatot! Oldd is meg!

A 6. fejezetben ismertetett órarészlet folytatása

- T: Igen, ez már sok. ... Szóval ez sajnos nem jó. Volt-e, aki másképp csinálta?
- Dóri: Hát, mi ugyanígy indultunk el, csak miután kiszámoltuk, mindegyikből elvettünk 0,8-at.
- Máté: Miért vettél el 0,8-at?
- Dóri: Azért, mert 6,8 jött ki.
- Máté: Értem.
- T: Szóval ti is beszoroztátok 4-gyel az 1,7-et, meg 5-tel, meg 1-gyel. Ugye lett belőle 1,7 sárga, 6,8 kék meg 8,5 piros.
- Dóri: Igen, és akkor mindegyikből elvettünk 0,8-at.
- T: És ha mindegyikből elveszünk... 0,8-at vettetek el?
- Dóri: Igen.
- T: Itt maradt 6, 7,7, 0,9.
- Dóri: És összeadtuk.
- T: És ez így hány liter?
- Dóri: 14,6.
- T: 14,6?
- Dóri: Igen!
- Ádám: Egész jól néz ki!
- T: És ez megtartotta az arányokat? Leellenőriztéték?
- Dóri: Hát nem ellenőriztük le, még addig nem jutottunk.
- T: Mert az a helyzet, hogy ez így nem igaz ám!
- Ádám: Passzolok.
- T: Nem tartja az arányokat. Mert a 6 nem úgy aránylik a 7,7-hez, mint 4 az 5-höz. Például. Nem volt rossz gondolatmenet, de sajnos nem... Volt valami más?
- Máté: Mi úgy csináltuk, ahogy az első csapat.
- Vivi: Mi is úgy csináltuk, mint az első csapat.
- T: Mint az első csapat? Igen? Vivi?
- Vivi: Én külön megnéztem magamnak. Azt néztem, hogy ugye a raktárban vannak a festékek.
- T: Igen,
- Vivi: Megnéztem, hogy ha mind a 2 liter sárgát felhasználjuk, akkor nem jön ki, ha maradnak az arányok, és arra jutottam, hogy ha másfél liter sárgát használunk, akkor hogyha a másfelet megszorozzuk 5-tel, akkor 7,5 jön ki a pirosra, és ha 4-gyel, akkor meg 6 a kékre. És hogyha azokat összeadjuk, akkor 14 jön ki.
- T: Vivi úgy gondolkodott, hogyha van ez a 17 liter festékünk, és megnézte, hogyha ebből mind a 2 liter sárgát felhasználjuk, akkor azt meg tudjuk-e tenni. Nos hogyha mind a 2 liter sárgát felhasználjuk, akkor mennyi kéne. Melyik ez, piros talán?
- Ádám: Igen.
- T: A pirosból 10 liter kéne, ez nem jó.
- Vivi: És ezért megpróbáltam 1,5-tel.
- T: És ezért Vivi megpróbálta 1,5-tel.
- Vivi: Az 1,5 az 1 ...
- T: Igen, akkor úgy okoskodott, hogy megnézi 1,5-tel. Hogyha 1,5 sárgát használok fel, akkor mennyi pirosra és kékre lenne szükség?

Vivi: És akkor az arányok szerint beszoroztam.
T: Igen. És akkor mennyi kék meg piros?
Vivi: Kékből 6, ami a maximum, és a pirosból pedig 7,5. És ezt összeadtam
Dóri: Hogy jött ki?
T: Vivi úgy gondolkodott, hogy megnézte, hogy maximálisan mennyi festéket tud felhasználni. Mivel a sárgából van a legkevesebb, megnézte, hogy fel tudjuk-e használni mind a 2 liter sárgát. De arra jutott, hogy nem tudjuk felhasználni, mert akkor pirosból 10 liter kéne.
Dóri: Ja, értem!
Pisti: Én úgy csináltam, tanárnő, hogy megvoltak az arányok és megvolt az, hogy maximum hány liter festékem van. Mindegyik színből. És elosztottam azt, hogy hány liter festékem van az arányával, és így kijött mindegyikhez egy szám. Az 1,5 az 1,8 és 2, és a legkisebbet vettem belőle, és így kijött ugyanúgy a másfél, hogy annyival kell beszorozni.
T: Ez is egy jó gondolat! Érdekes. ... Érthető volt, hogy hogy jött ki ez a megoldás? És ez hány liter festék összesen?
Pisti: 14!
Dóri: Helyett ... 15.
Ábel: De hogy írjuk fel így ... egyenletbe?
T: Ha csak felírod, hogy 15, arra is kapsz pontot. A kompetenciamérésen mindenre kapsz pontot.