

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Matematikai kompetenciák vizsgálata, értékelése, fejlesztése a középiskolai matematikaoktatásban

Téglási Ilona

Témavezető: Dr. Czeglédy István



DEBRECENI EGYETEM
Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2015

Hipotézisek, rövid áttekintés

Dolgozatomban a középiskolai korosztály matematikai kompetenciáinak fejlettségét és a hagyományos iskolai teljesítményértékelést hasonlítom össze. Olyan mérési módszert szeretnék kidolgozni, amelynek segítségével vizsgálni lehet a középiskolai tanulók matematikai kompetenciáit a hagyományos teljesítményértékeléssel összehasonlítva. A következő kérdésekre szeretnék választ kapni:

1. Milyen összefüggés van a matematikai teljesítmény és a matematikai kompetencia fejlettsége között?
2. Hogyan lehet a kettőt összehasonlítani?
3. Milyen következtetéseket lehet levonni az összehasonlításból a tanulók számára a fejlesztendő területek meghatározása érdekében?
4. Hogyan lehet az iskolai értékelésben figyelembe venni a tanulók matematikai kompetenciájának fejlettségét?

A kérdésekkel kapcsolatos hipotéziseim a következők:

1. A matematikai teljesítmény növekedése a matematikai kompetencia fejlettségével korrelációban áll.
2. A matematikai teljesítmény és a kompetencia mérésére kidolgozott hányados alkalmas a tanulók matematikai teljesítő képességének, potenciáljának mérésére.
3. A matematikai kompetencia mind tartalom központú, mind tevékenység alapú, problémacentrikus tanítási stratégiákkal fejleszthető.
4. Új típusú, kompetenciákra fókuszáló szemlélet segít meghatározni a tanárnak a tanulók erősségeit, gyengeségeit, a fejlesztendő területeket.

A feltett kérdések megválaszolásához és a hipotézisek igazolásához először egy általános áttekintést adok a matematikai kompetencia értelmezéséről, a kompetencia alapú oktatás koncepciójáról, annak alapgondolatától a bevezetésig. Ezután ismertetem azt a felmérést és kutatást, melyet a kérdések megválaszolásához végeztem négy középiskolai évfolyam összesen 278 tanulóján. Évfolyamonként egy-egy 5 feladatból álló feladatlapot készítettem és oldattam meg a tanulókkal. Vizsgáltam a feladatokra adott megoldásaikat mind a hagyományos matematikai teljesítmény, mind egy újfajta kompetenciaértékelés szerint. Az eredményekből megállapítottam egy olyan értéket (hányadost), amely szándékaim szerint jól modellezi a tanulók teljesítményének és képességeinek viszonyát. Feltevésem, hogy a kétféle megközelítés egymással korrelációban áll, és a matematikai kompetenciák fejlettségének növekedése a teljesítmény növekedését vonja maga után.

A kétféle értékelés összehasonlítását két osztály (11. és 12. évfolyam) négy témazáró dolgozatánál is elvégeztem. Ennek célja, hogy megmutassam, a kidolgozott mérési módszer hogyan alkalmazható az iskolai oktatásban, és milyen egyedi következtetéseket lehet levonni belőle.

Véleményem szerint a kompetencia alapú oktatási modell bevezetésével át kell alakulnia az iskolai értékelési rendszernek is, mely figyelembe veszi nem csak a teljesítményt, hanem a kompetenciát is. Dolgozatom további részében néhány példát szeretnék bemutatni arra, hogyan lehet a tanulók írásos munkáiból következtetni a matematikai kompetenciákra.

Végezetül néhány következtetést fogalmazok meg a lehetséges fejlesztési irányokról.

A dolgozat egy hosszú távú kutatás kezdetét jelenti. Célja elsősorban a problémák feltárása és olyan vizsgálati módszer kialakítása, mely a közoktatás körülményei között is jól alkalmazható. A fejlesztési módszerek kipróbálása, és azok eredményességének kimutatása további vizsgálatokat igényel, mely túlmutat jelen dolgozat keretein.

1. A vizsgálatok célja, mérési módszere

Dolgozatom vizsgálatainak egyik célja az volt, hogy kimutassam a kapcsolatot matematikai teljesítmény és a matematikai kompetenciák fejlettségének szintje között. Ennek érdekében 278 középiskolai tanuló (9-12. évfolyam) által megoldott feladatlapot értékeltem a matematikai teljesítmény illetve a matematikai kompetencia alapján. Az értékeléshez a teljesítmény esetében az érettségi dolgozatok pontozási útmutatójának megfelelő módszert alkalmaztam, a kompetencia értékelésében pedig dr. Czeglédy István módszerét [2].

A matematikai kompetencia, mint az első fejezetben kifejtem, nagyon összetett fogalom. Nehéz olyan szempontrendszert találni, mely lefedi a teljes spektrumát. Az bizonyos, hogy míg a teljesítmény értékelésnél a „tudni mit” jellegű ismeretet értékeljük elsősorban, a kompetencia értékelésénél a hangsúly a „tudni hogyan” jellegű tudáson van. Mivel a kettő egymással átfedésben van, nehezen szétválasztható, ezért nem könnyű megfelelő kérdéseket találni. Igyekeztem olyan módszert keresni, amelyben a lehető legkevesebb közös elem van a teljesítmény értékelés és a kompetenciák értékelése között, annak érdekében, hogy a kétféle értékelés a lehető legnagyobb mértékben elkülönüljön egymástól. A kompetencia vizsgálatát felmérésemben a következő szempontok alapján végeztem:

- a) hozzákezd a feladathoz;
- b) jól értelmezi a feladatot;
- c) van értékelhető a munkájában;
- d) készít hozzá ábrát, táblázatot, rendszerezi az adatokat;
- e) a megoldás szempontjából használható ábrát, táblázatot, rendszerezést készít;
- f) használ (matematikai) jelöléseket;
- g) készít tervet;
- h) tervszerű a megoldása (még ha terve nem volt is);
- i) motivált a feladat megoldására;
- j) indokolja állításait;
- k) keres ok-okozati összefüggéseket, kapcsolatokat;
- l) törekszik zárt formában történő megjelenítésre;
- m) törekszik a teljes megoldásra, választ ad a feltett kérdés(ek)re [2].

Korreláció számítást végeztem a kapott értékekre, és ennek alapján megállapítható, hogy a matematikai teljesítmény és a kompetencia jól korrelál egymással. A kétféle értékelés összehasonlítására bevezettem a P hányadost, mely az elért teljesítmény pontok (T) és kompetencia pontok (K) százalékos eredményeinek hányadosa. A P értékének 1-től való eltéréssel azt próbáltam kimutatni, hogy a tanulók milyen mértékben tudják képességeiket a feladatmegoldások során matematikai teljesítményre átváltani. A vizsgálat eredménye szerint a hányados értéke mind a négy évfolyam esetén enyhe emelkedő tendenciát mutat a jobb iskolai teljesítményt elért tanulók felé. Elvileg a gyenge teljesítmény és gyenge kompetencia pontok hányadosa is közelíthetné az 1-et, ez azonban mégsem volt jellemző a vizsgált tanulók esetében. Ez az emelkedés azt jelenti, hogy a jobb teljesítményt nyújtó tanulók a matematikai készségeiket, képességeiket jobban tudják kamatoztatni, a tényleges feladatmegoldásokban jobb eredményt érnek el, mint a gyengébb iskolai teljesítményt nyújtó tanulók. A magasabb teljesítmény pontok mögött természetesen nem csak a készségek, képességek jelennek meg, hanem a tényszerű, a tananyag elsajátításán alapuló tudás is. Úgy gondolom, a mérés eredményeiből le lehet vonni azt a következtetést, hogy a kompetencia fejlesztését és annak iskolai teljesítményben való megjelenését az ismeretek korrekt elsajátításával, megértésen alapuló tanulással együtt lehet jól fejleszteni. A hiányos tudás gátolja a jó feladatmegoldást akkor is, ha az alapvető matematikai készségeknek, képességeknek birtokában van a tanuló. Másrészt: az értelem nélküli, csak reprodukcióra törekvő tanulási módszerekkel a tanulók nem szerzik meg azokat a képességeket, amelyeknek segítségével a matematikai modellt az

adott szituációra tudják alkalmazni. Más vizsgálatok kimutatták [28], hogy a memorizálás és a matematikai teljesítmény között negatív a kapcsolat. Ez azt jelenti, hogy a tanulási stratégiákban az elaborációs és kontroll módszereket kell erősíteni ahhoz, hogy a matematikai teljesítmény növekedjen. Úgy gondolom, hogy felmérésem azon eredménye, miszerint a P értéke növekszik a jobb teljesítményt nyújtó tanulók felé, hasonló következtetést vonhat maga után: a matematikai kompetencia akkor tud igazán jól működni, ha a tudás megértésen alapul, a készségek, képességek akkor tudnak megnyilvánulni, ha az ismereteket nem csak memorizálással, hanem elaborációs és kontroll stratégiákkal sajátítják el a tanulók.

A második mérés során két osztály (11. és 12. évfolyam) évközi dolgozatainak esetében végeztem el az előzőhöz hasonló kompetenciaértékelést, és vizsgáltam meg a P értékének alakulását. A teljesítményértékelést az osztályt tanító matematika tanárnő végezte, melyen nem változtattam. Ebben az esetben is mind a négy vizsgált dolgozatnál azt az eredményt kaptam, hogy a jobb teljesítményt elért tanulók esetében (itt iskolai dolgozatról lévén szó, a hagyományos 5 fokozatú skálán való értékelés is megtörtént) hasonlóképpen kimutatható a P hányados értékében az emelkedő tendencia. Mivel ezek a dolgozatok egy-egy konkrét témakör záró dolgozatai, ezért itt természetes módon a tananyag elsajátításán volt a hangsúly, míg az előző mérés esetén a kompetencia volt az elsődleges. A felkészülés is eltérő volt az előző méréshez képest: míg ott nem kaptak direkt felkészítést a tanulók a felmérés feladataira, addig az utóbbi dolgozatok minden esetben közvetlenül az adott tananyag tantervben előírt részén, gyakorló és összefoglaló óra után kerültek megírásra. A feladatok összetételében is jelentős különbségek voltak a két mérés között: míg az elsőben főleg gyakorlati élethez kapcsolódó, vegyes témakörökhöz tartozó feladatok szerepeltek, addig itt koncentráltan az adott tananyaghoz kapcsolódó, jórészt hagyományos matematika feladatok szerepeltek. Így természetesen az eredmények jelentős eltéréseket mutatnak mind a teljesítmény, mind a kompetencia pontok tekintetében. Ezért nem meglepő, hogy az általánosabb, több szöveges feladatot tartalmazó, a matematika több különböző területét átfogó feladatok esetén a pontok átlaga alacsonyabb. A különbségek ellenére úgy érzem, sokat mondóak a kapott eredmények.

A dolgozatok esetében a kompetencia pontok viszonylag magas átlaga azt mutatja, hogy a középiskolai tanulmányaik végére a feladatok megoldásához szükséges készségeknek, képességeknek, megoldási technikáknak jórészt birtokában vannak a tanulók. A teljesítményekben megmutatkozó különbségek és a P értékének emelkedése a jobb teljesítmény felé véleményem szerint itt is azt támasztja alá, hogy az értelmes tanulás, és a jól megválasztott tanulási stratégia kulcsfontosságú. Az adott tananyag fogalmainak, összefüggéseinek pusztán memorizációs technikával való elsajátítása nem segíti elő az összetettebb feladatok problémamegoldó gondolkodást is igénylő kidolgozását. Ahhoz, hogy a képességeket, készségeket jól tudják kamatoztatni a megoldás során, szükséges az ismeretek rendszerezése, integrálása, összefüggésekben látása. Az is jellemző, hogy a kompetencia pontok közül a legkevesebbszer a teljes megoldásra törekvés és a tervszerűség jelent meg ezeknél a dolgozatoknál. Ezen javítani a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésével lehet, nagyobb hangsúlyt kell fektetni a Pólya-féle modell matematikatanításban való alkalmazására, a probléma megoldási stratégiák gyakoroltatására. A tanárnak el kell érnie – és ezt csak kitartó, következetes munkával lehet –, hogy a tanulók tudatosan törekedjenek az összetettebb feladatok megoldása során a tervezésre, a tervszerű gondolkodásra. Ez nem csak a matematika feladatok megoldása során hasznosuló képesség, hanem az élet különböző területein előforduló problémák megoldása során is. Ahogy Pólya György mondta: „Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység.” [11]

A két felmérés eredményeinek összehasonlításából további következtetéseket lehet levonni a matematikai kompetencia fejlődéséről a középiskolai tanulmányok során. A 11-12. évfolyamon tapasztalt magasabb kompetencia pontok azt mutatják, hogy a magyar közoktatás szerkezetéhez jobban illeszkedne egy olyan kompetencia felmérés, amely ebben a korosztályban méri a tanulók matematikai kompetenciáját. A tananyag eloszlása, az óraszámok azt mutatják, hogy pl. a PISA felmérés korosztálya esetén (15 évesek) a magyar gyerekeknek átlagosan kevesebb matematika órájuk volt még, mint a hozzánk hasonló szerkezetű országokban [28] (pl. Csehország, Szlovákia, Lengyelország, Németország). Ez azt erősíti, hogy a matematikai kompetencia nálunk a 10-11-12. évfolyamon még jelentősen növekszik – gondoljunk csak arra, melyek azok az új területei a matematikának, amelyek csak ezeken az évfolyamokon kerülnek sorra: másodfokú egyenletek, trigonometria, koordináta geometria, logaritmus, térgeometriai számítások, stb. Ezek a területek még sok új ismerettel, módszerrel, eljárással, fogalommal, algoritmussal, alkalmazási lehetőséggel járulnak hozzá tanulóink matematika tudásához. Úgy gondolom, hosszú távon az lenne az elérendő cél, hogy a *P* értéke az évek során növekedjen, mert ez azt jelentené, hogy a készségek, képességek fejlesztése és a szaktudás növekedése az iskolai teljesítményben is növekedést eredményez. Ennek igazolásához egy hosszabb távú kutatás lenne szükséges.

2. Fejlesztendő kompetencia komponensek

A felmérés egy másik alapgondolata az volt, hogy megvizsgáljam, melyek azok a kompetencia itemek, amelyek a leginkább fejlesztésre szorulnak. A feladatok nagyon különbözők voltak, de a közös értékelési rendszer, az azonos kompetencia itemek miatt alkalmasak arra, hogy kiemeljük a gyengeségeket:

- indoklási képesség (14%)
- terv készítése (15%)
- zárt formában való megjelenítés (15%)
- jelölések használata (24%)
- tervszerűség a megoldásban (26%)
- adatok rendszerezése, alkalmas reprezentáció (ábra, grafikon) (33%)
- teljes megoldásra törekvés, válaszadás a feltett kérdésekre (38%).

Ezek mutatják azokat a kompetencia komponenseket, melyekre nagyobb hangsúlyt kell fektetnünk a tanítás során. Az indoklási képesség fejlesztéséhez a tanult összefüggéseknél nem szabad elhanyagolni a bizonyítások, logikai érvelések megfontolások szerepét, mert azok elfogadása, beépítése a meglévő gondolati struktúrába egyszerre kognitív és szociális tevékenység. A jól felépített ismeretrendszerre az ok-okozati kapcsolatok széles spektruma jellemző, és ez teszi lehetővé a tudás alkalmazhatóságát is [1., 3.]. A tervezés, a tervszerűség, az adatok rendszerezése, a teljes megoldásra törekvés mind a problémamegoldás elemei, lépései. Tehát ebből a felmérésből is kimutatható a problémamegoldó gondolkodás gyengesége, hasonlóan a PISA mérésekből levont következtetésekhez [5., 6.]. A zárt formában való megjelenítésben és a jelölések használatában megmutatkozó hiányosság pedig a matematikai szimbólumok kezelésének gyengeségét mutatják, ami adódhat a szimbólumok túl korai bevezetéséből, a reprezentációs módok nem megfelelő megválasztásából [3., 14.]. A magyar matematikaoktatás hagyományaiban a tárgyi és a vizuális reprezentáció inkább csak az általános iskolában jelenik meg. A középiskolai oktatásban az új fogalmak gyakran egyből szimbolikus módon jelennek meg, ritkán előzi meg a képi, még ritkábban a tárgyi sík. Ez azt eredményezheti, hogy a tanuló a hétköznapi szituációban nehezen ismeri fel a tanult matematikai szimbólumokat, mivel az elsajátítás során nem társult az adott fogalomhoz egy gyakorlati életből vett tárgy, tevékenység, szituáció, illetve egy ábra, grafikon. Sokszor értelem nélkül, a már korábban említett memorizációs módszerrel tanulják meg a gyerekek a

matematikai szimbólumokat, ezért nem ismerik fel a szövegekörnyezetben a megfeleléseket. Ez jelenti egyben a kompetencia komponensek között a modellalkotás gyengeségét, amit a szimbólumok fokozatos, megértésen, különböző reprezentációs szinteken keresztüli bevezetésével lehet kiküszöbölni.

Természetesen azt is megnézhetjük, mely itemek jelentek meg leggyakrabban, tehát melyek az erősségek:

- hozzákezd a feladathoz (86%)
- jól értelmezi a feladatot(72%)
- van értékelhető a munkájában (66%)
- ok-okozati kapcsolatokat, összefüggéseket keres (57%)
- motivált a feladat megoldására (54%)

Ezek az eredmények azt mutatják, hogy a tanulók bíznak abban, hogy meg tudják oldani a feladatot, próbálkoznak, keresik a megoldás lehetőségét akkor is, ha nem tudják azt végigvinni. Ez a megállapítás összecseng a PISA mérések másodelemzésével, amelyre már korábban is utaltam [28], mely szerint a magyar tanulók „matematikai önhatékonysága” magas értékeket mutat a 2003-as és a 2012-es vizsgálatok alapján. Azaz bíznak a saját matematikai képességeikben, és abban, hogy meg tudják oldani az adott konkrét feladatot. Ez pozitív viszonyban van a teljesítménnyel, azonban önmagában nem elegendő a jó teljesítmény eléréséhez, megfelelő tudás, kompetencia is szükséges hozzá. Itt el is jutottunk a motiváció kérdéséhez, melyet az i) itemmel jelenítettem meg az első mérésben. Ennek átlaga 54% volt, tehát a tanulók több mint felénél megfigyelhető volt a feladatmegoldás során, hogy motivációja a megoldásra pozitív: érdekli a feladat, szeretné megoldani, próbálkozik, keresi a megfelelő összefüggéseket (57%), melyekkel eredményt érhet el. Ehhez nyilván hozzájárult a feladatok érdekes szövegezése, olyan szituációk megjelenése, melyek számukra a hétköznapi életből ismerősek lehettek. Nem mindig könnyű azonban olyan valós helyzetet találni, amely egy adott matematikai struktúrát jól leírja. Gyakran találkozhatunk úgy nevezett „álgyakorlatias” problémákkal [32], amelyekben egy ismert matematika feladatra próbálnak „ráhúzni” egy hétköznapi szituációt, de a tanár és a tanuló is érzi, hogy a szituáció erőltetett, a való életben nehezen elképzelhető. Ezt elkerülendő, a tanárnak a gondosan mérlegelnie kell, hogy a kiadott feladat mennyire releváns két szempontból is: hogyan illeszkedik a matematika megfelelő fogalomrendszeréhez (mennyire korrekt matematikailag) és a való élethez (mennyire érthető, ismerős az adott generáció számára). A feladatok motiváló hatása nem elhanyagolható tényező a modern didaktikai kutatások alapján [33]. Az iskolai dolgozatok esetében a teljesítmény motiváció a magyar oktatási rendszer sajátosságainak köszönhetően (folyamatos értékelés) természetes. Ezért ezt a kérdést a második mérés során nem is tudtam vizsgálni. A dolgozatok érdemjeggyel történő értékelése esetén a tanulók számára jellemzően nem kérdés, hogy meg szeretnék-e oldani a kiadott feladatokat, szinte minden esetben hozzákezdtek a feladatokhoz, keresték a megfelelő összefüggéseket, igyekeztek valamilyen értékelhető felmutatni. Hogy próbálkozásaik milyen sikerrel jártak, abban természetesen már jelentős különbségek adódtak, de a külső motivációs tényező ezt a képességet minden bizonnyal kifejlesztette az évek során a magyar közoktatásban szocializálódott tanulóinkban. A jó problémamegoldó gondolkodás elsajátításához azonban nem csak a tesztek, számonkérések során megnyilvánuló motivációra van szükség, hanem a tanulási folyamatban is el kell ezt érni: ez pedig nagyon összetett folyamat, amelynek a következőkben néhány elemét szeretném kiemelni, melyek a kutatásomból következnek.

3. Szemléletváltás a tanulói munkák értékelésében

Dolgozatom másik célja az volt, hogy rávilágítsak, hogyan lehet egy új szemlélettel meglátni a matematikai kompetenciát a tanulók munkáiban. A kvantitatív értékelés mellett, amely a

matematikatanításban a legelterjedtebb, fel szeretném hívni a kvalitatív, kompetencia szemléletű, emellett objektív értékelésben rejlő motivációs lehetőségekre a figyelmet. Ehhez 13 feladat középiskolai tanulók által adott írásbeli megoldását elemeztem a matematikai kompetencia komponenseinek gondolkodási műveletekre való lebontásával. A felmérés kompetencia értékelésében használt itemek tényleges megmutatkozását elemeztem az egyes feladatok megoldásaiban. Több feladatot is az első felmérés megoldásai közül választottam, de volt órai munka, házi feladat és iskolai dolgozat feladata is az elemzettek között. Voltak olyan feladatok is, amelynek két különböző megoldását elemeztem, hogy bemutassam a tanulók gondolkodásmódjának, matematikai kompetenciájuk fejlettségének különbségeit.

Természetesen a felismeréssel nem ér véget a tanár munkája: mindez azt a célt szolgálja, hogy képesek legyünk a tanulókat mind hatékonyabban fejleszteni, képessé tenni őket arra, hogy az iskolai oktatásban és a hétköznapi életben felmerülő matematikai problémákat jó eséllyel helyesen meg tudják oldani. Mivel ma a közoktatásban a különórák lehetősége igen korlátozott, ezt a fejlesztést a tanórákon kell megvalósítani. Olyan módszereket, stratégiákat kell tehát kialakítani, amelyekkel heti 3 vagy 4, negyvenöt perces órában, a kitűzött tananyag megtanításával együtt meg tudjuk ezt valósítani. Ehhez a tanárnak elszántsággal, kitartással és sok kreativitással kell rendelkeznie. A bemutatott tanulói munkák elemzésével arra szerettem volna rámutatni, hogy a matematikai kompetencia fogalmának értelmezésével, elemeinek gondolkodási képességekre, készségekre bontásával hogyan lehet a tanuló kompetenciájának fejlettségi szintjét megállapítani. Ezen kívül az elemzések arra is választ adhatnak a tanárnak, hogy melyek azok a területek, ahol az adott tanuló fejlesztésre szorul, milyen típusú feladatokat érdemes számára kitűzni, hogy a leghatékonyabb legyen a munkánk. Elméletben tudjuk, hogy a tanulók gondolkodásának fejlesztését legjobban adaptívan, az aktuális szinthez igazítva lehet elérni [31]. Azonban itt van egy ellentmondás a tantervekben, többek között a Nemzeti Alaptantervben megfogalmazott közös célok és az oktatás valós színterén az egyéni képességek, készségek, tudásszintek eltérései között. Differenciálás és egységesség ellentmondása ez, amit a tanárnak kell valahogyan feloldani. Véleményem szerint a matematikatanításban az elérendő egységes célokhoz az egyénre szabott fejlesztésen keresztül vezethet az út. Ehhez pedig szükség van a tanulók munkáinak egyedi elemzésére, mert ez által lehetséges az adaptív fejlesztés megvalósítása. Gyakran íratunk tanév elején felmérő dolgozatot a gyerekekkel, hogy megállapítsuk, hol állnak az ismeretek elsajátításában, a korábbi tanulmányaikból mi az, ami tartós tudásként beépült, hogy vannak hiányosságok. Azonban ezek a felmérők szintén a tananyagra koncentrálnak, és nem a készségek, képességek vizsgálatára. Sokkal árnyaltabb képet kap a tanár arról, hogy az adott osztály, csoport milyen szinten áll, miben állnak hiányosságaik, ha a hagyományos teljesítmény értékelés mellett a kompetencia pontok alapján is értékeli a tanulók munkáit. Ennek a szemléletnek a következetes és tudatos alkalmazásával talán megvalósítható a közös célok elérése a differenciálás által. Természetesen ennek bizonyításához olyan hosszú távú kutatásra lenne szükség, mely a középiskola négy évfolyamán keresztül végigkíséri egy osztály matematika tananyagának ilyen módon való tanítását és értékelését, összehasonlítva egy hagyományos módszerekkel haladó osztállyal. Ennek a kutatásnak ez a dolgozat csak az alapjait teszi le, a lehetséges módszereket vázolja fel, hogy a matematika kompetencia alapú oktatását hogyan lehet egy kompetencia szemléletű értékelési rendszerrel kiegészítve hatékonyabban megvalósítani.

4. Javaslatok, további fejlesztési irányok

A kompetencia alapú oktatás bevezetéséhez sok hazai és külföldi didaktikával foglalkozó szakember sokféle szempont alapján, különböző megközelítésekkel járult hozzá. Dolgozatomban én az értékelés szempontjából közelítettem meg a kérdést: hogyan lehet az

iskolai matematikaoktatásban olyan értékelési módszert alkalmazni, amely hatékony segítséget nyújt a matematikatanárnak ahhoz, hogy a tanulók matematikai kompetenciáját fejlessze, és a napi gyakorlatban alkalmazható legyen. Úgy gondolom, a bemutatott mérési módszer alkalmas arra, hogy a matematikatanár árnyaltabb képet kapjon a tanulók matematika tudásáról és képességeiről egyszerre. A kompetencia fogalma nagyon összetett. Dolgozatom elején részletesen tárgyaltam a matematikai kompetencia értelmezését, összetevőit, különböző megközelítéseit. Összegzésképpen megállapíthatjuk, hogy a kompetencia készségek, képességek, szakértelem, tudásbázis, alkalmazható ismeretek összessége együtt. A magyar matematikaoktatás évszázados hagyományain azonban nehezen lehet túllépni: ez a matematikát a tudomány felől közelítve tanítja, és fokozatosan juttatja el a tanulókat az alkalmazáshoz. A matematika tantervünk felépítése gyakorlatilag követi Jerome Bruner tanulásmélettét: a tanítás elsősorban a tudomány fundamentális elveire épít, az alapvető fogalmak, elvek, összefüggések széles skáláját korán bevezeti – a gyerekek gondolkodási fejlettségének megfelelő reprezentációs módon – és a tananyag felépítése spirális [3]. Ezekon az alapokon az oktatáspolitikai az utóbbi évek NAT módosításai során sem változtatott, tehát ilyen körülmények között kell megtalálnunk azokat a lehetőségeket, amelyekkel a feltárt problémák kezelhetők. Ebben a megközelítésben benne rejlik a kompetenciák fejlesztésének lehetősége: a spirális felépítés, a különböző reprezentációs szintek, a rendszerszerű látásmód mind alkalmas arra, hogy az egyre szélesebb szaktudással együtt a készségeket és a képességeket is fejlesszük – magán a tananyag elsajátításán keresztül. Azonban a sok elsajátítandó tananyaghoz viszonylag kevés óraszám társul (összehasonlítva más országok matematika órászámaival), ezért a gyakorlati alkalmazásokra, a problémamegoldás gyakoroltatására sajnos kevés idő jut, illetve sokszor a tanmenet időbeosztásának nyomása miatt elmarad az elmélyítés, az összetett problémamegoldás fázisa. A hazai fejlesztő programok leggyakrabban azt célozzák meg, hogy milyen módszerekkel, technikákkal, feladattípusokkal, munkaformákkal lehet megvalósítani a tanulók matematikai kompetenciájának fejlesztését. Azonban ezek a módszerek gyakran időigényesek, és a gyakorló tanár lassan feloldhatatlan ellentmondásba kerül: hogyan lehet egyszerre elvégezni a tananyagot és fejleszteni a tanulók gondolkodását, problémamegoldó képességét? Hogyan érhető el egyszerre, hogy a kompetenciaméréseken (és esetleg a PISA-mérésen) is jól teljesítsen a tanuló, miközben a tanulmányi eredménye is megfelelő legyen és az érettségien is jó eredményt érjen el? Ehhez a tanár hatékonyságát kell növelni, aminek egyik módja a pontos tervezés, a megfelelő szintű feladatok kiválasztása, a differenciálás. Ehhez nyújthat segítséget az értékelés általam javasolt új szemlélete, amely az eredményesség, a matematikai teljesítmény (a szaktudás) mellett a kompetencia fejlettségét is vizsgálja. Emellett új módszertani repertoárt is ki kell alakítani a matematikatanárnak, hogy óráit minél változatosabban, ugyanakkor szakszerűen, matematikailag korrekt módon tartsa meg.

5. Problémaközpontú és vizuális matematikaoktatás

A módszertani repertoár szélesítésének egyik eszköze lehet a problémamegoldó gondolkodás tudatos fejlesztése: a Pólya-féle modell szélesebb körű alkalmazása a matematikaórákon. Sok didaktikai kutatás foglalkozik ezzel a témával, a Pólya-modell továbbfejlesztésével [34]. Schoenfeld a Pólya-modell kiegészítéseként fontosnak tartja a problémamegoldásban a következő négy területet: eredetek, heurisztika, kontroll és hozzáállás. Eredetek alatt érti az elméleti alapokat, a tanulók matematikai ismereteit, amelyek a problémamegoldás során alkalmazásra kerülnek. Ehhez nem kell sokat hozzátennünk, hiszen a tananyagunk felépítése is ilyen szemléletű: először megtanítjuk a fogalmakat, eljárásokat, algoritmusokat, rutinokat. Természetesen ennek módja, reprezentációja a korosztálytól függ. Alacsonyabb évfolyamokon ebbe beleértjük a szemlélet alapján elfogadott állításokat, összefüggéseket is.

Majd a gyakorlás során ezek fokozatosan nehezedő alkalmazására kerül sor. A heurisztikus módszereket a problémamegoldás során sajátítják el a tanulók, mint a problémamegoldás fázisait: ábra, terv készítése, adatok kigyűjtése, stratégiák a megoldási tervhez, stb. Ennek erősítését, szélesebb körben való alkalmazását a kompetencia pontok elemzése is alátámasztja: gyakran okozott gondot a tervezés hiánya, a jelölések hiánya, a tervszerűség a megoldásban. A kontroll területén fejlesztésre szorul a zárt formában való megjelenítés, valamint a gyakran elhanyagolt ellenőrzés, diszkusszió, más megoldás keresése, általánosítás. Ezekhez természetesen az kell, hogy a gyakorló órák fontosságát ne hanyagoljuk el. Ha pedig már a fogalmak elsajátítása során érdekes, gyakorlatias problémák felvetésével indítunk, még több időt tudunk szakítani a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére. Schoenfeldnél a negyedik terület a hozzáállás, amely magában foglalja a tanulók saját magukról alkotott képét, a matematikáról, mint tudományról alkotott képet, a környezetükről, a tananyagról, a feladatról alkotott véleményét. A motiváció kérdése sokrétű, minden gyereket más és más motívumok mozgatnak meg: a tudomány iránti érdeklődés, a kíváncsiság, a hasznosság, a szépség, a tanár tisztelete, stb. – ezeket lehetne még sorolni [1]. Mai világunkban a tanulókat olyan sok és sokféle inger – főleg vizuális inger – éri nap mint nap, hogy a matematikatanárnak bizony „pólyai” értelemben nagyon jó kereskedőnek kell lenni, hogy el tudja adni a portékáját. Ezért nem szabad lebecsülni az információs technológiák szerepét, egyre szélesebb körben történő alkalmazását a matematikaórákon. Ehhez sok alkalmas honlap, program, segédeszköz áll rendelkezésre, melyek között értelmesen válogatva kell a matematikatanárnak megtalálni a helyes egyensúlyt a tényleges manipulatív tevékenységek és a virtuális világ lehetőségei között.

Dolgozatom befejezésekképpen egy olyan megközelítést mutatom be a matematikai kompetencia fejlesztésének, amely élményt nyújt a tanulóknak, miközben komoly matematikai tartalmakat közvetít és a fejlesztést úgy próbálja meg elérni, hogy a gyerekek nem érzik kényszernek a matematikával való foglalkozást. Az egyik ilyen módszer a vizuális művészeteken keresztül a vezet a matematikához. A vizuális művészetek és a matematika kapcsolata évezredekre visszanyúlik, az ókori egyiptomi és görög művészetekig. Építészetükben, díszítő elemeikben számtalan helyen megjelennek a geometriai formák, az arányok, a mintázatok, a szimmetriák, szimmetriacsoportok, és még folytathatnám a felsorolást. A művészet történetében később is sok olyan festőt, képzőművészt találunk, akiknek munkáiban matematikai rendezőelvek jelennek meg. De megjelenik az összefüggés fordítva is: sok matematikus foglalkozik azzal, hogy a matematikát a képzőművészetek eszközeivel tegye látványossá, illetve megtalálja a kapcsolatot a vizuális szépség és a matematika között. Egy 3 éves nemzetközi projekt során alkalmam nyílt betekinteni ebbe a világba, megismerni olyan matematikusokat, akik a képzőművészetet alkalmazzák matematikai munkásságuk során, és olyan képzőművészeket, akiket megihlettek a matematikai struktúrák. A projekt neve: „Visuality & Mathematics: Experimental Education of Mathematics through Visual Arts, Sciences and Playful Activities”. [36] Célja a matematikaoktatáshoz olyan módszerek, tananyagok, kifejlesztése, amelyek jól beilleszthetők a tananyagba és élményszerű, látványos megközelítéssel próbálják közelebb hozni a matematikát a tanulókhöz. A kifejlesztett tananyagok között egyaránt szerepel manipulatív tevékenységre építő, csoportos, páros illetve projekt munkaformában elkészíthető és informatikai eszközökön, programokon (pl. Geogebra) alapuló megközelítés. A kifejlesztett tananyagokat, módszereket valós iskolai környezetben is kipróbálták – igaz, nem Magyarországon, hanem a projekt célkitűzésének megfelelően Szerbiában -, és erről attitűd vizsgálat is készült [37]. A visszajelzések mindenesetre azt mutatták, hogy a módszer a részt vevő szerb matematikatanárok körében népszerű volt, és a tanulók is kedvelték, szívesebben foglalkoztak ilyen módon matematikával, mint a hagyományos füzet – tábla – tankönyv

módszerrel. A tananyagok, és a kipróbálásuk eredményei elérhetők a projekt hivatalos honlapján: <http://vismath.ektf.hu>, és szabadon felhasználhatók.

6. Záró gondolatok

Dolgozatom befejezéséül egy óra tervét választottam. Bár ez látszólag távolabb áll a dolgozat fő irányvonalától, mégis úgy gondolom, a konkrét megvalósításra adott példa megmutatja, hogyan lehet a tananyagba beilleszthető, sokoldalú fejlesztést lehetővé tevő, változatos tevékenységformákat megvalósító óratervvé alakítani egy ötletet. Ez inspirációt adhat a tanároknak arra, hogy kísérletezzenek, fedezzék fel a logikai játékokban rejlő lehetőségeket, találják meg azt az évfolyamot és témakört, ahol korrekt módon beépíthető. Úgy gondolom, a matematika kompetencia alapú oktatása nagyon összetett folyamat, amely a tanári kompetenciáknak is magas szintjét kívánja meg: a matematikának, mint tudománynak magabiztos, alapos ismeretét, a matematikatanulás pedagógiai és pszichológiai alapelveinek ismeretét, jó rendszerező és szervező képességet, kreativitást. Széles módszertani repertoár szükséges a mai gyerekek motiválásához és fejlesztéséhez, mely versenyre tud kelni a televízió, az elektronikus játékok, az internet világának csillogásával. A tanári pálya folyamatos fejlődést jelent, soha nem lezárt, mindig új utakat kereső, kipróbáló. Ez a folyamatos fejlődés, ha stabil tudásbázison alapul, hozhatja el az oktatás kívánt fejlődését.

Mottóul választottam egy régi, de sok esetben ma is érvényes nagy pedagógus szavait:

„Akárhonnan nézzük is, didaktikánknak az legyen a célja, hogy kifürkésszük és felkutassuk az oktatás gyakorlatát, mégpedig azért, hogy a tanároknak minél kevesebbet kelljen tanítaniuk, ugyanakkor a diákoknak minél többet kelljen tanulniuk. E didaktika jegyében az iskolákban legyen egyre kisebb a zűrzavar, ámde legyen egyre nagyobb a szabadság, az öröm, és minderre a valódi fejlődés nyomja rá a bélyegét.”(Comenius, 1657)[41]

Examination, Evaluation and Development of Mathematical Competences in Secondary School Mathematics Education

Author: Iona Téglási

Mentor: Dr. István Czeglédy

Hypotheses, short summary

In my dissertation I would like to compare the advancement of mathematical competences and the traditional school evaluation of mathematical achievement of secondary school students. I would like to develop a measurement method, in which we can examine the secondary school students' mathematical competences in comparison with the achievement. I would like to find the answer to the following questions:

1. What is the connection between mathematical achievement and the advancement of mathematical skills and abilities?
2. How is it possible to compare them?
3. What conclusions can we draw from the comparison to define the areas of further development for the students?
4. How is it possible to take into account the advancement of mathematical competences in school evaluation?

My hypotheses regarding the questions above are:

1. The growth of school achievement is in correlation with the advancement of mathematical competences.
2. The defined quotient of the mathematical achievement points and the competence points is suitable to measure students' mathematical capacity, potential.
3. We can develop mathematical competences with content based teaching methods as well as activity and problem based teaching strategies.
4. A new point of view, focusing on the competences helps the teacher to find out the students' strengths and weaknesses and to define the fields of development.

To find the answers to these questions and to prove the hypotheses, first I give a general review of the interpretation of mathematical competences, the conception of competence based education from the principles to the introduction. Then I present the survey and research carried out with 278 secondary school students of four grades to answer the hypotheses. I prepared tests with 5 exercises for each grades. I examined the students' solutions according to the traditional school evaluation methods as well as to a new kind of competence evaluation method. From the results of the two different evaluations I defined a value (a quotient), which can model the connection between the students' achievement and competences. According to my assumptions, the two different types of approach is in correlation, and the development of mathematical competences implies the growth of achievement.

I have carried out the above mentioned comparison of the two different types of evaluations also for four school tests of two classes of grades 11 and 12. The aim of this second research is to show how the elaborated evaluation method can be used in school situations, and what conclusions can be drawn from this for some students.

With the introduction of competence based education the school evaluation system should also be transformed so as to take into account the competences as well as the achievement.

Henceforth some examples are represented to show how students' mathematical competences can be concluded from their written works.

Finally I draw some conclusions concerning the possible ways of development.

The present work is only the beginning of a long research. The main goal is to reveal some problems and to develop a new examination method, which can also be used in the present circumstances of public education. Testing the development strategies, and the demonstration of their results need further research, which is beyond the frames of the current work.

1. The aims of the survey and the measurement methods

One important aim of my dissertation was to show the relation between the mathematical achievement and the level of development of the mathematical competences. For the sake of this I presented a survey with 278 secondary school students (9th to 12th grades) which I evaluated according to the mathematical achievement and also mathematical competences. For the achievement evaluation I used the methods and viewpoints of the evaluation instructions of the maturity, and for the competence evaluation I used dr. István Czeglédy's method [2].

The mathematical competence, as I explain in the first chapter, is a very complex concept. It is hard to find a system of standpoints, that cover the whole spectrum of it. It is true, that while we evaluate the achievement, we mainly measure the „know what”-type knowledge, and while evaluating the competences we emphasis on the „know how”-type knowledge. These to types of knowledge overlap each other, so it is hard to find the appropriate questions how to measure competences. I tried to find a method, in which the least common elements are in the two types of evaluations, so that I can separate them the most. In my survey I evaluated the competences according to the following points of view:

The student

- a) starts the exercise;
- b) interprets the exercise correctly;
- c) makes something valuable;
- d) draws figures, makes tablets, systematizes the data;
- e) the figures, tablets, systematization are suitable for the solution;
- f) uses mathematical symbols;
- g) makes a plan;
- h) the solution is purposeful;
- i) motivated to solve the exercise;
- j) gives reasons to his/her statements;
- k) looks for causal relations, connections;
- l) strive to represent the solution in closed formulae;
- m) strive to full solution, answers the questions of the exercise.

I identified the relevant items to each exercises of the survey and gave 1 or 0 points whether it appeared in one's solution or not. I compared the two different evaluations, and found correlation between the mathematical achievement and the competence points ($r \approx 0,8$). For a better comparison of the two evaluation systems, I defined the quotient P , which is the quotient of the percentge of the achievement points (T%) and the percentge of the competency points (K%). It is a kind of „potential”, that shows the „mathematical productivity” of the students. With examining the difference between P and I , I tried to explain how the students can use their skills and abilities during solving the exercises, and how they can change them to achievement. According to the results of my survey, on all grades the degree of the quotient shows increasing tendency to the students, who reached better achievement points. Theoretically, it could have been, that with weak achievement

points and weak competence points the quotient P reaches 1, but it was not characteristic in my survey. The increasing of P to the better achievement points means, that the better students in mathematics can make better use of their mathematical skills and abilities in concrete problemsolving situations than the weak students. So behind the higher achievement points there are not only skills and abilities, but also mathematical facts and concepts, the theoretical mathematics knowledge. I think from the results of the survey we can come to the conclusion, that the development of mathematical competences and the appearance of them in school achievement could be reached by correct attaining of knowledge and learning based on understanding. The lack of mathematical knowledge is an obstacle of good problemsolving even if the student has the essential mathematical skills and abilities. On the other hand: learning without sense, striving only to reproductive knowledge, the students cannot attain those skills and abilities with which they can use a mathematical model to a real situation. It is shown in other surveys [28], that there is a negative correlation between learning by pure memorization and mathematical achievement. That means we should strengthen the elaborative and control strategies in learning in order to increase mathematical achievement. By our opinion, the results also conclude that the mathematical competence can work well, if the knowledge is based on understanding, the skills and abilities can appear if the students use more elaborative and control strategies in learning – and that's why the better students' values of P was higher.

In my second survey I made a similar competence evaluation of 4 traditional school tests of two classes (11th and 12th grades), and examined the formation of P . The traditional achievement evaluation of the tests was made by the mathematics teacher of the classes, and I didn't make any change in it. In all four cases I've come to the same conclusion, that the value of P rose to the better school achievement (as they were normal school tests, the students also got marks to the tests). As these were final tests of concrete topics in mathematics syllabus, it was natural, that the main stress was on the usage and knowledge of subject matters, while in the first survey it was on competences. There was also a difference in preparing. While in the first survey the students didn't get any special instructions how to prepare for the survey, in the second case they were well prepared to the normal school test with practising and summerizing lessons. There was also difference between the types of exercises of the two surveys: while in the first there were practical, real-life situation exercises from different fields, in the second one the exercises concentrated on the usage of the concrete topic, and mainly traditionally drafted. So it was natural, that the results showed significant difference in achievement points and means as well as competency points and means. It was not surprising, that in the first survey, with more general, textual exercises that covered different fields of mathematics the average of the points were lower. Despite of the differences we think, the results means a lot.

The relatively higher average of competence points in the school tests shows that students have most of the skills, abilities, techniques, that makes them capable to solve exercises at the last two grades of secondary education. The differences between their achievement points and the rise of P to the better marks also supports the key role of conscious learning and the well chosen learning strategies by our opinion. Purely memorizing the concepts and connections of the given subject matter cannot help on elaborating complex exercises, that needs problemsolving thinking. To be able to gain the „skills and abilities” part of their mathematical competence the students have to systematize, integrate their knowledge, and see the connections. It was also characteristic to these tests, that the least points the students got were in „strive to full solution, give answer to the questions” and „making plan, purposeful solution”. To improve this, we should develop problemsolving skills, and put more stress on using the Pólya method of problemsolving strategies in mathematics education. The teachers should reach – with persistent and consistent work – that the students strive to plan the

solution, and think purposefully during solving complex exercises, problems. They will gain from these skills not only in solving mathematical exercises, but also in solving problems of different fields of life. As George Pólya said: „Solving any problem means to find the way out of a difficult situation, to go round an obstacle, to reach a goal, which we couldn't reach directly. Solving a problem is a typical achievement of sense, and sense is a typical ability of mankind: actually problemsolving is the most typical human activity.” [11]

We can draw other conclusions on the development of mathematical competences during the secondary school studies from the results of the two surveys. The relatively higher competence points on the 11th and 12th grades shows, that an assessment of competences on these grades would fit better to the structure of the Hungarian educational system, than in lower grades. The distribution of subject matters in curriculum and the number of lessons show, that till the age of 15 (the age of PISA measurement) the Hungarian students have less mathematics lessons and less knowledge than in other countries [28] (eg. Czech Republic, Slovakia, Poland, Germany) with similar educational system. In our system, the mathematical competence significantly grows on the 10-11-12th grades – if we just think of the fields of mathematics our students get acquainted with only on these grades: quadratic equations, trigonometry, coordinate geometry, logarithm, spatial geometry, etc. These fields add many new concepts, theories, methods, algorithms, ways of usage to our students' mathematical knowledge. We think that a long term aim of teaching mathematics would be to increase the value of P increase with the ages, because this would mean that the development of skills, abilities and content knowledge together improve the growth of mathematical achievement in school. To prove this, we'd need a long term research of this topic.

2. Components of competences to improve

Another basic idea of the research was to examine which competence items we should improve most. The exercises were different, but the common assessment system, the same competence items makes the surveys suitable to emphasize the weaknesses:

- reasoning ability (14%);
- making plan (15%);
- representation in closed formulae (15%);
- using symbols (24%);
- purposeful solution (26%);
- systematization of data, appropriate representation (figure, graph) (33%);
- strive to full solution, answer to the given question (38%).

These results show us the components of competences we should take more attention on during our teaching practice. To improve reasoning ability we shouldn't neglect the role of proofs and logical reasonings, because the acceptance of theories, connections, and building them into the existing structure is a cognitive and social activity together. The characteristic of a well-built knowledge system is a wide spectrum of casual relations, and that makes the knowledge applicable and practicable [1., 3.]. Planning, purposefulness, systematization of data, giving full solution are the elements and steps of problemsolving. So from our research we can also conclude, as from the PISA researches, the weakness of problemsolving strategies [5., 6.]. The lack of representation in short formulae, using symbols points on the weakness of using mathematical symbolism. This could be deduced from the too early introduction of symbols without finding the appropriate representation mode, and real understanding [3., 14.]. In the traditional Hungarian mathematics education the enactive and visual representations of new concepts appear mainly in primary school. Most of the new concepts in secondary school is taught only with symbolic representation, leaving out the first two steps of interiorisation. The result of this can be, that the students can hardly discover the learnt mathematical

symbols in real life situations, because during the learning procedure the concept hadn't been connected to a real target, situation, activity, or a figure, graph. Students often learn the symbols of mathematical concept with memorization techniques only, and that's why they cannot recognize them in textual situations. This also means the weakness of the model making component of mathematical competences, which could be eliminated by introducing symbols step by step, through different representation levels.

We can also look at those items, that appeared most, so to see what are the strengthens:

- starts the exercise (86%)
- interprets the exercise correctly(72%)
- makes something valuable (66%)
- looks for causal relations, connections (57%)
- motivated to solve the exercise (54%).

These results show that our students believe, they can solve the exercise, try to find the way of solution even if they cannot go through it. Our result harmonizes with the results of a second analysis of PISA 2003 and 2012, I mentioned before [28], according to that the mathematical „self-efficiency” of the Hungarian students is high. That means, they believe in their own mathematical skills and abilities that they can solve the concrete exercise well. The „self-efficiency” is in positive relation with the achievement, but is not enough to reach it: it also needs relevant knowledge and competences. Now we've come to the question of motivation, which I've represented with one item in the evaluation system. The average of it was 54%, so more than half of the students had positive motivation to solve the given exercises: they were interested, tried to find the solution, looked for relations, connections between data (57%) with which they can solve the exercise. The interesting texts of the exercises, the real life situations that were familiar to them naturally contributed to this positive attitude. It is not always easy to find a real situation that describes a mathematical structure correctly. We can often meet in school books so-called „pseudo-realistic” problems [32], in which an „everyday” situation is added to a well-known mathematics exercise, but the teachers as well as the students feel, that the situation is constrained, hardly imaginable to happen in life. To avoid this, the teacher has to consider the exercises according to two viewpoints: if it fits to the mathematical conceptions (it is correct mathematically) and if it is realistic, well-known, understandable to the generation of the students. According to modern didactical researches [33] the motivative effect is an important factor of learning. In the case of school tests the achievement motivation is natural because of the characteristics of the Hungarian educational system (constant evaluation). That was the reason why I couldn't examine this item in the second survey. It was „not a question” to our students that they've tried to solve all the given exercises, if they got marks for the test. They started to work out the exercises, looked for connections, tried to show something valuable in nearly every case. Of course, there were big differences in the results of their trials, but this kind of external motivation is highly improved in students socialized in Hungarian education. To make someone a good problemsolver we need motivation not only when evaluated by tests but also through learning process: and this is a very complex process, from which I would like to show some elements only, concluded from our research.

3. Changing of viewpoints in the evaluation of students' works

Another aim of my paper was to show a new viewpoint to see the mathematical competences in students' works. Beside the general quantitative assessment in mathematics education I'd like to give attention to the motivative effect of a qualitative and also objective, competence based way of evaluation. To show this, I analysed 13 exercises solved by secondary school students according to the components of mathematical competences reduced to thinking operations. In other words, I analysed the solutions of the exercises by the appearance of the

items used in the competence survey. Some of the solutions were chosen from the first survey, but there were also lesson works, homeworks, and exercises from school tests. In some cases I analysed two different solutions of the same exercise to show the difference between the mental abilities, thinking strategies of the students, and the level of development of their mathematical competences

The teacher's task is not only recognizing: we do this, to be able to develop students more effectively, to make them to be able to solve mathematical problems correctly, appearing in school education as well as in everyday life. We have to realize this task in school lessons, as we haven't got too much possibilities of extra time in compulsory education. So we have to develop methods and strategies to realize improvement of competences in 3 or 4 lessons per week together with the teaching of the subject matters set by the curriculum. To reach this, the teachers should be determined, persistent and very creative. By showing the analyses of the students' works I wanted to point on the fact, that with explaining the mathematical competences and reducing its element to mental abilities and skills, we can establish the development level of the students' competences. Furthermore, the analyses gives answer to the teacher what are the fields to be developed, the types of exercises to be given to each student to be more efficient in teaching. Theoretically the best development can be reached by adaptive methods, following the present state of the students' level of competences [30]. But there is a contradiction between curricular aims, among others the common aims of education stated in the National Basic Curriculum and the different skills, abilities, knowledge of the students in practical teaching situations. This is a contradiction of differentiation and unity, which has to be released by the teacher in practice. By our opinion, the way to the common aims in mathematics education goes through improvement specified to students' personal needs. That's why the teachers need to analyse students' works individually, because this would lead to realize adaptive improvement. We often use diagnostical tests at the beginning of the school year to see the level of their knowledge, what knowledge is built in their mind from their previous studies, and what is absent. But these diagnostical tests mainly concentrate on the subject matters and not on analysing the competences. A teacher can get a more detailed view of the present state of the class in progress, what are their strengths and weaknesses, if he/she uses the competence assessment together with the traditional achievement assessment. We can reach the common aims through individual improvement by using these methods consistantly and consciously. To prove this statement we'd need more longterm research which would follow a class through 4 school years using the double assessment in compare with another class using traditional assessment only. Our aim was to settle down the basics of such a research, to sketch out some possible methods, how we can realize a competence based teaching of mathematics combined with a competence view of evaluation for a more effective improvement.

4. Proposals, ways of development

Many researchers from Hungary and abroad added many different views and approaches to the introduction of competence based education. In the present paper we added a new approach from the evaluation point of view: how we can use an evaluation method in mathematics teaching that gives the teachers efficient aid to develop the students' mathematical competences and usable in everyday practice. We think the presented method is suitable for getting a more detailed picture of the knowledge and skills of the students together. The conception of competences is very complex. In the beginning of the paper we've discussed the different interpretations, approaches, and its components in details. Summarizing we can determine that competences are a sum of skills, abilities, expertness of knowledge, attitudes and application of knowledge. It is not easy to step through the century

old traditions of Hungarian mathematics education: we approach teaching from the science, and lead students step by step to application in real life. The building of our mathematics curriculum is based on the learning and teaching theory of Jerome Bruner: teaching is based on the fundamental principles of the science, introduces a wide spectrum of basic concepts early – with a representations appropriate to the students’ mental abilities – and the setting up is spiral [3]. These principles hasn’t been changed too much in the last years’ modifying of the national curriculum, so we should find the possibilities to handle the discovered problems among these circumstances. The possibility of the development of competences lies in this approach of teaching mathematics: the spirality of contents, the different levels of representations, the systematic view of mathematics all appropriate to develop the knowledge (wider and wider) together with the skills and abilities through teaching the given syllabus. But we have a huge amount of contents for a relatively little amount of lessons (comparing with other countries’ number of mathematics lessons). So we have less time to practical applications or problemsolving strategies, respectively, often because of the stress of syllabus we have no time to deal with complex problems or to deepen the knowledge. The development programs in Hungary takes most attention on methods, techniques, types of exercises, working forms to reach competence based teaching. But these methods often need too much time, and the teacher in practice again feels an unreleasable contradiction: how is it possible to teach the syllabus, improve the students’ mental abilities, problemsolving skills together? How is it possible to lead the students to achieve good results both on the competence assessments (even PISA) and get good marks in school and in maturity. The teacher has to raise his/her efficiency, and one way of this is the precise planning of lessons, finding appropriate exercises to each students, differentiation. Our new way of competence assessment gives aid to this work. Besides this teachers need to learn new methods of teaching, to be able to plan his/her lessons more variable, though correctly.

5. Problem centered and visual education of mathematics

One way of widening our methodological repertoire is to develop problemsolving skills consciously with using the Pólya-model on more mathematics lessons. Many didactical researches deal with the further improvement of this model [34]. For example, Schoenfeld added four more areas to complete Pólya’s problemsolving strategies: origins, heuristics, control and attitudes. By origins he means the theoretical background of students’ mathematical knowledge, they apply during problemsolving. We have nothing to add to this – our building up of mathematics curriculum is based on these origins: we teach first the concepts, procedures, routines, algorithms of basic mathematics. Of course, the representations depends on the age of students – so on less grades we count in states and connections accepted upon visual descriptions. And during practising we go on to more difficult application of them. The students learn the heuristic methods together with problemsolving methods, as the phases of problemsolving: drawing figures, graphs, gathering data, finding connections between data, planning the solution, etc. The competence analyses of our research also support the importance of strengthening these skills: our students were weak in planning, purposal solution, using symbols.. On the area of control we have to develop the usage of closed formulae, discussion, find a different solution, generalize the exercise, etc. So we shouldn’t neglect the importance of practising lessons! And we can save time by using interesting, practical situations right at the introduction of a new concept. The fourth area in Schoenfeld’s theory is the attitude, which includes the students’ personal picture of own abilities, picture of mathematics as a science, opinion of his/her environment and the subject matters, exercises. The question of motivation is multiple, every student has his/her own motives: interested in the science, curiosity, utility, beautifulness, respect of the teacher, etc. – we could go one with many more [1]. Nowadays our students get so many different – mainly

visual – stimuli day by day, the teachers of mathematics has to be a very good „merchandiser” in the sense of Pólya, to be able to sell his/her goods, the mathematics. This also means we should take more attention to use modern informatical techniques on mathematics lessons. There are many good webpages, programs, helpful virtual tools, from them we can choose the most appropriate ones to combine with real manipulative activities to find a balance between them.

At the end of my paper I show a special approach of developing mathematical competences, that gives experience to students while mediate serious mathematical contents, and realizes teaching in a way, that the students don't feel to be stressed dealing with mathematics. This special approach leads through visual arts towards mathematics. The connection between mathematics and visual arts goes back to thousands of years, to the ancient Egyptian and Greek works of art. Geometrical structures, mathematical rates, symmetries, symmetry groups, transformations, etc. often appear in their achitecture and ornaments. We can find many artists in the history of fine arts, whose artistry was built upon mathematical principles. But this connection also appears the other way round: many mathematicians tries to show the beautifulness of mathematics with the tools of visual arts, and to find the relation between mathematics and visuality. We participated in a 3-year long international project: „Visuality & Mathematics: Experimental Education of Mathematics through Visual Arts, Sciences and Playful Activities”. [36] The aim of this project was to develop methods and matters to mathematics education that can be applied in teaching practice and tries to get students closer to mathematics with experience centered approach. The developed matters are based on student activity (group-, pair- and project-work), both with real and virtual materials (e.g. GeoGebra). Most of the methods and materials had been tried out in real school situation – unfortunately not in Hungary, but in Serbia – and there was also an attitude research on it [37]. The feedback showed, that this approach was very popular among the Serbian teachers who participated the project, and that teir students also liked it. The details of the project, the materials and researches can be found on the official webpage: <http://vismath.ektf.hu> , and anyone can try them out in use.

6. Final ideas

At the very end of this paper we describe a lesson plan. Though it is a bit far from the main stream of the present research, we think, that an example how to realize a concrete topic shows that the above detailed development can be reached: using a logical game, finding the relevant topic in syllabus, building up a lesson with various activities, realizing multiple development in 45 minutes. This example may inspire teachers to experiments, to discover how we can use logical games correctly in teaching practice. We think, that the competence based teaching of mathematics is a very complex task, requires a high level of pedagogical competences from teachers: a deep knowledge of mathematics, the knowledge of the pedagogical and psychological principles of learning mathematics, good systematization and organization skills and creativity. We need to have a wide range of methodological repertoire to motivate students, and to compete with the interesting world of electronical games, internet, television, etc. The profession of a teacher means constant development of knowledge and methods, always looking for new routes to try them out. This constant development, based on a stabil knowledge, can bring the expected development of education.

Irodalomjegyzék

1. dr. Czeglédy István – dr. Orosz gyuláné – dr. Szalontai Tibor – Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I-II. (főiskolai jegyzet, Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2005)
2. dr. Czeglédy István: Teljeskörű matematika tantárgyi képességmérés Miskolc város általános iskoláinak 5. osztályaiban (in: Miskolci Pedagógus - Miskolc Városi Pedagógiai Intézet folyóirata, 2006. 41.sz.)
3. dr. Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába (egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Bp., 2004)
4. Csapó Benő: A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése (Akadémiai Kiadó, Bp., 2003)
5. Vári Péter szerk.: PISA összefoglaló jelentés, 2000 (Oktatási Hivatal, Bp., 2002)
6. PISA összefoglaló jelentés, 2006 (Oktatási Hivatal, Bp., 2007)
7. PISA összefoglaló jelentés, 2009 (Oktatási Hivatal, Bp., 2010)
8. PISA összefoglaló jelentés, 2012 (Oktatási Hivatal, Bp., 2013)
9. Kompetencia alapú matematika tankönyvek középiskolásoknak (Educatio Kht., 2007.)
10. Pólya György: A gondolkodás iskolája (Gondolat Kiadó, 1977)
11. Pólya György: A problémamegoldás iskolája (Tankönyvkiadó, 1968)
12. Richard Skemp: A matematika tanulás pszichológiája (Gondolat Kiadó, 1975)
13. Falus Iván szerk.: Didaktika (Nemzeti Tankönyvkiadó, 1998)
14. Bruner, Jerome: Az oktatás kultúrája (Gondolat Kiadó, 2004)
15. Czeglédy István: Kompetencia alapú matematikaoktatás (EKF főiskolai jegyzet, 2010)
16. Gardner, Howard: The Unschooled Mind (N.Y. Basic Books, 1991)
17. Niss, Mogens: Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project (http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf), *utolsó letöltés:*
18. Niss, Mogens: Quantitative Literacy and Mathematical Competencies (www.maa.org/ql/pgs215_220.pdf), *utolsó letöltés:*
19. Pléh Csaba: Bevezetés a megismeréstudományba (Typotex Kiadó, 1998)
20. Téglási Ilona: Mathematical Competencies Examined on Secondary School Students (in: Annales Mathematicae et Informaticae, vol. 37, pp.241-257, 2010 – <http://ami.ektf.hu>)
21. *Kulcskompetenciák. Egy kialakulóban lévő fogalom a közoktatásban.* Eurydice, 5. vizsgálat, 2000. október (Key Competencies. A developing concept in general compulsory education. Eurydice, Survey 5. October 2000.)
22. *Az európai oktatási és képzési rendszerekkel kapcsolatos célkitűzések nyomon követésének részletes munkaprogramja* (2002/C 142/01). {Detailed Work Programme on the follow-up of the objectives of education and training systems in Europe (2002/C 142/01).}
23. <http://www.ofi.hu/tudastar/nemzetkozi-kitekintes/egesz-eleten-at-tarto> , *utolsó letöltés:*
24. *Knowledge and Skills for Life. First results from PISA 2000.* Párizs, OECD, 2001d.
25. http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/Information%20brochure/Eurydice_brochure_2011_EN.pdf , *utolsó letöltés:*
26. Csapó Benő szerk.: Az iskolai tudás (Osiris Kiadó, Bp., 1998)
27. Kiss Margit – Mezösi Károly – Pavlik Oszkárné: Értékelés a pedagógiában (FPI, Budapest, 1998)

28. Csullog Krisztina – D. Molnár Éva – Lannert Judit : A tanulók matematikai teljesítményét befolyásoló motívumok és stratégiák vizsgálata a 2003-as és 2012-es PISA-mérésekben; in: Hatások és különbségek – Másodelemzések a hazai és nemzetközi tanulói képességmérések eredményei alapján (Oktatási Hivatal, Budapest, 2014)
29. Téglási Ilona: Appearance of Mathematical Competencies in Student's Solutions (in: Obrozy Matematiky, Fikizy a Informatiky, vol. 42., pp. 27-36., 2013. Bratislava, Szlovákia)
30. Adventures on Paper – Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics – edited by Kristóf Fenyvesi, Ilona Oláhné Téglási and Ibolya Prokajné Szilágyi (Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 2014)
31. M. Nádasi Mária: Adaptivitás az oktatásban (Comenius Bt, Pécs, 2001)
32. Kosztolányi József: A problémamegoldási képességek fejlesztéséről – előadás (Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencia, 2012. Január 20-22., Lőcse, Szlovákia)
33. Józsa Krisztián: Az elsajátítási motiváció (Műszaki Kiadó, Budapest, 2007)
34. Czeglédy István – Hajdú Sándor – Hajdú Sándor Zoltán – Kovács András: Matematika 9-12. Gondolkodni jó! (Műszaki Kiadó, Budapest, 2009)
35. Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 9-12. (Mozaik Kiadó, Szeged, 2007)
36. www.vismath.ektf.hu , utolsó letöltés:
37. Kristóf Fenyvesi - Raine Koskimaa - Ruth Mateus-Berr - Ljiljana Radovic - Djurdjica Takaci - Suncica Zdravkovic - Klelija Zivkovic: Serbian Students' Attitudes towards Mathematics and Mathematical Education Tempus Attitude Survey (TAS) 2013–2014 Report Program (Jyväskylä: University of Jyväskylä, 2014, 172 p.) <https://jyx.jyu.fi/dspace/handle/123456789/44803>
38. Szendrei Julianna: A játék matematikája (Tankönyvkiadó, Budapest, 1987)
39. Sam Loyd's book of tangrams (Dover Publications Inc, London, 2007)
40. Johannes Amos Comenius: Didactica Magna (Seneca Kiadó, Pécs, 1992)

Publikációk és előadások

Cikkek:

1. Ilona Téglási: Mathematical competencies examined on secondary school students in: *Annales Mathematicae et Informaticae*, 37/2010 pp. 241-257 – referált folyóirat, HU ISSN 1787-5021 (Eger, EKF, 2010)
2. Ilona Téglási: Appearance of Mathematical Competencies in Students' Solutions in: *Obrozy Matematiky, Fyziky a Informatiky (Horizons of Mathematics, Physics and Computer Sciences)*1/2013(42) pp. 27-36, ISSN 1335-4981, reviewed in <http://www.zentralblatt-math.org/matheduc> (Nyitra, 2013)
3. Téglási Ilona: Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban in: *Módszertani Közlemények*, 3/2012 pp. 22-29 – a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Kara által kiadott folyóirat, ISSN 2063-3734 (Szeged, 2012)
4. Ilona Oláhné Téglási: Tangram-type games and matchstick puzzles (In: *Adventures on Paper – Math-art activities for experience-centered education of mathematics*, pp. 34-41, ISBN 978-615-5297-25-0, Eger, 2014)
5. Nagyné Fóris Katalin-Oláhné Téglási Ilona: Mestertanárképzés nemzetközi projektben in: *Gyakorlóiskolák V. Országos Módszertani Konferenciája – konferenciakötet* pp.294-297, ISBN 978-963-06-8077-6 (Pécs, PTE, 2009)

Konferencia előadások, absztraktok:

1. *Gyakorlóiskolák V. Országos Módszertani Konferenciája*, 2009. Pécs: Mestertanárképzés nemzetközi projektben (Nagyné Fóris Katalinnal közösen)
2. I.Kárpát-medencei Nemzetközi Módszertani Konferencia, 2010. Kaposvár: Matematikai kompetenciák vizsgálata középiskolai korosztálynál
3. Varga Tamás Módszertani Napok, 2010. Budapest: *Mathematical Competencies Examined on Secondary School Students (English Section)*
4. Varga Tamás Módszertani Napok, 2011. Budapest: *Comments on an Erasmus teacher exchange – what can we learn from the Finnish in teaching mathematics and what can they learn from us? (English Section)*
5. *Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia*, 2011. Szatmárnémeti: Matematikai képességek és iskolai teljesítmény összehasonlítása középiskolai korosztálynál
6. *Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia*, 2012. Lőcse, Szlovákia: Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban
7. *Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia*, 2013. Nagyvárad, Románia: Célirányos és fordított irányú gondolkodás a problémamegoldásban és bizonyításokban
8. *Competence-based education: experiences, problems, solutions (VE Akadémiai Biz. és TEE közös konf.)*, 2014, Veszprém: *Visual Mathematics in International Cooperation (English Section)*
9. *AgriaMédia 2014 konferencia*, Eger: *Vizuális matematika nemzetközi együttműködésben*
10. *Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia*, 2015. Novi Sad, Szerbia: *SoNetTE – Social Network in Teacher Education; Introducing the book „Adventures on Paper”*



Nyilvántartási szám: DEENK/73/2016.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Oláhné Téglási Ilona
Neptun kód: BP0WOI
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű, hazai könyvrészlet(ek) (1)

1. **Oláhné Téglási, I.:** Tangram-type games and matchstick puzzles.
In: Adventures on Paper : Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics. Ed.: Kristóf Fenyvesi, Ilona Oláhné Téglási, Ibolya Prokajné Szilágyi, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 37-44, 2014. ISBN: 9786155297250

Magyar nyelvű tudományos közlemény(ek) hazai folyóiratban (2)

2. **Oláhné Téglási I.:** Logikai játékok szerepe a matematikaoktatásban.
Módszert. Közl. 55, 1-10, 2015. ISSN: 1219-0608.
3. **Téglási I.:** Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban.
Módszert. Közl. 52 (3), 22-29, 2012. ISSN: 1219-0608.

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) hazai folyóiratban (1)

4. **Téglási, I.:** Mathematical competences examined on secondary school students.
Ann. Math. et Inf. 37, 241-257, 2010. ISSN: 1787-5021.

Idegen nyelvű tudományos közlemény(ek) külföldi folyóiratban (2)

5. **Téglási, I.:** Comparing mathematical competences to school achievements in school tests.
Horizons of math., phys. and comp. scien. "Accepted by Publisher" (2016) ISSN: 1335-4981.



6. **Téglási, I.:** Appearance of mathematical competencies in students' solutions.
Horizons of math., phys. and comp. scien. 1 (42), 27-36, 2013. ISSN: 1335-4981.

A DEENK a Jelölt által az IDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2016.03.23.





Registry number: DEENK/73/2016.PL
Subject: Ph.D. List of Publications

Candidate: Ilona Oláhne Téglási
Neptun ID: BP0W0I
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publications related to the dissertation

Foreign language Hungarian book chapter(s) (1)

1. **Oláhne Téglási, I.:** Tangram-type games and matchstick puzzles.
In: Adventures on Paper : Math-Art Activities for Experience-centered Education of Mathematics. Ed.: Kristóf Fenyvesi, Ilona Oláhne Téglási, Ibolya Prokajné Szilágyi, Eszterházy Károly Főiskola, Eger, 37-44, 2014. ISBN: 9786155297250

Hungarian scientific article(s) in Hungarian journal(s) (2)

2. **Oláhne Téglási I.:** Logikai játékok szerepe a matematikaoktatásban.
Módszert. Közl. 55, 1-10, 2015. ISSN: 1219-0608.
3. **Téglási I.:** Matematikai kompetenciák megjelenése a tanulók feladatmegoldásaiban.
Módszert. Közl. 52 (3), 22-29, 2012. ISSN: 1219-0608.

Foreign language scientific article(s) in Hungarian journal(s) (1)

4. **Téglási, I.:** Mathematical competences examined on secondary school students.
Ann. Math. et Inf. 37, 241-257, 2010. ISSN: 1787-5021.

Foreign language scientific article(s) in international journal(s) (2)

5. **Téglási, I.:** Comparing mathematical competences to school achievements in school tests.
Horizons of math., phys. and comp. scien. "Accepted by Publisher" (2016) ISSN: 1335-4981.



6. **Téglási, I.:** Appearance of mathematical competencies in students' solutions.
Horizons of math., phys. and comp. scien. 1 (42), 27-36, 2013. ISSN: 1335-4981.

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

23 March, 2016

