Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Kamatlábmodellek statisztikai vizsgálata

Statistical Inference of Interest Rate Models

Fülöp Erika

Témavezető: Dr. Pap Gyula

Debreceni Egyetem

Matematika – és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2014.

1. Bevezetés

Az elmúlt években diszkrét idejű határidős kamatlábmodell paraméterbecslésének statisztikai vizsgálatával foglalkoztam. A PhD disszertációmban a kapott eredményeket mutattam be, s ezen tézisfüzet a disszertáció legfőbb eredményeinek összefoglalója. Az alapvető kutatási problémák az alábbiak voltak: statisztikai kísérlet paraméterének maximum likelihood (ML) becslésének erős konzisztenciájára elégséges feltétel adása függő minta esetén, a kamatlábmodellben az autoregressziós paraméter ML becslésének erős konzisztenciájának vizsgálata különböző esetekben, a kamatlábmodellhez kapcsolódó statisztikai kísérletsorozat lokálisan aszimptotikus normalitásának vizsgálata.

Ezen doktori értekezésben található eredmények alapját az [1], [2], [3] és [4] munkáim jelentik. Ezek, az [1] munka kivételével, közös publikációk témavezetőmmel, Pap Gyula (Szegedi Tudományegyetem) professzorral.

A következőkben $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}_+$ rendre a valós, az egész, a pozitív egész, illetve a nemnegatív egész számok halmazát jelöli.

2. Előzmények

Diszkrét idejű Heath-Jarrow-Morton (HJM) típusú határidős kamatlábmodelleket vizsgáltunk, melyeket Gáll, Pap és Zuijlen [6] javasolt. A modellek legfőbb tulajdonsága, hogy a határidős kamatlábakat véletlen folyamat helyett egy véletlen mező hajtja meg.

Jelölje a k időpontban az ℓ lejáratig hátralévő időhöz $(k,\ell\in\mathbb{Z}_+)$ tartozó határidős kamatlábat $f_{k,\ell}$. A javasolt modellek az

$$f_{k+1,\ell}=f_{k,\ell}+\alpha_{k,\ell}+\beta_{k,\ell}(S_{k+1,\ell}-S_{k,\ell})$$

dinamikát követik, ahol $S_{k,\ell}$ egy sztochasztikus mező, $\alpha_{k,\ell}$ és $\beta_{k,\ell}$ valószínűségi változók, továbbá $\{S_{k,\ell},\alpha_{k,\ell},\beta_{k,\ell}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ adaptált egy adott $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ szűréshez, minden $\ell\in\mathbb{Z}_+$ esetén. A fenti modell azon speciális esetét vizsgáljuk, amikor a határidős kamatlábakat egy térbeli autoregressziós típusú Gauss véletlen mező hajtja meg:

$$\begin{cases} S_{k,\ell}=S_{k-1,\ell}+\varrho S_{k,\ell-1}-\varrho S_{k-1,\ell-1}+\eta_{k,\ell}, \\ S_{k,-1}=S_{0,\ell}=S_{0,-1}:=0, \end{cases} \qquad k\in\mathbb{N}, \quad \ell\in\mathbb{Z}_+,$$

ahol $\varrho\in\mathbb{R}$ autoregressziós paraméter, $\eta_{i,j}\sim\mathcal{N}(0,1)$ független valószínűségi változók minden $i,j\in\mathbb{Z}_+$ esetén.

Mivel fő célunk a ϱ autoregressziós paraméter vizsgálata volt, a számítások egyszerűsítése végett feltettük, hogy a volatilitás determinisztikus, sem az időtől sem a lejáratig hátralevő időtől nem függ, azaz $\beta_{k,l}:=\beta$ $(k,l\in\mathbb{Z}_+)$.

Gáll, Pap és Zuijlen olyan elégséges feltételeket is levezetett [5], amelyek mellett a piacok kizárják az arbitrázs lehetőségét. Eszerint az általunk tanulmányozott $\{f^{(\varrho)}_{k,\ell}:k,\ell\in\mathbb{Z}_+\}$ véletlen Gauss mező által meghajtott, arbitrázsmentes, diszkrét idejű határidős kamatlábmodell minden $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\begin{cases} f_{k,\ell}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell+1}^{(\varrho)} - \varrho(f_{k,\ell-1}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell}^{(\varrho)}) = \beta\eta_{k,\ell} + \beta^2 G_\ell(\varrho), & k,\ell \in \mathbb{N}, \\ f_{k,0}^{(\varrho)} - f_{k-1,1}^{(\varrho)} = \beta\eta_{k,0} + \beta^2 G_0(\varrho), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ahol

$$G_\ell(\varrho) := \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2\ell} \varrho^j, \qquad \varrho \in \mathbb{R},$$

és az $\{f_{0,\ell}^{(\varrho)} : \ell \in \mathbb{N}\}$ kezdeti értékek adott valós számok.

Az $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : k,\ell \in \mathbb{N}\}$ térbeli autoregressziós mezővel meghajtott kamatlábfolyamatot *stabilnak, instabilnak* vagy *felrobbanónak* nevezzük, ha $|\varrho| < 1$, $|\varrho| = 1$, vagy $|\varrho| > 1$.

3. Konzisztencia

Az előbb bevezetett határidős kamatláb modellben az autoregressziós paraméter ML becslésének erős konzisztenciáját szerettük volna bizonyítani. A nehézséget az okozta, hogy a likelihood függvény alakja miatt nem lehet explicit alakban megadni a ϱ maximum likelihood (ML) becslését, továbbá a mintánk függő változókból áll. Heijmans és Magnus [7] munkájukban gyenge konzisztenciára adtak feltételeket függő minta esetén, illetve megfogalmaztak bizonyítás nélkül egy elégséges feltételt az erős konzisztenciára. Ennek alapján kidolgoztunk egy feltételrendszert a ML becslés erős konzisztenciájára szintén függő mintára, és ezt később a kamatlábmodellünk esetén alkalmaztuk is.

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ valószínűségi mező, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív egészek sorozata, és minden $n \in \mathbb{N}$ és $\theta \in \Theta$ esetén legyen $\xi_n^{(\theta)} : \Omega \to \mathbb{R}^{d_n}$ egy véletlen vektor úgy, hogy a $\mathsf{P}_{n,\theta}$ eloszlása abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre vonatkozólag az $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n})\big)$ mérhető téren. Ekkor $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{\mathsf{P}_{n,\theta} : \theta \in \in \Theta\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ egy statisztikai kísérletsorozat. Jelölje továbbá a $\xi_n^{(\theta)}$ sűrűségfüggvényét (likelihood függvényét) $L_n : \mathbb{R}^{d_n} \to [0, \infty)$, $x \mapsto L_n(x; \theta)$, és $\Lambda_n(x; \theta) := \log L_n(x; \theta) \in [-\infty, \infty)$ a loglikelihood függvényt, ahol $\log 0 := -\infty$.

Ha a paramétertér kompakt és a likelihood függvény folytonos a paramétertéren, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik a paraméternek egy $\widehat{\theta}_n : \mathbb{R}^{d_n} \to \Theta$ mérhető ML becslése az $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{\mathsf{P}_{n,\theta} : \theta \in \Theta\}\big)$ statisztikai kísérletben. (Lásd pl. Jennrich [8, Lemma 2].)

A mérhető ML becslés létezését garantáló feltételek megkövetelése mellett az alábbi erős konzisztenciára vonatkozó feltételrendszert dolgoztuk ki és bizonyítottuk. Ennek *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* része tartalmazza a korábban említett, Heijmans és Magnus által bizonyítás nélkül kimondott állítást.

3.1. Tétel (Fülöp, Pap [3], Theorem 1.4)**.** *Tegyük fel, hogy a* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *paramétertér kompakt, és minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in \mathbb{R}^{d_n}$ *esetén a* $\theta \mapsto L_n(x; \theta)$ *likelihood függvény folytonos* Θ*-n. Legyen* $\theta_0 \in \Theta$*. Tekintsük a következő állításokat:*

(i) létezik pozitív valós számoknak egy $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozata, melyre* $\liminf_{n\to\infty} k_n > 0$, *és minden* $\theta\in\Theta\setminus\{\theta_0\}$ *esetén létezik a* θ*-nak* $N(\theta,\theta_0)$ *környezete, és* $I(\theta,\theta_0)$ *mennyiség úgy, hogy* $\inf_{\phi\,\in\, N(\theta,\theta_0)} I(\phi,\theta_0) > 0$, *és*

$$\sup_{\phi\,\in\, N(\theta,\theta_0)} \left| \frac{1}{k_n}\big(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)\big) + I(\phi,\theta_0) \right| \to 0,$$

ha $n\to\infty$ P*-m.b.,*

(ii) minden $\theta\in\Theta\setminus\{\theta_0\}$ *esetén létezik a* θ*-nak* $N(\theta,\theta_0)$ *környezete, melyre*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\phi\,\in\, N(\theta,\theta_0)} \big(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)\big) < 0 \qquad \mathsf{P}\text{-}m.b.,$$

(iii) a $\theta_0\in\Theta$ *mérhető maximum likelihood becsléseinek minden* $(\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozata erősen konzisztens, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = \theta_0 \qquad \mathsf{P}\text{-}m.b.;$$

(iv) a θ_0 *minden* N *környezete esetén*

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\sup_{\phi\,\in\,\Theta\setminus N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \sup_{\phi\,\in\, N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) \right] \leqslant 0$$

P*-m.b.*

Ekkor (i) $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv).*

Az (i) feltétel szerint a $\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)-\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi)$ kifejezés egy alkalmasan kicsi környezetben alkalmasan skálázva egyenletesen konvergál az információs mennyiséghez. Nevezetesen

$$\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)-\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi)=I(\phi,\theta_0)k_n+o(k_n) \qquad \mathsf{P}\text{-m.b.}$$

ha $n\to\infty$, $\phi\in N(\theta,\theta_0)$-ban egyenletesen .

4. Erős konzisztencia a HJM-típusú modellben

Ebben a fejezetben a korábban bemutatott diszkrét idejű HJM-típusú véletlen autoregressziós mezővel meghajtott határidős kamatlábfolyamat $\varrho\in\mathbb{R}$ autoregressziós paraméter ML becslésének vizsgáljuk az erős konzisztenciáját. Az $f_{k,\ell}$ határidős kamatláb függ a k megfigyelési időtől és az ℓ lejáratig hátralevő időtől. Kétféle mintaelemszám növekedésnél vizsgáltuk a fenti kérdést. Első vizsgálataink alkalmával mindkét időtényezővel tartottunk a végtelenbe. Később azonban a lejáratig hátralevő idő felső korlátját lerögzítettük, hisz természetesen felmerülő akadály, hogy nem állnak rendelkezésünkre adatok tetszőlegesen hosszú lejáratig hátralevő idővel. Azaz a második esetben minden megfigyelési időpontban a határidős kamatlábak ugyanolyan lejáratig hátralevő időkkel rendelkeznek.

Legyenek K,L és $\{K_n,L_n : n\in\mathbb{N}\}$ pozitív egészek. Az általunk tanulmányozott esetek

(i) $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leqslant k \leqslant K_n, 0 \leqslant \ell \leqslant L_n\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$ ha $n \to \infty$,

(ii) $\mathbf{f}_{n}^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leqslant k \leqslant K_n, 0 \leqslant \ell \leqslant L\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ ha $n \to \infty$, L fix.

Az erős konzisztencia igazolásához az előző fejezetben ismertetett függő mintára kidolgozott (i) elégséges feltételt ellenőriztük és az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$ minta esetén stabil és mindkét instabil esetben, $\varrho = 1$ illetve $\varrho = -1$ esetén, sikerült bizonyítanunk az erős konzisztenciát. Azaz megadtunk olyan r_{n,ϱ_0} skálázó tényezőket és $I(\varrho, \varrho_0)$ információs mennyiségeket, melyekkel teljesül a 3.1. Tétel (i) feltétele. Mivel a bizonyítási módszer nem függ a volatilitástól, a számítások egyszerűsítése végett feltettük, hogy $\beta := 1$.

4.1. Tétel. (Fülöp, Pap [4, Theorem 1]) *Legyenek* $K, L \in \mathbb{N}$ *és legyenek* $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, *ahol* $K_n = nK + o(n)$ *és* $L_n = nL + o(n)$, *ha* $n \to \infty$. *Legyen* $\varrho_0 \in [-1, +1]$, *és válasszuk úgy az* $a, b \in \mathbb{R}$ *konstansokat, hogy* $-1 < a < b < +1$ *és* $\varrho_0 \in \Theta$, *ahol*

$$\Theta := \begin{cases} [-1, b], & \text{ha} \ \ \varrho_0 = -1, \\ [a, b], & \text{ha} \ \ |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{ha} \ \ \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $\widehat{\varrho}_n$ *az igazi* ϱ_0 *paraméternek egy, az* $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1 \leqslant k \leqslant K_n,\, 0 \leqslant \ell \leqslant L_n}$ *mintán alapuló, tetszőle-*

ges mérhető ML becslése. Ekkor a $(\widehat{\varrho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy erősen konzisztens becslése* ϱ_0*-nak.*

A második vizsgált esetben, azaz az $\mathbf{f}_n^{(\varrho)}$ minta esetén, a fenti elégséges feltétel ellenőrzésével csak a stabil és a $\varrho=+1$ instabil esetben tudtunk erős konzisztenciát igazolni.

4.2. Tétel. (Fülöp [1, Theorem 4.1.]) *Legyenek* $K, L \in \mathbb{N}$ *és legyenek* $\{K_n\in\mathbb{N} : n\in\mathbb{N}\}$*, ahol* $K_n = nK + o(n)$ *ha* $n\to\infty$*. Legyen* $\varrho_0 \in (-1, +1]$*, és válasszunk úgy az* $a, b\in\mathbb{R}$ *konstansokat, hogy* $-1 < a < b < +1$ *és* $\varrho_0 \in \Theta$*, ahol*

$$\Theta := \begin{cases} [a, b], & \text{ha } |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{ha } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

Minden $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen* $\widehat{\varrho}_n$ *az igazi* ϱ_0 *paraméternek egy, az* $\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1\leqslant k\leqslant K_n,\, 0\leqslant \ell\leqslant L}$ *mintán alapuló, tetszőleges mérhető ML becslése. Ekkor a* $(\widehat{\varrho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy erősen konzisztens becslése* ϱ_0*-nak.*

Meglepő módon a két vizsgált minta esetén az r_{n,ϱ_0} skálázó tényezők megegyeznek (a bizonyított esetekben), pedig a mintaelemszám első esetben n^2-tel, második esetben pedig n-nel arányosnak tekinthető.

Továbbá ebben a fejezetben foglaltuk össze az R [10] statisztikai programcsomaggal végzett szimulációs eredményeinket is. Becsléseink az $\mathbf{f}_n^{(\varrho)}$ mintán alapultak (mivel ez a realisztikusabb eset), melyet az arbitrázsmentes modell alapján generáltunk adott β volatilitás és $\{f_{0,\ell} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ kezdeti értékek mellett. Az elméleti eredményekkel összhangban a szimulációs eredmények alátámasztják az erős konzisztenciát stabil és $\varrho = +1$ instabil esetben, sőt a szimuláció a még nem bizonyított $\varrho = -1$ instabil esetben is erős konzisztenciára enged következtetni. Az ML becslés aszimptotikus normalitását is vizsgáltunk, ami $|\varrho| < 1$ és $\varrho = +1$ esetben a szimuláció alapján teljesül. A $\varrho = -1$ esetben viszont elvetettük a normalitást a Shapiro-Wilk próba alapján.

5. Lokális aszimptotikus normalitás

Ezen fejezetben a kamatlábmodellhez kapcsolódó statisztikai kísérletsorozat lokális aszimptotikus normalitását (LAN) vizsgáltuk Le Cam féle értelemben [9] (lásd továbbá van der Vaart [11]). Sikerült igazolnunk a LAN-t stabil és mindkét instabil esetben is az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$ minta esetén.

Legyenek $K, L \in \mathbb{N}$, legyenek $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$, ahol $K_n = nK + o(n)$ és $L_n = nL + o(n)$, ha $n \to \infty$. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $\varrho \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\mathsf{P}_{n,\varrho}$ az $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := \big(f_{k,\ell}^{(\varrho)}\big)_{1 \leqslant k \leqslant K_n,\, 0 \leqslant \ell \leqslant L_n}$ minta eloszlása az $\big(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)})\big)$ mérhető téren. Mivel a bizonyítás menetét nem befolyásolja, a számítások egyszerűsítése végett itt is feltettük, hogy $\beta = 1$.

5.1. Tétel. (Fülöp, Pap [2, Theorem 3.1.])

Az $\Big(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}), \{\mathsf{P}_{n,\varrho} : \varrho \in \mathbb{R}\}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *statisztikai kísérletsorozat minden* $\varrho \in [-1,1]$ *esetén LAN.*

A stabil és instabil eset meglehetősen különböző: többek között kiemelendő, hogy a három esetben különböző skálázó tényezők mellett bizonyíthatóak az aszimptotikus eredmények. Stabil esetben a skálázó tényező n, ami klasszikus abban az értelemben, hogy a mintaméret négyzetgyökével arányos. Meglepő módon az instabil esetben $\varrho = -1$ és $\varrho = +1$ esetén a skálázó tényezők különbözőek, nevezetesen n^2 és n^3. Ezen skálázó tényezők a mintából származó Fischer információs mennyiséggel vannak összhangban.

Az 5.1. Tétel felhasználásával konstruálhatunk egy aszimptotikusan optimális próbát [11, 15.4 Tétel]. Az állítás részletes ismertetésétől ezen tézisfüzetben eltekintünk.

1 Introduction

My research activity in the past years was focused on statistical inference for discrete time forward rate models. In my PhD thesis I presented the main results I obtained, and the present work is an outline of these thesis. The basic research problems were the following: to give a sufficient condition for strong consistency of the maximum likelihood (ML) estimator in statistical experiments in dependent case, to study strong consistency of ML estimators for autoregressive parameter of interest rate model in different cases, and to study local asymptotic normality of sequence of statistical experiments related to the interest rate model.

The results summarised in the thesis are based on [1], [2], [3] and [4]. Except for [1], these papers of mine are joint works with my supervisor Prof. Gyula Pap (University of Szeged, Hungary).

In this work $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Z}_+$ will denote the sets of real numbers, integers, positive integers and nonnegative integers, respectively.

2 Background

We investigate Heath-Jarrow-Morton (HJM) type forward interest rate models introduced by Gáll, Pap and Zuijlen [6]. The main feature of these models is that the forward rates are driven by a random field instead of a single driving process.

For $k, \ell \in \mathbb{Z}_+$ let $f_{k,\ell}$ denote the forward interest rate at time k with time to maturity date ℓ. The proposed model is assumed to follow the dynamics

$$f_{k+1,\ell} = f_{k,\ell} + \alpha_{k,\ell} + \beta_{k,\ell}(S_{k+1,\ell} - S_{k,\ell}),$$

where $S_{k,\ell}$ is a random field, $\alpha_{k,\ell}$ and $\beta_{k,\ell}$ are random variables and $\{S_{k,\ell}, \alpha_{k,\ell}, \beta_{k,\ell}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ are adapted to a given filtration $\{\mathcal{F}_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ for all $\ell \in \mathbb{Z}_+$. We study a special case of above model, when the forward interest rates are driven by a spatial autoregressive Gauss type random field:

$$\begin{cases} S_{k,\ell} = S_{k-1,\ell} + \varrho S_{k,\ell-1} - \varrho S_{k-1,\ell-1} + \eta_{k,\ell}, \\ S_{k,-1} = S_{0,\ell} = S_{0,-1} := 0, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

where $\varrho \in \mathbb{R}$ is an autoregressive parameter and $\eta_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$ are independent standard normally distributed random variables.

Our main aim was to study the autoregressive parameter ϱ, and to simplify our calculations we supposed that volatility is deterministic, it does not depend on time neither on time to maturity value, i.e. $\beta_{k,l} := \beta \ \ (k, l \in \mathbb{Z}_+)$.

Gáll, Pap and Zuijlen derived sufficient conditions under which there were no arbitrage opportunities on the market. Namely, the no-arbitrage discrete time forward interest rate curve model $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : k, \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ given by

$$\begin{cases} f_{k,\ell}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell+1}^{(\varrho)} - \varrho(f_{k,\ell-1}^{(\varrho)} - f_{k-1,\ell}^{(\varrho)}) = \beta\eta_{k,\ell} + \beta^2 G_\ell(\varrho), & k, \ell \in \mathbb{N}, \\ f_{k,0}^{(\varrho)} - f_{k-1,1}^{(\varrho)} = \beta\eta_{k,0} + \beta^2 G_0(\varrho), & k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

where $\varrho \in \mathbb{R}$,

$$G_\ell(\varrho) := \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2\ell} \varrho^j, \qquad \varrho \in \mathbb{R},$$

and the initial values $\{f_{0,\ell}^{(\varrho)} : \ell \in \mathbb{N}\}$ are given real numbers.

The forward rate process $\{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : k, \ell \in \mathbb{N}\}$ driven by spatial autoregressive field is called *stable, unstable*, or *explosive* if $|\varrho| < 1$, $|\varrho| = 1$, or $|\varrho| > 1$, respectively.

3 Consistency

In the discrete time forward interest rate curve model (introduced before) we wanted to prove the strong consistency of the ML estimator of the autoregressive parameter ϱ. The difficulty is that no explicit formula is available for ML estimators of ϱ due to complexity of likelihood function, furthermore the sample consists of dependent random variables.

Heijmans and Magnus [7] gave conditions for weak consistency in dependent case and mentioned without proof a sufficient condition for strong consistency. According to this we worked out a condition system for strong consistency of ML estimators also in dependent case, and we applied it to our interest rate model later.

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ be a probability space, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of positive integers, and for each $n \in \mathbb{N}$ and $\theta \in \Theta$ let $\xi_n^{(\theta)} : \Omega \to \mathbb{R}^{d_n}$ be a random vector such that its distribution $\mathsf{P}_{n,\theta}$ is absolutely continuous on measurable space $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n})\big)$. We call $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{\mathsf{P}_{n,\theta} : \theta \in \Theta\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of statistical experiments. In addition let $L_n : \mathbb{R}^{d_n} \to [0,\infty)$, $x \mapsto L_n(x;\theta)$ denote the density function (likelihood function) of $\xi_n^{(\theta)}$, and let $\Lambda_n(x;\theta) := \log L_n(x;\theta) \in [-\infty,\infty)$ denote the loglikelihood function, where we put $\log 0 := -\infty$.

If the parameter parameter set Θ is compact and the loglikelihood function is continuous on Θ, then for all $n \in \mathbb{N}$ there exists a measurable ML estimator $\widehat{\theta}_n : \mathbb{R}^{d_n} \to \Theta$ for the parameter in the statistical experiment $\big(\mathbb{R}^{d_n}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_n}), \{\mathsf{P}_{n,\theta} : \theta \in \Theta\}\big)$ (see, e.g. Jennrich [8, Lemma 2]).

By requiring existing measurable ML estimator we worked out and proved a condition system for strong consistency. The statement given by Heijmans and Magnus without proof, mentioned above, is contained in the following theorem as the implication $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Theorem 3.1 (Fülöp, Pap [3], Theorem 1.4)**.** *Assume that the parameter set* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *is compact, and for every* $n \in \mathbb{N}$ *and* $x \in \mathbb{R}^{d_n}$ *the likelihood function* $\theta \mapsto L_n(x;\theta)$ *is continuous on* Θ*. Let* $\theta_0 \in \Theta$*. Consider the following statements:*

(i) there exists a sequence $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *of real numbers with* $\liminf_{n\to\infty} k_n > 0$, *and for every* $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$, *there exists a neighbourhood* $N(\theta,\theta_0)$ *of* θ *and a quantity* $I(\theta,\theta_0)$ *such that* $\inf_{\phi\,\in\,N(\theta,\theta_0)} I(\phi,\theta_0) > 0$ *and*

$$\sup_{\phi\,\in\,N(\theta,\theta_0)} \left| \frac{1}{k_n}\big(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)\big) + I(\phi,\theta_0) \right| \to 0,$$

P-*a.s. (almost surely) if* $n \to \infty$,

(ii) for every $\theta\in\Theta\setminus\{\theta_0\}$, *there exists a neighbourhood* $N(\theta,\theta_0)$ *of* θ *such that*

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{\phi\,\in\,N(\theta,\theta_0)} \big(\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)\big) < 0 \quad \mathsf{P}\text{-}a.s.,$$

(iii) every sequence $(\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *of measurable maximum likelihood estimators is a strongly consistent estimator of the true value* $\theta_0 \in \Theta$, *that is*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\theta}_n = \theta_0 \qquad \mathsf{P}\text{-}a.s.,$$

(iv) for every neighbourhood N *of* θ_0 *we have*

$$\limsup_{n\to\infty} \left[\sup_{\phi\,\in\,\Theta\setminus N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) - \sup_{\phi\,\in\,N} \Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi) \right] \leqslant 0$$

P-*a.s.*

Then (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

The assumption (i) means that $\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)-\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi)$ in a suitable small neighbourhood suitably scaled tends to the information quantity uniformly in ϕ, namely,

$$\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\theta_0)-\Lambda_n(\xi_n^{(\theta_0)};\phi)=I(\phi,\theta_0)k_n+o(k_n) \qquad \mathsf{P}\text{-a.s.}$$

as $n\to\infty$ uniformly in $\phi\in N(\theta,\theta_0)$.

4 Strong consistency in a HJM-type model

In this section we study the strong consistency of the ML estimator of the autoregressive parameter $\varrho\in\mathbb{R}$ of the earlier introduced discrete time HJM-type forward interest rate model driven by an autoregressive random field. The forward interest rate $f_{k,\ell}$ depends on observation time k and time to maturity date ℓ. We study the above mentioned question in two cases of increasing size of sample. First, we tend to infinity by both time factor. Second, we consider another realistic model when the time to maturity date is constant, that is we supposed that we could observe only forward rates until a fixed time to maturity date. So in second case the observations of the forward rates are given for the same time to maturity values at each time point.

Let K,L and $\{K_n,L_n : n\in\mathbb{N}\}$ are positive integers. Cases studied by us:

(i) $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leqslant k \leqslant K_n, 0 \leqslant \ell \leqslant L_n\}$, where $K_n = nK + o(n)$ and $L_n = nL + o(n)$ as $n \to \infty$,

(ii) $\mathbf{f}_{n}^{(\varrho)} := \{f_{k,\ell}^{(\varrho)} : 1 \leqslant k \leqslant K_n, 0 \leqslant \ell \leqslant L\}$, where $K_n = nK + o(n)$ as $n \to \infty$ and L is fixed.

To check the sufficient condition (i) for dependent sample of Theorem 3.1 we succeeded in proving strong consistency for sample $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$ in the stable and in both unstable cases. Namely, we gave such scaling factors r_{n,ϱ_0} and information quantities $I(\varrho, \varrho_0)$ which satisfy condition (i) of Theorem 3.1. Because the method of the proof does not depend on value of the volatility, for the shake of simplicity we fixed $\beta := 1$.

Theorem 4.1. (Fülöp, Pap [4, Theorem 1]) *Let $K, L \in \mathbb{N}$ and let $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ be such that $K_n = nK + o(n)$ and $L_n = nL + o(n)$ as $n \to \infty$. Let $\varrho_0 \in [-1, +1]$, and choose $a, b \in \mathbb{R}$ such that $-1 < a < b < +1$ and $\varrho_0 \in \Theta$, where*

$$\Theta := \begin{cases} [-1, b], & \text{if } \varrho_0 = -1, \\ [a, b], & \text{if } |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{if } \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

For each $n \in \mathbb{N}$, let $\widehat{\varrho}_n$ be an arbitrary measurable maximum likelihood estimator of the true value ϱ_0 of the parameter based on a sample $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1 \leqslant k \leqslant K_n,\, 0 \leqslant \ell \leqslant L_n}$. Then the sequence $(\widehat{\varrho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a strongly consistent estimator of ϱ_0.

Provided that the sample is $\mathbf{f}_n^{(\varrho)}$, by checking the above mentioned sufficient condition, we were able to prove strong consistency in the stable case and in the unstable case $\varrho = +1$.

Theorem 4.2. (Fülöp [1, Theorem 4.1.]) *Let* $K, L \in \mathbb{N}$ *and let* $\{K_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ *be such that* $K_n = nK + o(n)$ *as* $n \to \infty$. *Let* $\varrho_0 \in (-1, +1]$, *and choose* $a, b \in \mathbb{R}$ *such that* $-1 < a < b < +1$ *and* $\varrho_0 \in \Theta$, *where*

$$\Theta := \begin{cases} [a, b], & \text{if } \ |\varrho_0| < 1, \\ [a, +1], & \text{if } \ \varrho_0 = +1. \end{cases}$$

For each $n \in \mathbb{N}$, *let* $\widehat{\varrho}_n$ *be an arbitrary measurable maximum likelihood estimator of the true value* ϱ_0 *of the parameter based on a sample* $\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)} := (f_{k,\ell}^{(\varrho_0)})_{1 \leqslant k \leqslant K_n,\, 0 \leqslant \ell \leqslant L}$. *Then the sequence* $(\widehat{\varrho}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *is a strongly consistent estimator of* ϱ_0.

Surprisingly in the two studied cases the scaling factors r_{n,ϱ_0} are the same (in proved cases) even though the size of sample in first case is proportional to n^2 but in second case proportional to n.

In addition, we summarised in this section the results of the simulations with the R statistical software environment [10] too. Our estimations were based on samples $\mathbf{f}_n^{(\varrho_0)}$ (because it is more realistic case), which are generated according to our no-arbitrage model given the volatility β and initial values $\{f_{0,\ell} : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$. Simulations suggest that ML estimator is strongly consistent in the stable and in both unstable cases (however

$\varrho = -1$ case is not proved yet). We studied asymptotic normality too. It seems that the ML estimator is asymptotically normal in cases $|\varrho| < 1$ and $\varrho = +1$ in contrast to the case $\varrho = -1$, where Shapiro-Wilk test rejected normality.

5 Local asymptotic normality

In this section we studied local asymptotic normality (LAN) of the sequence of statistical experiments related to the interest rate model in the sense of Le Cam [9], see also van der Vaart [11]. We succeeded in proving LAN in the stable and in both of unstable cases based on the type of sample $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$.

Let $K, L \in \mathbb{N}$ and let $\{K_n, L_n \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}\}$ be such that $K_n = nK + o(n)$ and $L_n = nL + o(n)$ as $n \to \infty$. For each $n \in \mathbb{N}$ and $\varrho \in \mathbb{R}$ let $\mathsf{P}_{n,\varrho}$ be the distribution of the sample $\mathbf{f}_{nn}^{(\varrho)}$ on measurable space $\big(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)})\big)$. Because the method of the proof does not depend on value of the volatility, for the shake of simplicity we fixed $\beta := 1$ again.

Theorem 5.1. (Fülöp, Pap [2, Theorem 3.1.])
The sequence $\Big(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{K_n(L_n+1)}), \{\mathsf{P}_{n,\varrho} : \varrho \in \mathbb{R}\}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *of statistical experiments is LAN at each point* $\varrho \in [-1,1]$.

The stable and unstable cases are very different: among others we emphasize that the asymptotic results can be proved using different scaling factors. In the stable case the scaling factor is n, which is classical in the sense that it is proportional to the square root of the sample size. Surprisingly, in the unstable cases $\varrho = -1$ and $\varrho = +1$, the scaling factors are different, namely, n^2 and n^3, respectively. These scaling factors are in connection with Fisher information quantity contained in the sample.

Using Theorem 5.1 one can construct asymptotically optimal tests, see [11, Theorem 15.4]. We omit to give the detailed statements here.

Hivatkozások / References

[1] E. Fülöp, Strong consistency of parameter estimators and simulations in a forward interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (1-2): 327–348, 2014.

[2] E. Fülöp and G. Pap, Asymptotically optimal tests for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **73** (4): 637–661, 2007.

[3] E. Fülöp and G. Pap, Note on strong consistency of maximum likelihood estimators for dependent observations, Proceedings of the *7th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2007). vol. I, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft, pp. 223–228, 2008.

[4] E. Fülöp and G. Pap, Strong consistency of maximum likelihood estimators for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Lithuanian Math.J.*, **49** (1): 5–25, 2009.

[5] J. Gáll, *Some Problems in Discrete Time Financial Market Models*, Ph.D. Dissertation, Debrecen, 2008.

[6] J. Gáll, G. Pap and M.v. Zuijlen, Forward interest rate curves in discrete time settings driven by random fields, *Comput. Math. Appl.*, **51** (3-4): 387–396, 2006.

[7] R.D.H. Heijmans and J.R. Magnus, Consistent maximum-likelihood estimation with dependent observations: The general (non-normal) case and the normal case, *Journal of Econometrics*, **32**: 253–285, 1986.

[8] R.I. Jennrich, Asymptotic properties of non-linear least squares estimators, *Ann. Math. Statist.*, **40** (2): 633–643, 1969.

[9] L. Le Cam, *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[10] R Development Core Team, R: A Language and Environment for Statistical Computing, ISBN 3-900051-07-0, *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria, 2008, *http://www.R-project.org*

[11] A.W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

A jelölt publikációi / Publications of the author

Tudományos közlemények / Research papers

(i) E. Fülöp and G. Pap, Asymptotically optimal tests for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **73** (4): 637–661, 2007.

(ii) E. Fülöp and G. Pap, Note on strong consistency of maximum likelihood estimators for dependent observations, Proceedings of the *7th International Conference on Applied Informatics* (Eger, 2007). vol. I, Eger, B. V. B. Nyomda és Kiadó Kft, pp. 223–228, 2008.

(iii) E. Fülöp and G. Pap, Strong consistency of maximum likelihood estimators for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Lithuanian Math. J.*, **49** (1): 5–25, 2009.

(iv) E. Fülöp, Strong consistency of parameter estimators and simulations in a forward interest rate model, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **80** (1-2): 327–348, 2014.

Konferencia előadások / Conference talks

(i) Estimation of AR parameter of an unstable HJM type interest rate model, *XXVI. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Sovata-Bai, Romania (2006)*

(ii) Local asymptotic normality of unstable HJM type interest rate model, *7th International Conference on Applied Informatics, Eger, Hungary (2007)*

(iii) Statistical problems in a discrete time random field HJM type interest rate model, *15th European Young Statisticians Meeting, Castro Urdiales, Spain (2007)*

(iv) Statistical inference in an interest rate model, *12th Young Statisticians Meeting, Piran, Slovenia (2007)*

(v) Statisztikai következtetések egy diszkrét idejû HJM-típusú határidõs kamatlábmodellben, *I. Országos Gazdasági és Pénzügyi matematikai Phd konferencia, Budapest, Hungary (2008)*

(vi) Asymptotic inference for a discrete time random field HJM type interest rate model, *Barcelona Conference on Asymptotic Statistics, Bellaterra (Barcelona), Spain (2008)*

(vii) Simulations of an HJM type forward interest rate model, *Probability and Statistics with Applications (Dedicated to the 100th anniversary of the birthday Béla Gyires), Debrecen, Hungary (2009)*

(viii) Strong Consistency of Maximum Likelihood Estimators of AR Parameter for a HJM Type Interest Rate Model, *29th European Meeting of Statisticians, Budapest, Hungary (2013)*

(ix) HJM típusú határidős kamatlábmodell szimulációja, *16. Gyires Béla Informatikai Nap, Debrecen, Hungary (2013)*