



1949

**MATEMATIKÁBÓL TEHETSÉGES KÖZÉPISKOLAI TANULÓK
GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSI KÉPESSÉGÉNEK VIZSGÁLATA
ÉS FEJLESZTÉSE**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Győry Ákos
Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2021

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20.

.....
Győry Ákos

Tanúsítom, hogy Győry Ákos doktorjelölt 2019-2021 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20..

.....
Herendiné Dr. Kónya Eszter

MATEMATIKÁBÓL TEHETSÉGES KÖZÉPISKOLAI TANULÓK GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSI KÉPESSÉGÉNEK VIZSGÁLATA ÉS FEJLESZTÉSE

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Győry Ákos okleveles matematika-fizika szakos tanár, programozó matematikus, fizikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök:

Dr.

tagok:

Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... .

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Herendiné dr. Kónya Eszter egyetemi docensnek, aki időt, energiát sosem spórolva, végtelen türelemmel és lelkiismeretességgel irányította doktori tanulmányaimat. Mindvégig rengeteg hasznos ötlettel, tanáccsal látott el, miközben egyenrangú partnernek tekintett a kutatások során.

Hálával tartozom egykori matematikatanáromnak, Kónya István tanár úrnak, aki megszerettette velem a matematikát, és aki nélkül nem választottam volna a pedagóguspályát.

Köszönettel tartozom dr. Kovács Zoltán és dr. Kosztolányi József egyetemi docenseknek az előzetes vita során kifejtett építő jellegű megjegyzéseikért, amik rámutattak a dolgozat akkori verziójának lényeges gyengeségeire. Ezek a javaslatok nagyban hozzájárultak a disszertáció végső formába öntéséhez.

Köszönöm dr. Szabó Csaba professzor úrnak, hogy megismertetett a matematikai didaktikai kutatások módszereivel, és a munkám kezdetén egyengette az utamat.

Köszönet illeti a kutatásban részt vevő diákokat, akik mindvégig teljes odaadással kapcsolódtak be a közös munkába.

Végül, de nem utolsósorban hálával és köszönettel tartozom a tanulmányaimat végig áldozatosan támogató szüleimnek.

TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. Elméleti háttér	3
1.1. <i>A van Hiele-elmélet</i>	3
1.2. <i>Középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának vizsgálata</i>	4
1.3. <i>Érvelés és bizonyítás</i>	7
1.4. <i>A bizonyítási képesség és annak fejlesztése középiskolában</i>	9
1.5. <i>Akciókutatás</i>	14
2. Középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintjeivel kapcsolatos vizsgálatok	16
2.1. <i>Kutatási kérdések</i>	16
2.2. <i>Kutatómódszertan a K1-1, K1-2 és K1-3 kérdések megválaszolásához</i>	16
2.3. <i>Tapasztalatok és válaszok a K1-1, K1-2 és K1-3 kutatási kérdések kapcsán</i>	17
3. Végzés előtt álló speciális matematika tagozatos tanulók bizonyítási képességének vizsgálata	20
3.1. <i>Kutatási kérdések</i>	20
3.2. <i>Kutatómódszertan a K2-1, K2-2 és K2-3 kutatási kérdésekhez</i>	20
3.2.1 <i>A kísérlet körülményei</i>	20
3.2.2 <i>A mérőeszköz</i>	21
3.3. <i>A kutatási kérdések és a feladatok kapcsolata</i>	22
3.4. <i>A bizonyítás-teszt tapasztalatai</i>	22
3.4.1 <i>A bizonyítás-teszt első feladata</i>	22
3.4.2 <i>A bizonyítás-teszt második feladata</i>	23
3.4.3 <i>A bizonyítás-teszt ötödik feladata</i>	25
3.4.4 <i>A bizonyítás-teszt hatodik feladata</i>	27
3.4.5 <i>Észrevételek a bizonyítás-teszttel kapcsolatban</i>	30
3.5. <i>Tapasztalatok és következtetések a tanulók bizonyítási képességére vonatkozólag ..</i>	31
4. Speciális matematika tagozatos képzést kezdő 9. évfolyamos tanulók bizonyítási képességének fejlesztése	32
4.1. <i>Kutatómódszertan a K3, K4 és K5 kutatási kérdésekhez</i>	32
4.2. <i>A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisa</i>	35
4.2.1 <i>Az előteszt tapasztalatai</i>	36
4.2.2 <i>A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisának tanítási órái</i>	45
4.2.3 <i>A K3 és K4 kutatási kérdésekre adott válaszok, illetve következtetések</i>	59
4.3. <i>A fejlesztő tanítási kísérlet második fázisa</i>	60

4.3.1	Állítások szerkezetének vizsgálata.....	60
4.3.2	Az indirekt úton történő bizonyítási képesség fejlesztése	63
4.3.3	Más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása	70
4.3.4	Megtévesztő ábra alkalmazása.....	72
4.3.5	Folyamatábra alkalmazása	73
4.4.	<i>A fejlesztő tanítási kísérlet eredményességének a vizsgálata</i>	77
4.4.1	Köztes teszt	77
4.4.2	Utóteszt	84
4.4.3	Késleltetett teszt	92
4.4.4	Válaszok a köztes, az utó- és a késleltetett teszt alapján a K5-1, K5-2, K5-3, valamint a K5-4 kutatási kérdésekre	99
	Összegzés, további kutatási lehetőségek.....	101
	Irodalomjegyzék.....	105
	Összefoglaló.....	107
	Summary	111
	Mellékletek	115
A.	<i>Az Usiskin vezette kutatócsoport eredeti tesztje</i>	<i>1</i>
B.	<i>Bizonyítás-teszt.....</i>	<i>8</i>
C.	<i>Előteszt</i>	<i>14</i>
D.	<i>A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisának tanórai feladatsorai.....</i>	<i>20</i>
	Első feladatsor.....	20
	Második feladatsor	21
	Harmadik feladatsor.....	22
	Negyedik feladatsor	23
	Ötödik feladatsor.....	24
	Hatodik feladatsor	25
E.	<i>Az indirekt úton való érvelést mérő tanórai feladatsor</i>	<i>26</i>
F.	<i>A Pitagorasz-tétel öt bizonyítása angolul</i>	<i>27</i>
G.	<i>Dolgozat Pitagorasz tételéből</i>	<i>30</i>
H.	<i>Témazáró dolgozat Pitagorasz és Thalész tételéből, valamint az érintőnéyszögekből (utóteszt)</i>	<i>32</i>
I.	<i>Köztes teszt</i>	<i>34</i>
J.	<i>Késleltetett teszt.....</i>	<i>35</i>

BEVEZETÉS

Az 1980-as évek közepétől több tanulmány is született a geometria tanulásával, illetve tanításával kapcsolatban (Crowley, 1987; Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991; Mason, 1997). Ennek oka az, hogy a geometriatanulás során a diákok számos nehézségbe ütköznek. A kutatások azt igazolták, hogy a tanulók geometria terén nyújtott gyengébb teljesítményének fő oka az iskolai tanításban keresendő (Gutierrez, Jaime, & Fortuny, 1991; Halat, 2006; Halat, 2007). Saját tapasztalataim teljes összhangban vannak ezekkel az eredményekkel. Több mint tizenöt éve középiskolai matematikatanárként dolgozom Magyarországon, és évek óta speciális matematika tagozatos képzésben részt vevő tanulókkal foglalkozom.

Magyarországon 1962 óta van speciális matematika tagozatos képzés, amely nemcsak a magyar matematikatanítás, hanem az egész középiskolai oktatás egyik ékköve. A tanulók hetente átlagosan hat-nyolc tanórán tanulják a matematikát, tanulói csoportonként általában két szaktanárral. Ahogy azt Surányi (2012) részletesen kifejti, a speciális matematika tagozat bevezetése voltaképpen a korabeli, idejétmúlt magyar matematikaoktatás megreformálását célozta meg. Egyrészt igyekeztek jól felépített, „igényes” matematikai tananyagot összeállítani, másrészt alapelveként fogalmazták meg a diákok önálló gondolkodásra nevelését. A speciális matematika tagozat tananyaga bizonyos témakörökben jóval túlmutat a normál gimnáziumi képzés tananyagán és így az érettségi követelményeken is (pl. komplex számok, harmadfokú egyenletek, mátrixok, Euler–Fermat-tétel). Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy a diákok versenyfelkészítése nem célja a képzésnek. A kutatásunkban nem ragadtuk meg ezt a témát, nem tettünk különbséget versenyző és nem versenyző diákok között.

Bár diákjaim jellemzően matematikából tehetséges tanulók, náluk is a legtöbb gondot a geometriafeladatok megoldása során tapasztaltam. Éppen ezért kiemelt fontosságú a diákok geometriai gondolkodása fejlődésének a vizsgálata, s az eredmények megismertetése a matematikatanárokkal, annak beépítése a tanítás folyamatába.

Dolgozatomban elsősorban speciális matematika tagozatos középiskolai tanulók geometriai gondolkodásmódjáról, valamint az ezzel szoros kapcsolatban álló bizonyítási képességük vizsgálatáról, illetve ez utóbbi fejlesztéséről lesz szó. Az érvelési képesség azon túl, hogy a matematikán belül kulcsfontosságú, az élet egyéb területein is fontos szereppel bír.

A speciális matematika tagozat kerettantervének (Kerettanterv a speciális matematika képzéshez) bevezető részében nagyon világosan kiolvashatók a bizonyítási képességgel kapcsolatos célkitűzések:

- „A speciális matematika tagozaton – a fő célok megvalósítása érdekében – elengedhetetlen a definíciók pontos ismerete, a tételek bizonyítása, az ehhez szükséges módszerek elsajátítása.”
- „A matematikatanítás célja az alkotó gondolkodásra nevelés. El kell érni, hogy a diákok meg tudják fogalmazni kérdéseiket, a felvetődött problémákra adott válaszaikat, képesek legyenek gondolataikból és a tanult ismeretekből tiszta, pontos logikai láncot alkotva bizonyítani, cáfolni, új problémákat felvetni.”

Nem véletlen tehát, hogy vizsgálatainkban a speciális matematika tagozatos diákokra fókuszálunk.

Kutatásaink mozgatórugója a geometriai bizonyítási képesség vizsgálata volt. A dolgozat az alábbi kutatási kérdésre keresi a választ:

K: Hogyan fejleszthető a speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képessége?

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az első fejezetben megalapozzuk kutatásunk elméleti háttérét a szakirodalom tanulmányozása révén.

A második fejezetben a 2015-ben elkezdett és másfél évig tartó, középiskolai diákok geometriai gondolkodásmódjának a vizsgálatával foglalkozunk. Tesszük ezt azért, mert a geometriai bizonyítási képesség vizsgálata, illetve annak a fejlesztése feltételezi a diákok megfelelő geometriai gondolkodási szintjét. Kutatásunknak ebben az első fázisában főként a következő kérdést kívántuk megválaszolni:

K1: A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A harmadik fejezet a kutatás második fázisát írja le, amiben érettségi előtt álló, speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét vizsgáljuk egy úgynevezett bizonyítás-teszt segítségével. A kutatás első fázisának eredményei és az elmélet alapján feltételezzük, hogy a tanulók birtokában vannak a bizonyításokhoz alkalmas geometriai gondolkodásmódnak.

A mérést 2018-ban hajtottuk végre, és amely során a fő kérdésünk az alábbi volt:

K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

Az itt kapott eredményeket egy egész tanévet felölelő fejlesztő tanítási kísérlet megtervezéséhez használtuk fel, mely a kutatás harmadik és egyben legfontosabb fázisát jelenti. Erről szól a következő fejezet.

A negyedik fejezet a 2018/2019-es tanévben végrehajtott fejlesztő tanítási kísérlet folyamatát és eredményeit mutatja be. A kutatás ezen fázisának alanyai kilencedikes, speciális matematika tagozatos diákok voltak. Ebben a fázisban három kutatási kérdést tettünk fel:

K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatot kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program?

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

Ez a kutatási egység két kisebb részre tagolódik. Az első részben egy előteszt és három videóval rögzített tanóra segítségével feltérképeztük a tanulóknak az állítások szerkezetének a vizsgálata és a geometriai bizonyítások terén szerzett ismereteit. A második fázisban az első részben szerzett tapasztalatokra is alapozva egy fejlesztő tanítási kísérletet hajtottunk végre, ami célzottan a tanulók geometriai bizonyítási képességét volt hivatott magasabb szintre emelni.

1. ELMÉLETI HÁTTÉR

A dolgozat – és így az elméleti fejezet is – két nagy részre tagolható. Az egyik a diákok geometriai gondolkodásmódjának a fejlődésére fókuszál, amelynek a leírására a van Hiele-elméletet vettük alapul. Ennek az elméletnek a történetéről, valamint a lényegéről az 1.1 fejezetben fogunk szólni részletesebben. Tematikailag a másik nagy témakör a bizonyítások vizsgálata. Arról, hogy mit is értünk bizonyításon, milyen típusait különbözteti meg a szakirodalom, az 1.3 fejezetben igyekszünk betekintést nyújtani.

1.1. A van Hiele-elmélet

A geometriai gondolkodásmód kialakulása egy hosszú és nem minden akadálytól mentes folyamat. Egészen az alakzatok felismerésétől – középiskolában – a bizonyítások végrehajtásáig, illetve speciális felsőfokú tanulmányok esetén az axiomatikus gondolkodásig tart. A geometriai gondolkodásmód leírásának egyik széles körben elfogadott elmélete a van Hiele-elmélet, melyet az 1950-es években Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele holland házaspár kezdett kidolgozni diákjaik vizsgálata során. Arra voltak kíváncsiak, hogy a diákoknak miért akadnak nehézségeik a gondolkodási folyamatokban, ezen belül is kiemelt módon a bizonyítások terén. Megfigyeléseikre alapozva elemezték és leírták a geometriai gondolkodás fejlődését. Ennek lényege, hogy ez a folyamat szintekre tagolódik az alakzatok globális felismerésétől indulva egészen a formális geometriai bizonyításokig haladva (Usiskin, 1982). A szintek hierarchikusan épülnek egymásra, és egy adott szint elérése feltételezi az összes korábbi szint elérését. Minden szintnek megvan a maga matematikai nyelve, és a sikeres tanítási folyamat megköveteli, hogy a tanár az adott szintnek megfelelően kommunikáljon a diákokkal, semmiképpen se egy magasabb szint nyelvezetén. A vizsgálataik kezdetén azt feltételezték, hogy éppen az az oka a diákok matematikában elszenvedett sikertelenségeinek, hogy nem a nekik megfelelő van Hiele-szinten történik meg az oktatásuk. Maga az elmélet 1957-ben jelent meg a házaspár doktori értekezéseiben, és mivel Dina van Hiele-Geldof nem sokkal később elhunyt, így az elmélet további kifejtését a férje végezte el. Munkájuk eleinte nem kapott kellő figyelmet Nyugaton, viszont a Szovjetunióban tekintetbe vették a tananyag megírása során. Később az elmélet Izaak Wirszup¹ tudomására jutott, és végül az 1970-es évek közepén ő tette ismertté azt az Amerikai Egyesült Államokban.

Az elmélet szerint a geometriai gondolkodás fejlődésének az alábbi öt szakasza van.

1. szint (globális felismerés szintje)

Ebben a fejlődési szakaszban a tanulók felismerik, megnevezik az egyes geometriai alakzatokat, ám azokat egységes egészként kezelik. Ekkor még nem észlelik az alakzatok alkotóelemeit, azok tulajdonságait nem érzékelik. Azon túl, hogy az alakzatokat képesek egymástól elkülöníteni, azok között összefüggéseket még nem látnak. Felismerik például a formájuk alapján a téglalapokat, ám a négyzetet nem sorolják közéjük. A diákok az indoklásaikban az észlelésre támaszkodnak.

2. szint (elemzés szintje)

Ezen a szinten a tanulók elkülönítik az alakzatok alkotórészeit egymástól és az egésztől. Az egyes alakzatok különböző tulajdonságait észlelik, és ez alapján már tudják őket csoportosítani. Egy adott alakzat különböző tulajdonságai, illetve különböző alakzatok tulajdonságai

¹ Izaak Wirszup (1915-2008): Lengyelországból az Amerikai Egyesült Államokba emigrált matematikus.

között még nem tudnak kapcsolatot teremteni. Továbbá nem képesek sem definiálásra, sem pedig ok-okozati összefüggések megfogalmazására. A négyzeteket ezen a szinten sem sorolják a téglalapok közé, ám az például már tudatosul bennük, hogy egy rombusz minden oldala egyenlő hosszúságú.

3. szint (informális dedukció szintje)

Ezen a szinten a tanulók a tulajdonságokat rendszerezik, és az alakzatokat ezek alapján kapcsolatba tudják hozni egymással. Az egyes tulajdonságok között összefüggéseket látnak meg (például egy háromszögben nagyobb oldallal szemközt nagyobb szög van), s képessé válnak a fogalmak közötti hierarchia megértésére. Ekkor a tanulók például a négyzeteket tudatosan sorolják a téglalapok közé. Itt már helye van a pontos definíciónak, és a diákok képesek ok-okozati összefüggéseket megfogalmazni, illetve követni tényekre támaszkodó következtetési láncolatokat.

4. szint (formális dedukció szintje)

Ebben a szakaszban értik meg igazán a tanulók a dedukció értelmét. Különbséget tudnak tenni definíció, állítás, segédállítás és következmény között. Kialakul bennük az állítások bizonyítása iránti igény. Képesek önállóan a tanult euklideszi axiómarendszerben következtetéseket levonni, egyszerűbb bizonyításokat konstruálni. Ismernek és használnak különböző bizonyítási technikákat (pl. indirekt bizonyítás, teljes indukció), tisztában vannak az axiómák és a nemdefiniált fogalmak jelentőségével. Értik, hogy mit jelentenek a szükséges és elégséges feltételek mint fogalmak. Teljes mértékű axiomatikus bizonyításra még nem képesek, a bizonyítás során tényként kezelnek esetlegesen bizonyításra szoruló „nyilvánvaló” kijelentéseket.

5. szint (formális logika szintje)

Ezen a szinten a tanulók konkrét geometriai interpretáció nélkül is képesek formális következtetések megértésére, végrehajtására. A diákok nem csak az euklideszi axiómarendszerben tudnak következtetéseket levonni, továbbá párhuzamot képesek vonni különböző axiómarendszerek között.

A van Hiele-házaspár elméletének igazolására több tanulmány is készült az 1980-as években (Usiskin, 1982; Mayberry, 1983; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes, & Tischler, 1988). A kutatók körében megegyezés van abban, hogy a van Hiele-szintek jól jellemzik a geometriai gondolkodás fejlettségét. Egyedül az ötös szint megítélésével kapcsolatban voltak és vannak ellenvetések; több kutató úgy véli, hogy ez a szint nem mérhető egzakt módon, sőt, egyáltalán nem is létezik (Usiskin, 1982; Haviger & Vojkůvková, 2013). A geometriai gondolkodás fejlettségi szintjének meghatározására több mérőeszközt is kidolgoztak (Usiskin, 1982; Mayberry, 1983), de a kapcsolódó tanulmányok nem vizsgálták a kiemelten tehetséges diákok gondolkodását, nekünk pedig éppen ez volt a célunk.

1.2. Középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának vizsgálata

Sok szempontból inspirálta munkánkat a Zalman Usiskin és Sharon Senk által a Chicagói Egyetemen létrehozott CDASSG (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry - A kognitív fejlesztés és teljesítmény a középiskolai geometriában) projekt keretén belül elért eredmények, illetve kifejlesztett mérőeszközök. A projektről teljesen kimerítő értékezést találhatunk a Chicagói Egyetem honlapján (Usiskin, 1982). Néhány gondolat erejéig bemutatjuk magát a projektet, valamint a számunkra leglényegesebb elemeit.

A CDASSG projekt alapvetően a van Hiele-elmélettel kapcsolatban megfogalmazott kérdéseket volt hivatott megválaszolni. Ilyen kérdések voltak például:

1. Milyen eloszlást mutat a diákok van Hiele-szintje egy egyéves geometriakurzus kezdetén, illetve végén?
2. Milyen összefüggés mutatható ki a van Hiele-szintek és a geometria-tananyag kapcsán mérhető teljesítmény között?
3. A van Hiele-szintek értéke milyen mértékben képes előrejelezni a későbbi geometriai teljesítményt?
4. Mennyire felel meg a tanított geometria-tananyag a diákok van Hiele-szintjének?

Maga a CDASSG projekt három éven keresztül kereste a választ a feltett kérdésekre (1979-1982), amiből a mérések elvégzése és kiértékelése egy-egy tanévet vett igénybe. A vizsgálatokba az Amerikai Egyesült Államok tizenhárom, bizonyos társadalmi-gazdasági kritériumok alapján kiválogatott középiskolájának 2699 tanulója volt bevont. Igyekeztek reprezentatív képet kapni az ország matematikaoktatásáról, így még arra is gondot fordítottak, hogy a felmérésben részt vevő tanulók között a nemek aránya nagymértékben közelítse a 14-17 éves középiskolai korosztályban fennálló arányt.

A projekt keretein belül a tanév során különböző tesztek segítségével mérték a diákok geometriai teljesítményét, valamint van Hiele-szintjét. Az ottani oktatási rendszerből kifolyólag a geometriát a tizedik évfolyamon tanulták a diákok, de nemcsak ezzel a korosztállyal végezték el a méréseket, hanem hetedikétől tizenkettedikig minden évfolyamon.

A tanév kezdetekor egyrészt mérték a diákok geometriai tudását (Entering Geometry Test, röviden: EG-teszt), másrészt feltérképezték a van Hiele-szintjüket (van Hiele Level Test, röviden: vH-teszt). A tanév vége előtt néhány héttel ismét mérték a tanulók van Hiele-szintjét (ugyanazzal a teszttel, mint amit a tanév elején is használtak), de ezen túlmenően vizsgálták még a bizonyítási képességüket a bizonyítás-teszt (Proof Test) segítségével (azokban az osztályokban, ahol tanultak a diákok bizonyításokat). Mindezek mellett kitöltettek velük egy átfogó értékelést adó geometriai tesztet (Comprehensive Assessment Program Geometry Test, röviden: CAP-teszt), mely a tanulók aktuális geometriatudását volt hivatott mérni, teljesen függetlenül a van Hiele-szintek mérésétől. A bizonyítás-teszt tulajdonképpen a diákoknak a bizonyításleíró képességének a mértékét kívánta vizsgálni. Ebből három verziót is elkészítettek Sharon Senk iránymutatásával. A fő tartalmi elemek ezekben a tesztekben a háromszögek egybevágósága, hasonlósága, a párhuzamosság és a négyszögek voltak. Az EG-, a vH- és a CAP-teszt feleletválasztós, a bizonyítás-teszt ugyanakkor kifejtős teszt volt.

A tesztek kitöltése során ügyeltek arra, hogy minden helyszínen ugyanazok legyenek a körülmények. Ennek érdekében a tesztet írató tanáron kívül mindenhol jelent volt a projekt egyik tagja is. A bizonyítás-teszt értékelését, tekintettel a kifejtős kérdésekre, középiskolai matematikatanárok végezték el egy előre megadott egységes megoldókulcs alapján. Ezek után az összes teszt esetén kapott eredményt a Statistical Analysis System (SAS) segítségével értékelték ki.

Azt találták, hogy a diákok van Hiele-szintje és az éppen aktuális geometriatudása között szoros kapcsolat áll fenn (ez utóbbiakat az EG- és a CAP-teszttel mérték), valamint hasonló korreláció van a van Hiele-szintek és a bizonyítási képességek között. Továbbá arra a megállapításra jutottak, hogy ez utóbbi kapcsolat valószínűleg még szorosabb lehet, csak ezt a tesztek jellege miatt nem lehet kimutatni. Feltételezésük szerint a feleletválasztós tesztek között (mint amilyenek a vH-, az EG- és a CAP-teszt) magasabb korreláció mérhető, mint egy feleletválasztós és egy kifejtős teszt között (mint amilyen a bizonyítás-teszt).

Megvizsgálták továbbá azt is, hogy vajon a tanév eleji vH- és EG-teszt közül melyik mutat magasabb korrelációt a tanév vége felé elvégzett CAP-teszttel. Azt találták, hogy az EG-teszt szorosabb kapcsolatban áll a CAP-teszttel, ami azt jelenti, hogy a tanév végi geometriatudást a tanév eleji geometriatudás jobban előrevetíti, mint a van Hiele-szintek kezdeti értéke. *Arra az eredményre jutottak mindezekén túlmenően, hogy a sikeres bizonyítás feltétele a legalább hármas van Hiele-szint megélése.* Akiknek a van Hiele-szintje a tanév kezdetén még az 1-et sem érte el, annak 0,5-nél több, akinek 1 volt, annak pedig nagyjából 0,4 a valószínűsége, hogy nem lesz képes a tanév folyamán bizonyítás végrehajtására.

Külön statisztikákat készítettek egy-egy feladat kapcsán. Így például azt találták, hogy a tanév eleji van Hiele-tesztek során a vizsgált diákoknak a 10%-a gondolja egy tetszőleges téglalapról, hogy az egy négyzet, és a kétharmaduk nem sorolja a négyzetet a téglalapok közé. A helyzet javult a tanév végére, akkor a diákoknak már csak a kétötöde vélte úgy, hogy a négyzetek nem téglalapok. Ezt a fejlődést Usiskin egyébként nagyon kevésnek, konkrétan elkeserítőnek tartotta. A háromszögek témakörében sem kaptak jobb eredményt. A tanév elején a tanulók egyharmada nem ismert fel minden háromszöget az egyik tesztfeladat során. Ugyanez az adat a tanév végén egyötödre módosult.

Az ötös van Hiele-szintet mérő feladatok minőségével kapcsolatban a projekten belül sem volt teljes az egyetértés. Ez összhangban van azzal, amit későbbi munkáiban maga van Hiele is felvetett, nevezetesen, hogy az ötös szint létezik-e egyáltalán. Mindenesetre azt találták, hogy ha elfogadjuk az ötös szint létezését, akkor a tesztben betöltött szerepe nem egyezik meg az elméletben betöltött szerepével, ugyanis sok esetben az ötös szint feladatai könnyebben megoldhatónak adódtak, mint a négyes szint feladatai, sőt néha ez a hármas szintre is igaz volt.

A bizonyítás-teszt elemzése azt mutatta, hogy a diákoknak mintegy a 70%-a képes belátni olyan állítást, amely csak egyetlen következtetési lépést igényel. Az is erősen kirajzolódott, hogy a hosszabb érvelési láncot igénylő bizonyítások jelentősen gyengébben mentek a diákoknak.

A tanulmányban Usiskin tizennégy pontban fogalmazta meg a következtetéseit. Ezek közül itt csak a dolgozat szempontjából relevánsakat említjük meg.

- A van Hiele-elméletben szereplő szintek az ötös szint kivételével mind tesztelhetők. Ez utóbbi szint esetében komolyan felmerült a gondolat, hogy ez a fejlettségi szint vagy nem is létezik, vagy ha igen, akkor nem tesztelhető.
- A tanév elején egy adott van Hiele-szinten lévő diákok tanév végén mért szintje meglehetősen nagy változatosságot mutatott. A tanulók egyharmadánál csökkenést vagy stagnálást tapasztaltak a van Hiele-szintek tekintetében, egyharmaduknál eggyel, míg a maradék egyharmadnál legalább kettővel emelkedett a van Hiele-szint. Mindez azt mutatta, hogy a geometriai megértés folyamatában a van Hiele-szinteken kívül egyéb tényezők is közrejátszanak.
- A van Hiele-szint nagyon jól előrejelezte az adott diák aktuális geometriatudását mérő CAP-teszt sikerességét, valamint a bizonyítás-teszten elért eredményt. Ugyanakkor az is elmondható, hogy a CAP-teszt eredménye magasabb korrelációt mutatott a bizonyítások kivitelezésének a minőségével, mint a van Hiele-szintekkel.
- A tanév elején mért van Hiele-szintek jól előrejelezték a tanév végén várható geometriai teljesítményt, de ez utóbbival még nagyobb korrelációt mutatott a bejövő geometriai tudás mértéke.
- A bizonyítási képességek felmérése azt mutatta, hogy a geometria elsajátítása szempontjából nincs különbség a nemek között.

Usiskin megjegyzi még továbbá, hogy a mérések azt igazolták, hogy azon diákoknak a fele, akik kimondottan bizonyításokra fókuszáló kurzuson vettek részt, nagyon kissé vagy egyáltalán nem boldogult a tanév végén sem a bizonyításokkal. A lehetséges fő oknak Usiskin ezen tanulóknak a bejövő geometriai hiányosságait jelölte meg. Éppen ezért a sikeres középiskolai geometriaoktatás véleménye szerint megkívánja, hogy a korábbi tanulmányok során sokkal tervszerűbben folyjon a geometria tanítása.

Összesen négy tesztet használtak tehát, melyek közül mi célirányosan kettőt elemeztünk és alkalmaztunk a kutatásaink során: a van Hiele-tesztet, valamint a bizonyítás-tesztet.

A tanulmányban szereplő tesztek ugyan bárki számára elérhetők az interneten, ám a felhasználásuk engedélyhez kötött. Ezt az engedélyt mi megkaptuk Usiskintől, és tőle tudjuk azt is, hogy 2012-ig több mint hetven esetben született olyan publikáció, amely a jóváhagyásával felhasználta a projekt számára kidolgozott teszteket. Vagyis a kutatás ugyan 1982-es, ám a benne szereplő mérőeszközöket jelenleg is alkalmazzák a kutatók.

Fontos kiemelni még, hogy a CDASSG projekt keretén belül nem matematikából tehetséges diákokat vizsgáltak, mint azt mi tettük a felméréseinkben.

1.3. Érvelés és bizonyítás

A bizonyításoknak háromféle típusával találkozhatunk a mindennapi életben: filozófiai, matematikai és jogi (Csíkos, 2000). A továbbiakban bizonyítás alatt matematikai bizonyításokat fogunk érteni, aminek a fogalma hosszú fejlődésen ment keresztül az évszázadok alatt.

A bizonyítások a matematika minden ágát áthatják, hiszen a matematika alappillérei az állítások. Egy állítást vagy bizonyítás nélküli alapigazságként kezelünk, azaz axiómának tekintünk, vagy pedig bizonyítással próbálunk alátámasztani. Ez utóbbi esetben bizonyítás híján az adott állítást sejtésnek nevezzük, ám miután sikerült a bizonyítást megtalálni, akkor már igazolt ténynek, tételnek tekintjük. Megjegyezzük, hogy egyes szerzők csak az általuk fajsúlyosabb mondanivalóval rendelkező állítást nevezik tételnek, egyébként állításként hivatkoznak az adott tényre. A középiskolai matematika-tankönyvekben bizonyított állításként főképpen nevesített tételeket találunk. Fontos megemlíteni, hogy a középiskolai bizonyítások nem pusztán az adott állítások igazságát hivatottak igazolni, hanem nagyban elősegítik a fogalmak, korábbi tételek és azok közötti kapcsolatok megértését (Csíkos, 2000).

Mit is tekintünk tulajdonképpen matematikai bizonyításnak? „A bizonyítás a matematikában azt jelenti, hogy megmutatjuk (demonstráljuk) az állítás deduktív módon való levezethetőségét” (Csíkos, 2000). Egy olyan logikai következtetésekből álló láncolatot értünk tehát bizonyítás alatt, amelyben korábban igazolt állításokra, valamint axiómákra, fogalmakra támaszkodunk. Az, hogy mit tartunk elfogadható logikai lépésnek, mindig az adott elmélet dönti el, amibe az illető bizonyítás illeszkedik. Ezáltal csak az adott elmélet alapján alkothatunk véleményt az illető bizonyítás helyességéről. Természetesen még a felsőbb matematikai leírásokban is keveredik a szigorú matematikai szimbólumrendszer és az alapul vett természetes nyelv. A középiskolai matematikában pedig voltaképpen a természetes nyelv eszközeivel fogalmazzuk meg logikai érveléseinket, és ezt egészítjük ki a matematika szimbólumaival. A formális matematikai leírás egyre jobban teret nyer az évfolyamok emelkedésével, de természetesen az adott csoport matematikai érettségével, affinitásával is szoros kapcsolatban áll.

A nemzetközi szakirodalmat tekintve általánosságban elmondható, hogy a bizonyítások terén három kategória különíthető el:

- argumentáció (argumentation),
- érvelés (reasoning),
- bizonyítás (proof).

Ezen kifejezések használata nem teljesen egységes, hiszen a közöttük lévő éles határvonal nem definiált kellőképpen. Azt lehet mondani, hogy a legtagabb értelemben az érvelés fogalma használatos. Az érvelést és a bizonyítást egyaránt említő, matematikatanítással foglalkozó szakirodalmak közül több nem is választja szét a két fogalmat, hanem egészen egyszerűen egyként kezeli őket: „érvelés és bizonyítás”. G. Hanna az érvelést olyan mentális tevékenységként említi, amely következtetések levonását teszi lehetővé az egyén számára (Hanna, 2020). Kiemeli továbbá, hogy ezen túlmenően meg kell különböztetünk a matematikai érvelést és a mindennapi életben használt érvelést. Ez utóbbi esetben ugyanis olyan állításokat is felhasználhatunk, amelyeket voltaképpen bizonyítás nélkül fogadunk el. Ennek több oka is lehet. Egyrészt előfordulhatnak olyan állítások, amelyeket magától értetődőnek tekintünk, másrészt elképzelhető, hogy ugyan nem tartjuk evidensnek az állítást, de intuitív módon mégis igaznak tekintjük, mert pl. hihetőbbnek tűnik, mint a tagadása. Ez a kategória összhangban áll a Balacheffnél későbbiekben tárgyalásra kerülő „magyarázat”-tal. Természetesen a matematikai bizonyítások szempontjából az ilyen típusú érvelést legalábbis hiányosnak tekintjük. A teljessé tételhez mindenképpen szükség van arra, hogy az érvelésben logikailag helyes következtetései szabályokat használjunk.

Sok kutató a bizonyításokkal kapcsolatban az argumentáció kifejezést is használja, amit talán meggyőzésnek fordíthatnánk. Ez magában foglalja az indoklások széles spektrumát, mint például a heurisztikus, az induktív, valamint az ábrákon történő érvelést. Tulajdonképpen számukra az argumentáció minden eszközt magában foglal, amelynek segítségével érvelhetünk bizonyos tények mellett vagy ellen, vagyis ebben a felfogásban az érvelések legtagabb értelemben vett fogalmát jelenti. Így speciálisan a bizonyítások is az argumentáció részét képezik. A kutatások legújabb tendenciái ugyanakkor némileg felborítják ezt az argumentáció-fogalmat, ugyanis egyre többen a „még nem bizonyítás” esetén alkalmazzák ezt a terminust, megkülönböztetve a bizonyításoktól, amik számukra a matematikai bizonyításokat jelentik. Mindezekből is látszik, hogy mennyire nem egységes a matematikai didaktikai kutatásokkal foglalkozók körében sem a szóhasználat, illetve maguknak a fogalmaknak a jelentése sem. Winter szerint egyébként – hasonlóan az új vonulathoz – az argumentációk nem tartoznak a szigorúan vett bizonyítások közé, hanem annál sokkal szélesebb spektrumot fednek le, például magukba foglalják többek között az egyes állítások speciális eseteken történő kipróbálását, valamint a hamis bizonyítások leleplezését is (Winter (1978), idézi Ambrus (1995)).

Balacheff (2017) a bizonyításoknak három – egymásra épülő – kategóriáját különbözteti meg. Ezek a következők:

- *Magyarázatról* akkor beszélünk, amikor egy személy igyekszik meggyőzni állítása helyességéről egy másik felet. Itt az egyes érvelési lépések elfogadása az adott személyeken múlik.
- A *bizonyítás* olyan magyarázat, amit egy adott időpontban már egy egész közösség elfogad. Itt még megengedhetők olyan lépések, amiket intuitív módon elfogadunk, ám amiknek az indoklását a felsőbb matematika mindenképpen igényelné.
- A *matematikai bizonyítás* pedig olyan bizonyítás, amit már a matematikusok is elfogadnak.

A középiskolában általánosan elfogadott bizonyítás alatt a Balacheff által leírt második kategóriát értjük, hiszen itt az érvelések lépéseinek az adott életkornak megfelelő elvárásoknak kell megfelelniük, vagyis egy adott korosztály számára elfogadott követelményeknek.

Összefoglalva tehát, a nemzetközi szakirodalom a bizonyításoknak többféle megközelítést tárgyalja, ám egy-egy kifejezésnek nem egységes a jelentése. Az argumentációk és a magyarázatok nem tartoznak a matematikai értelemben vett bizonyítások közé. A bizonyításokat és az érveléseket általában nem különböztetik meg egymástól. Mivel ebbe a kategóriába sorolhatjuk a középiskolai matematikaoktatásban elfogadott bizonyításokat is, kutatásunkban erre fogunk összpontosítani. Végezetül, a legszigorúbb előírásoknak megfelelő bizonyításokat matematikai bizonyításoknak nevezzük.

Tovább árnyalja a képet, hogy Stein a matematikai bizonyításoknak négy szintjét különbözteti meg (idézi Ambrus (1995)). Ezek közül az első *a matematikai-logikai elmélet szintje*, mely a teljes mértékben formalizált matematikai világot jelenti, amelyben minden matematikai szimbólumokkal van leírva, és minden tény explicit módon ki van fejtve. A második *a matematikai elmélet szintje*, amely a felsőoktatásban szereplő matematikai bizonyításokat takarja. Ezen a szinten is a formalizmus van előtérben, de itt már megengedett, hogy a matematikus társadalom által „nyilvánvalónak” tartott matematikai tények explicit módon ne legyenek kifejtve, akár hivatkozva sem. Ezen felosztás harmadik lépcsőfokát *a lokálisan rendezett elmélet szintje* jelenti, amelyen a középiskolai bizonyítások elhelyezkednek. Itt már a formalizmus nem domináns, a nyelvezet a matematikaira épülő természetes nyelv. Ezen a szinten nem adnak meg például axiómákat, mint azt teszik a matematikai elmélet szintjén. Emiatt írtuk azt korábban, hogy itt helyezkednek el a középiskolai bizonyítások, amit – ahogy azt láttuk – Balacheff bizonyításoknak nevez. Végezetül az utolsó kategória *a mindennapi okoskodások szintje*, amelyek természetes nyelven megfogalmazott érvelési láncok, pusztán annyi megkötéssel, hogy csak azok az indoklási lépések elfogadottak, amelyek az adott feladat feltételeinek nem mondanak ellent.

A kutatásunk fő részét alkotó fejlesztő kísérlet mozgatórugója az volt, hogy a diákok érvelési képességét a mindennapi okoskodások szintjéről minél inkább elmozdítsuk a középiskolai diákoktól elvárt bizonyítások szintje felé. Ellenben nem volt célunk a bizonyításoknak a fentiekben elhangzott alapos kategorizálása. Mi voltaképpen két kifejezést fogunk használni, az érvelést és a bizonyítást, de nem fogunk különbséget tenni közöttük, szinonim fogalmakként fogjuk használni őket. Tesszük ezt azért, mivel pusztán matematikai állítások igazságtartalmának eldöntéséről lesz szó a kutatásunkban, nem pedig az élet egyéb területeiről származó megfigyelések, tények alátámasztásáról, esetleg megcáfolásáról. Ha ez lenne a helyzet, akkor természetesen éles különbséget tennénk a két fogalom között (és bővítenénk a szótárt az argumentációval).

1.4. A bizonyítási képesség és annak fejlesztése középiskolában

A bizonyítási képesség alapvető matematikai képesség, a matematikai műveltség része. Csíkos (2000) szerint „A kognitív kompetenciának azt a rész-komponensrendszerét, amely lehetővé teszi állítások igazságértékének igazolását, és ezzel összefüggésben bizonyítások megértését, értelmezését, bizonyítási képességnek nevezzük.”

A tanulók matematikai ismereteinek fejlődése számos lépcsőfokon keresztül vezet el egészen a bizonyításokig, melyek a középiskolában ennek az építkezésnek a végső fázisát jelentik. Kezdetben a fogalmak, tények megértése a cél, majd ezek később kiegészülnek bizonyítási technikák megismerésével, adott állítások bizonyítási lépéseinek megértésével, önálló bizonyítások megkonstruálásával, esetleg sejtések megfogalmazásával. A sejtések kapcsán nagyon fontos az

is, hogy a tanulók képesek legyenek a sejtések igazolásán túl adott esetben meg is cáfolni azokat. A bizonyítások és cáfolatok elve egyik központi mozgatórugója nemcsak a matematika oktatásának, hanem magának a matematika fejlődésének is (Lakatos, 1976).

Mivel formális műveletek elvégzésére Piaget szerint a diákok általában 12-13 éves korukra érnek meg, így a matematika-tananyagban először 6-7. osztályban fordulnak elő explicite bizonyítások. Ekkor térnek át a tanulók fokozatosan a konkrét műveletekről a formális műveletekre, de a szemléltetésnek még mindig nagy szerepe van. Természetesen nem minden diák jut el addigra arra a megfelelő szintre, hogy a bizonyításokkal megismerkedjen, van, aki hamarabb, de van olyan is, aki később ér el ebbe a fázisba. Ambrus (1995) kiemeli, hogy eleinte nagy szerepe van a tanulók életében az úgynevezett prematematikai bizonyításoknak, ami nagyban épít a konkrét fizikai cselekvésekre; gondolunk itt például konkrét objektumokkal történő manipulációkra, vagy az ábrák alapján történő érvelésre.

A diákok a matematika tanulása közben fokozatosan értik meg a feltétel, a következmény, az ellenpélda, a tétel, a sejtés, az axióma fogalmát és szerepét. Ez a kognitív érési folyamat még nincs teljes egészében feltérképezve, nincs elfogadott recept a hatékony tanításra, vagyis a bizonyítási képesség fejlesztése a középiskolai matematikaoktatásnak az egyik nagyon fontos eleme. Jelentősége többek között az alábbiakban rejlik:

- A diákok számára ekkor válik világossá, hogy az észrevételeinket csakis akkor fogadhatjuk el teljes bizonyossággal, ha azt érvekkel alátámasztjuk.
- A bizonyítások tárgyalása mélyíti az adott témakörbe tartozó fogalmak, eljárások, összefüggések megértését.
- A bizonyítások során a tanulók számos problémamegoldási ötlettel ismerkednek meg, ami képessé teszi őket arra, hogy a későbbiekben önállóan is meg tudjanak birkózni a különböző problémák megoldásával.
- Az egyes állítások bizonyítása nagymértékben fejleszti a tanulók kreativitását, hiszen sok esetben nincs egyértelműen kijelölve a megoldáshoz vezető út, ahhoz mindenképpen önálló észrevételek szükségesek.
- A bizonyító tevékenység rávezetheti a diákokat új összefüggések felismerésére, valamint hipotézisek, sejtések felállítására.
- A bizonyítási képesség fejlesztése kiválóan alkalmas arra, hogy a matematika – esetleg látószólag egymástól messze eső – különböző területeit összekapcsolja.

A fentiek miatt a bizonyítási képesség fejlesztése világszerte fontos szereppel bír a középiskolai tananyagban. Ugyanakkor ezzel kapcsolatban Balacheff (2017) úgy fogalmaz, hogy a matematikai bizonyítások tanítása általában kudarcra van ítélve a középiskolákban. A téma fontossága, aktualitása miatt nem véletlen, hogy számos tanulmány született a tanulók érvelési-bizonyítási képességének vizsgálatával kapcsolatban (Stylianides, 2008; Hanna & de Villiers, 2008; Balacheff, 2017; Hong & Choi, 2018). A következőkben az említett tanulmányokat is alapul véve áttekintjük a bizonyítási képesség fejlesztésének a problémakörét.

Ma is aktuálisak Lakatos negyvenöt évvel ezelőtt megfogalmazott sorai: „Még nem tudatosult eléggé, hogy a mai matematikai és természettudományos oktatás a tekintélyelv fenntartásának melegágya, az önálló és kritikus gondolkodás legádázabb ellensége.” (Lakatos, 1976)². Az egyik fő nehézsége a bizonyítási képesség fejlesztésének az, hogy a diákok zöme a bizonyítások

² Eredeti megfogalmazásban: „It has not yet been sufficiently realised that present mathematical and scientific education is a hotbed of authoritarianism and is the worst enemy of independent and critical thought.” (Lakatos, 1976, p. 152).

végrehajtását pusztán a tanár által előírt szükséges nyűgként éli meg. A tanulók akkor értik meg voltaképpen a bizonyítások jelentőségét, amikor azok már belső igényként jelennek meg. Ennek a folyamatnak egyik nagy gátja az, hogy a tanulók egy része a matematikai eredmények közül többet is alapigazságnak tekint. A tanítási folyamat velejárója, hogy a matematikatanárok sokszor kénytelenek kimondani és használni olyan állításokat, amiket bizonyítás nélküli tényként kezelnek, hiszen a diákok fogalomkészlete, gondolkodása sokszor még nem áll készen egy-egy bizonyítás egészen precíz végrehajtására. A gondolkodás megfelelő fejlesztéséhez elengedhetetlen ezeknek az úgynevezett „iskolai axiómáknak” a használata (Szendrei, 2005). Fontos megjegyezni, hogy ezen szituációkban a bizonyítások hiánya nem okoz semmiféle problémát a diákok fejlődése szempontjából (Csíkos, 2000). Természetesen azt, hogy a tanuló mit tekint iskolai axiómának, nagyban befolyásolja, hogy az adott szaktanár a korábbi tanórákon mely állításokat használt bizonyítás nélkül.

Nagyon lényeges az is, hogy a diákok a bizonyításokat a való életben való érvényesülés egyik hatékony összetevőjének tekintsék. Rá kell világítani arra, hogy a matematikaórán megszerzett tudás, kifejlődött érvelési képesség a „matematikán kívüli világban” is kiválóan hasznosítható. Ennek eléréséhez a tanárnak a diákjait önálló, kritikus gondolkodásra kell nevelnie.

Az előzőkből kitűnik, hogy a bizonyítási képesség fejlesztése nagyon összetett pedagógiai folyamat. Stylianides az érvelési-bizonyítási tevékenységek három összetevőjét különbözteti meg (matematikai, pszichológiai, valamint pedagógiai), ezeket egy analitikus keretrendszerben foglalja össze. (1. táblázat). Ezen tevékenységformákon keresztül fejleszthető a bizonyítási képesség.

Érvelési-bizonyítási tevékenység				
Matematikai összetevő	Matematikai megfigyelések általánosítása		Matematikai állítások alátámasztása	
	Minta, szabályszerűség felismerése	Sejtés felállítása	Bizonyítás	Bizonyítással nem felérő okoskodás
	- Definiált minta - Plauzibilis vagy nem definiált minta	Sejtés	- Bizonyítás általánosítható példával - Általános bizonyítás	- Tapasztalati érvelés - Vázlatos indoklás
Pszichológiai összetevő	Mi az egyén felfogása egy minta, egy sejtés, egy bizonyítás vagy egy bizonyítással nem felérő okoskodás matematikai értelmezésével kapcsolatban?			
Pedagógiai összetevő	Mennyire ismeri a feladatmegoldó egy minta, egy sejtés, egy bizonyítás vagy egy bizonyítással nem felérő okoskodás matematikai természetét? Egy minta, egy sejtés, egy bizonyítás vagy egy bizonyítással nem felérő okoskodás matematikai természete hogyan válik világossá az egyén számára?			

1. táblázat: Analitikus keretrendszer (Stylianides)

Itt megjegyezzük, hogy Stylianides az érvelést és bizonyítást egy fogalomként kezeli („reasoning-and-proving”), ezért hivatkoztunk rá mi is így.

A matematikai komponens, mely természetesen matematikai szemszögből írja le az érvelés-bizonyítás tevékenységformáját, két nagy összetevőből áll. Az egyik a diákoknak azt a képességét ragadja meg, amely segítségével bizonyos mintákat, szabályszerűségeket megfigyelve matematikai állításokat, sejtéseket fogalmaznak meg, a másik pedig az állítások bizonyítására fókuszál. Mindkét komponens további két összetevőre bomlik, melyek összességében jórészt felölelik az érvelés-bizonyítás tevékenységforma egészét. Mivel a dolgozatban kizárólag a matematikai állítások bizonyításával foglalkozunk, így a későbbiekben a keretrendszernek csak az ebben a kategóriában szereplő fogalmait világítjuk meg egy-egy konkrét példával. A többről képet kaphatunk Stylianides *An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving* című munkájából (Stylianides, 2008).

Stylianides bizonyítás alatt egy matematikai állítás igazolására vagy megcáfolására szolgáló olyan érvelést ért, mely elfogadott igazságokon alapszik. Az elfogadott igazságok elsősorban az axiómákat, a már bizonyított tételeket és a definíciókat jelentik, az érvelés pedig logikai szabályok szerint egymáshoz kapcsolt állítások sorozatát. Stylianides, csakúgy, mint Szendrei, kiemeli, hogy az elfogadott igazságok fogalma nem adható meg egzakt módon. A legtöbb esetben ugyanis nincsenek egyértelmű szabályok arra nézve, hogy mik azok az állítások, amik mindenféle indoklás nélkül felhasználhatók egy-egy bizonyítás során, és mik azok, amik esetén elvárás a korrekt hivatkozás (azaz előbb ezeket bizonyítsuk). A középiskolai tanulók számára ez újabb nehézséget jelent, amit kizárólag a feladatmegoldói rutin és megfelelő tanári magyarázat révén képesek leküzdeni. Ezen ismeretek megszerzése nem feltétlenül a diák matematikai képességével függ össze.

Az analitikus keretrendszer kétfajta bizonyítási módot különböztet meg, az általánosítható példával történő bizonyításokat, illetve az általános bizonyításokat.

Bizonyítás általánosítható példával: Ezt a bizonyítási módot jól megvilágítja például az az általános iskolában már tanult tétel, amely szerint egy egész szám pontosan akkor osztható kilenccel, ha a számjegyeinek az összege osztható kilenccel. Ennek a tételnek az általános bizonyítása a formalizmus miatt még középiskolában is nehézséget okozhat a tanulóknak. Ezt áthidalhatjuk azzal, hogy egy konkrét számot felhasználva látjuk be az állítást, majd utalunk arra, hogy a gondolatmenet analóg módon átvihető az általános esetre, azaz a választott példához kapcsolódó logikai levezetés általánosítható.

Általános bizonyítás: A bizonyítások ezen másik kategóriája a konkrét esetektől teljesen független érveléseket foglalja magában. Az általános bizonyítás lehetséges módszerei többek között az ellenpélda keresése, az indirekt bizonyítás, a teljes indukció, vagy éppen a kimerítés, amikor minden lehetséges esetet egyesével végigvizsgálunk. Tehát ez az a bizonyítási típus, amely során teljes általánosságban fogjuk meg az állítást, és konkrét speciális esettől függetlenül látjuk be annak igaz, vagy éppen hamis voltát.

Végezetül a Stylianides-féle keretrendszer utolsó matematikai összetevőjéről, a bizonyítással nem felérő okoskodásról szólunk pár szót. Ennek a kategóriának az egyik típusa az úgynevezett *tapasztalati érvelés*:

Erről a módszerről akkor beszélünk, ha egy állításnak egy-egy speciális esetben történő megvizsgálását követően általános következtetést vonunk le. Ez nyilván nem jelent matematikai

értelemben elfogadható bizonyítást, arról nem is beszélve, hogy néhány megvizsgált eset alapján akár téves következtetésre is juthatunk, gondoljunk csak – hogy egy történelmileg is nagyon nevezetes esetet említsünk – a Fermat-prímek esetére³.

A nem bizonyító erejű okoskodás másik típusa az úgynevezett *vázlatos indoklás*:

Ebbe a csoportba soroljuk azokat az érveléseket, amelyek helyesek ugyan, de nem hivatkoznak explicit módon minden olyan felhasznált tényre, amely a bizonyítás szempontjából lényeges. Pontosan emiatt ez az érvelési mód nem tekinthető teljes értékű bizonyításnak.

Kutatásunkban nem volt célunk az érvelés-bizonyítás pszichológiai, illetve pedagógiai aspektusainak részletes vizsgálata (bár nagyon fontosnak tartjuk), így csak röviden utalunk erre a két komponensre. A pszichológiai összetevő voltaképpen arra utal, hogy a feladatot megoldó tanuló mit tekint bizonyításnak. Ugyanis könnyen elképzelhető, hogy a diák egy feladatra adott megoldásával kapcsolatban teljes mértékben meg van győződve, hogy az teljes értékű bizonyítás, míg a tanár olvasatában az csupán tapasztalati érvelés, esetleg vázlatos indoklás. Sok esetben az is a félreértés forrása, hogy egy-egy érvelést a diák korábbi életszakaszában a közössége bizonyításként kezelt, ugyanakkor az éppen aktuális évfolyam tananyagának ez már nem felel meg. Például a középiskolai gyakorlatban teljesen elfogadott halmazelméleti bizonyítási módszer a bizonyítandó azonosság két oldalának Venn-diagrammal történő ábrázolásán alapuló eljárás, a felsőoktatásban ugyanakkor ezt a módszer már nem tekintik bizonyításnak.

A keretrendszer pedagógiai komponense szorosan kapcsolódik a matematikai, illetve pszichológiai komponensekhez. Az érvelési-bizonyítási tevékenység pedagógiai szempontból két, egymással összefüggő kérdésre összpontosít. Egyrészt azt vizsgálja, hogy milyen kapcsolat van egy adott érvelés matematikai természete (matematikai komponens) és aközött, hogy a tanuló ezt az érvelést minek tekinti (pszichológiai komponens). Másrészt az esetleges eltérések feltárása mellett értelemszerűen törekednek arra is, hogy az ezekből adódó félreértéseket tisztázzák, és a tanulóknál kialakuló elképzelések fokozatosan összhangba kerüljenek az adott objektumok matematikai jelentésével. Ez nagyban segíthet a tanítási folyamat tervezésében, finomításában.

Az előzőekben a Stylianides-féle keretrendszer segítségével megvilágítottuk, hogy a bizonyítási képesség fejlesztésének milyen, egymással kapcsolatban álló matematikai, pszichológiai, illetve pedagógiai aspektusai vannak. Stylianides felhívja a figyelmet arra is, hogy a keretrendszer nem fedi le az érvelés-bizonyítás teljes spektrumát, mivel például az analógia mentén történő bizonyítás nem illeszthető bele. Továbbá a keretrendszer összes eleme nem feltétlenül jelenik meg a középiskolai matematikaoktatásban. Erre jó példa a sejtések konstruálása, amire az oktatási folyamat nem tud kellő hangsúlyt fektetni. Mindezeket is figyelembe véve, kutatásunkban nagymértékben támaszkodunk Stylianides munkájára.

A bizonyítási képesség fejlesztésének gyakorlati vonatkozásaival kapcsolatban Hanna (2020) felhívja a figyelmet arra, hogy több tanulmány is azt támasztja alá, hogy azon diákok, akiket matematikaórákon a kezdetektől fogva arra bátorítottak, hogy érveljenek heurisztikusan, azok a későbbiekben sokkal sikeresebbek voltak a matematikai bizonyítások terén. Lényeges dolog a bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából, hogy a tanulók minél inkább önállóan próbálják megoldani az adott problémát. Nagyon fontos az is, hogy az adott szituációban a tanulók ismerjék azokat a le nem fektetett hallgatolagos szabályokat, amiket a tanár elvár tőlük, és amit már korábban kialakított az adott csoportban a tanítási folyamat során. Brousseau (1998) ezt a

³ Fermat azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$) alakú úgynevezett Fermat-számok mind prímek. Tette ezt azért, mert $n = 0, 1, 2, 3, 4$ esetén valóban egy-egy prímet kapott. Később Euler belátta, hogy F_5 már nem prím, sőt azóta egyetlen újabb Fermat-prímet sem találtak.

szabályrendszert a didaktikai szituációk elméletével foglalkozó munkájában didaktikai szerző-désnek nevezi.

A bizonyítási módszerekkel kapcsolatban fontos megemlíteni, hogy a középiskolai matematikaoktatásban a direkt, az indirekt, valamint a teljes indukción alapuló bizonyításokat alkalmazzák. Speciális matematika tagozaton a diákok megismerkednek a végtelen leszállás (descente infinie) elvével is mint speciális indirekt bizonyítási módszerrel. Számunkra a dolgozat szempontjából elsősorban a direkt, másodsorban pedig az indirekt bizonyítások játszanak majd kulcsszerepet.

Általános az a felfogás, hogy a geometria az egyik legalkalmasabb terület a bizonyításokkal való ismerkedéshez (Csíkos, 2000). A geometriai bizonyításokban az ábráknak sokszor fontos szerep jut, ezért végezetül a geometriai ábrák szerepéről szólunk. Az ábrákat sok esetben a feladat szövegéhez mellékelik, de gyakran a diákoknak kell elkészíteniük. Ez utóbbi esetben a tanulóknak a feladatban használt fogalmakat önállóan kell reprezentálniuk, ami már eleve buktatója lehet a feladat megoldásának. Gyakori hiba, hogy a diák ugyan helyesen el tudja mondani egy-egy fogalom definícióját, de azt nem képes realizálni a megoldása során (Fischbein, 1993). Amennyiben a feladat eleve tartalmaz ábrát, úgy elképzelhető, hogy az alapján megalapozatlan, esetleg téves következtetést von le a tanuló (Dvora & Dreyfus, 2004). A kutatásaink során nem volt célunk ezeket az aspektusokat mélyen vizsgálni, de a hamis tény sugalló ábrákra ki fogunk térni. Szorosan idekapcsolódik a dinamikus geometriai szoftvereknek a matematikatanításban játszott szerepének a vizsgálata, ami természetes módon az utóbbi időben előtérbe került. Mindez azonban szintén nem képezte kutatásunk részét.

Ebben a fejezetben érzékeltettük, hogy a bizonyítások középiskolai tanítása egy igen nagy kihívást jelentő feladat mind a diákok, mind pedig a tanárok szempontjából. Sok elmélet foglalkozik ugyan a témával, de nincs egy minden tanuló számára járható út, ami garantálja a sikeres bizonyítási képesség kifejlődését. Mi a dolgozatban csakis a néhány (legfeljebb három-négy) következtetési lépésből álló geometriai bizonyításokra fókuszálunk. A felhasznált lépések nem követelnek meg mélyebb ismereteket, az elemi geometria egyszerűbb középiskolai fogalmain és tényein alapulnak.

1.5. Akciókutatás

Kutatásunknak a fejlesztő tanítási kísérletet felölelő fázisában akciókutatást hajtottunk végre. Ennek alapelveit Koshy részletesen tárgyalja (Koshy, 2005). Ezek az alábbiak:

- A kísérletbe bevont diákoknak a tanítási gyakorlathoz kapcsolódó vizsgálata, fejlesztése a cél.
- A kutatást végző személy az adott tanulócsoport egyik tanára.
- A kutatás nem rugaszkodik el a tantervtől, hanem abba beágyazva zajlik.
- Az akció és a reflexió egységet alkot, azaz a kísérlet tapasztalatait menetközben értékelve folyamatos a visszacsatolás.

A kutatás során bármilyen formában összegyűjtött, későbbi feldolgozásra váró anyagokat összefoglaló néven *korpusznak* nevezzük.

Az akciókutatásra elsősorban a kvalitatív paradigma a jellemző (bár tartalmazhat kvantitatív elemeket is). A kvalitatív tartalmakat tudományos objektivitással, kellő mélységben kell feltárni és tanulmányozni. Ezt a folyamatot a szakirodalom *kvalitatív tartalomelemzésnek* nevezi, amely során a korpuszt alkotó adatok kódolása történik.

A kódolás első lépéseként meg kell állapítani a kódolási egységet (ez a szegmentálás folyamata). Kódolási egység lehet többek között egy feladat tanulói megoldása során egy-egy gondolati egység. Konkrétan: lehet egy kódolási egység egy háromszög magasságának a meghatározása ismert adatok alapján. Ezután egy másik kódolási egység a háromszög területének a meghatározása, végül egy harmadik kódolási egység pedig egy olyan egyenes hasáb térfogatának a kiszámolása, amelynek ismerjük a magasságát, továbbá az alapja az imént alapul vett háromszög. Azt, hogy mik lesznek a kódolási egységek, mindig az adott kutatási kérdés dönti el.

A kódolás kialakítása során használható deduktív és induktív kódrendszer, illetve ezek kombinációja. A deduktív kódolás esetén a kódok előre rögzítve vannak, mondjuk a szakirodalom által. Az induktív kódolás esetén ezzel szemben a korpuszt annak feldolgozása közben tömörítik, majd ugyanígy haladva előre iteratív módon ismét tömörítést hajtanak végre, miközben kialakítják a kódokat.

Fontos kritérium a kódok kialakításával kapcsolatban az, hogy az egyes vizsgálati szempontok (úgynevezett dimenziók) páronként diszjunktak legyenek, és egy dimenzióhoz egyetlen kód tartozzon, továbbá a kódoknak relevánsnak kell lenniük a kutatási kérdés szempontjából. Ezután jön a kapott eredmények interpretálása, illetve az esetleges feltételezések felállítása.

Az előbbieken tárgyalt kritériumok, szempontok betartásával végeztünk kutatásunk központi fázisában akciókutatást, amelynek konkrét részleteit a 4.1 fejezetben tárgyaljuk.

2. KÖZÉPISKOLAI TANULÓK GEOMETRIAI GONDOLKODÁSÁNAK SZINTJEIVEL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

A diákok bizonyítási képességének vizsgálatára és fejlesztésére az egyik legalkalmasabb matematikai terület – sokrétűsége és szemléletessége miatt – az elemi geometria. Egy néhány lépésből álló érvelési lánc már a 6-7. évfolyamtól kezdődően vizsgálható és fejleszthető terület, mivel ennek megkonstruálása nem kíván komolyabb absztrakciót a diákoktól. A van Hiele-elmélet értelmében geometriai bizonyításra a négyes van Hiele-szinten lévő tanulók képesek. Úgy gondoltuk tehát, hogy a bizonyítási képesség elemzéséhez, illetve fejlesztéséhez elengedhetetlen, hogy megvizsgáljuk a középiskolai tanulók van Hiele-szintjét.

2.1. Kutatási kérdések

A mérések során az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

K1. A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A fő kérdésünkhöz az alábbi alkérdéseket fogalmaztuk meg:

K1-1: Tetten érhető-e a van Hiele-szintek emelkedése a diákok életkorának előrehaladtával?

K1-2: Mutatkozik-e eltérés az ugyanolyan korosztályú, de matematikából eltérő képzésben (speciális matematika tagozaton, normál gimnáziumi, illetve nem matematikai irányultságú szakgimnáziumi tanulmányokban) részt vevő tanulók van Hiele-szintje között?

K1-3: A speciális matematika tagozaton tanuló diákok van Hiele-szintje eléri-e a négyet?

A mérés előtt az egyes kérdésekre a hipotéziseink rendre a következők voltak:

1. A diákok átlagos van Hiele-szintje az évfolyamok emelkedésével nem csökken.
2. Az egyes évfolyamokon a speciális matematika tagozaton tanuló diákok átlagos van Hiele-szintje a legmagasabb, ezt követi a normál gimnazisták átlagos van Hiele-szintje, majd a sort a szakközépiskolások van Hiele-szintje zárja.
3. A speciális matematika tagozaton tanulók átlagos van Hiele-szintje legkésőbb a tizedik évfolyamon a hármas szint fölé kerül, közelíti a négyes szintet.

2.2. Kutatásmódszertan a K1-1, K1-2 és K1-3 kérdések megválaszolásához

2015 júniusában végeztük el méréseinket, melynek során középiskolai diákok van Hiele-szintjét vizsgáltuk Zalman Usiskin cikkében (1982) szereplő teszt segítségével.

A teszt 25 feleletválasztós feladatból áll (A. melléklet). Minden feladat esetén pontosan egy helyes megoldás létezik, melyet öt lehetséges válasz közül kell kiválasztani. Az 1-5. feladatok mérik az első van Hiele-szint meglétét, a 6-10. feladatok a második van Hiele-szintét és így tovább, egészen a 21-25. feladatokig.

A teszt kiértékelésének és megíratásának körülményei megegyeztek a fenti tanulmányban leírtakkal.

Akkor mondjuk, hogy egy tanuló geometriai gondolkodásának szintje az n . szinten van (ahol $1 \leq n \leq 5$), ha

- teljesítette az 1., 2., ..., $(n - 1)$. szint mindegyikét;
- az n . szintet mérő öt feladat közül legalább hármat megoldott helyesen;
- ha $n \leq 4$, akkor az $(n + 1)$. szintért felelős öt feladat közül legfeljebb kettőt oldott meg helyesen.

Amennyiben az 1. szint kritériumait nem teljesíti egy diák, úgy az ő van Hiele-szintjét 0 értékűnek tekintjük összhangban az Usiskin által vezetett projekt értékelési rendszerével (Usiskin, 1982, old.: 25; Senk, 1989, old.: 319).

Fontos hangsúlyozni, hogy a tesztben szerepeltek ugyan az ötös van Hiele-szinthez kötődő feladatok, de az ezzel a szinttel kapcsolatos dilemmák miatt (lásd 1.1 fejezet) a tanulók szintjének vizsgálatát ennek a szintnek a figyelmen kívül hagyásával végeztünk el, azaz az ötös szintet teljesítő tanulókat is a négyes szintűek közé soroltuk.

A mérőlapokat papír alapon töltöttük ki, a kitöltésére szánt munkaidő 35 perc volt. A kiértékelésben a diákok a nevük helyett a saját maguk által kitalált kóddal szerepelnek.

A 2015 júniusában végzett vizsgálatok egyazon vidéki nagyváros három közoktatási intézményben folytak, két gimnáziumban és egy szakgimnáziumban, amikre rendre a Gimnázium_1, Gimnázium_2, illetve Szakgimnázium elnevezést fogjuk használni. Gimnázium_1-ben két eltérő képzési program tanulói csoportjait vizsgáltunk: az egyik speciális matematika tagozatos, a másik normál gimnáziumi tanterv szerint haladó. Gimnázium_2-ben szintén normál gimnáziumi tantervű tanulókkal végeztük a méréseinket. Törekedtünk arra, hogy a felmérés az oktatás széles palettáját ölelje fel, így nyolcadiktól tizenkettedikig minden évfolyamon végeztünk méréseket. A vizsgálatokat 2015 szeptemberében folytattuk ugyanazokkal a diákokkal, akikkel korábban is, de ekkor már csak Gimnázium_1 speciális matematika tagozatának tanulóit vettük alapul. Ezen két mérési időszak alatt összesen 430 tesztet töltöttünk ki, ebből 277-et Gimnázium_1-ben, 91-et Gimnázium_2-ben, illetve 62-t a Szakgimnáziumban.

2.3. Tapasztalatok és válaszok a K1-1, K1-2 és K1-3 kutatási kérdések kapcsán

A 2. táblázat a 2015 júniusában végzett mérések eredményét mutatja, azaz az adott iskola megfelelő évfolyamán tanulók van Hiele-szintjeinek átlagát. Az egyes átlagértékek mellett zárójelben tüntetjük fel az adott csoport létszámát.

Évfolyam	Gimnázium_1, speciális matematika tagozat	Gimnázium_1, normál gimnáziumi képzés	Gimnázium_2, normál gimnáziumi képzés	Szakgimnázium
9.	3,46 (37 fő)	2,52 (33 fő)	2,10 (30 fő)	1,17 (18 fő)
10.	3,54 (26 fő)	2,05 (18 fő)	2,21 (39 fő)	1,59 (17 fő)
11.	3,71 (24 fő)	2,29 (7 fő)	2,15 (13 fő)	1,13 (15 fő)

2. táblázat: Különböző oktatási formában részt vevő tanulók átlagos van Hiele-szintje (2015. június)

A mérési eredmények és a hipotézisek összehasonlítása:

1. Hipotézisünk, mely szerint az átlagos van Hiele-szint évről évre nem csökken, csak részben igazolódott be. Gimnázium_1 speciális matematika tagozatának tanulói esetében az évfolyammal együtt emelkedik az átlagos van Hiele-szint. A többi esetben, a matematika iránt kevésbé érdeklődő, a tantárgyat kisebb óraszámokban tanuló csoportoknál szisztematikus fejlődés nem mutatható ki. (Ezen tapasztalatok okainak feltárása nem képezi jelen kutatásaink tárgyát.) Minthogy a speciális matematika tagozat mint képzési forma az, amelyben a diákok egyértelmű fejlődést mutattak, őket találtuk alkalmasnak arra, hogy további vizsgálataink fókuszába kerüljenek.
2. A speciális matematika tagozaton tanuló diákok átlagos van Hiele-szintje mindegyik évfolyamon jelentősen magasabb, mint a többi képzési formában részt vevő diákoké. Az eredményekből az tűnik ki, hogy az átlagos van Hiele-szintek az előző pontban leírtakhoz hasonlóan összefüggést mutatnak a tantárgy iránti érdeklődésben és a tananyagtartalomban megnyilvánuló eltérésekkel.
3. A 2. táblázatnak a Gimnázium_1 speciális matematika tagozatos diákokra vonatkozó oszlopa értelmében a van Hiele-szintek átlaga 3,46-ról 3,54-en keresztül 3,69-ra emelkedett kilencedik évfolyamtól a tizenegyedik évfolyamig. Ez azon elvárásainkat támasztja alá, mely szerint a speciális matematika tagozaton tanuló átlagos van Hiele-szintje a tizedik évfolyamon már meghaladja a hármat, közelíti a négyet.

Mivel az egyes van Hiele-szintek közötti távolság nem definiált, így a van Hiele-szintek átlagaira kapott eredmények (lásd 2. táblázat) csak durva közelítést adhatnak az összehasonlításra. Emiatt érdemes ennél finomabb elemzést is elvégezni. Ezt már csak a speciális matematika tagozatos diákok esetében végezzük el, tekintettel arra, hogy a későbbiekben csak ezt az oktatási formát fogjuk vizsgálni. A 3. táblázatban Gimnázium_1 speciális matematika tagozatos diákjainak a van Hiele-szintek szerinti százalékos eloszlását láthatjuk az évfolyamok előrehaladtával.

Évfolyam	1. vH-szint	2. vH-szint	3. vH-szint	4. vH-szint
9.	5,4 %	0 %	37,8 %	56,8 %
10.	3,9 %	0 %	34,6 %	61,5 %
11.	0 %	0 %	29,2 %	70,8 %

3. táblázat: A speciális matematika szakos diákok van Hiele-szintek szerinti százalékos eloszlása évfolyamonként (2015. június)

Kiolvasható az adatokból, hogy az évfolyamok növekedésével az első és a harmadik van Hiele-szinttel rendelkező diákok aránya fokozatosan csökken, ugyanakkor a négyes van Hiele-szinten lévő diákoké pedig növekszik (második van Hiele-szinten egyik évfolyamon sem találunk egyetlen tanulót sem). Ezt azt jelenti, hogy az elmélet értelmében a tanulók egyre nagyobb hányada lehet képes néhány lépéses bizonyítások kivitelezésére. Kilencedik évfolyamon már a diákoknak több mint a fele, míg tizenegyedikben közelíti a háromnegyedet a formális dedukció szintjén lévő tanulók aránya. A van Hiele-szintek átlagolása segítségével a javuló tendenciára tett megállapításunkat a százalékos eloszlás bemutatásával sikerült tehát alátámasztanunk, illetve finomítanunk.

Összefoglalva, vizsgálataink azt mutatják, hogy az egyes oktatási formában tanuló diákok geometriai gondolkodásának szintje nem feltétlenül elegendő egy néhány lépéses bizonyítás kivitelezéséhez. A **K1** kutatási kérdésre azt a választ adhatjuk, hogy a méréseinkben részt vevő

speciális matematika tagozatos diákok átlagos van Hiele-szintje a tizedik évfolyamon már meghaladja a hármat, megközelíti a négyet, azaz ők az elmélet szerint alkalmasak lehetnek egy néhány lépésből álló érvelés megkonstruálására.

A speciális matematika tagozatos diákokkal további longitudinális mérésorozatot végeztünk el, amely alapján úgy véljük, hogy a geometriai gondolkodás fejlődéséért nagyrészt a geometria-tananyag minősége és annak elrendezése a tanév folyamán a felelős (Győry & Kónya, 2018).

A 2. és a 3. táblázatból kiolvasható eredményeink korlátját az jelenti, hogy méréseinket csak egy-egy osztályban végeztük el. Tapasztalataink megerősítésére érdemes lenne a van Hiele-szintek változását tanulóknak egy sokkal nagyobb mintáján is megvizsgálni.⁴ Ezek a vizsgálatok azonban túlmutatnak a dolgozat keretein.

⁴ Ehhez el is készült a teszt online módon kitölthető verziója Robotka István Adrián, volt diákom jóvoltából.

3. VÉGZÉS ELŐTT ÁLLÓ SPECIÁLIS MATEMATIKA TAGOZATOS TANULÓK BIZONYÍTÁSI KÉPESSÉGÉNEK VIZSGÁLATA

A van Hiele-szintek mérésének tapasztalataiból kiindulva a bizonyítási képességgel kapcsolatos vizsgálatainkat a speciális matematika tagozatos diákok körében végeztük, mert

- úgy találtuk, hogy ebben a képzési formában tanulók azok, akik jórészt birtokában vannak a bizonyítási képesség szempontjából releváns négyes van Hiele-szintnek;
- a speciális matematika tagozat kerettanterve és az emelt szintű követelmények előírják a bizonyítási képesség meglétét;
- jómagam is ebben a programban tanítok.

3.1. Kutatási kérdések

Kutatásunknak ebben a fázisában az alábbi kérdésre kerestük a választ:

K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

A fő kutatási kérdésünket az alábbi alkérdésekkel finomítottuk:

K2-1: A diákok ki tudják-e olvasni egy állítás szövegéből a feltételt és a következményt?

K2-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelt geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tényt, ami bizonyítást igényel?

K2-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani?

3.2. Kutatásmódszertan a K2-1, K2-2 és K2-3 kutatási kérdésekhez

3.2.1 A kísérlet körülményei

Két tanulócsoportot választottunk ki mélyebb vizsgálatra. Mindkét tanulócsoport tagjai Gimnázium_1 speciális matematika tagozatos képzésében vettek részt. A két tanulócsoport részét képezte a korábbi, a van Hiele-szinteket felmérő kutatásnak (2. fejezet). Az egyik csoport hatosztályos, a másik pedig négyosztályos képzési formában vett részt. Az első 2012-2018, míg a második 2014-2018 között végezte középiskolai tanulmányait, azaz a két csoport egyszerre tett érettségi vizsgát matematikából. A vizsgált tanulók létszáma 27 volt. A csoportok létszáma eredetileg több volt, de a longitudinális vizsgálat miatt mi csak azoknak a tanulóknak a teljesítményét vettük figyelembe, akik mindegyik van Hiele-tesztet megírták.

A két csoport van Hiele-szintjét már kilencedikes korukban mértük (2. fejezet), majd aztán későbbi időpontokban is (Győry & Kónya, 2018). A kapott eredmények azt mutatták, hogy a diákok többségének a geometriai gondolkodása már kilencedikes korában közelítőleg a formális dedukció szintjén volt. A későbbi mérések során is ehhez hasonló eredményeket kaptunk (Győry & Kónya, 2018). Összességében a 27 tanuló 59,3 %-a volt már kilencedikes korában a négyes van Hiele-szinten.

A bizonyítási képesség vizsgálatát 2018 áprilisában végeztük el, amikor mindkét csoport 12. évfolyamos volt és az érettségi vizsga előtt álltak néhány héttel. Usiskin és munkatársai azt kapták, hogy a négyes van Hiele-szint elérése esetén a tanulók képesek egyszerűbb bizonyítások önálló megvalósítására, míg alacsonyabb van Hiele-szintek esetén nem (Usiskin, 1982). Kutatásunk nem a van Hiele-szint és a bizonyítási képesség közötti kapcsolat vizsgálatára irányult, mi az Usiskin által vezetett csoport eredményei alapján eleve feltételeztük, hogy ezen a szinten a vizsgálatba bevont diákok képesek néhány lépéses bizonyítás végrehajtására.

3.2.2 A mérőeszköz

A bizonyítási képesség felméréséhez Zalman Usiskin három bizonyítás-tesztjének egyikét tekintettük kiindulópontnak (lásd B. melléklet). Ez a teszt szintén abban a tanulmányban lelhető fel, amelyben a korábban bemutatott van Hiele-szinteket mérő teszt is található (Usiskin, 1982). A kutatási kérdéseink szempontjából a teszt 3. és 4. feladata nem releváns, továbbá a kiértékelésük további vizsgálatok szükségességét is felveti, így ennek a két feladatnak az elemzése nem képezi részét a dolgozatnak.

Lényeges kiemelni, hogy mi csak a feladatokat vettük át az Usiskin által vezetett kutatócsoporttól, az általuk használt kiértékelési rendszert nem. Nem vezettünk be a feladatok esetén pontos minősítést, hanem feladatonként az akciókutatásokra jellemző kvalitatív elemzést végeztünk. Ezt a kicsi elemszámú minta miatt kimerítően meg tudtuk tenni. Alapvetően két nagy kategóriát különböztettünk meg, aszerint, hogy az adott diák jó megoldást adott vagy sem, amivel képet kaphatunk a tanulócsoportok diákjainak az érvelés-bizonyítás terén nyújtott sikerességéről. Ennél sokkal lényegesebb, hogy eközben végig arra fókuszáltunk, hogy milyen

- tipikus tanulói gondolatmenettel, bizonyítási ötletekkel találkozunk;
- szisztematikus hibákat vétenek a diákok;
- „minőségben” írják le a tanulók a gondolataikat, vagyis milyen az írásbeli kommunikációjuk;

Nem volt tehát kimondott mérési célunk, minden olyan felbukkanó mozzanatra kíváncsiak voltunk, ami elárul valamit a tanulók matematikai gondolkodásmódjáról. A kvalitatív elemzést bizonyos esetekben alkalmas tanulói munkákkal szemléltetjük.

A kiválasztott feladatok tartalmán nem módosítottunk, de a kitűzés módján, a megfogalmazáson helyenként igen, hogy igazodjunk a magyar gyakorlathoz.

A teszt a magyarországi normál gimnazista tizedikes és az azt megelőzően tanult geometria-tananyag ismeretét igényelte, konkrétan a következőket:

- nevezetes szögpárok;
- háromszögek szögeire és oldalaira vonatkozó elemi tulajdonságok;
- az egybevágóság fogalma, illetve háromszögek esetén ennek alapesetei;
- a paralelogrammák tulajdonságai.

A megíratás során követtük az eredeti kutatás körülményeit.

3.3. A kutatási kérdések és a feladatok kapcsolata

A 4. táblázat mutatja, hogy az adott kutatási kérdésre melyik feladattal fókuszáltunk.

Kutatási kérdés			Feladat
K2-1	Felismeri az állítás szerkezetét?		2. feladat
K2-2	A feladathoz csatolt ábrát helyesen alkalmazza?	Felhasznál minden információt, amit az ábra nyújt?	1. feladat 5. feladat
		Elfogad-e hamis tényt, amit az ábra sugall?	6. feladat
K2-3	Végre tud-e hajtani...	...háromlépéses (egyszerűbb) bizonyítást?	1. feladat
		...négylépéses (összetettebb) bizonyítást?	5. feladat 6. feladat

4. táblázat: A kutatási kérdések és a feladatok kapcsolata

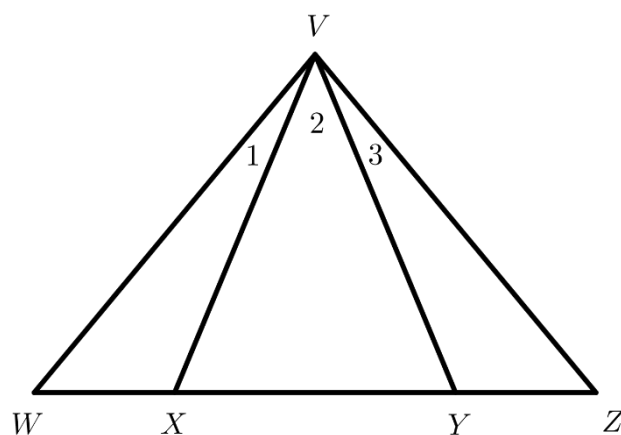
3.4. A bizonyítás-teszt tapasztalatai

A tesztet és a kapott eredményeket feladatonként mutatjuk be. Először ismertetjük a feladatot, annak egy megoldását, majd pedig a mérés eredményét, ami mind kvantitatív, mind pedig kvalitatív elemeket fog tartalmazni.

3.4.1 A bizonyítás-teszt első feladata

Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

A W -nél lévő szög annyi, mint a Z -nél lévő szög, valamint a WX szakasz hossza megegyezik az YZ szakasz hosszával.



Bizonyítsd be, hogy az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával!

A feladat megoldása

Mivel a W -nél lévő szög nagysága megegyezik a Z -nél lévő szög nagyságával, így $VW = VZ$, vagyis a WZV háromszög egyenlő szárú.

Ebből viszont az következik, hogy a WXV és a ZYV háromszögek egybevágók, hiszen megegyezik két-két oldaluk hossza, és az általuk közbezárt szög nagysága ($WV = ZV, WX = ZY, \angle VWX = \angle VZY$).

Mivel két egybevágó háromszög egymásnak megfelelő szögeinek nagysága egyenlő, így az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával, amit éppen be akartunk látni.

Ezzel a feladattal a **K2-2** és a **K2-3** kutatási kérdésre fókuszáltunk.

Tapasztalatok

A feladat kapcsán a csoport eredményességét az 5. táblázat mutatja:

	Jól oldotta meg	Nem oldotta meg jól
Diákok száma	9	18

5. táblázat: Bizonyítás végrehajtása (1. feladat, bizonyítás-teszt)

Nem várt eredmény, hogy az érettségi előtt álló speciális matematika tagozatos diákoknak csak az egyharmada tudta megalkotni ezt a három lépésből álló érvelési láncot.

Azok közül a tanulók közül, akik jól oldották meg a feladatot, csupán egy diák volt, aki a bizonyítás harmadik lépésében explicit módon mondta ki azt a tényt, hogy az „egymásnak megfelelő szögek” egyenlők egymással. A többi tanuló ezt nem írta oda, igaz a tanítási gyakorlatban sem szoktuk ezt mindig megtenni.

A leggyakrabban előforduló hiba, hogy a diákok egy része (9 tanuló) az XYV háromszögről indoklás nélkül azt állította, hogy egyenlő szárú. Ez természetesen igaz, de éppen a belátandó tény következménye. Ezek a tanulók ezt az észrevételüket valószínűsíthetően az ábra sugallatára tették. Hasonló típusú hibát vétett egy tanuló, aki a WXV és a ZYV háromszögekről állította mindenféle indoklás nélkül, hogy egybevágók. A többi nyolc tanuló a hibák változatos palettáját vonultatta fel. Volt például közöttük olyan, aki nem az állításban szereplő szögek egyenlőségét látta be (hanem azt, hogy $\angle WXV = \angle ZYV$); volt, aki a két „szélső” háromszög hasonlóságáig jutott el, de ebből nem vont le semmilyen következtetést; volt, aki el sem indult, és volt olyan is, aki magából a bizonyítandó tényből indult ki, és így próbált meg valami eredményt produkálni, sikertelenül.

3.4.2 A bizonyítás-teszt második feladata

Állítás: Ha megrajzoljuk egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasságát, akkor az felezi a szárac által bezárt szöget.

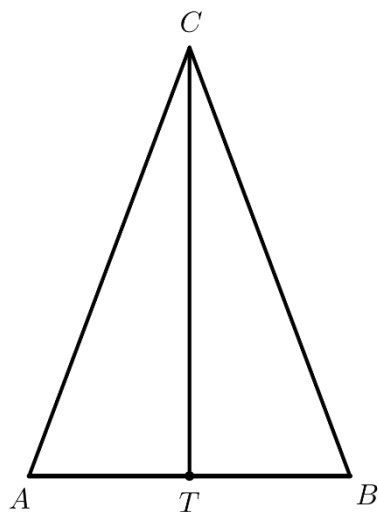
a. Készíts jelölésekkel ellátott ábrát a fenti állításhoz!

b. Írd le az ábrád jelöléseit felhasználva, hogy az állításban mi van feltételezve, és mit kell benne bizonyítani!

Az állítást nem kell belátnod!

A feladat megoldása

a.



b. Feltétel: $CA = CB$ és $CT \perp AB$.

Bizonyítandó: $\angle ACT = \angle BCT$.

A feladattal a **K2-1** kutatási kérdésre kerestük a választ.

Láthatjuk, hogy a második feladat „Ha... akkor...” formában van megadva, így a feltétel és a bizonyítandó rész jól elkülönül egymástól.

Tapasztalatok

A feladat összesített statisztikáját a 6. táblázat mutatja.

	Jól oldotta meg	Nem oldotta meg jól
Diákok száma	7	20

6. táblázat: Mérési eredmények (2. feladat, bizonyítás-teszt)

Látható, hogy a diákoknak alig több mint a harmada tudott csak helyesen válaszolni.

Az egyes részfeladatok eredményét a 7. táblázat mutatja.

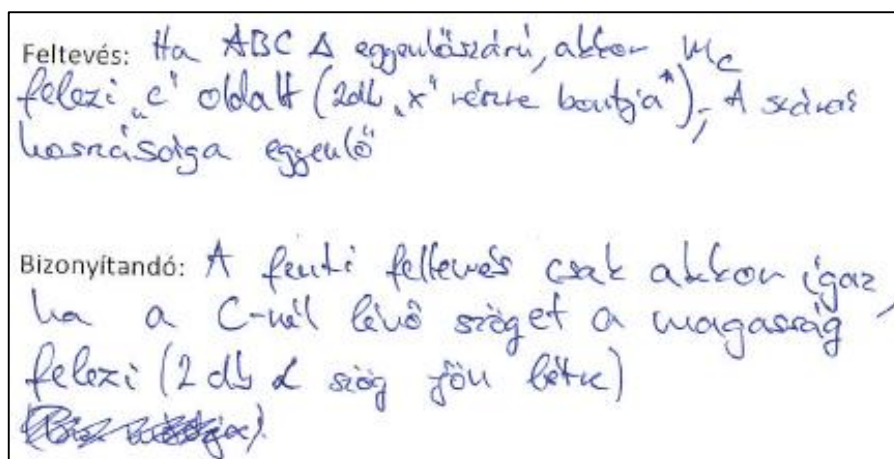
	Jól oldotta meg	Nem oldotta meg jól
Ábrakészítés, jelölések bevezetése (diákok száma)	27	0
Feltétel kiolvasása (diákok száma)	10	17
A bizonyítandó kiolvasása a szövegből (diákok száma)	18	9

7. táblázat: A részfeladatok eredményei (2. feladat, bizonyítás-teszt)

A következő megállapításokat tehetjük:

1. Az ábrák elkészítésével és a jelölések bevezetésével nem volt gondja a tanulóknak.
2. A diákoknak körülbelül vagy alig több mint az egyharmada tudta a feltételt kiolvasni az állítás szövegéből. Tipikus hibát fedezhetünk fel: a rossz megoldást adó diákok (tizenhét fő) közül tizenketten nem tudták szétválasztani egymástól a feltételt, a bizonyítandót és magát az állítást, hatan a bizonyítandót, hatan a teljes állítást írták le feltételként.
3. A bizonyítandó következményt a tanulók kétharmada tudta kiolvasni az állítás szövegéből.

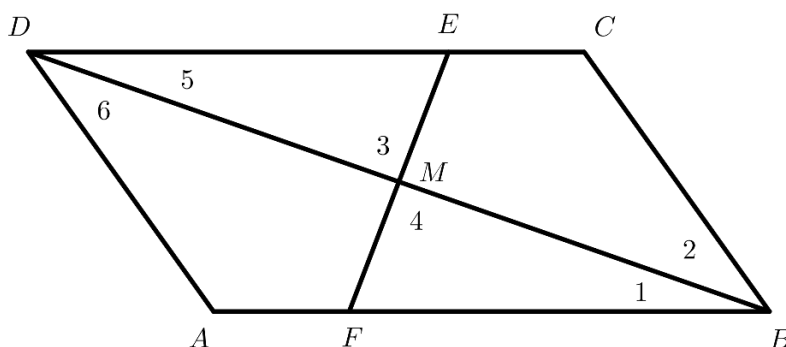
A feladat kapcsán jellemző hibaként jegyezhetjük fel tehát, hogy a diákok közül sokan nincsenek tisztában a feltétel, a bizonyítandó és az állítás fogalmával. Ezt támasztja alá az alábbi megoldás is (3-1. ábra).



3-1. ábra: A diák nincs tisztában a feltétel, a bizonyítandó és az állítás fogalmával (2. feladat)

3.4.3 A bizonyítás-teszt ötödik feladata

Az alábbi ábráról a következőket tudjuk: $AB = DC$, $AD = BC$. M a DB szakasz felezőpontja. M rajta van az EF szakaszon. Bizonyítsd be, hogy $FM = ME$!



A feladat egy lehetséges megoldása

Az 5-tel és az 1-gyel jelölt szögek nagysága megegyezik, mivel váltószögek.

A 3-mal és a 4-gyel jelölt szögek nagysága megegyezik, mivel csúciszögek.

A DME és a BMF háromszögek egybevágók, hiszen megegyezik egy-egy oldaluk hossza ($DM = MB$), továbbá az ezen oldalakon nyugvó szögek nagysága.

A két egybevágó háromszög megfelelő oldalainak hossza is megegyezik, vagyis $FM = ME$.

Ezzel a feladattal a K2-2 és a K2-3 kutatási kérdésre kerestük a választ.

Tapasztalatok

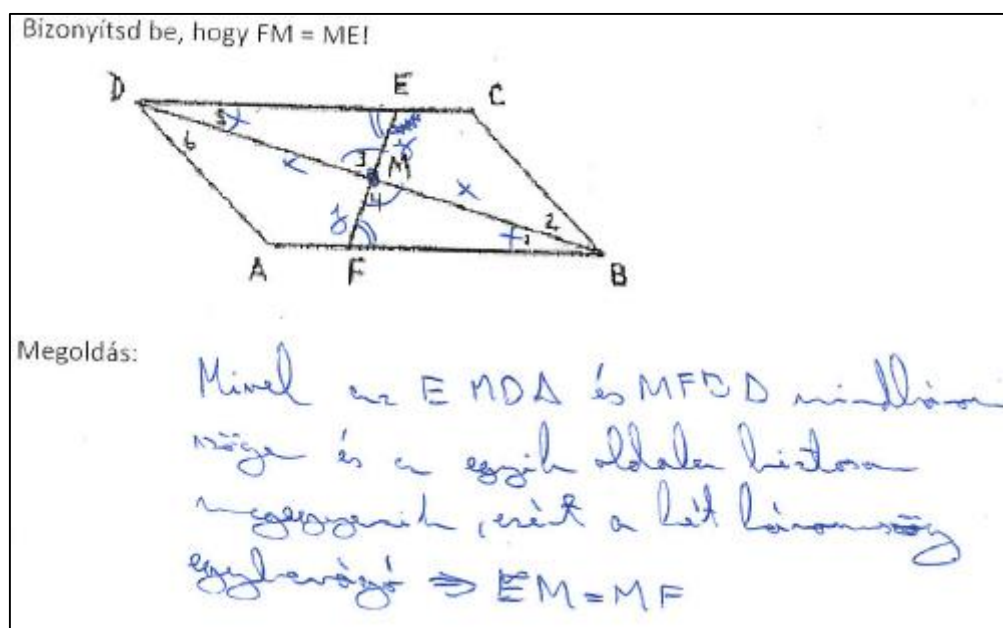
A bizonyítások végrehajtásának a statisztikáját a 8. táblázat mutatja.

	Jól oldotta meg	Nem oldotta meg jól
Diákok száma	7	20

8. táblázat: Bizonyítás végrehajtása (5. feladat, bizonyítás-teszt)

Azt lehet mondani, hogy ezen két végzős speciális matematika tagozatos csoport tanulóinak a java része nem birkózott meg egy négy, egyszerű lépésből álló érvelés végrehajtásával.

Azok közül, akiknek sikerült a bizonyítást véghezvinniük, egy tanuló választotta a középpontos tükrözésen alapuló utat, a másik hat diák egybevágóságra vezette vissza a feladatot, nevezetesen szögpárokat fedezvén fel az ábrán. Még a jó megoldók között is érezhető, hogy az írásbeli kommunikáció nem a legtökéletesebb. Egy ilyenre mutat példát a 3-2. ábra.



3-2. ábra: Egy tipikusan „szellős” megoldás

A diák egyrészt az ábrába jelölte be az egymással egyenlő szögeket (indoklás nélkül, de arra ügyelt, hogy megfelelően azonosítsa be az egymással kongruens szögeket). Másrészt nem írta oda, hogy az EM és az FM szakaszok egymásnak megfelelő oldalak az egybevágóság során.

A feladatot helyesen megoldani nem képes diákok az elkövethető hibák széles spektrumát vontatták fel. Csak a gyakran előforduló esetekről szólunk pár szót.

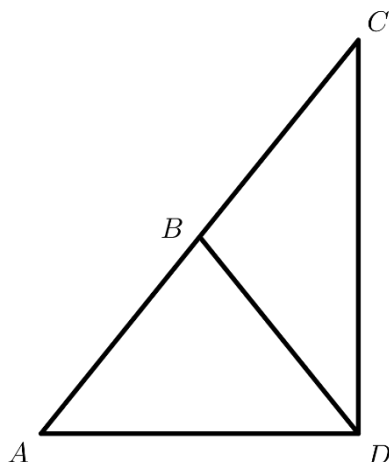
Négy tanuló egyáltalán nem kezdett bele a feladatba.

Öt diák volt, akit az ábra megtévesztett. Két esetben az átlókról az ábra alapján feltették, hogy merőlegesen metszik egymást. Egy tanuló az ábra sugallatára a DE és az FB szakaszokról állította, hogy egyenlő hosszúságúak. Volt egy diák, aki az előző két hibát egyszerre követte el. Végezetül, egy tanuló az ábra alapján azt tette fel, hogy a paralelogramma ábrán szereplő átlói felezik a paralelogramma megfelelő szögeit.

Más szisztematikusan előforduló hibát nem fedeztünk fel. Volt, aki a bizonyítás során keverte az egybevágóság és a hasonlóság fogalmát, volt olyan, aki csak az egymással megegyező nagyságú szögekig, volt, aki hasonlóságig jutott el.

3.4.4 A bizonyítás-teszt hatodik feladata

Az alábbi ábráról a következőket tudjuk: B az AC szakasz felezőpontja. $AB = BD$. Bizonyítsd be, hogy a CDA szög derékszög!



A feladat egy lehetséges megoldása

A feltételek értelmében: $AB = BD = BC$.

Ez azt jelenti, hogy az ABD és a DCB háromszögek egyenlő szárúak.

Mivel egy egyenlő szárú háromszögben az egyenlő nagyságú oldalakkal szemben ugyanakkora nagyságú szögek vannak, így $BAD\angle = BDA\angle$, illetve $BDC\angle = BCD\angle$.

Ebből az következik, hogy

$$\begin{aligned} CDA\angle &= \\ &= BDA\angle + BDC\angle = \frac{2 \cdot BDA\angle + 2 \cdot BDC\angle}{2} = \frac{BAD\angle + BDA\angle + BDC\angle + BCD\angle}{2} = \\ &= \frac{CAD\angle + ADC\angle + ACD\angle}{2} \hat{=} \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \end{aligned}$$

ahol a $\hat{=}$ szimbólummal jelölt egyenlőségnél felhasználtuk, hogy egy háromszög belső szögeinek az összege 180° .

A feladattal a **K2-2** és a **K2-3** kutatási kérdésre fókuszáltunk.

Tapasztalatok

Hogy sikerült a bizonyítás? (9. táblázat)

	Jól oldotta meg	Nem oldotta meg jól
Diákok száma	13	14

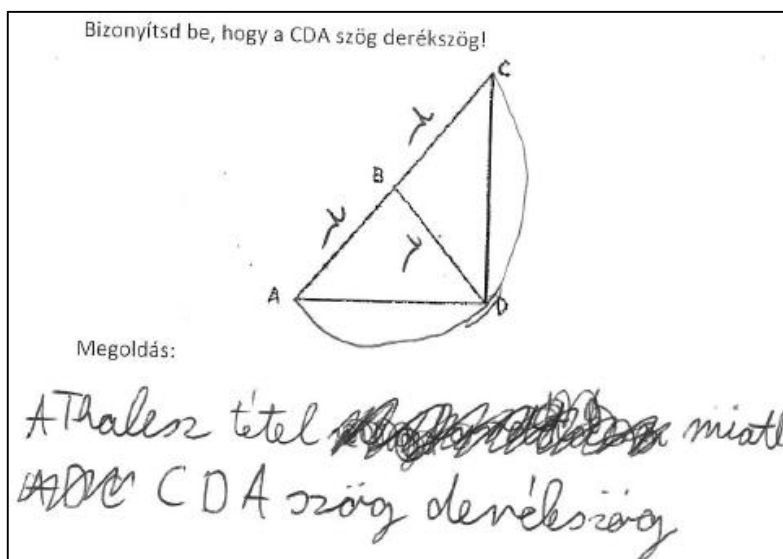
9. táblázat: Mérési eredmények (6. feladat, bizonyítás-teszt)

Összességében mintegy a tanulók felének sikerült a bizonyítást végrehajtania. A következtetések levonása érdekében kielemezzük a jó és a rossz megoldásokat.

A jó megoldások statisztikája (13 fő)

A megoldást hibátlanul írta le tíz tanuló. Fontos megjegyezni, hogy ezek közül a diákok közül egyik sem hivatkozott arra, hogy „egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak”. Itt felvetődik az a dilemma, hogy mik azok a tények, amik explicit hivatkozást igényelnek, és mik azok, amik nem.

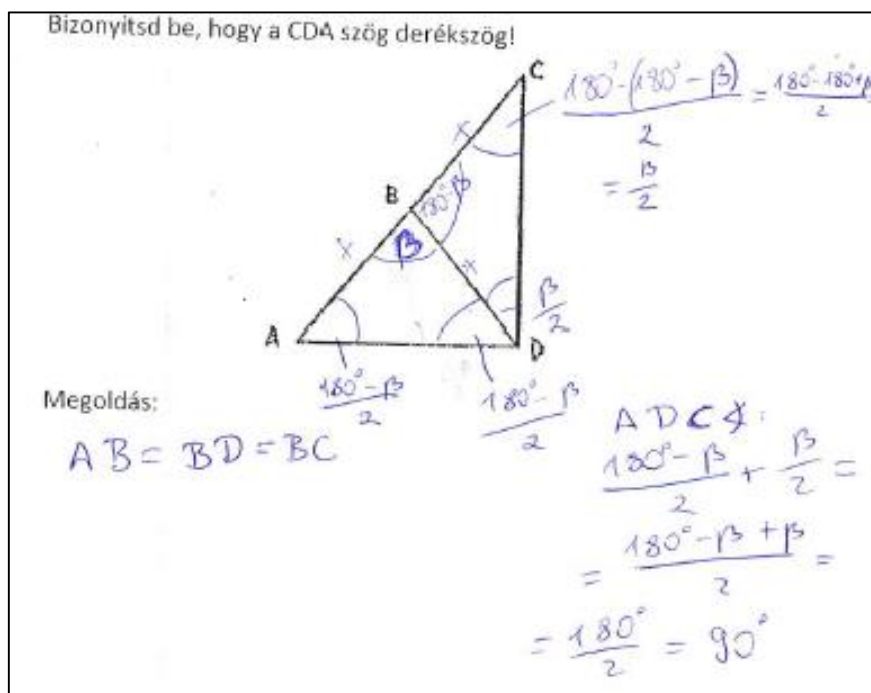
A tizenhárom tanuló közül egy meglehetősen szikáran írta le a bizonyítást (3-3. ábra).



3-3. ábra: Egy nagyon tömör megoldás

Két diák volt, aki az ábrában dolgozott. Ez utóbbi egy tipikus példája a tanulói megoldásoknak. A bizonyítás gondolatmenete ilyen esetekben nehezen követhető, arról nem is beszélve, hogy hibás érvelés esetén nehéz megállapítani, hogy hol történt a tévedés.

A 3-4. ábra az egyik olyan diák dolgozatát mutatja, aki az ábrába beleírva végezte a bizonyítást, de az érvelési lánc viszonylag könnyen nyomon követhető.



3-4. ábra: Megoldás az ábrába írva

A tanuló lépései a következők lehetnek (többször felhasználva azt a tényt, hogy egy háromszög belső szögeinek az összege 180°):

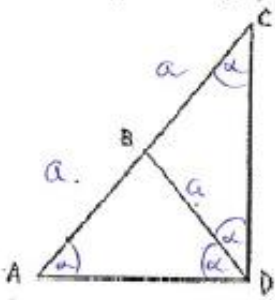
1. Leírta a megadott tényt, hogy $AB = BD = BC$, majd ezt jelölve, az ábrára ezen szakaszok mindegyikére ráírt egy-egy x -et.
2. Az ABD -et elnevezte β -nak.
3. Mivel az ADB háromszög egyenlő szárú, így az A -nál és D -nél lévő szögeinek nagyságára egyaránt azt kapta, hogy $\frac{180^\circ - \beta}{2}$.
4. A B -nél lévő szögek mellékszögek, így $DBC = 180^\circ - \beta$.
5. Mivel a DCB háromszög szintén egyenlő szárú, így a D -nél és a C -nél lévő szögeinek nagysága rendre $\frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2}$.
6. Majd, miután a D csúcsnál keletkezett két szög nagyságát már meghatározta, így ezek összege a kérdéses szög nagysága: $\frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{180^\circ - \beta + \beta}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Bár ezzel már igazolta az állítást, ezt nem írta oda explicite.

A rossz megoldások (14 fő)

A tizennégy tanuló közül három volt olyan, aki nem kezdte el a bizonyítást, a lapot üresen hagyta. Két tanuló esetében nem lehet követni a gondolatmenetet, a leírt érvelés kaotikus. Egy diák volt, aki jól indult el, de egy bizonyos pont után abbahagyta az érvelést. A többi nyolc tanuló kapcsán viszont tipikus, ismétlődő hibát vehetünk észre. Ezek a diákok ugyanis az ábra alapján hibás következtetést vontak le, bizonyos szögek egyenlőségét állították igazolás nélkül ($\angle BDA = \angle BDC$). Nyilvánvaló, hogy itt a tévedést az okozta, hogy az ábra azt sugallta, hogy a BD szakasz felezi az $\angle ADC$ -et. Egy ilyen megoldást szemléltet a 3-5. ábra.

6. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:
 B az AC szakasz felezőpontja.
 $AB = BD$.
 Bizonyítsd be, hogy a $\angle CDA$ szög derékszög!



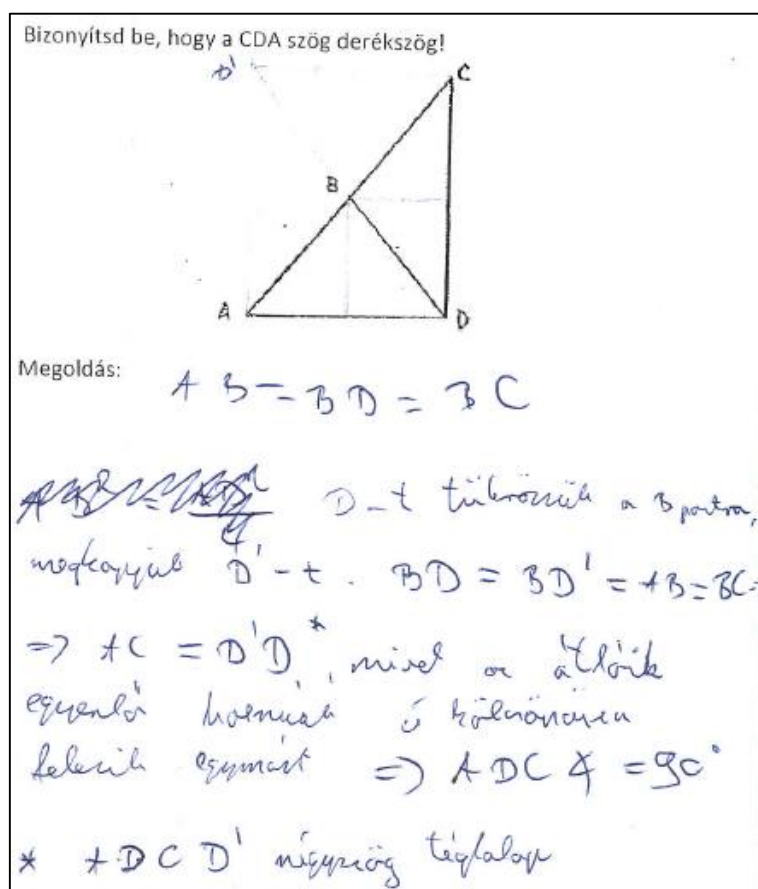
Megoldás:

ABD_Δ és DBC_Δ egyenlőszárú

$180^\circ = 4\alpha$
 $90^\circ = 2\alpha$
 $\angle ADC = 2\alpha = 90^\circ$

3-5. ábra: Egy tipikusan rossz megoldás

Nemcsak szisztematikus hibára akadunk, hanem nagyon ötletes megoldásra is. Ezt láthatjuk a 3-6. ábraán.



3-6. ábra: Egy meglepő megoldás

Itt a diák kiegészítette a meglévő ábrát geometriai transzformáció segítségével, amit arra utal, hogy a tanuló az átlagosnál nagyobb kreativitással rendelkezik. Majd ezután azt használta fel, hogy egy konvex négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha az átlói egyenlő hosszúságúak és kölcsönösen felezik egymást.

3.4.5 Észrevételek a bizonyítás-teszttel kapcsolatban

A feladatok részletes taglalása után kiemeljük a bizonyítás-teszt néhány karakteres tulajdonságát.

- A négy feladat közül a második az egyetlen, amiben nem kell bizonyítást végrehajtani, nincs hozzá mellékelve ábra. Továbbá az állítás megfogalmazása eltér az összes többi feladattól: a feltétel és a bizonyítandó nem két külön mondatban van megadva, hanem egyetlen, „Ha... akkor...” típusú mondat az állítás. Az összes többi feladatban van mellékelve ábra, és bizonyítást is kell bennük végrehajtani.
- Az ötödik és a hatodik feladat esetén csatolt ábrák bizonyos mértékben hamis információkat sugalltak.

A tanulóink egyrészt minden geometriai ismeret birtokában voltak ahhoz, hogy feladatokat sikeresen megoldják, másrészt a feladatokkal nem találkoztak a korábbi tanórákon. Éppen ezek voltak a feladatsor kiválasztásának a fő szempontjai. Fontos hangsúlyozni, hogy nem pusztán az érdekelt bennünket, hogy a tanulók jól vagy rosszul oldottak meg egy-egy feladatot, hanem az is, hogy milyen típusú hibát vétettek, voltak-e eredeti gondolataik, és így tovább.

3.5. Tapasztalatok és következtetések a tanulók bizonyítási képességére vonatkozólag

Zalman Usiskin bizonyítás-tesztje segítségével két olyan tanulócsoportot vizsgáltunk meg, melyek van Hiele-szintjeinek változását előzőleg éveken keresztül monitoroztuk.

A **K2-1** kutatási kérdés kapcsán megállapítottuk, hogy a diákok egy jelentős része számára magyarázatra szorul a feltétel és a bizonyítandó rész egymástól és magától az állítástól való szétválasztása. A bizonyítási képesség fejlesztése során nagy hangsúlyt kell tehát fektetni arra, hogy a diákok az állításból pontosan ki tudják olvasni a feltételt és a bizonyítandó tény. Ennek érdekében célszerű az alábbi sorrendet követni.

- (1) Az állításokat olyan formában adja meg a tanár a tanulónak, amiben a feltétel és a bizonyítandó külön mondatban van megfogalmazva. Például: „Tekintsünk egy rombuszt. Bizonyítsuk be, hogy az átlói merőlegesek egymásra.”
- (2) Az állításokat a tanár „Ha... akkor...” szerkezetben fogalmazza meg a diákok számára, és tisztázza, hol szerepel benne a feltétel, és hol a következmény rész. Érdemes az első lépésben megadott szerkezetű állításokat magukkal a tanulókkal is átfogalmaztatni erre az alakra. Az iménti példa ebben a formában így szólna: „Ha egy négyszög rombusz, akkor átlói merőlegesek egymásra.”
- (3) Végezetül kvantorok segítségével és egyéb módon megfogalmazott állítások következhetnek („Bármely rombusz átlói merőlegesek egymásra.”; „Egy rombusz átlói merőlegesek egymásra.” stb.).

Az előző eredmények összhangban vannak Ambrus András gondolataival: „Alapvetően fontos a „feltétel” és a „következmény” világos megkülönböztetése. Ez különösen akkor okoz gondot, ha a tétel nem „Ha... akkor...” formában van megfogalmazva.” (Ambrus, 1995).

A **K2-2** kutatási kérdéssel kapcsolatban a következőket mondhatjuk el. Azt tapasztaltuk, hogy a tanulók egy része az ábra által sugallt tényeket indoklás nélkül fogadja el. Emiatt az ábrákra nagy figyelmet kell fordítani a tanárnak a bizonyítási képesség fejlesztése kapcsán (is). Világossá kell tenni a tanulók számára, hogy jól áttekinthető, megfelelő jelölésekkel ellátott ábrát kell készíteniük. Hangsúlyt kell fektetnie a tanárnak arra, hogy a tanulók ne fogadjanak el az ábra alapján tényeket, csakis akkor, ha azok igazságtartalmát ténylegesen belátták.

A **K2-3** kutatási kérdés esetén arra jutottunk, hogy a speciális matematika tagozatos diákok egy nagyon egyszerű, két, legfeljebb három lépésből álló bizonyítást önállóan is végre tudnak hajtani, összhangban a van Hiele-elmélettel. Viszont egy ennél kicsit összetettebb bizonyítás esetén már többen közülük akadályokba ütköznek, így ezeknek a diákoknak még több gyakorlásra van szükségük. A tanulókra jellemző általában, hogy nem indokolnak kellőképpen, egyes bizonyítási lépéseket tényként kezelnek, így meg sem említik őket.

Egyik legnehezebb eleme a bizonyítási képesség fejlesztésének az, hogy a tanár megértesse a tanulókkal, mi az, ami egy bizonyítás során indoklást igényel a középiskolában, és mi az, ami nem. Ez természetesen egy hosszú folyamat, nagy feladatmegoldó rutint feltételez, amit csakis sok-sok gyakorlással érhetünk el.

A matematikai nyelvhasználatban megállapítottuk, hogy a diákok hajlamosak arra, hogy csak az ábrába beleírva hajtják végre a bizonyítást, nem pedig megfelelő jelöléseket felhasználva kellő részletességgel fogalmazva írják le az érvelésüket.

A teszt kapcsán szerzett tapasztalatokból kiindulva 2018 nyarán egy fejlesztő tanítási kísérletet terveztünk meg, melyet a 2018-2019-es tanév folyamán hajtottunk végre.

4. SPECIÁLIS MATEMATIKA TAGOZATOS KÉPZÉST KEZDŐ 9. ÉVFOLYAMOS TANULÓK BIZONYÍTÁSI KÉ- PESSÉGÉNEK FEJLESZTÉSE

A van Hiele-szintek több éven át tartó mérése, majd a bizonyítás-teszt alapján kapott eredmények mélyebb elemzése jó alapot szolgáltatott arra, hogy a geometriai bizonyítási képesség mértékét ne csak vizsgáljuk, hanem szisztematikus munkával fejlesszük is. Ezt a 2018/2019-es tanéven keresztül tartó fejlesztő kísérlet keretein belül végeztük el.

A kísérlet mozgatórugója a tanulók bizonyítási képességének a fejlesztése volt, illetve az, hogy megállapítsuk, mik lehetnek azok a tényezők, amik ennek a képességnek a kialakulását lassítják, esetleg gátolják. Az ezt vizsgáló felmérésünk szerint a matematikai állítások igazolása még a speciális matematika tagozatos diákoknak is nagyon nagy gondot okoz (Győry & Kónya, 2019).

Kutatásunknak ebben a fázisában az alábbi kérdésekre kerestük a választ:

K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatos képzést kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program?

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

4.1. Kutatásmódszertan a K3, K4 és K5 kutatási kérdésekhez

A kísérlet során akciókutatást végeztünk, betartva az ehhez tartozó alapelveket, amelyet Koshy munkájában részletesen tárgyal (Koshy, 2005). Egyrészt a kísérletbe bevont diákoknak a tanítási gyakorlathoz kapcsolódó vizsgálata, fejlesztése volt a célunk. Másrészt a kutatást végző személy az adott tanulócsoport egyik tanára volt. Én voltam ugyanis a csoport geometriatanára, a kísérlet a tanítási óráim keretében zajlott. Ez természetesen nagyban növelte a kísérlet hatékonyságát, hiszen a megfelelő munkához való légkör már kialakult a korábbiakban, illetve a diákok bizalma is megvolt a tanórát tartó személy irányában. A csoport másik matematikatanárát nem vontuk be a kísérletbe, mint ahogy egyetlen más szakos kollégát sem. Továbbá azt az alapelvet is szem előtt tartottuk, hogy a kutatás során nem rugaszkodtunk el a tantervtől, hanem abba beágyazva végeztük el a fejlesztő kísérletet. Mindemellett törekedtünk arra is, hogy az akció és a reflexió egységet alkosson, azaz a kísérlet tapasztalatait menetközben értékelve folyamatos volt a visszacsatolás. A tanulóktól és a szüleiktől beleegyezést kértünk az adatgyűjtésben való részvételhez. Az előírásnak megfelelően a dolgozatban minden tanulóra név nélkül fogunk utalni sorszám segítségével (Tanuló_1, Tanuló_2 stb.).

A fejlesztő tanítási kísérletben a kutatás alanyai ismételten Gimnázium_1 speciális matematika tagozatos diákjai voltak. Olyan kilencedikes tanulócsoportot választottunk ki, akik az adott tanévben (2018/2019) kezdték meg középiskolai tanulmányaikat, vagyis úgynevezett egycsoportos kísérletet hajtottunk végre. Azért éppen kilencedikesek monitoroztunk, mert egyrészt többen közülük már feltehetően alkalmasak voltak két-három lépésből álló önálló bizonyítás végrehajtására, másrészt az évfolyamuk végett egy későbbi fejlesztésre is megfelelőnek találtuk őket. A csoport 22 főből állt, 8 lány és 14 fiú. A tanév folyamán nem történt változás a csoport összetételében, mindvégig ugyanazokkal a tanulókkal végezhattük vizsgálatainkat.

Az Usiskin-féle kutatócsoport által kapott eredmények (Usiskin, 1982) és a mi korábbi kutatásainkból leszűrt tapasztalatok mind azt mutatták, hogy a tanulók bizonyítási képessége és a van Hiele-szintje között kapcsolat áll fenn. Első lépésként tehát meghatároztuk a csoport átlagos van Hiele-szintjének értékét. Erre 2018. november 5-én került sor. A felmérés során az eredeti, Usiskintól származó tesztet használtuk (Usiskin, 1982), mely alapján a fókuszcsoport átlagos van Hiele-szintje (ismételten csak a vitatott ötös szint figyelembe vétele nélkül) 3,59-nek adódott, úgy, hogy egyetlen tanuló sem kapott hármasnál alacsonyabb van Hiele-szint értéket. Konkrétan, 9 tanuló ért el hármast, 13 pedig négyes van Hiele-szintet, tehát a csoport a geometriai gondolkodás fejlettségének a szempontjából jó közelítéssel homogénnek volt mondható. Ez azt jelenti, hogy az elmélet szerint a diákoknak nagyjából a 60%-a volt képes arra, hogy egy néhány lépésből álló geometriai bizonyítást önállóan hajtson végre. Ezek alapján alkalmasnak találtuk őket arra, hogy a bizonyítási képességüket egyrészt vizsgáljuk, másrészt fejlesszük.

A fejlesztő tanítási kísérlet elemzése miatt érdemes tanulónként megemlíteni a tanulócsoport van Hiele-szintek szerinti eloszlását (10. táblázat).

	Négyes van Hiele-szint	Hármast van Hiele-szint
Diákok sorszáma	1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 21	2, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 20, 22

10. táblázat Az egyes tanulók van Hiele-szintjei

Az egyes tanulók által elért van Hiele-szinteket a későbbiekben több helyen fel fogjuk tüntetni az alábbi konvenció szerint: amennyiben Tanuló_x van Hiele-szintje y, akkor az adott diákra innentől kezdve a Tanuló_x_y azonosítóval fogunk hivatkozni. Fontos tehát hangsúlyozni, hogy az y értéke a későbbiekben az illető tanuló bemeneti van Hiele-szintjét fogja jelölni.

A van Hiele-szintek felmérése után második lépésként a vizsgált tanulócsoporttal egy előtesztet írtunk, amely már a diákok bizonyítási képességét volt hivatott felmérni. A fejlesztő kísérlet során ezen túlmenően írtunk egy köztes tesztet, majd a végén pedig egy utótesztet. A köztes teszt segítségével mérleget vontunk az addigi kutatási munka sikerességét illetően, és levontuk a tanulságokat. Az utóteszt elemzése során győződünk meg a fejlesztő tanórák hatásáról, miután összevetettük az itt mért eredményeket az előteszt esetében kapottakkal. Ezután néhány hónapon keresztül hagyományos mederben zajlottak a tanórák, a fejlesztésre kijelölt területekre szándékosan nem fókuszáltunk, tettük ezt azért, mert ezek után írtuk meg az utolsó tesztet, az úgynevezett késleltetett tesztet. Igazából ez mérte a fejlesztő kísérlet eredményességét, ez mutatta meg azt, hogy voltaképpen mennyire sikerült az előre megcélzott területek esetében a tanulók képességeit fejleszteni.

A fejlesztő kísérlet során a tanulói munkákat folyamatosan nyilvántartottuk. A dokumentálás formái, vagyis az akciókutatásunk korpusza az alábbiakból állt:

- Minden tanítási óra után tanári feljegyzés készült az órán elhangzott, a kísérlet szempontjából lényeges mozzanatokról.
- Több tanítási órát videóval rögzítettünk.
- A tanulók táblai, illetve füzetben elkészített írásbeli munkáját többször is fotóval örökítettük meg.
- A diákok minden dolgozatát beszkeneltük.
- Sok esetben a tanórai, illetve házi feladatként elkészített tanulói munkákat összegyűjtöttük.

Minden dolgozatot, tesztet megőriztünk. Kutatásunk korpusza tehát a tanórai reflexiók, írásbeli munkák, fotók, videófelvevételek összessége volt. Minden esetben saját magunk által készített feladatsort használtunk, amit alapos tervezés és vizsgálat előzött meg.

Mivel az akciókutatásra a kvalitatív paradigma a jellemző, így a tanulói közlések mögött meghúzódó tartalmakat igyekeztünk tudományos objektivitással, kellő mélységben feltárni, tanulmányozni. Ennek során természetesen kvantitatív adatokhoz is jutottunk, hiszen bizonyos kvalitatív jellemzők mennyiségét az adott korpuszban ezekkel jól leírhattuk, szemléltethettük, ábrázolhattuk. A kódolási folyamatot én végeztem el, amit a témavezetőm felülvizsgált, majd konszenzusos egyeztetéseken keresztül kialakítottunk egy egységes álláspontot a kódokat illetően. A kapott eredmények interpretálása után következtetéseket vontunk le, esetleg feltételezésekkel éltünk.

Lényeges megemlíteni, hogy a tanítási kísérlet során semmilyen módszert nem sulykoltunk, a fejlesztő lépéseket a tanórák normál menetébe ágyaztuk be. Hetente négy tanítási órán folyt a fejlesztő kísérlet, amit 2018 novemberében vette kezdetét. Ennek időbeli felépítését a 11. táblázat mutatja.

Tanóra sor-száma	Tanóra idő-pontja	Lényeges geometriai tartalom	Megjegyzés a tan-órákhoz	Dokumentáció jellege
1.	2018. 11. 07.	Korábbi ismeretek	Előteszt	Írásbeli feladat-lap
2-10.	2018. 11. 08 – 2018. 11. 26.	Korábbi ismeretek	Ismétlő rendsze-rezés; Bizonyítási fel-adatok önállóan, pármegbeszélés, közös megbeszélés	Videófelvevétel; Tanári feljegye-zések
11.	2018. 11. 28.	Háromszög-egyenlő-tenség	-	Tanári feljegye-zések
12-18.	2018. 11. 30. – 2018. 12. 14.	Pitagorasz tétele	Egy tanórán a Pi-tagorasz-tétel kü-lönböző angol nyelvű bizonyítá-sainak önálló fel-dolgozása	Esetenként írás-beli tanórai munka; Videófelvevétel; Tanári feljegye-zések
19.	2018. 12. 17.	Pitagorasz tétele	Dolgozat Pitago-rasz tételéből	Írásbeli feladat-lap
20 – 32.	2018. 12. 19. – 2019. 01. 29.	Konvexitás; Konvex sokszögek; Háromszög körülírt, il-letve beírt köre; Háromszögek $r \cdot s$ terü-letképlete	-	Tanári feljegye-zések

33 – 42.	2019. 01. 30. – 2019. 02. 18.	Thalész tétele és annak alkalmazásai; Szerkesztések	A Thalész-tétel és annak megfordításának önálló megfogalmazása a tanulók által	Írásbeli tanórai munka; Táblaképek Tanári feljegyzések
43.	2019. 02. 19.	Korábbi ismeretek	Köztes teszt	Írásbeli feladatlap
44 – 54.	2019. 02. 20. – 2019. 03. 11.	Érintőnéyszögek	-	Tanári feljegyzések
55.	2019. 03. 12.	Pitagorasz-tétel; Thalész-tétel; Érintőnéyszögek	Utóteszt	Írásbeli feladatlap
56 – 91.	2019. 03. 13. – 2019. 05. 29.	Egybevágósági transzformációk és azok osztályozása	-	Tanári feljegyzések
92.	2019. 06. 03.	Korábbi ismeretek	Késleltetett teszt	Írásbeli feladatlap

11. táblázat: A fejlesztő tanítási kísérlet kronológiája

A fejlesztő tanítási kísérletet két fázisra bontottuk. Az első periódusban a **K3** és a **K4** kutatási kérdésekre kerestük a választ. Ez a fázis tíz tanítási órát foglalt magába, melynek lényeges elemei a tanulókkal megíratott előteszt, valamint három tanóra, amelyet videóval rögzítettünk. A második fázis negyvenöt tanórát ölelt fel, amely tartalmazta a fejlesztő tanítási órákat, valamint a köztes tesztet és az utótesztet. Ezután a késleltetett teszt megíratására harminchat tanítási órát követően került sor. Ez a periódus a **K5** kutatási kérdésre kereste a választ.

4.2. A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisa

A fejlesztő tanórák konkrét kivitelezéséhez feltérképeztük a diákok bizonyítási képességét. Ezt két lépésben tettük meg:

1. A tanulókkal egy úgynevezett előtesztet írtunk.
2. Három egymás után következő tanórán vizsgáltuk a diákokat a geometriai bizonyítások kivitelezésének a szempontjából. Ezeken a tanítási órákon az előteszt tapasztalataira építettünk.

A **K3** kutatási kérdést a következő alkérdésekre bontottuk.

K3-1: A diákok ki tudják-e olvasni az állítás szövegéből a feltételt és a következményt? (Ez a kérdés szintén szerepelt a 3. fejezetben (**K2-1**).)

K3-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelte geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tényt, ami bizonyítást igényel? (Ez a kérdés szintén szerepelt a 3. fejezetben (**K2-2**).)

K3-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani? (Ez a kérdés szintén szerepelt a 3. fejezetben (**K2-3**).)

K3-4: A diákok felismernek-e egy „nyilvánvalóan” hamis állítást? Ennek kapcsán ismerik-e a tanulók az ellenpélda fogalmát, és tudják-e, hogy egy állítást egyetlen ellenpélda is megcáfol, amit szintén igazolni kell?

K3-5: A tanulóknak megfelelő-e az írásbeli kommunikációja, azaz milyen részletességgel közlik gondolatmenetüket?

Az előtesztet 2018. november 7-én írtuk meg (C. melléklet). A tanulók munkaideje 45 perc volt. Fontos megjegyezni, hogy sem a korábban megíratott van Hiele-teszt, sem pedig az előteszt esetén nem történt semmiféle speciális előkészület a tanórákon, azokat előzetes bejelentés nélkül írtuk meg a diákokkal.

Az érettségi előtt álló diákok felmérése során szerzett tapasztalatokat (3. fejezet) is felhasználva saját tesztet készítettünk, hogy minél pontosabb képet kapjunk a csoportról. A feladatok összeállítása közben szem előtt tartottuk tehát az alábbiakat:

- A tanulóknak nehézségeik vannak a feltétel és a bizonyítandó résznek az állítás szövegéből történő kiolvasásában.
- A diákoknak gondot okoz már egy néhány lépéses bizonyítás kivitelezése is.
- A tanulók egy része bizonyos érvelési lépéseket nem indokol meg.
- A diákok hajlamosak az ábra alapján következtetést levonni anélkül, hogy azokat belátnák.
- A tanulók egy része az ábrába beírva hajtja végre a bizonyítást.

4.2.1 Az előteszt tapasztalatai

Az előteszt kiértékelése során a kapott kvantitatív adatok alapján kvalitatív elemzést végzünk. A feladatok során szerzett tapasztalatokat a második feladat kihagyásával mutatjuk be, mert ez utóbbi a kutatási kérdéseinkre adott válaszainkban nem játszik érdemi szerepet.

Az előteszt első feladata

Az első feladat így szólt:

Tekintsük a következő állításokat:

(a) „Ha egy négyszög négyzet, akkor átlói merőlegesek egymásra.”

Ebben az állításban mit tettünk fel és mi a bizonyítandó?

(b) „A rombusz átlói merőlegesek egymásra.”

Ebben az állításban mit tettünk fel és mi a bizonyítandó?

A feladat megoldása

(a) Feltevés: Az adott négyszög négyzet.

Bizonyítandó: A négyszög átlói merőlegesek egymásra.

(b) Feltevés: Az adott sokszög rombusz.

Bizonyítandó: A sokszög átlói merőlegesek egymásra.

Az első feladat során a **K3-1** kutatási kérdésre kerestük a választ.

Tapasztalatok (1. feladat)

A feladat összesített statisztikája az alábbi volt (12. táblázat):

	Jól oldotta meg	Mindkét helyre az állítást írta le	Egyéb
(a) feladat (diákok száma)	6	9	7
(b) feladat (diákok száma)	2	11	9

12. táblázat: Összesített eredmények (1. feladat, előteszt)

Jellemző volt a csoportra, hogy nagyon sokan vagy a feltételnek, vagy a bizonyítandónak, vagy mindkettőnek az egész állítást írták le. A feltétel kiolvasása több gondot okozott a tanulóknak, mint a bizonyítandó tény leválasztása az állítás szövegéből. (13. táblázat)

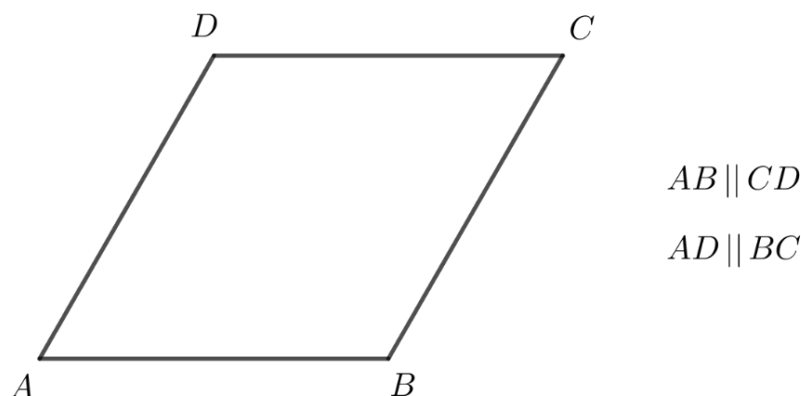
	Az állítást írta le feltételnek	Az állítást írta le bizonyítandónak
(a) feladat (diákok száma)	14	10
(b) feladat (diákok száma)	18	12

13. táblázat: Az egész állítás mint feltétel és mint bizonyítandó (1. feladat, előteszt)

Szándékosan kerüljük a feladat megoldásainak értékelésekor a hibás, illetve rossz megoldás kifejezést. Ennek oka az, hogy ezen a ponton még nem volt megállapítható, hogy vajon a tanulók nagy többsége nem azért adott-e helytelen választ a kérdésekre, mert egészen egyszerűen nem értette a kérdésben szereplő kifejezések jelentését, pedig voltaképpen képes az állítások szerkezetét elemezni.

Az előteszt harmadik feladata

Igazold, hogy bármely paralelogramma szemközti szögei egyenlő nagyságúak!



A feladat egy lehetséges megoldása (nevezetes szögpárokkal)

A megfelelő oldalak párhuzamossága miatt a paralelogramma A és C , valamint a B és D csúcánál lévő szögek egyaránt váltószögek.

Mivel a váltószögek egymással megegyező nagyságúak, így következik az állítás.

Megjegyzések: A feladatnak más megoldása is lehetséges, egyrészt a paralelogramma középpontos szimmetriájára alapozva, másrészt arra utalva, hogy a paralelogramma trapéz. Továbbá a feladathoz csatolt ábrán a paralelogramma oldalai egyenlő hosszúságúnak látszanak ugyan, de sem a szöveg, sem az ábra mellé írt jelölés nem utal arra, hogy rombuszról lenne szó.

A feladattal a **K3-2** és a **K3-3** kutatási kérdésre kerestük a választ.

Tapasztalatok (3. feladat)

A bizonyítás sikeres végrehajtása kevesebb mint a csoport negyedének sikerült (14. táblázat).

	Jó megoldás	Rossz megoldás
Diákok száma	5	17

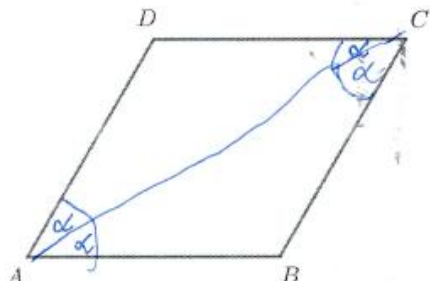
14. táblázat: A bizonyítás végrehajtása (3. feladat, előteszt)

A helyes megoldások során volt olyan diák, aki egybevágósággal, volt, aki középpontos tükrözéssel, és volt, aki nevezetes szögpárok segítségével indokolt.

Elemézve a rossz megoldásokat, a tizenhét tanulóból kilenc diák esetén tapasztaltuk azt, hogy az ábra alapján téves információt használt fel a bizonyítása során.

Egy ilyen tipikusan rossz megoldást láthatunk a 4-1. ábraán.

3. Igazold, hogy bármely paralelogramma szemkötti szögei egyenlő nagyságúak!



$AB \parallel CD$
 $AD \parallel BC$

Bizonyítás:

Az AC átló a $\triangle DAB$ és a $\triangle BCD$ szögfelezője.
Az átló alkot 2 egyenlő szárú háromszöget amelyeknek az aljszögei egyenlők. Mivel 2-2 szögük egyenlő, ezért a 3. is. Ezért egybevágó háromszögek.

4-1. ábra: Egy tipikusan rossz megoldás (3. feladat; Tanuló_12_3)

Egyrészt a diák feltételezte, hogy a paralelogramma AC átlója felezi a paralelogramma megfelelő szögeit. Ez természetesen nem igaz, csakis akkor, hogy a paralelogramma egyben rombusz is. Másrészt azt is észrevehetjük, hogy Tanuló_12_3 valószínűleg nem volt tisztában azzal, hogy mi a bizonyítandó tény. Már eljutott arra a pontra, hogy lezárhatta volna a bizonyítást („Mivel 2-2 szögük egyenlő, ezért a 3. is.”), ehelyett két háromszög egybevágóságával zárta az érvelését. Ezt persze okozhatta a tanuló figyelmetlensége is. A diák megoldása a van Hiele-szintjével összhangban van.

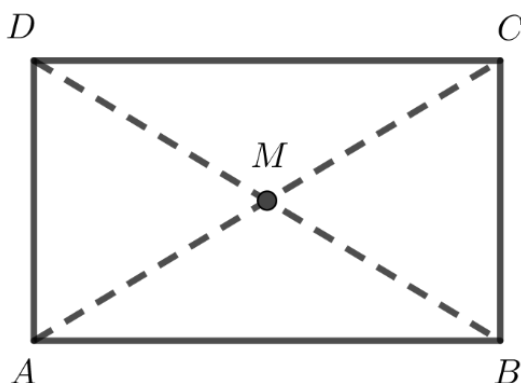
A kilenc tanulóból, akiket az ábra megtévesztett, hatan voltak azok, akik – a 4-1. ábraán látottakhoz hasonlóan – az $ABCD$ paralelogrammáról feltették, hogy az átlói egyben szögfelezők is.

Az előteszt negyedik feladata

Bizonyítsd be, hogy bármely téglalap átlói merőlegesek egymásra!

A feladat megoldása

Az állítás nem igaz, hiszen egy olyan téglalap, amely nem négyzet, megcáfolja.



Ha a két átló egymásra merőleges lenne, akkor az ABM és a BCM háromszögek egyenlő szárú derékszögű háromszögek lennének, következésképpen egybevágók (felhasználtuk, hogy az M pont – vagyis az átlók metszéspontja – az $ABCD$ téglalap mint paralelogramma szimmetriacentruma). De ebből az következne, hogy $AB = BC$, hiszen az egybevágóságnál ezek az egymásnak megfelelő oldalak. Ez pedig ellentmond annak, hogy $ABCD$ nem négyzet, vagyis az átlók nem lehetnek merőlegesek egymásra.

A feladattal a **K3-4** kutatási kérdésre fókuszáltunk.

Tapasztalatok (4. feladat)

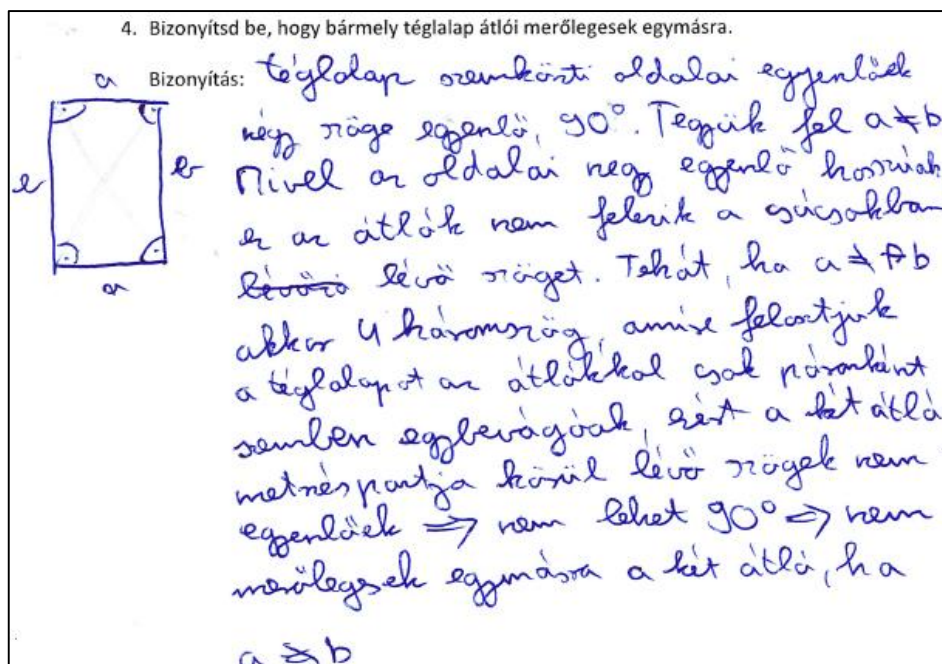
A kapott eredmények az alábbiak lettek (15. táblázat).

	Be akarja látni a hamis állítást	Rájön, hogy az állítás hamis			Egyéb okok miatt nem jó a bizonyítás
		Indokol	Nem jól indokol	Nem indokol	
Diákok száma	1	9	8	0	4

15. táblázat: Az ellenpélda megadása (4. feladat, előteszt)

Az eredmények azt mutatják, hogy a diákokat összességében nem tévesztette meg a feladatban szereplő hamis állítás. Egyetlen diák volt, aki a hamis állítást próbálta belátni.

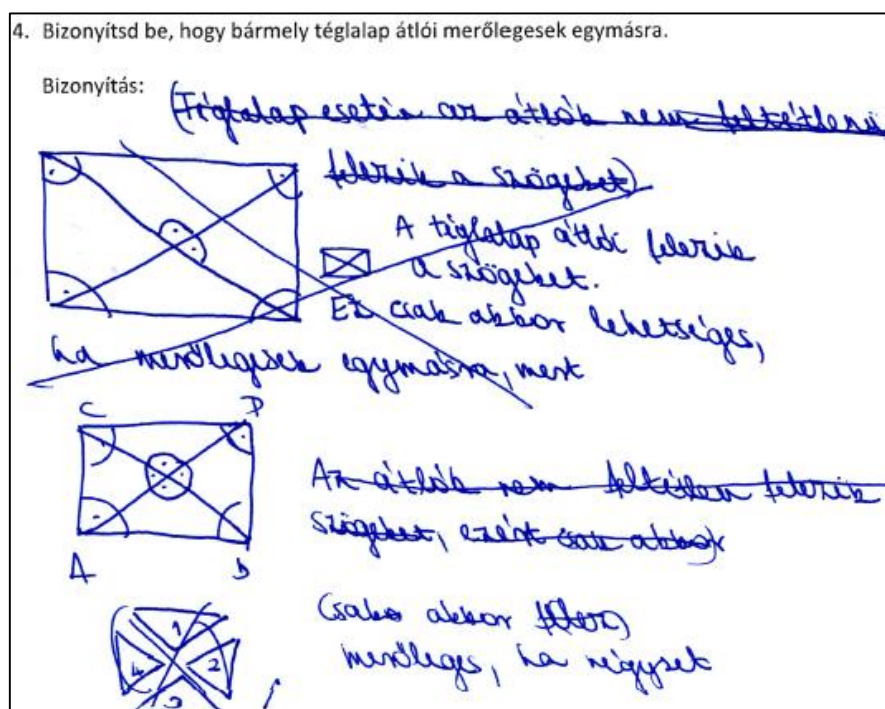
A tizenhét diák közül, akik rájöttek, hogy az állítás hamis, mind ellenpéldát rajzoltak, de közülük csak kilenc volt az, aki meg is indokolta korrektül, hogy miért cáfolja az ábrája az adott állítást. Egy ilyen érvelést mutat a 4-2. ábra egy olyan tanulótól, akinek a van Hiele-szinte harmasnak adódott a kezdeti mérések során.



4-2. ábra: Az ellenpélda igazolása (4. feladat; Tanuló_2_3)

A tanuló annak ellenére, hogy a teszt alapján hármast produkált, képes volt az érvelését logikai lánc megkonstruálásával véghezvinni.

A többi nyolc tanuló megelégedett annak a közlésével, hogy mikor lenne igaz az állítás. De ennek semmiféle igazolását nem adták. Egy ilyen megoldást mutat a 4-3. ábra.

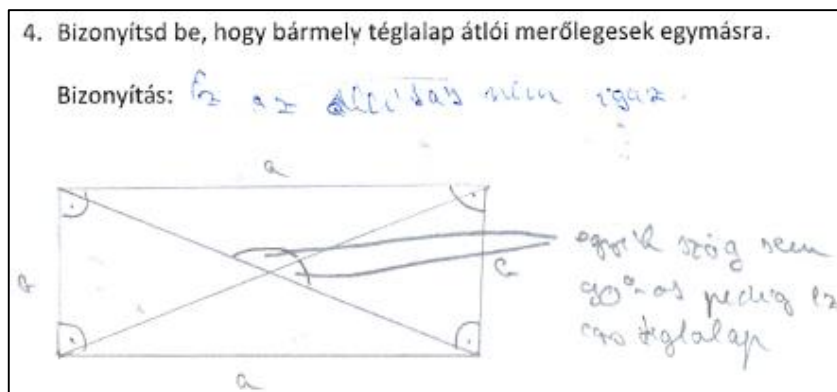


4-3. ábra: Tipikusan hiányos indoklás (4. feladat; Tanuló_22_3)

Az áthúzott mondatok alapján Tanuló_22_3 feltette, hogy az átlók merőlegesek egymásra, amiből levonta azt a következtetést, hogy az átlók felelik a téglalap szögeit. Valószínűleg ekkor jött rá, hogy az állítás hamis, hiszen az átlók csakis akkor lehetnek szögfelezők, amennyiben a

téglalap négyzet. Látható, hogy mind az érvelése, mint az írásbeli kommunikációja fejlesztésre szorul, ami a van Hiele-szintje alapján várható is volt.

A fenti tipikus hiányosság mellett egy diák volt az, akiben fel sem merült az érvelés igénye, megelégedett a vizuálisan nyújtott meggyőzőerővel. Indoklása prematematikai bizonyításnak tekinthető. Ez ugyancsak megfelel a tanuló hármas van Hiele-szintjének. (4-4. ábra)



4-4. ábra: „Látszik”, hogy jó (?) (4. feladat; Tanuló_20_3)

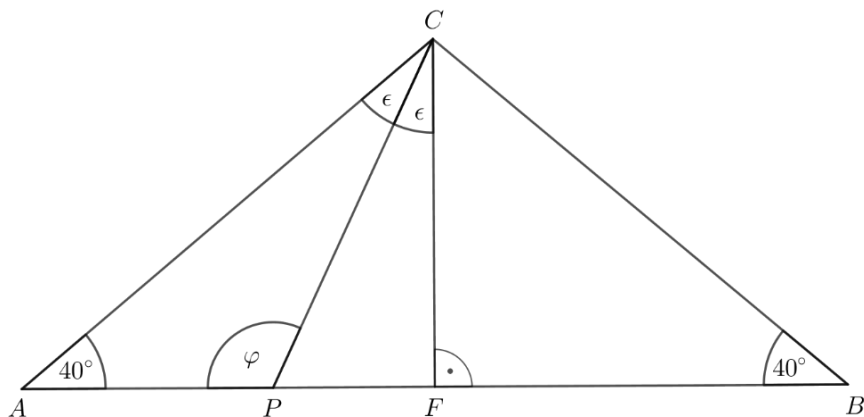
A 15. táblázat utolsó oszlopában szereplő négy diák közül kettő nem kezdett hozzá a feladathoz, egy pusztán egy ábrát készített, egy pedig értékelhetetlen megállapítást tett.

Az előteszt ötödik és hatodik feladata

Az ötödik és a hatodik feladat szoros kapcsolatban áll egymással. Az ötödik feladattal nem vizsgáltuk a diákok bizonyítási képességét, ez elsősorban a hatodik feladatot alapozta meg.

Az ötödik feladat így szólt:

Számítsd ki az alábbi ábrán jelölt φ szöget! Ne csak a végeredményt írd le, a számolás menetét részletezd!



A feladat megoldása (5. feladat)

Az AFC háromszögben: $40^\circ + 90^\circ + 2\epsilon = 180^\circ$. ahonnan kapjuk, hogy $\epsilon = 25^\circ$.

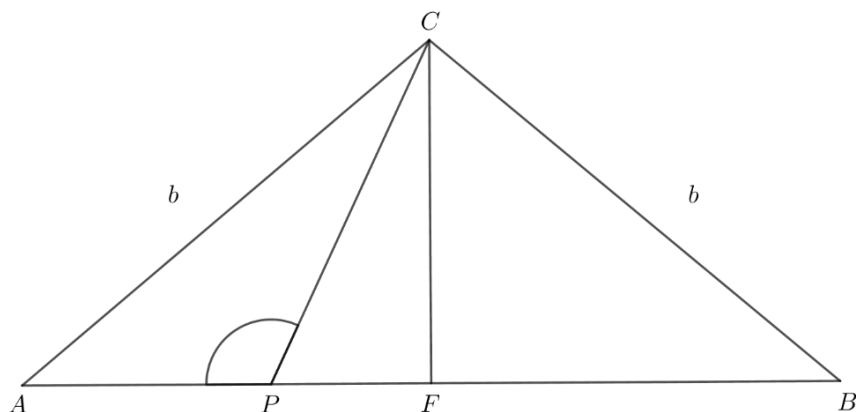
Az APC háromszögben: $40^\circ + \varphi + \epsilon = 180^\circ$, amiből a kérdéses szög nagyságának értéke: $\varphi = 115^\circ$.

A hatodik feladat pedig az alábbi:

Tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget ($CA = CB$). Legyen az AB oldal felezőpontja F , az AF szakasz egy tetszőleges belső pontja pedig P . Bizonyítsd be, hogy az APC tompaszög!

A feladat megoldása (6. feladat)

Először is készítsünk ábrát a feladathoz.



Ismert tény, hogy egyenlő szárú háromszög esetén a CF szakasz magasságvonal, vagyis $\angle AFC = 90^\circ$.

A külsőszög-tétel értelmében a kérdéses $\angle APC$ nagysága megegyezik a $\angle PFC$ és a $\angle PCF$ nagyságának az összegével.

Mivel $\angle PFC = \angle AFC = 90^\circ$, így az előzőek miatt az $\angle APC$ nagysága biztosan több mint 90° , következésképpen tompaszög.

(Természetesen, a külsőszög-tétel ismerete nélkül is könnyen adódik az állítás, ha például megmutatjuk a $\angle CPF$ -ről, hogy hegyesszög.)

A két feladattal K3-5 kutatási kérdésre kerestük a választ.

A K3-5 kutatási kérdésen túlmenően az ötödik feladat kapcsán arról is meggyőződhetünk, hogy a diákok képesek-e nagyon egyszerű számolási láncot végrehajtani egy konkrét adatokat tartalmazó ábrával ellátott feladathoz. Továbbá azt is megfigyelhetjük, hogy az ötödik és a hatodik feladat kapcsolata megmutatkozik-e az utóbbi feladatra adott megoldások sikerességében, hiszen a „rávezető” ötödik feladatbeli gondolatsor részben átvihető az általánosabb szituációra. Világos, hogy a hatodik feladat megoldása jóval összetettebb az ötödik feladaténál, de az előbbi kapcsán arról is képet kaphatunk, hogy vajon lesz-e olyan tanuló, aki a P pont mozgztatásával, annak az F pontba való helyezésével próbálja igazolni az állítást, közben hivatkozva a szemléltre, azaz, hogy a kérdéses szög „ránézésre” hogyan változik.

Tapasztalatok (5. és 6. feladat)

Egyik diáknak sem akadt gondja azzal, hogy milyen számolási gondolatmenet szerint határozza meg a keresett szöget (16. táblázat).

	Jó megoldás	Jó gondolatmenet számolási hibával
Diákok száma	20	2

16. táblázat: A keresett szög meghatározása (5. feladat, előteszt)

A tanulók közül egyetlen egy sem volt, aki pusztán az ábrában jelölte volna az adott szögek nagyságát. Ezzel szemben a diákoknak kevesebb mint a 20 %-a boldogult csak a hatodik feladattal (17. táblázat).

	Jó megoldás	Rossz megoldás
Diákok száma	4	18

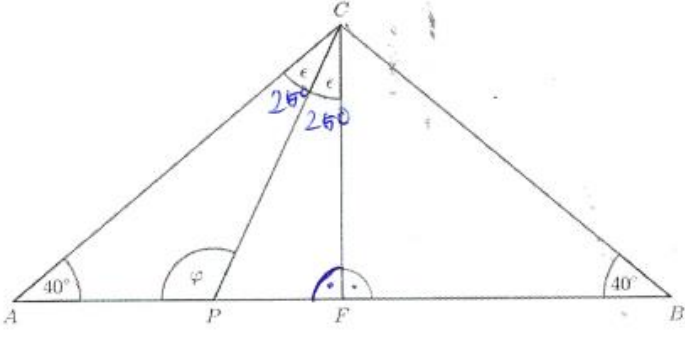
17. táblázat: A bizonyítás végrehajtása (6. feladat, előteszt)

Látható, hogy a paraméteresen megfogalmazott hatodik feladat sokkal nehezebbnek adódott, holott maga az érvelési lánc összetettsége nem volt bonyolultabb, mint az ötödik feladat által megkövetelt számolási eljárás.

A huszonnégy diákból hatan voltak azok, akik az ötödik feladatban külön kimondták a számolásuk alapjául szolgáló, a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tételt, de a többi tanuló számolásában is világosan kiolvasható volt az említett összefüggés egyenlet formájában, anélkül, hogy explicite hivatkoztak volna rá.

Az ötödik feladatban a diákok írásbeli kommunikációja megfelelő volt, zömében kellő részletességgel indokoltak. Egy teljes megoldást mutat a 4-5. ábra.

5. Számítsd ki az alábbi ábrán jelölt φ szöget! Ne csak a végeredményt írd le, a számolás menetét részletezd!



Megoldás:

~~△FCB~~ $\triangle FCB$ -ben $40^\circ, 90^\circ$ -es 2ϵ van ezért mivel a $\triangle$ belső szögeinek összege 180°

$$40 + 90 + 2\epsilon = 180$$

$$2\epsilon = 50$$

$$\epsilon = 25$$

$\triangle PCF$ -ben a szögek $40^\circ, 25^\circ, \varphi$ a $\triangle$ belső szögeinek összege 180°

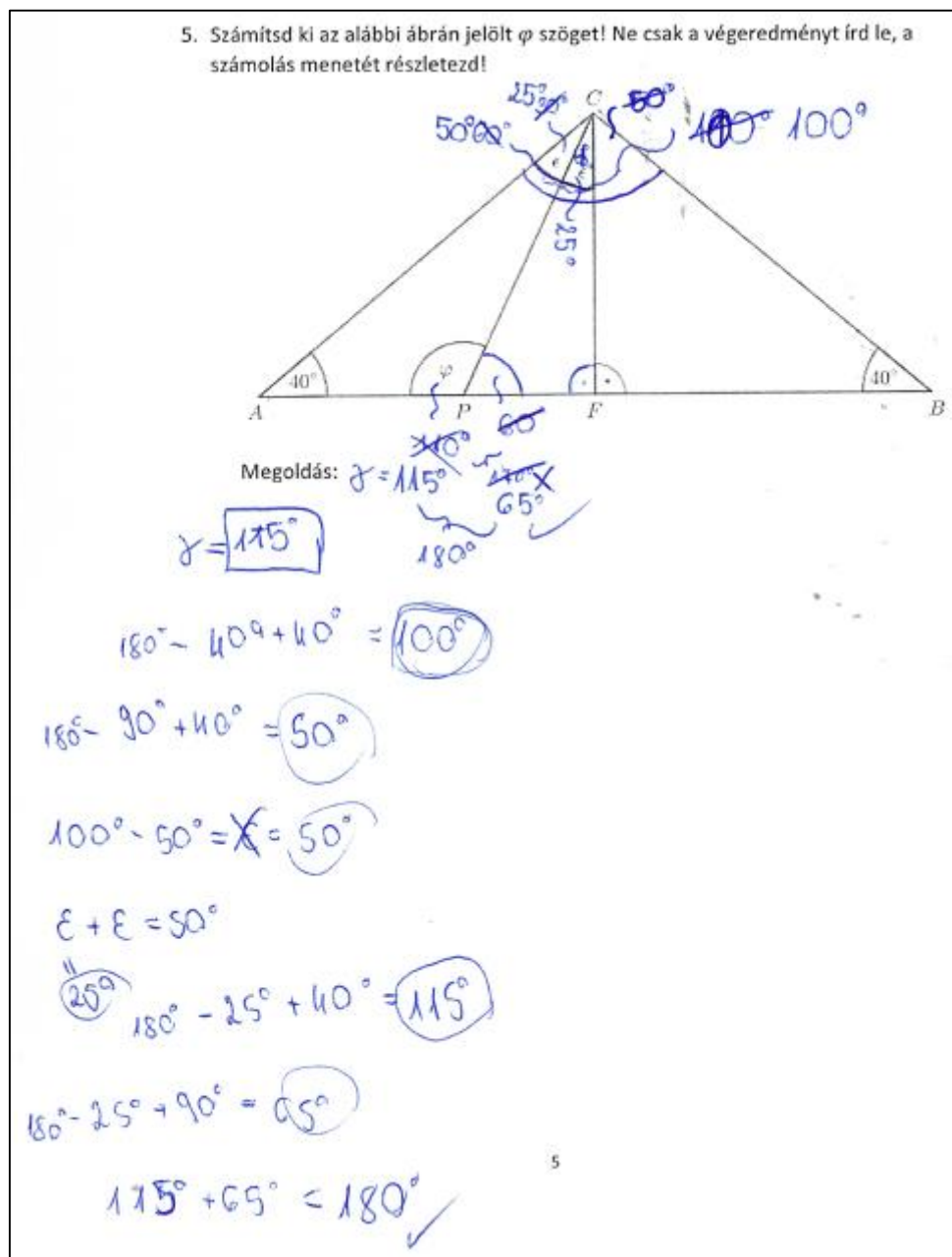
$$40 + 25 + \varphi = 180$$

$$\varphi = 115^\circ$$

4-5. ábra: Egy teljes megoldás (5. feladat; Tanuló_4_4)

Látható, hogy Tanuló_4_4 azon túl, hogy hivatkozott a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tételre, minden esetben közölte, hogy melyik háromszöget vette alapul.

A diákok egy részénél a leírás módja még nem érte el a kellő szintet. Egy ilyen megoldást mutat a 4-6. ábra.

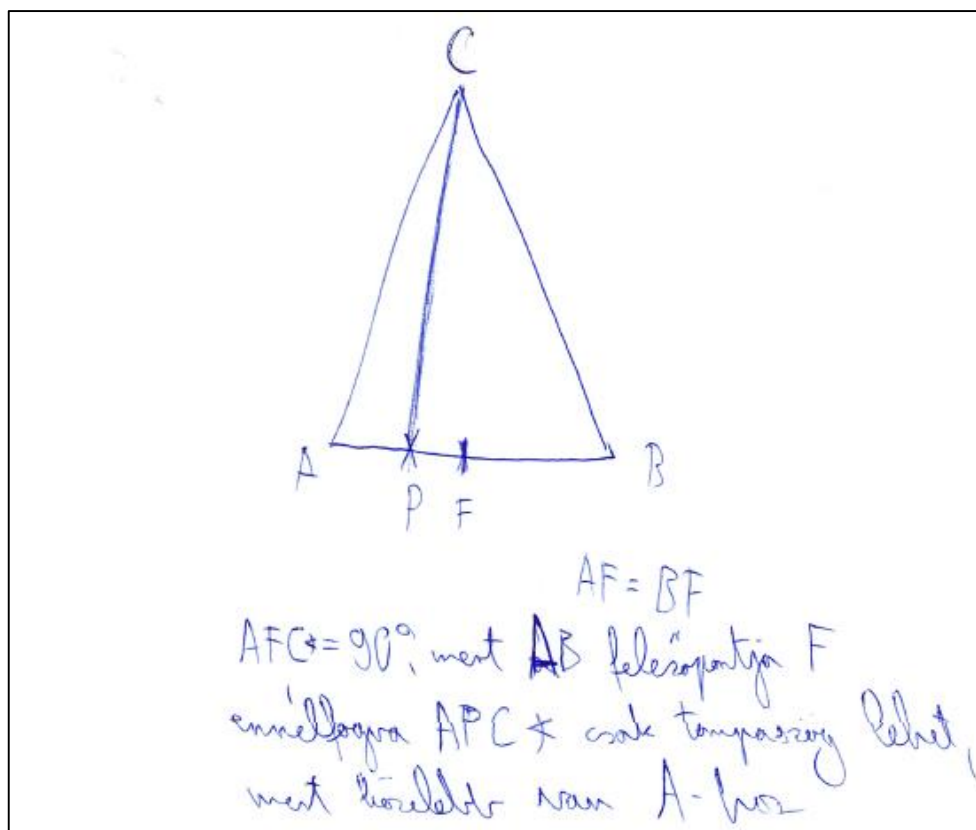


4-6. ábra: A megoldás leírásának módja nem kifinomult (5. feladat; Tanuló_13_3)

A diák gondolatmenete rekonstruálható, de a megoldás leírasi módja világosan mutatja a tanuló írásbeli kommunikációjának a fejletlenségét. Egyetlen alkalommal sem írta le expliciten, hogy melyik háromszöget vette alapul. Tanuló_13_3 az ábrán szögről szögre haladva számolta ki azok értékeit, az ábra alatt voltaképpen a segédszámításai láthatók.

Négy diák eleve félreértette a hatodik feladatot, rossz ábrát készített. Vagy a P , vagy az F pont helyét vették fel rosszul.

A további megoldások közül hat diák volt, aki a szemléletre alapozva próbálta meg belátni az állítást. Egy ilyen megoldási próbálkozást láthatunk a 4-7. ábraán.



4-7. ábra: Szemléletes megoldási próbálkozás (6. feladat; Tanuló_16_4)

Érzékelhetjük, hogy a tanuló matematikai eszközök hiányában pusztán intuitív módon tudta megragadni a feladatot. Tanuló_16_4 a CPF háromszöget nem vette fel, mely nagyon hasznos volt az előző, ötödik feladatban. A diák négyes van Hiele-szinttel rendelkező fejlesztés kezdetén, így a megoldási próbálkozása a feladat összetettségét támasztja alá.

4.2.2 A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisának tanítási órái

Az előteszt megírása után az oktatási folyamatban megalapoztuk a fejlesztő tanítási kísérlet elindítását, megadtuk a szükséges matematikai eszközök matematika háttérét. Átismételtük a nevezetes szögpárokat, a háromszögek oldalaival és szögeivel kapcsolatos, általános iskolában tanult alaptulajdonságokat, valamint a négyszögek osztályozását. Ezután, 2018 novemberének végén kezdetét vette a fejlesztő tanórák sorozata. Az előteszt tapasztalatait kiegészítendő, a fejlesztő kísérlet első fázisa keretén belül három egymást követő (de nem egy napon lezajló) – videóval rögzített – tanórán vizsgáltuk a tanulókat.

Mindhárom tanórának közös céljai voltak, mégpedig az, hogy választ adjunk a **K3-3** és **K3-4** kutatási kérdésekre. Továbbá az előteszt során megfogalmazott tapasztalatok alapján a tanulóknak a geometriai bizonyításokhoz szükséges hiányosságait próbáltuk meg pótolni. Ezen túlmenően jobban meg szeretnénk ismerni a diákok bizonyításról alkotott elképzelését, és az esetleges félreértéseket javítani kívántuk. A tanórákon a megszerzett tapasztalatokat beépítettük a későbbi fejlesztő tanórák megtervezésébe.

A három tanórára 2018. november 21-én, 23-án és 26-án került sor.

A tanórák menete

Az első tanóra elején minden diák kapott egy-egy feladatlapot, mindegyiken pontosan egy állítással (D. melléklet). Ügyeltünk arra, hogy az állítások minél többféle módon legyenek megfogalmazva, illetve szerepeltettünk olyan állítást is, amely hamis, vagyis cáfolatot igényel. Összesen hat feladatlap volt, mindössze arra figyeltünk, hogy az egymás mellett ülők más-más feladatlapot kapjanak. Az állítások az alábbiak voltak:

- Bármely paralelogramma átlói nem egyenlő hosszúak.
- A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma megfelelő szögeit.
- Egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180° .
- A téglalap átlói felezik egymást.
- Ha egy deltoid két nem szemközti szöge derékszög, akkor a deltoid négyzet.
- A paralelogramma belsejében van olyan pont, amelyik egyenlő távolságra van a csúcsoktól.

Minden állítás esetén a következők voltak a feladatok:

- (a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!
- (b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!
- (c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!
- (d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

A feladatlapok kiosztása után minden diák 20 perc kidolgozási időt kapott. Ezen idő alatt a következőket vártuk el tőlük.

- A két diák megegyezett abban, hogy ki milyen, egymástól különböző színű tollal dolgozik.
- Minden tanuló ráírta a saját és a padtársa nevét a papírra.
- A tanulók önállóan oldották a saját feladataikat.
- Miután az egy padban ülő mindkét diák elkészült, kicserélték egymás között a feladatsorákat, majd először az egyik, utána a másik diák magyarázta el a megoldását a társának, aki-nek, ha bármilyen észrevétele is volt eközben, azt ráírta a társa feladatlapjára a saját színével.

Ezt a kooperatív munkaformát think-pair-share módszernek nevezi a szakirodalom. Amikor minden páros végzett a feladatával, következett a közös megbeszélés fázisa, mely során a feladatokon sorban haladtunk végig. A feladatok megbeszélése úgy zajlott, hogy az adott feladatot kidolgozó diákok közül valamelyik kijött a táblához, és bemutatta a megoldását. A többi tanuló eközben aktív részese volt a tanulási folyamatnak. Ügyeltünk arra, hogy minden tanuló számára világos legyen a feladatok megoldása, valamint a tanári magyarázatok is. Emiatt a tanári attitűdöt végig az jellemezte, hogy

- az elhangzott tények esetén megkövetelte a diáktól azok indoklását, ami több esetben egyébként egy-egy új feladat kitűzését vonta maga után;
- amennyiben a tanuló írásbeli kommunikációját nem tartotta megfelelőnek, a megoldás megbeszélése végeztével a táblára röviden, de kimerítő módon leírta a helyes megoldást;
- bármilyen hiányosságot, pontatlanságot észlelt, azt azonnal kiigazította, és elmagyarázta a hiba forrását.

A következőkben a feladatok közös megbeszélésének tanulságos epizódjait emeljük ki.

Első feladat

A feladatban szereplő állítás így szól:

„Bármely paralelogramma átlói nem egyenlő hosszúak.”

Tanuló_1_4 jött ki a táblához, és megállapította, hogy az állítás hamis. Indoklásképpen rajzolt a táblára egy téglalapot (megfelelő jelölésekkel ellátva), melyről közölte, hogy „a téglalap is paralelogramma, de tudjuk, hogy ennek az átlói egyenlők. Tehát ez az állítás hamis volt.” A diák helyesen sorolta be a téglalapokat a paralelogrammák osztályába, ami a hármas van Hiele-szint birtoklására utal. Arra a kérdésre, hogy mit is rajzolt a feladat szempontjából voltaképpen, Tanuló_1 azt válaszolta, hogy „Indirekt állítást.” A diák tudta, hogy az állítás tagadását adta meg (valószínűleg számára iskolai axióma segítségével), és válaszából az is kiderült, hogy az indirekt bizonyítással már megismerkedett általános iskolai tanulmányai alatt. Megbeszéltük, hogy Tanuló_1_4 ellenpéldával cáfolta meg a feladatban szereplő állítást.

Sokkal érdekesebb tapasztalat volt az, amit arra a kérdésre felelt, hogy fogalmazza át az állítást „Ha... akkor...” formába. Ugyanis erre Tanuló_1_4 a következőt válaszolta: „Ha egy paralelogramma átlói nem egyenlők, akkor az adott négyszög olyan paralelogramma, amely nem téglalap.”

Tehát Tanuló_1_4 voltaképpen az eredeti állítás megfordításából indult ki, és egy igaz állítást fogalmazott meg a kért alakban. Érdekesnek tartottuk megnézni, hogy más diák, aki ugyanezt a feladatot kapta, mit válaszolt erre a feladatrésze. Tanuló_13_3 volt még, aki szintén ezzel a feladatlappal foglalkozott. Az ő megoldását mutatja a 4-8. ábra.

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha ..., akkor ...” típusú mondat formájában!

Ha $AD \neq AC$ -vel ~~van~~ $BC \neq AB$ akkor ~~e~~ f van egyenlő hosszúak

4-8. ábra: Egy hamis állítás hibás átfogalmazása (első feladat)

Vagyis Tanuló_13_3 is ugyanazt a hibát vétette, mint Tanuló_1_4: nem az eredeti, hamis állítást fogalmazta át, hanem az állításból gyártott, de már igaz logikai értékű állítást.

Tanuló_1_4 válaszával több diák sem értett egyet, és Tanuló_3_4 elmondta helyesen az állítást „Ha... akkor...” formában megadott átfogalmazását. Megbeszéltük, hogy egy állítás átfogalmazásának pontosan ugyanazt kell jelentenie, mint amit az eredeti állítás is jelentett, függetlenül az állítás logikai értékétől. Rávilágítottunk, hogy Tanuló_1_4 olyan információkat is beletett az átfogalmazásba, ami az eredeti állításban nem volt benne.

Ezután rátértünk az állítás szerkezetének a vizsgálatára. Tanuló_1_4 helyesen olvasta ki az állítás szövegéből a feltételt, ám bizonyítandó tényként megismételte magát az egész állítást. A besz kennelt feladatlapja utólagos elemzése azt mutatta, hogy a feltételt eredetileg hibásan fogalmazta meg, de a padtársa (Tanuló_16_4) meggyőzte őt arról, hogy mi a helyes megoldás. A bizonyítandó tény viszont egyikük sem látta helyesen (4-9. ábra).

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

A negatív, amelyből következik, paralelogramma
Feltétek: Van olyan paralelogramma aminek átlói nem egyenlők
Bizonyítandó: Minden paralelogrammának átlói nem egyenlők hosszúak.

4-9. ábra: A diák meggyőzi a másikat a helyes megoldásról (első feladat)

Nagyon fontos dolognak tartjuk, hogy diákok egymást próbálják meg érvekkel meggyőzni. Erre szolgált a feladatlapok kitöltésének ez az általunk kitalált módszere.

Ezek után rávilágítottam arra, hogy a válasza azért helytelen, mert az állítások szerkezete felbontható egy feltétel és egy bizonyítandó részre:

Én: „Az állításnak van egy feltétel, és van egy bizonyítandó része.”

Tanuló_1_4: „Jaaaaa.”

Tanuló_1_4 és a csoport reakciója nyilvánvalóvá tette, hogy a gondot számukra nem az állítás szerkezetének az elemzése okozta, hanem pusztán a kérdés feltevése. Valószínűleg azért választotta Tanuló_1_4, illetve az előteszt során az osztály zöme a bizonyítandóra magát az egész állítást, mert nem voltak tisztában az állítás szerkezetének a fogalmával, a „feltétel rész” és a „bizonyítandó rész” kifejezések jelentésével, ugyanakkor tudták, hogy miből mire következtek az állítás során. Erre gyanakodtunk már az előteszt elemzése során is.

Ezek után a fogalmak elmélyítése és az érvelési képesség fejlesztése végett folytattuk a feladat boncolgatását.

Én: „Egyébként létezik olyan paralelogramma, amelyre igaz az állítás?”

Tanuló_1_4: „Például a rombusz, amely nem négyzet.”

Én: „Csak a téglalap ellenpélda? Csak ez cáfolja meg az állítást?”

Tanuló_1_4: „A négyzet is.”

Én: „Az más ellenpélda?”

Tanuló_1_4: „Nem, mert a négyzet az téglalap.”

Én: „Miért?”

Tanuló_5_4: „Mert a téglalap minden tulajdonságával rendelkezik.”

Én: „És mi a téglalap minden tulajdonsága?”

Tanuló_3_4: „Minden szöge egyenlő.”

Én: „Az már elég? Ha minden szöge derékszög, tudsz mást rajzolni, mint téglalap?”

Tanuló_6_4: „Igen.”

Én: „Gyere ki, és rajzold fel akkor!”

Tanuló_6_4: „Ja, nem tudok.”

Világosan látszik a beszélgetésből, hogy a megszólaló tanulók magabiztosan birtokában voltak a hármas van Híele-szintnek, leszámítva Tanuló_1_4 bizonytalankodását a négyzettel kapcsolatban. Tapasztalatom szerint a diákok gyakran különböztetik meg a négyzetet és a téglalapot reflexszerűen egymástól, majd korrigálnak.

A feladatot lezártuk azzal, hogy az állítás hamis, és hogy egy állítást egyetlen ellenpélda is megcáfolhat.

Második feladat

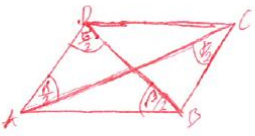
A feladat állítása az alábbi:

„A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma megfelelő szögeit.”

Tanuló_7_3 jött ki a táblához, aki hibátlan ábrát készített, mellette jelekkel leírta azt, hogy paralelogrammáról van szó. A feltétel és a bizonyítandó kiolvasását, valamint az állítás átfogalmazását is helyesen végezte el. (4-10. ábra)

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:



$AB \parallel CD$
 $AD \parallel BC$

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel: *A síkidom paralelogramma*

Bizonyítandó: *AC felezi $\angle DAB$ -t és $\angle DCB$ -t illetve BD felezi $\angle ADC$ -t és $\angle ABC$ -t*

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha ..., akkor ...” típusú mondat formájában!

Ha az adott síkidom paralelogramma, akkor átlói felezik a megfelelő szögeket.

4-10. ábra: A második feladatban szereplő állítás szerkezetének hibátlan elemzése (Tanuló_7_3)

Többek között Tanuló_11_3 volt az, aki szintén ezt a feladatlapot kapta. Az ő megoldását látva szintén tetten érhető volt az, hogy a padtársa (Tanuló_5_4) magyarázta el neki, hogy mi az állításban a feltétel. (4-11. ábra)

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel: *d_1 és d_2 a paralelogramma $d = 13$, legyen egy paralelogrammánk, melynek átlóit berajzoltuk*

Bizonyítandó: *$d = 13$ az átlók egyben felezőek*

4-11. ábra: Tanuló_5_4 meggyőzi Tanuló_11_3-at a helyes megoldásról (második feladat)

A feladat „Ha... akkor...” formába történő átfogalmazásával nem volt gondja a csoportnak.

Ezek után egy érdekes tény került felszínre.

Én: „Egyáltalán igaz vagy hamis [az állítás]?”

Tanuló_7_3: „Hamis, de nem minden esetben. Igaz, amennyiben a paralelogramma oldalhosszúsága minden oldalánál egyenlő.”

Én az osztály felé: „Lehetséges az, hogy egy állítás vagy ilyen, vagy olyan?”

Tanuló_8_3: „Nem.”

Én: „Mikor lenne igaz egy állítás?”

Tanuló_7_3: „Akkor, ha minden lehetséges esetben igaz lenne.”

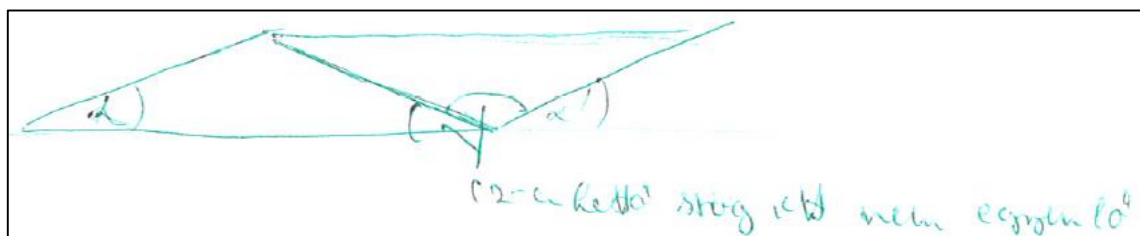
Ezek után Tanuló_7_3 javította az eredeti mondandóját, és kijelentette, hogy az állítás hamis. Egyébként eredetileg a feladatlapon azt válaszolta, hogy az állítás igaz. Úgy gondoljuk, hogy a bizonytalanságot az jelenthette, hogy az állítás megfogalmazásából elhagytuk a „bármely” szót.

Az állítás bizonyítása kapcsán Tanuló_7_3 először feltette, hogy a paralelogramma oldalai egyenlő hosszúságúak, és ennek megfelelően felrajzolt a táblára egy rombuszt. Majd Tanuló_4_4 és Tanuló_9_4 segítségével közösen belátták, hogy ebben az esetben a paralelogramma átlói felezik a megfelelő szögeket. Ezek után Tanuló_7_3 felrajzolt egy nem rombusz paralelogrammát, és elmondta, hogy az átló ebben az esetben nem egyenlő szárú háromszögekre bontja a síkidomot, hogy az átló nem felezi a szögeket, az előző érvelésre utalva.

Megbeszéltük, hogy az állítás szempontjából a rombuszal történt vizsgálat nem szükséges, a lényegi elem az ezt követő gondolati egység volt, ahol tulajdonképpen az állítás cáfolatát adta meg a diák. Természetesen szándékosan hagytam, hogy a tanuló ezzel a szélsőhelyezettel foglalkozzon. A speciális matematika tagozat egyik lényeges vonása, hogy a tanár hagyja érvelni a diákokat, még akkor is, ha esetleg nyilvánvalóan kudarcra van ítélve a gondolatmenet. Ez egy nagyon fontos, tanulságos része volt a tanórának, hiszen helyére kerültek olyan fogalmak, amik zavarosak voltak egyes tanulók számára, és amiknek a tisztán látása a bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából elengedhetetlenek. Ez alatt az alábbiakat értjük:

- egy állítás csak akkor igaz, amennyiben minden, a feltételeknek megfelelő esetben igaz;
- nem lényeges elemei a bizonyításnak azok a speciális esetek, amikor az állítás következmény része éppen teljesül (ez legfeljebb megjegyzésként szerepelhet a megoldás során).

A feladatlapon elemzése során az is kiderült számunkra, hogy ennél a feladtnál volt, aki megelégedett egy „Látszik az ábrából.” típusú „indoklással”, jelezvén, hogy az adott diák (Tanuló_17_4) nem érti, hogy az ábrája csak szemléltető jellegű, de nem bizonyító erejű (4-12. ábra).



4-12. ábra: „Látszik az ábrából” (második feladat)

Ugyan a diák van Hiele-szintje négyes volt, de a megoldása azt mutatja, hogy az ábra szerepét a bizonyításban még nem kezelte megfelelően.

Ezután visszatértünk a második példára („A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma megfelelő szögeit.”). Tanuló_7_3 megoldása, amelyben megmutatta, hogy az állítás nem igaz, amennyiben az alapul vett paralelogramma konkrétan rombusz, szülte a következő feladatot, amellyel az ellenpélda egyértelműségét kívántuk a diákoknak megvilágítani.

Probléma 1: Adott egy paralelogramma, amiről annyit tudunk, hogy átlói felezik a megfelelő szögeket. Ekkor az alakzat szükségképpen rombusz.

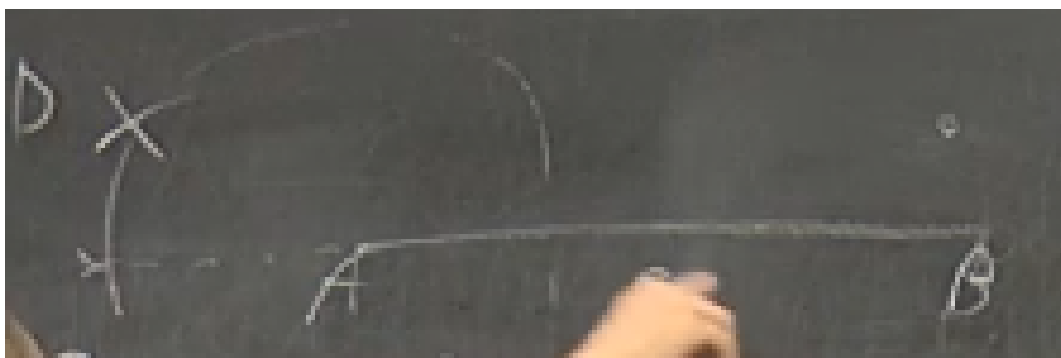
A diákok korábban még nem tanultak matematika logikát, így nem voltak tisztában a „szükséges és elégséges” terminológiával.

Tanuló_9_4 arra a kérdésre, hogy mi jellemzi a paralelogrammát, azt felelte, hogy szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak. A paralelogramma definíciója a tanulmányaik során az volt, hogy olyan négyszög, melynek szemközti oldalai párhuzamosak, így felvetődött egy újabb probléma.

Probléma 2: Egy adott négyszögről tudjuk, hogy szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak. Mutassuk meg, hogy a négyszög paralelogramma.

Tanuló_7_3 jött ki a táblához, és szerkesztéssel igyekezett érvelni:

- Felvette a táblán az AB szakaszt (ez a hosszúságú volt), majd az A pontból körözött b hosszúsággal.
- Ezen a köríven felvette a D pontot.
- Majd D -n keresztül párhuzamost akart rajzolni az AB szakasszal. (4-13. ábra)



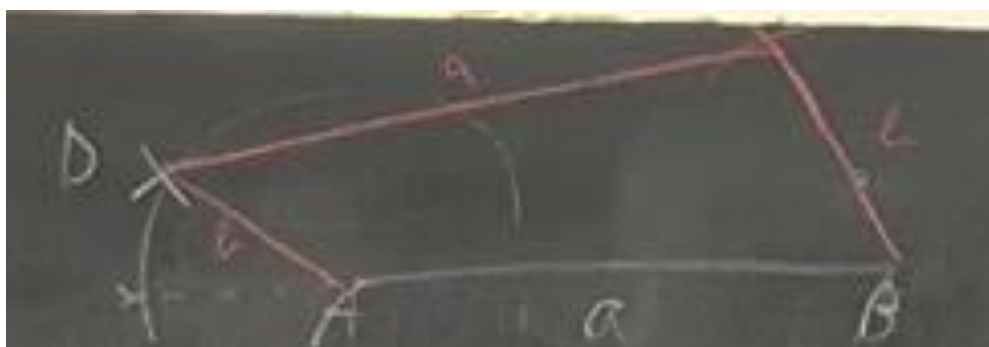
4-13. ábra: Szerkesztés mint „bizonyítás”

Én: „De miért párhuzamost?”

Tanuló_7_3: „Mert úgy jön ki.”

Megbeszéltük a csoporttal, hogy Tanuló_7_3 mindenáron paralelogrammát szeretne kapni, ám a párhuzamosságot egyelőre semmi sem támasztja alá, épp azt szeretnénk belátni. Erre Tanuló_10_4 azzal az ötlettel állt elő, hogy körözzünk D -ből a -val, B -ből b -vel, a metszéspontjuk legyen C , és így $ABCD$ paralelogramma lesz.

A zavart a tanulók fejében az okozhatta, hogy korábban, amikor paralelogrammát kellett szerkeszteniük a két oldal hosszának ismeretében, akkor az előbb említett algoritmus szerint végezték el a szerkesztést, viszont a „Miért?” kérdésre nem feltétlenül kaptak magyarázatot. Megelégedtek azzal, hogy „láthatóan” paralelogramma jött ki. Ez egy nagyon kritikus pontja volt a tanórának, hiszen világosan kiderült, hogy a diákok egy részének a szerkesztési eljárás ebben az esetben elfogadható módszer egy bizonyítás végrehajtására. Emiatt először is illusztrációként felrajzoltam a diák szerkesztési lépéseit, de szemlátomást nem paralelogramma végeredménnyel 4-14. ábra.



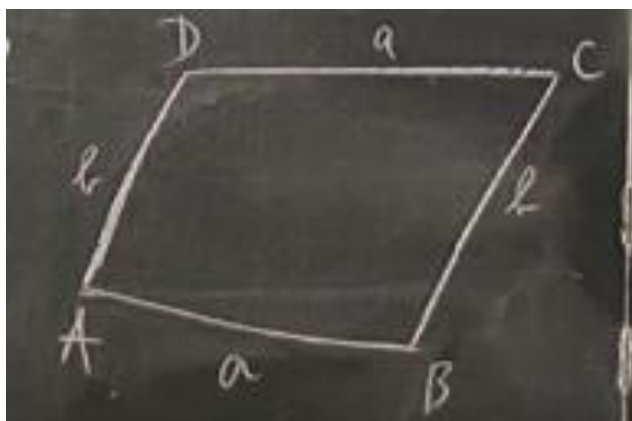
4-14. ábra: Szándékosan „torz” ábra

Miután hangsúlyoztam, hogy éppen azt kellene belátni, hogy a két-két oldal párhuzamos, Tanuló_20_3 közbeszólt: „De ha párhuzamos, akkor egyértelmű, hogy lesz két ugyanolyan oldala.” Tanuló_20_3 voltaképpen felcserélte a feltételt a bizonyítandóval, azaz megfordította az állítást.

Miután Tanuló_20_3 téves megállapítását megtárgyaltuk, Tanuló_9_4 az alábbi ötlettel rukkolt elő: „Úgy nem lehetne, hogy ha az a oldallal nem párhuzamost szerkesztünk, akkor nem tudjuk rámérni a b oldalt?” Tanuló_9_4 tehát visszatért a korábbi gondolathoz, és indirekt feltevést tett. A szerkesztési eljárás járt végig a fejükben, de ezen a ponton megjelent az indirekt bizonyítás gondolata is. Megbeszéltük, hogy amit Tanuló_9_4 állít, éppen azt kell belátni.

A csoport ezen a ponton kezdte megérteni, hogy a szerkesztési eljárás nem alkalmas a feladatunk bizonyításra. Tanuló_8_3 fogalmazta meg nagyon helyesen, a bizonyítás során minden lehetséges esetet meg kell vizsgálni, míg a szerkesztés egyetlen vizuális valóságot valósít meg csak. Lehetséges, hogy ezekre a felvett szakaszhosszokra „szemre kijön” az állítás, de egyáltalán nincs garancia arra, hogy ez minden esetben igaz lesz.

Felhívtam a figyelmüket, hogy nem célszerű olyan ábrát készíteni, mely sugallja, hogy az adott alakzat paralelogramma, hiszen az olyan megállapításokat is szülhet, melyek egyébként bizonyítást igényelnének. Ennek szellemében készítettem el a feladathoz az alábbi ábrát (4-15. ábra).



4-15. ábra: A végeredményt tudatosan nem tükröző ábra

Heurisztikus stratégiát javasoltam: „A geometriában az a nehéz, hogy sokszor még valamit be kell rajzolni az ábrába ahhoz, hogy el tudjak indulni. Addig csak nézegetem.” Ennek hatására Tanuló_8_3 az $ABCD$ sokszöget felbontotta két háromszögre az AC átlója segítségével ($ABC\Delta$ és $ADC\Delta$), majd Tanuló_11_3 megmutatta, hogy a két háromszög egybevágó ($ACD\Delta \cong CAB\Delta$), majd ezután azt, hogy $AB \parallel DC$. Megbeszéltük, hogy a másik két oldal (BC és AD) párhuzamosságát analóg módon lehet belátni, amire alkalmas leírási mód a „Hasonlóan adódik...” kifejezés. Ezzel tehát beláttuk a második problémát, és ennek segítségével Tanuló_8_3 megmutatta az első probléma állítását.

Ezek után felvettem egy még általánosabb problémát.

Probléma 3: Ha egy négyszög átlói felezik a megfelelő szögeket, akkor a négyszög rombusz.

Tanuló_2_3 készített ábrát a feladathoz (4-16. ábra).



4-16. ábra: Megfelelő tanulói ábra (Tanuló_2_3)

Tanuló_5_4 jött ki a táblához, és szögek meghatározásával belátta az állítást. Kiegészítésképpen megmutattuk az állítást annak segítségével is, hogy ha egy átló felezi a megfelelő szögeket, akkor az adott négyszög deltoid. Fontosnak tartjuk a bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából, hogy ahol lehetséges, ott többféle bizonyítást is lássanak a diákok, mert minden egyes megoldást más-más lényeges pontra mutathat rá.

Harmadik feladat

A feladat állítása az alábbi:

„Egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180° .”

Tanuló_3_4 a következő ábrát rajzolta fel (4-17. ábra):

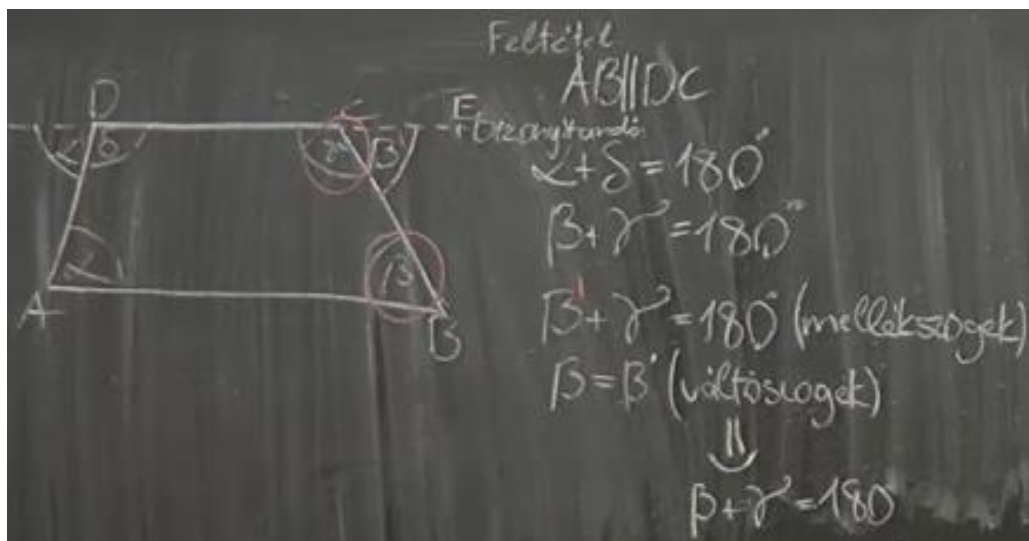


4-17. ábra: Feltétel és bizonyítandó jelekkel leírva (harmadik feladat, Tanuló_3_4)

A diák teljesen világosan látta az állítás szerkezetét, és az ábráján bevezetett jelölések segítségével megfelelő módon írta le mind a feltételt, mind pedig a bizonyítandó részt. Ezek után Tanuló_10_4 helyesen átfogalmazta az állítást „Ha... akkor...” formába. Mindezek azt támasztották alá, hogy az állítások szerkezetének elemzése és átírása a diákok számára teljesen érthetővé vált.

Tanuló_3_4 folytatta a feladat megoldását, és a bizonyítást elmondta a négyszög BC szára, váltószögekre hivatkozva. Viszont még tanári kérésre sem tudta leírni a bizonyítása lépéseit, négyes van Hiele-szintje ellenére sem. Ez egyébként egy jellemző momentuma a középiskolai

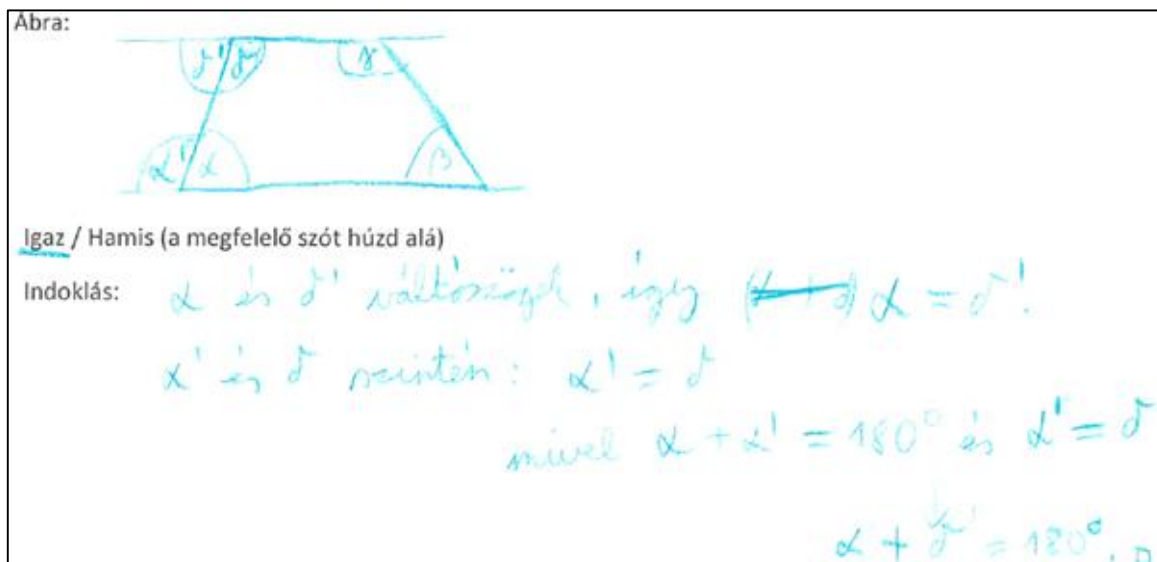
matematikaóráknak, vagyis az, hogy a diákok írásbeli kommunikációja nem megfelelő, még esetenként helyes gondolatmenetet sem képesek realizálni írásban. Tanári segítséggel végül sikerült leírnia az érvelési láncot (4-18. ábra).



4-18. ábra: A harmadik feladat állításának közös megoldása

Itt ismételten felvetődött egy iskolai axióma. Nevezetesen az, hogy a β és a β' szögek egyenlősége abból következik, hogy az illető szögek váltószögek, amiknek a nagysága megegyezik. Ennek indoklását nem vártuk el a tanulóktól a megoldás során, de az erre való hivatkozást igen.

Arra a kérdésre, hogy mi a teendő a trapéz AD szára esetén, A csoport egybehangzóan mondta, hogy „Hasonlóan adódik...”, jelezvén, hogy elsajátították ezt a terminológiát. Ez igen fontos dolog, ugyanis nem elegendő belátni csak az egyik szárra az állítást. Ezt a hiányosságot követte el Tanuló_18_4, aki ezt leszámítva egyébként helyesen érvelt (4-19. ábra).



4-19. ábra: Egy majdnem tökéletes megoldás (harmadik feladat, Tanuló_18_4)

Az előző feladat kapcsán felvettem az alábbi problémát.

Probléma 3: Igaz-e az, hogy ha egy négyszög egyik oldalán a két belső szög összege 180° , akkor az a négyszög garantáltan trapéz?

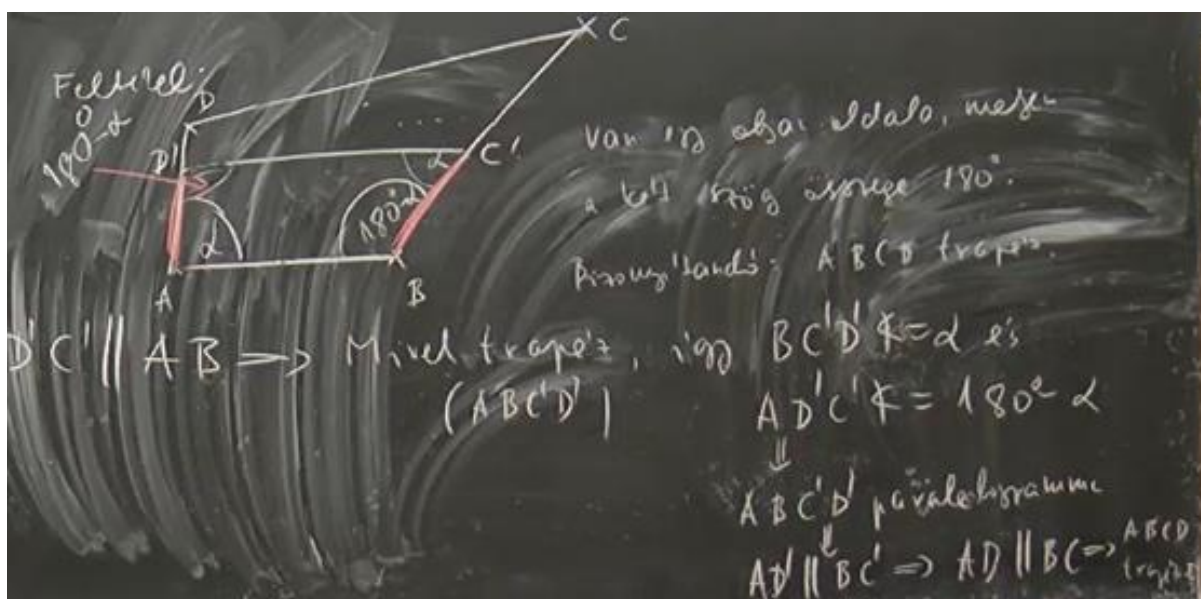
A feladat átfogalmazása „Ha... akkor...” formába már nem okozott gondot (Tanuló_5_4). Tanuló_11_3 megoldása a feladatra jól példázza a tehetséges diákok eredeti gondolkodását. Az $ABCD$ négyszög AB oldalával (melyen a két belső szög összege 180°) párhuzamosan felvett egy olyan szakaszt, mely a négyszög belsejében halad. Az A csúcsnál lévő belső szög nagyságát β -val jelölve, a B csúcsnál lévő belső szög nagysága $180^\circ - \beta$. (4-20. ábra)



4-20. ábra: Egy nem szokványos megoldás (Probléma 3, Tanuló_11_3)

Mivel a konstrukció miatt a kapott négyszög trapéz, így a harmadik feladat eredményére utalva (vagyis, hogy az egy száron nyugvó belső szögek összege 180°) beírta a maradék két szögének is a nagyságát. Majd arra hivatkozott, hogy a kapott négyszög szemközti szögei egyenlő nagyságúak, amiből levonta a helyes következtetést, hogy a négyszög paralelogramma. És ha egyszer paralelogramma, akkor a másik két szemközti oldala is párhuzamos, ami viszont igazolja azt, hogy az eredeti négyszög trapéz. Felmerült bennünk Tanuló_11_3 gondolatmenetét látva, hogy az a tény, hogy a diák hármassal van Hiele-szintet teljesített, valószínűleg a tanuló dekoncentráltóságán múhatott.

A bizonyítási képesség fejlesztésének egyik lépcsőfoka más érvelésének a megértése, és a bizonyítási lépések saját szavakkal történő megismétlése. Ez utóbbit Tanuló_5_4 végezte el. Ismételten előjött viszont az a hiányosság, hogy a diákok nem képesek megfelelő módon leírni az érvelési láncot, nem érzik, mely lépés explicit rögzítése elvárás. Ezt végül közösen tettük meg (4-21. ábra).



4-21. ábra: Probléma 3 bizonyításának megfelelő leírása

Negyedik feladat

A feladat állítása az alábbi:

„A téglalap átlói felezik egymást.”

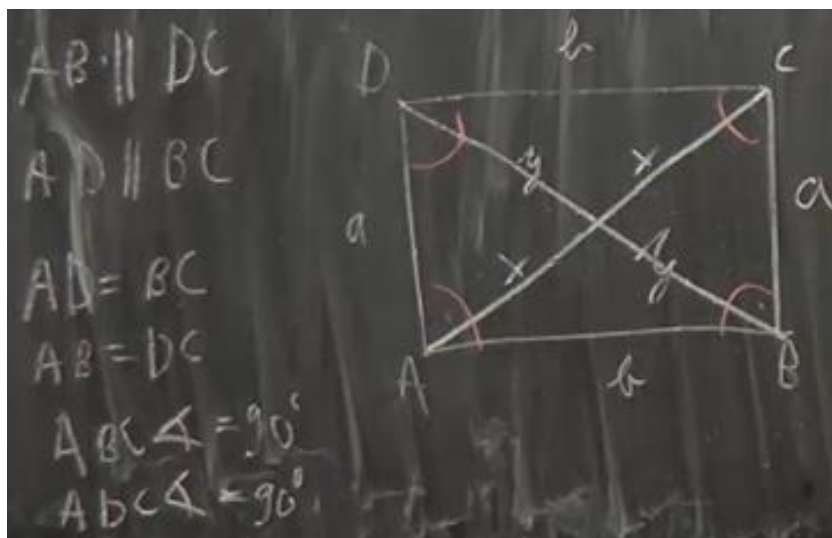
Érdemes megemlíteni, hogy ezzel a feladattal a diákoktól egy számukra korábban iskolai axiómaként szereplő állítás bizonyítását kértük.

Az állítás szövegének átfogalmazása „Ha... akkor...” alakba ismét hibátlanul ment (Tanuló_14_3), ami azt jelenti, hogy a diákok az állítások szerkezetét megfelelően állapították meg.

Kértem tőlük, hogy fogalmazzák meg egyéb alakban is az állítás szövegét. Erre Tanuló_15_4 azt felelte, hogy „Egy téglalap átlói felezik egymást.”, majd Tanuló_8_3 pedig azt, hogy „Bármely téglalap átlói felezik egymást.” A tanulók matematikai szókincsének, kifejezőképességének a fejlesztése végett tételeken összeszedtük az állítás szövegének alkalmas alakjait:

1. Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.
2. A téglalap átlói felezik egymást.
3. Egy téglalap átlói felezik egymást.
4. Bármely téglalap átlói felezik egymást.
5. Minden téglalap átlói felezik egymást.

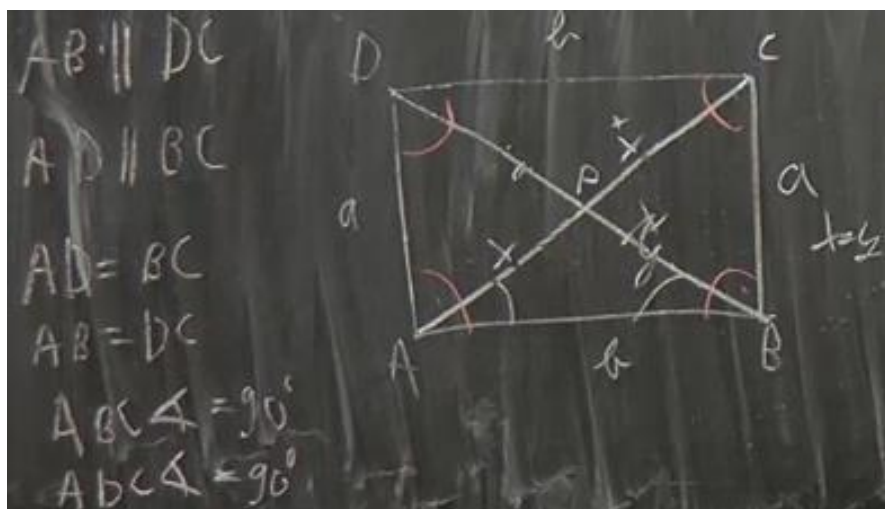
Ez a példa is azt igazolta, hogy bár a tanulók sokszor helyesen gondolkodnak, ám az érvelési lánc megfogalmazása számos buktatóval járhat. Tanuló_5_4 első lépése az volt ugyanis, hogy az ábráján bejelölte a bizonyítandó tény (4-22. ábra)



4-22. ábra: A kiinduló ábra eleve tartalmazza a bizonyítandó tény (negyedik feladat, Tanuló_5_4)

Felhívtam a csoport figyelmét arra, hogy ha valaki beleírja az ábrájába az éppen belátásra szoruló tény, akkor nem kellő körültekintés mellett könnyen felhasználhatjuk azt, amivel a megoldás onnantól kezdve értékelhetetlenné válik. Ezzel is igyekeztem az ábra bizonyításban betöltött szerepét tisztázni.

Az átlók metszéspontját P -vel jelölve Tanuló_5_4 egybevágóságra hivatkozva belátta, hogy az ABP háromszög egyenlő szárú, vagyis $x = y$. Hasonlóan adódik (ezt már önmagától alkalmazta), hogy a BCP háromszög is egyenlő szárú. Ezt végképp zavaró módon jelölte az ábráján, amivel az teljesen értelmezhetetlenné vált (4-23. ábra).



4-23. ábra: Értelmezhetetlen ábra (negyedik feladat)

Ez a megoldás több dologra is nagyon jól rávilágított. Egyrészt a tanuló tulajdonképpen birtokában volt a helyes érvelés képességének, ám a nem kellően fejlett írásbeli kommunikációjának köszönhetően nem volt képes a gondolatait érthető formában közölni. Másrészt a BAP és az ABP egyenlőségét a téglalap definíciója alapján indokolnia kellett volna.

Tanuló_5_4 eredeti írásbeli munkája érdekes módon nem tartalmazta a táblánál látott zavaros ábráját. Itt is megfeledezett az ABP háromszög kapcsán az A , illetve a B csúcsnál lévő belső szögek egyenlőségét megindokolni. Érvelése közlésének a színvonala látható módon még nem érte el az elvárható szintet. (4-24. ábra)

Igaz / Hamis (a megfelelő szót húzd alá)

Indoklás:

A téglalap átlói egyenlőszárú ~~háromszögek~~ háromszögekre bontják a téglalapot

és minden oldal kettőben is szerepel, tehát a csúcsok egyenlőek lesznek, ~~köztük~~

4-24. ábra: A negyedik feladat egy nagyon szellős megoldása

Ötödik feladat

A feladat állítása a következő volt:

„Ha egy deltoid két nem szemközti szöge derékszög, akkor a deltoid négyzet.”

Tanuló_8_3 a táblai érvelése során a deltoid szimmetria-tulajdonságára nem hivatkozott, ami az írásbeli munkájában is tetten érhető (4-25. ábra). Ez ismételten felhívta a figyelmet arra, hogy a megfelelő tényekre való explicit hivatkozás a fejlesztendő területek közé tartozik.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:



Igaz / ~~Hamis~~ (a megfelelő szót húzd alá)

Indoklás: Mivel először az állítás DC B₂ is derékszög de ezért (BA)-ra is derékszögnek kell lennie, ezért (vagy már csak részben) Minden szög derékszög és tudjuk, hogy van szimmetria oldaluk ami egyenlő ezért (csak) négyzet

4-25. ábra: Az ötödik feladat egy csaknem hibátlan bizonyítása

Hatodik feladat

A feladat állítása az alábbi volt:

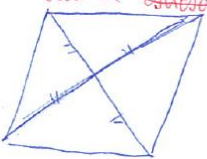
„A paralelogramma belsejében van olyan pont, amelyik egyenlő távolságra van a csúcsoktól.”

Tanuló_14_3 az átlók metszéspontjára helyezve a hangsúlyt – némi tanári segítséggel – helyesen érvelve belátta az állítást. Tanuló_19_4 írásbeli munkáját megvizsgálva megállapíthatjuk, hogy az írásbeli kommunikációja neki sem megfelelő, nem érzi, milyen lépések leírása teszi teljessé a bizonyítást. Padtársa (Tanuló_7_3) szintén érezte az írásbeli kommunikáció hiányosságait, és igyekezett a bizonyítást teljessé tenni. (4-26. ábra)

Igaz / ~~Hamis~~ (a megfelelő szót húzd alá)

Indoklás: ~~Hamis, mert egy a négyzet átlóján fekvő pont egyenlő távolságra van a csúcsoktól, ahol az átlók metszéspontja van.~~

A paralelogramma szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak és párhuzamosak, viszont szomszédos oldalai nem egyenlő hosszúságúak. Ebből az következik, hogy átlói nem egyenlő hosszúságúak, ami pedig azt eredményezi, hogy metszéspontjuk nem egyenlő távolságra van a csúcsoktól.



4-26. ábra: Az írásbeli kommunikáció fejletlensége a hatodik feladat kapcsán

4.2.3 A K3 és K4 kutatási kérdésekre adott válaszok, illetve következtetések

Kutatásunknak ebben a szakaszában az előteszt és a három fejlesztő tanóra segítségével a **K3** és a **K4** kutatási kérdésekre kerestük a válasz. A **K3** kérdésre az egyes részkérdésekre adott válaszokkal felelünk:

K3-1: A tanulók számára az előteszt során a matematikai állítások szerkezete még nem volt világos. Amennyiben az állítás „Ha... akkor...” formában volt megadva, a diákoknak némileg jobban sikerült kiolvasniuk az állítás szövegéből a feltételt (13. táblázat), tehát érdekesebb eleinte a tanórákon az állításokat „Ha... akkor...” megfogalmazásban tárgyalni, de a feltétel meghatározásának a sikeressége szempontjából nem ez az egyetlen tényező. Ugyanez volt a tapasztalatunk az állítás következmény részével kapcsolatban is. A három fejlesztő tanítási óra alatt viszont a diákok számára érthetővé vált az állítások szerkezete, de ezt a területet folyamatosan fejleszteni, erősíteni kell.

K3-2: A diákok az előteszt folyamán olyan tényeket is elfogadtak a feladathoz mellékelt ábra alapján, amik nem szerepeltek a feladat feltételei között, vagy nem következtek belőle. A fejlesztő tanítási órák hatására a tanulók világosabban látták a geometriai ábrának a bizonyításokban játszott szerepét.

K3-3: A tanulók jelentős hányada nem volt képes egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani. A diákok egy része nem látta a különbséget a bizonyítás és a szemléleten alapuló intuitív meggyőzés között. Sokkal nagyobb bizonyítási rutint kell szerezniük ahhoz, hogy megfelelő módon érezzék az érvelés során felbukkanó egy-egy matematikai tény esetén az azzal kapcsolatos indoklási igényt.

K3-4: A diákok képesek voltak felismerni egy „nyilvánvalóan” hamis állítást. A tanulók egy jelentős része viszont az előteszt tapasztalatai alapján nem tudta, hogy a cáfolatként megadott ellenpélda helyességének a megmutatása a feladatra adott bizonyítás szerves részét képezi. Többben azt is vizsgálták, hogy az általuk adott ellenpélda mely eset(ek)ben nem ad cáfolatot, azaz az állítás milyen speciális körülmények között igaz. A fejlesztő tanórák során ezek a problémák megbeszélésre kerültek, és a tanulók jobban megértették az ellenpélda szerepét. Ez a problémakör ugyanakkor felveti az indirekt gondolkodás fejlesztésének az igényét.

K3-5: A tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációja nem volt megfelelő, jelentős fejlesztésre szorul. Nem indokoltak kellő részletességgel, nem érezték, mely tények igényelnek hivatkozást, esetleg igazolást, és melyek nem. Többben pusztán az ábrában jelölve fejtették ki a gondolatmenetüket.

A megfigyelt gondolkodási jellegzetességekre (esetlegesen hiányosságokra) alapozva a bizonyító képesség fejlesztését tűzve ki célul a **K4** kutatási kérdésre az alábbiakban adjuk meg a választ.

Több szempont is felmerült, ami szerint felépíthető 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program. Ezek közül az alábbi öt területre fókuszálva dolgoztuk ki a fejlesztő kísérlet további szakaszát:

- állítások szerkezetének vizsgálata;
- indirekt úton történő bizonyítás képességének fejlesztése;
- más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása;
- megtevesztő ábra alkalmazása;
- folyamatábra használata.

4.3. A fejlesztő tanítási kísérlet második fázisa

Az előző fejezetben meghatározott témaköröket külön-külön tárgyaljuk, kielemezve, hogy a kísérlet során hogyan vetődtek fel, illetve hogyan épültek be a tanítás folyamatába. Nagyon fontos megemlíteni, hogy a fejlesztett területek vizsgálata nem csak a kimondottan az erre a célra készült feladatlapok segítségével történt, hanem a tanítási folyamat természetes részét képező, a tananyag elmélyülésének mértékét mérő „hagyományos” dolgozatokkal is. Ezekbe a számonkérésekbe szándékosan kerültek bele olyan feladatok, amelyek kimondottan a fejlesztő kísérlet eredményességét voltak hivatottak felmérni.

4.3.1 Állítások szerkezetének vizsgálata

Az állítások sikeres bizonyításának előfeltétele, hogy a diák világosan lássa az állítás szerkezetét. Ez a kutatás során több alkalommal előkerült, és amint láttuk, már a fejlesztő kísérlet első fázisában nagyon nagy hangsúlyt kapott mind az előtesztben, mind pedig a három, videóval rögzített tanítási órán. Akkor megbeszéltük egyrészt az állítások felépítését, másrészt átfogalmazását, de úgy éreztük, ezt a területet érdemes időről időre feleleveníteni.

Egy-egy állítás kapcsán gyakran felszínre bukkant ez az ismeret a tanítási órákon. Így volt ez a tizenkilencedik tanítási órán is, amikor Pitagorasz tételéből, annak alkalmazásaiból írtak dolgozatot a diákok (G. melléklet). A számonkérést egy tanuló kivételével az egész csoport megírta. A feladatsorban az első feladat (b) és (c) része az alábbi volt:

Tekintsük az alábbi állítást: „Minden négyzet trapéz.”

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

A feltétel kiolvasásának statisztikája az alábbiak szerint alakult (18. táblázat).

	Helyesen olvasta ki a feltételt	Az egész állítást írta le	A bizonyítandóval ekvivalens tényt fogalmazott meg	Nem válaszolt
Diákok száma	17	1	2	1

18. táblázat: A feltétel kiolvasása az állítás szövegéből (dolgozat Pitagorasz tételéből)

A tanulóknak nagyjából a 80%-a birkózott meg sikerrel a feladattal. Ami korábban tömeges jelenség volt, nevezetesen, hogy a diákok magát az állítást fogalmazták meg feltételként, már csak egy esetben fordult elő. Két tanuló esetében pedig a bizonyítandó tény bukkant fel implicit módon (4-27. ábra).

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel: *Ha egy négyszög legalább 1 pár párhuzamos old. párhuz.*

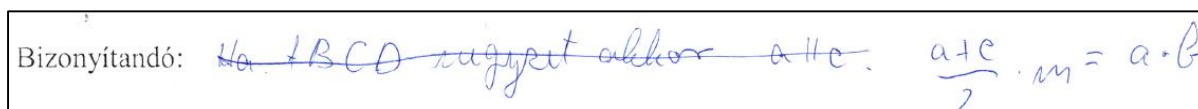
4-27. ábra: Egy ekvivalens megfogalmazás a feltételre (Tanuló_13_3)

Nézzük ezek után a bizonyítandó kiolvasását az állítás szövegéből (19. táblázat).

	Helyesen adta meg a bizonyítandót	A bizonyítandóval ekvivalens tényt fogalmazott meg	Az egész állítást írta le	Más összefüggést fogalmazott meg
Diákok száma	12	6	2	1

19. táblázat: A bizonyítandó kiolvasása az állítás szövegéből (dolgozat Pitagorasz tételéből)

Tulajdonképpen tizennyolc diák volt, aki ki tudta emelni a bizonyítandó tényt az állítás szövegéből, és valamilyen formában le is írta azt (vagy magára a trapézra hivatkozott, vagy pedig párhuzamos oldalpárokat említett). Már csak két tanuló volt (Tanuló_13_3 és Tanuló_19_4), aki az egész állítást fogalmazta meg bizonyítandó tényként. Ez szintén nagy előrehaladást jelent az előteszt eredményéhez képest. Egyetlen diák (Tanuló_10_4) volt, aki területek segítségével próbálta meg megfogalmazni a gondolatait (4-28. ábra).



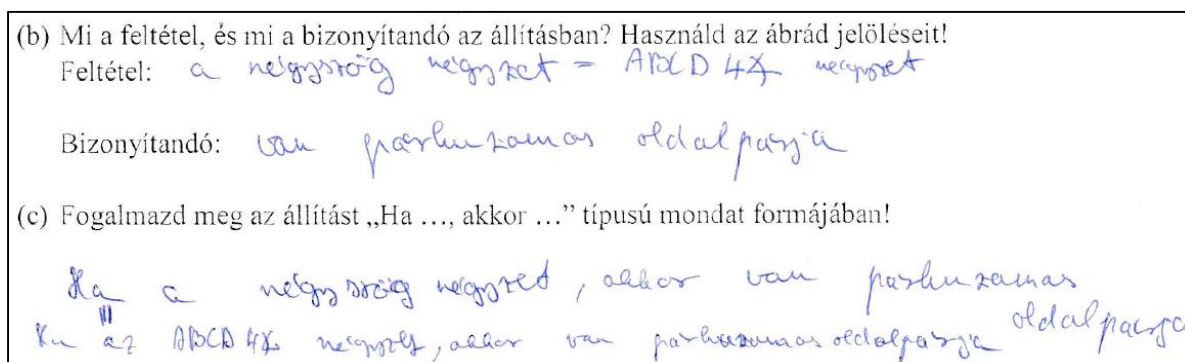
4-28. ábra: A bizonyítandó leírása területek segítségével (Tanuló_10_4)

Végezetül nézzük az állítás átfogalmazását „Ha... akkor...” formába (20. táblázat).

	Helyesen fogalmazta át	A bizonyítandó részt ekvivalens módon átfogalmazta	A trapéz definícióját írta le
Diákok száma	18	1	2

20. táblázat: Az állítás átfogalmazása „Ha... akkor...” alakba (dolgozat Pitagorasz tételéből)

Két tanulót (Tanuló_13_3 és Tanuló_21_4) leszámítva a diákok sikeresen írták le az állítás átfogalmazását. Közülük az egyik (Tanuló_20_3) a bizonyítandó részhez a párhuzamos oldalak szükségességét írta le, mint azt tette egyébként a (b) részfeladatban is (4-29. ábra).



4-29. ábra: A bizonyítandóval megfogalmazása a trapéz definíciója segítségével (Tanuló_20_3)

Az állítások, tételek szerkezetére a fejlesztő kísérlet során végig hangsúlyt fektettünk, kiegészítve az eddigieket az állítások, tételek megfordításával. Az alábbiakban egy jellemző epizódot emelünk ki, ami a Thalesz-tétellel kapcsolatos.

A harmincnegyedik tanórán a tananyag a Thalész-tétel bevezetése, annak bizonyítása, majd a tétel megfordításának a kimondása volt. Most csupán a tétel és a megfordításának a problémájával foglalkozunk.

A célcsoport matematikakönyvében az alábbiakat olvashatjuk (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, & Vincze, 2015, old.: 153):

„Thalész-tétel: Ha egy kör valamely átmérőjének két végpontját összekötjük a kör bármely más pontjával, akkor olyan derékszögű háromszöget kapunk, amelynek átfogója a kör átmérője.”

Majd pár sorral lejjebb a tétel más formában is meg van fogalmazva:

„Tétel: Ha egy háromszög körülírt körének középpontja az egyik oldal felezőpontja, akkor a háromszög derékszögű, és a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja.”

A tétel megfordítása pedig az alábbi alakban szerepel:

„Tétel: A derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja.”

Korábbi tanítási gyakorlatom szerint a tétel első alakja alapján a diákok közül szinte senki sem képes a tétel megfordítását önállóan megfogalmazni. Azaz a tanulók ebben a megfogalmazásban nem tudják a tétel szerkezetét kellőképpen analizálni. A Thalész-tétel és megfordításának a tanítása tehát egyáltalán nem magától értetődő, főképp, ha ezt felfedeztetve szeretnénk megtenni. Nem véletlen, hogy Ambrus (1995, old.: 84-85) külön kitér ezen tétel tárgyalásának a problematikájára. Ő az alábbi módokon fogalmazza meg a tételt:

1. alak: „Egy kör bármely átmérőjéhez tartozó minden kerületi szög derékszög.”
2. alak: „Ha egy szög kerületi szög egy körben és szárai a kör valamely átmérőjének végpontjaira illeszkednek, akkor ez a szög derékszög (90° -os).”

Ambrus kifejti, hogy amennyiben a tétel szerkezetét $(F_1 \wedge F_2) \Rightarrow K$ alakúnak tekintjük (ahol: F_1 : Egy szög kerületi szög egy körben. F_2 : Az illető szög szárai a kör valamely átmérőjének végpontjaira illeszkednek. K : Az adott szög derékszög.), úgy a tételnek háromféle megfordítása is lehetséges. Ugyanakkor felhívja a figyelmet arra, hogy az oktatási gyakorlatban valójában a tétel egyfeltételes, ugyanis a tétel alaphalmazának egy körhöz tartozó kerületi szögek halmazát szokás tekinteni: „Ha egy körhöz tartozó kerületi szög szárai illeszkednek a kör valamely átmérőjének végpontjaira, akkor a szög derékszög.” Ezzel a problémával a 4.4.1. fejezetben is találkozni fogunk.

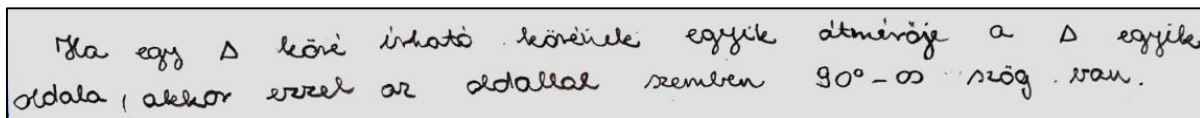
Magát az alapszituációt a következő módon vetettük fel a tanulóknak:

Adott egy kör, amelybe háromszögeket rajzolunk (a kör tehát a háromszögek körülírt köre), Mely esetekben esik a kör középpontja a háromszögön belülre, kívülre, illetve magára a háromszögre? Több ábra alapján fogalmazzatok meg sejtéseket!

Két ok miatt választottuk ezt az utat. Egyrészt a speciális matematika tagozaton bevált gyakorlat ez a módszer, azaz, hogy igyekszünk minél több mindent a diákokkal önállóan fölfedeztetni, megfogalmaztatni. Továbbá arra is kíváncsiak voltunk, hogy ha a készen kapott sokféle megfogalmazás helyett a tanulók a saját szavaikat használva, de az állítás szerkezetét tudatosítva fogalmaznak, akkor vajon könnyebben megértik-e a megfordítás lényegét.

A diákok többsége a füzetében történt néhány szerkesztés után rövid idő alatt rájött, hogy abban az esetben, amikor a háromszög egyik oldala tartalmazza a kör középpontját, az ezzel az oldallal szemközti szög derékszög. Mielőtt megfogalmaztuk volna precízen a tételt, arra kértem őket, hogy próbálják meg belátni a megfigyelt összefüggést. Azt gondoltam, hogy a tétel igazolása után még inkább tisztában lesznek a diákok a tétel szerkezetével, mélyebb értelmével. Leghamarabb Tanuló_11_3 végezte el a bizonyítást (amely megegyezett a tankönyvi bizonyítással), tanári segítség nélkül, amit a táblánál meg is mutatott a csoportnak. Korábban utaltunk rá, hogy

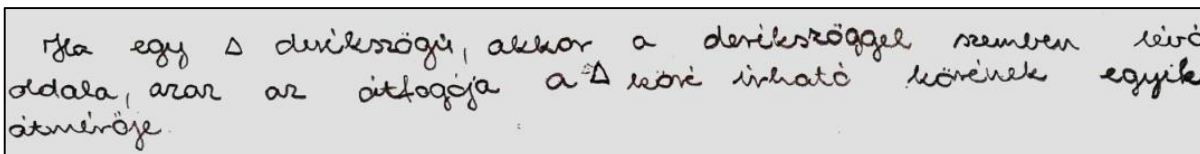
Tanuló_11_3 van Hiele-tesztje valószínűleg csak a diák dekoncentrálttsága miatt mutatott hármas van Hiele-szintet, amit ez az újabb megoldás szintén alátámasztott. Ezek után pedig arra kértem őket, hogy önállóan szövegezzék meg a tételt. Ezek közül láthatunk egyet Tanuló_21_4 megfogalmazásában (4-30. ábra).



Ha egy Δ köré írható körének egyik átmérője a Δ egyik oldala, akkor ezzel az oldallal szemben 90° -os szög van.

4-30. ábra: Thalész tétele Tanuló_21_4 önálló megfogalmazásában

A tétel közös kimondása után az volt a diákok feladata, hogy fogalmazzák meg önállóan a tétel megfordítását, amivel a csoport jól boldogult. Tanuló_21_4 megoldása az alábbi volt (4-31. ábra).



Ha egy Δ derékszögű, akkor a derékszöggel szemben lévő oldala, azaz az átfogója a Δ köré írható körének egyik átmérője.

4-31. ábra: Thalész tételének megfordítása Tanuló_21_4 önálló megfogalmazásában

Látható, hogy Tanuló_21_4 teljes mértékben képes volt egyedül értelmezni az állítás szerkezetét, azaz tisztán látta a feltételt és a következményt.

A tételt és annak megfordítását felfedeztettük tehát a diákokkal. A fenti módszernek a segítségével a tanulók képesek voltak

- elemezni a tétel szerkezetét;
- kimondani a tételt;
- megfogalmazni a tétel megfordítását.

A Thalész-tétel ilyen módon történő bevezetése alkalmas volt továbbá arra, hogy a ráépülő feladatmegoldások is sikeresek legyenek. A tétel megfordításának igazolását indirekt úton végeztük el, amiről a következő fejezetben lesz szó részletesebben.

Az állítások szerkezetének megfelelő értelmezésével kapcsolatos tapasztalataink azt mutatják, hogy ez a tanítási gyakorlatban nem akkora hangsúlyt kapó, viszont könnyen fejleszthető problémakör kiemelten kezelendő, mert

- egyrészt meglepő nehézségeket okoz a tanulóknak;
- másrészt nagyban segíti a tételek pontos megértését, átfogalmazását, valamint a megfordításának a kimondását;
- harmadrészt a sikeres bizonyítások elengedhetetlen előfeltétele.

4.3.2 Az indirekt úton történő bizonyítási képesség fejlesztése

A középiskolai matematikatanításban nagyon fontos szerepet játszanak az indirekt úton történő bizonyítások, melyek a Stylianides-féle keretrendszerben az általános bizonyítások kategóriájának képezik részét. A fejlesztő tanítási kísérlet első három, videóval rögzített tanórája szerint a diákoknak az általános iskolai tanulmányaik alapján van képük az indirekt bizonyítás módszeréről, ismerik a kifejezést, ám annak pontos végrehajtása mindenképpen segítségre szorul. Az iskolai tananyagban is részét képezi ez a bizonyítási módszer, esetünkben a Pitagorasz- és

a Thalész-tétel megfordításánál fordult elő. Erre a két „kötelező” esetre nem fogunk fókuszálni, az indirekt módszer spontánabb felbukkanásaira hegyezzük ki mondanivalóinkat.

A tizenharmadik tanórán szóba került a módszer az alábbi feladat kapcsán:

„Mutassuk meg, hogy egy háromszögben nem lehet két tompaszög.”

Tanuló_4_4 indirekt módon próbált meg érvelni, de az nem hangzott el a megoldása során egyszer sem, hogy bárhol is ezt a módszert alkalmazza. Közölte, hogy $\alpha = x + 90^\circ$, $\beta = y + 90^\circ$, majd felhasználva a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tételt, azt kapta, hogy $x + y + \gamma = 0^\circ$, amiről kijelentette, hogy nem igaz. Tanuló_4_4 először is nem említette meg, hogy az általa felírt kiindulópont az állításnak a tagadása, vagyis azt tette fel, hogy a háromszögnek van két tompa szöge. Az sem hangzott el tőle, hogy az elvégzett műveletek ekvivalens átalakítások voltak, így, mivel a végén hamis állítást kaptunk, a feltevése szintén hamis volt, amiből pedig az következik, hogy maga az eredeti állítás igazolást nyert. Tanuló_4_4 érvelése tehát nagyon hiányos volt, ennek ellenére ő úgy vélte, hogy a bizonyítása teljes (itt tetten érhető a bizonyítási képesség fejlesztésének Styliniades-féle pszichológiai komponense). A kérdéseim („köttözködéseim”) következményeképpen Tanuló_22_3 mondta ki a gondolatmenet lényegét: „amit felírt a táblára, az állítással ellenkező dolog, ami nem igaz, vagyis az állítás igaz”.

Ezek után közösen rögzítettük az indirekt bizonyítási módszer szükséges lépéseit, és így az ösztönösen érzett gondolatmenet bizonyítási módszerré vált.

Még ezen a tanítási órán előkerült két állítás, melyet ugyan nem indirekt úton igazoltunk, de előkészítették azt a feladatot, amelynél ismét ezt a módszert alkalmaztuk. Ezek az alábbiak voltak:

1. Mutassuk meg, hogy egy pontot egy rá nem illeszkedő egyenes pontjaival összekötő szakaszok közül az egyenesre merőleges szakasz a legrövidebb.
2. Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Igazoljuk, hogy van olyan pont az egyenesen, melyet az adott ponttal összekötve a kapott szakasz merőleges lesz az egyenesre.

Ez alapján kapta a csoport az alábbi házi feladatot, amelyet a tizennegyedik fejlesztő tanórán tárgyaltunk meg:

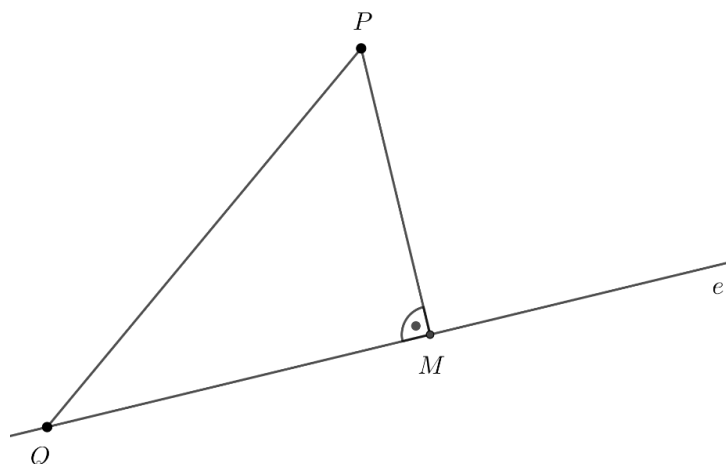
Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont. Igazoljuk, hogy az egyenesnek pontosan egy olyan pontja van, melyet P -vel összekötve az egyenesre merőleges szakaszt kapunk.

A problémák egymást születték, és amellet, hogy a bizonyítási képesség fejlesztését szolgálták, arra is megfelelően bizonyultak, hogy a diákokat kételkedésre ösztönözzék. Továbbá a tanulók megismerkedtek a létezés és az egyértelműség fogalmával. Korábról már ismerték azt az alapvető tényt, hogy egy pontból egy rá nem illeszkedő egyenesre bocsátott merőleges szakasz a lehető legrövidebb (tehát számukra ez iskolai axióma volt). Az első feladat megkívánta ennek a belátását, a második feladat kapcsán még meglepőbb dolog került szóba: „Vajon a merőleges szakasz mindig létezik?”

Ezen előzmények után Tanuló_2_3 oldotta meg a házi feladatot a táblánál. A következő lépéseket tette:

- Felvett egy e egyenest és rajta kívül egy P pontot.
- A P pontból merőleges bocsátott az egyenesre (ilyen létezik az előző feladat értelmében), amelynek talppontját M -mel jelölte.
- Felvett egy újabb pontot e -n (Q), melyet összekötött P -vel ($\Rightarrow PQM$ háromszög).

Így az alábbi ábrához jutott:

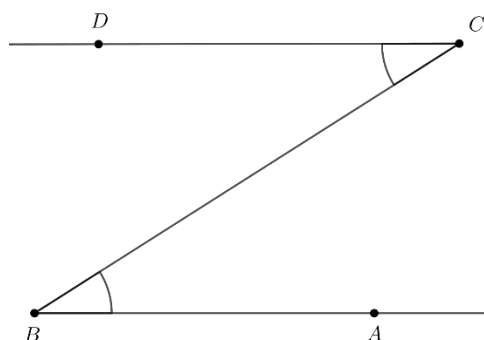


4-32. ábra: Tanulói indirekt bizonyítás (Tanuló_2_3)

Ekkor Tanuló_2_3 a következőt mondta: „Ha PQ merőleges lenne az egyenesre, akkor P -nél 0° képződne, mivel a háromszög belső szögeinek összege 180° . De az lehetetlen.” Teljesen világos, hogy az állítást direkt úton is könnyűszerrel be lehet látni, de Tanuló_2_3 érveléséből az indirekt okoskodás gondolata tört felszínre.

Ezek után a diákok kaptak egy két feladatból álló feladatlapot, amelyet önállóan kellett megoldaniuk, és még a tanórán be kellett adniuk. Mindkét feladat az indirekt úton való érvelést volt hivatott elmélyíteni, ám mint kiderült, az egy továbbihiányosságra (a definíció pontos ismeretére) hívta fel a figyelmet.

Az első feladatban a diákok a 4-33. ábraát kapták.



4-33. ábra: Feladat az indirekt bizonyításhoz

A tanulóknak azt kellett belátniuk, hogy feltéve, hogy $ABC \sphericalangle = BCD \sphericalangle$, AB párhuzamos CD -vel. Továbbá meg kellett nevezniük, hogy az ABC és BCD szögek milyen nevezetes szögpárt jelentenek.

A második feladatban pedig azt kellett megmutatni, hogy egy négyszögben nem lehet négy hegyesszög.

A második feladatban sokkal jobban érződött, hogy az indirekt módszert jól elsajátították a tanulók, ezért az elemzést ezzel kezdjük. Mind a húsz diáknak sikerült a bizonyítást kiviteleznie (erről a tanóráról ketten hiányoztak), és összesen ketten voltak közülük, akiknél az alapgondolat megvolt, de a leírás módja nem volt kielégítő. Tanuló_9_4 ugyanis nem hangsúlyozta, hogy az érvelése indirekt úton történik, és hiányzott a végkövetkeztetés is (4-34. ábra).

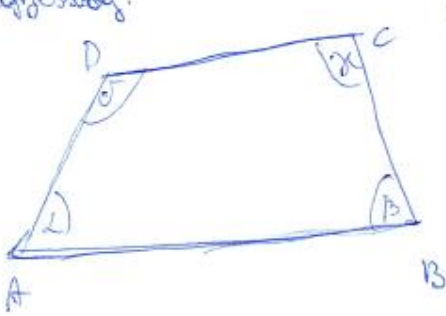
Bizonyítsuk be, hogy egy négyszögben nem lehet 4 hegyesszög

mivel a négyszögben lévő szögek összege 360° és a hegyesszög kisebb mint 90°
 így 90° -nál kisebb szög szorozva 4-gyel az nem fogja elérni a 360° -t

4-34. ábra: Egy szükséges indirekt bizonyítás (Tanuló_9_4)

Tanuló_20_3 általánosítható példával bizonyított (lásd a Stylianides-féle keretrendszert) (4-35. ábra).

Bizonyítsuk be, hogy egy négyszögben nem lehet 4 hegyesszög.



$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

Legyen fel tételekkel működő
 hogy mond a 4x
 hegyesszög.

~~Legyen~~
 a legnagyobb hegyesszög
 a $89,9\dots$ de mivel
 90° és ha valahányszor
 ezt hegyesszög van egy
 tételekkel az 360°
 az az a $4 \cdot 90^\circ$, de mivel
 a legnagyobb hegyesszög
 esetében nem egyenlő
 szög sem lehet el a
 90° -ot ezért lehet
 lenni az az összegük
 360° -t legrosszabb. Tehát
 minimum 1 derékszög
 kell lenni vagy háromszög
 kell lennie lennie.

$4 \cdot 89,9\dots < 360^\circ$

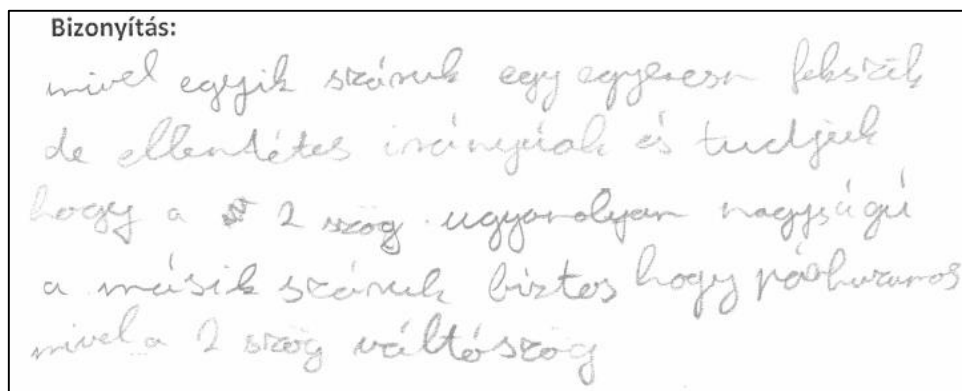
↓

az indirekt állítás hamis,
 az állítás igaz.

4-35. ábra: Általánosítható példa (Tanuló_20_3)

Tanuló_20_3 a tanórán elhangzott módszert ugyan elsajátította, viszont az érvelése során az általános fogalmakat még objektumokhoz köti. Egyrészt a hegyesszöget valamilyen értékkel párosítja, másrészt az indoklásában speciális négyszöget említ.

Rátérve az első feladat megoldására, megállapítható, hogy minden tanuló helyesen nevezte meg, hogy a jelölt két szög váltószögpárt alkot. A feladat nehézsége abban rejlett, hogy a diákoknak a váltószögek definícióját világosan kellett ismerni. Ezt nagyon jól példázza Tanuló_9_4 megoldása (4-36. ábra).

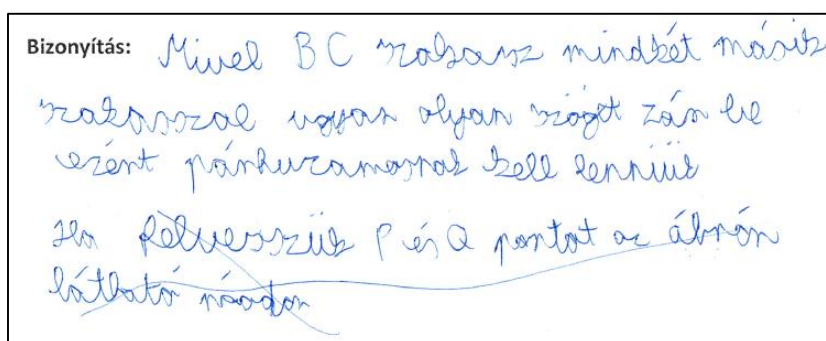


4-36. ábra: A váltószög fogalmának zavara (Tanuló_9_4)

Tanuló_9_4 érvelési láncá szerint mivel a két szög egyenlő nagyságú, valamint egy-egy szögszárak párhuzamos és ellentétes irányú, így a két szög váltószög, azaz $AB \parallel CD$.

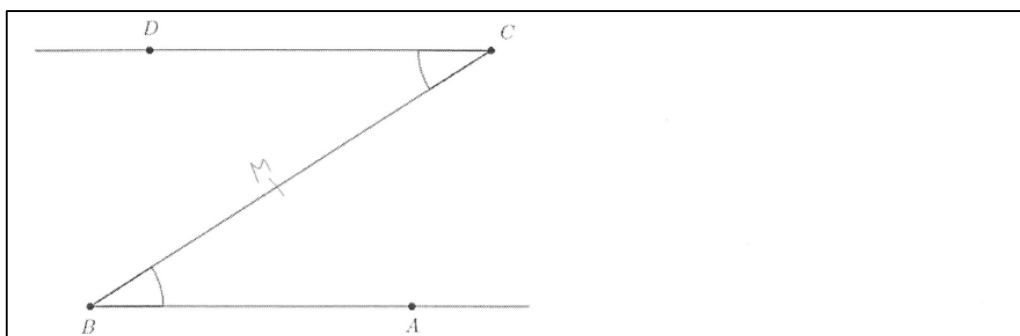
Azonban nem a váltószög tényének megléte vonja maga után az adott szögszárak párhuzamoságát, hanem pont fordítva. Éppen azt kellett volna belátni, hogy az illető szögszárak párhuzamosak, ami maga után vonta volna, hogy az illető szögek váltószögek. A diák a feltételt és a következményt felcserélte egymással, valószínűleg azért, mert benne az, hogy két szög váltószögpárt alkot, elsősorban azzal kapcsolódott össze, hogy a két szög egyenlő nagyságú. Ezt a gondolatmenetet Tanuló_9_4-en kívül még öt diák alkalmazta.

Tanuló_8_3 nem támasztotta alá semmilyen érveléssel a következtetését (4-37. ábra).



4-37. ábra: „Érvelés” érvek nélkül (Tanuló_8_3)

Tanuló_7_3 ugyanakkor helyesen bizonyította, a pont körüli forgatásnak az általános iskolában megismert szögtartó tulajdonságát felhasználva (4-38. ábra).



Tudjuk, hogy $\angle ABC = \angle BCD$.

Mutasd meg, hogy ekkor AB párhuzamos CD -vel, azaz az $\angle ABC$ és $\angle BCD$ szögek valtozozok (írd ide, hogy milyen szögek)!

Bizonyítás:

~~$\angle ABC$ és $\angle BCD$ BC és CB oldalaival egy egyenesen fekszenek $\Rightarrow BC \parallel CB$~~

~~Ahhoz, hogy $\angle ABC$ egyenlő nagyságú~~

Tegyük fel, hogy $CD \nparallel AB$. BC egyenesen fekszik egy-egy szögcsúcson $\Rightarrow$ Ha felvesszük BC felezőpontját és MC országot BM -re forgatjuk, akkor $C=B$ és ha $BA \nparallel DC$, akkor így $\angle ABC \neq \angle BCD \Rightarrow AB$ szövegileg párhuzamos CD -vel $\square$

4-38. ábra: Megoldás forgatással (Tanuló_7_3)

Ez a bizonyítás Tanuló_7_3 érett matematikai gondolkodására utal, mivel jól példázza, hogy a diák képes volt elszakadni a tanórán éppen tanult bizonyítási módszertől, és a korábbi ismereteire alapozva megfelelő módon tudta kiválasztani a sikeres érveléshez vezető utat.

Korábban említettük, a tanmenet által előírt dolgozatokat is úgy terveztük meg, hogy azok beilleszkedjenek a fejlesztő tanítási kísérletbe. Az előzőekben már tárgyalt, a Pitagorasz-tétel témakörét lezáró, a tizenkilencedik tanórán megíratott dolgozat tartalmazott indirekt úton megoldható feladatot is. Nevezetesen a harmadik példát, mely az alábbi volt.

Mutasd meg, hogy a $3, 2n, 5n$ számok nem lehetnek egy háromszög oldalainak mérőszámai, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!

A bizonyítás a háromszög-egyenlőtlenségen múlik, amire egyetlen diákot leszámítva minden tanuló rájött. Hat tanulónak sikerült végrehajtania az érvelést, de közülük egyetlen diák (Tanuló_7_3) volt csupán, aki explicitre odaírta, hogy indirekt módon okoskodott (4-39. ábra).

3. Mutasd meg, hogy a $3, 2n, 5n$ számok nem lehetnek egy háromszög oldalainak mérőszámai, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!

feltétel: $n \in \mathbb{Z}^+$ Tegyük fel indirekt módon, hogy a Δ oldalai lehetnek $3, 2n, 5n$

egyenlőtlenség értelmezésénél:

$5n + 2n > 3 \rightarrow 7n > 3 \rightarrow n > \frac{3}{7}$

$5n + 3 > 2n \rightarrow 3 > -3n \rightarrow -1 < n$

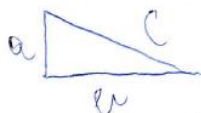
$2n + 3 > 5n \rightarrow 3 > 3n \rightarrow 1 > n$

$1 > n > \frac{3}{7} \Rightarrow n$ nem egész szám, így a feltétel nem teljesül $\Rightarrow$ az állítás ~~hamis~~ indirekt feltétele hamis $\Rightarrow$ az állítás igaz. $\square$

4-39. ábra: Indirekt bizonyítás és háromszög-egyenlőtlenség (Tanuló_7_3)

Több hiányos megoldás született, amelyek között egy adott probléma öt diák esetében is fellépett. Nevezetesen az, hogy a tanulók belátták „kicsi” n -ekre ($n = 1, 2$) az állítást, de azt nem indokolták kellőképpen, hogy az n növekedésével a feladat állítása ugyanúgy érvényben marad. A Stylianides-féle keretrendszer terminológiájával élve a diákok bizonyítása tapasztalati érvelést jelentett. Egy ilyen indoklást láthatunk Tanuló_8_3 esetében (4-40. ábra).

3. Mutasd meg, hogy a $3, 2n, 5n$ számok nem lehetnek egy háromszög oldalainak mérőszámai, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!



Nem lehetnek mert n minimum egy és az az azt jelenti hogy az a és b oldal összege 5 lesz és a másik két oldal összege is 5 ami nem lehet a háromszög oldalainak mert nagyobb az n -eknél nagyon így adódik

4-40. ábra: Egy tipikus hiányos indoklás (Tanuló_8_3)

A diák érezte ugyan a helyes érvelés irányát, de azzal még nem volt tisztában, hogy az általa hivatkozott analógia nem állja meg a helyét; ahogy ő fogalmazott, „nagyobb n -eknél” az alkalmazott érvelése módosításra szorul.

A feladat nehézségét fokozta, hogy a diákok korábban még nem találkoztak a teljes indukció módszerével, így a végtelen sok esetre megfogalmazott feladat különösen szokatlan lehetett számukra. Ez a példa tehát természetes módon felvetette egy újabb bizonyítási módszer csíráját, a teljes indukcióét, ami azonban nem képezi a kilencedikes tananyag részét.

Nemcsak a tanórákon, hanem a matematikaversenyeken is gyakran kell a diákoknak megmutatniuk, hogy a sík bizonyos pontjai adott speciális mértani helyzetűek. Ebben az esetben egyrészt be kell látni, hogy az adott pontok valóban a megadott mértani hely elemei, de azt is igazolni kell, hogy a többi síkbeli pont nem az illető mértani helyen van. Ez utóbbinak a megmutatása történhet indirekt okoskodással. Gyakori hiányosság, hogy a bizonyítás második részéről megfélekednek a tanulók. Ezzel a problémával találkoztak a diákok a huszonhetedik, illetve a harmincadik tanítási órán, amikor a szakaszfelező-merőleget, illetve a szögfelezőt tárgyaltuk.

A szakaszfelező-merőleges definíciója magyarázatra szorult, mivel a diákok ezt azzal párosították, hogy azon pontok halmaza a síkon, amelyek egyenlő távolságra vannak az alapul vett szakasz végpontjaitól. Az egyik ötödikeseknek készült tankönyvben a szakaszfelező-merőleges az alábbi módon kerül szóba (Czeplédy, Czeplédy, Hajdu, & Zankó, 2001, old.: 164): „Az A és B ponttól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a síkban az AB szakasz felezőmerőlegese.” Megbeszéltük, hogy ez a szakaszfelező-merőlegesnek nem a definíciója, hanem a karakteres tulajdonsága, így bizonyítást igényel.

Azt, hogy a szakaszfelező-merőleges minden pontja egyenlő távolságra van a tekintett szakasz végpontjaitól, a diákok kétféleképpen is belátták, először háromszögek egybevágóságára, másodszer pedig Pitagorasz tételére hivatkozva. Sokkal fontosabb momentumnak értékeljük ezen feladat kapcsán, hogy a diákok szembesültek azzal, hogy egy számukra eddig iskolai axiómának tartott tényből bizonyítandó probléma lett. Az pedig, hogy azt is meg kell mutatni, hogy a szakaszfelezőn kívüli pontok nem teljesítik az adott feltételt, csak tanári rávezetés után alakult ki a diákokban, ami érthető, hiszen korábban még nem találkoztak hasonló mértani helyes problémával. Viszont ezek után az indirekt bizonyítás mint módszer már magától adódott a tanulók számára, Tanuló_3_4 feltette, hogy egy a szakaszfelező-merőlegesen kívüli tetszőleges pont is egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, majd ellentmondásra jutott.

A diákok számára világos volt, hogy voltaképpen két állítást láttunk be. Egyrészt megmutattuk, hogy a szakaszfelező-merőleges pontjai egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól, másrészt a sík többi pontjára ez nem teljesül. A geometriai gondolkodás fejlesztése végett arra kértem őket, hogy a két állítást fogalmazzák meg egyetlen állítás formájában. Ezt közösen meg is tették: „A szakasz végpontjaitól csakis a szakaszfelező-merőleges pontjai vannak egyenlő távolságra.”

A harmincadik tanítási órán a szögfelező kapcsán már szinte automatikusan jöttek a fent leírt gondolatok, köszönhetően annak, hogy a szakaszfelező-merőleges esetét elég hosszasan és részletesen tárgyaltuk. Ez a tanulók analógián alapuló gondolkodását mutatja.

Az indirekt bizonyítási módszer kapcsán elmondhatjuk a tapasztalataink alapján, hogy érdemes egyszerű feladatokon keresztül bevezetni, és fontos, hogy időről időre a tanórák része legyen. Úgy gondoljuk, továbbá, hogy nem szerencsés, ha a diákok csak egy-egy tankönyvi nevesített tétel megfordítása kapcsán találkoznak ezzel a bizonyítási móddal. Nem véletlen, hogy Ambrus (1995) is kiemelt módon foglalkozik az indirekt bizonyítások problémakörével. Mindezeket túl, itt is nyomatékosan előjött az állítások szerkezetének pontos értelmezése.

4.3.3 Más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása

Természetesen minden tanórán az az egyik fő célkitűzés, hogy a tanulók értsék meg a tanár, valamint a többi diák gondolatmenetét. Elmondhatjuk, hogy ez a szempont minden fejlesztő tanórán jelen volt. A most következőkben olyan feladatokról lesz szó, melyek esetében célszerűen figyeltünk erre.

Úgy véljük, hogy a diákok bizonyítási képességének a fejlesztésére szolgál, ha egyrészt

- a társaik által elmondott bizonyítást nemcsak megértik, hanem megpróbálják azt saját maguk is reprodukálni, másrészt
- teljesen önállóan dolgoznak fel írott formában lévő, mások által adott bizonyításokat, amik akár három lépésnél is több érvelési lépésből állnak.

Az előbbi gyakori eleme volt a fejlesztő tanóráknak, ahogy azt láttuk a fejlesztő kísérlet első fázisa harmadik (videós) tanóráján is. A második módszerre célirányosan a tizenötödik és a tizenhatodik tanórán került sor. A tanórák előzménye a Pitagorasz-tétel algebrai, illetve geometriai alakja volt, továbbá megbeszélésre került a tétel „szokásos” tankönyvi bizonyítása (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, & Vincze, 2015, old.: 136).

A tizenötödik tanórán a csoportot négy négyfős és egy háromfős kisebb csoportra osztottuk (a csoport huszonegy tanulója közül tizenkilenc volt jelen). Mindegyik kapott egy-egy angol nyelvű bizonyítást a Pitagorasz-tételre (minden csoport más-más bizonyítást), amit önállóan kellett feldolgozniuk (F. melléklet). Az esetleges nyelvi nehézségek leküzdésére tanári segítséget adtam, továbbá használhattak internetes szótárt.

A feladatok a Pitagorasz-tételnek százegy bizonyítását tárgyaló internetes forrásból származtak.⁵ Csak olyan bizonyítás feldolgozását kértük a diákoktól, amelynek megértéséhez minden eszköznek a birtokában voltak.

Miután megbeszélték egymással a csoportok tagjai a megoldásokat, feladatonként haladva a csoport egy-egy tagja a táblánál prezentálta a bizonyítást. A különböző bizonyítások elemzése azon túl, hogy megkövetelte a diákoktól minden egyes lépés alapos végiggondolását, arra is

⁵ Alexander Bogomolny: Pythagorean Theorem (URL: <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/>, utolsó letöltés: 2020. 09. 05.)

kiválóan alkalmas volt, hogy új megoldási ötleteket tanuljanak (forgatás, darabolás). Ezt elmélyítendő, a következő tanítási órára minden diáknak el kellett készítenie a végleges változatát annak a bizonyításnak, amit eredetileg feladatul kapott. Ezáltal a területdarabolással történő bizonyítás is világossá vált számukra, ami a tanórán még gondot okozott (F. melléklet, 4. bizonyítás). A 4-41. ábra Tanuló_3_4 munkáját láthatjuk. Az érvelés minden részletre kitérő, lépései világosak, átgondoltak.

$T = b^2$

Felveszük egy derékszögű háromszöget (ABC), melynek befogói a és b , átfogója pedig c . A háromszög köré rajzolok egy b oldalú négyzetet az ábrán látható módon. Az ABC háromszöget elforgatom a C csúcsa körül 90° -kal, így az alábbi négyszöget kapom:

Ennek a négyszögnek a területe is b^2 , hiszen a b oldalú négyzetből ugyanakkora területet ($\frac{a \cdot b}{2}$) távolítottunk el, mint amennyit hozzáadtunk.

A $BDB'C$ négyszöget fel tudjuk bontani két derékszögű háromszögre:

A $B'CBA$ is 90° , hiszen az eredeti ABC háromszöget 90° -kal forgattuk el, így a CB és a CB' oldalak 90° -os szöget zárnak közre.

A $BB'C$ háromszög területe: $\frac{c^2}{2}$
A BDB' háromszög területe: $\frac{(b-a)(b+b)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$
A két terület összege egyenlő a b^2 -tel, tehát:

$$\frac{c^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} = b^2 \quad / \cdot 2$$

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2b^2 \quad / - b^2$$

$$c^2 - a^2 = b^2 \quad / + a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

↓
Ez a Pitagorasz-tétel, amit meg szeretnénk volna kapni.

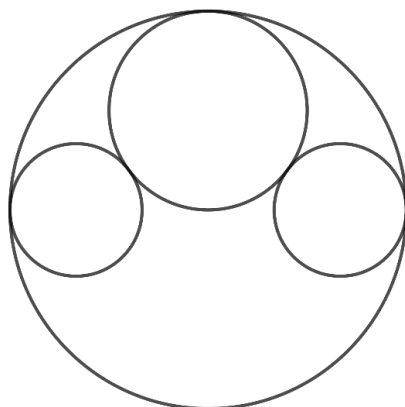
4-41. ábra: A Pitagorasz-tétel egy bizonyítása angol nyelvű szakirodalom alapján (Tanuló_3_4)

Úgy gondoljuk, hogy a más által adott bizonyítások önálló feldolgozása, valamint az érvelési láncok prezentálása hasznos eszköz a bizonyítási képesség fejlesztése terén. Egyrészt új eljárásokat sajátíthat el közben a tanuló, másrészt, miközben megosztja másokkal a gondolatait, kénytelen az érvelés minden lépését alaposan átgondolni, ezáltal a matematikai nyelvhasználat, valamint a szóbeli kommunikációja is fejlődik.

4.3.4 Megtévészítő ábra alkalmazása

Az előteszt harmadik feladata kapcsán már láthattuk, hogy a diákok egy jó része (kilencen) olyan információt is felhasznált a megoldása során, melyet pusztán az ábra sugallt a számára. A tizenkilencedik tanítási órán megírt Pitagorasz-tételes dolgozat alkalmas volt arra, hogy ismét megvizsgáljuk ezt a jelenséget. Így szólt ugyanis az ötödik feladat:

Az ábrán látható legnagyobb kör sugara R , a két kicsié ennek harmada. A két kis kör középpontját összekötő egyenes átmegy a legnagyobb kör középpontján. Bizonyítsd be, hogy a középső kör sugara $\frac{R}{2}$!



Az esetleges félreértést nyilván az okozhatta, hogy amennyiben összekötjük a két legkisebb kör középpontját, akkor a szakasz érinteni fogja a középső kört, vagyis ez utóbbi kör áthalad a nagy kör középpontján. Csakhogy ez ekvivalens a bizonyítandó ténnyel, vagyis az érvelés során nem használható fel. A huszonegy diák közül tizenhét esett ebbe a hibába (4-42. ábra).

$$\left(\frac{R}{3} + x\right)^2 = \left(R - \frac{R}{3}\right)^2 + x^2$$

$$\frac{R^2}{9} + 2 \cdot \frac{R}{3} \cdot x + \cancel{x^2} = R^2 - 2 \cdot \frac{R^2}{3} + \frac{R^2}{9} + \cancel{x^2} \quad | \cdot 9$$

$$R^2 + 6Rx = 9R^2 - 6R^2 + R^2$$

$$R^2 + 6Rx = 9R^2 - 5R^2 \quad | : R$$

$$R + 6x = 9R - 5R$$

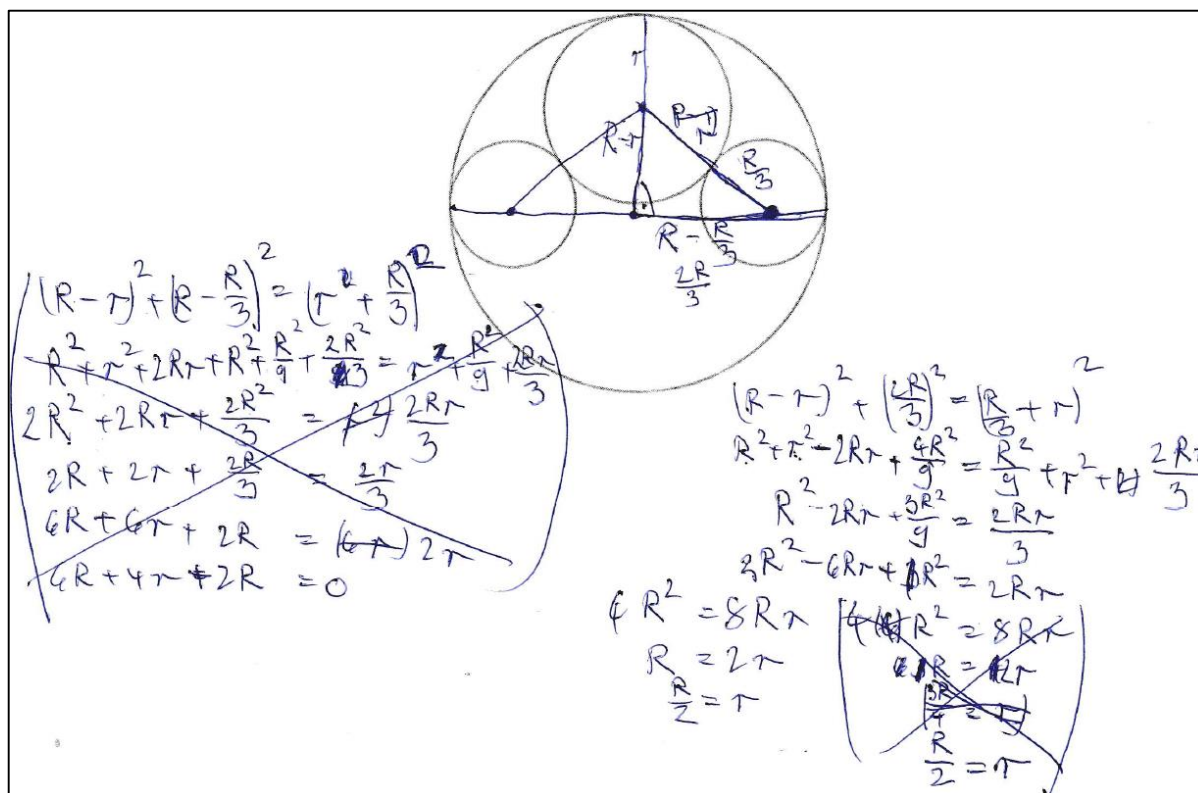
$$R + 6x = 4R \quad | - R$$

$$6x = 3R \quad | : 6$$

$$x = \frac{R}{2}$$

4-42. ábra: Egy tipikus megoldás, mely felhasználja a bizonyítandó ténytet (Tanuló_6_4)

Mindössze két diák (Tanuló_4_4 és Tanuló_10_4) volt az, akiket az ábra nem befolyásolt (4-43. ábra).



4-43. ábra: Tanuló_4_4-et nem tévesztette meg az ábra

A tapasztalataink azt mutatják, hogy a megtévesztő ábra szerepe kiemelt fontosságú a geometriai bizonyítások terén, érdemes a tanórákon időt szánni rá, hiszen – mint láttuk – az általunk vizsgált célcsoport tanulóiinak többsége éppen az ábra nem megfelelő értelmezése miatt volt képtelen helyesen érvelni. A példánk esetén éppen a bizonyítandó tény volt az, amit a diákok az ábra sugallatára felhasználtak a megoldásaik során. Ebben a szituációban ismét felvetődött tehát az állítások szerkezetének helyes értelmezése.

4.3.5 Folyamatábra alkalmazása

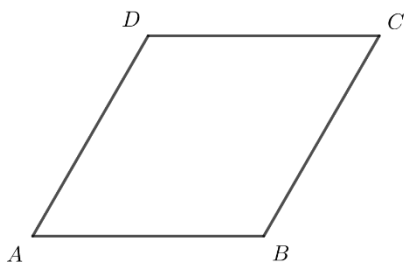
Tapasztalataink szerint a diákok sok esetben birtokában vannak az érvelési lánc lépéseinek, csak nem tudják azt megfelelő sorrendben felfűzni, leírni a gondolatmenetet, teljessé téve a bizonyítást. A fejlesztő tanítási kísérlet során is előjött ez a jelenség, például az első fázis videóval rögzített tanítási óráinak harmadik feladata kapcsán (4-18. ábra). Ennek fejlesztése érdekében hasznosnak véltük, hogy a fejlesztő kísérlet részeként egy-egy bizonyítás szerkezetét ún. folyamatábrával szemléltessük, ami voltaképpen egy irányított gráfot jelent az alábbiak szerint:

- az egyes tények – legyenek azok feltételek, alapigazságok, vagy a bizonyítás során igazolást nyert megállapítások – alkotják a gráf pontjait;
- a gráf irányított élei szemléltetik az egyes tények közötti implikációt.

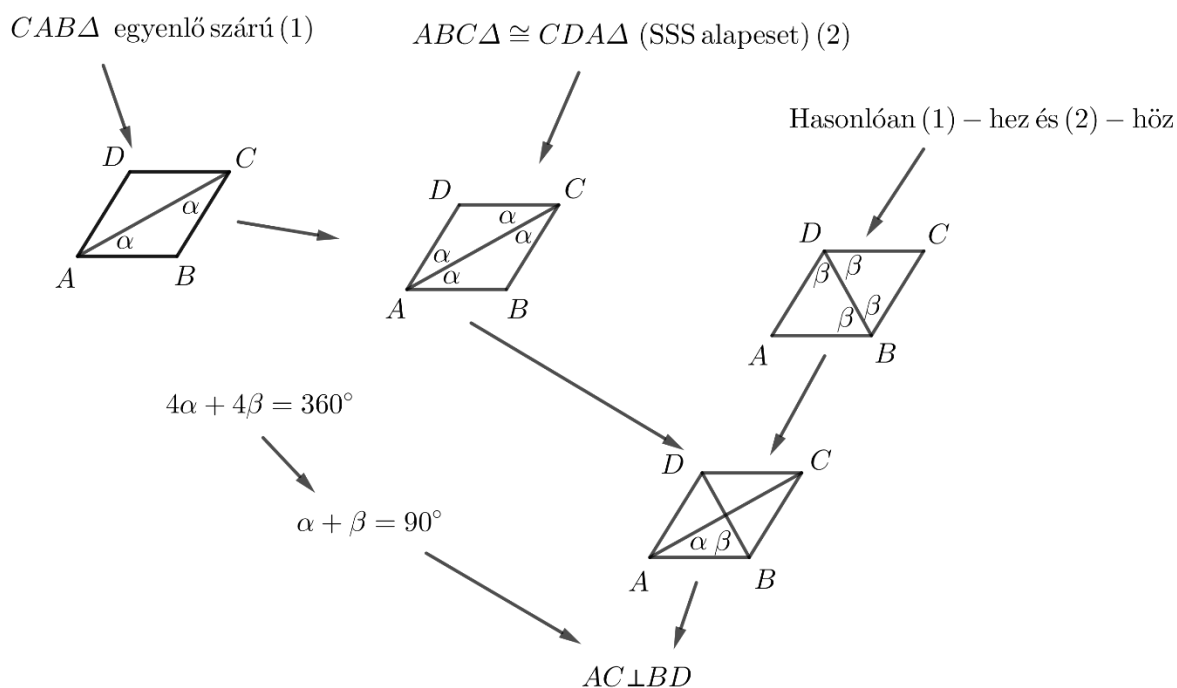
Ennek a módszernek az első alkalommal történő használatára a huszonegyedik tanítási órán került sor. Ezen a tanórán az előzőleg megírt, és a már korábban elemzett, számonkérés feladatainak a megoldásait beszéltük meg. A folyamatábrát az alábbi feladat kapcsán alkalmaztuk:

Igazold, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

Először is alapul vettünk egy $ABCD$ rombuszt:



Ezután pedig Tanuló_14_3 táblai munkája alapján elkészítettük a bizonyítást szemléltető folyamatábrát (4-44. ábra).



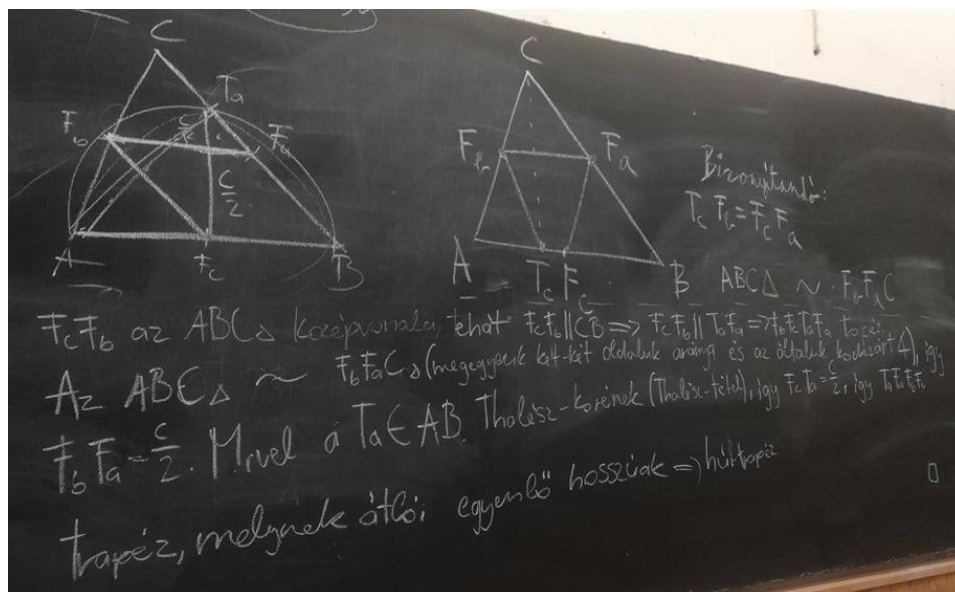
4-44. ábra: Folyamatábra

Azon túl, hogy a gondolatmenet szerkezete így világossá vált a tanulók számára, rávilágított azokra a tényekre is, melyek végül nem képezték a végleges bizonyítás részét. Tanuló_14_3 ugyanis egyrészt hivatkozott arra, hogy a rombusz átlói az oldalakkal váltószögpárokat képeznek, másrészt pedig belátta, hogy a rombuszt az átlója két egybevágó háromszögre bontja. Először mindkét tényt jelöltük a folyamatábrán, majd Tanuló_11_3 jelezte, hogy a váltószögek ténye közvetlenül adódik abból, hogy a megfelelő háromszögek egybevágók, vagyis elhagyható a bizonyításból. Így ezt töröltük a folyamatábrából. Miután minden lépés tisztán kirajzolódott a diákok számára, közösen megbeszélve megadtuk a bizonyítást a szokott szöveges formában is.

A negyvennegyedik tanítási órán szintén előkerült a folyamatábra módszere a következő feladat kapcsán:

Mutassuk meg, hogy egy háromszög oldalfelező pontjai, valamint az egyik magasságtalp-pontja húrtrapéz határoz meg, ha ez a pont négy különböző pont.

Tanuló_3_4 oldotta meg a feladatot a táblánál (4-45. ábra).

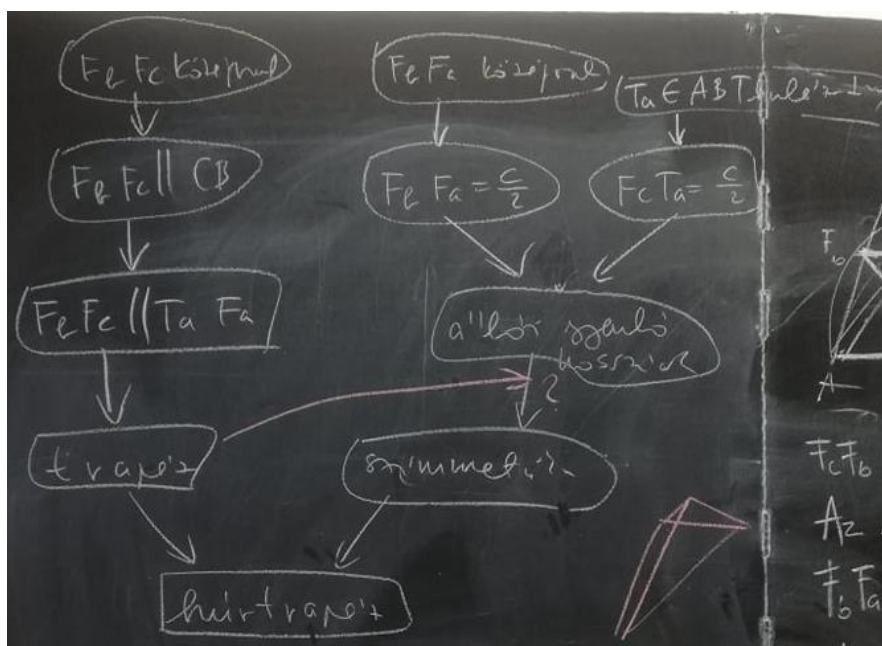


4-45. ábra: Tanuló_3_4 táblai munkája

Tanuló_3_4 gondolatmenete az alábbi volt:

- Belátta, hogy az $F_c F_b T_a F_a$ négyszög trapéz, felhasználva, hogy egy háromszög középvonala párhuzamos a háromszög megfelelő oldalával.
- Megmutatta, hogy $F_b F_a = \frac{c}{2}$, hivatkozván az ABC és az $F_b F_a C$ háromszögek hasonlóságára.
- Igazolta, hogy $F_c T_a = \frac{c}{2}$, hiszen a T_a pont eleme az AB szakasz Thalész-körének.
- Levonta a következtetést, hogy $F_c F_b T_a F_a$ szimmetrikus trapéz, hiszen az átlói egyenlő hosszúságúak. Ez pedig éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

Ezek után a csoporttal közösen elkészítettük Tanuló_3_4 bizonyításának a folyamatábráját (4-46. ábra).



4-46. ábra: Tanuló_3_4 bizonyításának folyamatábrája

A folyamatábra alkalmazásának újabb előnye nyilvánult meg akkor, amikor az irányított éleket rajzoltuk, és még egyszer alaposan átgondoltuk az adott lépések helyességét. Találtunk ugyanis

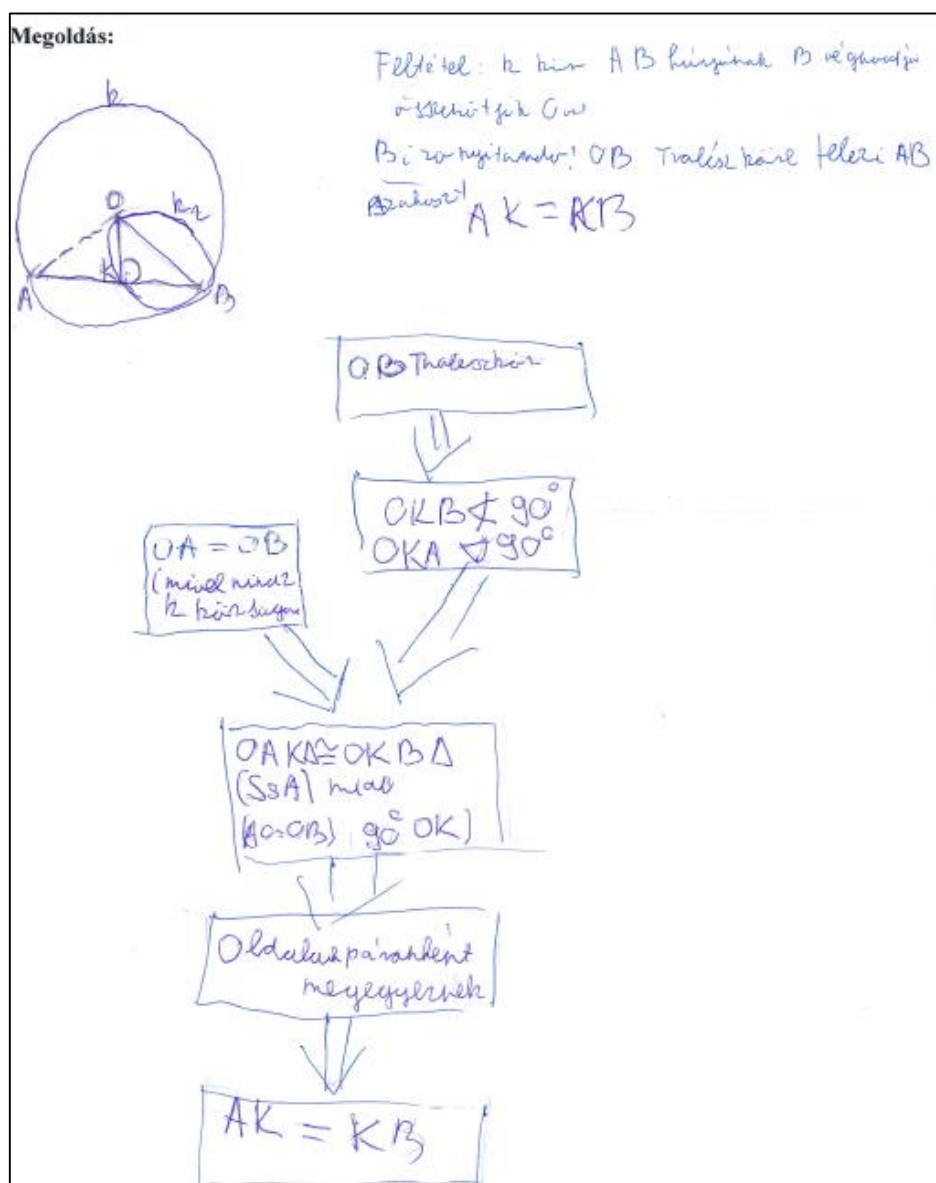
egy nem teljes világos következtetést: ha egy trapéz átlói egyenlő hosszúságúak, akkor a trapéz szimmetrikus (az ábrán kérdőjellel van jelezve). Ezt még háromszögek egybevágóságával igazoltuk közösen, teljessé téve ezzel a bizonyítást.

A tanítási kísérlet folyamán még több alkalommal alkalmaztuk a módszert, hol házi feladat formájában, hol pedig magán a tanórán. A negyvenötödik tanítási órán kimondottan ezt az eszközt céloztuk meg az alábbi feladaton keresztül:

Egy kör valamely húrjának egyik végpontját összekötöttük a kör középpontjával. Bizonyítsd be, hogy az így kapott sugár Thalész-köre felezi a húr!

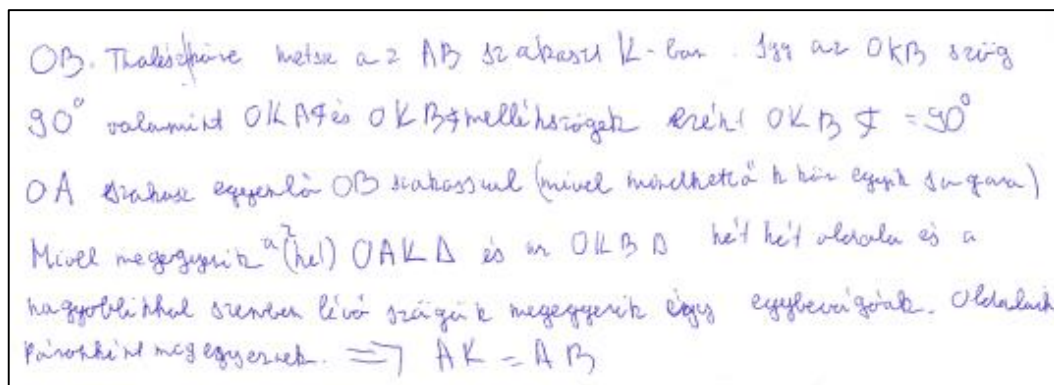
Minden tanulónak el kellett készítenie a bizonyítás logikai vázát folyamatábra segítségével, majd ez alapján kellett leírniuk a gondolatmenetüket. Az óra hasonlóan zajlott, mint az első fejlesztő tanóra, vagyis a diákok önállóan dolgoztak, a padtársak más-más színű tollal. Miután mindketten befejezték a feladatot, megbeszélték egymással a megoldásaikat.

A feladat nem okozott gondot a tanulóknak. Néhány diák indirekt úton bizonyított, de a többség a direkt módszert választotta (4-47. ábra).



4-47. ábra: Tanuló_17_4 folyamatábrája

Tanuló_17_4-nek nemcsak a folyamatábrája volt hibátlan, hanem ez alapján a bizonyítás szöveges leírása is (4-48. ábra).



4-48. ábra: Bizonyítás leírása folyamatábra alapján (Tanuló_17_4)

A tapasztalataink azt mutatják, hogy a folyamatábra alkalmazása a bizonyítási képesség fejlesztése terén segítségünkre lehet, hiszen jól kiemeli az adott állításhoz kapcsolódó feltétel(ek)e(t), továbbá úgy véljük, hogy segítségével a diákok világosabban látják egy-egy bizonyítás szerkezetét, felépítését. Mindezeket túl nagyon jól rávilágít az érvelésnek egy-egy olyan lépésére, amely esetleg igaz ugyan, de nincs alátámasztva kellőképpen.

4.4. A fejlesztő tanítási kísérlet eredményességének a vizsgálata

Ebben az alfejezetben az alábbi kutatási kérdésre kerestük a választ:

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

A fő kutatási kérdést a fejlesztő tanórák tükrében az alábbiak szerint finomítottuk:

K5-1: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az állítások szerkezetének elemzése tekintetében?

K5-2: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a megtevéstő ábrákkal kapcsolatban?

K5-3: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a bizonyítások konstruálására vonatkozóan?

K5-4: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az írásbeli kommunikáció terén?

A feltett kérdésekre a válaszokat három teszt, a köztes teszt, az utóteszt és a késleltetett teszt elemzése révén kerestük.

4.4.1 Köztes teszt

A fejlesztő kísérlet második tesztjét, a köztes tesztet 2019. február 19-én, a negyvenharmadik tanítási órán írták meg a diákok (I. melléklet). Arra voltunk kíváncsiak, hogy az eddigi fejlesztések tükrében mit válaszolhatunk a **K5-1**, **K5-3** és **K5-4** kutatási kérdésekre.

A köztes teszt egyetlen állítást tartalmazott, illetve ehhez kapcsolódóan öt feladatot:

„Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé kört írunk. Bizonyítsd be, hogy a kapott kör felezi a háromszög alapját!

- Készíts jelölésekkel ellátott ábrát!
- Írd le a jelöléseiddel, hogy mi a feltevés és mi a bizonyítandó!
- Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” alakban!
- Végezd el a bizonyítást! Részletesen indokold!
- Írd le az állítás megfordítását! Ezt nem kell bizonyítanod, pusztán kimondanod.”

Nézzük sorban az egyes részfeladatok eredményét.

Az állítás szerkezetének megállapítása

Két megoldás is elfogadható.

1. megoldás:

Feltétel: Adott egy egyenlő szárú háromszög.

Bizonyítandó: A háromszög egyik szárára (mint átmérő fölé) rajzolt kör felezi a háromszög alapját.

2. megoldás:

Feltétel: Adott egy egyenlő szárú háromszög, valamint az egyik szárára (mint átmérő fölé) rajzolt kör.

Bizonyítandó: A kör felezi a háromszög alapját.

Nézzük először a feltétel kiolvasásának a statisztikáját (21. táblázat).

	Helyesen adta meg a feltételt	Apróbb pontatlanságtól eltekintve jól adta meg a feltételt
Diákok száma	17	5

21. táblázat: A feltétel kiolvasása (köztes teszt)

Az apróbb pontatlanságot elkövető öt diák közül

- hárman nem tettek említést arról, hogy az alapul vett háromszög egyenlő szárú;
- ketten nem mondták ki expliciten, hogy felvettünk egy kört (a bizonyítandó részben sem).

Ezeket apró hiányosságnak értékeljük, hiszen az elkészített ábrákkal együtt az adott diákok a feltételt összességében helyesen adták meg.

A bizonyítandó kiolvasása még ennél is jobban sikerült (22. táblázat).

	Helyesen oldotta meg	Nem oldotta meg helyesen
Diákok száma	22	0

22. táblázat: A bizonyítandó kiolvasása (köztes teszt)

Emlékeztetőül, az előtesztben az első feladat volt az, amelyben az állítások szerkezetének a vizsgálatát mértük. Érdekes az ott kapott eredményekkel összevetni a köztes teszt esetén kapott adatokat (23. táblázat).

	Helyesen oldotta meg	Nem oldotta meg helyesen
Előteszt első állítása (diákok száma)	6	16
Előteszt második állítása (diákok száma)	2	20
Köztes teszt (diákok száma)	17	5

23. táblázat: Az állítás szerkezetének vizsgálata az előteszt és a köztes teszt esetén

A köztes teszt esetén az az öt diák is, akinek nem sikerült a feladatot hibátlanul megoldania, nagyon közel állt a helyes megoldáshoz. Elmondhatjuk tehát, hogy ebben a vonatkozásban a tanulók nagy fejlődésen mentek keresztül.

Az állítás átfogalmazása „Ha... akkor...” alakba

Megoldásként az alábbi mondatot vártuk:

„Ha egy egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé kört írunk, akkor a kapott kör felezi a háromszög alapját!”

Mivel az előzőek szerint a tanulók döntő többsége helyesen értelmezte az állítás szerkezetét, így ez a részfeladat is kiválóan sikerült a diákoknak (24. táblázat).

	Helyesen oldotta meg	Majdnem helyesen oldotta meg
Diákok száma	21	1

24. táblázat: Az állítás átfogalmazása „Ha... akkor...” alakba (köztes teszt)

Egyetlen tanuló volt (Tanuló_5_4), aki nem oldotta meg a feladatot hibátlanul. Ő így fogalmazott: „Ha az „a” oldal a kör átmérője egy egyenlő szárú háromszögben, akkor a kör egyik pontja érinti az AB szakasz felezési pontját. (ábra)” A diák szándékosan írta oda, hogy „ábra”, ezzel utalva arra, hogy a mondanivalójához hozzávéve az ábráját lesz teljesen világos a megoldása.

A bizonyítás végrehajtása

A feladatot a tanulóknak kevesebb mint a fele volt képes hibátlanul megoldani (25. táblázat).

	Érvelési lánc helyes		Érvelése téves / hiányos		Üresen hagyta
	Thalész-tétellel	Másképp	Thalész-tétellel	Másképp	
Diákok száma	11	3	5	2	1

25. táblázat: A bizonyítás kivitelezése (köztes teszt)

Mintamegoldás helyett Tanuló_3_4 Thalész-tétellel történő megoldását mutatjuk be (4-49. ábra).

Megoldás.

b_1 Feltevés: Adott az ABC és k kör az ábrán látható módon.
 Bizonyítandó: $2DB = AB$

c_1 Ha adott egy egyenlő szárú háromszög és az egyik oldalnak a Thalész-kör, akkor a kör felezi a háromszög alapját.

d_1 Mivel DE Thalész-kör, így $CDB \angle = 90^\circ$ (Thalész-tétel miatt). Ebből következik, hogy $CD \angle$ is 90° , hiszen A, D és B egy egyenesen helyezkednek el, így $CDB \angle + CDA \angle = 180^\circ$
 $CDA \angle + 90^\circ = 180^\circ$
 $CDA \angle = 90^\circ$

Mivel $CDB \angle$ -nek és $CDA \angle$ -nek megegyezik két két oldala ($c; b$) és a nagyobbikkal szemben fekvő szöge (90°), így a két háromszög egybevágó (Ssz miatt). $\Rightarrow$ Oldalaik páronként megegyeznek $\Rightarrow b=b, c=c, (d=d) \rightarrow$ pont ezt akartuk belátni, hiszen:
 $d+d=a$ ($AD+DB=AB$)
 $2d=a$ ($2DB=AB$)
 $d=\frac{a}{2} \Rightarrow$ amit bizonyítani szerettünk volna.
 $(DB=\frac{a}{2})$

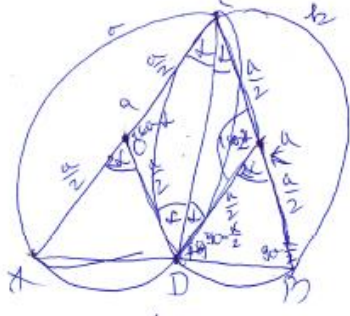
4-49. ábra: Megoldás Thalész tételével (Tanuló_3_4)

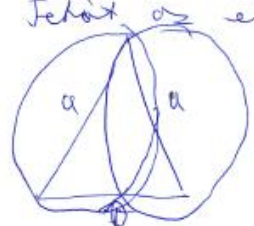
Tanuló_3_4 az alábbi eszközöket használta az érvelés során, amiket nem minden esetben nevezett meg expliciten.

- Hivatkozott Thalész tételére (emiat $\angle CDB = 90^\circ$).
- A $\angle CDA$ és $\angle CDB$ mellékszögek (amiből adódik, hogy $\angle CDA$ szintén derékszög).
- A SsA egybevágósági alapeset miatt $\triangle CDA \cong \triangle CDB$.
- A $\triangle CDA$ és a $\triangle CDB$ oldalai páronként egyenlő hosszúak, azaz $DA = DB$.

Tanuló_3_4 érvelésének minden lépése világos, megfelelő sorrendben követik egymást, teljessé téve ezzel a bizonyítást.

A tizennégy tanuló közül, akiknek sikerült az állítást belátniuk, tizenegyen Thalész tételére hivatkoztak, mint ahogy azt láttuk Tanuló_3_4 esetében is. Három diák (Tanuló_4_4, Tanuló_7_3, Tanuló_21_4) más eszközt választott. Közülük Tanuló_4_4 megoldását mutatjuk be, aki indirekt úton látta be az állítást. (4-50. ábra)





$\triangle ABC$ a $\triangle AC$ és BC
 (háromszög) közös körre írt
 körív középpontja O és K
 O középpontja AC és BC oldal
 felező pontján vannak (közép-
 tétel) középpontja O és K

Tegyük fel indirekt módon
 az állítás ellenét.

Legyen D az a pont ahol
 a két kör metsző. A körök
 sugara $\frac{a}{2}$ lesz mivel az átmérő
 a . Így az $\triangle KDO$ egyenlő
 oldalú háromszög az $\frac{a}{2}$ oldalú az
 egyenlő. $\angle AOD = \angle BOD = 180^\circ - \angle C$
 azaz $180^\circ - \angle C$. Ezért $\angle BOD = 180^\circ - \angle C$ és $\angle KOC = 180^\circ - \angle C$
 $2\angle C$. Így $\angle BDC = \angle C$. Ekkor az
 $\triangle ABC$ a szög $2\angle C + 90^\circ - \angle C + 90^\circ - \frac{\angle C}{2} + 90^\circ - \frac{\angle C}{2} = 180^\circ$

$360^\circ - 2\angle C = 180^\circ$
 $\angle C = 90^\circ$ ami lehetetlen

Tehát az indirekt feltétel nem teljesül.
 Tehát az eredeti állítás az állítás van.
 Így az eredeti állítás az állítás van.
 Így az eredeti állítás az állítás van.

4-50. ábra: Thalész tétele elrejtve (Tanuló_4_4)

Tanuló_4_4 tehát felvette mindkét szár Thalész-körét, amiknek az állítással ekvivalens módon az alapon kell metszeniük egymást (a C ponton túlmenően). A diák feltette ennek az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy a két kör nem az alapon metszi egymást. Ez az ötlet is kiváló, de az érvelés magyarázatra szorul, hiszen a Thalész-tétel nincs benne explicite megnevezve (ahogy azt a 4-50. ábra címe is jelzi). De hol is alkalmazta Tanuló_4_4 a Thalész-tételt, vagyis azt, hogy $BDA\angle = CDA\angle = 90^\circ$? Természetesen ott, ahol a szögekre vonatkozóan írt fel összefüggést:

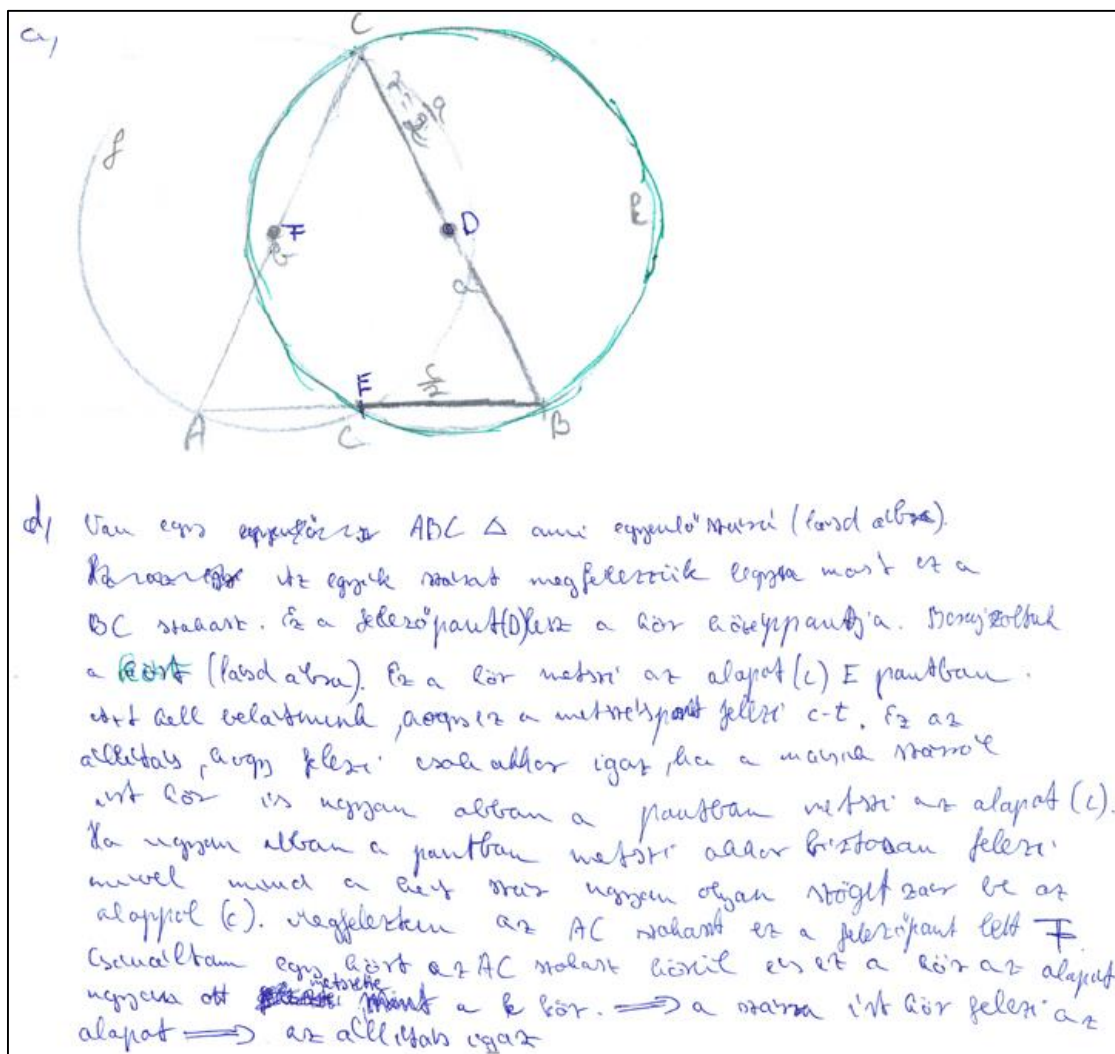
$$2\alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \frac{\beta}{2} + 90^\circ - \frac{\beta}{2} = 180^\circ.$$

Az ábrán ugyan nem jelölte, és explicite nem is írta le, de az egyenletben kétszer is szereplő $90^\circ - \alpha$ egyrészt az $ABD\angle$ -et, másrészt az $ACD\angle$ -et jelenti.

Figyelemreméltó ugyanakkor az, hogy a diák diszkussziót végzett (vizsgálta a D pont helyzetét), ami felmerült a fejlesztő tanórákon is.

Összesen nyolc diáknak nem sikerült a bizonyítást kiviteleznie, de – Tanuló_9_4 kivételével – mind megpróbálkozott az érveléssel. Számos oka volt annak, ami miatt a tanulók nem tudták az állítást bebizonyítani. Közülük hárman tipikusnak mondható hibát vétettek. Ezeket tárgyaljuk részletesebben.

Tanuló_20_3 ötlete hasonló Tanuló_4_4 ötletéhez, vagyis a bizonyítása annak a ténynek a belátásán alapul, hogy az egyenlő szárú háromszög két szárára rajzolt körök az alapon metszik egymást. Míg azonban Tanuló_4_4 megfelelő bizonyítási stratégiát választott (indirekt módszer), addig Tanuló_20_3 a szerkesztés eszközéhez nyúlt (4-51. ábra).



4-51. ábra: „Bizonyítás” szerkesztéssel (Tanuló_20_3)

Azt, hogy a két kör a háromszög alapján metszi egymást, Tanuló_20_3 semmiféle érveléssel nem támasztotta alá, pusztán a szerkesztés eredményére támaszkodott („Csináltam egy kört az AC szakasz körül és ez a kör az alapot ugyanott metszette, mint a k kör.”). A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisának videóval rögzített tanóráinak egyik tanulsága éppen az volt, hogy ezek az eljárások nem bizonyító erejűek bizonyos szituációkban. Világos, hogy Tanuló_20_3-nak még időre van szüksége ahhoz, hogy ne elégedjen meg az ábra által sugallt tényeknek az indoklás nélküli elfogadásával, ami alátámasztja a diák kezdeti hármasság van Hiele-szintjét.

Egy másik tipikus hibaforrást szemléltet Tanuló_1_4 megoldása (4-52. ábra).

Bizonyítás:

~~(A kör nem felel az alapot.)~~

Nevezünk el azt a pontot amelyben a kör metszi az alapot D pontnak.

$DO = AO$ mivel a kör sugarai.

~~(Mivel D felel az alapot ezért DA a Δ súlyvonal) és mivel egyenlő szárú háromszögről~~

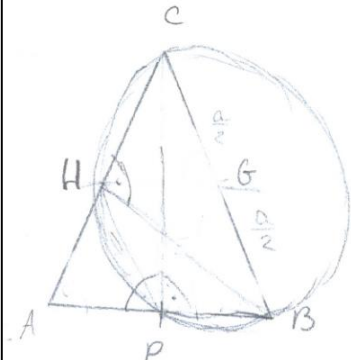
DA a Δ magassága mivel D felel az alapot és egyenlő szárú Δ -ról van szó.

O pont DA felelő merőlegesének egyik pontja és a magasság felelő merőlegese felel a szaraktól. $\square$

4-52. ábra: A bizonyítandó felhasználása (Tanuló_1_4)

Tanuló_1_4 az érvelés láncába beleillesztette a bizonyítandó tényt. Ugyanis a szár Thalész-körének és az alapnak a metszéspontját előbb elnevezte D -nek, majd egyszer csak kijelentette, hogy „mivel D felel az alapot”. De éppen ezt szeretne volna belátni.

A harmadik jelenség, amit megemlítünk, az, amikor a tanuló olyan következtetést von le, ami ugyan igaz, de vagy semmilyen érveléssel nem támasztja alá, vagy pedig nem kellőképpen indokolja. Ez utóbbi esettel találkozunk Tanuló_10_4 megoldásában (4-53. ábra).



Bizonyítás ~~BC~~ Tha

PC szakasz ~~és~~ merőleges AB -re a Thalész tétel miatt.

HB merőleges AC -re a Thalész tétel miatt. (lásd ábra)

~~$\triangle ACP \cong \triangle PCB$ mivel $\neq$ egy-egy oldal és a megfelelő~~

$\triangle ACP \cong \triangle PCB$ mivel egy-egy oldal és a megfelelő szög megegyezik $\Rightarrow AP = BP$

4-53. ábra: De miből következik? (Tanuló_10_4)

Tanuló_10_4 a Thalész-tételre helyesen utalva rájött, hogy az általa P -vel jelölt pontnál derékszögek képződnek. Majd ezek után az ACP és a PCB háromszögek egybevágóságát (ami voltaképpen ekvivalens a bizonyítandó ténnyel) a SAS vagy a SsA alapesetre vezette vissza, a pontos megfogalmazás hiánya miatt nem tudni, hogy pontosan melyikre. Ha az A -nál, illetve a B -nél lévő szögeket tekintette, akkor mindenképpen felhasználta a bizonyítandót, hiszen az ezeket a szögeket közrezáró oldalak éppen AP , illetve BP . Ha ellenben az ACP , valamint a BCP szögekre gondolt, akkor azok egyenlőségét viszont egyáltalán nem indokolta meg. Nem tudni tehát, hogy pontosan mire is támaszkodott Tanuló_10_4, de vagy elvi hibát vétett, vagy pedig több lépést átugrott a bizonyítása során. Ez az írásbeli kommunikációjának a hiányosságaira világít rá.

Az állítás megfordításának a megfogalmazása

Ez az egyetlen dolog, amit az előteszt során nem vizsgáltunk, ugyanis akkor még nem tartottuk elvárható tudásnak az állítások megfordításának az ismeretét.

Az $A \Rightarrow B$ szerkezetű állítás megfordítása bizonyos esetekben sok gondot okozhat a diákoknak. Szándékosan olyan állítás megfordítását kértük a tanulóktól, mely összetettségében nagyon hasonlít a 4.3.1. fejezetben taglalt Thalész-tételhez, aminek a megfordítása, mint azt láttuk, sok kérdőjelet von maga után. Ugyanis esetünkben az állítás szintén $(A_1 \wedge A_2) \Rightarrow B$ szerkezetűnek tekinthető, ahol

A_1 : Egy adott háromszög egyenlő szárú.

A_2 : Adott egy kör, mely az illető háromszög valamelyik szárának Thalész-köre.

B : A tekintett kör felezi az alapul vett háromszög alapját.

Az állításnak három megfordítása is elképzelhető aszerint, hogy az eredeti feltételek közül marad-e valamelyik és ha igen, melyik, a megfordítást jelentő állítás előtagjában (Ambrus, 1995).

A megfordítás első alakja: $B \Rightarrow (A_1 \wedge A_2)$

„Ha egy kör felezi egy háromszög valamelyik oldalát, akkor a háromszög egyenlő szárú és a kör a háromszög egyik oldalának Thalész-köre.” (Ez az állítás hamis.)

A megfordítás második alakja: $(A_1 \wedge B) \Rightarrow A_2$

„Ha egy kör felezi egy egyenlő szárú háromszög alapját, akkor ez a kör az illető egyenlő szárú háromszög valamelyik szárának Thalész-köre.” (Ez az állítás szintén hamis.)

A megfordítás harmadik alakja: $(A_2 \wedge B) \Rightarrow A_1$

„Ha egy háromszög valamelyik oldalának Thalész-köre felezi az illető háromszög egy további oldalát, akkor a háromszög egyenlő szárú.” (Ez az állítás igaz.)

A három megfordítás közül kettő azonnal cáfolható ellenpéldával, nyilvánvalóan hamis tényt takarnak. Ennek ellenére formailag mindkettő az eredeti állítás megfordítása. Valószínűleg az igaz tények megfogalmazásának a belső igénye az, ami miatt a harmadik megfordítást nevezhetnénk az állítás „valódi” megfordításának. Ugyanez a szituáció áll fenn a Thalész-tétel esetében is (Ambrus, 1995). Mindezekből jól látszik, hogy az állítások megfordításának, megfordíthatóságának fogalma korántsem egyértelmű.

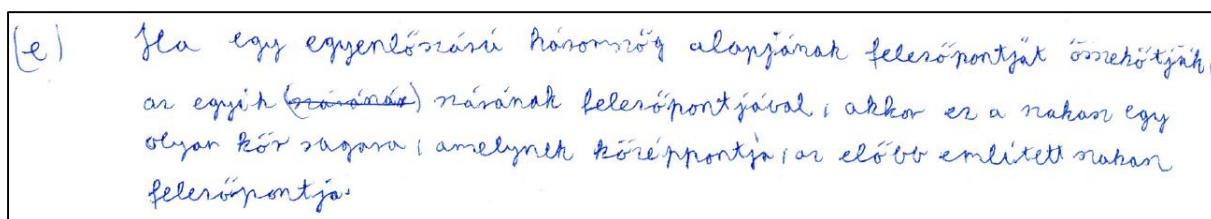
Nézzük ezek után a feladat megoldásainak a statisztikáját (26. táblázat).

	A lehetséges megfogalmazások „, alakját adta meg			Az eredeti állítást írta le	Egyéb	Nem válaszolt
	$B \Rightarrow (A_1 \wedge A_2)$	$(A_1 \wedge B) \Rightarrow A_2.$	$(A_2 \wedge B) \Rightarrow A_1$			
Diákok száma	2	1	12	4	1	2

26. táblázat: A megfordítás megfogalmazása (köztes teszt)

A tanulók közel kétharmadának sikerült az állítást megfordítania. Érdekes megfigyelni, hogy ezen diákoknak a négyötöde „az elvárt” választ adta meg, de volt 3 olyan tanuló is, aki a másik két megfordítást fogalmazta meg. A feladat tanulsága az, hogy mindenképpen érdemes két feltételt tartalmazó állítások megfordítását is gyakoroltatni tanórán, és nem szerencsés az, ha ilyen szerkezetű állítással először a Thalész-tétel kapcsán találkozik a diák. Sokkal hatékonyabb, ha addigra már a tanuló tisztában van az ilyen típusú állítások szerkezetével, lehetséges megfordításaival, és így van esélye például arra, hogy önállóan képes legyen megfogalmazni a Thalész-tétel megfordítását.

Négy tanuló valamilyen formában megismételte az állítást. Végül pedig egy diák volt (a 26. táblázat „Egyéb” oszlopa, Tanuló_5_4), aki végeredményben egy semmitmondó állítást produ-
kált (4-54. ábra).



4-54. ábra: Egy semmitmondó állítás (Tanuló 5_4)

4.4.2 Utóteszt

A fejlesztő kísérlet harmadik tesztjét, az utótesztet az ötvenötödik tanórán írtuk meg a tanulókkal, a köztes teszt után négy héttel (H. melléklet). Ebben az időszakban a Thalész-tétel segítségével megoldható szerkesztéses és bizonyítást igénylő példákat, valamint az érintőnéyszögek témakörét tanulták a diákok.

Ez a teszt a Pitagorasz- és Thalész-tételt, valamint az érintőnégyszögeket tárgyaló témakört lezáró témazáró dolgozat is volt egyben. Arra voltunk kíváncsiak, hogy a diákok egy néhány lépéses bizonyítást végre tudnak-e hajtani, illetve a megtévesztő ábra szerepe is fókuszba került.

A teszt feladatait mi állítottuk össze, a tanulók munkaideje negyvenöt perc volt. A kutatásunk szempontjából a feladatsor első, harmadik és negyedik feladatával foglalkozunk részletesen. A második – számítási – feladat az adott témakör számonkérése végett került a dolgozatba, az érintőnéyszögek tételének alkalmazását követelte meg, ám a kutatásunk szempontjából irreleváns.

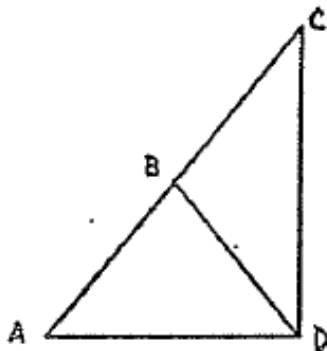
Első feladat. Az utóteszt első feladata a már korábban tárgyalt bizonyítás-teszt hatodik feladata volt:

Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

B az AC szakasz felezőpontja.

$AB = BD$.

Bizonyítsd be, hogy a CDA szög derékszög!



Emlékeztetőül, ezt a feladatot egy évvel korábban, 2018-ban végzős speciális matematika tagozatos diákok számára tűztük ki, és arra is kíváncsiak voltunk, hogy a diákokat félrevezeti-e az ábra. A fejlesztés során néhány alkalommal előkerült ez a probléma egy-egy feladat kapcsán, de nem történt célzott foglalkozás a megtévesztő ábrákkal kapcsolatban. Ám úgy ítéltük meg, hogy a bizonyítási képesség fejlesztése általában segít abban, hogy a tanulók az ábrát megfelelő módon használják fel.

Annak idején a tanulóknak alig a fele birkózott meg sikeresen a bizonyítással (27 tanulóból 14), körülbelül az egyharmaduk (a 27 tanulóból 8) félreértette az ábrát. Ez utóbbi diákok a DB szakaszt az ADC szög belső szögfelezőjének vélték az ábra sugallatára. Fontos hangsúlyozni, hogy nem volt célunk a monitorozott tanulókat összehasonlítani a korábban vizsgált diákcsoporttal. Egyrészt az a csoport nem vett részt előzőleg célzott fejlesztő kísérletben, másrészt jelen esetben egy témakört lezáró számonkérés keretein belül adtak számot a tanulók a tudásukról, ezáltal tisztában voltak azzal, hogy milyen eszközök használatát várjuk el tőlük.

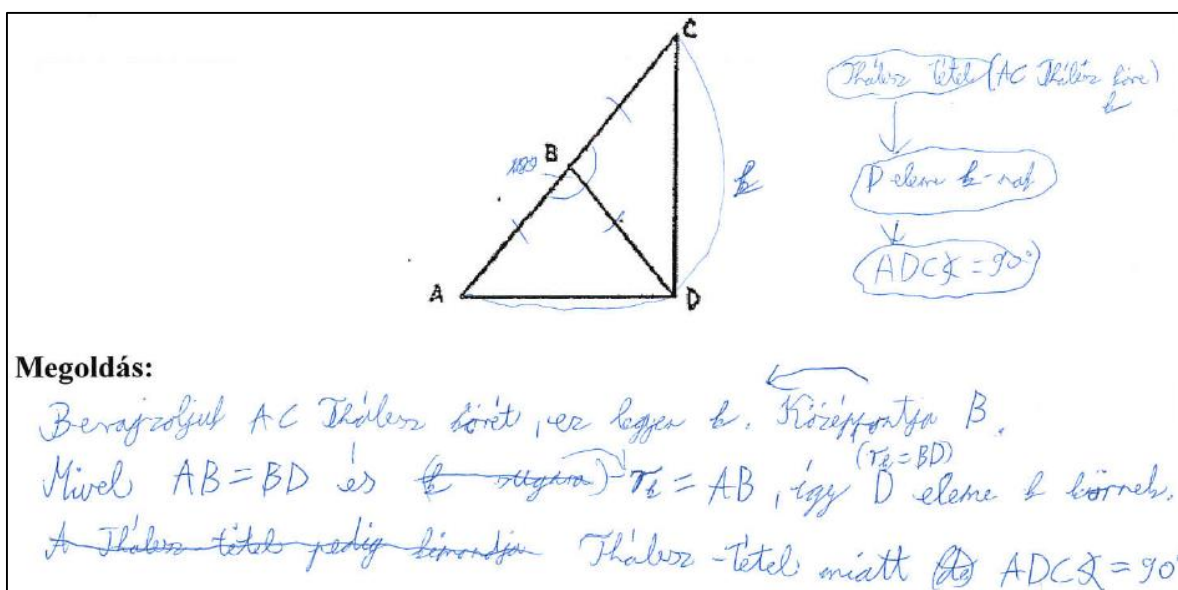
Jelen fókuszcsoporthoz három diák kivételével minden tanuló belátta az állítást.

A feladatnak kétfajta megoldása is elképzelhető, egyrészt Thalész tételére való hivatkozással, másrészt pedig a szakaszok egyenlősége folytán keletkező egymással kongruens szögek segítségével. A tanulók mindkét lehetőséget felismerték és alkalmazták (27. táblázat).

	Megoldás Thalész-tétellel	Megoldás szögekre való hivatkozással
Diákok száma	6	13

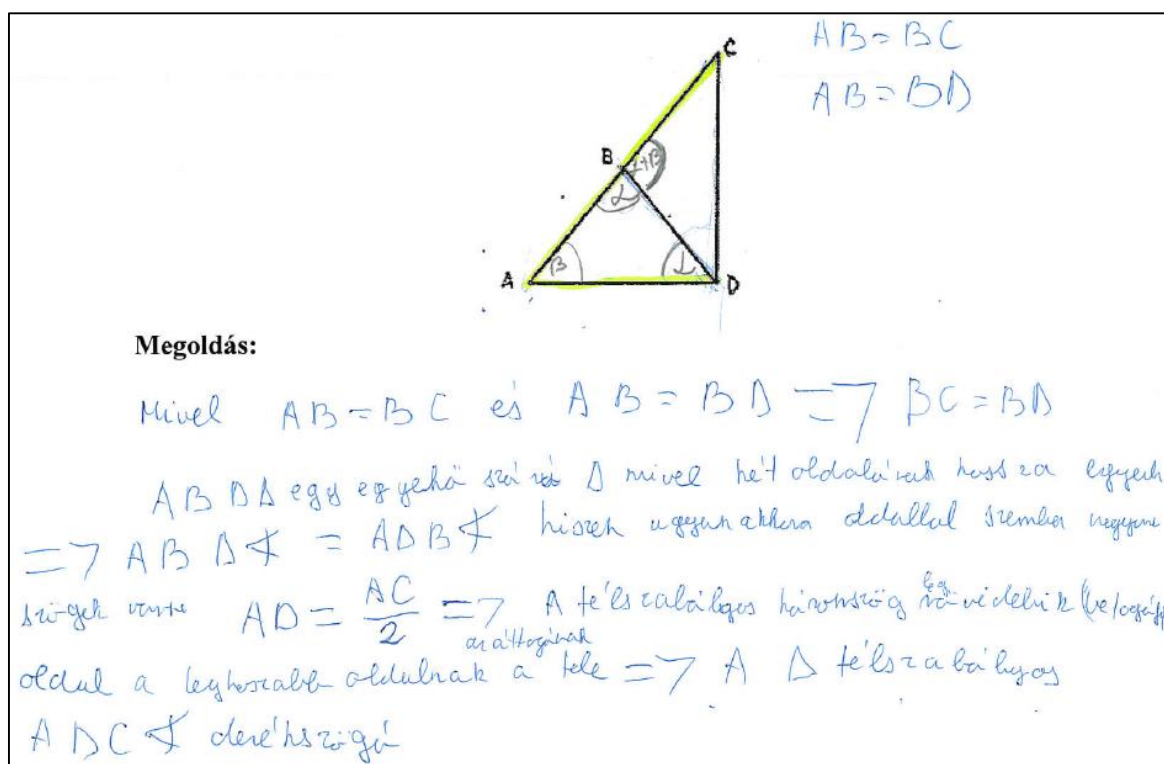
27. táblázat: Megoldás kétféle eszközzel (első feladat, utóteszt)

Nézzünk a Thalész-tétellel történő bizonyításra egy példát. (4-55. ábra)



4-55. ábra: Megoldás Thalész tételével (Tanuló_12_3)

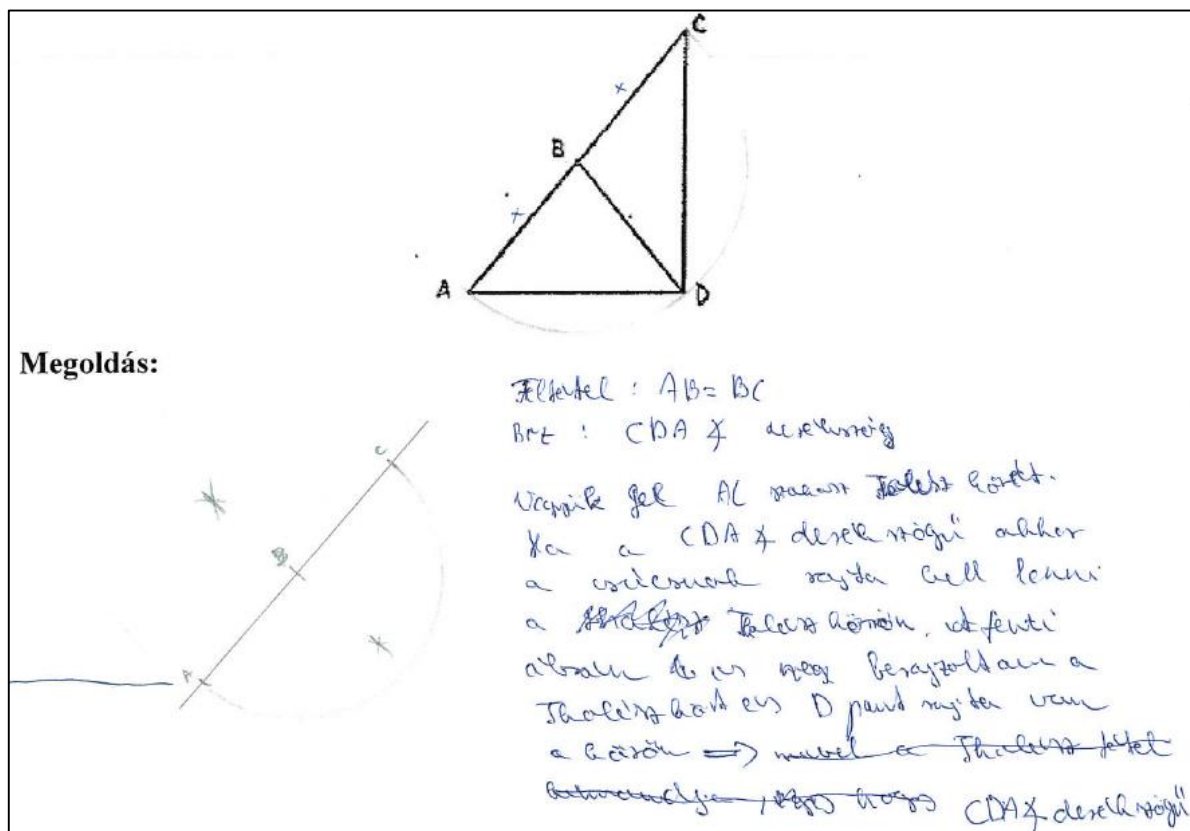
A három diák közül, akiknek nem sikerült az állítást belátniuk, az egyik nem megfelelő szakaszok kongruenciáját használta (4-56. ábra), a másik kettő pedig hiányosan indokolt.



4-56. ábra: Tévedésből szakaszok felcserélése (Tanuló_17_4)

Látható, hogy Tanuló_17_4 nem a feltétel szerint (amit még az ábra mellé helyesen írt le) jelölte be a megfelelő szakaszokat (BD helyett AD -t emelte ki). Ezen túlmenően egy komoly matematikai hibát is vétett, ugyanis az ADC háromszög félszabályosságát az $AD = \frac{AC}{2}$ összefüggésből állapította meg.

A másik két tanuló (Tanuló_16_4 és Tanuló_20_3) indoklása hiányos volt. Közülük Tanuló_20_3 ismételten csak szerkesztési eszközhöz nyúlt, mint azt tette már több korábbi számonkérés esetén is (4-57. ábra).



4-57. ábra: Bizonyítás során szerkesztés használata (Tanuló_20_3)

Világos, hogy az A , D és C pontok a feltétel miatt vannak egy B középpontú körön, és nem pedig azért, mert szerkesztés alapján „úgy tűnik”.

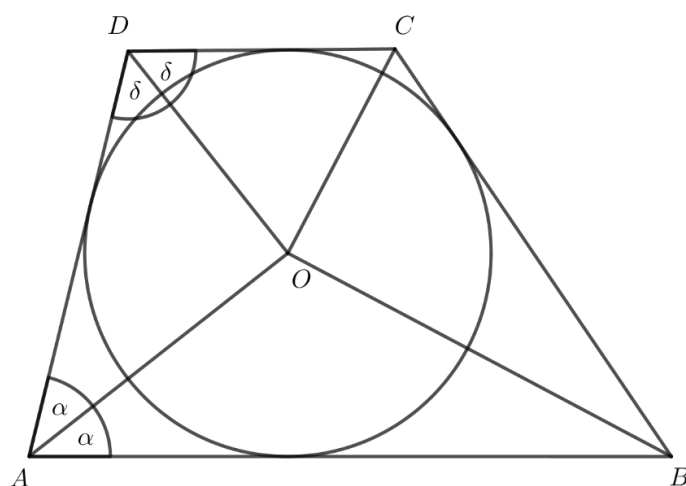
Összességében az első feladat statisztikáját sikerként könyveljük el, hiszen azon túl, hogy a bizonyítást a diákoknak több mint 85%-a helyesen végezte el, a feladathoz csatolt ábra egyetlen diákot sem tévesztett meg.

Harmadik feladat. Az utóteszt harmadik feladata az alábbi volt:

Tekintsük az $ABCD$ érintőtrapézt (melyben az AB és a CD oldalak a trapéz alapjai). Jelölje a beírt körének középpontját O . Mennyi az $\angle AOD$ és a $\angle BOC$ összege? Készíts ábrát, és válaszodat indokold!

Egyrészt arra voltunk kíváncsiak, hogy a tanulók képesek-e megadott ábra nélkül értelmezni a feladatot, elkészíteni a szükséges ábrát, és végre tudnak-e hajtani egy néhány lépésből álló érvelést. Ez a feladat – nyitottságából kifolyólag – egy fokkal még nehezebb, mintha bizonyítás formájában tűztük volna ki. Továbbá az is meglehetősen nehéz lehet a diák számára, hogy az érintőnégyszögekről a szemközti oldalak hosszára vonatkozó összefüggés juthat eszébe, aminek az alkalmazása esetünkben nem vezet eredményre.

Többfajta úton is elképzelhető a kérdéses szögösszeg meghatározása. Az általunk bemutatásra kerülő megoldásban azt használjuk fel, hogy a beírt kör középpontja a négyszög négy belső szögfelezőjének a metszéspontja. (4-58. ábra)



4-58. ábra: A harmadik feladat egyik lehetséges megoldásának szemléltetése

Mivel egy trapéz egy száron nyugvó szögei kiegészítő szögek, így $2\alpha + 2\delta = 180^\circ$, amiből közvetlenül adódik, hogy $\angle AOD = 90^\circ$ (felhasználva, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°). Hasonlóan kapjuk, hogy $\angle BOC = 90^\circ$, vagyis a kérdéses két szög összege 180° .

Megjegyzés: Az O -ból a négyszög oldalegyenesesire bocsátott merőleges szakaszok segítségével kapott háromszögek egybevágóságára hivatkozva is megoldható a feladat.

A huszonekét diák mindegyike megértette a feladatot és megfelelő ábrát készített, ám közülük pusztán hat volt képes megoldani a feladatot (28. táblázat).

	Sikeres megoldás	Közel járt a megoldáshoz	Elvi hiba	Csak a szövegnek megfelelő ábráig jutott el	Csak a szövegnek megfelelő (annál több) ábráig jutott el
Diákok száma	6	4	3	4	5

28. táblázat: A harmadik feladat statisztikája (utóteszt)

Mind a hat sikeres feladatmegoldó diák az általunk megadott bizonyítást hajtotta végre (4-59. ábra).

Megoldás:

$AB \parallel DC$

Az O pontot a négyszög szögfelezőinek a metszéspontjaként kaptuk meg. Vagyis $\angle ABO = \angle CBO$, és hasonlóan a többi szögnél. A négyszög belső szögeinek összege 360° , vagyis $2\alpha + 2\beta + 2\delta + 2\sigma = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \delta + \sigma = 180^\circ$. $\angle AOD$ és $\angle BOC$ szögeinek összege 360° , mivel egy D belső szögeinek összege 180° így $\alpha + \delta + \angle AOD + \beta + \sigma + \angle BOC = 360^\circ$. Tudjuk, hogy $\alpha + \beta + \delta + \sigma = 180^\circ \Rightarrow \angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$

4-59. ábra: A harmadik feladat tanulói megoldása (Tanuló_2_3)

Látható, hogy Tanuló_2_3 körültekintően járt el, még a háromszögek belső szögeire vonatkozó összefüggést is megnevezte explicite. A diák kezdeti van Hiele-szintjét hármasknak mértük, így ez a megoldása előrehaladást mutat ezen a téren.

Négy tanuló munkája vagy apró kiegészítésre szorult, vagy nagyon közel járt a végső megoldáshoz, mindenesetre könnyen teljessé tehető. Közülük

- Tanuló_14_3 az O -ból merőleges szakaszokat állított a négyszög oldalaira, majd indoklás nélkül állította, hogy az O -nál így keletkezett szögeket az O -ból a csúcsokba induló szakaszok rendre felezik;
- Tanuló_3_4 belátta, hogy mind az AOD -szög, mind pedig a BOC -szög egyaránt derékszögű, majd azokat már nem adta össze, azaz nem a feltett kérdésre válaszolt;
- Tanuló_6_4 felírt a szögekre több összefüggést, ahonnan levonta a helyes következtetést, de nem jelölte, hogy végül mely azonosságok implikálták azt.

A negyedik diák (Tanuló_22_3) megoldásával érdemes külön is foglalkozni (4-60. ábra).

Megoldás: Legyen az A -nál lévő szög 2α , a B -nél lévő 2β és így tovább (lásd: ábra). Mivel O a szögfelezők metszéspontja, AO , BO , DO és CO rajta vannak a szögfelezőn. Ezeket a szakaszokat meghúzával megkapjuk az $ACDO$ négyszöget, melyben a szögek összege 360° : $2\alpha + 2\delta + AOD + \gamma = 360^\circ$. Hasonlóan a $ABCO$ négyszögre: $\beta + BOC + \delta + 2\gamma = 360^\circ$. Tehát

$$2\alpha + 2\delta + AOD + \gamma = 360^\circ \quad \beta + BOC + \delta + 2\gamma = 360^\circ$$

$$2\alpha + \delta + AOD + \gamma = \beta + BOC + 2\gamma - \delta$$

$$2\alpha + \delta + AOD = \beta + BOC + \gamma$$

$ABCD$ trapéz, ezért $2\alpha + 2\delta = 180^\circ$ $2\beta + 2\gamma = 180^\circ$
 $\alpha + \delta = 90^\circ$ $\beta + \gamma = 90^\circ$

Így az egyenlet: $90^\circ + AOD = 90^\circ + BOC$
 $AOD = BOC$

Így $2\alpha + \delta + AOD = \beta + AOD + \gamma$
 $2\alpha + \delta + AOD + \gamma = \beta + AOD + \gamma + \delta$
 $AOD = \beta + AOD + \gamma + \delta - 2\alpha - \delta$
 $AOD = \gamma + \beta + AOD + \delta - 2\alpha$

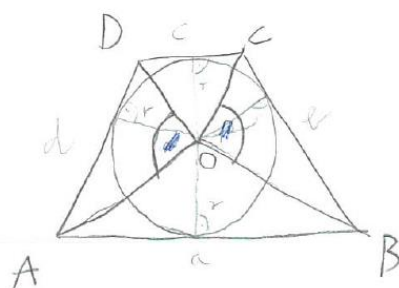
$\left. \begin{aligned} \delta + \gamma + \frac{BOC}{2} &= 180^\circ \\ \beta + \delta + \frac{BOC}{2} &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta + \gamma + \frac{BOC}{2} = \beta + \delta + \frac{BOC}{2}$
 $\gamma = \beta$

4-60. ábra: A sok összefüggés eltakarja a lényeget (Tanuló_22_3)

Látható, hogy Tanuló_22_3 már eljutott arra a pontra, hogy $\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180^\circ$, felírta mind az AOC , mind pedig a BDO háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggést, azonban nem vonta le belőlük a kérdéses szögekre vonatkozó összefüggést, azaz, hogy mindkettő derékszögű. Tehát már minden adott volt ahhoz, hogy a megoldást rövid úton befejezze, de a sok felírt azonosságból nem szűrte le a lényeget.

Három tanuló elvi hibát vétett a megoldása során. Tanuló_17_4, illetve Tanuló_18_4 speciális háromszögeket velt fölfedezni az ábráján (szabályos, illetve félszabályos háromszögeket), Tanuló_12_3 viszont egy nagyon figyelemreméltó, ám érvekkel nem alátámasztott összefüggést használt fel (4-61. ábra).

Megoldás:



legyen $\angle AOD = x$ és $\angle BOC = y$
 Mivel érintőtrapéz, ezért $d + b = a + c$.
 Egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
 Így ~~$x + y = 180^\circ$~~ $\angle AOD + \angle BOC = \angle BOC + \angle AOD$
 $x + y = x + y$
 $d + b$ -vel szemben:
 $\angle AOD + \angle BOC$
 $a + c$ -vel szemben:
 $\angle BOC + \angle AOD$
 Mivel egy kör 360° -es szögét
 $x + y = 180^\circ$
 $\angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$
 □

4-61. ábra: Nem alátámasztott analógia (Tanuló_12_3)

Mi befolyásolta Tanuló_12_3 gondolatmenetét? A háromszögek geometriájából ismert az az összefüggés, hogy egyenlő hosszúságú oldalakkal szemben egyenlő nagyságú szögek vannak. Ennek analógiájára alkalmazott a diák egy összefüggést a középponti szögek összegére, amit csak a körívek hosszára tehetett volna meg és nem a kör húrjaira. Ez utóbbi ugyanis mindenképpen igazolást igényelne, míg az előző közvetlenül adódik a körívek hossza és a megfelelő középponti szögek nagysága közötti egyenes arányosság alapján.

A maradék kilenc tanuló pusztán az ábra megadásáig jutott el. Közülük öt tanuló behúzza még az O -ból az oldalegyenesekre bocsátott merőleges szakaszokat (ezt jelöltük a 28. táblázatban úgy, hogy „bővebb ábra”).

Negyedik feladat. Végül pedig az utóteszt negyedik feladata az alábbi volt.

Egy derékszögű trapéz egyúttal érintőnéyszög is, tehát van beírt köre. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 6 cm és 4 cm. Mekkora a beírt körének sugara?

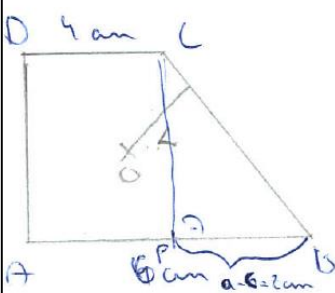
Ez a feladat ugyan nem bizonyítási példa, ám tételek megfelelő sorrendben való alkalmazását követeli meg. Emellett a korábbi feladatoknál több, nem magától értetődő lépés kíván meg. Ez meg is mutatkozott a megoldások statisztikájában, hiszen összesen három diák tudta a feladatot megoldani (29. táblázat). Minden tanuló megfelelő alapábrát készített, azaz a diákok tisztában voltak a feladatban szereplő szituációval, nem ez okozta a gondot számukra.

	Sikeres megoldás	Majdnem tökéletes megoldás	Csak a Pitagorasz-tétel szerepel	Csak az érintőnéyszögek tétele szerepel	Az ábrán megjelenik a derékszögű háromszög	Nincs értékelhető lépés
Diákok száma	3	1	3	7	2	6

29. táblázat: A negyedik feladat statisztikája (utóteszt)

A feladat megoldása két tétel alkalmazását igényli, nevezetesen az érintőnéyszögek tételét, továbbá Pitagorasz tételét. Némi nehézséget okoz, hogy a Pitagorasz-tétel felhasználása előtt a trapéz magasságát fel kell venni, ami egy kulcslépése a bizonyításnak. Mindhárom tanuló így oldotta meg a feladatot (Tanuló_2_3, Tanuló_5_4 és Tanuló_10_4); közülük Tanuló_2_3 bizonyítását mutatjuk be (4-62. ábra).

Megoldás:



$2r = AD$
 Mivel érintő négyeség ezért
 $a+b+c = b+d \Rightarrow 6+4 = AD - CD$
 A $10 + CD = 2r$
 $CD = 2r - 10$
 Pit Pitagorasz $PCB \Delta$ -re
 $2^2 + (2r)^2 = (2r - 10)^2$
 $4 + 4r^2 = 4r^2 - 40r + 100$
 $40r = 96$
 $r = 24 \text{ cm}$

4-62. ábra: A harmadik feladat tanulói megoldása (Tanuló_2_3)

A diák az alkalmazott tételeket explicit módon meg is nevezte, így gondolamenete nyomon követhető. Ugyanakkor a $2r = AD$ összefüggést legalább egy alkalmas ábrával (ami a trapéz beírt körét is tartalmazza) alátámaszthatta volna, Ez a megoldást előrehaladást mutat ahhoz képest, hogy Tanuló_2_3 kezdeti van Hiele-szintje hármasknak adódott.

Egy tanuló nagyon közel járt a megoldáshoz, mindössze egy apró algebrai hibát vétett a Pitagorasz-tétel felírása után történő egyenletrendezésben. Ugyanakkor hat tanuló volt, akinél sem az érintőnéyszögek tétele, sem pedig a Pitagorasz-tétel nem jelent meg, vagyis érdemi lépést nem tettek a bizonyítás során.

A maradék tizenkét diák közül

- hét csak az érintőnéyszögek tételét írta fel, viszont nem jelent meg a továbblépést jelentő derékszögű háromszög;
- öt tanuló felismerte a megfelelő derékszögű háromszöget, három közülük fel is írta a Pitagorasz-tételt, ám mindegyikük figyelmét elkerülte az érintőnéyszögek tétele.

A diákoknak több mint a fele (huszonkettőből tizenkettő), vagyis a sikertelen megoldóknak (tizennyolc tanuló) éppen a kétharmada azért nem tudta végrehajtani a bizonyítást, mert a két alkalmazandó tételből csak az egyik szerepét ismerte fel, a másik nem jelent meg a munkájukban. Ez azt mutatja, hogy a diákok többsége számára az egynél több ismert tétel kombinálását megkövetelő feladatok hatványozott nehézséget jelentenek. Ezt a problémakört nem jártuk körül alaposabban, későbbi vizsgálatok tárgyát képezheti. Annyi bizonyos, hogy mindenképpen érdemes nagyobb hangsúlyt fektetni erre a szituációra a tanítási folyamatban.

4.4.3 Késleltetett teszt

A fejlesztő tanítási kísérlet utolsó, késleltetett tesztjére a kilencvenkettedik tanítási órán, 2019. június 3-án került sor (J. melléklet). Az utóteszt óta nagyjából három hónap, harminchét tanóra telt el.

Ez a teszt nagyon hasonló dolgokat kért számon, mint amit az előtesztben is elvártunk. Ennek célja az volt, hogy meggyőződjünk arról, hogy a tanítási kísérlet során mely területeken sikerült tartós fejlődést elérnünk, és melyeken szükséges még további fejlesztést végrehajtani. Az utóteszt és a jelen teszt közötti időszak során szándékosan nem tréningeztük a tanulókat az előtesztben mért területekkel kapcsolatban, vagyis például bizonyításos feladatok esetén nem kértük a diákoktól, hogy a feltételt és a következményt élesen elkülönítve nevezzék meg. Ennél a tesztnél is úgy jártunk el, mint az előteszt esetében, azaz bejelentés nélkül írtuk meg a diákokkal, hiszen minden előkészület nagyban befolyásolhatta volna a felmérés eredményét. Ez a teszt éppen azt hivatott szolgálni, hogy a fejlesztő tanórák hatása mennyire ülepedett le a diákok tudatában.

Azokban a feladatokban, amelyekhez nem volt mellékelte ábra, explicite nem kértük a diákoktól azt, hogy készítsenek hozzá. Ezt azért tettük, mert a fejlesztő kísérlet minden tesztje azt mutatta, hogy a tanulók érzik, hogy a feladatok értelmezéséhez ábrára van szükség.

A teszt feladatait mi állítottuk össze, a tanulók munkaideje 45 perc volt.

A második és a harmadik feladat egyaránt néhány lépéses bizonyítást kért, így elegendőnek tartjuk, ha a kettő közül csak a harmadik feladat esetén kapott eredményeket mutatjuk be

Első feladat. Adott a következő állítás:

„Egy trapéz egy száron fekvő két szögének összege 180° .”

Mi az állítás feltétele? Mi az állításban a bizonyítandó?

A feladattal azt vizsgáltuk, hogy a diákok helyesen elemzik-e egy állítás szerkezetét. Az előteszt esetében két állítást foglalmaztunk meg, amelyek közül az első „Ha... akkor...” formában volt megadva („Ha egy négyszög négyzet, akkor átlói merőlegesek egymásra.”), a második pedig hasonló alakban, mint jelen feladatunk („A rombusz átlói merőlegesek egymásra.”). A rávezető első megfogalmazást a fejlesztő kísérlet hatásának felmérése érdekében hagytuk el.

A huszonkét diák közül húsz helyesen állapította meg mind a feltételt, mind pedig a bizonyítandó következményt. Egyetlen tanuló sem követte el azt az előtesztben előforduló alapvető hibát, hogy keveredett a feltétel, a bizonyítandó és maga az állítás fogalma. (30. táblázat)

	Helyes mind a feltétel, mind pedig a bizonyítandó	A feltételt sikeres, a bizonyítandó majdnem
Diákok száma	20	2

30. táblázat: Az első feladat statisztikája (késleltetett teszt)

Mindösszesen két tanuló volt (Tanuló_5_4 és Tanuló_18_4), akiknek a bizonyítandó részében találtunk egy apró hiányosságot. Mindkét diák megelégedett azzal, hogy csak annyit kell megmutatni, az egyik száron lévő két szög összege 180° , holott az állítás mindkét szár esetén megköveteli ennek a ténynek a belátását. (4-63. ábra és 4-64. ábra)

Mi az állítás feltétele? Mi az állításban a bizonyítandó?

Megoldás: Feltétel: $ABCD$ trapéz $(AB \parallel CD)$ $(ABCD$ négyszög, $AB \parallel CD)$

Bizonyítandó: $\angle + \delta = 180^\circ$ vagy $\beta + \gamma = 180^\circ$

A csúcsban $\angle$
B csúcsban β
C csúcsban γ
D csúcsban δ

4-63. ábra: Tanuló_18_4 által megfogalmazott bizonyítandó tény

Feltétel: Van egy trapézunk (magyarul egy négyszög melyben van legalább egy párhuzamos oldalpár)

Bizonyítandó: A nem feltétlenül párhuzamos oldalpár-ból az egyikken fekvő két szög összege 180°

4-64. ábra: Tanuló_5_4 által megfogalmazott bizonyítandó tény

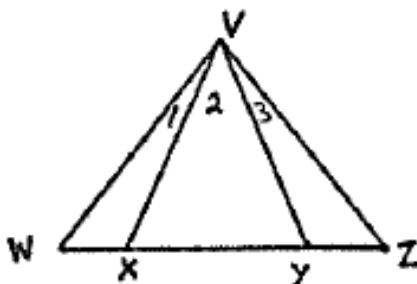
A tanulók valószínűleg arra céloztak, hogy *elegendő* belátni csak az egyik szára, abból már analógiára hivatkozva következik a másik szára is az összefüggés.

Az első feladat statisztikája alapján az állítások szerkezetének a vizsgálata lényegesen jobban ment a tanulóknak, mint a fejlesztő tanítási kísérletet megelőzően.

Harmadik feladat. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

A W-nél lévő szög annyi, mint a Z-nél lévő szög, valamint a WX szakasz hossza megegyezik az YZ szakasz hosszával.

Bizonyítsd be, hogy az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával!



Ez a feladat a kutatás második fázisáról szóló fejezetben már szerepelt. a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos tanulókat vizsgáló bizonyítás-teszt első feladata volt.

Ezzel a feladattal azt vizsgáltuk, hogy a tanulók mennyire képesek egy nagyon egyszerű, néhány lépéses érvelés végrehajtására. Annak idején a végzés előtt álló tanulók egyharmada (huszonhétfőből kilenc) adott megfelelő bizonyítást a feladatra, és tipikus hibaként feljegyezhetjük, hogy kilenc diák az XYV háromszögről indoklás nélkül azt állította, hogy az egyenlő szárú.

Most, a kilencedikes tanulóknak éppen a fele, 11 fő volt képes megfelelő érvelést produkálni, míg összesen csak ketten voltak, akik érdemben nem tudtak mit kezdeni a feladattal (31. táblázat).

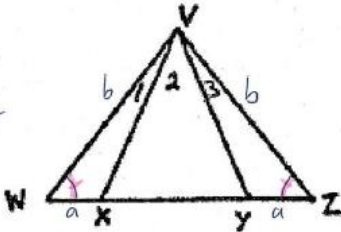
	Helyes érvelés	Majdnem tökéletes érvelés	Hiányos indoklás	Nincs értékelhető lépés
Diákok száma	11	3	6	2

31. táblázat: A harmadik feladat statisztikája (késleltetett teszt)

A helyes bizonyítást adó diákok megfelelő részletességgel indokoltak, írásbeli kommunikációjuk kiváló volt. Jól példázza ezt Tanuló_3_4 munkája (4-65. ábra).

Bizonyítsd be, hogy az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával!

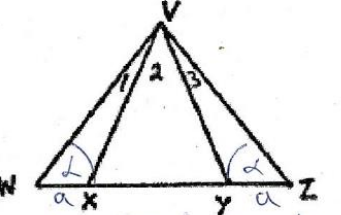
Feladat: $\angle W V X = \angle Z V Y$
 $W X = Y Z$
 Bizonyítandó: $\angle X V W = \angle Y V Z$



Megoldás:
 Mivel a W-nél lévő szög = a Z-nél lévő szög, így a $W Z V \Delta$ egyenlő szárú $\Rightarrow W V = Z V$.
 Tudjuk, hogy $W X = Y Z$. (*)
 A $W X V \Delta$ egybevágó az $Y Z V \Delta$ -gel, mivel két-két oldaluk egyenlő (egymásnak megfelelőek) és a két oldal által bezárt szög megegyezik (SAS) $\Rightarrow$ A megfelelő szögek egyenlők $\Rightarrow$ $\angle X V W = \angle Y V Z$
 1
 ezt akartuk belátni.

4-65. ábra: Korrekt, részletes érvelés (Tanuló_3_4)

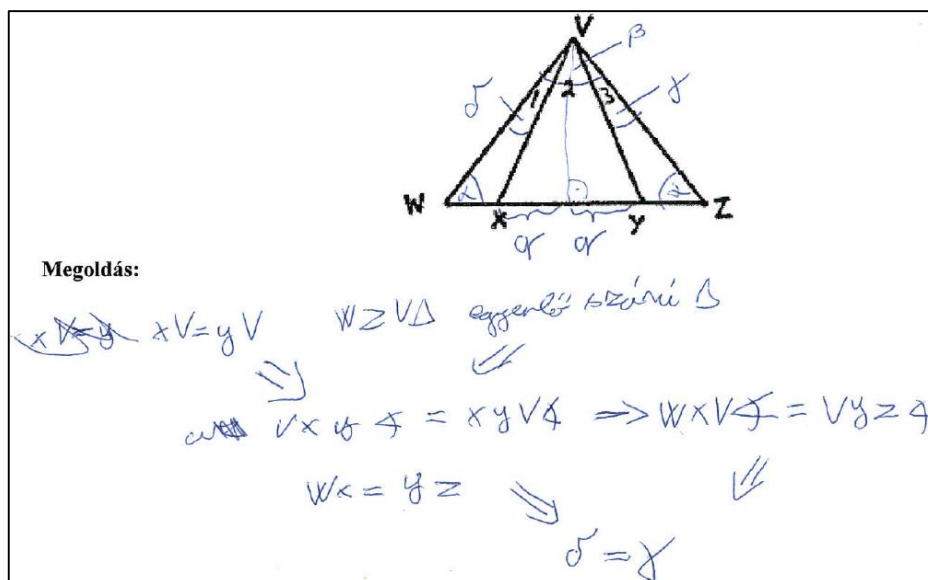
Három tanuló helyesen érvelt, de a tökéletes megoldáshoz egy láncszem hiányzott. Tanuló_2_3 például eljutott a megfelelő háromszögek egybevágóságához, de aztán nem vonta le ennek a következményét, amivel az állítást belátta volna (4-66. ábra).



Megoldás: Mivel $W X = Y Z$ és $W V = Z V$ ezt $W V Z \Delta$ egyenlő szárú $\Rightarrow W V = Z V$. De tudjuk, hogy $W X = Y Z$ és $W V = Z V$ $\Rightarrow$ $W X V \Delta \cong Y Z V \Delta$, mivel két oldaluk és az általuk bezárt szög egyenlő.

4-66. ábra: Egyetlen lépés hiányzott a bizonyításból (Tanuló_2_3)

Tipikus hiányosságként könyvelhetjük el, hogy 6 diák nem indokolt meg minden lépést. Ők az ábra sugallatára elfogadták, hogy az XYV háromszög egyenlő szárú (emlékeztetőül, a végzés előtt álló csoportban 9 fő, azaz a tanulók egyharmada járt el ugyanígy). Ez nyilvánvalóan nagyon gyorsan megmutatható a feltételek segítségével, de ők ezt nem tették meg, ahogy azt Tanuló_9_4 esetében is láthatjuk (4-67. ábra).



4-67. ábra: Hiányos indoklás (Tanuló_9_4)

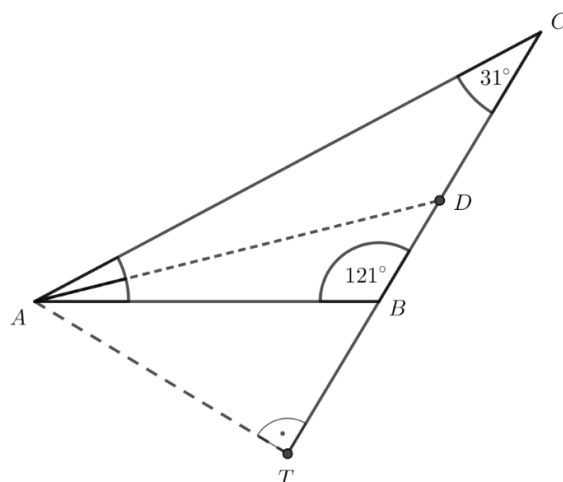
Jól látható, hogy Tanuló_9_4 a folyamatábra-módszert alkalmazta, ugyanakkor a bizonyítása nem letisztult, hiszen az $XV = YV$ egyenlőséget nem indokolta, továbbá az érveléséből kimaradt, hogy a WXV és a ZYV háromszögek egybevágóságából következik a bizonyítandó állítás.

Érdeemes a feladat eredményét összevetni az előteszt harmadik feladatának eredményével, hiszen abban a példában is háromlépéses bizonyítást kértünk. Ott a jó megoldások száma 5 volt, a hibásoké 17, akik közül 9-en az ábra alapján hamis tényt (a paralelogramma átlói felezik a megfelelő szögeket) használtak fel az érvelésben. Most 14-en gyakorlatilag jól bizonyítottak, illetve 6-an voltak, akik az ábra által sugallt helyes tényt nem tartották szükségesnek belátni. Úgy érezzük, ez előrehaladást jelent, tekintetbe véve, hogy nagyobb hiányosságra utal, ha valaki az ábra alapján hibásan következtet, mintha helyes implikácót bizonyítás nélkül elfogad.

Negyedik feladat. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög 121° -os, míg a C csúcsánál lévő szög 31° -os. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontja a BC egyenesen T . Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt D -ben metszi. Bizonyítsd be, hogy $AT = TD$!

Az előtesztben szereplő negyedik példa egy hamis állítás felismerését és cáfolatát kérte. Mivel a diákokat nem tévesztette meg az a feladat, ezért úgy gondoltuk, hogy erre a szituációra a késleltetett tesztben nem térünk ki, hanem helyette jelen példa segítségével egy összetettebb állítás megértését és több lépéses bizonyítását teszteljük. Ezzel együtt az írásbeli kommunikáció fejlettségét is felmérhettük. Továbbá, mivel a feladathoz nincs csatolva ábra, így a diákoknak a szövegértelmezéssel is meg kellett birkózniuk.

Nézzük az állítás egy lehetséges megoldását.



- Az ABC háromszög harmadik szöge $CAB \sphericalangle = 28^\circ (= 180^\circ - (121^\circ + 31^\circ))$.
- Mivel AD szögfelező, így $BAD \sphericalangle = 14^\circ$.
- Tekintve az ABD háromszöget, annak két szöge már ismert, így a harmadik szöge meghatározható: $ADB \sphericalangle (= ADT \sphericalangle) = 180^\circ - (121^\circ + 14^\circ) = 45^\circ$.
- Mivel a DAT háromszög a konstrukció miatt derékszögű, és az iméntiek miatt az egyik további szöge 45° , így a harmadik szöge is annyi.
- A DAT háromszög tehát egyenlő szárú, azaz $AT = DT$, amit éppen be akartunk látni.

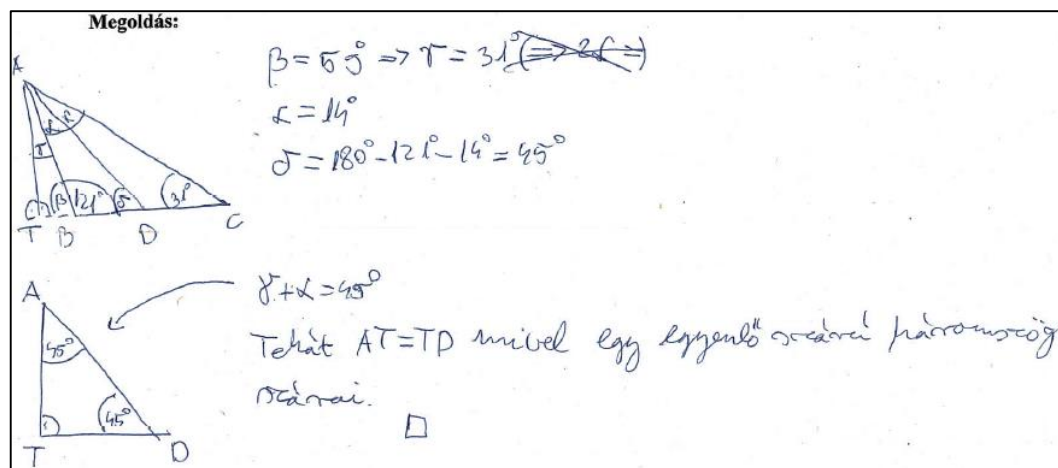
A 22 tanuló közül 11 adott helyes bizonyítást, ugyanakkor 7 diák eleve rossz ábrát készített (32. táblázat).

	Helyes érvelés	Elszámolta, egyébként helyes érvelés	Részeredményei vannak	Rossz ábrát készített
Diákok száma	11	1	3	7

32. táblázat: A negyedik feladat statisztikája (késleltetett teszt)

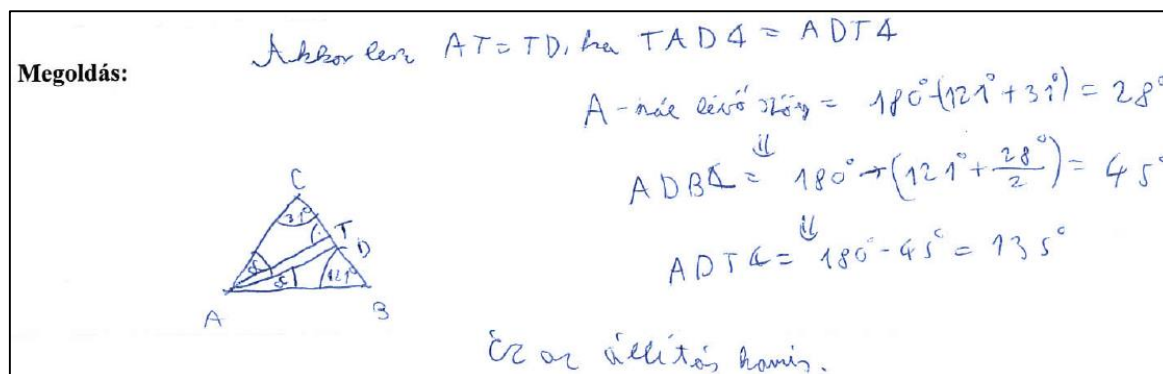
Tulajdonképpen 12 diák gondolatmenete volt helyes, ám az egyik közülük az egyik szöget elszámolta, így csak emiatt nem tudta a bizonyítást befejezni.

A diákok írásbeli kommunikációja nagymértékben fejlődött a korábbiakhoz képest, hiszen nemcsak az ábrákban dolgoztak, hanem a lépéseiket külön leírták. Példaképpen nézzük meg Tanuló_1_4 munkáját, amiről elmondható, hogy jól követhető, felesleges megjegyzésektől mentes, ugyanakkor minden lépése helytálló (4-68. ábra).



4-68. ábra: Tanuló_1_4 megoldása

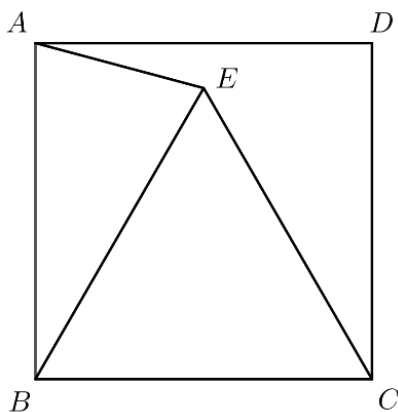
A további 10 tanuló közül 3 jól indult el, meghatározott egy vagy két ismeretlen szöget, de a bizonyítást nem fejezte be. Sokkal tanulságosabb volt a maradék 7 diák munkáját látni, akik eleve rossz ábrát készítettek, ezáltal a bizonyításuk eleve bukásra volt ítélve. Mindegyik esetében a problémát az okozta, hogy az ABC háromszöget hegyesszögű háromszöggé ábrázolták, ezáltal az AT szakasz a háromszögön belül haladt. A 4-69. ábraán ezt láthatjuk Tanuló_5_4 esetében.



4-69. ábra: Egy rosszul felvett ábra (Tanuló_5_4)

Megjegyzés: Ez a feladat nagyon jól mutatta a helyes ábra felvételének a szerepét. Azt jelzi, hogy a tanítási folyamat során érdemes a diákokkal önállóan ábrát készíttetni, és csak azután felrajzolni közösen a táblára. Valamint hangsúlyozni kell, hogy az ábrának mindig tükröznie kell az adatokat, és ezt feltétlenül meg is kell vizsgálni mielőtt az érvelést végrehajtjuk.

Ötödik feladat. Az alábbi ábrán látható $ABCD$ négyzet oldalainak hossza 10 egység. Ebbe a négyzetbe berajzoltuk az ABE háromszöget úgy, hogy $\angle ABE = 30^\circ$, illetve $\angle BAE = 75^\circ$. Mekkora az EC távolság?



A feladat megoldása néhány nagyon egyszerű lépésből áll:

- Az EAB háromszög harmadik szöge: $\angle BEA = 75^\circ$.
- Mivel az EAB háromszögben az E -nél lévő szög 75° -os, így a két egyenlő nagyságú szöggel szemközti oldalak egyenlősége folytán $BA = BE$, azaz $BE = 10$ egység.
- A BCE háromszögben $\angle ECB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.
- Mivel $BE = BC = 10$, így a BCE háromszög további két szöge megegyezik, nevezetesen $\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.
- A BCE háromszög tehát szabályos, azaz $EC = 10$ egység.

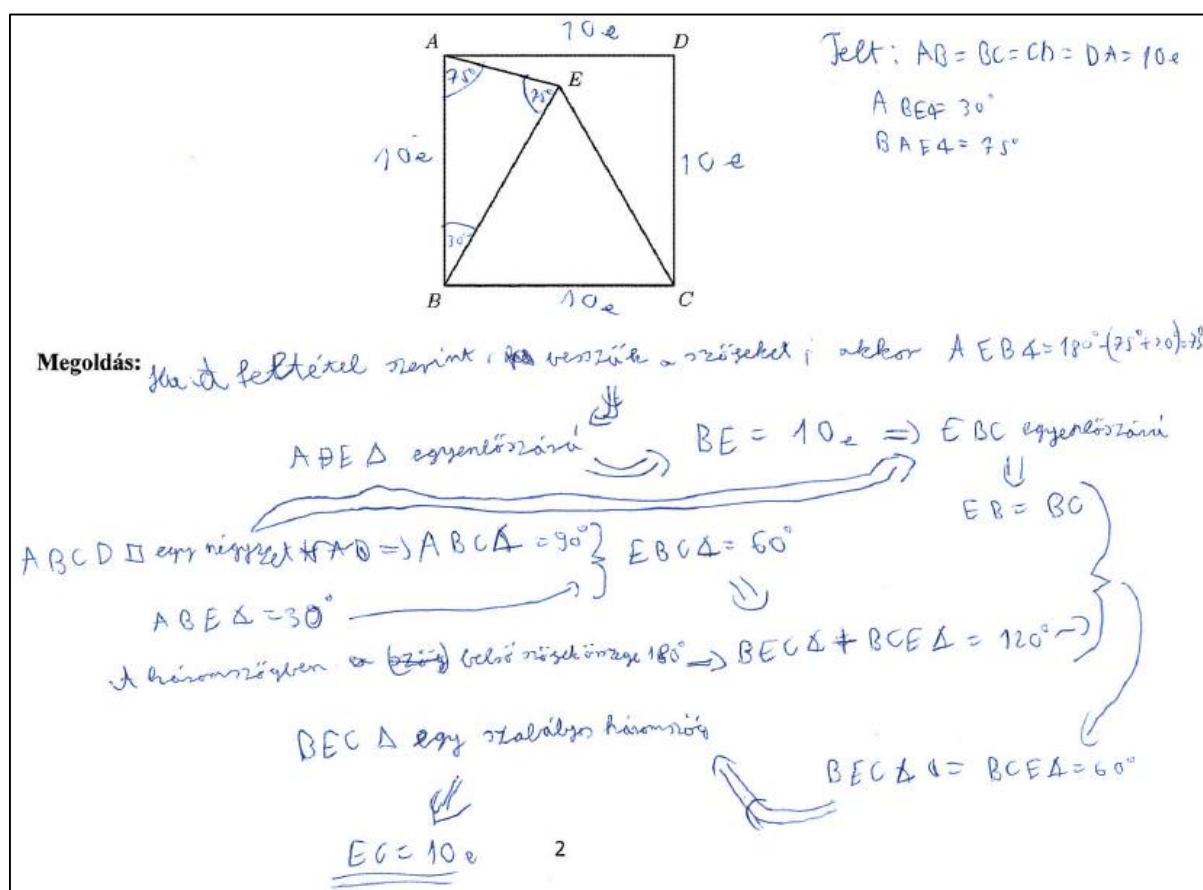
Maga a feladat nem egy állítás belátását követeli meg. Azért tűztük ki mégis ezt a példát, mert kíváncsiak voltunk, hogy a diákok az ábra alapján elfogadják-e indoklás nélkül, hogy a BCE háromszög szabályos, vagy legalábbis egyenlő szárú ($EB = EC$). Az ábra ugyanis sugallja azt a tényt, hogy E rajta van a BC szakasz felezőmerőlegesén, azaz, hogy a BCE háromszög szimmetrikus. Emellett az írásbeli kommunikációt és a több egyszerű következtetési lépés összekapcsolását is figyelemmel kísértük.

A feladat statisztikája azt mutatja, hogy több tanuló is felhasználta bizonyítás nélkül azt a tényt, hogy a BCE háromszögnek szimmetriatengelye a BC szakasz felezőmerőlegese (33. táblázat).

	Helyes érvelés	Az ábra alapján bizonyítás nélkül elfogadja, hogy $EB = EC$	Részeredményei vannak
Diákok száma	11	8	3

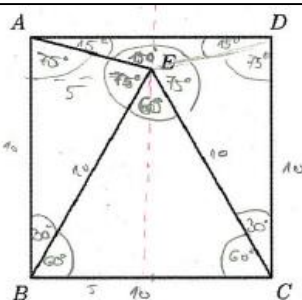
33. táblázat: Az ötödik feladat statisztikája (késleltetett teszt)

A helyes bizonyítást adó diákok megfelelő részletességgel indokoltak, gondolataikat világosan fogalmazták meg. Érdekes megnézni Tanuló_5_4 munkáját, akinek a bizonyításában tetten érhető a folyamatábrás leírási mód (4-70. ábra).



4-70. ábra: Bizonyítás folyamatábra segítségével (Tanuló_5_4)

Több tanuló volt, aki az ábra alapján olyan tényt fogadott el, amit aztán nem látott be. Ez látható Tanuló_20_3 bizonyításában, aki kétszer is nekifogott a megoldásnak, de mindannyiszor feltételként használta azt, amit éppen be kellett látni (4-71. ábra).



Megoldás:

$\triangle BCE$ egy szabályos $\triangle \Rightarrow$ minden oldal is
minden szög megegyezik $\Rightarrow EC = 10$ egység

$\triangle ABE$ $\triangle$ egyik szöge 20° másik $75^\circ \Rightarrow$ a harmadik is 75°
szimmetriai ábrákhoz

$\angle ABE = 20^\circ$ $\angle BCE = 60^\circ$ $\angle BAE = 75^\circ \Rightarrow \angle DAE = 15^\circ$

Ezért van BC szakasz felezőmerőlegesén egy olyan pontja
egy derékszögű $\triangle$ -nek. $\Rightarrow$ így $\triangle EDC$ szögei egyenlők
és szöge $\angle ECB$ szöge is 60° 2

$\angle BCE = 60^\circ \Rightarrow \triangle BCE$ szabályos $\triangle \Rightarrow EC = 10$ egység

4-71. ábra: A bizonyítandó mint feltétel (Tanuló_20_3)

Három tanuló volt, aki nem követett el semmilyen hibát, ugyanakkor néhány szög helyes meghatározása után mindhárman félbehagyták munkájukat.

Ez a feladat ismételten rámutatott arra a már nagyon sokszor említett tényre, hogy a tanulók hajlamosak az ábra alapján sugallt tényeket indoklás nélkül elfogadni. Erre a fejlesztő tanítási kísérlet során egy-egy alkalommal kitértünk, de jelen feladatnak is az a tanulsága, hogy még hangsúlyozottabban kell fókuszálni rá a mindennapi tanítási gyakorlatban.

4.4.4 Válaszok a köztes, az utó- és a késleltetett teszt alapján a K5-1, K5-2, K5-3, valamint a K5-4 kutatási kérdésekre

A feltett kutatási kérdésekre a három teszt tapasztalatai alapján fogalmazunk meg válaszokat, de nagyon fontos hangsúlyozni, hogy a fejlesztés igazi erejét a késleltetett teszt eredményei mutatják meg. Emiatt leginkább a késleltetett teszt tapasztalatai köré gyűjtjük a gondolatainkat, de ha szükségesnek ítéljük meg, akkor utalunk a korábbi két teszt eredményére is.

K5-1: A tanulók tisztában vannak az állítások szerkezetével, élesen szét tudják választani egymástól a feltételt és a következményt. A fejlesztő tanítási kísérletet ebből a szempontból eredményesnek ítéljük meg.

K5-2: Úgy értékeljük, hogy a geometriai ábrák kapcsán a fejlesztés nem volt maradéktalanul sikeres, azt tovább kell folytatni. Az utóteszt ugyan nem mutatta ezt a hiányosságot (a köztes tesztben pedig nem vizsgáltuk), de a késleltetett teszt rávilágított arra, hogy tanulók hajlamosak

egyrészt még mindig az ábra alapján megsejtett tényt indoklás nélkül elfogadni, másrészt a feladat feltételeinek nem megfelelő ábrát készíteni.

K5-3: Eredményesnek ítéljük meg a fejlesztést a bizonyítások konstruálására vonatkozóan, javulást tapasztaltunk az előteszthez képest.

K5-4: A diákok írásbeli kommunikációja nagymértékben javult az előteszthez képest, továbbá csak elenyészően kevesen vannak közülük, akik hajlamosak pusztán az ábrában dolgozni, és mellé nem írni le a gondolatmenetüket. A fejlesztő tanítási kísérletet ebben a tekintetben sikeresnek értékeljük.

Összességében a **K5** kutatási kérdésre, vagyis hogy a fejlesztés sikeres volt-e, a válaszuk az, hogy igen, de szeretnénk hangsúlyozni, hogy a bizonyítási képesség további fejlesztése elengedhetetlen a célcsoport esetén.

ÖSSZEGZÉS, TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Kutatásunk központi kérdése az alábbi volt:

K: Hogyan fejleszthető a speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képessége?

A kérdés megválaszolásához előkészítő vizsgálatokat tettünk. Először is középiskolai diákok geometriai gondolkodási szintjét mértük fel a van Hiele-elmélet segítségével. Kutatási kérdésünk ebben a fázisban így szólt:

K1: A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A K1 kutatási kérdéshez az alábbi alkérdéseket fogalmaztuk meg:

K1-1: Tetten érhető-e a van Hiele-szintek emelkedése a diákok életkorának előrehaladtával?

K1-2: Mutatkozik-e eltérés az ugyanolyan korosztályú, de matematikából eltérő képzésben (speciális matematika tagozaton, normál gimnáziumi, illetve nem matematikai irányultságú szakgimnáziumi tanulmányokban részt vevő) tanulók van Hiele-szintje között?

K1-3: A speciális matematika tagozaton tanuló diákok van Hiele-szintje eléri-e a négyet?

Az alkérdésekre rendre az alábbi válaszokat adtuk:

K1-1: A speciális matematika tagozat tanulói esetében az átlagos van Hiele-szint az évfolyammal együtt emelkedik. A matematika iránt kevésbé érdeklődő, a tantárgyat kisebb óraszámban tanuló csoportoknál szisztematikus fejlődés nem mutatható ki.

K1-2: A speciális matematika tagozaton tanuló diákok átlagos van Hiele-szintje mindegyik évfolyamon jelentősen magasabb, mint a többi képzési formában részt vevő diákoké.

K1-3: A speciális matematika tagozaton tanulók átlagos van Hiele-szintje a tizedik évfolyamon már meghaladja a hármat, közelíti a négyet.

Azt találtuk tehát, hogy a speciális matematika tagozat diákjai alkalmas geometriai gondolkodási szinttel rendelkezhetnek a K1 kérdésben megfogalmazott kívánalmaknak. Emiatt a kutatásainkat a későbbiekben végig ezen oktatási forma tanulóira irányoztuk.

A következő lépésben érettségi előtt álló speciális matematika tagozatos tanulók geometriai bizonyítási képességét analizáltuk az alábbi kutatási kérdésre fókuszálva:

K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

A K2 kutatási kérdéshez az alábbi alkérdéseket fogalmaztuk meg:

K2-1: A diákok ki tudják-e olvasni egy állítás szövegéből a feltételt és a következményt?

K2-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelt geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tényt, ami bizonyítást igényel?

K2-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani?

A kérdésekre az alábbi válaszokat adtuk:

K2-1: A diákok egy jelentős része számára magyarázatra szorul a feltétel és a bizonyítandó rész egymástól és magától az állítástól való szétválasztása.

K2-2: A tanulók egy része az ábra által sugallt tényeket indoklás nélkül fogadja el.

K2-3: A speciális matematika tagozatos diákok egy nagyon egyszerű, két, legfeljebb három lépésből álló bizonyítást önállóan is végre tudnak hajtani. Ugyanakkor ennél kicsit összetettebb bizonyítás esetén már többen közülük akadályokba ütköznek. A tanulókra jellemző általában, hogy nem indokolnak kellőképpen, egyes bizonyítási lépéseket tényként kezelnek, így meg sem említik őket.

Ennek a fázisnak az eredményéből kiindulva egy fejlesztő tanítási kísérletet terveztünk meg. Ez utóbbinak az elemzése jelenti a dolgozat gerincét. A fejlesztést speciális matematika tagozatot kezdő kilencedikes célcsoporttal végeztük el, és ezáltal a dolgozat központi **K** kutatási kérdésére próbáltunk meg választ találni. Ehhez további három alkérdést fogalmaztunk meg:

K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatot kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program?

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

A **K3** kutatási kérdéshez az alábbi alkérdéseket fogalmaztuk meg:

K3-1: A diákok ki tudják-e olvasni az állítás szövegéből a feltételt és a következményt?

K3-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelt geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tény, ami bizonyítást igényel?

K3-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani?

K3-4: A diákok képesek-e felismerni egy „nyilvánvalóan” hamis állítást? Ennek kapcsán ismerik-e a tanulók az ellenpélda fogalmát, és tudják-e, hogy egy állítást egyetlen ellenpélda is megcáfol, amit szintén igazolni kell?

K3-5: A tanulóknak megfelelő-e az írásbeli kommunikációjuk, azaz milyen részletességgel közlik gondolatmenetüket?

A **K3** és a **K4** kérdés megválaszolásához egy előteszt és három tanóra tapasztalatait használtuk fel. A **K3** kutatási kérdés alkérdéseire az alábbi válaszokat adtuk:

K3-1: A tanulók számára az előteszt során a matematikai állítások szerkezete még nem volt világos, ám azzá vált a három fejlesztő tanítási óra hatására.

K3-2: A diákok az előteszt folyamán olyan tényeket is elfogadtak a feladathoz mellékelt ábra alapján, amik nem szerepeltek a feladat feltételei között, vagy nem következtek belőle. A fejlesztő tanítási órák után a tanulók világosabban látták a geometriai ábráknak a bizonyításokban játszott szerepét.

K3-3: A diákok jelentős hányada nem képes egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani. A tanulók egy része nem látja a különbséget a bizonyítás és a szemléleten alapuló intuitív meggyőzés között.

K3-4: A diákok képesek voltak felismerni egy „nyilvánvalóan” hamis állítást. A tanulók egy jelentős része viszont az előteszt tapasztalatai alapján nem tudta, hogy a cáfolatként megadott ellenpélda helyességének a megmutatása a feladatra adott bizonyítás szerves részét képezi.

K3-5: A tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációja nem volt megfelelő, jelentős fejlesztésre szorul. Nem indokoltak kellő részletességgel, nem érezték, mely tények igényelnek hivatkozást, esetleg igazolást, és melyek nem. Többen pusztán az ábrában jelölve fejtették ki a gondolatmenetüket.

A tapasztalatok alapján megadtuk a bizonyítási képességet fejlesztő tanítás program fő szempontjait, válaszolva ezzel a **K4** kutatási kérdésre:

- állítások szerkezetének vizsgálata;
- indirekt úton történő bizonyítás képességének fejlesztése;
- más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása;
- megtévesztő ábra alkalmazása;
- folyamatábra használata.

A fejlesztő tanítási kísérlet eredményességére vonatkozó **K5** kutatási kérdést további alkérdésekre bontva több teszt tapasztalatai alapján válaszoltuk meg. Az alkérdések a következők voltak:

K5-1: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az állítások szerkezetének elemzése tekintetében?

K5-2: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a megtévesztő ábrákkal kapcsolatban?

K5-3: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a bizonyítások konstruálására vonatkozóan?

K5-4: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az írásbeli kommunikáció terén?

A tapasztalatok az alábbiakat támasztották alá:

K5-1: A tanulók helyesen értelmezik az állítások szerkezetét.

K5-2: A diákoknak a geometriai ábrákkal kapcsolatban nehézségeik vannak, további fejlesztés indokolt.

K5-3: A tanulók többsége képes végrehajtani két-három lépésből álló bizonyítást, de az ennél összetettebb bizonyítások esetén komoly problémákba ütköznek, így ilyen irányú fejlesztés szükséges a továbbiakban.

K5-4: A diákok írásbeli kommunikációja megfelelő.

Úgy ítéljük meg, hogy a speciális matematika tagozatot kezdő kilencedikes csoport alkalmas választás volt a kutatásunk szempontjából, hiszen egyrészt a geometriai gondolkodásuk lehetővé tette a bizonyítási képességek fejlesztését, ugyanakkor a további hiányosságok kiküszöbölésére még megfelelő időtartam áll a rendelkezésre.

További kutatási lehetőségek lehetnek az alábbiak:

- Speciális matematika tagozatos csoportok magasabb évfolyamokon való fejlesztése geometriából további szempontok figyelembevételével. Gondolunk itt elsősorban az összetettebb bizonyítások kivitelezésére, valamint az egyéb bizonyítási módszerek tudatos fejlesztésére, hiszen kutatásunkban elsősorban a direkt bizonyításokra fókuszáltunk.

- Speciális matematika tagozatos diákok bizonyítási képességének a fejlesztése nem geometriai témakörök esetén.
- Speciális matematika tagozatos csoportok fejlesztése a sejtések felállítása terén.
- A fejlesztő kísérlet során több tanulónál előfordult, hogy nem az adott tananyag eszközeivel oldották meg a kitűzött feladatot. Ezt a szituációt is érdemes alaposabban kutatni.

Úgy gondoljuk, hogy a célcsoportnak az egy tanéven át tartó tudatos fejlesztése jó alapot adhat a fent felsorolt kutatási lehetőségek sikeres kivitelezéséhez.

IRODALOMJEGYZÉK

- Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába*. Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.
- Balacheff, N. (2017). A Study of Students' Proving Processes At The Junior High School Level.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*.
- Burger, W., & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48.
- Crowley, M. (1987). The van Hiele model of development of geometric thought. In M. M. Lindquist (Szerk.), *1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (old.: 1-16). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Czegléd, I., Czegléd, I., Hajdu, S., & Zankó, I. (2001). *Matematika 5.* (H. Sándor, Szerk.) Budapest: Műszaki Kiadó.
- Csikós, C. (2000). A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban (PhD értekezés). Szegedi Tudományegyetem.
- Dvora, T., & Dreyfus, T. (2004). Unjustified Assumptions Based On Diagrams In Geometry. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, old.: 311–318.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*. NCTM, Reston, VA, USA: Journal for Research in Mathematics Education, Monograph 3.
- Gutierrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 237-251.
- Győry, Á., & Kónya, E. (2018). Development of high school students' geometric thinking with particular emphasis on mathematically talented students. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 16, 93-110.
- Győry, Á., & Kónya, E. (2019). Proving skills in geometry of secondary grammar school leavers specialized in mathematics. *Annales Mathematicae et Informaticae*, 50, 217–236.
- Halat, E. (2006). Sex-related differences in the acquisition of the van Hiele levels and motivation in learning geometry. *Asia Pacific Education Review*, 7(2), 173-183.
- Halat, E. (2007). Reform-based curriculum & acquisition of the levels, *Eurasia Journal of Mathematics. Science and Technology Education*, 3(1), 41-49.
- Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In *Encyclopedia of Mathematics Education, 2020 Edition* (old.: 561-566). Springer.

- Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and Proving In Mathematics Education. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 329-336.
- Haviger, J., & Vojkůvková, I. (2013). The van Hiele Geometry Test at Czech Secondary School. *WDS'13 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, 112-115.
- Haviger, J., & Vojkůvková, I. (2014). The van Hiele Geometry Thinking Levels: Gender and School Type Differences. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 112, 977-981.
- Hong, D., & Choi, K. (2018). Reasoning and Proving Opportunities in Textbooks: A Comparative Analysis. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 4(1), 82-97.
- Kerettanterv a speciális matematika képzéshez. (dátum nélk.). Forrás: https://kerettanterv.oh.gov.hu/07_melleklet_miniszter/7.5_Specmatek/index_specmat.html
- Koshy, V. (2005). *Action Research for Improving Practice - A Practical Guide*. Paul Chapman Publishing.
- Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., & Vincze, I. (2015). *Sokszínű matematika 9*. Szeged: Mozaik Kiadó.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mason, M. M. (1997). The van Hiele Model of Geometric Understanding and Mathematically Talented Student. *Journal for the Education of the Gifted*, 21(1), 39-53.
- Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 58-69.
- Senk, S. L. (1989. May). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.
- Stylianides, G. (2008. március). An Analytic Framework of Reasoning-and-Proving. *For the Learning of Mathematics*, 28(1), 9-16.
- Surányi, L. (2012. június). "Kevés ilyen inspiráló légkört tapasztaltam" Ötvenéves a speciális matematika tagozat. *Természet Világa*.
- Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex Kiadó.
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. University of Chicago: CDASSG Project.

ÖSSZEFOGLALÓ

A dolgozat matematikából tehetséges középiskolai tanulók bizonyítási képességének vizsgálatáról, illetve fejlesztéséről szól. A témaválasztásban nagy szerepet játszott, hogy a geometriatanulás során a diákok számos nehézségbe ütköznek, aminek korábbi kutatások szerint fő oka az iskolai tanításban keresendő. Elsődlegesen speciális matematika tagozatos diákokkal végeztük el a méréseinket, akiknek én voltam a geometriatanára. Megállapításainkat a matematika iránt fogékony tanulók tanulmányozása révén tettük meg, mégis úgy véljük, hogy a kapott eredmények más matematikai oktatási forma esetén is hasznosak lehetnek.

Kutatásunk mozgatórugója az alábbi fő kutatási kérdés megválaszolása volt:

K: Hogyan fejleszthető a speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képessége?

Ezt a kérdést a kutatás egyes fázisaiban további alkérdésekkel finomítottuk, amit a fejezetek bemutatása során ismertetünk.

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az első fejezetben megalapoztuk kutatásunk elméleti hátterét a szakirodalom tanulmányozása révén.

A dolgozat – és így ez az elméleti fejezet is – két nagy részre tagolható. Az egyik a diákok geometriai gondolkodásmódjának a fejlődésére fókuszál, amelynek a leírására a van Hiele-elméletet vettük alapul, melyről igyekeztünk kimerítő képet adni. Tematikailag a másik nagy témakör a bizonyítások vizsgálata. Arról, hogy mit is értünk bizonyításon, milyen típusait különbözteti meg a szakirodalom, részletes elemzést adtunk.

Kutatásunknak a fejlesztő tanítási kísérletet felölelő fázisában akciókutatást hajtottunk végre. Ennek alapelveiről, tulajdonságairól szintén részletesen szoltunk.

A második fejezetben a 2015-ben elkezdett és másfél évig tartó, középiskolai diákok geometriai gondolkodásmódjának a vizsgálatával foglalkoztunk. Tettük ezt azért, mert a geometriai bizonyítási képesség vizsgálata, illetve annak a fejlesztése feltételezi a diákok megfelelő geometriai gondolkodási szintjét. Kutatásunknak ebben az első fázisában főként a következő kérdést kívántuk megválaszolni:

K1: A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A vizsgálataink azt mutatták, hogy az egyes oktatási formában tanuló diákok geometriai gondolkodásának szintje nem feltétlenül elegendő egy néhány lépéses bizonyítás kivitelezéséhez. A **K1** kutatási kérdésre azt a választ adhattuk, hogy a méréseinkben részt vevő speciális matematika tagozatos diákok átlagos van Hiele-szintje a tizedik évfolyamon már meghaladja a harmadikat, közelíti a negyediket, azaz egy részük az elmélet szerint valóban alkalmas egy néhány lépésből álló érvelés megkonstruálására.

A harmadik fejezet a kutatás második fázisát írja le, amiben érettségi előtt álló, speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét vizsgáltuk egy úgynevezett bizo-

nyítás-teszt segítségével. A kutatás első fázisának eredményei és az elmélet alapján feltételeztük, hogy a tanulók egy része birtokában van a bizonyításokhoz alkalmas geometriai gondolkodásmódnak.

A mérést 2018-ban hajtottuk végre, és amely során a fő kérdésünk az alábbi volt:

K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

Két tanulócsoporthoz választottunk ki mélyebb vizsgálatra. Mindkét tanulócsoporthoz tagjai speciális matematika tagozatos képzésben vettek részt. A vizsgált tanulók létszáma 27 volt. A bizonyítási képesség felméréséhez Zalman Usiskin három bizonyítás-tesztjének egyikét tekintettük kiindulópontnak.

A mérések során megállapítottuk, hogy a diákok egy jelentős része számára magyarázatra szorul a feltétel és a bizonyítandó rész egymástól és magától az állítástól való szétválasztása. Azt tapasztaltuk, hogy a tanulók egy része az ábra által sugallt tényeket indoklás nélkül fogadja el. Továbbá arra jutottunk, hogy a speciális matematika tagozatos diákok egy nagyon egyszerű, két, legfeljebb három lépésből álló bizonyítást önállóan is végre tudnak hajtani, viszont egy ennél kicsit összetettebb bizonyítás esetén már többen közülük akadályokba ütköznek. A tanulókra jellemző volt általában, hogy nem indokoltak kellőképpen, egyes bizonyítási lépéseket tényként kezeltek, így meg sem említették őket. A diákok hajlamosak voltak arra, hogy csak az ábrába beleírva hajtották végre a bizonyítást, nem pedig megfelelő jelöléseket felhasználva kellő részletességgel fogalmazva írták le az érvelésüket.

Az itt kapott eredményeket egy egész tanévet felölelő fejlesztő tanítási kísérlet megtervezéséhez használtuk fel, mely a kutatás harmadik és egyben legfontosabb fázisát jelenti. Erről szól a következő fejezet.

A negyedik fejezet a 2018/2019-es tanévben végrehajtott fejlesztő tanítási kísérlet folyamatát és eredményeit mutatja be. A kutatás ezen fázisának alanyai kilencedikes, speciális matematika tagozatos diákok voltak. Ebben a fázisban három kutatási kérdést tettünk fel (**K3, K4, K5**):

K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatot kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program?

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

Ez a kutatási egység két kisebb részre tagolódott. Az első részben egy előteszt és három videóval rögzített tanóra segítségével feltérképeztük a tanulóknak az állítások szerkezetének a vizsgálata és a geometriai bizonyítások terén szerzett ismereteit. A második fázisban az első részben szerzett tapasztalatokra és a végzés előtt álló diákok vizsgálata terén kapott eredményekre alapozva egy fejlesztő tanítási kísérletet hajtottunk végre, ami célzottan a tanulók geometriai bizonyítási képességét volt hivatott magasabb szintre emelni.

A **K3** kérdés kapcsán megállapítottuk, hogy a diákok számára az előteszt során a matematikai állítások szerkezete még nem volt világos, de az a három fejlesztő tanítási óra alatt érthetővé vált. A tanulók az előteszt folyamán olyan tényeket is elfogadtak a feladathoz mellékelte ábra alapján, amik nem szerepeltek a feladat feltételei között, vagy nem következtek belőle. A fejlesztő tanítási órák hatására a tanulók világosabban látták a geometriai ábráknak a bizonyításokban játszott szerepét. Továbbá a diákok jelentős hányada nem volt képes egy néhány lépés-

ből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani. A tanulók felismerték, ha egy állítás „nyilvánvalóan” hamis, de az előteszt tapasztalatai alapján a többségük nem tudta, hogy a cáfolatként megadott ellenpélda helyességének a megmutatása a feladatra adott bizonyítás szerves részét képezi. A fejlesztő tanórák során ezek a problémák megbeszélésre kerültek, és a tanulók jobban megértették az ellenpélda szerepét. Fontos kiemelni, hogy a diákok szóbeli és írásbeli kommunikációja nem volt megfelelő, többen pusztán az ábrában jelölve fejtették ki a gondolatmenetüket.

A tapasztalatok alapján megadtuk a bizonyítási képességet fejlesztő tanítás program fő szempontjait, válaszolva ezzel a **K4** kutatási kérdésre:

- állítások szerkezetének vizsgálata;
- indirekt úton történő bizonyítás képességének fejlesztése;
- más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása;
- megtévesztő ábra alkalmazása;
- folyamatábra használata.

A **K5** kutatási kérdést a fejlesztő tanórák tükrében az alábbiak szerint finomítottuk:

K5-1: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az állítások szerkezetének elemzése tekintetében?

K5-2: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a megtévesztő ábrákkal kapcsolatban?

K5-3: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a bizonyítások konstruálására vonatkozóan?

K5-4: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az írásbeli kommunikáció terén?

A tapasztalatok az alábbiakat támasztották alá:

K5-1: A tanulók helyesen értelmezték az állítások szerkezetét.

K5-2: A diákoknak a geometriai ábrákkal kapcsolatban gondjaik voltak, további fejlesztés indokolt.

K5-3: A tanulók többsége képes volt végrehajtani két-három lépésből álló bizonyítást, de az ennél összetettebb bizonyítások esetén komoly problémákba ütköztek, így ilyen irányú fejlesztés szükséges a továbbiakban.

K5-4: A diákok írásbeli kommunikációja megfelelő volt.

Úgy ítéljük meg, hogy a speciális matematika tagozatot kezdő kilencedikes csoport alkalmas választás volt a kutatásunk szempontjából, hiszen egyrészt a geometriai gondolkodásuk lehetővé tette a bizonyítási képességek fejlesztését, ugyanakkor a további hiányosságok kiküszöbölésére még megfelelő időtartam áll a rendelkezésre.

SUMMARY

The dissertation is about the examination and development of the proving abilities of secondary school students specialized in mathematics. A big role in the choice of topic was that students encounter a number of difficulties in learning geometry, for which the main reason, according to previous research, is to be found in school teaching. We primarily performed our measurements with students specialized in mathematics, for whom I was the geometry teacher. We have made our conclusions by studying students who are receptive to mathematics, yet we believe that the results obtained may be useful for other forms of mathematical education as well.

The driving force of our research was the answer to the following main research question:

Q: How can the geometric proving abilities of students specialized in mathematics be developed?

In each phase of the research, we refined this question with additional sub-questions, which are described during the presentation of the chapters.

The structure of the dissertation is as follows:

In the first chapter, we established the theoretical background of our research by studying the literature.

The dissertation – and thus this theoretical chapter – can be divided into two major parts. One focuses on the development of students' geometric thinking, the description of which is based on the van Hiele theory, which we have tried to exhaustively detail. Thematically, the other big topic is the examination of proofs. We gave a detailed analysis of what we mean by proof, what types are distinguished in the literature.

In the phase of our research on the developmental teaching experiment, we conducted action research. We also talked in detail about the principles and properties of this.

In the second chapter, we examined the geometric thinking of secondary school students, which began in 2015 and lasted for a year and a half. We did this because the study of geometric proving abilities and their development presuppose the appropriate level of students' geometric thinking. In this first phase of our research, we mainly wanted to answer the following question:

Q1: Is the level of geometric thinking of secondary school students adequate to understand and accomplish a few-step proof?

Our research showed that the level of students' geometric thinking in each form of education is not necessarily sufficient to perform a few-step proof. The answer to the **Q1** research question was that the mean van Hiele level of students specialized in mathematics participating in our measurements in the tenth grade was already more than three, approaching four, ie some of them, according to the van Hiele theory, were really suitable for a few-step proof to construct.

The third chapter describes the second phase of the research, in which we examined the geometric proving abilities of pre-graduation students specialized in mathematics using a so-called proof test. Based on the results of the first phase of the research and the theory, we assumed that some of the students were in possession of a geometric way of thinking suitable for carrying out provings.

The measurement was performed in 2018, during which our main question was:

Q2: What characterizes the geometric proving abilities of students specialized in mathematics who are about to graduate?

Two student groups were selected for in-depth study. Members of both student groups took part in special mathematics education. The number of students examined was 27. To examine the proving abilities, we considered one of Zalman Usiskin's three proof tests as a starting point.

During the measurements we found that for a significant part of students, the separation of the antecedent and the consequent from each other and from the statement itself needs to be explained. We found that some students accept facts suggested by the diagram without proving. Furthermore, we came to the conclusion that students in the special mathematics education could perform a very simple proof of two, up to three steps on their own, but in the case of a slightly more complex proof several of them encountered already obstacles. Students were generally characterized by insufficient reasoning, some steps of proof were treated as facts, so they were not even mentioned. Students tended to perform the proof only by writing it into the diagram, rather than describing their reasoning in sufficient details using appropriate notations.

The results obtained here were used to design a developmental teaching experiment covering the whole school year, which is the third and most important phase of the research. This is what the next chapter is about.

The fourth chapter presents the process and results of the developmental teaching experiment carried out in the 2018/2019 school year. The subjects of this phase of the research were ninth-grade students specialized in mathematics. In this phase, we asked three research questions (**Q3**, **Q4**, **Q5**):

Q3: What characterizes the proving abilities of ninth grade students starting special mathematics education?

Q4: In what ways can a teaching program that develop the proving abilities be built in the ninth grade?

Q5: Was the developmental teaching program developed for the ninth grade effective?

This research unit was divided into two smaller parts. In the first part we mapped the students' knowledge of examining the structure of statements and geometric proofs using a pre-test and three videotaped lessons. In the second phase, based on the experience gained in the first part and the results obtained in examining pre-graduation students, we conducted a developmental teaching experiment specifically designed to raise students' proving abilities in geometry to a higher level.

Regarding question **Q3**, we found that the structure of mathematical statements was not yet clear to the students during the pre-test, but it became understandable during the three developmental lessons. During the pre-test students also accepted facts based on the diagram attached to the task that were not included in the assumptions of the task or did not follow from it. As a result of the developmental teaching lessons, students saw more clearly the role of geometric diagrams in proofs. Furthermore, a significant proportion of students were unable to perform a few-step proof using appropriate mathematical language. Students recognized that a statement was „obviously” false, but based on the experience of the pre-test, most of them did not know that showing the correctness of the counterexample given as a rebuttal was an integral part of the proof given for the task. During the developmental teaching lessons, these problems were discussed and students better understood the role of the counterexample. It is important to

highlight that students' oral and written communication was inadequate, several of them explained their train of thought merely by marking it in the diagram.

Based on the experience, we built the further phases of the developmental teaching experiment, thus providing the answer to the **Q4** research question:

- examination of the structure of statements;
- developing the proving abilities by contrapositive;
- understanding and processing the proving of others and passing on one's own line of thought;
- use of a misleading diagram;
- use of a flow diagram.

Research question **Q5** was refined in light of the development lessons as follows:

Q5-1: How effective was the development in analyzing the structure of statements?

Q5-2: How effective was the development on the misleading diagram?

Q5-3: How effective was the development in constructing proofs?

Q5-4: How effective was the development in the field of written communication?

Experience showed that:

Q5-1: Students correctly interpreted the structure of statements.

Q5-2: Students had problems with geometric diagrams, further development is justified.

Q5-3: Most students were able to perform a two- or three-step proof, but in the case of more complex proofs they encountered serious problems, so further development in this direction is needed.

Q5-4: The written communication of students was adequate.

We believe that the ninth-grade group starting the special mathematics education was a suitable choice for our research, as their geometric thinking allowed the development of their proving abilities, but there is still enough time to eliminate further shortcomings.

MELLÉKLETEK

A. Az Usiskin vezette kutatócsoport eredeti tesztje⁶

Van Hiele geometriai teszt*

Minden kérdésnél egyetlen válasz helyes.

Kidolgozási idő: 35 perc.

1. Melyik négyzet?

- a. Csak K.
- b. Csak L.
- c. Csak M.
- d. Csak L és M.
- e. Mind az.



K



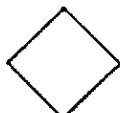
L



M

2. Melyik háromszög?

- a. Egyik sem.
- b. Csak V.
- c. Csak W.
- d. Csak W és X.
- e. Csak V és W.



U



V



W



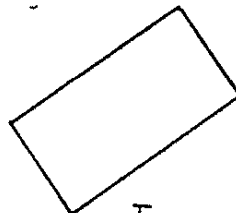
X

3. Melyik téglalap?

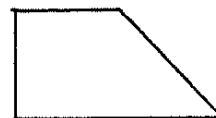
- a. Csak S.
- b. Csak T.
- c. Csak S és T.
- d. Csak S és U.
- e. Mind az.



S



T



U

4. Melyik négyzet?

- a. Egyik sem.
- b. Csak G.
- c. Csak F és G.
- d. Csak G és I.
- e. Mind az.



F



G



H



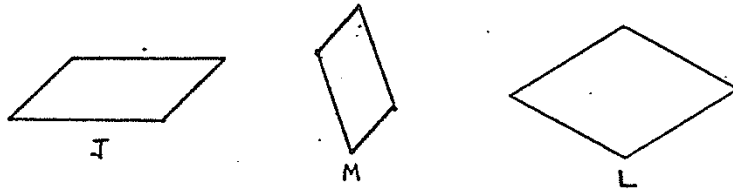
I

⁶ A teszt magyar nyelvre történő fordítása az én munkám.

* Copyright ©1980 by the University of Chicago. Reprinted with permission of the University of Chicago

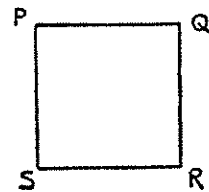
5. Melyik paralelogramma?

- a. Csak J.
- b. Csak L.
- c. Csak J és M.
- d. Egyik sem.
- e. Mind az.



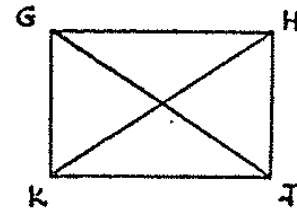
6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?

- a. PR és RS ugyanolyan hosszúságú.
- b. QS és PR merőlegesek egymásra.
- c. PS és QR merőlegesek egymásra.
- d. PS és QS ugyanolyan hosszúságú.
- e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.



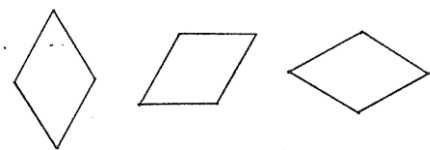
7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?

- a. Négy derékszöge van.
- b. Négy oldala van.
- c. Átlói egyenlő hosszúságúak.
- d. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
- e. a-d közül mind igaz rá.



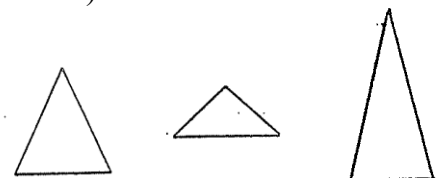
8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?

- a. A két átlója egyenlő hosszúságú.
- b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét.
- c. A két átlója merőleges egymásra.
- d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
- e. a-d közül mind igaz.



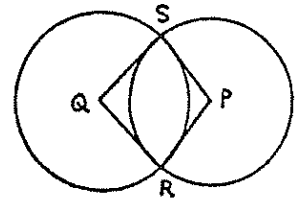
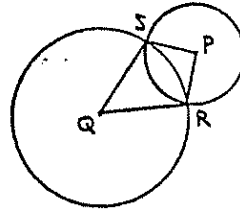
9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?

- a. Mindhárom oldala egyenlő hosszúságú kell, hogy legyen.
- b. Az egyik oldalának kétszer akkórának kell lennie, mint egy másiknak.
- c. Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen.
- d. Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie.
- e. a-d közül egyik sem igaz.



10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PQRS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?

- PQRS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja.
- PQRS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú.
- A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra.
- A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak.
- a-d közül mind igaz.



11. Tekintsük a következő két állítást:

- Az F alakzat téglalap.
- Az F alakzat háromszög.

Melyik igaz az alábbiak közül?

- Ha i igaz, akkor ii is az.
- Ha i hamis, akkor ii igaz.
- i és ii egyszerre nem lehet igaz.
- i és ii nem lehet egyszerre hamis.
- a-d közül egyik sem igaz.

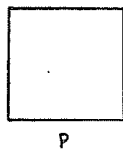
12. Tekintsük a következő két állítást:

- Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
- Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

Melyik igaz az alábbiak közül?

- i és ii egyszerre nem lehet igaz.
- Ha i igaz, akkor ii is az.
- Ha ii igaz, akkor i is az.
- Ha i hamis, akkor ii is hamis.
- a-d közül egyik sem igaz.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



- Mind az.
- Csak Q.
- Csak R.
- Csak P és Q.
- Csak Q és R.

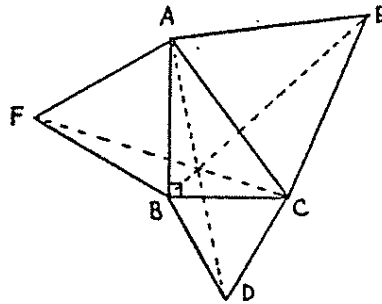
14. Melyik igaz?

- a. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is.
- b. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.
- c. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
- d. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammokra nem?

- a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
- b. Átlói egyenlő hosszúságúak.
- c. Szemközti oldalai párhuzamosak.
- d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

16. Az alábbi ábrán az ABC háromszög derékszögű (a B-nél lévő szöge a derékszög), míg a CBD, ACE és BAF háromszögek szabályosak:



Ezen információk alapján meg lehet mutatni, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át. Mít mondana számodra ez a bizonyítás?

- a. Csak a fent megrajzolt háromszög esetén lehetünk biztosak abban, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- b. Néhány, de nem mindegyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- c. Bármelyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- d. Bármelyik háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
- e. Bármelyik szabályos háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.

17. Adott három tulajdonság egy alakzatról:

- i. Vannak egyenlő hosszúságú átlói.
- ii. Az alakzat négyzet.
- iii. Az alakzat téglalap.

Melyik igaz?

- a. i-ből következik ii, amiből pedig iii.
- b. i-ből következik iii, amiből pedig ii.
- c. ii-ből következik iii, amiből pedig i.
- d. iii-ből következik i, amiből pedig ii.
- e. iii-ből következik ii, amiből pedig i.

18. Van két állításunk:

- i. Ha egy alakzat téglalap, akkor átlói felezik egymást.
- ii. Ha egy alakzat átlói felezik egymást, akkor téglalap.

Melyik igaz?

- a. i helyességének bizonyításához elég belátni, hogy ii igaz.
- b. ii helyességének bizonyításához elég belátni, hogy i igaz.
- c. ii helyességének bizonyításához elég találni egy téglalapot, melynek átlói felezik egymást.
- d. ii hamisságának bizonyításához elég találni egy olyan alakzatot, amely nem téglalap és átlói felezik egymást.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

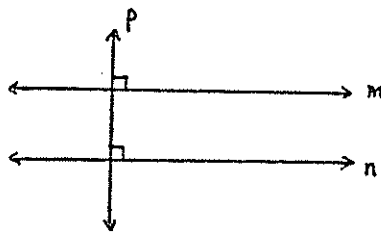
19. A geometriában:

- a. minden fogalom definiálható, és minden igaz állításról bizonyítható helyességük.
- b. minden fogalom definiálható, de bizonyos állításokról szükségszerű feltenni, hogy igazak.
- c. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de minden igaz állításról bizonyítható annak helyessége.
- d. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de szükségszerűen vannak olyan állítások, melyekről fel van téve, hogy igazak.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

20. Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

- i. Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.
- ii. Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.
- iii. Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

- a. Csak i-ből.
- b. Csak ii-ből.
- c. Csak iii-ből.
- d. i-ből vagy ii-ből.
- e. ii-ből vagy iii-ből.

21. Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S, akkor az egyenesek {P; Q}, {P; R}, {P; S}, {Q; R}, {Q; S}, {R, S}.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például {P; Q} és {P; R} metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például {P; Q} és {R; S} párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

- a. {P; R} és {Q; S} metszik egymást.
- b. {P; R} és {Q; S} párhuzamosak.
- c. {Q; R} és {R; S} párhuzamosak.
- d. {P; S} és {Q; R} metszik egymást.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

22. 1847-ben P. L. Wantzel általánosan bebizonyította, hogy csak körzővel és jelöletlen (azaz távolságmérésre alkalmatlan) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni. Milyen következtetéseket tudsz ebből leszűrni?

- a. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelöletlen vonalzóval nem lehet szöget felezni.
- b. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelölt (azaz távolságmérésre alkalmas) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni.
- c. Általánosan igaz, hogy semmilyen rajzadási eljárással nem lehet szöget harmadolni.
- d. Még lehetséges, hogy a jövőben valaki talál egy általános eljárást arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.
- e. Soha senki nem fog tudni általános eljárást adni arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.

23. Létezik olyan J által felfedezett geometria, melyben érvényes az alábbi állítás:

A háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180° .

Melyik helyes az alábbiak közül?

- a. J hibát követett el a háromszögek szögeinek mérése során.
- b. J hibázott a logikai érvelése során.
- c. J-nek rossz képzelete volt a „helyes” fogalmát illetően.
- d. J a szokásos geometria feltevéseitől különböző feltételekből indult ki.
- e. a-d közül egyik sem igaz.

24. Két geometriakönyv különböző módon definiálja a téglalap szót. Melyik helyes az alábbiak közül?

- a. A könyvek egyikében hiba van.
- b. Az egyik definíció hibás, hiszen a téglalapnak nincs két definíciója.
- c. Az egyik könyvbéli téglalapoknak más tulajdonságai kell, hogy legyenek, mint a másik könyvbelinek.
- d. Az egyik könyvbéli téglalapoknak ugyanazon tulajdonságai vannak, mint a másik könyvbelinek.
- e. Elképzelhető, hogy a különböző könyvekben a téglalapoknak más tulajdonságaik vannak.

25. Tegyük fel, hogy az i és ii állítás be van bizonyítva.

- i. Ha p, akkor q.
- ii. Ha s, akkor nem q.

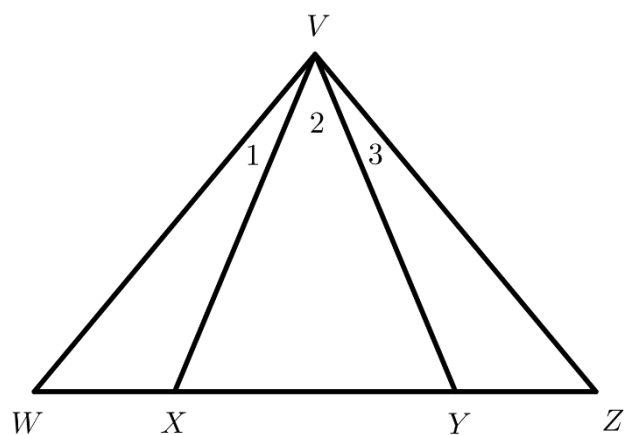
Melyik állítás következik i-ből és ii-ből?

- a. Ha p, akkor s.
- b. Ha nem p, akkor nem q.
- c. Ha p vagy q, akkor s.
- d. Ha s, akkor nem p.
- e. Ha nem s, akkor p.

B. Bizonyítás-teszt

1. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

A W -nél lévő szög annyi, mint a Z -nél lévő szög, valamint a WX szakasz hossza megegyezik az YZ szakasz hosszával.



Bizonyítsd be, hogy az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával!

Megoldás:

2. *Állítás:* Ha megrajzoljuk egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasságát, akkor az felezi a szárak által bezárt szöget.

Megoldás:

- a. Készíts jelölésekkel ellátott ábrát a fenti állításhoz!

- b. Írd le az ábrád jelöléseit felhasználva, hogy az állításban mi van feltételezve, és mit kell benne bizonyítani!

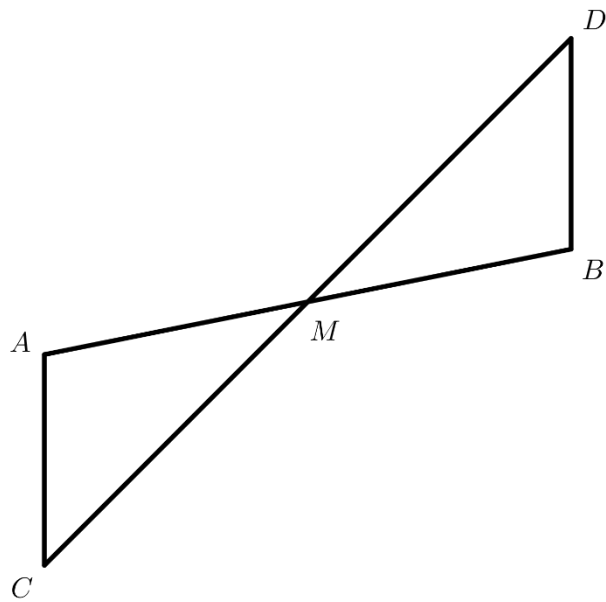
Feltevés:

Bizonyítandó:

Az állítást nem kell belátnod!

3. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

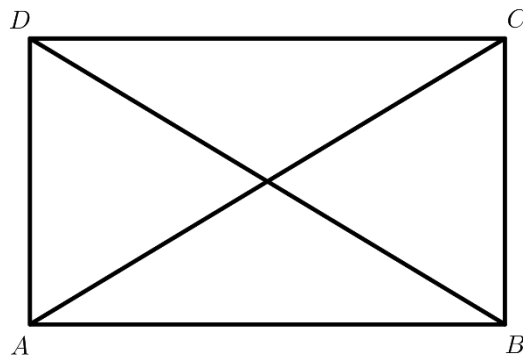
M az AB szakasz felezőpontja. M a CD szakasz felezőpontja.



Bizonyítsd be, hogy az ACM és a BDM háromszögek hasonlók!

Megoldás:

4. Az alábbi ábráról a következőt tudjuk: $ABCD$ téglalap.



Bizonyítsd be, hogy az átlók egyenlő nagyságúak!

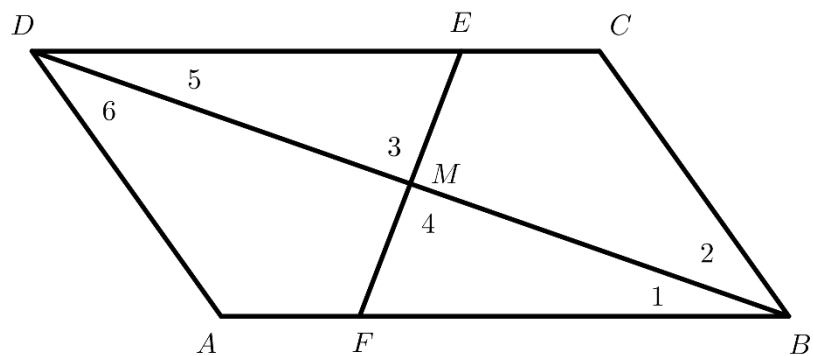
Megoldás:

Írd le a jelöléseket felhasználva, hogy mi van megadva!

Írd le a jelöléseket felhasználva, hogy mit kell bizonyítani!

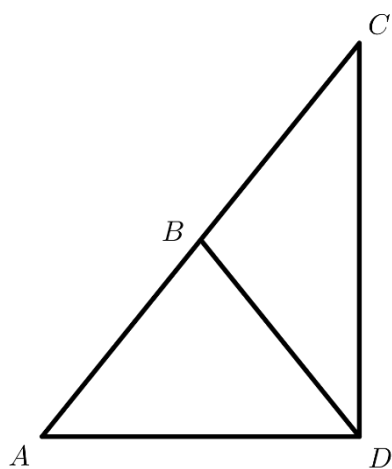
Bizonyítás:

5. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk: $AB = DC, AD = BC$. M a DB szakasz felezőpontja. M rajta van az EF szakaszon. Bizonyítsd be, hogy $FM = ME$!



Megoldás:

6. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk: B az AC szakasz felezőpontja. $AB = BD$. Bizonyítsd be, hogy a CDA szög derékszög!



Megoldás:

C. Előteszt

Azonosító:

Osztály:

1. Tekintsük a következő állításokat:

(a) „Ha egy négyszög négyzet, akkor átlói merőlegesek egymásra.”

Ebben az állításban mit tettünk fel és mi a bizonyítandó?

Feltevés:

Bizonyítandó:

(b) „A rombusz átlói merőlegesek egymásra.”

Ebben az állításban mit tettünk fel és mi a bizonyítandó?

Feltevés:

Bizonyítandó:

2. Tekintsük az előző feladat (a) részének állítását, vagyis:

„Ha egy négyszög négyzet, akkor átlói merőlegesek egymásra.”

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát a feladathoz!

Ábra:

A jelöléseid segítségével írd le, hogy mi az állításban a

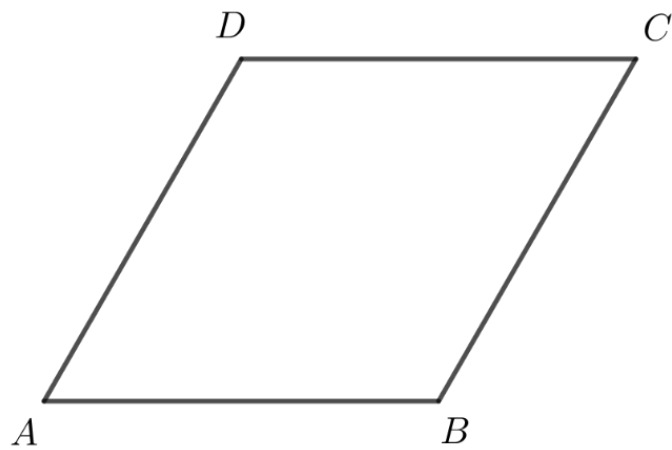
- feltevés:

- bizonyítandó:

(b) Bizonyítsd be az állítást!

Bizonyítás:

3. Igazold, hogy bármely paralelogramma szemközti szögei egyenlő nagyságúak!



$$AB \parallel CD$$

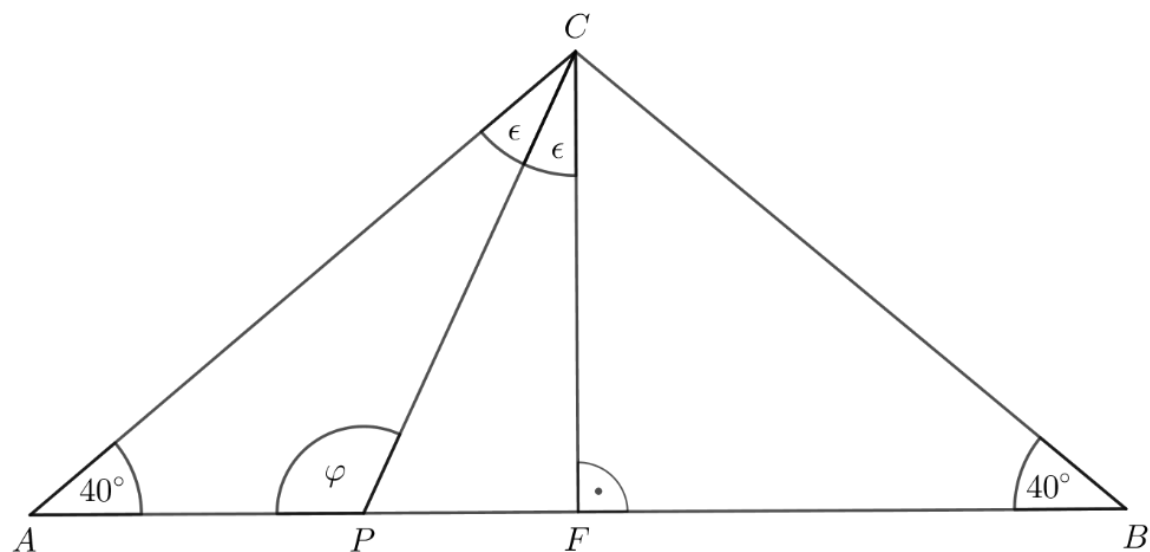
$$AD \parallel BC$$

Bizonyítás:

4. Bizonyítsd be, hogy bármely téglalap átlói merőlegesek egymásra!

Bizonyítás:

5. Számítsd ki az alábbi ábrán jelölt φ szöget! Ne csak a végeredményt írd le, a számolás menetét részletezd!



Megoldás:

6. Tekintsük az ABC egyenlő szárú háromszöget ($CA = CB$). Legyen az AB oldal felezőpontja F , az AF szakasz egy tetszőleges belső pontja pedig P . Bizonyítsd be, hogy az APC szög tompaszög!

Bizonyítás:

D. A fejlesztő tanítási kísérlet első fázisának tanórai feladatsorai

Első feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

Bármely paralelogramma átlói nem egyenlő hosszúak.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

Második feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

A paralelogramma átlói felezik a paralelogramma megfelelő szögeit.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

Harmadik feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

Egy trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180° .

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

Negyedik feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

A téglalap átlói felezik egymást.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

Ötödik feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

Ha egy deltoid két nem szemközti szöge derékszög,
akkor a deltoid négyzet.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

Hatodik feladatsor

Tekintsük az alábbi állítást:

A paralelogramma belsejében van olyan pont,
amelyik egyenlő távolságra van a csúcsoktól.

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

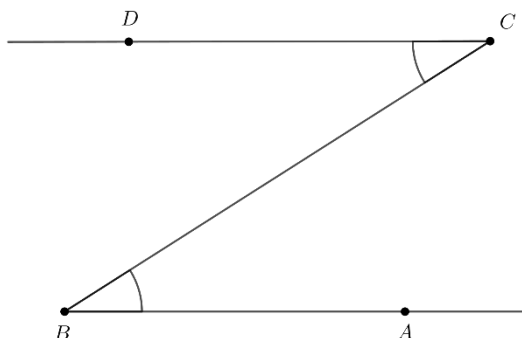
(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat **részletesen** indokold, mely során használd az ábrád jelöléseit!

Igaz / Hamis (A megfelelő szót húzd alá!)

Indoklás:

E. Az indirekt úton való érvelést mérő tanórai feladatsor

1. Tekintsük a következő ábrát.



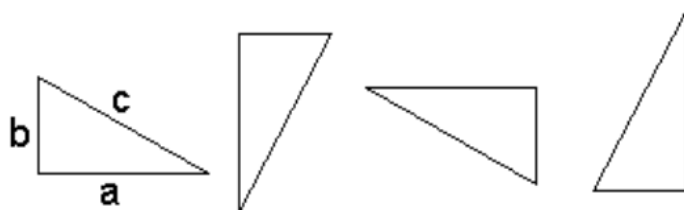
Tudjuk, hogy $\angle ABC = \angle BCD$.

Mutasd meg, hogy ekkor AB párhuzamos CD -vel, azaz az ABC és BCD szögek (írd ide, hogy milyen szögek)!

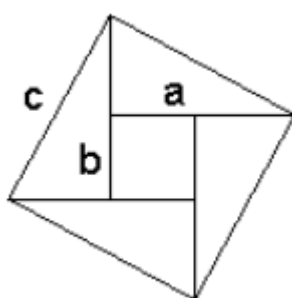
2. Egy négyszögben nem lehet négy hegyesszög.

F. A Pitagorasz-tétel öt bizonyítása angolul

1. bizonyítás



Now we start with four copies of the same triangle. Three of these have been rotated 90° , 180° and 270° , respectively. Each has area $\frac{ab}{2}$. Let's put them together without additional rotations so that they form a square with side c .

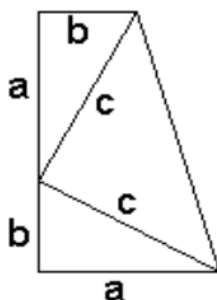


The square has a square hole with the side $(a - b)$. Summing up its area $(a - b)^2$ and $2ab$, the area of the four triangles $\frac{4ab}{2}$, we get

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

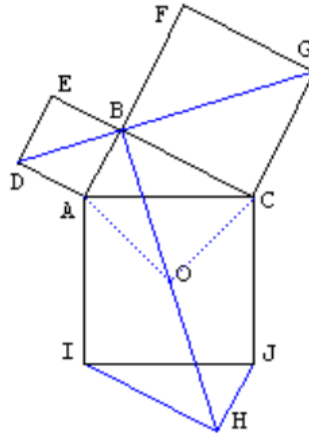
2. bizonyítás

This proof, discovered by President J. A. Garfield in 1876 (Pappas), is a variation on the previous one. But this time we draw no squares at all. The key now is the formula for the area of a trapezoid – *half sum of the bases times the altitude* – $\frac{(a+b)^2}{2} \cdot (a + b)$. Looking at the picture another way, this also can be computed as the sum of areas of the three triangles: $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$. As before, simplifications yield $a^2 + b^2 = c^2$.

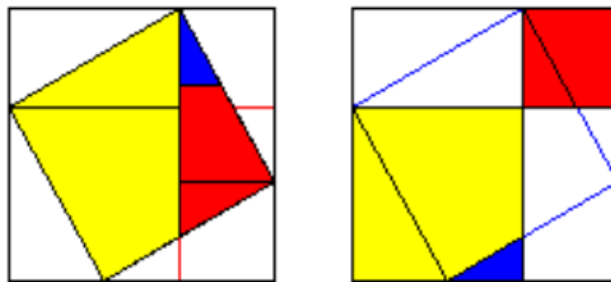


3. bizonyítás

This proof is ascribed to Leonardo da Vinci (1452-1519). Quadrilaterals $ABHI$, $JHBC$, $ADGC$, and $EDGF$ are all equal. (This follows from the observation that the angle ABH is 45° . This is so because ABC is right-angled, thus center O of the square $ACJI$ lies on the circle circumscribing triangle ABC . Obviously, angle ABO is 45° .) Now, $T(ABHI) + T(JHBC) = T(ADGC) + T(EDGF)$. Each sum contains two areas of triangles equal to ABC (IJH or BEF) removing which one obtains the Pythagorean Theorem.

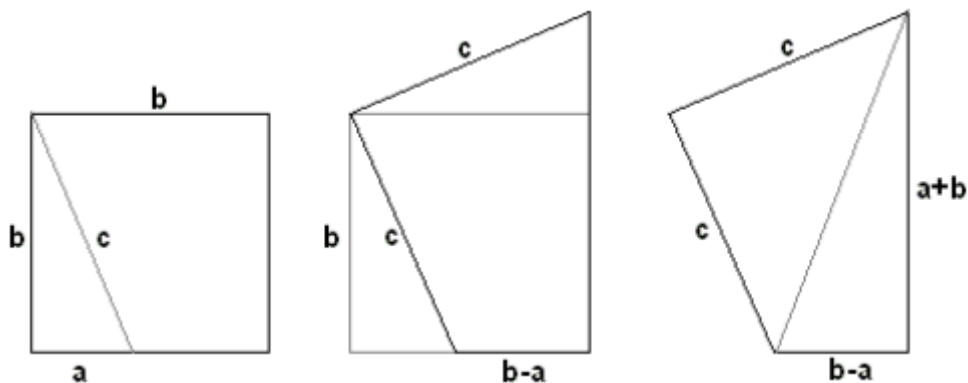


4. bizonyítás



5. bizonyítás

(W. J. Dobbs, *The Mathematical Gazette*, 7 (1913-1914), p. 168.)



This one comes courtesy of Douglas Rogers from his extensive collection. As in Proof #2, the triangle is rotated 90 degrees around one of its corners, such that the angle between the hypotenuses in two positions is right. The resulting shape of area b^2 is then dissected into two right triangles with side lengths (c, c) and $(b - a, a + b)$ and areas $\frac{c^2}{2}$ and $\frac{(b-a)(a+b)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$:

$$b^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

G. Dolgozat Pitagorasz tételéből

1. Tekintsük az alábbi állítást: „Minden négyzet trapéz.”

(a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát az állításhoz!

Ábra:

(b) Mi a feltétel, és mi a bizonyítandó az állításban? Használd az ábrád jelöléseit!

Feltétel:

Bizonyítandó:

(c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” típusú mondat formájában!

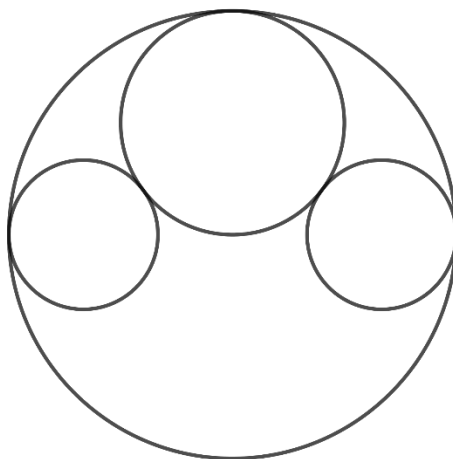
(d) Döntsd el az állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszodat indokold!

Igaz / Hamis (a megfelelőt húzd alá)

Indoklás:

2. Igazold, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

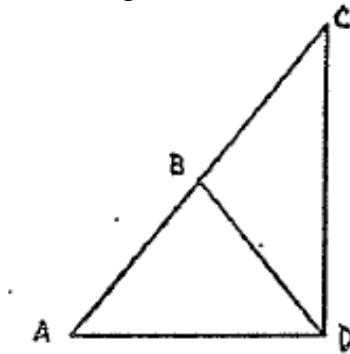
3. Mutasd meg, hogy a $3, 2n, 5n$ számok nem lehetnek egy háromszög oldalainak mérőszámai, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!
4. Két, egyenként 10 méter magas villanypózna egymástól 80 méterre van. A tetejük össze van kötve egy 82 méteres vezetékkel, melynek közepén ül egy madár. A vezeték kifeszül. Milyen magasan van a madár?
5. Az ábrán látható legnagyobb kör sugara R , a két kicsié ennek harmada. A két kis kör középpontját összekötő egyenes átmegy a legnagyobb kör középpontján. Bizonyítsd be, hogy a középső kör sugara $\frac{R}{2}$!



H. Témazáró dolgozat Pitagorasz és Thalész tételéből, valamint az érintőnéyszögekből (utóteszt)

1. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:
 B az AC szakasz felezőpontja.
 $AB = BD$.

Bizonyítsd be, hogy a CDA szög derékszög!



Megoldás:

2. Egy érintőnéyszög három oldalának hossza 2 cm, 3 cm, 5 cm. Mennyi lehet a negyedik oldalának a hossza? Válaszodat indokold!

Megoldás:

3. Tekintsük az $ABCD$ érintőtrapézt (melyben az AB és a CD oldalak a trapéz alapjai). Jelölje a beírt körének középpontját O . Mennyi az $\angle AOD$ és a $\angle BOC$ összege? Készíts ábrát, és válaszodat indokold!

Megoldás:

4. Egy derékszögű trapéz egyúttal érintőnégyyszög is, tehát van beírt köre. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza 6 cm és 4 cm. Mekkora a beírt körének sugara?

Megoldás:

I. Köztes teszt

Név, osztály:

(2019. 02. 19.)

Egy egyenlő szárú háromszög egyik szára mint átmérő fölé kört írunk. Bizonyítsd be, hogy a kapott kör felezi a háromszög alapját!

- (a) Készíts jelölésekkel ellátott ábrát!
- (b) Írd le a jelöléseiddel, hogy mi a feltevés és mi a bizonyítandó!
- (c) Fogalmazd meg az állítást „Ha... akkor...” alakban!
- (d) Végezd el a bizonyítást! Részletesen indokolj!
- (e) Írd le az állítás megfordítását! Ezt nem kell bizonyítanod, pusztán kimondanod.

Megoldás:

J. Késleltetett teszt

1. Adott a következő állítás:

„Egy trapéz egy száron fekvő két szögének összege 180° .”

Mi az állítás feltétele? Mi az állításban a bizonyítandó?

Megoldás: Feltétel:

Bizonyítandó:

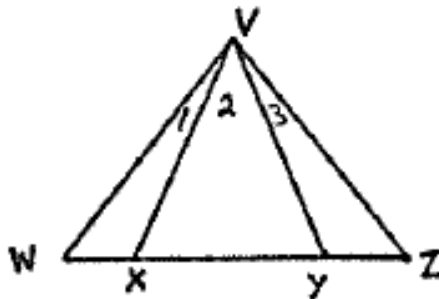
2. Egy trapézról tudjuk, hogy van két derékszög, melyek egymással szemben vannak. Igazold, hogy ekkor a trapéz téglalap!

Megoldás:

3. Az alábbi ábráról a következőket tudjuk:

A W-nél lévő szög annyi, mint a Z-nél lévő szög, valamint a WX szakasz hossza megegyezik az YZ szakasz hosszával.

Bizonyítsd be, hogy az 1-gyel jelölt szög nagysága megegyezik a 3-mal jelölt szög nagyságával!

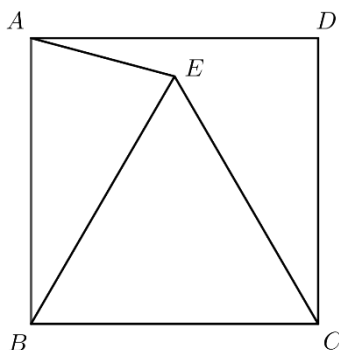


Megoldás:

4. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő szög 121° -os, míg a C csúcsánál lévő szög 31° -os. Az A csúcshoz tartozó magasság talppontja a BC egyenesen T . Az A csúcsnál lévő belső szög szögfelezője a BC oldalt D -ben metszi. Bizonyítsd be, hogy $AT = TD$!

Megoldás:

5. Az alábbi ábrán látható $ABCD$ négyzet oldalainak hossza 10 egység. Ebbe a négyzetbe berajzoltuk az ABE háromszöget úgy, hogy $\angle ABE = 30^\circ$, illetve $\angle BAE = 75^\circ$. Mekkora az EC távolság?



Megoldás: