

Diszkrét és folytonos idejű autoregressziós
folyamatok statisztikai kérdéseiről

On Statistical Problems of Discrete and Continuous
Time Autoregressive Processes

doktori (PhD) értekezés tézisei

Katalin Varga

Institute of Mathematics and Informatics
University of Debrecen, Hungary

2003

1 Bevezetés

Az értekezés a szerző négy cikkén alapszik, melyből hármat társszerzőkkel közösen, egyet önállóan írt. A disszertáció öt fejezetből áll: az első fejezet összefoglalja a tárgyalta kérdéseket és röviden ismerteti az eredményeket. A második az elméleti előzményeket foglalja össze. A harmadik, negyedik és ötödik fejezet tartalmazza a szerző által elért eredményeket.

Az autoregressziós modelleket évtizedek óta széles körben tanulmányozzák, és alkalmazzák. Ennek oka a következő: a lineáris modellek elég általánosak ahhoz, hogy nagy pontossággal írjanak le fontos, a gyakorlatban előforduló idősorokat. További előnyük abban rejlik, hogy matematikai szempontból könnyen kezelhetők.

A témakört áttekintő első mű Box és Jenkins [10] nevéhez fűződik. Fontos elméleti eredmények találhatóak Fuller [15] és Lipster, Shirayev [21] könyveiben. Az autoregressziós folyamatok statisztikai kérdéseit Arató [3] műve foglalja össze, továbbá felhívja a figyelmet a diszkrét és a megfelelő folytonos idejű modellek közötti kapcsolatra.

A disszertáció három különböző modell paraméter becsléseit vizsgálja. A harmadik fejezetben, mely az [1] cikkén alapszik, tárgyaljuk Arató, Kolmogorov és Sinay [6] klasszikus eredményeinek általánosítását. Pap és van Zuijlen [27] az eredeti eredményt a komplex folyamat periódus paraméterének pontos eloszlásáról több dimenzióra általánosította. A fejezetben tárgyalta eredmény kibővíti azon folyamatok osztályát, melyre az eredmény igaz, azáltal, hogy megmutatja: [27]-ben az egyik feltétel felesleges.

A negyedik fejezet, amely a [2] és a [3] cikkén alapszik, közel instabil, közel stabil és expozív folyamatok AR modelleket vizsgál. A fejezet első része diszkrét idejű modellek eltolás paramétereinek határeloszlását vizsgálja. Továbbá a diszkrét és a megfelelő folytonos idejű modell paraméter becslései közötti kapcsolatot ismerteti. A fejezet második részében közel instabil modellek együttható mátrixának becslését vizsgálja, abban a speciális esetben, amikor a mátrix Jordan-alakban van.

Az ötödik fejezet, amely a [4] cikkén alapszik, többdimenziós AR folyamatok várható értékének becslését tárgyalja: vizsgálja a becslés határeloszlását és a konzisztencia kérdését.

2 Többdimenziós AR folyamatok paraméter becslésének pontos eloszlása

A disszertáció 3. fejezete Arató, Kolmogorov és Sinay [6] eredményének általánosításával foglalkozik. Ezen eredmény szerint a komplex értékű elsőrendű AR folyamatok periódusának maximum-likelihood becslése pontosan normális eloszlású. Legyen $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, $t \geq 0$, komplex értékű stacionárius autoregresszív folyamat, amelyet a

következő sztochasztikus differenciálegyenlet ad meg:

$$d\xi(t) = -\gamma\xi(t)dt + dw(t),$$

ahol $w(t) = w_1(t) + iw_2(t)$, $t \geq 0$ standard, komplex Wiener-folyamat, (azaz $w_1(t)$ and $w_2(t)$ független, standard, valós értékű Wiener-folyamatok) és $\gamma = \lambda - i\omega$, $\lambda > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ esetén.

Tekintsük a következő statisztikákat:

$$s_\xi^2(t) = \int_0^t |\xi(u)|^2 du, \quad r_\xi(t) = \int_0^t |\xi(u)|^2 d\theta(u),$$

ahol $\theta(t)$, $t \geq 0$ a következő

$$\xi(t) = |\xi(t)| e^{i\theta(t)}.$$

Ismert, hogy az ω periódus maximum-likelihood becslése:

$$\hat{\omega}_\xi(t) = \frac{r_\xi(t)}{s_\xi^2(t)},$$

továbbá

$$s_\xi(t) (\hat{\omega}_\xi(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{minden } t \geq 0 \text{ esetén,}$$

ahol $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ jelöli az eloszlások azonosságát.

Ebben az eredményben az a meglepő, hogy nem aszimptotikus tulajdonságról van szó, hanem az alkalmasan normált becslés pontos eloszlásáról. Az eredményt először Arató, Kolmogorov és Sinay [6] fogalmazta meg, és alkalmazta a Föld tengelyének mozgásának modellezésére. Ezután többen bizonyították: Novikov [24], Liptser és Shirayev [21]. Arató [4]-ben adott az eredményre új, egyszerű bizonyítást Novikov módszerének segítségével.

Fogalmazzuk át az állítást $X(t)$, $t \geq 0$ kétdimenziós, valós értékű AR folyamatra:

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t)dt \\ X_2(t)dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ahol $W(t)$, $t \geq 0$, a standard, kétdimenziós folyamat, és $\lambda \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Ekkor a megfelelő statisztikák a következők:

$$s_X^2(t) = \int_0^t (X_1^2(u) + X_2^2(u)) du, \quad r_X(t) = \int_0^t (X_1(u) dX_2(u) - X_2(u) dX_1(u)).$$

Az ω periódus maximum-likelihood becslése

$$\hat{\omega}_X(t) = \frac{r_X(t)}{s_X^2(t)},$$

és

$$s_X(t) (\hat{\omega}_X(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{minden } t > 0.$$

Ekkor a következő kézenfekvő kérdés merül fel. Tekintsük a d -dimenziós $X(t)$, $t \geq 0$ folyamatot, melyet a következő sztochasztikus differenciálegyenlet ad meg:

$$dX(t) = AX(t)dt + dW(t), \quad t \geq 0,$$

ahol $W(t)$, $t \geq 0$ a standard, d -dimenziós Wiener-folyamat és A egy $d \times d$ mátrix. Mely A -ra és $X(0)$ kezdeti értékre tett feltételek esetén teljesül, hogy az A mátrix bizonyos elemeinek alkalmasan normált maximum-likelihood becslése pontosan normális eloszlású.

Pap [25] és Fazekas [14] találtak ilyen speciális többdimenziós folyamatokat. Majd Pap és van Zuijlen [27] adtak többdimenziós általánosítást. A disszertációban megmutatjuk, hogy [27] feltételei gyengíthetők, az állítás igaz marad a feltételek egy részének elhagyása után is.

Tekintsük a következő többdimenziós folyamatot:

$$dX(t) = \left(-\lambda I_d + \sum_{i=1}^m \omega_i C_i \right) X(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 0, \quad (2)$$

ahol I_d a $d \times d$ -s egységmátrix és $\lambda, \omega_1, \dots, \omega_m \in \mathbb{R}$ az ismeretlen paraméterek, továbbá $C_1, \dots, C_m$ rögzített ferdénszimmetrikus mátrixok. Ekkor $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)^\top$ maximum-likelihood becslése a következő:

$$\hat{\omega}_X(t) = \sigma_X^{-1}(t) r_X(t),$$

ahol $\sigma_X(t)$ $m \times m$ -es mátrix

$$\sigma_X(t) = \left(\int_0^t \langle C_i X(s), C_j X(s) \rangle ds \right)_{1 \leq i, j \leq m},$$

és $r_X(t)$ m -dimenziós oszlopvektor

$$r_X(t) = \left(\int_0^t \langle C_i X(s), dX(s) \rangle \right)_{1 \leq i \leq m}^\top.$$

Pap és van Zuijlen [27]-ben bizonyították, hogy

$$\sigma_X^{1/2}(t)(\hat{\omega}_X(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, I_m) \quad \text{minden } t > 0, \quad (3)$$

ha a (C1) – (C3) feltételek teljesülnek, ahol

$$(C1) \quad C_i^\top = -C_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(C2) \quad (C_i C_j + C_j C_i) C_k = C_k (C_i C_j + C_j C_i), \quad i, j, k = 1, \dots, m$$

$$(C3) \quad (C_i C_j + C_j C_i)(C_k C_l + C_l C_k) \in \mathcal{L}(C_u C_v, 1 \leq u, v \leq m), \quad i, j, k, l = 1, \dots, m$$

ahol $\mathcal{L}(C_u C_v, 1 \leq u, v \leq m)$ jelöli a $C_u C_v, 1 \leq u, v \leq m$, alakú mátrixok lineáris hálóját.

A disszertáció első tételében belátjuk, hogy (C3) feltétel felesleges:

Tétel 2.1. *Legyen $X(t)$, $t \geq 0$ (2) által megadott folyamat. Tegyük fel, hogy (C1) és (C2) feltételek teljesülnek, ekkor (3) teljesül.*

3 Közel instabil AR modellek

A disszertáció negyedik fejezetében közel instabil, közel stabil és explozív AR modelleket vizsgálunk. A többdimenziós AR modelleket együtthatható mátrixuk segítségével osztályozhatjuk. Tekintsük a d -dimenziós autoregressziós modellt:

$$\begin{cases} X_k = QX_{k-1} + \varepsilon_k, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

ahol ε_k d -dimenziós valós vektor jelöli a k időpontbeli véletlen zajt, és Q $d \times d$ -s mátrix, amely a modell egyik ismeretlen paramétere. A modell bővíthető eltolás paraméterrel, ezt az esetet vizsgáljuk a 4. fejezet első részében. A második rész tartalmazza az együtthatható mátrix becslésének vizsgálatát speciális mátrixok esetén. Jelölje $\varrho(Q)$ a Q mátrix spektrálsugarát, azaz a sajátértékei abszolútértékeinek maximumát. Ha $\varrho(Q) < 1$, akkor a modellt stabilisnek vagy aszimptotikusan stacionáriusnak nevezzük. Mint az ismert, ekkor a Q legkisebb négyzetes becslése aszimptotikusan normális (lásd [1], [22]), feltéve, hogy ε_k független, azonos eloszlású, $E\varepsilon_k = 0$, $E\varepsilon_k\varepsilon_k^\top = \Sigma$. Ha $\varrho(Q) = 1$, a modellt instabilnak, ha $\varrho(Q) > 1$ explozívnek hívjuk. Ez az osztályozás különböző viselkedésű folyamatokat különít el: a stabilis folyamatok csillapodó jellegűek, az instabil folyamatok bolyongáshoz hasonlóak, az explozív folyamatok a zaj-folyamattól lényegében függetlenül robbanásszerűen növekszenek. Az instabil modell az utóbbi idők népszerű pénzügyi, közgazdasági modellje, többek között azért, mert a megfigyelések szerint tőzsdei, pénzügyi adatsorok leírására alkalmas.

3.1 Az eltolás paraméter becslése AR(1) modellben

A negyedik fejezet első részében közel instabil modell sorozatot vizsgálunk. A közel instabil modellsorozat együtthathatói meghatározott rendben tartanak egy adott instabil modell együtthathatójához:

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = \alpha^{(n)} X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

ahol

$$\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}, \quad \gamma^{(n)} \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}.$$

Az alábbi eltolás paraméterrel bővített modell eltolás paraméterének legkisebb négyzetes becslését vizsgáltuk:

$$Z_k^{(n)} := X_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

ahol $m^{(n)} \in \mathbb{R}$ az ismeretlen paraméter, és $h_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ ismert konstansok. Jelölje $\hat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ az $m^{(n)}$ legkisebb négyzetes becslését $\{Z_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$ megfigyelések alapján, ahol $0 \leq T_1 < T_2$.

Az $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ határeloszlását vizsgáltuk $n \rightarrow \infty$ esetén, továbbá összefüggést kerestünk $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ és az $\widehat{m}_{T_1, T_2}$ maximum-likelihood becslés között, amely a megfelelő folytonos idejű modell $Z(t) := Y(t) + mh(t)$, $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ m eltolásparaméteréhez tartozik. Bebizonyítottuk, hogy $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ minden modell típus esetén aszimptotikusan normális, de a konvergencia sebessége sokkal kisebb a közel instabil esetben. A stationárius esetet vizsgálva azt találtuk, hogy $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ nem marad aszimptotikusan normális, ha $\gamma^{(n)} \rightarrow 0$.

A zéró indítású közel instabil AR modell

Tekintsük a $\{Z(t) : t \geq 0\}$ zéró indítású Ornstein-Uhlenbeck folyamatot:

$$\begin{cases} dY(t) = -\gamma Y(t) dt + dW(t), & t \geq 0, \\ Y(0) = 0, \\ Z(t) = Y(t) + mh(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

ahol $\gamma \in \mathbb{R}$ ismert paraméter, $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ismert függvény, és $m \in \mathbb{R}$ az ismeretlen paraméter.

Legyen $0 \leq T_1 < T_2$. Ekkor Baran, Pap és van Zuijlen [7] bizonyították m maximum-likelihood becsléséről a következőt. Jelölje $\mathbb{P}_Z$ és $\mathbb{P}_Y$ a Z és Y folyamatok által $C([T_1, T_2] \rightarrow \mathbb{R})$ -n generált mértéket. Ha h kétszer folytonosan differenciálható és $h(0) = 0$, akkor $\mathbb{P}_Z$ és $\mathbb{P}_Y$ mértékek ekvivalensek és m maximum-likelihood becslése $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ megfigyelések alapján a következő:

$$\widehat{m}_{T_1, T_2} = \frac{\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}}{\widehat{A}_{T_1, T_2}},$$

ahol

$$\widehat{A}_{T_1, T_2} = \begin{cases} \gamma \coth(\gamma T_1) h(T_1)^2 + \gamma h(T_2)^2 + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, \\ \quad \text{if } \gamma \neq 0, \ T_1 \neq 0, \\ \frac{h(T_1)^2}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} h'(t)^2 dt, & \text{if } \gamma = 0, \ T_1 \neq 0, \\ \gamma h(T_2)^2 + \int_0^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{\zeta}_{T_1, T_2} = \begin{cases} (\gamma \coth(\gamma T_1) h(T_1) - h'(T_1)) Z(T_1) + (\gamma h(T_2) + h'(T_2)) Z(T_2) \\ + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) Z(t) dt, & \text{if } \gamma \neq 0, T_1 \neq 0, \\ \frac{h(T_1) Z(T_1)}{T_1} + h'(T_2) Z(T_2) - h'(T_1) Z(T_1) \\ - \int_{T_1}^{T_2} h''(t) Z(t) dt, & \text{if } \gamma = 0, T_1 \neq 0, \\ (\gamma h(T_2) + h'(T_2)) Z(T_2) + \int_0^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) Z(t) dt, & \text{if } T_1 = 0. \end{cases}$$

Továbbá, $\widehat{m}_{T_1, T_2}$ normális eloszlású m várható értékkel és $1/\widehat{A}_{T_1, T_2}$ szórással. Megjegyezzük, hogy a $h(0) = 0$ feltétel szükséges, mivel $h(0) \neq 0$ és $m \neq 0$ esetén a $\mathbb{P}_Z$ és $\mathbb{P}_Y$ mértékek szingulárisak, $Y(0) = 0$ és $Z(0) = mh(0) \neq 0$ miatt.

Tekintsük most az eltoló AR(1) modell sorozatot:

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = \alpha^{(n)} X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0^{(n)} = 0, \\ Z_k^{(n)} = X_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

ahol $n = 1, 2, \dots$ és $\{\alpha^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ ismert és $\{h_k^{(n)} : n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots\}$ ismeretlen paraméterek. Ekkor $m^{(n)}$ legkisebb négyzetes becslése $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ a $\{Z_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$, $0 \leq T_1 < T_2$, megfigyelések alapján a következő:

$$\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} = \frac{\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)}}{\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)}},$$

ahol

$$\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)} = \begin{cases} \frac{(1 - (\alpha^{(n)})^2) (h_{[T_1 n]}^{(n)})^2}{1 - (\alpha^{(n)})^{2[T_1 n]}} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2, & \text{if } |\alpha^{(n)}| \neq 1, T_1 \neq 0, \\ \frac{(h_{[T_1 n]}^{(n)})^2}{[T_1 n]} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2 & \text{if } |\alpha^{(n)}| = 1, T_1 \neq 0, \\ \sum_{j=1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2 & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)}}{1 - (\alpha^{(n)})^{2[T_1 n]}} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, \\ \text{if } |\alpha^{(n)}| \neq 1, \quad T_1 \neq 0, \\ \\ \frac{h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)}}{[T_1 n]} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, & \text{if } |\alpha^{(n)}| = 1, \quad T_1 \neq 0, \\ \\ \sum_{j=1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

továbbá

$$\overline{\Delta} h_j^{(n)} := h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)}, \quad \overline{\Delta} Z_j^{(n)} := Z_j^{(n)} - \alpha^{(n)} Z_{j-1}^{(n)}.$$

Megjegyezzük, hogy $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ $m^{(n)}$ várható értékű és $1/\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)}$ szórású.

A disszertáció második tétele jellemzi $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ aszimptotikus viselkedését, és a diszkrét és a folytonos idejű modell közötti kapcsolatot.

Tétel 3.1. *Tegyük fel, hogy $h_k^{(n)} = h\left(\frac{k}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$ esetén, valamely $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(0) = 0$ kétszer folytonosan differenciálható függvényre. Tegyük fel továbbá, hogy $\{\varepsilon_j^{(n)} : j = 1, \dots, n\}$ minden n -re független, azonos eloszlású nulla várható értékkel és 1 szórással.*

(i) *Ha $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\frac{\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \widehat{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\widehat{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) *Ha $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \pm\infty$, akkor*

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

Következmények:

(i) *Ha $\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}$ úgy, hogy $\gamma^{(n)} \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$, akkor*

$$\frac{\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \widehat{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\widehat{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) Ha $\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}$ úgy, hogy $\gamma^{(n)} \rightarrow \pm\infty$, akkor

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

(iii) Ha $\alpha^{(n)} \rightarrow \alpha \neq 1$, akkor

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1 - \alpha)^2 \int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

Megjegyezzük, hogy $m^{(n)}$ sorozatra nem kell semmilyen feltevést tenni, ellentétben azzal az esettel, amikor $\alpha^{(n)}$ együtttható legkisebb négyzetes becslését vizsgáljuk.

A stacionárius közel instabil AR modell

A stacionárius AR(1) idősor a következő egyenlet gyengén stacionárius megoldása

$$\widetilde{X}_k = \alpha \widetilde{X}_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ahol szükségképpen $|\alpha| < 1$. Tekintsük most az eltolt stacionárius AR(1) modell sorozatot

$$\begin{cases} \widetilde{X}_k^{(n)} = \alpha^{(n)} \widetilde{X}_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{Z}_k^{(n)} = \widetilde{X}_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ahol $n = 1, 2, \dots$, és $|\alpha^{(n)}| < 1$, $n = 1, 2, \dots$ továbbá $h_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{Z}$ ismert és $m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ ismeretlen paraméterek. Tegyük fel, hogy $\{\varepsilon_j^{(n)} : j \in \mathbb{Z}\}$ minden n -re független, azonos eloszlású, nulla várható értékű és 1 szórású.

Ekkor

$$\mathbb{E} \widetilde{X}_k^{(n)} = 0, \quad \mathbb{D}^2 \widetilde{X}_k^{(n)} = \frac{1}{1 - (\alpha^{(n)})^2}, \quad \text{minden } k \in \mathbb{Z}.$$

Az $m^{(n)}$ paraméter legkisebb négyzetes becslése $\widetilde{m}^{(n)}$, amely $\{\widetilde{Z}_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$ megfigyeléseken alapszik, $T_1 < T_2$ esetén a következő:

$$\widetilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} = \frac{\widetilde{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)}}{\widetilde{A}_{T_1, T_2}^{(n)}},$$

ahol

$$\widetilde{A}_{T_1, T_2}^{(n)} = \left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) \left(h_{[T_1 n]}^{(n)}\right)^2 + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)})^2,$$

$$\widetilde{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)} = \left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)}) (\widetilde{Z}_j^{(n)} - \alpha^{(n)} \widetilde{Z}_{j-1}^{(n)}).$$

Tekintsük most a stacionárius Ornstein-Uhlenbeck folyamatot, $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ -t, amely a következő egyenlet stacionárius megoldása

$$d\tilde{Y}(t) = -\gamma\tilde{Y}(t) dt + dW(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol $\gamma > 0$.

Ez egy nulla várható értékű Gauss-folyamat, amelyre

$$\mathbb{E}\tilde{Y}(t_1)\tilde{Y}(t_2) = \frac{e^{-\gamma|t_2-t_1|}}{2\gamma}.$$

Tekintsük az eltolt Ornstein-Uhlenbeck folyamatot, $\{\tilde{Z}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ -t, amely a következő:

$$\begin{cases} d\tilde{Y}(t) = -\gamma\tilde{Y}(t) dt + dW(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{Z}(t) = \tilde{Y}(t) + mh(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ahol $\gamma > 0$ ismert paraméter, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ismert függvény, és $m \in \mathbb{R}$ az ismeretlen paraméter.

A következő eredményt bizonyították Baran, Pap és van Zuijlen [7]-ben az m maximum-likelihood becsléséről. Jelölje $\mathbb{P}_{\tilde{Z}}$ és $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ az $\tilde{Z}$ és $\tilde{Y}$ folyamatok által $C([T_1, T_2] \rightarrow \mathbb{R})$ -n generált mértékeket. Ha h kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\mathbb{P}_{\tilde{Z}}$ és $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ ekvivalensek és m maximum-likelihood becslése, mely $\{\tilde{Z}(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ megfigyeléséken alapszik a következő:

$$\tilde{m}_{T_1, T_2} = \frac{\tilde{\zeta}_{T_1, T_2}}{\tilde{A}_{T_1, T_2}},$$

ahol

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{T_1, T_2} &= \gamma h(T_1)^2 + \gamma h(T_2)^2 + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, \\ \tilde{\zeta}_{T_1, T_2} &= \gamma h(T_1)\tilde{Z}(T_1) + \gamma h(T_2)\tilde{Z}(T_2) + h'(T_2)\tilde{Z}(T_2) - h'(T_1)\tilde{Z}(T_1) \\ &\quad + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) \tilde{Z}(t) dt. \end{aligned}$$

Továbbá, $\tilde{m}_{T_1, T_2}$ normális eloszlású m várható értékkel és $1/\tilde{A}_{T_1, T_2}$ szórással. A disszertáció következő tétele a zéró indítású esethez hasonló eredményt tartalmaz a stacionárius esetben.

Tétel 3.2. *Tegyük fel, hogy $h_k^{(n)} = h\left(\frac{k}{n}\right)$ minden $n = 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén, egy $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényre. Tegyük fel továbbá, hogy $\{\varepsilon_j^{(n)} : j \in \mathbb{Z}\}$ minden n -re független, azonos eloszlású nulla várható értékkel és 1 szórással.*

(i) Ha $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$ akkor

$$\frac{\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\tilde{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) Ha $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \infty$ akkor

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

(iii) Legyen $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow 0$ és $\varepsilon_k^{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Ha $h(t) = c$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re, valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén, akkor

$$\sqrt{1 - \alpha^{(n)}}(\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2c^2}\right).$$

(b) Egyébként,

$$\frac{\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h'(t)^2 dt}\right).$$

3.2 Többdimenziós közel instabil AR folyamatok

A negyedik fejezet második részében közel instabil, komplex-értékű folyamatokat vizsgálunk, melyekben az együttható mátrix Jordan-alakban van. A sajátérték alkalmasan normált legkisebb négyzetes becslésének határeloszlását vizsgáljuk. Bizonyítjuk, hogy a határeloszlás csak a folyamat utolsó, d -edik komponensétől függ.

Ez a modellosztály eléggé speciális, azonban gyakorlati szempontból gyakran hasznos a legnagyobb sajátérték viselkedésének vizsgálata.

Foglalkozunk továbbá a diszkrét és a megfelelő folytonos idejű modell sajátérték paraméterének maximum-likelihood becslésének kapcsolatával. Vizsgáljuk több Jordan-blokk esetében is a becslés viselkedését.

Közel instabil AR modell Jordan-alakú együtthatóval

Tekintsük a d -dimenziós, komplex-értékű autoregressziós folyamatot:

$$\begin{cases} X_k = J(\lambda, d)X_{k-1} + \varepsilon_k, & k=1, 2, \dots, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

ahol $\lambda \in \mathbb{C}$ és $d \in \mathbb{N}$, $J(\lambda, d)$ egy $d \times d$ -s, Jordan-alakú mátrix λ sajátértékkel:

$$J(\lambda, d) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & & \cdot \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \lambda & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

és λ a modell ismeretlen paramétere. Ha az ε_k véletlen zajfolyamat egy szokásos, nem túl erős feltételnek tesz eleget, akkor bizonyítható, hogy a sajátérték alkalmasan normált becslése, $\hat{\lambda}_n$ gyengén konvergál egy speciális d -dimenziós Ornstein-Uhlenbeck folyamat funkcionáljához:

$$n^d(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} e^{(d-1)\theta i} \frac{\int_0^1 \overline{Y_d(t)} dW_d(t)}{\int_0^1 |Y_d(t)|^2 dt},$$

ahol az $Y(t)$, $t \in [0, 1]$ folyamatot a

$$dY(t) = AY(t)dt + \Sigma dW(t) \quad Y(0) = 0,$$

egyenlet adja, egy meghatározott A mátrix-szal és $W(t)$, $t \in [0, 1]$ standard, komplex-értékű, d -dimenziós és Wiener-folyamattal.

Bizonyítjuk azt is, hogy az egydimenziós esetben a diszkrét idejű modell paraméterének legkisebb négyzetes becslése konvergál a megfelelő folytonos idejű modell együtthatójának maximum-likelihood becsléséhez, ilyen összefüggés nagyobb dimenziókra nem teljesül.

Legyen $\mathbb{C}^d$ a d -dimenziós komplex vektorok tere. Jelölje

$$\langle x, y \rangle := x^\top \bar{y}, \quad x, y \in \mathbb{C}^d \text{ esetén}$$

a $\mathbb{C}^d$ -beli skaláris szorzatot, és legyen $\bar{y}$ az y komplex konjugáltja. Ekkor $x \in \mathbb{C}^d$ esetén x normája:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lemma 3.3. A λ paraméter legkisebb négyzetes becslése az $X_1, \dots, X_n$ megfigyelések alapján

$$\hat{\lambda} := \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \langle X_{k,j} - X_{k-1,j-1}, X_{k-1,j} \rangle}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d |X_{k-1,j}|^2},$$

ahol $X_k = (X_{k,1}, \dots, X_{k,d})^\top$ és $X_{k,0} := 0$.

Tekintsük $n = 1, 2, \dots$ esetén a d -dimenziós, komplex-értékű AR modell sorozatot:

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = J(\lambda_n) X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, n, \\ X_0^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

ahol $\{\varepsilon_k^{(n)}\}$ $\mathbb{C}^d$ -beli véletlen vektorokból álló tömb és $\lambda_n = e^{h_n/n+i\theta}$, ahol $h_n \in \mathbb{C}$, $h_n \rightarrow h \in \mathbb{C}$ és $\theta \in (-\pi, \pi]$. Ekkor, nyilvánvalóan $J(\lambda_n) \rightarrow J(e^{i\theta})$, mivel $\lambda_n \rightarrow e^{i\theta}$. Ebből következik, hogy a modell sorozat közel instabil, mivel $\varrho(J(e^{i\theta})) = 1$.

Tekintsük most a fenti közel instabil modell λ_n paraméterének legkisebb négyzetes becslését. Ez a fenti lemma alapján a következő:

$$\widehat{\lambda}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \langle X_{k,j}^{(n)} - X_{k-1,j-1}^{(n)}, X_{k-1,j}^{(n)} \rangle}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d |X_{k-1,j}^{(n)}|^2},$$

ahol $X_{k,0}^{(n)} := 0$. Tegyük a következő feltevést az $\{\varepsilon_k^{(n)}\}$ véletlen zajsorozatra:

(C) Legyen $\varepsilon_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, $\mathbb{C}^d$ -beli négyzetesen integrálható martingál differenciák háromszög rendszere az $(\mathcal{F}_k^{(n)})_{k=0,1,\dots,n;n \geq 1}$ filtrációra nézve, úgy, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E} \left(\eta_k^{(n)} \left(\eta_k^{(n)} \right)^\top \middle| \mathcal{F}_{k-1}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2} I_{2d} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

ahol $\eta_k^{(n)} := (\text{Re}(\zeta_k^{(n)}), \text{Im}(\zeta_k^{(n)}))^\top$ és

$$\forall \alpha > 0 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E}(\|\varepsilon_k^{(n)}\|^2 \chi_{\{\|\varepsilon_k^{(n)}\| > \alpha\sqrt{n}\}} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Ekkor a következő tétel teljesül:

Tétel 3.4. *Tegyük fel, hogy $\varepsilon_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$ tömbre teljesül a (C) feltétel. Ekkor*

$$n^d (\widehat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} e^{(d-1)\theta i} \frac{\int_0^1 \overline{Y_d(t)} dW_d(t)}{\int_0^1 |Y_d(t)|^2 dt}, \quad (6)$$

ahol az $Y(t)$, $t \in [0, 1]$ folyamatot

$$dY(t) = AY(t)dt + \Sigma dW(t), \quad Y(0) = 0,$$

adja és $W(t)$, $t \in [0, 1]$ esetén standard, komplex, d -dimenziós Wiener-folyamat, továbbá $\Sigma := \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0)$, és A az alábbi Jordan-alakú mátrix h sajátértékkel:

$$A := \begin{pmatrix} h & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & h & 0 & & & \cdot \\ 0 & 1 & h & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & h & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

A folytonos idejű modell együttthatójának ML-becslése

Tekintsük a d -dimenziós, komplex-értékű Ornstein-Uhlenbeck folyamatot, amelyet a következő sztochasztikus differenciál egyenlet megoldásaként értelmezünk:

$$dY(t) = AY(t) dt + \Sigma dW(t), \quad Y(0) = 0,$$

ahol $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ a standard, $\mathbb{C}^d$ -beli értékű Wiener-folyamat. Azonosítsuk a komplex Wiener-folyamatot $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ -t, a $\mathbb{R}^{2d}$ -beli standard Wiener-folyamattal $\{\widetilde{W}(t), t \in [0, 1]\}$ -al, ahol

$$\widetilde{W}(t) := (\operatorname{Re} W_1(t), \operatorname{Im} W_1(t), \operatorname{Re} W_2(t), \operatorname{Im} W_2(t), \dots, \operatorname{Re} W_d(t), \operatorname{Im} W_d(t)).$$

Azonosítsuk az $\{Y(t), t \in [0, 1]\}$ komplex folyamatot az $\mathbb{R}^{2d}$ -beli értékű

$$\widetilde{Y}(t) := (\operatorname{Re} Y_1(t), \operatorname{Im} Y_1(t), \operatorname{Re} Y_2(t), \operatorname{Im} Y_2(t), \dots, \operatorname{Re} Y_d(t), \operatorname{Im} Y_d(t))$$

folyamattal. Ekkor a fenti komplex sztochasztikus differenciálegyenlet ekvivalens a következő valós differenciálegyenlettel:

$$\widetilde{Y}(t) = \widetilde{A}\widetilde{Y}(t) dt + \widetilde{\Sigma} d\widetilde{W}(t), \quad \widetilde{Y}(0) = 0,$$

ahol $\widetilde{A}$ -t és $\widetilde{\Sigma}$ -t az alábbiként értelmezzük:

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &:= \begin{pmatrix} K & 0 & \cdot & 0 \\ I_2 & K & 0 & \cdot \\ 0 & I_2 & K & \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & I_2 & K \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\Sigma} &:= \begin{pmatrix} I_2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1, 0, 0, \dots), \\ K &:= \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h & -\operatorname{Im} h \\ \operatorname{Im} h & \operatorname{Re} h \end{pmatrix}, \quad I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

($\widetilde{A}$ és $\widetilde{\Sigma}$ valós $2d \times 2d$ mátrixok.) Tekintsük a $\widetilde{W}$ és $\widetilde{Y}$ folyamatok által $C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2d})$ -n generált $\mathbb{P}_{\widetilde{W}}$ és $\mathbb{P}_{\widetilde{Y}}$ mértékeket. Mint az ismeretes, $\mathbb{P}_{\widetilde{Y}}$ abszolút folytonos $\mathbb{P}_{\widetilde{W}}$ -re nézve és a Radom-Nikodym deriváltjuk az alábbi alakú:

$$\frac{d\mathbb{P}_{\widetilde{Y}}}{d\mathbb{P}_{\widetilde{W}}}(\widetilde{Y}) = \exp \left\{ \int_0^1 \langle \widetilde{\Sigma}^\ominus \widetilde{A}\widetilde{Y}(u), d\widetilde{Y}(u) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \widetilde{A}\widetilde{Y}(u), \widetilde{\Sigma}^\ominus \widetilde{A}\widetilde{Y}(u) \rangle du \right\}, \quad (7)$$

ahol $\widetilde{\Sigma}^\ominus$ jelöli $\widetilde{\Sigma}$ mátrix pszeudoinverzét (lásd Arató [3]). Könnyen látható, hogy itt $\widetilde{\Sigma}^\ominus = \widetilde{\Sigma}$. Végül h ML-becslése:

$$\widehat{h} = \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dY_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

ahol Y_1 az Y komplex folyamat első komponense. Így h maximum-likelihood becslése csak Y első komponensétől függ.

Megjegyezzük azt, hogy $d = 1$ esetén az előző tétel állítása szerint

$$n(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dW_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

és az Ito-formula alapján

$$\hat{h} = \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dY_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt} = h + \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dW_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

így $n(\lambda_n - \lambda) \rightarrow h$ esetén

$$n(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \hat{h},$$

következik, azaz a diszkrét idejű modell együtthatójának legkisebb négyzetes becslése a megfelelő folytonos idejű modell együtthatójának maximum-likelihood becsléséhez konvergál. (Lásd még [20].)

Ha $d \geq 2$ hasonló állítás nem teljesül. mivel a diszkrét idejű modell együtthatójának legkisebb négyzetes becslése csak a komplex értékű Y folyamat utolsó komponensétől függ.

4 Többdimenziós AR folyamatok várható értékének becslése

A disszertáció ötödik fejezetében többdimenziós autoregressziós folyamatok várható értékének becslésével foglalkozunk. Arató [3] tárgyalja valós- és komplex-értékű AR(1) folyamatok ismeretlen várható értékének statisztikai vizsgálatát.

Ezeket az eredményeket alapul véve többdimenzióban keressük a várható érték becslését zéró indítású és stacionárius folyamatok esetén. Megmutatjuk, hogy a becslés konzisztens, ha a folyamat periódus jellegű komponenséhez tartozik, azonban ha csillapítás jellegű komponenshez tartozik a paraméter, akkor ez nem teljesül. Komplex-értékű AR(1) esetén, ahol a folyamat viselkedése periódikus, a várható érték jól becsülhető. AR(2) folyamat esetén, akkor létezik jó tulajdonságú becslés, ha a karakterisztikus egyenlet gyökei komplexek.

Becslés stacionárius AR folyamatok esetén

Tekintsük a d -dimenziós stacionárius AR folyamatot, $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ -t, amely a következő egyenlet gyengén stacionárius megoldása:

$$d\tilde{Y}(t) = -A\tilde{Y}(t) dt + \Sigma dW(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

ahol A és Σ $d \times d$ -s mátrixok úgy, hogy A minden sajátértékének pozitív a valós része és $\{W(t) : t \in \mathbb{R}\}$ a d -dimenziós standard Wiener-folyamat, azaz $\{W(t) : t \geq 0\}$ és $\{W(-t) : t \geq 0\}$ független d -dimenziós Wiener-folyamatok.

Az $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ zéró várható értékű Gauss-folyamat, melyre

$$\text{Cov}(\tilde{Y}(t), \tilde{Y}(s)) = \mathbb{E}\tilde{Y}(t)\tilde{Y}(s)^\top = e^{-(t-s)A}B(0), \quad s \leq t \text{ esetén,}$$

ahol a $d \times d$ -s $B(0)$ mátrix a következő mátrix egyenlet egyértelmű megoldása:

$$AB(0) + B(0)A^\top = \Sigma\Sigma^\top. \quad (9)$$

Tekintsük most az eltolts stacionárius AR folyamatot, $\{\tilde{Z}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ -t:

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{Y}(t) + Hm, \quad t \in \mathbb{R},$$

ahol H egy ismert $d \times d$ -s mátrix és $m \in \mathbb{R}^d$ az ismeretlen paraméter vektor.

A disszertációban bizonyítjuk az alábbi tételt:

Tétel 4.1. *Legyen $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$. Ha létezik H^{-1} akkor m maximum-likelihood becslése $\{\tilde{Z}(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ megfigyelések alapján:*

$$\tilde{m} = U^{-1}V_{\tilde{Z}}, \quad (10)$$

ahol

$$U = H^\top B(0)^{-1}H + (T_2 - T_1)H^\top A^\top (\Sigma\Sigma^\top)^\ominus AH, \quad (11)$$

$$V_{\tilde{Z}} = H^\top B(0)^{-1}\tilde{Z}(T_1) + H^\top A^\top (\Sigma\Sigma^\top)^\ominus \left(\tilde{Z}(T_2) - \tilde{Z}(T_1) + A \int_{T_1}^{T_2} \tilde{Z}(t) dt \right). \quad (12)$$

Továbbá

$$\tilde{m} \sim \mathcal{N}_d(m, U^{-1}). \quad (13)$$

Becslés zéró indítású AR folyamatok esetén

Tekintsük a d -dimenziós zéró indítású AR folyamatot.

$$\begin{cases} dY(t) = -AY(t)dt + \Sigma dW(t), & t \geq 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

ahol A és Σ tetszőleges $d \times d$ mátrixok.

Ekkor az $\{Y(t) : t \geq 0\}$ folyamat zéró várható értékű Gauss-folyamat, melyre

$$\text{Cov}(Y(t), Y(s)) = \mathbb{E}Y(t)Y(s)^\top = e^{-(t-s)A}B(0, s), \quad 0 \leq s \leq t \text{ esetén,}$$

ahol a $B(0, s)$ $d \times d$ -s mátrix az alábbi mátrix egyértelmű megoldása:

$$AB(0, s) + B(0, s)A^\top = \Sigma\Sigma^\top - e^{-sA}\Sigma\Sigma^\top e^{-sA^\top}.$$

Tekintsük most az eltolts stacionárius AR folyamatot, $\{Z(t) : t \geq 0\}$ -t:

$$Z(t) = Y(t) + m, \quad t \geq 0,$$

ahol $m \in \mathbb{R}^d$ az ismeretlen paraméter vektor.

Ebben az esetben is igaz az előzőhöz igen hasonló tétel.

Tétel 4.2. *Legyen $0 < T_1 < T_2$. Az m paraméter $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ megfigyeléseken alapuló maximum-likelihood becslése*

$$\tilde{m} = U^{-1}V_Z,$$

ahol

$$U = B(0, T_1)^{-1} + (T_2 - T_1)A^\top (\Sigma\Sigma^\top)^\ominus A,$$

$$V_Z = B(0, T_1)^{-1}\tilde{Z}(T_1) + A^\top (\Sigma\Sigma^\top)^\ominus \left(\tilde{Z}(T_2) - \tilde{Z}(T_1) + A \int_{T_1}^{T_2} \tilde{Z}(t) dt \right).$$

Továbbá

$$\tilde{m} \sim \mathcal{N}_d(m, U^{-1}) \quad \text{teljesül.}$$

1 Introduction

This dissertation deals with parameter estimation in discrete and continuous time autoregressive processes. It is based on one paper of the author [2] and three papers of the author with coauthors [1], [3], [4]. It contains five chapters. The first chapter gives an overview of the subject and contains a summary of the results of the thesis. The second chapter includes the preliminary results. Chapter 3, 4 and 5 contain the author's results.

Autoregressive stochastic models were widely studied and applied in the last decades. The reason is the following: the class of linear models is wide enough to describe many important empirical time series and can be handled well mathematically. In addition, autoregressive models use parameters parsimoniously.

The first survey of the subject was given by Box and Jenkins [10]. Theoretical results can be found in Fuller [15] and Lipster, Shirayev [21]. Arató's book [3] is a summary of the topic drawing attention to the connection between the discrete and the related continuous time models.

The dissertation treats three different types of models. In Chapter 3, which is based on [1], we discuss the generalization of the classical result of Arató, Kolmogorov and Sinay [6]. Pap and van Zuijlen [27] gave a multidimensional generalization of result on the complex process. We widen out the class of models for which the result holds by showing that one of their conditions is superfluous.

In Chapter 4, which based on [2] and [3], we deal with nearly unstable, nearly stable and explosive AR models. In the first part of this chapter we investigate the limit behaviour of the shift parameter of the discrete time model and study the connection between discrete and continuous time processes. In the second part of this chapter nearly unstable multidimensional AR models are treated. We discuss time series where the coefficient matrices are in Jordan normal form.

In Chapter 5, which is based on [4], we study the estimation of the mean of multivariate AR processes. The limit behaviour of the estimator and the question of consistency is discussed.

2 Parameter Estimation with Exact Distribution for Multivariate AR Processes

In Chapter 3 we treat the generalization of the result of Arató, Kolmogorov, Sinay [6] on the exact distribution of the maximum likelihood estimate (MLE) of the period of the complex-valued stationary first order autoregressive process.

The complex-valued stationary autoregressive process $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, $t \geq 0$,

can be given by the stochastic differential equation (SDE)

$$d\xi(t) = -\gamma\xi(t)dt + dw(t),$$

where $w(t) = w_1(t) + iw_2(t)$, $t \geq 0$ is a standard complex Wiener process (ie. $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are independent standard real valued Wiener processes) and $\gamma = \lambda - i\omega$ with $\lambda > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Consider the statistics

$$s_\xi^2(t) = \int_0^t |\xi(u)|^2 du, \quad r_\xi(t) = \int_0^t |\xi(u)|^2 d\theta(u),$$

where $\theta(t)$, $t \geq 0$ is defined by

$$\xi(t) = |\xi(t)| e^{i\theta(t)}.$$

It is known that the maximum likelihood estimate (MLE) of the period ω is

$$\hat{\omega}_\xi(t) = \frac{r_\xi(t)}{s_\xi^2(t)},$$

and

$$s_\xi(t) (\hat{\omega}_\xi(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{for all } t \geq 0,$$

where $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ denotes equality in distribution. Surprisingly, we have an exact distribution, not only an asymptotic property. This result was first formulated and applied in astronomy in Arató, Kolmogorov, Sinay [6]. Complicated proofs can be found in Novikov [24], Liptser and Shirayev [21]. Recently Arató [4] gave an elegant new proof using Novikov's method.

The statement can be reformulated also in the following way. Let us consider the two-dimensional real-valued stationary autoregressive process $X(t)$, $t \geq 0$, given by the SDE

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t)dt \\ X_2(t)dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

where $W(t)$, $t \geq 0$, is a standard two-dimensional Wiener process, and $\lambda \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Consider the statistics

$$s_X^2(t) = \int_0^t (X_1^2(u) + X_2^2(u)) du, \quad r_X(t) = \int_0^t (X_1(u) dX_2(u) - X_2(u) dX_1(u)).$$

The maximum likelihood estimate of the period ω is

$$\hat{\omega}_X(t) = \frac{r_X(t)}{s_X^2(t)},$$

and

$$s_X(t) (\hat{\omega}_X(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{for all } t > 0.$$

The following natural question can be formulated. Consider the d -dimensional process $X(t)$, $t \geq 0$, given by the SDE

$$dX(t) = AX(t)dt + dW(t), \quad t \geq 0,$$

where $W(t)$, $t \geq 0$ is a standard d -dimensional Wiener process and A is a $d \times d$ matrix. Which conditions should be imposed on the matrix A and on the distribution of the initial value $X(0)$ in order that the suitably normalised MLE of some of its entries will have exactly a normal distribution? This process is the so-called Ornstein-Uhlenbeck process and considered as a generalization of Wiener processes.

Pap [25] and Fazekas [14] found some examples for stationary multidimensional Ornstein-Uhlenbeck processes which have the above property. Pap and van Zuijlen gave a multidimensional generalization. We could weaken the condition of Pap and van Zuijlen by showing that a part of the conditions is superfluous in [27].

Consider the following multidimensional process:

$$dX(t) = \left(-\lambda I_d + \sum_{i=1}^m \omega_i C_i \right) X(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 0, \quad (16)$$

where I_d is the $d \times d$ unit matrix, $\lambda, \omega_1, \dots, \omega_m \in \mathbb{R}$ are unknown parameters and $C_1, \dots, C_m$ are fixed skew-symmetric matrices.

The MLE of $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)^\top$ is given by

$$\hat{\omega}_X(t) = \sigma_X^{-1}(t) r_X(t),$$

where $\sigma_X(t)$ is the $m \times m$ matrix

$$\sigma_X(t) = \left(\int_0^t \langle C_i X(s), C_j X(s) \rangle ds \right)_{1 \leq i, j \leq m},$$

and $r_X(t)$ is the m -dimensional column vector

$$r_X(t) = \left(\int_0^t \langle C_i X(s), dX(s) \rangle \right)_{1 \leq i \leq m}^\top.$$

In [27] it is proved that

$$\sigma_X^{1/2}(t)(\hat{\omega}_X(t) - \omega) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}(0, I_m) \quad \text{for all } t > 0, \quad (17)$$

if conditions (C1) – (C3) are satisfied, where

$$(C1) \quad C_i^\top = -C_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(C2) \quad (C_i C_j + C_j C_i) C_k = C_k (C_i C_j + C_j C_i), \quad i, j, k = 1, \dots, m$$

$$(C3) \quad (C_i C_j + C_j C_i)(C_k C_l + C_l C_k) \in \mathcal{L}(C_u C_v, 1 \leq u, v \leq m), \quad i, j, k, l = 1, \dots, m$$

where $\mathcal{L}(C_u C_v, 1 \leq u, v \leq m)$ denotes the linear hull of the matrixes $C_u C_v$, $1 \leq u, v \leq m$.

In our first theorem we showed that condition (C3) is superfluous.

Theorem 2.1. *Let $X(t)$, $t \geq 0$, be the process given by (16). Let us suppose that the conditions (C1) and (C2) are satisfied. Then (17) holds.*

3 Nearly Unstable AR Models

In Chapter 4, nearly unstable, nearly stable and explosive AR models are studied. A multidimensional AR model can be characterized by the help of its coefficient matrix. Consider the d -dimensional autoregressive model

$$\begin{cases} X_k = QX_{k-1} + \varepsilon_k, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

where the d -dimensional real-valued random vector ε_k contains the random noise at time k , and the $d \times d$ matrix Q is the unknown parameter of the model. Let $\varrho(Q)$ denote the spectral radius of the matrix Q , i.e., the maximum of the absolute values of the eigenvalues of the matrix Q . When $\varrho(Q) < 1$, the model is said to be stable or asymptotically stationary. It is well-known that under the assumption that the ε_k 's are i.i.d. with $E\varepsilon_k = 0$, $E\varepsilon_k\varepsilon_k^\top = \Sigma$, the least squares estimate (LSE) of Q is asymptotically normal (see [1], [22]). When $\varrho(Q) = 1$, the model is said to be unstable or unstationary, when $\varrho(Q) > 1$ the model is explosive. The unstable model is also called unit root case and have been the subject of much recent attention in the econometrics literature. In part, this is because the unit root hypothesis is of considerable interest in applications, not only with data from financial and commodity markets where it has a long history but also with aggregate time series.

3.1 The Shifted AR(1) Process

In the first part of Chapter 4 we study a sequence of nearly unstable AR models:

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = \alpha^{(n)} X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

where

$$\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}, \quad \gamma^{(n)} \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}.$$

We discuss the questions concerning the LSE of the shift-parameter $m^{(n)}$ of the model

$$Z_k^{(n)} := X_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

where $m^{(n)} \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter and $h_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$ are known constraints.

Let $\hat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ be the LSE of $m^{(n)}$ based on the observations $\{Z_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$, where $0 \leq T_1 < T_2$. Our purpose is to investigate the limit behaviour of $\hat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ as

$n \rightarrow \infty$, and the connection between $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ and the MLE $\widehat{m}_{T_1, T_2}$ of m based on the observations $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$, where $Z(t) := Y(t) + mh(t)$ is the shifted Ornstein-Uhlenbeck process with some appropriate function h . We discuss these questions concerning nearly stable, nearly unstable and nearly explosive models, as well. It turns out that $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ is always asymptotically normal, but the speed of convergence is much less in the nearly unstable case. The stationary case will be also treated, when $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ might not be asymptotically normal if $\gamma^{(n)} \rightarrow 0$.

Case of Zero Start AR Model

First, consider a shifted zero start Ornstein-Uhlenbeck process $\{Z(t) : t \geq 0\}$ given by

$$\begin{cases} dY(t) = -\gamma Y(t) dt + dW(t), & t \geq 0, \\ Y(0) = 0, \\ Z(t) = Y(t) + mh(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

where $\gamma \in \mathbb{R}$ is a known parameter, $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a known function and $m \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter.

Let $0 \leq T_1 < T_2$. Baran, Pap and Zuijlen [7] proved the following result on the MLE of m . Denote by $\mathbb{P}_Z$ and $\mathbb{P}_Y$ the measures generated on $C([T_1, T_2] \rightarrow \mathbb{R})$ by the processes Z and Y , respectively.

If h is twice continuously differentiable with $h(0) = 0$, then the measures $\mathbb{P}_Z$ and $\mathbb{P}_Y$ are equivalent and the MLE of m based on the observations $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ has the form

$$\widehat{m}_{T_1, T_2} = \frac{\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}}{\widehat{A}_{T_1, T_2}},$$

where

$$\widehat{A}_{T_1, T_2} = \begin{cases} \gamma \coth(\gamma T_1) h(T_1)^2 + \gamma h(T_2)^2 + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, & \text{if } \gamma \neq 0, T_1 \neq 0, \\ \frac{h(T_1)^2}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} h'(t)^2 dt, & \text{if } \gamma = 0, T_1 \neq 0, \\ \gamma h(T_2)^2 + \int_0^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{\zeta}_{T_1, T_2} = \begin{cases} (\gamma \coth(\gamma T_1) h(T_1) - h'(T_1)) Z(T_1) + (\gamma h(T_2) + h'(T_2)) Z(T_2) \\ + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) Z(t) dt, & \text{if } \gamma \neq 0, T_1 \neq 0, \\ \frac{h(T_1) Z(T_1)}{T_1} + h'(T_2) Z(T_2) - h'(T_1) Z(T_1) \\ - \int_{T_1}^{T_2} h''(t) Z(t) dt, & \text{if } \gamma = 0, T_1 \neq 0, \\ (\gamma h(T_2) + h'(T_2)) Z(T_2) + \int_0^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) Z(t) dt, & \text{if } T_1 = 0. \end{cases}$$

Moreover, $\widehat{m}_{T_1, T_2}$ is normally distributed with mean m and variance $1/\widehat{A}_{T_1, T_2}$. We note that the assumption $h(0) = 0$ is needed because if $h(0) \neq 0$ and $m \neq 0$, then the measures $\mathbb{P}_Z$ and $\mathbb{P}_Y$ are singular with respect to each other, since $Y(0) = 0$ and $Z(0) = mh(0) \neq 0$.

Next, consider a sequence of shifted zero start AR(1) models

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = \alpha^{(n)} X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, \\ X_0^{(n)} = 0, \\ Z_k^{(n)} = X_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

for $n = 1, 2, \dots$, where $\{\alpha^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ and $\{h_k^{(n)} : n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots\}$ are known and $\{m^{(n)} : n = 1, 2, \dots\}$ are unknown parameters.

The LSE $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ of the parameter $m^{(n)}$ based on the observations $\{Z_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$, where $0 \leq T_1 < T_2$ is

$$\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} = \frac{\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)}}{\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)}},$$

where

$$\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)} = \begin{cases} \frac{(1 - (\alpha^{(n)})^2) (h_{[T_1 n]}^{(n)})^2}{1 - (\alpha^{(n)})^{2[T_1 n]}} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2, & \text{if } |\alpha^{(n)}| \neq 1, T_1 \neq 0, \\ \frac{(h_{[T_1 n]}^{(n)})^2}{[T_1 n]} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2 & \text{if } |\alpha^{(n)}| = 1, T_1 \neq 0, \\ \sum_{j=1}^{[T_2 n]} (\overline{\Delta} h_j^{(n)})^2 & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

$$\widehat{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)}}{1 - (\alpha^{(n)})^{2[T_1 n]}} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, \\ \text{if } |\alpha^{(n)}| \neq 1, \quad T_1 \neq 0, \\ \\ \frac{h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)}}{[T_1 n]} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, & \text{if } |\alpha^{(n)}| = 1, \quad T_1 \neq 0, \\ \\ \sum_{j=1}^{[T_2 n]} \overline{\Delta} h_j^{(n)} \overline{\Delta} Z_j^{(n)}, & \text{if } T_1 = 0, \end{cases}$$

with the notation

$$\overline{\Delta} h_j^{(n)} := h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)}, \quad \overline{\Delta} Z_j^{(n)} := Z_j^{(n)} - \alpha^{(n)} Z_{j-1}^{(n)}.$$

We remark that $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ has mean $m^{(n)}$ and variance $1/\widehat{A}_{T_1, T_2}^{(n)}$.

The next statement describes the asymptotic behaviour of $\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)}$ and the connection between discrete and continuous time models.

Theorem 3.1. *Suppose that $h_k^{(n)} = h\left(\frac{k}{n}\right)$ for $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots$ with some twice continuously differentiable function $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ with $h(0) = 0$. Suppose that for all n , $\{\varepsilon_j^{(n)} : j = 1, \dots, n\}$ are i.i.d., mean zero and variance 1.*

(i) *If $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$, then*

$$\frac{\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \widehat{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\widehat{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) *If $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \pm\infty$, then*

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

Corollary 3.2. (i) *If $\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}$ with $\gamma^{(n)} \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$, then*

$$\frac{\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \widehat{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\widehat{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) *If $\alpha^{(n)} = 1 - \frac{\gamma^{(n)}}{n}$ with $\gamma^{(n)} \rightarrow \pm\infty$, then*

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

(iii) If $\alpha^{(n)} \rightarrow \alpha \neq 1$, then

$$\sqrt{n}(\widehat{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(1 - \alpha)^2 \int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

Remark 3.3. We note that no assumption is needed concerning the sequence $m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, unlike in case of the LSE of the coefficient $\alpha^{(n)}$.

Case of Stationary Nearly Unstable AR Model

A stationary AR(1) time series is the weakly stationary solution of

$$\widetilde{X}_k = \alpha \widetilde{X}_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

where necessarily $|\alpha| < 1$.

Consider a sequence of shifted stationary AR(1) models

$$\begin{cases} \widetilde{X}_k^{(n)} = \alpha^{(n)} \widetilde{X}_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k \in \mathbb{Z}, \\ \widetilde{Z}_k^{(n)} = \widetilde{X}_k^{(n)} + m^{(n)} h_k^{(n)}, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

for $n = 1, 2, \dots$, where $|\alpha^{(n)}| < 1$, $n = 1, 2, \dots$ and $h_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{Z}$ are known and $m^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ are unknown parameters. Suppose again that for all n , $\{\varepsilon_j^{(n)} : j \in \mathbb{Z}\}$ are i.i.d., mean zero and variance 1.

Then,

$$\mathbb{E} \widetilde{X}_k^{(n)} = 0, \quad \mathbb{D}^2 \widetilde{X}_k^{(n)} = \frac{1}{1 - (\alpha^{(n)})^2}, \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}.$$

The LSE $\widetilde{m}^{(n)}$ of the parameter $m^{(n)}$ based on the observations $\{\widetilde{Z}_k^{(n)} : [T_1 n] \leq k \leq [T_2 n]\}$, where $T_1 < T_2$ is

$$\widetilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} = \frac{\widetilde{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)}}{\widetilde{A}_{T_1, T_2}^{(n)}},$$

where

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{T_1, T_2}^{(n)} &= \left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) \left(h_{[T_1 n]}^{(n)}\right)^2 + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)})^2, \\ \widetilde{\zeta}_{T_1, T_2}^{(n)} &= \left(1 - (\alpha^{(n)})^2\right) h_{[T_1 n]}^{(n)} Z_{[T_1 n]}^{(n)} + \sum_{j=[T_1 n]+1}^{[T_2 n]} (h_j^{(n)} - \alpha^{(n)} h_{j-1}^{(n)}) (\widetilde{Z}_j^{(n)} - \alpha^{(n)} \widetilde{Z}_{j-1}^{(n)}). \end{aligned}$$

Next, consider a stationary Ornstein-Uhlenbeck process $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, which is the stationary solution of

$$d\tilde{Y}(t) = -\gamma\tilde{Y}(t) dt + dW(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

where $\gamma > 0$ necessarily.

It is a zero mean Gaussian process with

$$\mathbb{E}\tilde{Y}(t_1)\tilde{Y}(t_2) = \frac{e^{-\gamma|t_2-t_1|}}{2\gamma}.$$

Consider a shifted stationary Ornstein-Uhlenbeck process $\{\tilde{Z}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, given by

$$\begin{cases} d\tilde{Y}(t) = -\gamma\tilde{Y}(t) dt + dW(t), & t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{Z}(t) = \tilde{Y}(t) + mh(t), & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

where $\gamma > 0$ is a known parameter, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a known function and $m \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter.

In [7] the following result is proved on the MLE of m . Denote by $\mathbb{P}_{\tilde{Z}}$ and $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ the measures generated on $C([T_1, T_2] \rightarrow \mathbb{R})$ by the processes $\tilde{Z}$ and $\tilde{Y}$, respectively. If h is twice continuously differentiable, then the measures $\mathbb{P}_{\tilde{Z}}$ and $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ are equivalent and the MLE of m based on the observations $\{\tilde{Z}(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ has the form

$$\tilde{m}_{T_1, T_2} = \frac{\tilde{\zeta}_{T_1, T_2}}{\tilde{A}_{T_1, T_2}},$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{T_1, T_2} &= \gamma h(T_1)^2 + \gamma h(T_2)^2 + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t)^2 + h'(t)^2) dt, \\ \tilde{\zeta}_{T_1, T_2} &= \gamma h(T_1)\tilde{Z}(T_1) + \gamma h(T_2)\tilde{Z}(T_2) + h'(T_2)\tilde{Z}(T_2) - h'(T_1)\tilde{Z}(T_1) \\ &\quad + \int_{T_1}^{T_2} (\gamma^2 h(t) - h''(t)) \tilde{Z}(t) dt. \end{aligned}$$

Moreover, $\tilde{m}_{T_1, T_2}$ is normally distributed with mean m and variance $1/\tilde{A}_{T_1, T_2}$.

Theorem 3.4. Suppose that $h_k^{(n)} = h\left(\frac{k}{n}\right)$ for $n = 1, 2, \dots$, $k \in \mathbb{Z}$ with some twice continuously differentiable function $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suppose that for all n , $\{\varepsilon_j^{(n)} : j \in \mathbb{Z}\}$ are i.i.d., mean zero and variance 1.

(i) If $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$ then

$$\frac{\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{m}_{T_1, T_2} - m \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\tilde{A}_{T_1, T_2}}\right).$$

(ii) If $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow \infty$ then

$$\sqrt{n}(1 - \alpha^{(n)})(\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h(t)^2 dt}\right).$$

(iii) Let $n(1 - \alpha^{(n)}) \rightarrow 0$ and $\varepsilon_k^{(n)} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) If $h(t) = c$ for all $t \in \mathbb{R}$ with some $c \in \mathbb{R}$, then

$$\sqrt{1 - \alpha^{(n)}}(\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2c^2}\right).$$

(b) Otherwise,

$$\frac{\tilde{m}_{T_1, T_2}^{(n)} - m^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\int_{T_1}^{T_2} h'(t)^2 dt}\right).$$

3.2 Nearly Unstable Multidimensional AR Processes

In the second part of Chapter 4 we investigate nearly unstable complex-valued models, where the coefficient matrices are in Jordan normal form and we study the limit behaviour of the suitable normalised LSE of the eigenvalue. It will turn out that the limit distribution depends only on the last, d -th component of the process.

This type of models is rather special. However from a practical point of view it is often useful to investigate the behaviour of the greatest eigenvalue.

We also compared it with the maximum likelihood estimator (MLE) of the eigenvalue of the coefficient matrix of the related continuous time model. It is interesting to note that the MLE of the eigenvalue in the related continuous time model depends only on the first coordinate of the process. Matrices consisting of two or more Jordan blocks were also studied.

Nearly Unstable AR Models with Coefficient Matrices in Jordan Normal Form

Consider the d -dimensional complex-valued autoregressive model

$$\begin{cases} X_k = J(\lambda, d)X_{k-1} + \varepsilon_k, & k=1, 2, \dots, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$ and $d \in \mathbb{N}$, $J(\lambda, d)$ is a $d \times d$ matrix in Jordan normal form, with eigenvalue λ :

$$J(\lambda, d) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & & \cdot \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \lambda & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

and λ is the unknown parameter of the model.

If the random innovations ε_k satisfy a usual, rather general condition, then we found that the suitably normalised LSE of the eigenvalue $\hat{\lambda}_n$ converges weakly to a functional of a special d -dimensional Ornstein-Uhlenbeck process:

$$n^d(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} e^{(d-1)\theta i} \frac{\int_0^1 \overline{Y_d(t)} dW_d(t)}{\int_0^1 |Y_d(t)|^2 dt},$$

where the process $Y(t)$, $t \in [0, 1]$ is given by

$$dY(t) = AY(t)dt + \Sigma dW(t) \quad Y(0) = 0,$$

with a certain matrix A , and $W(t)$, $t \in [0, 1]$ is a standard complex d -dimensional Wiener process.

We also prove that in the one-dimensional model the LSE of the discrete time models converges to the MLE of the coefficient of the corresponding continuous time model.

If $d \geq 2$ then such relationship does not hold.

Let $\mathbb{C}^d$ be the space of the d -dimensional complex column vectors. Let us introduce the widely used notation

$$\langle x, y \rangle := x^\top \bar{y} \quad \text{for } x, y \in \mathbb{C}^d$$

for the scalar product in $\mathbb{C}^d$, where $\bar{y}$ denotes the complex conjugate of y . We introduce the norm of $x \in \mathbb{C}^d$ by

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

If we take into consideration the special form of the coefficient matrix then we can calculate the LSE of λ as follows.

Lemma 3.5. The LSE of λ , based on the observations $X_1, \dots, X_n$ is given by

$$\hat{\lambda} := \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \langle X_{k,j} - X_{k-1,j-1}, X_{k-1,j} \rangle}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d |X_{k-1,j}|^2},$$

where $X_k = (X_{k,1}, \dots, X_{k,d})^\top$ and $X_{k,0} := 0$.

For $n = 1, 2, \dots$ consider the sequence of d -dimensional complex-valued AR models:

$$\begin{cases} X_k^{(n)} = J(\lambda_n)X_{k-1}^{(n)} + \varepsilon_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, n, \\ X_0^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

where $\{\varepsilon_k^{(n)}\}$ is an array of random vectors in $\mathbb{C}^d$ and $\lambda_n = e^{h_n/n+i\theta}$ with $h_n \in \mathbb{C}$, $h_n \rightarrow h \in \mathbb{C}$ and $\theta \in (-\pi, \pi]$. Clearly $J(\lambda_n) \rightarrow J(e^{i\theta})$ since $\lambda_n \rightarrow e^{i\theta}$. It is easy to see that the model is nearly unstable, since $\varrho(J(e^{i\theta})) = 1$.

Consider the d -dimensional complex-valued nearly unstable AR process generated according to the scheme (19). We are interested in the limit behaviour of the LSE of λ_n which has the following form according to Lemma (3.5):

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d \langle X_{k,j}^{(n)} - X_{k-1,j-1}^{(n)}, X_{k-1,j}^{(n)} \rangle}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^d |X_{k-1,j}^{(n)}|^2},$$

where $X_{k,0}^{(n)} := 0$.

Let us put the following condition on the random disturbances $\{\varepsilon_k^{(n)}\}$.

(C) $\varepsilon_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, is a triangular array of square integrable martingale differences in $\mathbb{C}^d$ with respect to the filtrations $(\mathcal{F}_k^{(n)})_{k=0,1,\dots,n;n \geq 1}$ such that for all $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E} \left(\eta_k^{(n)} \left(\eta_k^{(n)} \right)^\top \middle| \mathcal{F}_{k-1}^{(n)} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2} I_{2d} \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

where $\eta_k^{(n)} := (\text{Re}(\zeta_k^{(n)}), \text{Im}(\zeta_k^{(n)}))^\top$ and

$$\forall \alpha > 0 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \mathbb{E}(\|\varepsilon_k^{(n)}\|^2 \chi_{\{\|\varepsilon_k^{(n)}\| > \alpha\sqrt{n}\}} | \mathcal{F}_{k-1}^{(n)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Theorem 3.6. Suppose that array $\varepsilon_k^{(n)}$ $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$ satisfies the condition (C). Then

$$n^d(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} e^{(d-1)\theta i} \frac{\int_0^1 \overline{Y_d(t)} dW_d(t)}{\int_0^1 |Y_d(t)|^2 dt}, \quad (20)$$

where the process $Y(t)$, $t \in [0, 1]$ is given by

$$dY(t) = AY(t)dt + \Sigma dW(t), \quad Y(0) = 0,$$

and $W(t)$, $t \in [0, 1]$ is a standard complex d -dimensional Wiener process, where

$\Sigma := \text{diag}(1, 0, 0, \dots, 0)$, and A is the Jordan matrix with eigenvalue h :

$$A := \begin{pmatrix} h & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & h & 0 & & & \cdot \\ 0 & 1 & h & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & h & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & h \end{pmatrix}.$$

MLE of the Coefficient of the Related Continuous Time Model

Consider the d -dimensional complex-valued Ornstein–Uhlenbeck process defined as the solution of the stochastic differential equation

$$dY(t) = AY(t) dt + \Sigma dW(t), \quad Y(0) = 0,$$

where $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ is a standard Wiener process with values in $\mathbb{C}^d$. Let us identify the complex process $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ with the standard Wiener process $\{\widetilde{W}(t), t \in [0, 1]\}$ in $\mathbb{R}^{2d}$, where

$$\widetilde{W}(t) := (\text{Re } W_1(t), \text{Im } W_1(t), \text{Re } W_2(t), \text{Im } W_2(t), \dots, \text{Re } W_d(t), \text{Im } W_d(t)).$$

Let us identify the complex process $\{Y(t), t \in [0, 1]\}$ with the process

$$\widetilde{Y}(t) := (\text{Re } Y_1(t), \text{Im } Y_1(t), \text{Re } Y_2(t), \text{Im } Y_2(t), \dots, \text{Re } Y_d(t), \text{Im } Y_d(t))$$

with values in $\mathbb{R}^{2d}$.

Then the above complex stochastic differential equation is equivalent with the following real stochastic differential equation:

$$\widetilde{Y}(t) = \widetilde{A}\widetilde{Y}(t) dt + \widetilde{\Sigma} d\widetilde{W}(t), \quad \widetilde{Y}(0) = 0,$$

where $\widetilde{A}$ and $\widetilde{\Sigma}$ are defined as the following blocks of matrices:

$$\widetilde{A} := \begin{pmatrix} K & 0 & \cdot & & 0 \\ I_2 & K & 0 & & \cdot \\ 0 & I_2 & K & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & 0 & I_2 & K \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Sigma} := \begin{pmatrix} I_2 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 0, 0, \dots),$$

where

$$K := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} h & -\operatorname{Im} h \\ \operatorname{Im} h & \operatorname{Re} h \end{pmatrix}, \quad I_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

($\tilde{A}$ and $\tilde{\Sigma}$ are real $2d \times 2d$ matrices.)

Consider the measures $\mathbb{P}_{\tilde{W}}$ and $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ on $C([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2d})$ generated by the real processes $\tilde{W}$ and $\tilde{Y}$, respectively. It is known that $\mathbb{P}_{\tilde{Y}}$ is absolutely continuous with respect to the measure $\mathbb{P}_{\tilde{W}}$ and the Radon-Nikodym derivative has the form

$$\frac{d\mathbb{P}_{\tilde{Y}}}{d\mathbb{P}_{\tilde{W}}}(\tilde{Y}) = \exp \left\{ \int_0^1 \langle \tilde{\Sigma}^\ominus \tilde{A} \tilde{Y}(u), d\tilde{Y}(u) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \tilde{A} \tilde{Y}(u), \tilde{\Sigma}^\ominus \tilde{A} \tilde{Y}(u) \rangle du \right\}, \quad (21)$$

where $\tilde{\Sigma}^\ominus$ denotes the pseudo inverse (or generalized inverse) of the matrix $\tilde{\Sigma}$ (see Arató [3]). It can be easily verified that $\tilde{\Sigma}^\ominus = \tilde{\Sigma}$.

Finally we obtain

$$\hat{h} = \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dY_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

where Y_1 is the first component of the complex process Y . So the MLE of h depends only on the first component of Y .

We remark that in the case $d = 1$ Theorem (3.6.) says that

$$n(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dW_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

and the Itô's formula gives

$$\hat{h} = \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dY_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt} = h + \frac{\int_0^1 \overline{Y_1(t)} dW_1(t)}{\int_0^1 |Y_1(t)|^2 dt},$$

hence $n(\lambda_n - \lambda) \rightarrow h$ implies

$$n(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \hat{h},$$

that is, the LSE of the coefficient of the discrete time models converges to the MLE of the coefficient of the corresponding continuous time model. (See also [20].)

If $d \geq 2$ then such a relationship does not hold, because the limit distribution of the LSE of the coefficient of the discrete time models depends on the last component of the complex process Y .

It is also interesting to mention that the complex process Y is driven, in fact, only by the first component W_1 of the Wiener process W , and the limit distribution of the LSE contains the last component W_d , which is, by definition, independent of the first component W_1 (if $d \geq 2$).

4 Estimation of the Mean of Multivariate AR Processes

In Chapter 5 we treat the estimation of the mean of multivariate AR processes. In the book of Arató [3] the estimation of the unknown mean of real- and complex-valued AR(1) processes is discussed. Our aim was to investigate the problem of estimation of the mean for stationary and zero start multidimensional autoregressive processes. We show that for autoregressive processes the estimators of the mean are consistent if the component of the process is 'periodical', and it is not the case if the component is a 'damping' one. In the one-dimensional AR(1) case, the mean cannot be estimated well. In the complex AR(1), where the process behaves periodically, the mean can be estimated well. For an AR(2) process, the mean can be estimated well, if the roots of the characteristic equation are complex.

Case of Stationary AR Process

Consider a d -dimensional stationary AR process $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, which is the weakly stationary solution of

$$d\tilde{Y}(t) = -A\tilde{Y}(t)dt + \Sigma dW(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

where A and Σ are $d \times d$ matrices such that all eigenvalues of A have necessarily positive real part, and $\{W(t) : t \in \mathbb{R}\}$ is a d -dimensional standard Wiener process, i.e., $\{W(t) : t \geq 0\}$ and $\{W(-t) : t \geq 0\}$ are independent d -dimensional standard Wiener processes.

The process $\{\tilde{Y}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ is a zero mean Gaussian process with

$$\text{Cov}(\tilde{Y}(t), \tilde{Y}(s)) = \mathbb{E}\tilde{Y}(t)\tilde{Y}(s)^\top = e^{-(t-s)A}B(0), \quad \text{for } s \leq t,$$

where the $d \times d$ matrix $B(0)$ is the only solution of the matrix equation

$$AB(0) + B(0)A^\top = \Sigma\Sigma^\top. \quad (23)$$

Now, consider a shifted stationary AR process $\{\tilde{Z}(t) : t \in \mathbb{R}\}$, given by

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{Y}(t) + Hm, \quad t \in \mathbb{R},$$

where H is a known $d \times d$ constraint matrix and $m \in \mathbb{R}^d$ is an unknown parameter vector.

Theorem 4.1. *Let $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$. If H^{-1} exists then the maximum likelihood estimator of m based on the observation of $\{\tilde{Z}(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ is given by*

$$\tilde{m} = U^{-1}V_{\tilde{Z}}, \quad (24)$$

where

$$U = H^\top B(0)^{-1} H + (T_2 - T_1) H^\top A^\top (\Sigma \Sigma^\top)^\ominus A H, \quad (25)$$

$$V_{\tilde{Z}} = H^\top B(0)^{-1} \tilde{Z}(T_1) + H^\top A^\top (\Sigma \Sigma^\top)^\ominus \left(\tilde{Z}(T_2) - \tilde{Z}(T_1) + A \int_{T_1}^{T_2} \tilde{Z}(t) dt \right). \quad (26)$$

Moreover,

$$\tilde{m} \sim \mathcal{N}_d(m, U^{-1}). \quad (27)$$

Case of Zero Start AR Process

Consider a d -dimensional zero start AR process

$$\begin{cases} dY(t) = -AY(t) dt + \Sigma dW(t), & t \geq 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

where A and Σ are arbitrary $d \times d$ matrices. The process $\{Y(t) : t \geq 0\}$ is a zero mean Gaussian process with

$$\text{Cov}(Y(t), Y(s)) = \mathbb{E}Y(t)Y(s)^\top = e^{-(t-s)A} B(0, s), \quad \text{for } 0 \leq s \leq t,$$

where the $d \times d$ matrix $B(0, s)$ is the only solution of the matrix equation

$$AB(0, s) + B(0, s)A^\top = \Sigma \Sigma^\top - e^{-sA} \Sigma \Sigma^\top e^{-sA^\top}.$$

Now, consider a shifted stationary AR process $\{Z(t) : t \geq 0\}$, given by

$$Z(t) = Y(t) + m, \quad t \geq 0,$$

where $m \in \mathbb{R}^d$ is an unknown parameter vector.

Theorem 4.2. *Let $0 < T_1 < T_2$. The maximum likelihood estimator of m based on the observation of $\{Z(t) : t \in [T_1, T_2]\}$ is given by*

$$\tilde{m} = U^{-1} V_Z,$$

where

$$U = B(0, T_1)^{-1} + (T_2 - T_1) A^\top (\Sigma \Sigma^\top)^\ominus A,$$

$$V_Z = B(0, T_1)^{-1} \tilde{Z}(T_1) + A^\top (\Sigma \Sigma^\top)^\ominus \left(\tilde{Z}(T_2) - \tilde{Z}(T_1) + A \int_{T_1}^{T_2} \tilde{Z}(t) dt \right).$$

Moreover,

$$\tilde{m} \sim \mathcal{N}_d(m, U^{-1}).$$

Remark 4.3. *If $T_1 = 0$ then $Z(0) = Y(0) + m = m$ gives the precise value of the parameter m .*

Bibliography

- [1] T. W. Anderson. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Ann. Math. Statist.*, 30:676–687, 1959.
- [2] M. Arató. Estimation of the parameters of a stationary gaussian markov process. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 145:13–16, 1961.
- [3] M. Arató. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients. A Statistical Approach (Lecture Notes in Control and Inf., vol. 45, 309 pp)*. Springer-Verlag, Berlin, 1982. (In Russian, Moscow: Nauka, 1989).
- [4] M. Arató. Asymptotic inference for discrete vector ar processes. *Publ. Math*, 36:9–13, 1989.
- [5] M. Arató and A. Benczúr. Distribution function of the damping parameter of stationary gaussian processes. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 5:445–456, 1970.
- [6] M. Arató, A.N. Kolmogorov, and Ya. G. Sinay. Estimation of the parameters of a complex stationary gaussian markov process. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 146:747–750, 1962.
- [7] S. Baran, G. Pap, and M. van Zuijlen. Estimation of the mean of stationary and nonstationary ornstein–uhlenbeck processes and sheets. Report 0003, University of Nijmegen, The Netherlands, 2000.
- [8] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley and Sons, New York, 1968.
- [9] M. J. Bobkoski. *Hypothesis testing in nonstationary time series*. PhD thesis, Univ. Wisconsin, Madison, 1983.
- [10] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time Series Analysis Forecasting and Control*. Holden–Day, San Francisco, 1976.
- [11] N. H. Chan and C. Z. Wei. Asymptotic inference for nearly nonstationary AR(1) processes. *Ann. Statist.*, 15:1050–1063, 1987.
- [12] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators*. Interscience Publishers, New York, 1958.
- [13] K. Dzharidze, T. Kormos, J. van der Meer, and M. van Zuijlen. Parameter estimation for nearly nonstationary AR(1) processes. Report 9218, Department of Mathematics, Catholic University Nijmegen, The Netherlands, 1992.
- [14] I. Fazekas. Maximum likelihood estimators of parameters of multidimensional stationary gaussian ar processes. *Computers Math. Applic.*, 27:19–24, 1994.

- [15] W.A. Fuller. *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [16] R. R. Gantmacher. *Matrizenrechnung*. VEB Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin, 1958.
- [17] P. Jeganathan. On the asymptotic behaviour of least-squares estimators in AR time series with roots near the unit circle. *Econometric Theory*, 7:269–306, 1991.
- [18] K. Koncz. On the parameter estimation of diffusion type processes with constant coefficients. *Analysis Mathematica*, 13:75–91, 1987.
- [19] J. Kormos and G. Pap. Nearly unstable multidimensional AR(1) processes. *Computers Math. Appl.*, 34:1–7, 1997.
- [20] J. Kormos, T. van der Meer, G. Pap, and M. van Zuijlen. Asymptotic inference of nearly nonstationary complex-valued AR(1) processes. In *Exploring Stochastic Laws, Festschrift in honour of the 70th birthday of academician V. S. Korolyuk*. The Netherlands: VSP, 1995.
- [21] R.S. Liptser and A.N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes I, II*,. Springer Verlag, New York, 1977.
- [22] H. B. Mann and A. Wald. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11:173–220, 1943.
- [23] T.v.d. Meer, G. Pap, and M. van Zuijlen. Asymptotic inference for nearly unstable $ar(p)$ processes. *Econometric Theory*, 15:184–217, 1999.
- [24] A. Novikov. On the estimation of parameters of diffusion processes. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 7:201–209, 1972.
- [25] G. Pap. The distribution of estimates of parameters of multidimensional stationary ar process. *Computers Math. Applic.*, 27:1–8, 1994.
- [26] G. Pap and M. van Zuijlen. Asymptotic inference for nearly unstable multidimensional ar processes. *Theory Probab. Appl.*, 41:703–710, 1996.
- [27] G. Pap and M. van Zuijlen. Parameter estimation with exact distribution for multidimensional ornstein-uhlenbeck processes. *Journal of Multivariate Analysis*, 59(2):153–165, November 1996.
- [28] P. C. B. Phillips. Towards a unified asymptotic theory for autoregression. *Biometrika*, 74:535–547, 1987.
- [29] Tsay R.S. and G.C. sc Tiao. Asymptotic properties of multivariate nonstationary processes with applications to autoregressions. *Ann. Statist.*, 18:220–250, 1990.
- [30] A.N. Shiryaev. *Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [31] C.A. Stock J.H. Sims and M.W. Watson. Inference in linear time series models with some unit roots¹. *Econometrica*, 58:113–144, 1990.
- [32] A. Stockmarr and M. Jacobsen. Gaussian diffusions and autoregressive processes: weak convergence and statistical inference. *Scan. J. Statist.*, 18:403–419, 1994.
- [33] J. S. White. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. *Ann. Math. Statist.*, 29:1188–1197, 1958.

5 List of Publications

- [1] G. Pap and K. Varga. Statistical inference for multidimensional ar processes. *Publ. Math. Debrecen*, 49/3-4:211–218, 1996.
- [2] K. Varga. Nearly unstable ar models with coefficient matrices in jordan normal form. *Computers Math. Applic.*, 36/9:1–10, 1998.
- [3] M. Arató, G. Pap, and K. Varga. Asymptotic behaviour of the least squares estimator of the mean of ar(1) models. accepted to *Analysis Mathematica*, 2001.
- [4] M. Arató, G. Pap, and K. Varga. Estimation of the mean of multivariate ar processes. *Computers Math. Applic.*, 43:707–719, 2002.

6 Conference Talks

- [1] G. Pap and K. Varga. Parameter estimation with exact distribution for multidimensional ar processes parameter estimation. In *XVI. Seminar on Stability Problems of Stochastical Models*, Eger, Hungary, 1994.
- [2] K. Varga. Nearly unstable ar models with coefficient matrices in jordan normal form. In *XVIII. Seminar on Stability Problems of Stochastical Models*, Hajdúszoboszló, Hungary, 1997.
- [3] M. Arató, G. Pap, and K. Varga. Asymptotic behaviour of the least squares estimator of the mean of ar models. In *XXI. Seminar on Stability Problems of Stochastical Models*, Eger, Hungary, 2001.