

Rekurzív sorozatokkal kapcsolatos
diofantikus egyenletek

PhD értekezés tézisei

Szalay László

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Debrecen, 1999.

1 Előzmények, vizsgálati módszerek és új eredmények áttekintése

Az értekezés négy egymáshoz kapcsolódó fejezetből áll. Az új eredményeket a 3. és a 4. fejezet tartalmazza. Az előkészítő részek után következő 3. fejezet a lineáris rekurzív sorozatokban előforduló teljes hatványokkal ill. bizonyos bináris rekurzív sorozatokban előforduló $\binom{x}{3}$ alakú binomiális együtthatókkal foglalkozik. A rövidebb lélegzetvételű 4. fejezet egy a lineáris rekurzív sorozatok közös elemeivel kapcsolatos eredményt, valamint annak előzményeit mutatja be.

A 60-as években – főleg a *Fibonacci Quarterly* folyóirat megjelenése után – kezdett előtérbe kerülni a különböző alakú számok keresése rekurzív sorozatokban. 1964-ben COHN[3, 4] and WYLER[26] egymástól függetlenül bizonyították, hogy a Fibonacci sorozatban csak az $F_0 = 0$, $F_1 = F_2 = 1$ és $F_{12} = 144$ tagok négyzetszámok. Sok matematikus tevékenysége nyomán váltak ismertté a Fibonacci- ill. Lucas-sorozatban pl. az összes $2x^2$, $x^2 \pm 1$, $3x^2 \pm 1$, $x(x+1)$, $\frac{x(x+1)}{2}$, x^3 , $x^3 \pm 1$, ... stb. alakú számok. Más sorozatokat is vizsgáltak, pl. PETHŐ[16] megadta az összes teljes hatványt a Pell-sorozatban.

A megoldási módszerek eleinte jobbra elemiek voltak, de egyre gyakrabban alkalmazták az ún. Baker-módszert, amely algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira nyert becsléseken alapszik.

SHOREY és STEWART[21], valamint PETHŐ[17, 15] munkái – szintén a Baker-módszert alkalmazva – általánosabb eredményeket hoztak. Belátták, hogy egy nem-degenerált rekurzív sorozatban nem fordulhat elő tetszőlegesen nagy kitevőjű teljes hatvány, ha a sorozat karakterisztikus polinomjának van egy egyszeres multiplicitású legnagyobb abszolút értékű ún. domináns gyöke. Ezen eredmények effektívek, azaz meg lehet adni egy, a kitevőre vonatkozó, a sorozat paramétereitől függő felső korlátot. Sajnos az előző tételek nem szolgáltatnak információt a kis kitevőjű hatványokról, így pl. a négyzetszámokról sem. A négyzetszámokkal kapcsolatban másodrendű rekurzív sorozatok esetében több fontos eredmény született, de negyedrendű sorozatoknál csak a Lehmer-sorozatokra van néhány érdekes tétel (MCDANIEL [12]).

A 3.2. fejezetben az 1-4. Tételben megadjuk bizonyos (nem Lehmer típusú)

negyedrendű lineáris rekurzív sorozatokban az előforduló teljes négyzeteket. Az 1-4. Tételben szereplő diofantikus egyenletek értelmezhetők úgy is, hogy két másodrendű rekurzív sorozat szorzatában keressük a négyzetszámokat.

A 3.3 fejezet bizonyos típusú bináris rekurziókban előforduló $\binom{x}{3}$ alakú binomiális együtthatókkal foglalkozik. MORDELL egy tételét felhasználva bizonyítjuk, hogy a

$$G_n = AG_{n-1} \pm G_{n-2} \quad , \quad G_0 = 0 \quad , \quad G_1 = 1 \quad (1)$$

rekurzióval megadott másodrendű sorozatok, valamint ezek asszociáltjai véges sok $\binom{x}{3}$ alakú binomiális együtthatót tartalmaznak (5. tétel). A bizonyítás során elliptikus egyenletekre vezetjük vissza a problémát, így lehetőség nyílik arra, hogy a SIMATH számítógépes programcsomagot felhasználva rögzített sorozat esetén megkeressük a megoldásokat. Ezek demonstrálására a Fibonacci, a Lucas ill. a Pell sorozatokban megadjuk a fenti alakú binomiális együtthatókat. (6. tétel) Ezen eredményeket [25] tartalmazza.

[1]-ben BRINDZÁVAL és LIPTAIVAL közösen beláttuk, hogy bizonyos feltételek mellett két sorozat tagjainak szorzata sem lehet tetszőlegesen nagy kitevőjű teljes hatvány (7. Tétel). Korábban KISS [10] bizonyított hasonlókat, de ő egy adott sorozat két tagjával foglalkozik. Az 7. Tételnél szigorúbb feltételrendszer mellett [23]-ben megmutattuk, hogy ha véges sok lineáris rekurzió tagjai szorzatának konstansszorososa sw^q alakú, akkor q kisebb egy felső korlátnál, ahol s egy olyan egész számot jelöl, amelynek a prímfaktorizációjában rögzített prímekek vannak (8. Tétel).

MIGNOTTE [13, 14] vetette fel, és bizonyította, hogy ha két sorozat karakterisztikus polinomjainak domináns gyökei multiplikatív értelemben függetlenek, akkor a szóban forgó sorozatoknak csak véges sok közös eleme lehet. KISS [8] vizsgálta az

$$s_1 G_x = s_2 H_y \quad (2)$$

egyenletet, ahol G és H rekurzív sorozatok és s_1, s_2 olyan egész számok, amelyek prímfaktorizációjában rögzített prímekek vannak. A szerző megmutatta, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén az (2) egyenlet x, y megoldásaira $\max\{x, y\}$ kisebb egy explicite meghatározható konstansnál. A 9. Tétel az (2) egyenlethez hasonló problémával foglalkozik azzal a különbséggel, hogy az egyenlet bal- és jobb oldalán is tetszőleges sok, de véges számú rekurzív sorozat tagjainak szorzata áll. A kapott eredmény [24]-ben jelent meg, és analóg KISS előbb említett tételével.

A 7-9. Tételek bizonyításaiban a Baker-módszert alkalmaztuk.

A disszertáció kilenc tételéből hat társszerző nélkül elért eredmény. A kilenc tétel hat cikkben jelent ill. jelenik meg, és a doktori iskola alatt, ill. az abszolutórium megszerzése után készültek.

A következő fejezetben bevezetünk néhány szükséges jelölést, majd azután részletesen ismertetjük a fent vázolt eredményeket.

2 Jelölések, elnevezések

Legyen $G = \{G\}_{n=0}^{\infty}$ egy k -adrendű ($k > 1, k \in \mathbf{Z}$) homogén lineáris rekurzív sorozat, amelyet a

$$G_n = A_1 G_{n-1} + A_2 G_{n-2} + \dots + A_k G_{n-k} \quad (n \geq k) \quad (3)$$

összefüggés definiál, ahol az A_1, A_2, \dots, A_k paraméterek ($A_k \neq 0$) és a nem mind nulla G_0, G_1, \dots, G_{k-1} kezdőelemek rögzített egészek. A G sorozat jelölésére gyakran használjuk a $G = G(A_1, \dots, A_k, G_0, \dots, G_{k-1})$ alakot, továbbá ν számú lineáris rekurzív sorozat tagjainak $G_{x_1}^{(1)} \dots G_{x_\nu}^{(\nu)}$ szorzatát pedig jelölje a

$$\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu) \quad (4)$$

szimbólum.

A G sorozat karakterisztikus polinomjának nevezzük a

$$g(x) = x^k - A_1 x^{k-1} - \dots - A_k \quad (5)$$

polinomot, amelynek különböző gyökei legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_t$, multiplicitásuk legyen rendre e_1, \dots, e_t . A rekurzív sorozatok alaptétele szerint a G sorozat tagjai explicit módon előállíthatók

$$G_n = g_1(n)\alpha_1^n + \dots + g_t(n)\alpha_t^n \quad (n \geq 0) \quad (6)$$

formában, ahol $g_i(x)$ egy legfeljebb (e_i-1) -edfokú polinom, melynek együtthatói a $\mathcal{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ számtest elemei.

Ha a G sorozat $g(x)$ karakterisztikus polinomjának van olyan egyszeres multiplicitású $\alpha = \alpha_1$ gyöke amelyre $|\alpha| > |\alpha_i|$ ($i = 2, \dots, t$) akkor az α gyököt domináns gyöknek mondjuk. Ebben az esetben az (6) előállítás

$$G_n = a\alpha^n + g_2(n)\alpha_2^n \dots + g_t(n)\alpha_t^n \quad (n \geq 0) \quad (7)$$

alakra módosul. A továbbiakban feltesszük, hogy dominán gyök esetén az a szám (vagy az a -t helyettesítő, más betűvel jelölt érték) nem zérus, valamint hogy G nem degenerált, azaz a karakterisztikus polinomja bármely két gyökének hányadosa nem egységgyök.

A későbbiekben szükségünk lesz még az alábbi halmaz bevezetésére. Rögzített p_1, \dots, p_m prímszámok esetén legyen

$$S = \{s \in \mathbf{Z} \mid s = \pm p_1^{u_1} \dots p_m^{u_m}, u_i \in \mathbf{Z}, u_i \geq 0\} \quad . \quad (8)$$

Végül, a $\nu_p(n)$ szimbólum egy n egész szám p -adikus értékelését jelöli valamely p prímszám esetén.

3 Az új eredmények ismertetése

A disszertáció 3.2 fejezetében a

$$(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2 \quad , \quad (9)$$

$$(2^n - 1)(5^n - 1) = x^2 \quad , \quad (10)$$

$$(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2 \quad (11)$$

és az

$$(a^n - 1)(a^{kn} - 1) = x^2 \quad (12)$$

egyenletek egész megoldásait keressük az n és x , valamint (12) esetén még az a és k ismeretlenekben. Legyenek

$$G^{(3)}(12, -47, 72, -36, 0, 2, 24, 182) \quad , \quad (13)$$

$$G^{(5)}(18, -97, 180, -100, 0, 4, 72, 868) \quad (14)$$

és

$$G^{(6)}(21, -128, 252, -144, 0, 5, 105, 1505) \quad (15)$$

negyedrendű lineáris rekurziók. Hasonló módon értelmezhető a $G^{(a^k)}$ sorozat is. Legyenek továbbá $R^{(2)}(3, -2, 0, 1)$, $R^{(3)}(4, -3, 0, 2)$, $R^{(5)}(6, -5, 0, 4)$, $R^{(6)}(7, -6, 0, 5)$ valamint $R^{(a^k)}(a^k + 1, -a^k, 0, a^k - 1)$ lineáris másodrendű rekurzív sorozatok. Könnyen látható, hogy

$$G_n^{(3)} = R_n^{(2)} \cdot R_n^{(3)} = (2^n - 1)(3^n - 1) \quad , \quad (16)$$

$$G_n^{(5)} = R_n^{(2)} \cdot R_n^{(5)} = (2^n - 1)(5^n - 1) \quad , \quad (17)$$

$$G_n^{(6)} = R_n^{(2)} \cdot R_n^{(6)} = (2^n - 1)(6^n - 1) \quad , \quad (18)$$

$$G_n^{(a^k)} = R_n^{(a)} \cdot R_n^{(a^k)} = (a^n - 1)((a^{kn} - 1)) \quad . \quad (19)$$

Tehát a $(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2$, a $(2^n - 1)(5^n - 1) = x^2$, a $(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2$, valamint az $(a^n - 1)((a^k)^n - 1) = x^2$ polinomiális-exponenciális egyenleteket megoldani ugyanazt jelenti mint rendre megkeresni a $G^{(3)}$, $G^{(5)}$, $G^{(6)}$ és $G^{(a^k)}$ negyedrendű sorozatokban a négyzetszámokat, vagy másképp fogalmazva megkeresni az $R_n^{(2)} \cdot R_n^{(3)}$, $R_n^{(2)} \cdot R_n^{(5)}$, $R_n^{(2)} \cdot R_n^{(6)}$ és $R_n^{(a)} \cdot R_n^{(a^k)}$ szorzatokban a teljes négyzeteket. A következő tételek az előbbieken felvetett problémák megoldását adják.

1. Tétel.(SZALAY[22]) A

$$(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2 \quad (20)$$

diofantikus egyenlet nem oldható meg pozitív egészekben.

2. Tétel.(SZALAY[22]) A

$$(2^n - 1)(5^n - 1) = x^2 \quad (21)$$

diofantikus egyenletnek az $n = 1, x = 2$ az egyetlen pozitív egész megoldása.

3. Tétel.(HAJDU-SZALAY[5]) A

$$(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2 \quad (22)$$

diofantikus egyenletnek nincs pozitív egész megoldása.

4. Tétel.(HAJDU-SZALAY[5]) A

$$(a^n - 1)((a^k)^n - 1) = x^2 \quad (23)$$

diofantikus egyenletnek $k > 1, a > 1$ esetén csak az alábbi a pozitív egész megoldásai vannak: $(a, n, k, x) = (2, 3, 2, 21), (3, 1, 5, 22)$ és $(7, 1, 4, 120)$.

Az 1-2. Tételek bizonyításához – többek között – szükség van az alábbi lemmákra.

3. Lemma(SZALAY[22]) *Ha α és k pozitív egész számok, $k \not\equiv 0 \pmod{5}$, és $n = k \cdot 4 \cdot 5^{\alpha-1}$ akkor*

$$\nu_5((2^n - 1)(3^n - 1)) = 2\alpha. \quad (24)$$

4. Lemma(SZALAY[22]) *Ha α és k pozitív egész számok, $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, és $n = k \cdot 2 \cdot 3^{\alpha-1}$ akkor*

$$\nu_3((2^n - 1)(5^n - 1)) = 2\alpha. \quad (25)$$

Az 1-3. Tételek bizonyítása során lényegében azt látjuk be, hogy $(2^n - 1)(3^n - 1)$, $(2^n - 1)(6^n - 1)$ és egy kivételtől eltekintve $(2^n - 1)(5^n - 1)$ nem lehet kvadratikus maradék alkalmasan megválasztott modulusokra.

A 4. Tétel bizonyítása LJUNGGREN [11] és CHAO KO [2] egy-egy tételén alapszik.

A 3.3 fejezetben belátjuk, hogy bizonyos típusú bináris rekurzív sorozatokban az $\binom{x}{3}$ alakú binomiális együtthatók csak véges sokszor fordulhatnak elő (5. Tétel). A bizonyítás során használt átalakítások lehetővé tették, hogy egy konkrét rekurzív sorozat esetén a SIMATH számítógépes algebrai rendszert felhasználva megkeressük a fenti típusú binomiális együtthatókat bizonyos sorozatokban. Az eredeti probléma elliptikus egyenletek megoldására vezet, amely sikeresen kezelhető a SIMATH-tal. A módszer demonstrálására a Fibonacci- (F_n) , a Lucas- (L_n) ill. a Pell-sorozat (P_n) esetén adjuk meg az említett binomiális együtthatókat (6. Tétel). A pontos eredmények a következők. Legyen

$$U_n = AU_{n-1} + BU_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (26)$$

egy másodrendű rekurzív sorozat, ahol $U_0 = 0$ és $U_1 = 1$, $A \neq 0$ egész együttható, és $|B| = 1$. Legyen továbbá a V sorozat az U asszociált sorozata. Ekkor igaz az

5. Tétel.(SZALAY[25]) *Az $U_n = \binom{x}{3}$ és $V_n = \binom{x}{3}$ diofantikus egyenleteknek csak véges sok $n \geq 0$, $x \geq 3$ egész megoldása van.*

A nevezetes sorozatokra az alábbi tételt nyertük.

6. Tétel.(SZALAY[25]) *Az*

- i) $F_n = \binom{x}{3}$ egyenlet megoldásai: $(n, x) = (1, 3), (2, 3)$;*
- ii) $L_n = \binom{x}{3}$ egyenlet megoldásai: $(n, x) = (1, 3), (3, 4)$;*
- iii) $P_n = \binom{x}{3}$ egyenlet egyetlen megoldása: $(n, x) = (1, 3)$.*

A 3.4 fejezettől fogva az eredmények jellege megváltozik, a tételek effektívek és a Baker-módszerrel lettek igazolva. Legyenek

$$G = G(A_1, \dots, A_k, G_0, \dots, G_{k-1}) \quad (27)$$

valamint

$$H = H(B_1, \dots, B_l, H_0, \dots, H_{l-1}) \quad (28)$$

rendre k -adrendű ill. l -adrendű lineáris rekurziók, amelyek karakterisztikus polinomjai rendre $g(x)$ ill. $h(x)$, rendre α ill. β domináns gyökökkel. Tegyük fel, hogy (7)-ben G esetén $a \neq 0$ és H esetén $b \neq 0$. Az alábbi tétel szerint ha nem túl távol eső x és y indexekre a $G_x H_y$ szorzat egy q -adik hatvány, akkor a q kitevő nem lehet tetszőleges nagy.

7. Tétel.(BRINDZA, LIPTAI, SZALAY[1]) *Legyenek G és H az előző bekezdésben meghatározott lineáris rekurzív sorozatok, valamint legyen δ olyan valós szám, amelyre $0 < \delta < 1$. Tegyük fel, hogy az α vagy β domináns gyökök valamelyike nem egész. Ekkor a*

$$G_x H_y = w^q \quad (29)$$

azon pozitív egész $w > 1$, x , y , q megoldásaira, amelyekre $\delta x < y < \frac{1}{\delta}x$, következik, hogy $q < q_0$, ahol $q_0 = q_0(G, H, \delta)$ egy effektíve kiszámítható konstans.

A következő tétel kapcsolódik a (29) egyenlethez, de a bal oldalon szereplő két sorozat helyett tetszőleges számú sorozat tagjainak szorzatát vizsgálja az előzőtől különböző feltétellel. Jelölje γ_i a $G^{(i)}$ sorozat karakterisztikus polinomjának domináns gyökét, a_i pedig γ_i nem-nulla együtthatóját $G_{x_i}^{(i)}$ explicit előállításában. A pontos állítás a következő.

8. Tétel.(SZALAY[23]) *Legyen $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu)$ a (4)-ben definiált ν változós függvény, d egy nem nulla egész szám. Legyen továbbá δ pozitív valós szám a $\delta < 1$ feltétellel. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu) \neq \prod_{i=1}^\nu a_i \gamma_i^{x_i}$ ha $x_i > n_0$ ($i = 1, 2, \dots, \nu$) valamely n_0 esetén.*

Ha az $x_1, \dots, x_\nu, s, w, q$ egész számok megoldásai a

$$d\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu) = sw^q \quad (30)$$

egyenletnek, úgy hogy $w > 1$, $s \in S$ és $x_j > \delta \max_i \{x_i\}$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$), akkor

$$q < q_0 \quad , \quad (31)$$

ahol q_0 egy effektíve kiszámítható n_0 -tól, δ -tól, d -tól, S -től és \mathcal{G} -től függő konstans.

A 4. fejezetben lineáris rekurzív sorozatok közös tagjaival foglalkozunk. Legyenek $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu)$ és $\mathcal{H}(y_1, \dots, y_\mu)$ (4) alapján definiált függvények. Az

$$s_1 \mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu) = s_2 \mathcal{H}(y_1, \dots, y_\mu) \quad (32)$$

diofantikus egyenletet vizsgáljuk, ahol $s_1, s_2 \in S$. Jelölje a vizsgált $G^{(i)}$ ill. $H^{(j)}$ rekurzív sorozatok karakterisztikus polinomjainak domináns gyökeit rendre γ_i ill. δ_j , azok együtthatóit a sorozatok explicit előállításában rendre a_i ill. b_j . A következő effektív tétel a vizsgált egyenlettel kapcsolatos.

9. Tétel.(SZALAY[24]) *Legyenek $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu)$ és $\mathcal{H}(y_1, \dots, y_\mu)$ az előbb értelmezett függvények. Legyen továbbá $\delta < 1$ pozitív valós szám, továbbá legyen n_1 olyan pozitív valós szám, amelyre $G_{l_i}^{(i)} \neq a_i \gamma_i^{l_i}$, $H_{k_j}^{(j)} \neq b_j \delta_j^{k_j}$ és bármely $s_1, s_2 \in S$ esetén*

$$s_1 \prod_{i=1}^{\nu} a_i \gamma_i^{l_i} \neq s_2 \prod_{j=1}^{\mu} b_j \delta_j^{k_j} \quad (33)$$

ha $l_i, k_j > n_1$ ($i = 1, 2, \dots, \nu; j = 1, 2, \dots, \mu$). Ha

$$s_1 \mathcal{G}(x_1, \dots, x_\nu) = s_2 \mathcal{H}(y_1, \dots, y_\mu) \quad (34)$$

teljesül olyan $s_1, s_2 \in S$, és $x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\mu$ pozitív egészekre, amelyekre $\min_{i,j} \{x_i, y_j\} > \delta \cdot \max_{i,j} \{x_i, y_j\}$, akkor $\max_{i,j} \{x_i, y_j\} < n_2$, ahol n_2 egy effektív konstans.

A 4-7. Tételek az algebrai számok logaritmusainak lineáris kombinációira adott alsó becslések segítségével igazolhatók.

Az értekezés eredményei elméleti jellegűek, ezért a felhasználásuk az alaputatásban, a matematikán belül lehetséges.

References

- [1] Brindza, B. - Liptai, K. - Szalay, L., On products of the terms of linear recurrences, Number Theory, Eds.: Györy/Pethő/Sós, Walter de Gruyter GmbH&Co., Berlin, New York, 1998, 101-106.
- [2] Chao Ko, On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$, Scientia Sinica (Notes), **14** (1965), 457-460.
- [3] Cohn, J. H. E., Square Fibonacci numbers, etc..., Fib. Quarterly, **2** (1964), 109-113.
- [4] Cohn, J. H. E., On square Fibonacci numbers, J. London Math. Soc., **39** (1964), 537-540.
- [5] Hajdu L. - Szalay L., On the diophantine equations $(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2$ and $(a^n - 1)(a^{kn} - 1) = x^2$, Periodica Math. Hungar., közlésre leadva.
- [6] Jones, P. P. - Kiss, P., Teljes hatványok lineáris rekurzív sorozatokban, Acta Acad. Paed. Agriensis, **22** (1994), 55-60.
- [7] Kiss, P., Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatban, Acta Acad. Paed. Agriensis, **16** (1982), 539-545.
- [8] Kiss, P., On common terms of linear recurrences, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **40** (1982), 119-123.
- [9] Kiss, P., Differences of the terms of linear recurrences, Studia Sci. Math. Hung., **20** (1985), 285-293.
- [10] Kiss, P., Pure powers and power classes in recurrence sequences, Math. Slovaca, **44** (1994), 525-529.
- [11] Ljunggren, W., Some theorems on indeterminate equations of the form $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ (Norwegian), Norsk Mat. Tidsskr. **25** (1943), 17-20.
- [12] McDaniel W. L., Square Lehmer numbers, Colloq. Math., **66** (1993), 85-93.
- [13] Mignotte, M., Intersection des images de certaines suites récurrentes linéaires, Theor. Comp. Sci., **7** (1978), 117-122.
- [14] Mignotte, M., Une extension du théorème Skolem-Mahler, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** (1979), 233-235.

- [15] Pethő, A., Perfect powers in second order recurrences, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 34, Topics in Classical Number Theory Budapest (Hungary), 1981, 1217-1227.
- [16] Pethő, A., The Pell sequence contains only trivial perfect powers, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 60, Sets, Graphs and Numbers Budapest (Hungary), 1991, 561-568.
- [17] Pethő, A., Perfect powers in second order linear recurrences, J. Number Theory, **15** (1982), 5-13.
- [18] Ribenboim, P., Square-classes of Fibonacci and Lucas numbers, Portug. Math., **46** (1989), 159-175.
- [19] Ribenboim, P. - McDaniel, W. L., Square classes of Lucas sequences, Portug. Math., **48** (1991), 469-473.
- [20] Ribenboim, P. - McDaniel, W. L., The square terms in Lucas sequence, J. Num. Theory, **58** (1996), 469-473.
- [21] Shorey, T. N. - Stewart, C. L., On the diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences, Math. Scand., **52** (1983), 24-36.
- [22] Szalay, L., On the diophantine equation $(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2$, Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva.
- [23] Szalay, L., A note on the products of the terms of linear recurrences, Acta Acad. Paed. Agriensis, **24** (1997), 47-53.
- [24] Szalay, L., A diophantine equation concerning linear recurrences, Periodica Math. Hungar., **35** (1997), 121-125.
- [25] Szalay, L., On the resolution of the equations $U_n = \binom{x}{3}$ and $V_n = \binom{x}{3}$, Fib. Quarterly, közlésre leadva.
- [26] Wyler, O., In the Fibonacci series $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ the first, second and twelfth terms are squares, Amer. Math. Monthly, **71** (1964), 221-222.

Szalay László publikációi

Az értekezés témaköréből készült publikációk

1. Szalay, L., A note on the products of the terms of linear recurrences, Acta Acad. Paed. Agriensis, **24** (1997), 47-53.
2. Szalay, L., A diophantine equation concerning linear recurrences, Periodica Math. Hungar., **35** (1997), 121-125.
3. Brindza, B. - Liptai, K. - Szalay, L., On products of the terms of linear recurrences, Number Theory, Eds.: Györy/Pethő/Sós, Walter de Gruyter GmbH&Co., Berlin, New York, 1998, 101-106.
4. Szalay, L., On the diophantine equation $(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2$, Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva.
5. Hajdu, L. - Szalay L., On the diophantine equations $(2^n - 1)(6^n - 1) = x^2$ and $(a^n - 1)(a^{kn} - 1) = x^2$, Periodica Math. Hungar., közlésre leadva.
6. Szalay L., On the resolution of the equations $U_n = \binom{x}{3}$ and $V_n = \binom{x}{3}$, Fib. Quarterly, közlésre leadva.
7. Liptai, K. - Szalay, L., Power classes of recurrence sequences, előkészületben.

Egyéb referált publikációk

1. Szalay, L., Egy diszkrét iteráció a számelméletben, BDTF Tudományos Közleményei VIII., Szombathely, 1992, 71-91.
2. Temesvári, Á. H. - Szalay, L., On a geometrical interpretation of a sampling, Beiträge zur Algebra und Geometrie, **35** (1994), No.2, 149-162.
3. Horváth, R. - Németh, L. - Szalay, L. - Závoti, J., Introduction to fractal geometry, Geomatikai Közlemények, **1** (1998), 185-188.

Egyéb tanulmányok

1. Szalay, L., Egy módszer sorozatok összegének kiszámítására és szakköri alkalmazása, Matematikatanárok I. Soproni Konferenciája, Konferenciakötet, Sopron, 1992, 39-40.
2. Temesvári, H. Á. - Szalay, L., Egy megjegyzés a Morley-tételhez, Poly-

gon, 1994, 84-92.

3. Számelméleti érdekességek, Matematikatanárok II. Soproni Konferenciája, Konferenciakötet, Sopron, 1994, 42-46.

4. Csanády, V. - Horváth, R. - Szalay, L., Matematikai statisztika, egyetemi jegyzet, Sopron, 1995.

5. An algorithm for drawing discrete iteration graphs, Proceedings of the International Conference of Applied Informatics, Eger 1995, 155.

Szalay László szakmai előadásai, részvétele konferenciákon

Előadások nemzetközi konferenciákon

1. On the diophantine equation $(2^n - 1)(3^n - 1) = x^2$, 13th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice, 1997.

2. Introduction to fractal geometry, 1. Geomatika Konferencia, Sopron, 1999.

3. Second order linear recurrences and binomial coefficients of the form $\binom{x}{3}$, 14th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Liptovský Ján, 1999.

Egyéb előadások

1. Egy diszkrét iteráció a számelméletben, VEAB Rendszereleméleti Szakbizottsága Matematikai Munkabizottságának ülése, Sopron, 1992.

2. Egy módszer sorozatok összegének kiszámítására és szakköri alkalmazása, Matematikatanárok I. Soproni Konferenciája, Sopron, 1992.

3. Számelméleti problémák, BJMT Soproni Tagozata felkérésére, Sopron, 1993.

4. Számelméleti érdekességek, Matematikatanárok II. Soproni Konferenciája, Sopron, 1994.

5. A Baker-módszer egy alkalmazása, VEAB Rendszereleméleti Szakbizottsága Matematikai Munkabizottságának ülése, Veszprém, 1996.

6. A rekurzió, Rácz László Vándorgyűlés, Sopron, 1996. (Horváth Róberttel közösen.)
7. A Pell egyenlet, szakköri előadás, Hajdúdorog, 1997.
8. Egyenletek megoldása számítógéppel, Rácz László Vándorgyűlés, Szombathely, 1999. (Horváth Róberttel és Németh Lászlóval közösen.)

Részvétel konferenciákon

1. VI. Österreichisch-Ungarische Geometrietagung, Szombathely, 1990.
2. XIII. Österreichischer Mathematikerkongreß, Linz, 1993.
3. 8th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, Prága, 1995.
4. Number Theory'96 Conference, Eger, 1996.
5. International Conference on Artificial Neural Networks and their Application Possibilities, Kassa, 1996.
6. Teaching Mathematics for Engineering Students, Miskolc, 1999.