Vizsgálatok speciális Finsler-terekben

Investigations in special Finsler spaces

doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Szilágyi Brigitta

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2004

Tézisek

Thesis

A szerző publikációi

Referált folyóiratban megjelent dolgozatok az értekezés témakörében

[BOSZ] S. Bácsó, Á. Orosz, B. Szilágyi: *On the rectifiability condition of a second order ordinary differential equation*, Acta Math. Acad. Ped. Nyíregyháza, (2001), 127-129.

[BSZ] S. Bácsó, B. Szilágyi: *On a weakly-Berwald Finlser space of Kropina type*, Mathematica Pannonica 13/1, (2002), 91-95.

[Szi1] B. Szilágyi: *Some problems in Wagner spaces with vanishing Douglas tensors*, Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering, 47/1, (2003), 75-80.

[Szi2] B. Szilágyi: *Projective Randers change of $^*P$-Finsler spaces*, Acta Univ. Palack. Olomounc, Fac. Rerum Natur. Math. 42, (2003), 105-109.

[BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Matematicae, (2003), 30. 23-30.

Előadások az értekezés témakörében

Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2000. július 25-30.
Wagner spaces with vanishing Douglas tensor (poszter szekció)

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézet Geometria Tanszékének szemináriuma, 2002. november 5. és 2002. november 12.
Speciális Finsler-terek (előadás)

Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2003. augusztus 25-29.
Projective Randers change of $^*P$-Finsler spaces (előadás)

[S] J. L. Synge: *A generalization of the Riemannian line-element*, Trans. Amer. Math. Soc. 27, (1925)

[She3] Z. Shen: *Differential geometriy of spray and Finsler spaces*, Kluwer Academic Press, (2001)

[Shi1] C. Shibata: *On Finlser spaces with Kropina metric*, Rep. on Math. Phys. 13, (1978), 117-128.

[Szi1] B. Szilágyi: *Some problems in Wagner spaces with vanishing Douglas tensors*, Periodica Polytechnica, Mechanical Engineering, 47/1, (2003), 75-80.

[Szi2] B. Szilágyi: *Projective Randers change of* $^*P$*-Finsler spaces*, Acta Univ. Palack. Olomounc, Fac. Rerum Natur. Math. 42, (2003), 105-109.

[T] J. H. Taylor: *A generalization of Levi–Civita's parallelism and the Frenet formulas*, Trans. Amer. Soc. 27, (1925), 246-264.

[W1] V. V. Wagner: *Über Berwaldsche Räume*, Rec. Math. (Mat. Sb.) (2)3, (1938), 655-662.

[W2] V. V. Wagner: *On generalized Berwald spaces*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 39, (1943), 3-5.

[We] H. Weyl: *Zur Infinitesimalgeometrie*, Göttinger Nachrichten, (1921), 99-112.

Bevezetés

Bár az általánosított metrikus differenciálgeometriai – később Finsler – tér fogalmát Riemann [R] 1854-ben vetette fel abban a híres habilitációs előadásában, amelyben az n-dimenziós tér metrizálhatóságának különböző módozatait vizsgálta, a Finsler-geometria számos, figyelemre méltó eredménye az utóbbi évtizedekben született meg. Riemann a fő hangsúlyt arra a metrikára helyezte, amely egy pozitív definit kvadratikus forma négyzetgyökeként áll elő, de lehetséges általánosításképpen megemlítette azt a metrikát is, amit ma Finsler-metrikaként ismerünk.

A Finsler-téren lényegében minden pont érintőterében egy-egy általánosított normafüggvény van megadva, amely nem szükségképpen származik belső szorzatból. Meglepő módon a Riemann-tér ilyenfajta általánosítása több, mint hatvan évre feledésbe merült. Riemann maga, bonyolultságra hivatkozva vetette el az – ekkor még „általánosított metrikának" nevezett – új lehetőséget.

Az első fontos eredmény ebben a témakörben Paul Finsler [F1] 1918-ban megjelent dolgozata (innen származik a Finsler-tér elnevezés is, amelyet 1927-ben J. H. Taylor vezetett be). Finslert a tanára, Carathéodory által bevezetett és a variációszámítás paraméteres problémáinak megoldására alkalmazható új geometriai módszerek ihlették, amelyek alapjaként az indikátrix fogalma szolgált. 1925-ben J. H. Taylor [T], J. L. Synge [S] és L. Berwald [B1], [B2] szinte egyidejűleg kezdte el az elméletnek a tenzoranalízis eszközeivel való vizsgálatát. Elsődleges céljuk a tér geometrizálása, azaz a metrikával összhangban lévő párhuzamosság fogalom, illetve deriválási kalkulus kiépítése volt.

Váratlan és új fordulat ment végbe a Finsler-elmélet fejlődésében 1934-ben, amit É. Cartannak [C1] a Finsler-terekről megjelent értekezése idézett elő. Cartan elmélete egy speciális megközelítésen alapult: olyan teret tekintett, amely nem pontokból, hanem ún. vonalelemekből áll. Ezen a téren már meg lehet adni olyan konnexióparamétereket és így kovariáns deriválást is, amely hasonlít a Riemann-terek elméletéből ismertekhez. (Például igaz a Ricci-lemma, amely a metrikus tenzor kovariáns deriváltjának eltűnését követeli meg és amelyik nem teljesül, ha a teret ponttérként kezeljük.) Bizonyos analógiákra alapozva sikerült meghatározni e geometria jellemző tenzorát, összefüggési együtthatóit, stb.. A Cartan-terek teljes invariánsrendszerének kiszámítását Rapcsák András végezte el, pontosan leírva azokat a tenzorokat, illetve vektorokat, amelyeknek, illetve amelyek kovariáns deriváltjainak függvényeként minden más tenzori differenciálinvariáns előállítható. Sokan tekintették úgy, hogy az elmélet fejlődése ezzel elérte csúcspontját. Számos fizikai probléma vizsgálata esetén azonban sokkal hasznosabb, ha mégis ponttérnek tekintjük a Finsler-teret, másrészt a Cartan-féle megközelítés jelentősen csökkenti a Finsler-elmélet és a variációszámítás kapcsolatát.

A második világháborút követően a Finsler-geometria egy új fejezete kezdődött H. Busemann [Bu1] munkásságával. Busemann célul tűzte ki a „Finsler-geometria erdejének megtisztogatását a tenzorok dzsungelétől", továbbá hangsúlyozta a Minkowski-geometria tanulmányozását a Finsler-geometria minél gyorsabb fejlődése érdekében [Bu2], [Bu3].

Ekkor született meg a Finsler-geometria egyik kitűnő monográfiája H. Rund tollából [Ru].

Már e geometria kiépülésekor is jól megfigyelhető a meglévő geometriákban fennálló összefüggések vizsgálata, általánosítása. Önként kínálkozik az a gondolat, hogy akár a tér metrikus jellegét szem előtt tartva, akár arról lemondva foglalkozzunk a geodetikusok illetve a pályák elméletével. (E két, Riemann-terek esetén szinoním fogalom általánosabb terekben szétválhat.) A geodetikusok és a pályák illetve a geodetikus- és a pályatartó leképezések vizsgálata a Finsler-geometria bármely periódusában időszerűnek bizonyult. J. Douglas pontterek pályáira kidolgozott elméletét – melynek első összefoglalása L. P. Eisenhart: "Non-Riemannian Geometry" [E] című könyvében található – Finsler-terekre Rapcsák András [Rap2], [Rap3] általánosította, aki a pályatartó leképezések számos klasszikus eredményét adta meg. Napjainkban (többek között) Makoto Matsumoto és Bácsó Sándor publikációi világítják meg új és új oldalról ezen leképezések tulajdonságait.

Az utóbbi évtizedekben a Finsler-geometriában számos figyelemre méltó eredmény látott napvilágot, előtérbe került a Finsler-terek kutatása. A teljesség igénye nélkül álljon itt az azidőtájt íródott, kiváló összefoglaló, áttekintő jellegű munkák, monográfiák szerzőinek névsora, akiknek nevéhez egy-egy iskola működése is kapcsolódik: M. Matsumoto [M2], S. S. Chern, D. Bao, Z. Shen, [BCS], [She3]. A valós Finsler-metrikákat vizsgáló írások mellett megszülettek a komplex Finsler-metrikákkal foglalkozó tanulmányok is [AP].

A Finsler-geometria történetét vizsgálva szembeötlő, hogy már a korai eredmények alkalmazásai is milyen hasznosnak bizonyultak a fizikában. Az alkalmazások köre az utóbbi időben jelentősen bővült, a fizika, a biológia mellé egyéb tudományterületek is felsorakoztak [AIM], [AM].

A szerző eredményeit – melyek részben a témavezetővel, Bácsó Sándorral közös munka és tanulás termékei – az 5. fejezet tartalmazza. Így kiemeljük a közönséges másodrendű differenciálegyenletek "kiegyenesíthetőségét" és a kétdimenziós Douglas-terek geodetikusai közötti kapcsolatot taglaló; a Kropina típusú gyengén Berwald-terek létezését vizsgáló publikációkat. Továbbá kiszámoltam a kétdimenziós Wagner-Douglas-terek főskalár-

[HI3] M. Hashiguchi, Y. Ichijyō: *Randers spaces with rectilinear geodesics*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. (Math. Phys. Chem.) 13, (1980), 33-40.

[Iz1] H. Izumi: *On $^*P$-Finsler spaces I, II*, Memoirs of the Defense Academy, 17, (1997), 1-9, 133-138.

[Iz2] H. Izumi: *On $^*P$-Finsler spaces of scalar curvature*, Tensor N. S., 38, (1982), 220-222.

[K] M. S. Knebelman: *Collineations and notions in generalized spaces*, Amer. J. of Math. 51, (1927), 527-567.

[M2] M. Matsumoto: *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Japan, (1986)

[M7] M. Matsumoto: *On Wagner's generalized Berwald spaces of dimension two*, Tensor N. S. 36, (1982), 303-311.

[M15] M. Matsumoto: *Theory of Finsler spaces with (α, β)-metric*, Rep. on Math. Phys. 31, (1992), 43-83.

[M18] M. Matsumoto: *Projective changes of Finsler metries and projectively flat Finsler spaces*, Tensor N. S. 34, (1980), 303-315.

[M20] M. Matsumoto: *Projective Randers change of P-reducible Finlser spaces*, Tensor N. S. 59, (1998), 6-11.

[M21] M. Matsumoto: *Finsler spaces with the hv-curvature tensor P_{hijk} of a special form*, Rep. on Math. Phys., 14, (1978), 1-13.

[MS] M. Matsumoto, H. Shimada:*On Finsler spaces with the curvature tensors P_{hijk} and S_{hijk} satisfying special conditions*, Rep. on Math. Phys., 12, (1977), 77-87.

[R] B. Riemann: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttingen, (1854)

[Rap2] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen metrischer Räume*, Publ. Math. Debrecen 8., (1961), 285-290.

[Rap3] A. Rapcsák: *Über die bahntreuen Abbildungen affinzusammenhängender Räume*, Publ. Math. Debrecen 8., (1961), 225-230.

[Ru] H. Rund: *The differential geometry of Finlser spaces*, Springer Verlag, (1959) [BGYPSZ] S. Bácsó, E. Gyöngyösi, I. Papp, B. Szilágyi: *On some special Finsler metrics in psychometry*, Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Matematicae, (2003), 30. 23-30.

[BM1] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type. A generalization of the notion Berwald space*, Publ. Math. Debrecen 51, (1997), 385-406.

[BM3] S. Bácsó, M. Matsumoto: *On Finsler spaces of Douglas type II., Projectively flat sapces*, Publ. Math. Debrecen 53, (1998), 423-438.

[BOSZ] S. Bácsó, Á. Orosz, B. Szilágyi: *On the rectifiability condition of a second order ordinary differential equation*, Acta Math. Acad. Ped. Nyíregyháza, (2001), 127-129.

[BSZ] S. Bácsó, B. Szilágyi: *On a weakly-Berwald Finlser space of Kropina type*, Mathematica Pannonica 13/1, (2002), 91-95.

[Bu1] H. Busemann: *The geometry of Finsler spaces*, Ball. Amer. Math. Soc. 56, (1950)

[Bu2] H. Busemann: *The foundations of Minkowskian geometry*, Comment. Math. Helvet. 24, (1950), 156-187.

[Bu3] H. Busemann: *The geometry of geodesics*, Academic Press, New York, (1955)

[C1] É. Cartan: *Les espaces de Finsler*, Actualités 79, Paris, (1934)

[D] J. Douglas: *The general geometry of paths*, Ann. of Math. 29, (1927-1928), 143-168.

[E] L. P. Eisenhart: *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. VIII, New York, (1927)

[F1] P. Finsler: *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*, (Disertation Göttingen, 1918), Birkhäuser Verlag, Barel, (1951)

[H2] M. Hashiguchi: *On Wagner's generalized Berwald space*, J. Korean Math. Soc. 12, (1975), 51-61.

[Hi1] D. Hilbert: *Matematische Probleme*, Gött. Nachrichten, (1900), 253-297.; könyv alakjában kommentárokkal ellátva P. Sz. Alekszandrov szerkesztésében: *Problemü Gil'berta*, Nauka, Moszkva, (1969), 29-31.

ját és tanulmányoztam $^*P$-Finsler-terek Randers-transzformációit. Eredményeimet a [BOSZ], [BSZ], [Szi1], [Szi2], [BGYPSZ] dolgozatokban jelentettem meg.

1. Alapvető fogalmak és állítások

Legyen M egy n-dimenziós differenciálható sokaság és $L(x,y)$ egy valós függvény M érintőterén, TM-en. Legyen $x^i = x^i(t)$, $a \le t \le b$ valamely c görbe egy U koordinátakörnyezetbe eső szeletének az egyenlete. Ezen görbedarab s ívhosszát a következő integrál adja meg:

$$s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt\,. \tag{1.1}$$

Definíció: [AIM] Egy a fenti ívhosszfogalommal ellátott M sokaságot egy L alapfüggvényű, n-dimenziós Finsler-térnek mondunk, ha L teljesíti az alábbi feltételeket:

Differenciálgeometriai céljaink érdekében fel kell tételeznünk, hogy L differenciálható x^i-ben és y^i-ben. Hacsak más nem szerepel, legyen L mindig C^∞-osztályú.
Továbbá:

(1) Tetszőleges irányított görbe ívhossza független a paraméter megválasztásától, vagyis L elsőfokú pozitív homogén y-ban.

(2) Az (1.1) egy reguláris variációszámítási problémát eredményez, azaz a

$$g_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}\,, \quad F := L^2/2 \tag{1.2}$$

determinánsa nem zérus.

(3) Tetszőleges $x \in M$ pont T_xM érintőterében van egy olyan T_xM^* tartomány, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- L differenciálható y^i-ben, ha $y^i \in T_xM^*$,
- T_xM^* nem tartalmazza a nullvektort,
- pozitívan kúpszerű tartomány, tehát olyan nem nulla $y \in T_xM^*$ érintővektorokból áll, amelyekre $py \in T_xM^*$ tetszőleges $p > 0$ esetén.

Eképpen $TM^* := \bigcup_{x\in M} T_xM^*$ az L alapfüggvény értelmezési tartománya.

(4) Az L alapfüggvény pozitív értékű T_xM^*-on.

Definíció: [AIM] Az $s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt$ ívhosszintegrál extremálisait a tér geodetikusainak nevezzük.

Egy Finsler-tér geodetikus görbéinek differenciálegyenlet-rendszerét kanonikus paraméter esetén a következőképpen adhatjuk meg:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0\,, \tag{1.3}$$

ahol

$$2G_j = g_{ij}(x,y)G^i(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^j \partial x^i}y^i - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x^j}\,, \tag{1.4}$$

ahol $F(x,y) = \big(L(x,y)\big)^2/2$.

Ha a geodetikusok lokálisan felírhatók – $x^i = x^i(t)$, ahol t paraméter – akkor az (1.3) differenciálegyenlet

$$d^2x^i/dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t)dx^i/dt \tag{1.5}$$

alakot ölt, ahol

$$G^i(x,y) = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^i \partial x^k}y^k - \frac{\partial F(x,y)}{\partial x^j}\right) \qquad \text{és}$$

$$\gamma(t) := (ds^2/dt^2)/(ds/dt)\,.$$

Definíció: [AIM], [She3] Tekintsük az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big)$ valamint az $\bar{F}^n = \big(M^n, \bar{L}(x,y)\big)$ közös alapsokaságú Finsler-tereket. Ha az F^n tér minden geodetikusa egybeesik az $\bar{F}^n$ tér valamely geodetikusával (mint ponthalmazzal) és fordítva, akkor az $L(x,y) \to \bar{L}(x,y)$ megfeleltetést projektívnak nevezzük és azt mondjuk, hogy F^n projektív $\bar{F}^n$-hez.

Legyen $c : x^i = x^i(t)$ az M^n egy olyan görbéje, amely közös geodetikusa F^n-nek és $\bar{F}^n$-nek. Ekkor c egyenletét F^n-ben (1.5) szolgáltatja, míg $\bar{F}^n$-ben

$$d^2x^i/dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t)dx^i/dt$$

alakban írható. Ezért

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t))\,dx^i/dt\,.$$

Mivel a fenti egyenlőségnek bármely x pontban és bármely dx/dt irányban teljesülnie kell, így igaz a következő tétel:

Hivatkozások

[AIM] P. Antonelli, R. Ingarden, M. Matsumoto: *The theory of sprays and Finlser spaces with applications in physics and biology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, (1993)

[AM] P. Antonelli, R. Miron: *Lagrange and Finsler Geometry*, Applications to Physics and Biology, volume 76 of FTPH, Kluwer Academic Publishers, (1995)

[AP] M. Abate, G. Patrizio: *Finsler metrics – A Global approach, with applications to geometric function theory*, Lecture Notes in Mathematics 1591, Springer Verlag, Berlin, (1994)

[Arn] V. I. Arnold: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1983)

[B1] L. Berwald: *Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelism*, Math. Z. 25, (1926), 40-73, 26, (1927), 176.

[B2] L. Berwald: *Parallelübertraung in allgemeinen Räumen*, Atti Congr. Intern. Mat. Bologna, 4, (1928), 263-270.

[B3] L. Berwald: *On Finsler and Cartan geometries III, Two dimensional Finsler spaces with rectilinear extremals*, ann. of Math. 42, (1941), 84-112.

[B4] L. Berwald: *Über Finslersche und Cartansche Geometrie IV. Projektivkrümmung allgemeiner affiner Räume und Finslersche Räume skalarer Krümmung*, Ann. of Math. 48, (1947), 755-781.

[B5] L. Berwald: *Über die n-dimensionalen geometrien konstanter Krümmung, in denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Z. 30, (1929), 449-469.

[B6] L. Berwald: *Über die Beziehungen zwischen den Theorien der Parallelübertragung in Finslerschen Räumen*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 49, (1946), 642-647. = Indag. Math. 8, (1946), 401-406.

[BCS] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen: *An Introduction to Riemann Finsler Geometry*, Springer Verlag, (2000)

1.1. Tétel: *[K] Egy F^n Finsler-tér projektív egy $\bar{F}^n$ Finsler-térhez pontosan akkor, ha létezik olyan $p(x,y)$ elsőfokú pozitív homogén skalármező, amely kielégíti a*

$$\bar{G}^i(x,y) = G^i(x,y) + p(x,y)y^i$$

egyenlőséget. A $p(x,y)$ skalármezőt a projektív transzfomáció projektív faktorának nevezzük.

A projektív Finsler-geometria vizsgálataiban jelentős szerepet kap a J. Douglas által bevezetett

$$D^i_{hjk} := G^i_{hjk} - G_{hj\cdot k}y^i/(n+1) - \big\{G_{jk}\delta^i_h + (h,j,k)\big\}/(n+1) \tag{1.6}$$

tenzor [D] Megmutatható, hogy a Douglas-tenzor invariáns az $L \to \bar{L}$ projektív megfeleltetés esetén, azaz

$$D^i_{hjk} = \bar{D}^i_{hjk}\ .$$

Létezik egy másik invariáns is a projektív megfeleltetéssel szemben, amelyet Riemann-metrika esetén 1921-ben H. Weyl [We] vezetett be, s amely később a Weyl-tenzor elnevezést kapta. E tenzor fogalmának általánosítása Finsler-metrikák esetén J. Douglas [D] és L. Berwald [B3], [B4], [B5] nevéhez fűződik.

Komponensei

$$W^i_{jk} := R^i_{jk} + \big\{y^iH_{jk} + \delta^i_jH_k - \delta^i_kH_j\big\}/(n+1) \tag{1.7}$$

alakúak, ez a Weyl-féle torzió tenzor. Egy másik invariáns tenzor a

$$W^i_{hjk} := H^i_{hjk} + \big\{\delta^i_hH_{jk} + y^iH_{jk\cdot h} + \delta^i_jH_{k\cdot h} - \delta^i_kH_{j\cdot h}\big\}/(n+1)\ , \tag{1.8}$$

amelyet Weyl-féle projektív görbületi tenzornak hívunk.

Ezen dolgozat több eredménye speciális Finsler-terekben realizálódik, ezért szükségünk van a Berwald-, Wagner- és Douglas-terek fogalmának ismeretére.

Berwald 1928-as cikkében [B2] felsorol néhány speciális Finsler-tértípust, ezek között említi az affin összefüggő Finsler-tereket, amelyeket egy tenzoregyenlet segítségével már korábbi munkájában [B1] vizsgál. Bár az affin összefüggő elnevezés magától Berwaldtól ered, Wagner révén [W1] ezeket a tereket Berwald-tereknek hívjuk.

Definíció: [M2] Egy Finsler-teret Berwald-térnek nevezünk, ha a Berwald típusú konnexió $G^i_{jk} = \dot{\partial}_j N^i_k = F^i_{jk} + C^i_{jk|l} y^l$ koefficiensei csak a hely függvényei valamely koordinátarendszerben.

Így a Berwald-tér $B\Gamma$ Berwald-konnexiója hasonlít a lineáris konnexióhoz. Ezesetben a geodetikusok (1.3) egyenlete

$$d^2x^i/ds^2 + G^i_{jk}(x)(dx^j/ds)(dx^k/ds) = 0 \tag{1.9}$$

alakban írható hasonlóan a Riemann-térbeli esethez. Mivel $\dot{\partial}_k G^h_{ij} = G^h_{ijk}$, így a definitív tulajdonság a következőképpen is megfogalmazható:

1.2. Tétel: *[C1], [B6] Egy Finsler-tér pontosan akkor Berwald-tér, ha a Berwald-konnexió G (G^h_{ijk}) hv-görbületi tenzora azonosan zéró.*

1943-ban V. V. Wagner [W2] általánosította a Berwald tér fogalmát és az új tértípust általánosított Berwald-térnek nevezte el. Majd 1975-ben M. Hashiguchi [H2] – a Finsler-geometria mai fogalom- és eszközrendszerét alkalmazva – az itt említésre kerülő definíciókat dolgozta ki és megadta annak szükséges feltételét, hogy egy Finsler-tér általánosított Berwald-tér legyen.

Definíciók: [H2] Vegyünk egy n-dimenziós $L(x,y)$ alapfüggvénnyel ellátott Finsler-teret. Ekkor egy adott T^i_{jk} ferdeszimmetrikus, nulladfokú pozitív homogén Finsler-tenzormező számára egyértelműen létezik egy $C\Gamma(T) = (F^i_{kj}, N^i_k, C^i_{jk})$ Finsler-konnexió, amely teljesíti a következő négy axiómát:

$(\widetilde{C1})$ $C\Gamma(T)$ metrikus: $g_{ij|k} = 0$ és $g_{ij}|_k = 0$,

$(\widetilde{C2})$ a D deflexió tenzormező eltűnik: $N^i_k = g^j F^i_{jk}$,

$(\widetilde{C3})$ a T $(h)h$-torzió tenzormező T^i_{jk} komponenseit az $F^i_{jk} - F^i_{kj} = T^i_{jk}$ különbség adja,

$(\widetilde{C4})$ az S^1 $(v)v$-torzió tenzormező eltűnik, így $C^i_{jk} = C^i_{kj}$.

$C\Gamma(T)$-t általánosított Cartan-konnexiónak hívjuk és koefficiensei a következőképpen adódnak:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} =& \Gamma^{*i}_{jk} - g^{ih} C_{jkm}(C^m_{hr} A^r_{00} - A^m_{0h}) + C^i_{jm}(C^m_{kr} A^r_{00} - A^m_{0k}) + \\ &+ C^i_{km}(C^m_{jr} A^r_{00} - A^m_{0j}) + A^i_{jk},\end{aligned}$$

ahol $(\Gamma^i_{jk}, G^i_k, C^i_{jk})$ a Cartan-konnexió együtthatói és

$$A^i_{jk} = \frac{T_j{}^i{}_k - T^i{}_{jk} + T_{jk}{}^i}{2}.$$

PROPOSITION 5.3 *[Szi2] Let $\bar{F}^n$ be a $^*P$-Finsler space and F^n an arbitrary Finsler space. If there exists a projective Randers change $\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$, then we get the relation (5.12) for tensors $\bar{C}_{ijk}$, P_{ijk} and C_{ijk}.*

From this PROPOSITION 5.3 follows that F^n is C-reducible, than $\bar{F}^n$ is C-reducible, too.

EXAMPLE

It well-known, that a Finsler space induced by a Funk metric is a $^*P$-Finsler space, where: $P_{ijk} = -KLC_{ijk}$ $(K \in \mathbf{R}^+)$ [She3]. If exists a projective Randers change between a $^*P$-Finsler space induced by Funk metric, and an arbitrary Finsler space, then this space necessarily is a P-reducible Finsler space.

Now we put that

$$C_{ijk|0} = P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk}\ ,$$

then we get

$$\bar{P}_{ijk} = t\lambda(x,y)C_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j)\ . \tag{5.9}$$

If $\bar{F}^n$ is a ${}^*P$-Finsler space then we get

$$\begin{aligned}&\bar{P}_{ijk} - \frac{1}{n+1}(\bar{P}_k\bar{h}_{ij} + \bar{P}_i\bar{h}_{jk} + \bar{P}_j\bar{h}_{ki}) = \\ &= \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)\left\{(n+1)C_{ijk} - (C_kh_{ij} + C_ih_{jk} + C_jh_{ki})\right\}\ .\end{aligned} \tag{5.10}$$

Therefore from the structure of the equation (5.10) we have the following theorem:

THEOREM 5.2 *[Szi2] Let F^n ${}^*P$-Finsler space and $\bar{F}^n$ an arbitrary Finsler space. If there exists a projective Randers change $\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$, then we have a (5.10) for tensors $\bar{P}_{ijk}$ and C_{ijk}.*

By virtue of THEOREM 5.2 the above yields two corollaries:

(1) If F^n is a C-reducible space, then $\bar{F}^n$ is a P-reducible space.

(2) If $\bar{F}^n$ is a P-reducible space, then F^n is a C-reducible space.

Next we are concerned with an assumption $\bar{F}^n$ is a ${}^*P$-Finsler space, that is $\bar{C}_{ijk|0} = \lambda(x,y)\bar{C}_{ijk}$. Consequently (5.6) gives

$$\lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} = tP_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j)\ , \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\{(n+1)\bar{C}_{ijk} - (\bar{C}_k\bar{h}_{ij} + (\bar{C}_i\bar{h}_{jk} + (\bar{C}_j\bar{h}_{ki})\} = \\ &= \frac{t}{n+1}\{(n+1)P_{ijk} - (P_kh_{ij} + P_ih_{jk} + P_jh_{ki})\} - \\ &- \frac{r_{00}}{2(n+1)L}\{(n+1)C_{ijk} - (C_kh_{ij} + C_ih_{jk} + C_jh_{ki})\}\ .\end{aligned} \tag{5.12}$$

From (5.12) we obtain following

Egy Finsler-teret általánosított Berwald-térnek mondunk, ha az általánosított Cartan-konnexió bevezethető oly módon, hogy az F^i_{jk} konnexiókomponensek csak a hely függvényei.

Egy adott s $(0)_p$-homogén, kovariáns Finsler-vektormező esetén egyértelműen létezik olyan $W\Gamma(s) = (F^i_{jk}, N^i_k, C^i_{jk})$ Finsler-konnexió, amely kielégíti a $(\widetilde{C1})$, $(\widetilde{C2})$, $(\widetilde{C4})$ axiómákat és $(\widetilde{C3})$ helyett $(\widetilde{C3}^*)$ teljesül:

$(\widetilde{C3}^*)$ $W\Gamma(s)$ ferdeszimmetrikus és s-re igaz a következő összefüggés:

$$F^i_{jk} - F^i_{kj} = \delta^i_j s_k - \delta^i_k s_j\ .$$

$W\Gamma(s)$-t Wagner-konnexiónak nevezzük, komponenseit az

$$\begin{aligned}F^i_{jk} &= \Gamma^{*i}_{jk} + L^2(S^i_{jkl} + C^i_{jm}C^m_{kl})s^l + (y^iC_{jkl} - y_jC^i_{kl} - y_kC^i_{jl})s^l + C^i_{jk}s_0 + \\ &\quad + g_{jk}s^i - \delta^i_k s_j\ ,\\ N^i_k &= G^i_k - L^2C^i_{kl}s^l + y_ks^i - \delta^i_k s_0\ ,\\ C^i_{jk} &= (g^{ir}\dot\partial_j g_{kr})/2\end{aligned}$$

egyenlőségek szolgáltatják, ahol $s^l = g^{lm}s_m$, $s_0 = s_ly^l$, $y_j = g_{jr}y^r$ és S^i_{jkl} a Cartan típusú konnexió S^2 v-görbületi tenzormezőjének komponensei.

Egy Finsler-teret Wagner-térnek nevezünk, ha a $W\Gamma(s)$ Wagner-konnexió bevezethető úgy, hogy az F^i_{jk} együtthatók csak a hely függvényei.

Az Euler-egyenletet alapul véve, a megfelelő átalakítások után az ívhossz-integrál extremálisaira az

$$\ddot{x}^i\dot{x}^j - \ddot{x}^j\dot{x}^i + 2D^{ij}(x,\dot{x}) = 0 \tag{1.10}$$

differenciálegyenletek adódnak, ahol

$$D^{ij}(x,y) = G^i(x,y)y^j - G^j(x,y)y^i\ . \tag{1.11}$$

Definíció: [BM1] Egy Finsler-teret Douglas-térnek nevezünk, ha a (1.11)-beli függvényrendszer y^i-ben harmadfokú pozitív homogén.

Másrészt az előbbi definíció implikálja, hogy egy Finsler-tér pontosan akkor Douglas típusú, ha

$$D^{lm}_{hijk} = \dot\partial_k\dot\partial_j\dot\partial_i\dot\partial_h(G^ly^m - G^my^l) = 0\ .$$

1.3. Tétel: *[BM1] Egy Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas típusú, ha Douglas-tenzora azonosan zérus.*

2. A közönséges másodrendű differenciálegyenletek kiegyenesíthetőségéről

A síkprojektív terek olyan affin pályaterek, amelyeknek pályái egyenesek. Ha azt kérdezzük: melyek azok a Finsler-terek, amelyek síkprojektív térre pályatartóan leképezhetők, akkor Hilbert negyedik problémáját fogalmaztuk meg: melyek azok az alapfüggvények, amelyeknek extremális serege egyenesekből áll [Hi1].

Definíció: [AIM] Egy Finsler-teret egyenes geodetikusokkal rendelkezőnek vagy síkprojektívnek mondunk, ha az alapsokaság lefedhető olyan koordinátakörnyezetekkel, amelyekben minden geodetikus reprezentálható n darab $x^i = x^i_0 + ta^i$ t paraméteres lineáris egyenlettel.

Jól ismert, hogy egy lokálisan Minkowski-tér adaptált koordinátarendszerének értelmezési tartománya által az alapsokaság egy olyan lefedését kapjuk, amelyben az alapfüggvény csak y^i függvénye. Ekkor a G^i mennyiségek eltűnnek és a geodetikusok (1.3) egyenlete $d^2x/ds^2 = 0$-ra redukálódik, azaz a geodetikusok „kiegyenesíthetők". Ezek szerint bármely síkprojektív Finsler-tér projektív egy lokálisan Minkowski-térhez.

Sajnos a síkprojektív tér létezéséhez szükséges eltűnő Weyl-tenzor illetve kétdimenziós esetben a K görbületi tenzor (amelynek komponensei Rund típusú konnexió esetén $K^i_{hjk} = R^i_{hjk} - C^i_{hr}R^r_{jk}$) a számítások szempontjából rendkívül nehézkes és hosszadalmas. Így az alkalmazások szempontjából fontos, hogy lényegesen könnyebben számítható tenzorokat találjunk a már említettek helyett. Ezek az új tenzorok – amelyeket Bácsó Sándor és Makoto Matsumoto vezetett be – az ún. Q-invariánsok segítségével adódnak. Tekintsük az $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big) \longrightarrow \tilde F^n = \big(M^n, \tilde L(x,y)\big)$ projektív megfeleltetést, amely mellett változatlanul maradnak a következő projektív invariánsok:

$$\begin{aligned}
&Q^0\text{-invariáns:} \quad Q^h = G^h - \frac{1}{n+1}Gy^h ,\\
&Q^1\text{-invariáns:} \quad Q^h_i = \dot\partial_i Q^h = G^h_i - \frac{1}{n+1}\big(G_i y^h + G\delta^h_i\big) ,\\
&Q^2\text{-invariáns:} \quad Q^h_{ij} = \dot\partial_j Q^h_i = G^h_{ij} - \frac{1}{n+1}\big(G_{ij} y^h + G_i\delta^h_j + G_j\delta^h_i\big) ,
\end{aligned}$$

ahol $G = G^r_r$, $G_i = G^r_{ri}$ és $G_{ij} = G^r_{rij}$ a hv-Ricci-tenzor Berwald-konnexió esetén.

A Q^2-invariáns kielégíti a következő fontos azonosságokat:

$$Q^h_{ij} = Q^h_{ji} , \qquad Q^r_{rj} = 0 . \tag{2.1}$$

The transformation of the tensor P_{ijk} under a projective Randers change

The transformation of $(v)hv$-torsion tensor $P_{ijk} = C_{ijk|0}$ has been studied by M. Matsumoto [M20]. He considered: The $(v)hv$-torsion tensor $P_{ijk} = C_{ijk|0}$ of F^n is transformed to $\bar P_{ijk} = \bar C_{ijk|0}$ of the form (5.6) by projective Randers change $F^n \longrightarrow \bar F^n$.

$$\bar C_{ijk|0} = tC_{ijk|0} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}\left(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ik}q_j\right) \tag{5.6}$$

where

$$\begin{aligned}
2C_{ijk} &= \partial g_{ij}/\partial y^k ,\\
h_{ij} &= g_{ij} - l_i l_j ,\\
l_i &= \partial L/\partial y^i ,\\
q_k &= r_{0k} - \frac{r_{00}}{2L} + \{\rho_k + (1+t)l_k\} ,\\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j\rho_i + \partial_i\rho_j) - \rho_r F^r_{ij} ,\\
t &= \frac{\bar L}{L} .
\end{aligned}$$

We assume that

$$\begin{aligned}
C_{ijk|0} &= P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \qquad \text{and}\\
\bar C_{ijk|0} &= \bar P_{ijk} = \lambda(x,y)\bar C_{ijk} ,
\end{aligned}$$

that is F^n and $\bar F^n$ are $^*P$ Finsler spaces. Then we have

$$\lambda(x,y)\bar C_{ijk} = \left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j) . \tag{5.7}$$

From this equation we get the following equation

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\left[(n+1)\bar C_{ijk} - (\bar C_k\bar h_{ij} + \bar C_i\bar h_{jk} + \bar C_j\bar h_{ki})\right] =\\
&= \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{L}\right)\left[(n+1)C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\right] .
\end{aligned} \tag{5.8}$$

From (5.8) we get the following

THEOREM 5.1 *[Szi2] Let $F^n = (M^n, L(x,y))$ and $\bar F^n = (M^n, \bar L(x,y))$ be $^*P$-Finsler spaces. If there exists a projective Randers change between F^n and $\bar F^n$, then F^n is C-reducible if and only if $\bar F^n$ C-reducible, too.*

5 Projective Randers change of $^*P$-Finsler spaces

In this chapter we are getting familiar with new special type of Finsler spaces this so called $^*P$-Finsler space introduced by H. Izumi, but first we need to introduce a few definitions.

Definition [M2] A Finsler space of dimension $n > 2$ is called C-reducible, if the C-tensor ($C_{ijk} = \frac{1}{2}\dot\partial_k g_{ij}$) is written in the form

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{kj}C_i\right) , \tag{5.1}$$

where $C_i = C_{ijk}g^{jk}$, $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$ and $l_i = \dot\partial_i L$.

Definition [MS], [M21] A Finsler space of dimension $n > 3$ is called P-reducible, if the $(v)hv$-torsion tensor of $C\Gamma$ is written in the form

$$P_{ijk} = C_{ijk|0} \tag{5.2}$$

or

$$P_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_{k|0} + h_{jk}C_{i|0} + h_{ki}C_{j|0}\right) . \tag{5.3}$$

Definition [Iz1], [Iz2] If a Finsler space satisfies the condition

$$P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \tag{5.4}$$

the space is called a $^*P$-Finsler space.

Definition [M20], [HI3] A change of Finsler metric

$$F^n = (M^n, L(x,y)) \longrightarrow \bar F^n = \left(M^n, \bar L(x,y)\right) \tag{5.5}$$

is called Randers change, if $\bar L(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$, where $\rho(x,y) = \rho_i(x)y^i$ is a differential one-form on M^n.

The change is projective if and only if $\rho_i(x)$ is locally a gradient vector field.

The notion of a Randers change has been proposed by M. Matsumoto, named by Hashiguchi and Ichijyō. According to Hashiguchi–Ichijyō [HI3], a Randers change is projective, if and only if $s_{ij} = (\rho_{i;j} - \rho_{j;i})/2 = 0$, that is $\rho_i(x)$ is locally a gradient vector field and symbols ";" mean the covariant derivatives in F^n with respect to Berwald connection.

Másrészt a Q^2-invariánsból egyszerűen származtatható a

$$D^h_{ijk} = \dot\partial_k Q^h_{ij} \tag{2.2}$$

Douglas-tenzor és egy újabb Q^3-invariáns tenzor:

$$Q^h_{ijk} = \delta_k Q^h_{ij} + Q^r_{ij}Q^h_{rk} - \delta_j Q^h_{ik} - Q^r_{ik}Q^h_{rj} , \tag{2.3}$$

ahol $\delta_k Q^h_{ij} = \partial_k Q^h_{ij} - \left(\dot\partial_r Q^h_{ij}\right)G^r_k$.
A Q^3-invariánsra fennáll a

$$Q^h_{ijk} + (i,j,k) = 0 , \qquad Q^r_{rjk} = 0 \tag{2.4}$$

összefüggés.
Így a $Q_{ij} = Q^r_{ijr}$ Ricci típusú tenzor segítségével két, a projektív Finsler-geometria elméletében (az alkalmazások terén) jelentős tenzort állítanak elő a szerzők [BM3]-ban:

$$\Pi^1\text{-tenzor:}\quad \Pi^h_{ijk} = Q^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_j Q_{ik} - \delta^h_k Q_{ij}\right) , \tag{2.5}$$

$$\Pi^2\text{-tenzor:}\quad \Pi_{ijk} = \delta_k Q_{ij} + Q^r_{ij}Q_{rk} - \delta_j Q_{ik} - Q^r_{ik}Q_{rj} . \tag{2.6}$$

Ezáltal a síkprojektív térre egy – a definícióbelihez képest – új karakterizáló tulajdonságot is ismerünk:

2.1. Tétel: *[BM3] Egy F^n Finsler-tér pontosan akkor síkprojektív, ha az Douglas-tér és teljesül a*

$$(1)\quad n > 2:\quad \Pi^h_{ijk} = 0 \qquad \textit{vagy} \qquad (2)\quad n = 2:\quad \Pi_{ijk} = 0$$

feltétel.

A koordinátatranszformációk vizsgálatát megkönnyíti, hogy a Q^2 invariánsok által meghatározott Π^1 és Π^2 tenzorok csak a hely függvényei egy Douglas-térben. Így elegendő csak az $(x^i) \to (\tilde x^i)$ koordinátatranszformációt tekinteni. Ennek kapcsán a másodrendű közönséges differenciálegyenletek megoldásainak „kiegyenesíthetőségére” jól kezelhető, szügséges és elegendő feltételek adhatók kétdimenzióban [BM3].

V. I. Arnold a differeciálegyenletek geometriai tartalmát vizsgáló könyvében részletesen elemzi a

$$d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$$

másodrendű egyenletet. Többek között azt a kérdést boncolgatja, hogy az egyenlet által az (x, y) síkon megadott kétparaméteres görbesereg kiegyenesíthető-e (áttranszformálható-e egyenessereggé) a sík egy alkalmas diffeomorfizmusával.

Tekintsünk most egy n-dimenziós Finsler-teret! Ennek geodetikusait a már említett

$$d^2x^i/dt^2 = -2G^i(x, \dot{x})$$

differenciálegyenletek szolgáltatják. A fenti egyenlet integrálgörbéit pályáknak nevezzük. [AIM]-ból ismert, hogy ezek az egyenletek a P^n pályateret implikálják, amely projektív az F^n Finsler-térhez, ha P^n egy pályája geodetikus görbéje F^n-nek és fordítva.

Alkalmazva a már említett eredményeket sikerült kiszámítanunk az alábbiakat:

2.2. TÉTEL: *[BOSZ] Douglas-térben a Π_{112} és Π_{212} komponensek a következőképpen állíthatók elő:*

$$\begin{aligned}\Pi_{112} = &-\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + \\ &+ h(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \\ &+ k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{27}g^2(x,y)h(x,y) + \frac{2}{3}g(x,y)k(x,y)h(x,y) - \\ &- \frac{2}{3}f(x,y)h(x,y)k(x,y)\,;\end{aligned} \tag{2.7}$$

Theorem 4.1 *[BM1] A two-dimensional Finsler space is a Douglas space, if and only if the main scalar I satisfies the equation*

$$6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2 \tag{4.5}$$

where $I_2 = I_{,1;2} + I_{,2}$.

Theorem 4.2 *[M7] Two-dimensional Finsler space is a Wagner space if and only if the following equations hold:*

$$\begin{aligned} I_{,1} = I_{;2}s_2\,, \qquad & I_{;2} = -I_{;2}(s_1 + Is_2) \\ &\textit{and} \\ (s_1)_{;2} - s_2 = 0\,, \qquad & (s_2)_{;2} + s_1 + Is_2 = 0\,, \\ (s_1)_{;1} = 0\,, \qquad & (s_2)_{;1} = 0\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Thus there arises an interesting question: Can we give the main scalar of a Wagner space of Douglas type in an exact formula?

Further on we use the following results:

If F^2 is a n-dimensional, projectively flat Finsler space, then the $v(h)$-torsion tensor W^h_{ij} and the projective $v(h)$-curvature tensor D^h_{ijk} are zero identically [B4].

It is a well-known result that the Douglas tensor and Weyl tensor vanish identically in a projectively flat Finsler space [AIM].

M. Matsumoto proved [M18]: $W^h_{ij} = 0$ and $D^h_{ijk} = 0$ imply

(1) $H_{ijk} = 0$ and $K_{ij} = 0$, if the dimension is higher than two.

(2) The two-dimensional case: $H_{ijk} = 0$, where

$$H_{ijk} = \dot{\partial}_k \dot{\partial}_j H_i + G_{jk;i}\,. \tag{4.7}$$

Let us consider a two-dimensional Wagner space with vanishing Douglas tensor with the following assumption $R = 0$.

From $R = 0$ we get $H_i = 0$.

In the case of $n = 2$, from the theorems above we have $G_{jk;i} = 0$.

If we use above results and the Bianchi identity, then the main scalar is written as

$$I = \frac{-(2s_1 + s_{2,1}/s_2) \pm \sqrt{4s_1^2 + 4s_1 s_{2,1}/s_2 + s_{2,1}^2/s_2^2 + 24s_2^2}}{4s_2}\,. \tag{4.8}$$

In general for the main scalar in (4.8), $I_{;2} \neq 0$. Thus we have the following

THEOREM 4.3 *[Szi1] The main scalar of a two-dimensional Wagner space of Douglas type with the assumption $R = 0$ can be given in the formula (4.8).*

Let Ω_{ij} be an $n \times n$ type quadratic skew symmetric matrix, and x^i denote coordinates of a point.

We consider the following vector field $b_i(x) = \Omega_{ij}x^j + c_i$ where c_i are constants. It is easy to understand, that in this special case $\nabla_j b_i + \nabla_i b_j = 0$ and $\nabla_j b_i - \nabla_i b_j \neq 0$. So a Kropina space, which is generated by $b_i(x) = \Omega_{ij}x^j + c_i$ is a weakly-Berwald space, and it is not Berwald space.

4 Wagner spaces with vanishing Douglas tensor

It is natural to expect that Finsler spaces of low dimension have some special properties, as it is so in the Riemannian case.

We study two-dimensional Finsler space and define a local field of orthonormal frame (l, m) called the Berwald frame. The vector fields (l, m) of Berwald frame are given by

$$\begin{aligned} & l^i = \frac{1}{L} y^i \,, \quad l_i = \dot{\partial}_i L \,, \\ & h_{ij} = \varepsilon m_i m_j \,, \quad \varepsilon = \pm 1 \,, \\ & l_i m^j = 0 \,, \quad m_i m^i = \varepsilon \,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

where $h_{ij} = L\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j L$ and $\varepsilon = \pm 1$. (The sign ε is called the signature of F^2.) We obtain from (4.1):

$$\begin{aligned} & g_{ij} = l_i l_j + \varepsilon m_i m_j = l_i l_j + h_{ij} \,, \\ & (m^1, m^2) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(-l_2, l_1) \,, \\ & (m_1, m_2) = \sqrt{|g|}(-l^2, l^1) \,, \\ & g = \det(g_{ij}) = \varepsilon(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

The C-tensor C_{ijk} is written using the frame (l, m) in the following formula

$$LC_{ijk} = I m_i m_j m_k \,. \tag{4.3}$$

The scalar field I is called the main scalar of F^2.

In Chapter 5.3. of the thesis we give the main scalar function of a two-dimensional Wagner space of Douglas type with zero scalar curvature.

In particular the Douglas tensor (D^h_{ijk}) of a two-dimensional Finsler space F^2 can be written in the form

$$3LD^h_{ijk} = -(6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2) m_i l^h m_j m_k \,. \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{212} = & -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}h(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial y} + \\ & + 2k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \\ & + \frac{2}{3}k(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \frac{4}{27}g(x,y)h^2(x,y) + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{3}k(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{9}h(x,y)g(x,y)k(x,y) + \\ & + \frac{2}{9}g^2(x,y)k(x,y) \,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Nézzünk most néhány példát kétdimenziós, síkprojektív Finsler-terekre!

Tegyük föl, hogy F^2 (x, y) síkon megadott geodetikusainak differenciálegyenlete az alábbi öt osztály valamelyikébe tartozik:

(1) $y'' = f(x,y)$;

(2) $y'' = g(x,y)y' + f(x,y)$;

(3) $y'' = k(x,y)(y')^3$;

(4) $y'' = h(x,y)(y')^2$;

(5) $y'' = g(x,y)y'$.

Ekkor a Π tenzor komponensei rendre a következőképpen adódnak:

(1) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,, \quad \Pi_{212} = 0$;

(2) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial y} - \dfrac{1}{3}g(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}$,
$\Pi_{212} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}$;

(3) $\Pi_{112} = 0\,, \quad \Pi_{212} = -\dfrac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2}$;

(4) $\Pi_{112} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}$, $\Pi_{212} = \frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} + h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$;

(5) $\Pi_{112} = \frac{2}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$, $\Pi_{212} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}$.

Következésképpen, F^2 akkor és csakis akkor síkprojektív, ha az előbbi f, g, h és k függvények rendre az alábbiak szerint írhatók:

(1) $f(x,y) = A(x)y + B(x)$;

(2) $f(x,y) = \sigma_1(x)y^3 + \sigma_2(x)y^2 + \sigma_3(x)y + \sigma_4(x)$, $g(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x)$;

(3) $k(x,y) = C(y)x + D(y)$;

(4) $h(x,y) = E(y)x + F(y)$, ahol $dE(y)/dy + \big(E(y) + F(y)\big)E(y) = 0$;

(5) $g(x,y) = \gamma(x)y + \delta(x)$, ahol $\frac{2}{3}d\gamma(x)/dx - \frac{1}{3}\big(\gamma(x)y + \delta(x)\big)\gamma(x) = 0$.

3. Gyengén Berwald Finsler-terek

A dolgozat 5.2. fejezetében a Berwald-terek egy általánosításával ismerkedünk meg. Z. Shen monográfiájában találkozunk a weakly affin spray fogalmával:

Definíció: [She3] Egy sprayt weakly affin spraynek nevezünk, ha a $G_{kl} = G^r_{rkl}$ (hv)-Ricci tenzor azonosan zérus, ahol a (hv) görbületi tenzor a Berwald-konnexió koefficienséből $G^i_{jkl} = \dot\partial_l G^i_{jk}$ formában származtatható.

Ez motivált bennünket egy új, speciális Finsler-tér típus bevezetésére:

DEFINÍCIÓ: [BSZ] Egy Finsler-teret gyengén Berwald térnek mondunk, ha a (hv)-Ricci tenzor azonosan zéró.

Jól ismert, hogy Kropina-térben a $G^i(x,y)$ függvények

$$2G^i = \Gamma^i_{00}(x) - 2\left(F_0 + \frac{\beta E_{00}}{\alpha^2}\right)\frac{y^i}{b^2} - \frac{\alpha^2 F^i_0}{\beta} + \left(\frac{\alpha^2 F_0}{\beta} + E_{00}\right)\frac{b^i}{b^2} \qquad (3.1)$$

alakban írhatók, ahol $\Gamma^i_{ij}(x)$ az $\alpha(x,y)$ Riemann-metrika Christoffel-szimbólumait jelöli [M15], [Shi1].

Consequently G^i_{jkl} of (3.10) is written as

$$\begin{aligned} G^i_{jkl} =& U^i_l E_{jk} + V^i_{kl} E_{j0} + \frac{1}{3} Z^i_{jkl} E_{00} + A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{3} B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0\frac{b^i}{b^2}\right) + (j,k,l) \end{aligned} \qquad (3.11)$$

where (j,k,l) denotes the cyclic permutation of the indices (j,k,l) and

$$\begin{aligned}
K_j &= -b_j + 2\frac{\beta a_{j0}}{\alpha^2} , \\
U^i_j &= \frac{2}{\alpha^2 b^2}(K_j y^i - 2\beta\delta^i_j) , \\
V^i_{jk} &= \frac{4}{\alpha^2 b^2}\left[\left((b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk})\alpha^2 - \frac{4 a_{j0} a_{k0}}{\alpha^4}\right) y^i + K_j \delta^i_k + K_k \delta^i_j\right] , \\
Z^i_{jkl} &= \frac{2}{\alpha^4 b^2}\left\{\left[b_j a_{kl} - \frac{4}{\alpha^2}(b_j a_{k0} + \beta a_{jk}) a_{l0} + \frac{8\beta a_{j0} a_{k0} a_{l0}}{\alpha^4} + (j,k,l)\right] y^i + \right. \\
&\left. + \left[2(b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk} - \frac{4\beta a_{j0} a_{k0}}{\alpha^2})\delta^i_l + (j,k,l)\right]\right\} , \\
A_{jk} &= \frac{2}{\beta}\left[a_{jk} - \frac{a_{j0} b_k + a_{k0} b_j}{\beta} + \frac{\alpha^2 b_j b_k}{\beta^2}\right] , \\
B_{jkl} &= \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{2 a_{j0} b_k b_l}{\beta} - a_{jk} b_l - \frac{\alpha^2 b_j b_k b_l}{\beta^2} + (j,k,l)\right) .
\end{aligned}$$

Therefore from the structure of the equations (3.9) and (3.11) we have the following two theorems:

THEOREM 3.1 *[BSZ] In a n-dimensional Kropina space if $E_{kl} = 0$ then $G_{kl} = 0$ holds good.*

THEOREM 3.2 *[BSZ] In a n-dimensional Kropina space if F_{kl} is not equal to zero, then the (hv)-curvature tensor G^i_{jkl} is not necessarily equal to zero.*

AN EXAMPLE FOR THE WEAKLY-BERWALD SPACE

We give a covariant vector field $\big(b_i(x)\big)$ in an odd-dimensional Euclidean space so that $E_{kl} = 0$ and $F_{kl} \neq 0$ hold good.

We will use the following notations

$$E_{ij} = (\nabla_j b_i + \nabla_i b_j)/2\,, \tag{3.2}$$

$$F_{ij} = (\nabla_j b_i - \nabla_i b_j)/2\,, \tag{3.3}$$

$$F^i_j = a^{ir} F_{rj}\,; \quad F_i = b_r F^r_i\,; \quad F^i = a^{ir} F_r\,, \tag{3.4}$$

$$b_i = a^{ir} b_r\,; \quad b^2 = b^r b_r\,, \tag{3.5}$$

$$E_{0i} = E_{ri} y^r\,; \quad E_{00} = E_{rs} y^r y^s\,, \tag{3.6}$$

$$F_0 = F^r y_r\,; \quad F^i_0 = F^i_r y^r\,, \tag{3.7}$$

where ∇ denotes the covariant derivation of the Levi-Civita connection of $\alpha(x,y)$ and (a^{ij}) is the inverse matrix of matrix (a_{ij}) and the transvection by y^i is denoted by subscript 0.

Using of (3.1) we obtain

$$\begin{aligned} 2G^i_j =& 2\Gamma^i_{j0} - 2\left[F_j + \frac{b_j E_{00} + 2\beta E_{j0}}{\alpha^2} - \frac{2E_{00} a_{j0}}{\alpha^4}\right]\frac{y^i}{b^2} - (2F^i_0 a_{j0} + \alpha^2 F^i_j)\beta + \\ & + \frac{\alpha^2 F^i_0 b_j}{\beta^2} + \left[(2F_0 a_{j0} + \alpha^2 F_j)\beta - \frac{\alpha^2 F_0 b_j}{\beta^2} + 2E_{j0}\right]\frac{b^i}{b^2}\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

After contracting (3.8) by the indices i, j and differentiating this equation by y^k, y^l we get the (hv)-Ricci tensor in the following form

$$\begin{aligned} G_{kl} = -\frac{2(n+1)}{\alpha^2 b^2}\Bigg[& -\left(\frac{b_k a_{l0} + b_l a_{k0} + \beta a_{kl}}{\alpha^2} - \frac{4\beta a_{k0} a_{l0}}{\alpha^4}\right) E_{00} + \\ & + \frac{b_k - 2\beta a_{k0}}{\alpha^2} E_{l0} + \frac{b_l - 2\beta a_{l0}}{\alpha^2} E_{k0} - \beta E_{kl}\Bigg]\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

If we differentiate the connection coefficients G^i_{jk} by y^l we have the (hv)-curvature tensor of Kropina type:

$$\begin{aligned} G^i_{jkl} =& U^i_l E_{jk} + U^i_j E_{kl} + U^i_k E_{lj} + V^i_{kl} E_{j0} + V^i_{lj} E_{k0} + V^i_{jk} E_{l0} + Z^i_{jkl} E_{00} + \\ & + A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + A_{kl}\left(-F^i_j + F_j \frac{b^i}{b^2}\right) + \\ & + A_{lj}\left(-F^i_k + F_k \frac{b^i}{b^2}\right) + B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0 \frac{b^i}{b^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Továbbá

$$E_{ij} = (\nabla_j b_i + \nabla_i b_j)/2\,, \tag{3.2}$$

$$F_{ij} = (\nabla_j b_i - \nabla_i b_j)/2\,, \tag{3.3}$$

$$F^i_j = a^{ir} F_{rj}\,; \quad F_i = b_r F^r_i\,; \quad F^i = a^{ir} F_r\,, \tag{3.4}$$

$$b_i = a^{ir} b_r\,; \quad b^2 = b^r b_r\,, \tag{3.5}$$

$$E_{0i} = E_{ri} y^r\,; \quad E_{00} = E_{rs} y^r y^s\,, \tag{3.6}$$

$$F_0 = F^r y_r\,; \quad F^i_0 = F^i_r y^r\,, \tag{3.7}$$

amelyekben ∇ a Levi–Civita konnexió szerinti kovariáns deriválásra utal, (a^{ij}) pedig az (a_{ij}) mátrix inverze.

Az (3.1) ismeretében adódik a

$$\begin{aligned} 2G^i_j =& 2\Gamma^i_{j0} - 2\left[F_j + \frac{b_j E_{00} + 2\beta E_{j0}}{\alpha^2} - \frac{2E_{00} a_{j0}}{\alpha^4}\right]\frac{y^i}{b^2} - (2F^i_0 a_{j0} + \alpha^2 F^i_j)\beta + \\ & + \frac{\alpha^2 F^i_0 b_j}{\beta^2} + \left[(2F_0 a_{j0} + \alpha^2 F_j)\beta - \frac{\alpha^2 F_0 b_j}{\beta^2} + 2E_{j0}\right]\frac{b^i}{b^2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

összefüggés, amelyből az i és j indexekkel való kontrahálás után kapott kifejezést y^k és y^l szerint deriválva a (hv)-Ricci tenzor

$$\begin{aligned} G_{kl} = -\frac{2(n+1)}{\alpha^2 b^2}\Bigg[& -\left(\frac{b_k a_{l0} + b_l a_{k0} + \beta a_{kl}}{\alpha^2} - \frac{4\beta a_{k0} a_{l0}}{\alpha^4}\right) E_{00} + \\ & + \frac{b_k - 2\beta a_{k0}}{\alpha^2} E_{l0} + \frac{b_l - 2\beta a_{l0}}{\alpha^2} E_{k0} - \beta E_{kl}\Bigg] \end{aligned} \tag{3.9}$$

alakban írható.

Most már a G^i_{jk} konnexiókoefficiensek kiszámolhatóak és a (hv)-görbületi tenzor Kropina-tér esetén

$$\begin{aligned} G^i_{jkl} =& U^i_l E_{jk} + U^i_j E_{kl} + U^i_k E_{lj} + V^i_{kl} E_{j0} + V^i_{lj} E_{k0} + V^i_{jk} E_{l0} + Z^i_{jkl} E_{00} + \\ & + A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + A_{kl}\left(-F^i_j + F_j \frac{b^i}{b^2}\right) + \\ & + A_{lj}\left(-F^i_k + F_k \frac{b^i}{b^2}\right) + B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0 \frac{b^i}{b^2}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

alakot ölt, amely

$$
\begin{aligned}
G^i_{jkl} = & U^i_l E_{jk} + V^i_{kl} E_{j0} + \frac{1}{3} Z^i_{jkl} E_{00} + A_{jk}\left(-F^i_l + F_l \frac{b^i}{b^2}\right) + \\
& + \frac{1}{3} B_{jkl}\left(-F^i_0 + F_0 \frac{b^i}{b^2}\right) + (j,k,l)
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

formában is írható, ahol

$$
\begin{aligned}
K_j &= -b_j + 2\frac{\beta a_{j0}}{\alpha^2}\,, \\
U^i_j &= \frac{2}{\alpha^2 b^2}(K_j y^i - 2\beta\delta^i_j)\,, \\
V^i_{jk} &= \frac{4}{\alpha^2 b^2}\left[\left((b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk})\alpha^2 - \frac{4a_{j0}a_{k0}}{\alpha^4}\right) y^i + K_j \delta^i_k + K_k \delta^i_j\right], \\
Z^i_{jkl} &= \frac{2}{\alpha^4 b^2}\left\{\left[b_j a_{kl} - \frac{4}{\alpha^2}(b_j a_{k0} + \beta a_{jk}) a_{l0} + \frac{8\beta a_{j0} a_{k0} a_{l0}}{\alpha^4} + (j,k,l)\right] y^i + \right. \\
& \left. + \left[2(b_j a_{k0} + b_k a_{j0} + \beta a_{jk} - \frac{4\beta a_{j0} a_{k0}}{\alpha^2})\delta^i_l + (j,k,l)\right]\right\}, \\
A_{jk} &= \frac{2}{\beta}\left[a_{jk} - \frac{a_{j0} b_k + a_{k0} b_j}{\beta} + \frac{\alpha^2 b_j b_k}{\beta^2}\right], \\
B_{jkl} &= \frac{2}{\beta^2}\left(\frac{2a_{j0} b_k b_l}{\beta} - a_{jk} b_l - \frac{\alpha^2 b_j b_k b_l}{\beta^2} + (j,k,l)\right).
\end{aligned}
$$

Így az (3.9) és (3.11) egyenletek struktúráját tekintve a következő két tétel nyert igazolást:

3.1. TÉTEL: *[BSZ] Egy n-dimenziós Kropina-térben, ha $E_{kl} = 0$, akkor $G_{kl} = 0$.*

3.2. TÉTEL: *[BSZ] Egy n-dimenziós Kropina-térben, ha F_{kl} nem azonosan zérus, akkor a G^i_{jkl} (hv)-görbületi tenzor sem szükségképpen zéró.*

Az előbbi tételeket használva egy konkrét példát adunk gyengén Berwald típusú Finsler-térre:

(4) $\Pi_{112} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}\,, \quad \Pi_{212} = \dfrac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} + h(x,y)\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x}\,;$

(5) $\Pi_{112} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{3} g(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,, \quad \Pi_{212} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}\,.$

Consequently, F^2 is projectively flat, if and only if

(1) $f(x,y) = A(x)y + B(x)\,;$

(2) $f(x,y) = \sigma_1(x)y^3 + \sigma_2(x)y^2 + \sigma_3(x)y + \sigma_4(x)\,, \quad g(x,y) = \alpha(x)y + \beta(x)\,;$

(3) $k(x,y) = C(y)x + D(y)\,;$

(4) $h(x,y) = E(y)x + F(y)\,,$ ahol $dE(y)/dy + \big(E(y) + F(y)\big)E(y) = 0\,;$

(5) $g(x,y) = \gamma(x)y + \delta(x)\,,$ ahol $\dfrac{2}{3} d\gamma(x)/dx - \dfrac{1}{3}\big(\gamma(x)y + \delta(x)\big)\gamma(x) = 0\,.$

3 Weakly Berwald Finsler spaces

In Chapter 5.2. of the thesis we consider a generalization of Berwald spaces. We can learn about the definition of weakly affine spray in Z. Shen's monography.

Definition [She3] A spray is called a weakly affine spray if the (hv)-Ricci curvature tensor $G_{kl} = 0$ where $G_{kl} = G^r_{rkl}$, and the (hv)-curvature tensor is given by $G^i_{jkl} = \dot\partial_l G^i_{jk}$.

This definition motivated us to introduce a new special type of Finsler space:

DEFINITION [BSZ] A Finsler space is called a weakly Berwald space if the (hv)-Ricci curvature tensor $G_{kl} = 0$.

It is well-known that in a Kropina space the functions $G^i(x,y)$ are given by

$$
2G^i = \Gamma^i_{00}(x) - 2\left(F_0 + \frac{\beta E_{00}}{\alpha^2}\right)\frac{y^i}{b^2} - \frac{\alpha^2 F^i_0}{\beta} + \left(\frac{\alpha^2 F_0}{\beta} + E_{00}\right)\frac{b^i}{b^2} \tag{3.1}
$$

where $\Gamma^i_{ij}(x)$ denotes the Christoffel symbols of the Riemannian metric $\alpha(x,y)$ [M15], [Shi1].

$$\Pi_{212} = -\frac{1}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}h(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial y} +$$

$$+ 2k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2} + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} +$$

$$+ \frac{2}{3}k(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} - \frac{4}{27}g(x,y)h^2(x,y) + \frac{2}{3}h(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} -$$

$$- \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial k(x,y)}{\partial x} - \frac{1}{3}k(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{9}h(x,y)g(x,y)k(x,y) +$$

$$+ \frac{2}{9}g^2(x,y)k(x,y) \,. \tag{2.8}$$

SOME EXAMPLES

Assume that a two-dimensional Finsler space F^2 on a domain of the (x,y)-plane has the geodesics given by equations:

(1) $y'' = f(x,y)$;

(2) $y'' = g(x,y)y' + f(x,y)$;

(3) $y'' = k(x,y)(y')^3$;

(4) $y'' = h(x,y)(y')^2$;

(5) $y'' = g(x,y)y'$.

The components of the tensor Π are the following in these cases:

(1) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,, \quad \Pi_{212} = 0\,;$

(2) $\Pi_{112} = -\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y \partial y} - \dfrac{1}{3}g(x,y)\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y}\,,$

$\Pi_{212} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2}\,;$

(3) $\Pi_{112} = 0\,, \quad \Pi_{212} = -\dfrac{\partial^2 k(x,y)}{\partial x^2}\,;$

Legyen $\big(b_i(x)\big)$ kovariáns vektormező egy páratlan dimenziós euklideszi térben, ekkor $E_{kl} = 0$ és $F_{kl} \neq 0$. Jelöljön Ω_{ij} egy $(n \times n)$-es, ferdeszimmetrikus, kvadratikus mátrixot, (x^i) pedig egy pont koordinátáit. Konstruáljuk meg a $\big(b_i(x)\big)$ vektormezőt a következőképpen:

$$b_i(x) = \Omega_{ij}x^j + c_i \,,$$

ahol c_i-k konstansok. Könnyen belátható, hogy ebben a speciális esetben $\nabla_j b_i + \nabla_i b_j = 0$ és $\nabla_j b_i - \nabla_i b_j \neq 0$, ezért egy olyan Kropina-tér, amelyben a β egy-formát a $b_i(x) = \Omega_{ij}x^j + c_i$ generálja. E tér gyengén Berwald és nem Berwald típusú.

4. Eltűnő Douglas-tenzorú Wagner-terek

A Riemann-geometriában megismertekhez hasonlóan az alacsony dimenziós Finsler-terek számos speciális jellegzetességgel bírnak.

Az ilyen terek tanulmányozását, a felmerülő számítások elvégzését megkönnyíti egy ortonormált frame, az ún. Berwald-frame használata, amelynek (l,m) vektormezőit a következőképpen definiálhatjuk:

$$\begin{aligned} &l^i = \frac{1}{L}y^i\,, \quad l_i = \dot\partial_i L\,, \\ &h_{ij} = \varepsilon m_i m_j\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,, \\ &l_i m^j = 0\,, \quad m_i m^i = \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{4.1}$$

ahol $h_{ij} = L\dot\partial_i\dot\partial_j L$ és ε a kétdimenziós Finsler-térhez tartozó szignatúra. Az (4.1)-ben leírtakból adódnak a

$$\begin{aligned} &g_{ij} = l_i l_j + \varepsilon m_i m_j = l_i l_j + h_{ij}\,, \\ &(m^1, m^2) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}(-l_2, l_1)\,, \\ &(m_1, m_2) = \sqrt{|g|}(-l^2, l^1)\,, \\ &g = \det(g_{ij}) = \varepsilon(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

összefüggések. Továbbá a $C_{ijk} = \dot\partial_i\dot\partial_j\dot\partial_k(L^2/4)$ Cartan-tenzor komponensei Berwald-frame-ben

$$LC_{ijk} = Im_i m_j m_k \tag{4.3}$$

alakban írhatók. Az így definiált I skalármezőt a kétdimenziós Finsler-tér főskalárjának nevezzük.

A dolgozat 5.3. fejezetében kétdimenziós eltűnő Douglas-tenzorú Wagner-terek főskalárját határozzuk meg.

Mivel a Douglas-tenzor

$$3LD^h_{ijk} = -(6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2)m_i l^h m_j m_k \tag{4.4}$$

alakot ölt kétdimenziós esetben, így igaz a

4.1. Tétel: *[BM1] Egy kétdimenziós Finsler-tér akkor és csakis akkor Douglas-tér, ha a főskalár kielégíti a*

$$6I_{,1} + \varepsilon I_{2;2} + 2II_2 \tag{4.5}$$

egyenletet, amelyben $I_2 = I_{,1;2} + I_{,2}$.

Továbbá ismert a

4.2. Tétel: *[M7] Az*

$$\begin{gathered} I_{,1} = I_{;2}s_2 \,, \qquad I_{;2} = -I_{;2}(s_1 + Is_2) \\ \text{és} \\ (s_1)_{;2} - s_2 = 0 \,, \qquad (s_2)_{;2} + s_1 + Is_2 = 0 \,, \\ (s_1)_{;1} = 0 \,, \qquad (s_2)_{;1} = 0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

egyenlőségek teljesülése szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a kétdimenziós Finsler-tér Wagner-tér legyen.

A fent elmondottakból adódik a kérdés: meg tudjuk-e adni egy Douglas típusú Wagner-tér főskalárját egzakt formában?

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy az eltűnő Douglas-tenzorú Wagner-tér skalárgörbülete azonosan zérus. Mivel M. Matsumoto [M18] megmutatta, hogy a Weyl- és a Douglas-tenzor eltűnése kétdimenziós esetben a H_{ijk} tenzorkomponensek zérus voltát vonja maga után, ahol

$$\begin{aligned} H_{ijk} &= \dot{\partial}_k \dot{\partial}_j H_i + G_{jk;i} \,, \\ H_i &= L(3Rl_i + R_{;2}m_i) \,, \\ G_{jk} &= I_2 m_j m_k / L \,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

így R zérus voltából $H_i = 0$ adódik s így $G_{jk;i}$ szintén zéró.

Mindezek birtokában kiszámítható a főskalár, amely az alábbi alakot ölti:

$$I = \frac{-(2s_1 + s_{2,1}/s_2) \pm \sqrt{4s_1^2 + 4s_1 s_{2,1}/s_2 + s_{2,1}^2/s_2^2 + 24s_2^2}}{4s_2} \,. \tag{4.8}$$

Általában az (4.8)-beli főskalár esetén $I_{;2} \neq 0$ teljesül, ezért igaz a

In the famous book of Arnold [Arn] we can find the following theorem:

> "An equation $d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$ can be reduced to the form $d^2\bar{y}/d\bar{x}^2 = 0$ if and only if the righthand side is a polinomial in the derivative of order not greater 3 both for the equation and for its dual."

This theorem can be formulated in the following form on the basis of [BM3]:

> "An equation $d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$ can be reduced to the form $d^2\bar{y}/d\bar{x}^2 = 0$ if and only if the path space P^2 (determined by the equation $d^2y/dx^2 = \Phi(x, y, dy/dx)$) is projectively related to a two-dimensional projectively flat Finsler space F^2."

The differential equations of geodesic curves of F^n:

$$d^2x^i/dt^2 = -2G^i(x, \dot{x}) \,.$$

The integral curves of this second order differential equation are called paths. A path space P^n and a Finsler space F^n are projectively related to each other, if any path of P^n is a geodesic curve of F^n and vice versa.

From the previous theorems and definitions we obtain:

THEOREM 2.2 *[BOSZ] In a Douglas space*

$$\begin{aligned} \Pi_{112} = &-\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} + \frac{2}{3}\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} + f(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial y} + \\ &+ h(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{3}g(x,y)\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} + \\ &+ k(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{2}{27}g^2(x,y)h(x,y) + \frac{2}{3}g(x,y)k(x,y)h(x,y) - \\ &- \frac{2}{3}f(x,y)h(x,y)k(x,y) \,; \end{aligned} \tag{2.7}$$

invariants. First we have

$$Q^0\text{-invariants:}\quad Q^h = G^h - \frac{1}{n+1} G y^h ,$$

$$Q^1\text{-invariants:}\quad Q^h_i = \dot\partial_i Q^h = G^h_i - \frac{1}{n+1}\left(G_i y^h + G\delta^h_i\right) ,$$

$$Q^2\text{-invariants:}\quad Q^h_{ij} = \dot\partial_j Q^h_i = G^h_{ij} - \frac{1}{n+1}\left(G_{ij} y^h + G_i\delta^h_j + G_j\delta^h_i\right) ,$$

where $G = G^r_r$, $G_i = G^r_{ri}$ and $G_{ij} = G^r_{rij}$ is the hv-Ricci tensor of $B\Gamma$.

The Q^2-invariants satisfy the following important identities:

$$Q^h_{ij} = Q^h_{ji} , \qquad Q^r_{rj} = 0 . \tag{2.1}$$

Secondly we have a projectively invariant tensor, the Douglas tensor

$$D^h_{ijk} = \dot\partial_k Q^h_{ij} . \tag{2.2}$$

Starting from the Q^2-invariants we shall introduce the following quantities in a way similar to constructing the h-curvature tensor: Q^3-invariants

$$Q^h_{ijk} = \delta_k Q^h_{ij} + Q^r_{ij} Q^h_{rk} - \delta_j Q^h_{ik} - Q^r_{ik} Q^h_{rj} , \tag{2.3}$$

where $\delta_k Q^h_{ij} = \partial_k Q^h_{ij} - \left(\dot\partial_r Q^h_{ij}\right) G^r_k$.

The Q^3-invariants satisfy the following identities:

$$Q^h_{ijk} + (i,j,k) = 0 , \qquad Q^r_{rjk} = 0 . \tag{2.4}$$

Therefore the authors with the help of $Q_{ij} = Q^r_{ijr}$ Ricci-type tensor produce two tensors, which are very important in projective Finsler geometry:

$$\Pi^1\text{-tensor:}\quad \Pi^h_{ijk} = Q^h_{ijk} + \frac{1}{n-1}\left(\delta^h_j Q_{ik} - \delta^h_k Q_{ij}\right) , \tag{2.5}$$

$$\Pi^2\text{-tensor:}\quad \Pi_{ijk} = \delta_k Q_{ij} + Q^r_{ij} Q_{rk} - \delta_j Q_{ik} - Q^r_{ik} Q_{rj} . \tag{2.6}$$

That is how we can obtain a new characteristic property for the flat projectively space:

Theorem 2.1 *[BM3] A Finsler space F^n is projectively flat if and only if F^n is a Douglas space and its characteristic satisfies*

$$(1)\quad n>2: \quad \Pi^h_{ijk} = 0 \qquad \textit{or} \qquad (2)\quad n=2: \quad \Pi_{ijk} = 0 .$$

4.3. TÉTEL: *[Szi1] Kétdimenziós, eltűnő Douglas-tenzorú, zérus skalárgörbületű Wagner-tér esetén a főskalár (4.8)-beli alakban írható.*

5. $^*P$ Finsler-terek Randers-cseréje

Ebben a fejezetben egy, H. Izumi által bevezetett újabb speciális Finsler-tértípussal ismerkedünk meg, az ún. $^*P$ Finsler-térrel, előtte azonban néhány szükséges fogalom kerül bevezetésre.

Definíció: [M2] Egy legalább háromdimenziós Finsler-teret C-reducibilisnek mondunk, ha a $C_{ijk} = \frac{1}{2}\dot\partial_k g_{ij}$ tenzor

$$C_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_k + h_{ik}C_j + h_{kj}C_i\right) , \tag{5.1}$$

ahol $C_i = C_{ijk}g^{jk}$, $h_{ij} = g_{ij} - l_i l_j$ és $l_i = \dot\partial_i L$.

A P-reducibilitás fogalmát M. Matsumoto és H. Shimada vezette be:

Definíció: [MS], [M21] Egy háromnál nagyobb dimenziós Finsler-teret P-reducibilisnek nevezünk, ha a $(v)hv$-torzió

$$P_{ijk} = C_{ijk|0} \tag{5.2}$$

vagy

$$P_{ijk} = \frac{1}{n+1}\left(h_{ij}C_{k|0} + h_{jk}C_{i|0} + h_{ki}C_{j|0}\right) \tag{5.3}$$

alakban írható Cartan típusú konnexióban.

Definíció: [Iz1], [Iz2] Egy Finsler-teret $^*P$-típusúnak mondunk, ha a P_{ijk} tenzor komponensei

$$P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \tag{5.4}$$

alakúak.

Definíció: [M20], [HI3] Legyenek $(M, L(x,y))$ és $(M, \bar L(x,y))$ azonos alapsokaságú Finsler-terek. Az

$$\bar L(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y) \tag{5.5}$$

transzformációt Randers-transzformációnak nevezzük, ahol $\rho(x,y) = \rho_i(x)y^i$ differenciál 1-forma M-en.

A Randers-transzformáció akkor és csakis akkor projektív, ha a $(\rho_i(x))$ gradiens vektormezőt alkot.

A Randers-transzformáció fogalmának megalkotása M. Matsumoto nevéhez fűződik, míg az elnevezés Hashiguchitól és Ichijyōtól származik.

Ez utóbbi szerzőpáros ugyancsak [HI3]-ban bizonyította, hogy a Randers-transzformáció projektív – azaz geodetikus megőrző – voltának szükséges és elegendő feltétele az $s_{ij} = (\rho_{i;j} - \rho_{j;i})/2$ eltűnése. Itt a pontosvessző szimbólum a Berwald-konnexió szerinti kovariáns deriválást jelöli.

A P_{ijk} tenzor transzformációja projektív Randers-transzformáció esetén

A $P_{ijk} = C_{ijk|0}$ $(v)hv$-torzió tenzor transzformációját M. Matsumoto tanulmányozta [M20] és levezette a

$$\bar{C}_{ijk|0} = tC_{ijk|0} + \frac{r_{00}}{2L}C_{ijk} + \frac{1}{2L}\left(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ik}q_j\right) \tag{5.6}$$

transzformációs szabályt, ahol

$$\begin{aligned}
2C_{ijk} &= \partial g_{ij}/\partial y^k\,, \\
h_{ij} &= g_{ij} - l_i l_j\,, \\
l_i &= \partial L/\partial y^i\,, \\
q_k &= r_{0k} - \frac{r_{00}}{2L} + \{\rho_k + (1+t)l_k\}\,, \\
r_{ij} &= \frac{1}{2}(\partial_j\rho_i + \partial_i\rho_j) - \rho_r F^r_{ij}\,, \\
t &= \frac{\bar{L}}{L}
\end{aligned}$$

és F^r_{ij} a Cartan-konnexió koefficiensét jelöli. Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned}
C_{ijk|0} &= P_{ijk} = \lambda(x,y)C_{ijk} \qquad \text{és} \\
\bar{C}_{ijk|0} &= \bar{P}_{ijk} = \lambda(x,y)\bar{C}_{ijk}\,,
\end{aligned}$$

azaz F^n és $\bar{F}^n$ is $^*P$ Finsler-tér. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda(x,y)\bar{C}_{ijk} = \left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij}q_k + h_{jk}q_i + h_{ki}q_j). \tag{5.7}$$

Majd a megfelelő átalakítások elvégzése után a

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\left[(n+1)\bar{C}_{ijk} - (\bar{C}_k\bar{h}_{ij} + \bar{C}_i\bar{h}_{jk} + \bar{C}_j\bar{h}_{ki})\right] = \\
&= \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x,y) + \frac{r_{00}}{L}\right)\left[(n+1)C_{ijk} - (C_kh_{ij} + C_ih_{jk} + C_jh_{ki})\right]
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Definition [BM1] A Finsler space is said a Douglas space, if $D^{ij} = G^iy^j - G^jy^i$ are homogeneous polynomials in y^i of degree three.

On the other hand F^n is a Douglas space according to the definition if and only if

$$D^{lm}_{hijk} = \dot{\partial}_k\dot{\partial}_j\dot{\partial}_i\dot{\partial}_h(G^ly^m - G^my^l) = 0\,.$$

Theorem 1.3 *[BM1] A Finsler space is a Douglas space, if and only if the Douglas tensor vanishes identically.*

2 On the rectificability condition of a second order ordinary differential equation

The projectively flat spaces are such affine path spaces of which paths are straight. If we are about to determined all the Finsler spaces which admit a path mapping onto projectively flat space, than we come to Hilbert's fourth problem.

Definition [AIM] A Finsler space $F^n = (M^n, L(x,y))$ is said to be with rectilinear extremals, if M^n is covered by coordinate neighborhoods $(U,(x^i))$ in which any geodesic is represented by n linear equations $x^i = x^i_0 + ta^i$ of a parameter t.

If a Finsler space $F^n = (M^n, L(x,y))$ is a locally Minkowski space, then we have the covering of M^n by the domains of adapted coordinate systems $(U,(x^i))$ in which L is a function of y^i alone, the quantities G^i vanish in U from (1.4) and the equation (1.3) of geodesics reduces to $d^2x/ds^2 = 0$, that is why F^n has the rectilinear extremals (projectively flat). To sum it up a projectively flat Finsler space is projective to a locally Minkowski space.

It is well-known that a Finsler space is projectively flat, if and only if its Douglas tensor, Weyl tensor and K curvature tensor vanish identically. (The components of K are $K^i_{hjk} = R^i_{hjk} - C^i_{hr}R^r_{jk}$ in Rund connection.) Most of the papers in this subject are rather long and difficult to understand. On the contrary, Sándor Bácsó and Makoto Matsumoto's method of characterization is more easy to comprehend. A projective change $F^n = \big(M^n, L(x,y)\big) \longrightarrow \tilde{F}^n = \big(M^n, \tilde{L}(x,y)\big)$ of the Finsler metric gives rise to various projective

$(\widetilde{C}3)$ The $(h)h$-torsion tensor field T is the given T^i_{jk}: $F^i_{jk} - F^i_{kj} = T^i_{jk}$,

$(\widetilde{C}4)$ The $(v)v$-torsion tensor field S^1 vanishes: $C^i_{jk} = C^i_{kj}$.

$C\Gamma(T)$ is called a generalized Cartan connection and its coefficients are given by

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk} =& \Gamma^{*i}_{jk} - g^{ih} C_{jkm}(C^m_{hr} A^r_{00} - A^m_{0h}) + C^i_{jm}(C^m_{kr} A^r_{00} - A^m_{0k}) + \\ &+ C^i_{km}(C^m_{jr} A^r_{00} - A^m_{0j}) + A^i_{jk} ,\end{aligned}$$

where $(\Gamma^i_{jk}, G^i_k, C^i_{jk})$ are the coefficients of the Cartan connection and

$$A^i_{jk} = \frac{T_j{}^i{}_k - T^i{}_{jk} + T_{jk}{}^i}{2} .$$

A Finsler space is called a generalized Berwald space if it is possible to introduce a generalized Cartan connection in such a way that the coefficients F^i_{jk} are functions of position only.

Also, for a given $(O)_p$-homogeneous covariant Finsler vector field s, there exists a unique Finsler connection $W\Gamma(s) = (F^i_{jk}, N^i_k, C^i_{jk})$ satisfying $(\widetilde{C}1)$, $(\widetilde{C}2)$, $(\widetilde{C}4)$ and $(\widetilde{C}3^*)$ $W\Gamma(s)$ is semi-symmetric with respect to the given s:

$$F^i_{jk} - F^i_{kj} = \delta^i_j s_k - \delta^i_k s_j .$$

$W\Gamma(s)$ is called a Wagner connection, and its coefficients are given by

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \Gamma^{*i}_{jk} + L^2(S^i_{jkl} + C^i_{jm} C^m_{kl}) s^l + (y^i C_{jkl} - y_j C^i_{kl} - y_k C^i_{jl}) s^l + C^i_{jk} s_0 + \\ &\quad + g_{jk} s^i - \delta^i_k s_j , \\ N^i_k &= G^i_k - L^2 C^i_{kl} s^l + y_k s^i - \delta^i_k s_0 , \\ C^i_{jk} &= (g^{ir} \dot{\partial}_j g_{kr})/2 , \end{aligned}$$

where $s^l = g^{lm} s_m$, $s_0 = s_l y^l$, $y_j = g_{jr} y^r$ and S^i_{jkl} are the coefficients of the v-curvature tensor field S^2 of $C\Gamma$.

Using the Euler equation the extremal of the length integral given by the system of differential equations

$$\ddot{x}^i \dot{x}^j - \ddot{x}^j \dot{x}^i + 2D^{ij}(x, \dot{x}) = 0 \tag{1.10}$$

where we put

$$D^{ij}(x, y) = G^i(x, y) y^j - G^j(x, y) y^i . \tag{1.11}$$

egyenlőséget kapjuk.

Összegezzük a fent leírtakat!

5.1. TÉTEL: *[Szi2] Legyen $(M, L(x, y))$ és $(M, \bar{L}(x, y))$ $^*P$ Finsler-tér. Ha létezik projektív Randers-transzformáció $(M, L(x, y))$ és $(M, \bar{L}(x, y))$ között, akkor $(M, L(x, y))$ akkor és csakis akkor C-reducibilis, ha $(M, \bar{L}(x, y))$ is az.*

Most tegyük fel, hogy az F^n Finsler-terünk $^*P$-típusú, azaz

$$C_{ijk|0} = P_{ijk} = \lambda(x, y) C_{ijk} ,$$

ekkor a

$$\bar{P}_{ijk} = t\lambda(x, y) C_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L} C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij} q_k + h_{jk} q_i + h_{ki} q_j) \tag{5.9}$$

adódik.

Ha feltesszük, hogy F^n $^*P$-típusú, akkor a $\bar{P}$ tenzor komponensei

$$\begin{aligned} &\bar{P}_{ijk} - \frac{1}{n+1}(\bar{P}_k \bar{h}_{ij} + \bar{P}_i \bar{h}_{jk} + \bar{P}_j \bar{h}_{ki}) = \\ &= \frac{1}{n+1}\left(t\lambda(x, y) + \frac{r_{00}}{2L}\right)\{(n+1) C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\} \end{aligned} \tag{5.10}$$

alakúak és kimondható az

5.2. TÉTEL: *[Szi2] Legyen $(M, L(x, y))$ $^*P$-típusú és $(M, \bar{L}(x, y))$ tetszőleges Finsler-tér. Ha létezik $\bar{L}(x, y) = L(x, y) + \rho(x, y)$ projektív Randers-transzformáció, akkor a $\bar{P}_{ijk}$ és C_{ijk} tenzorkomponensek kielégítik az (5.10) egyenlőséget.*

A fenti tétel feltételeit használva adódik az alábbi két

Következmény:

(1) Ha $(M, L(x, y))$ C-reducibilis tér, akkor $(M, \bar{L}(x, y))$ P-reducibilis.

(2) Ha $(M, L(x, y))$ P-reducibilis tér, akkor $(M, \bar{L}(x, y))$ C-reducibilis.

Most foglalkozzunk azzal az esettel, amikor $(M, \bar{L}(x, y))$ $^*P$ Finsler-tér, azaz $\bar{C}_{ijk|0} = \lambda(x, y) \bar{C}_{ijk}$. Ezesetben (5.6) a

$$\lambda(x, y) \bar{C}_{ijk} = t P_{ijk} + \frac{r_{00}}{2L} C_{ijk} + \frac{1}{2L}(h_{ij} q_k + h_{jk} q_i + h_{ki} q_j) \tag{5.11}$$

egyenlőséget implikálja. Míg

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda(x,y)}{n+1}\big\{(n+1)\bar{C}_{ijk} - (\bar{C}_k\bar{h}_{ij} + (\bar{C}_i\bar{h}_{jk} + (\bar{C}_j\bar{h}_{ki})\big\} = \\
&= \frac{t}{n+1}\big\{(n+1)P_{ijk} - (P_k h_{ij} + P_i h_{jk} + P_j h_{ki})\big\} - \\
&- \frac{r_{00}}{2(n+1)L}\big\{(n+1)C_{ijk} - (C_k h_{ij} + C_i h_{jk} + C_j h_{ki})\big\}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

formába írható, és megfogalmazható az

5.3. ÁLLÍTÁS: *[Szi2] Legyen $(M, \bar{L}(x,y))$ $^*P$-típusú és $(M, L(x,y))$ tetszőleges Finsler-tér. Ha létezik egy $\bar{L}(x,y) = L(x,y) + \rho(x,y)$ projektív Randers-transzformáció, akkor $\bar{C}_{ijk}$, P_{ijk} és C_{ijk} tenzorkomponensekre igaz az (5.12) összefüggés.*

A fenti állításból következik, hogy ha $(M, L(x,y))$ C-reducibilis, akkor $(M, \bar{L}(x,y))$ is az. Másrészt jól ismert, hogy egy Funk-metrikával ellátott Fisler-tér $^*P$-típusú és $P_{ijk} = -KLC_{ijk}$ $(K \in \mathbf{R}^+)$ [She3]. Ezért igaz az alábbi

Következmény:

Ha létezik projektív Randers-transzformáció egy $^*P$-típusú, Funk-metrikával ellátott Finsler-tér és egy tetszőleges Finsler-tér között, akkor ez a Finsler-tér szükségképpen P-reducibilis.

Berwald [B3], [B4], [B5].

Most of the results of this thesis are realized in Finsler spaces therefore we need the knowledge of Berwald, Wagner, and Douglas spaces.

In 1928 Berwald had a lecture [B2], in which he enumerated some special classes of Finsler spaces. Among them the class of affinely connected Finsler spaces which had been introduced in his previous paper [B1] and was characterized by a tensor equation. Later Wagner called the "affinely connected space" Berwald space [W1].

Definition [M2] If the connection coefficients G^i_{jk} of the Berwald connection $B\Gamma$ given by $G^i_{jk} = \dot{\partial}_j N^i_k = F^i_{jk} + C^i_{jk|l}y^l$ are functions of position alone, the space is called Berwald space.

Thus the Berwald connection $B\Gamma$ of a Berwald space is similar to a linear connection as to the parallel displacement of vector fields. In this case (1.3) may be written as

$$
d^2x^i/ds^2 + G^i_{jk}(x)(dx^j/ds)(dx^k/ds) = 0\,. \tag{1.9}
$$

According to $\dot{\partial}_k G^h_{ij} = G^h_{ijk}$, one of the tensorial characterizations of such a space is immediately obtained:

Theorem 1.2 *[C1], [B6] A Finsler space is a Berwald space, if and only if the hv-curvature tensor G (G^h_{ijk}) of the Berwald connection $B\Gamma$ vanishes identically.*

In 1943 V. V. Wagner [W2] gave a generalization of the concept of Berwald space by introducing a new connection with the surviving $(h)h$-torsion. Recently Hashiguchi [H2] established an exact formulation of such a concept based on a theory of Finsler connections.

Definitions [H2] We are concerned with an n-dimensional Finsler space $F^n = (M, L)$ where $L(x,y)$ is the fundamental function and x denotes a point of the underlying manifold M. Then the fundamental tensor field is given by $g_{ij} = (\dot{\partial}_i\dot{\partial}_j L^2)/2$.
For a given skew-symmetric and $(O)_p$-homogeneous Finsler tensor field T^i_{jk} there exists a unique Finsler connection $C\Gamma(T) = (F^i_{jk}, N^i_k, C^i_{jk})$ satisfying the following four axioms:

$(\widetilde{C}1)$ $C\Gamma(T)$ is metrical: $g_{ij|k} = 0\,,\ g_{ij}|_k = 0\,,$

$(\widetilde{C}2)$ The deflection tensor field D vanishes: $N^i_k = g^j F^i_{jk}\,,$

Definition [AIM], [She3] If any geodesic of F^n coincides with a geodesic of $\bar{F}^n$ as a set of points and vice versa, then the change $L(x,y) \to \bar{L}(x,y)$ of the metric is called projective and F^n is said to be projective to $\bar{F}^n$.

Let $c : x^i = x^i(t)$ be a curve of M^n which is a geodesic of both F^n and $\bar{F}^n$ as a set of points. Then c is written as (1.5) in F^n and also in $\bar{F}^n$ as

$$d^2x^i/dt^2 + 2\bar{G}^i(x, dx/dt) = \bar{\gamma}(t)dx^i/dt \,.$$

Thus

$$2\bar{G}^i(x, dx/dt) - 2G^i(x, dx/dt) = (\bar{\gamma}(t) - \gamma(t))\, dx^i/dt$$

since the above must hold for any point x and any direction dx/dt, we have

Theorem 1.1 *[K] A Finsler space F^n is projective to another Finsler space $\bar{F}^n$, if and only if there exists a positevely homogeneous of degree one scalar field $p(x,y)$ satisfying*

$$\bar{G}^i(x,y) = G^i(x,y) + p(x,y)y^i \,.$$

A scalar field $p(x,y)$ is called the projective factor of the projective change under consideration.

In the studies of projective Finsler geometry the following tensor introduced by J. Douglas is very important [D]

$$D^i_{hjk} := G^i_{hjk} - G_{hj\cdot k}y^i/(n+1) - \left\{G_{jk}\delta^i_h + (h,j,k)\right\}/(n+1) \,. \tag{1.6}$$

The Douglas tensor invariants under projective change, that is

$$D^i_{hjk} = \bar{D}^i_{hjk} \,.$$

Furthermore there are two more invariant tensors. The W-tensor is called the Weyl torsion tensor,

$$W^i_{jk} := R^i_{jk} + \left\{y^i H_{jk} + \delta^i_j H_k - \delta^i_k H_j\right\}/(n+1) \,. \tag{1.7}$$

The other invariant tensor $\left(W^i_{hjk}\right)$ that is,

$$W^i_{hjk} := H^i_{hjk} + \left\{\delta^i_h H_{jk} + y^i H_{jk\cdot h} + \delta^i_j H_{k\cdot h} - \delta^i_k H_{j\cdot h}\right\}/(n+1) \,, \tag{1.8}$$

is called the projective Weyl curvature tensor.

The Weyl tensor was introduced by H. Weyl in 1921 [We]. The generalization of this tensor in Finsler metrics was made by J. Douglas [D] and L.

Introduction

Although the notion of generalized metric space – later named as Finsler space – was introduced by Riemann [R] in 1854 in his famous thesis in which he studied the various methods of understanding the n dimensional space, the main results of Riemann geometry have been proved in the last few decades only. Riemann introduced the notion of a metric, which was the square-root of a positive definite quadratic form. He also mentioned the possible generalization of this metric, nowadays known as the Finsler metric.

In the tangent space of each point of a Finsler space, there is a general norm defined, which is not necessarily induced by an inner product. Surprisingly this kind of generalization of a Riemann space has been forgotten for sixty years. Riemann refused this approach, because of its difficulty.

The first pioneering result in this direction was Paul Finsler's dissertation [F1] in 1918 (the name Finsler space was introduced by J. H. Taylor in 1927). His study arose from his teacher Carathéodory's idea to geometrize the variation calculus. In 1925 J. H. Taylor [T], J. L. Synge [S] and L. Berwald [B1], [B2] started studying this theory with the tools of tensoranalysis. Their primory aim was the geometrization of the space i.e., investigation of calculus and the notion of parallelism with respect to the metric.

There was a sudden change in the development of Finsler theory by a publication of É. Cartan [C1] in 1934. Cartan investigated a special approach: the space he considered was the space of line elements. In this space it was possible to define connection coefficients and so covariant differentiation, which is similar to the one in the theory of Riemann spaces. (For example the Ricci lemma continues to hold, which requires the vanishing of the covariant derivative of the metric tensor and it does not hold if the space regarded as a point space.)

The calculation of invariants of the Cartan space was done by András Rapcsák. He described exactly those tensors and vectors, which (together with their covariant derivatives) determine all properties which are invariant under covariant differentiation. Many people considered this results as the peak of development Finsler theory. However for many other issues in physics, it would be more suitable to consider in point space Finsler spaces. Moreover also Cartan's approach also makes the connection between variation calculus and Finsler theory less direct.

After the Second World War a new chapter emerged in Finsler Geometry by the papers of H. Busemann [Bu1]. Busemann's goal was to clean up the forest of Finsler geometry from the bush of tensors, furthermore he put emphasize on studying Minkowskian geometry for a possible faster development of Finsler geometry [Bu2], [Bu3]. By the time H. Rund wrote an excellent monography on Finsler geometry [Ru].

In Finsler geometry the main goal is the generalization of correspondences with the already known geometries. This idea naturally appeares to study geodesics and paths regardless the space itself is considered as a metric space or not.

Nowadays most of the publications of Makoto Matsumoto and Sándor Bácsó clarifies the different sides of the properties of these transformations.

J. Douglas' theory of the paths of point spaces – its first abstract was published in the book of L. P. Eisenhart: "Non-Riemannian Geometry" [E] – has been generalized for Finsler spaces by András Rapcsák [Rap2], [Rap3].

Many new results have been appeared in this subject in the past decades and the studying of Finsler spaces gets to be more relevant recently. We just mention about a few important papers by M. Matsumoto [M2], S. S. Chern, D. Bao, Z. Shen [BCS], [She3]. One can even find papers dealing with complex Finsler geometry [AP].

Finsler geometry also has remarkable applications in physics, biology and other branches of science areas too [AIM], [AM].

Chapter 5. of our thesis contains results of the author which came out in a fruitful collaboration with my professor Dr. Sándor Bácsó. The Chapter includes the rectificability condition of a second order ordinary differential equation, moreover on a weakly Berwald Finsler space of Kropina type. I determined the main scalar of two-dimensional Wagner-Douglas space and I studied the Randers change of projective $^*P$-Finsler spaces. My results were published in the following papers: [BOSZ], [BSZ], [Szi1], [Szi2], [BGYPSZ].

1 Some important notations and theorems

Let M be differentiable manifold of dimenson n and $L(x, y)$ a real function on TM. Then we define the notion of length of a curve. Let $x^i = x^i(t)$, $a \le t \le b$ be the equations of a segment of a curve c in a coordinate neighborhood U. The length s of the segment is given by the integral

$$s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt \,. \tag{1.1}$$

Definition [AIM] The manifold M equipped with such a notion of length is called an n-dimensional Finsler space with the fundamental function L, if L fulfills the conditions below

(1) The length of any oriented curve does not depend on the choice of parameter. That is the fundamental function L is positively homogeneous of degree one in y.

(2) The length integral (1.1) gives rise to the regular variational problem. An important special case is

$$g_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial y^i \partial y^j}\,, \quad F := L^2/2 \tag{1.2}$$

has non-zero determinant.

(3) In each tangent space T_xM we have a region T_xM^* such that $L(x, y)$ is differentiable in y^i, where T_xM^* does not contain $y = 0$ and is a positively conical region, that consists of non-zero tangent vectors $y \in T_xM^*$ for which $py \in T_xM^*$ for any $p > 0$. Thus $TM^* := \bigcup_{x\in M} T_xM^*$ is the domain of the definition of L.

(4) The fundamental function $L(x, y)$ is positive-valued for any y belonging to the positively conical region T_xM^*.

Definition [AIM] The extremal of the length integral $s = \int_a^b L\big(x(t), \dot{x}(t)\big)dt$ is called the geodesic of the space.

A geodesic is a curve given by the differential equations

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + 2G^i(x, dx/ds) = 0\,, \tag{1.3}$$

where s is the normalized parameter, that is the arc-length,

$$2G_j = g_{ij}(x, y)G^i(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^j \partial x^i} y^i - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x^j} \tag{1.4}$$

and $F(x, y) = \big(L(x, y)\big)^2/2$.

If the geodesic is written locally as $x^i = x^i(t)$ in a parameter t, then the equations (1.3) are written in the form

$$d^2x^i/dt^2 + 2G^i(x, dx/dt) = \gamma(t)dx^i/dt\,, \tag{1.5}$$

where

$$G^i(x, y) = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^j \partial x^k} y^k - \frac{\partial F(x, y)}{\partial x^j} \right) \qquad \text{and}$$

$$\gamma(t) := (ds^2/dt^2)/(ds/dt)\,.$$