SZAKDOLGOZAT

Tóth Géza Bence

Debrecen
2008.

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Számelmélet a középiskolában

Témavezető:
Dr. Bérczes Attila
egyetemi adjunktus

Készítette:
Tóth Géza Bence
matematika – informatika tanári

Debrecen
2008

Bevezetés

„Az világ alkotóeleme ... a mennyiség, s az emberi szellem (e világban világfölötti) semmit sem fog fel olyan jól, mint éppen a mennyiséget, minek felismerésére nyílvánvalóan teremtetett.” *Johannes Kepler*

A számelmélet a matematika egyik legrégibb ága. Régészeti leletek bizonyítják, hogy az ember már az őskorban is használt számokat. A különböző számok jelképes jelentést nyertek, így alakult ki a számmisztika.

A Bibliában, különösen az Ószövetségben a 7-es szám játszott speciális szerepet, a hindu mitológiában a 10-nek volt jelentősége. Az ókori matematikusok, akik elsősorban pozitív egész számokkal számoltak észrevették e számok érdekes tulajdonságait. Kialakult a négyzetszámok, háromszögszámok, prímszámok, összetett számok, tökéletes számok, barátságos számok fogalma. A számokkal való játékból mára az egyik legérdekesebb, és a gyakorlatban is jól használható tudományág fejlődött ki, ez a *számelmélet.*

Középiskolában a számelmélet témakörében foglalkozni kell az alapműveletekkel, azok tulajdonságaival (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás). Meg kell ismerkedni a természetes számok halmazával, azon belül ismerni és tudni kell az *oszthatósági alapfogalmak*at (osztó, többszörös, prímszám, összetett szám).

Tudni kell a 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 számokra vonatkozó *oszthatósági szabályok*at, tudni kell *oszthatósági feledatok*at megoldani.

A középiskolásnak ismernie kell a *10-es számrendszer*en kívül más számrendszereket is. Tudni kell átírni számokat 10-es alapú számrendszerből *más alapú számrendszer*be és viszont. Mivel az ismeret napjainkban kevés, ezért fontos, hogy alkalmazni és használni is tudja a diák a tanultakat *gyakorlati feladatok* megoldásában.

Az egyetem elvégzése után középiskolában szeretnék tanítani. Ahhoz, hogy ott eredményes legyek ismernem kell a középiskolai tananyagot, tisztában kell lennem a tantervvel, tudnom kell mi tartozik a középszintű, mi az emelt szintű követelményekhez.

A definíciók, tételek és bizonyítások megtanulása mellett sok-sok feladatot kell megoldania egy középiskolásnak, hiszen amit megtanul, azt tudnia kell alkalmazni is. Ezért szakdolgozatomban a számelmélet témakört igyekeztem úgy felépíteni, hogy az a tanításban segítségemre legyen.

Az első fejezetben az oszthatóságról, egy szám összes osztójáról, a számelmélet alaptételéről, a prímszámok számosságáról, annak briliáns bizonyításáról és néhány érdekességről írok a tökéletes és barátságos számok kapcsán. Megoldok néhány oszthatósággal kapcsolatos feladatot is.

A második fejezetben a már általános iskolában is tanult legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös fogalmát tisztázom. Helyet kap a prímtényezős felbontás mellett az euklideszi algoritmus is. Mivel középiskolában az oktatás differenciált, így a jó képességű tanulók számára is kerestem néhány emelt szintű feladatot.

A harmadik fejezetben a számrendszerek kialakulását vizsgálom. Ide olyan feladatokat választottam, amelyekkel megmutathatom hogyan végzünk műveleteket különböző alapú számrendszerekben, illetve hogyan írunk át számokat egyik számrendszerből a másikba.

Az utolsó fejezetben néhány olyan diofantoszi egyenletet oldok meg, amelyeknek a szövege a tanulók életkori sajátosságaihoz közel áll, felkelti érdeklődésüket. Azért választottam ezt a témakört, mert kimondottan jól fejleszti a gondolkodást, hiszen nincs általános módszer ezen problémák megoldására. Szinte minden feladat megértése, kidolgozása más-más ötletet igényel.

1. Egy szám osztói

1. 1. Történeti áttekintés

A szám elvont fogalom. Ezért érthető, hogy kezdetben csak a sok, kevés, több stb. fogalmak jelennek meg az emberi beszédben. A számnevek közül az egy, a kettő, esetleg a három viszonylag korán felfedezhető, és ezek segítségével képezték a többit. A kereskedelem kialakulása meggyorsította a számfogalom kialakulását, kezdték a számokat csoportokba foglalni.

Egyiptomban (i.e.2000 körül) már kialakul a tízes számrendszer.

Mezopotámiában ugyanebben az időben fejlett hatvanas számrendszert találunk.

Görögországban (i.e. VI. - V. században) a püthagoreusok úgy vélték, hogy a számok közötti változatlan törvények a világ örök igazságait rejtik, ezért a számokat tanulmányozták. Hittek abban, hogy egy Isten van, aki a világot a számok közötti kapcsolatoknak, törvényeknek megfelelően teremtette. A püthagoreusok számelméletét el szokták intézni azzal, hogy misztifikálták a számokat. Ha misztikusan is, de tőlük származnak a számelmélet fogalmai: páros, páratlan, prím, tökéletes, összetett, barátságos számok. Az irracionális számok felfedezése (i.e. 450 körül) **Hippaszosz** nevéhez fűződik.

Görögországban (i.e. 300 körül) **Euklidesz** „Elemek” című munkájában összefoglalja a püthagoreusok által használt fogalmakat, de olvashatunk munkájában a legnagyobb közös osztóról, a legkisebb közös többszörösről, az euklideszi algoritmusról. Definiálja a prímszámot és indirekt módon bizonyítja be, hogy végtelen sok prímszám van.

Eratoszthenész (i.e. 276-196) módszert is ad a prímszámok megtalálására. Ennek neve: „eratoszthenészi szita”.

Néhány ismert nagy prímszám: $2^{6972593}$*-1 , melyet 10-es számrendszerben 2 098 960 számjeggyel írhatunk le,* $2^{13466917}$*-1, melyet négymillió számjeggyel írhatunk le, valamint* $2^{32582657}$*-1, melyet 2006. szeptember 4-én találtak, s melynek leírására több millió számjegyre van szükség. 2008. augusztus 23-án fedezték fel az eddig ismert legnagyobb prímet, ez a* $2^{43\,112\,609}-1$ *szám, amely* ***12 978 189 számjegyű.***

Rendszeres és tudatos számelméleti kutatásokról csak **Pierre Fermat** (1601-1665) óta beszélhetünk. Az ő nevéhez fűződik a „nagy Fermat-tétel” mely szerint az egész kitevős $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében ha n > 2.

A XIX. századi kutatások **Carl Fridrich Gauss** nevéhez köthetők.1801-ben jelenik meg „Disquisitiones arithmeticae” (Aritmetikai vizsgálatok) című műve, melyben összegyűjtötte a számelmélet- „a matematika királynőjének”- már ismert eredményeit is. Ekkortól szokás a modern számelmélet kezdetét számítani.

1. 2. Oszthatóság

A középiskolában a tanulók általános iskolából hozott ismereteire lehet és kell is támaszkodni, de nem árt újra tisztázni a pontos definíciókat, tételeket, melyeket már ismernek, de nem mindig tudják hibátlanul, ezért itt összefoglalom az oszthatóságról tanultakat, ahogy a középiskolában tanítják. Ehhez a tantervet és középiskolai tankönyveket hívtam segítségül.

Két egész szám hányadosa nem mindig egész szám.

Definíció: Az *a* és *b* egész számok esetén akkor mondjuk, hogy az ***a* szám osztója *b*-nek,** ha van olyan *c* egész szám, amelyre $a \cdot c = b$. Jele: $a \mid b$.

Az oszthatóság tulajdonságai:

- ***a* | *a*,** hiszen $a \cdot 1 = a$.

  Tehát minden szám osztója önmagának.

- **Ha *a* | *b*, akkor *a* | *bc*.**

  A feltétel azt jelenti, hogy van egy olyan d pozitív egész szám, hogy $b = a \cdot d$, de ekkor $bc = a \cdot (dc)$ vagyis $a \mid bc$.

  Tehát ha *a* osztója *b*-nek, akkor *b* többszöröseinek is osztója.

- **Ha *a* | *b* és *b* | *c* akkor *a* | *c*.**

  A két feltétel azt jelenti, hogy léteznek d és e pozitív egész számok, hogy $b = a \cdot d$ és $c = b \cdot e$, tehát $c = b \cdot e = a \cdot (d \cdot e)$ vagyis $a \mid c$.

- **Ha *a* | *b* és *a* | *c* akkor *a* | *b* ± *c*.**

  A feltételek szerint vannak olyan d és e pozitív egész számok, hogy $b = a \cdot d$ és $c = a \cdot e$. Így $b \pm c = a(d \pm e)$, vagyis $a \mid b \pm c$.

  Tehát ha egy szám osztója két számnak, akkor összegüknek és különbségüknek is osztója.

- **Ha *a* | *b* + *c* és *a* | *b* akkor *a* | *c*.**

  A feltételek szerint léteznek d és e egész számok, hogy $b + c = a \cdot d$ és $b = a \cdot e$. Így $c = (b + c) - b = a \cdot d - a \cdot e = a(d - e)$, tehát $a \mid c$.

  Tehát ha egy szám osztója egy összegnek és az összeg egyik tagjának, akkor osztója a másik tagnak is.

- **Ha *a* | *b* és *a* ∤ *c* akkor *a* ∤ *b* + *c*.**

  Ha $a \mid b + c$ lenne, akkor előző miatt $a \mid c$ lenne, ami nem teljesül.

- **Az *a, b* természetes számokra *a* | *b* és *b* | *a*, akkor *a* = *b*.**

  Az első feltételből következik, hogy $a \leq b$, a második szerint $b \geq a$. Egyszerre úgy teljesül mindkettő, ha $a = b$.

- **Bármely *a* egész szám esetén *a* | 0,** hiszen $0 \cdot a = 0$.

  A 0-nak minden természetes szám osztója. Ez azt is jelenti, hogy a 0 páros szám. A 0-nak egyetlen többszöröse van a 0, viszont a 0 bármely egész számnak többszöröse.

Például: $4 \mid 12a + (4a)^2 - 16$, ha a egész szám, mert minden tagnak osztója a 4, de $4 \mid 24k + (4k)^4 - 3$ nem igaz, ha k egész szám, mert az első két tag osztható 4-gyel, de a harmadik nem.

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha a és b egész számok és $5 \mid 2a+3b$, akkor $5 \mid 16a+9b$.

Megoldás

Végezzük el a következő átalakítást:

$16a+9b=6a+9b+10a=3(2a+3b)+10a$.

A feltétel szerint a zárójelben levő összeg osztható 5-tel, és mivel $10a$ is osztható 5-tel, ezért az állítás igaz. (Végtelen sok *a; b* számpár van, amelyre igaz, hogy $5 \mid 2a+3b$, pl. $a=1$; $b=1$ vagy $a=4; b=4$ stb.)

Oszthatósági szabályok

Oszthatósági szempontból a pozitív és negatív számok ugyanúgy viselkednek, ezért az oszthatóság tulajdonságait a későbbiekben csak természetes számokra fogjuk vizsgálni.

2. feladat

Melyek azok a tízes számrendszerbeli számok, amelyek oszthatók 2-vel, és melyek azok, amelyek oszthatók 5-tel?

Megoldás

Minden tízes számrendszerbeli szám felírható 10 hatványainak összegeként, például $23571=2\cdot10^4+3\cdot10^3+5\cdot10^2+7\cdot10^1+1\cdot10^0$. Az utolsó tag kivételével a felírt összegek minden tagjában előfordul a 10, melynek osztója a 2 és az 5. Az összeg utolsó tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 2-vel, illetve 5-tel.

Tehát egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye osztható 5-tel.

3. feladat

Melyek azok a tízes számrendszerbeli számok, amelyek oszthatók 4-gyel?

Megoldás

Mivel a 100 osztható 4-gyel, ezért a 10-nek minden kettőnél nagyobb hatványa is osztható 4-gyel. Például a $23571=2\cdot10^4+3\cdot10^3+5\cdot10^2+7\cdot10+1$ összeg esetén csak az utolsó két tagot elég vizsgálnunk, a 71 nem osztható 4-gyel, így a 23751 sem osztható 4-gyel.

Egy tízes számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyből képzett kétjegyű szám osztható 4-gyel.

4. feladat

Mely tízes számrendszerbeli számok oszthatók 3-mal, illetve 9-cel?

Megoldás

A 10 hatványai felírhatók a következő módon:

$10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1$... stb.

Az összegek első tagjai oszthatók 3-mal és 9-cel, a második taggal (az 1-gyel) kell megszoroznunk az illető helyi ertéknek megfelelő helyen álló számot. Például:

$$23571 = 2\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 5\cdot 10^2 + 7\cdot 10 \ \ +1 = (2\cdot 9999 + 2) + (3\cdot 999 + 3) + (5\cdot 99 + 5) + (7\cdot 9 + 7) + 1.$$

Elég vizsgálnunk a számjegyek összegét, a $2+3+5+7+1=18$ összeget. Mivel ez osztható 3-mal és 9-cel, ezért az eredeti szám is osztható 3-mal és 9-cel.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor és csak akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, illetve 9-cel.

5. feladat

Melyek azok a tízes számrendszerbeli számok, amelyek oszthatók 11-gyel?

Megoldás

Írjuk fel a 10 hatványait a 11 segítségével:

$$10 = 11 - 1$$

$$100 = 9\cdot 11 + 1$$

$$1000 = 1001 - 1 = 91\cdot 11 - 1$$

$$10000 = 9999 + 1 = 909\cdot 11 + 1$$

és így tovább. A felfedezhető szabályosság azt mutatja, hogy **11-gyel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha jegyeit váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg osztható 11-gyel.**

Például 11 | 13618, hiszen $8-1+6-3+1=11$ osztható 11-gyel.

Nem osztható 11-gyel a 34285, mert $5-8+2-4+3=-2$.

A fenti módszerek alapján nemcsak azt dönthetjük el, hogy egy szám osztható-e 2-vel, 5-tel, 4-gyel, 3-mal, 9-cel, hanem azt is, hogy mennyi az ezen számokkal való osztási maradék.

Például a 84137 szám 4-gyel osztva 1 maradékot ad a 37 miatt. Mivel $8+4+1+3+7=23$, ezért 3-mal osztva a maradék 2 lesz, 9-cel osztva pedig 5.

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $5 \mid 5324^{2000} - 2371^{3000}$.

Megoldás

Nézzük meg a 4-re végződő számok hatványait: $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$ ...

Azt vesszük észre, hogy a számok páros kitevő esetén 6-ra, páratlan kitevő esetén 4-re végződnek.

Ezek szerint a 5324^{2000}hatvány 6-ra végződik, 5-tel osztva 1 a maradéka.

Ha egy szám utolsó jegye 1, akkor minden hatványa 1-re végződik, tehát a 2371^{3000}hatvány 5-tel osztva 1 maradékot ad.

Mivel mindkét szám 5-tel osztva 1 maradékot ad, ezért különbségük osztható 5-tel.

Prímszámok, összetett számok

Mielőtt tovább haladnánk az oszthatóság témakörében, ismerni kell a prímszám fogalmát, valamint néhány vele kapcsolatos szabályt, tulajdonságot. A számelméletben nagyon fontos szerepe van a prímszámoknak. A legfontosabb és legérdekesebb kérdések a prímszámokkal kapcsolatban merülnek fel. Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása nagyon jól fejleszti a tanulók problémamegoldó és gondolkodási készségét is.

Definíció: Azokat a természetes számokat, melyeknek pontosan két osztójuk van, **prímszámok**nak vagy **törzsszámok**nak nevezzük.

Az első néhány prímszám: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; …

A prímszámok szinte mechanikus megkeresésére szolgál az *eratosztheneszi szita* módszere. Ez azt jelenti, hogy felírjuk 2-től a-ig a természetes számokat, majd bekarikázzuk az első számot: a 2-t, és kihúzzuk ennek a többszöröseit (azaz minden másodikat). Ezután a megmaradó számok közül bekarikázzuk ismét az elsőt: a 3-at, és kihúzzuk ennek többszöröseit (azaz minden harmadikat) s így tovább. Természetesen előfordulhat, hogy egy számot nem csak egy alkalommal húzunk ki. Elegendő $\sqrt{a}$ -ig folytatni az eljárást. A bekarikázott, illetve a ki nem húzott számok lesznek a-ig az összes prímszámok.

A prímszámok eléggé szabálytalanul helyezkednek el a természetes számok sorozatában. A 2 kivételével valamennyien páratlanok, ezért a 2 prímszámot leszámítva két egymás utáni prímszám között a legkisebb különbség 2 lehet. Ha két prímszám különbsége 2, akkor azokat **ikerprímszámok**nak nevezzük. Ilyenek 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; stb.

<u>Tétel:</u>

Végtelen sok prímszám van.

Bizonyítás:

Indirekt módon tételezzük fel, hogy nem igaz a fenti állítás, vagyis a prímszámok száma véges. Legyenek ezek: $p_1, p_2, ..., p_n$.

Képezzük a következő számot: $a = p_1 p_2 ... p_n + 1$.

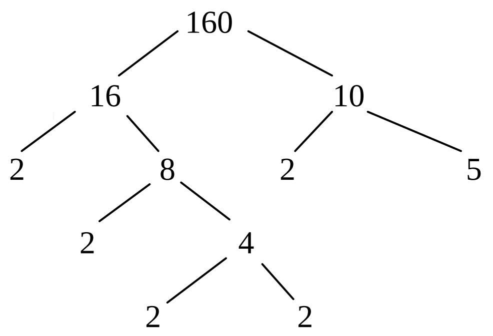
Az a számnak nem osztója a felsorolt prímek egyike sem. Tehát vagy a prím vagy van egy olyan prímosztója, amely nem szerepelt a fentiek között. Mindkét esetben találtunk egy új prímszámot, ezért nem lehet igaz az, hogy véges sok prímszám van. Ha pedig ez nem igaz, akkor végtelen sok prímszám van.

<u>Definíció:</u> Azokat az 1-nél nagyobb természetes számokat, amelyeknek kettőnél több osztójuk van, **összetett számok**nak nevezzük. Ilyenek például: 4 (osztói: 1; 2; 4); 6 (osztói: 1; 2; 3; 6); 8 (osztói: 1; 2; 4; 8) stb.

<u>Tétel **(számelmélet alaptétele):**</u> Minden n > 1 egész szám felírható $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... p_r^{\alpha_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ alakban, ahol p_1, p_2, ..., p_r különböző pozitív prímek és $\alpha_i > 0$ egész. Ez a felírás a prímhatványtényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Egy szám prímtényezőinek megkeresése két úton is történhet. Az első, ha két tényező szorzatára bontjuk a számot, majd a tényezőket is tovább bontjuk addig, amíg minden tényező prím. Ezt a módszert akkor alkalmazzuk, ha egy nagy számot könnyen két tényező szorzatára tudunk bontani.

Például:



A másik módszer, hogy az adott számot elosztjuk egy prímmel, ami meg van benne maradék nélkül, majd a hányadossal ugyanígy járunk el addig, míg a hányados nem 1.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

<u>*Egy szám pozitív osztóinak a száma*</u>

<u>Tétel:</u> Ha egy összetett szám prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... p_r^{\alpha_r}$ akkor az n szám osztóinak száma: $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1)$.

1. példa

Hány darab pozitív osztója van a 2700-nak?

Megoldás

A prímtényezős felbontás: $2700 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ ebből következik, hogy az osztóinak prímtényezős felbontásai csak a 2, 3 és 5 prímeket tartalmazhatják, mégpedig a 2-t legfeljebb második, a 3-at legfeljebb harmadik, az 5-öt legfeljebb második hatványon, az is előfordulhat, hogy az osztó valamelyik prímet nem tartalmazza.

		Prímszámok		
		2	**3**	**5**
	0	1	1	1
	1	2	3	5
	2	2^2	3^2	5^2
Kitevő	**3**		3^3	

Egy osztó pímtényezős felbontása úgy jön létre, hogy mindhárom oszlopból választunk egy számot, és az így kiválasztott három számot összerszorozzuk. Mivel az első és harmadik oszlopból 3-3-féleképpen válszthatunk és mindegyik választás esetén a középső oszlopból 4 lehetőségünk van egy hatványt választani, ezért összesen $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ darab osztója van a 2700-nak.

2. példa

Határozzuk meg a 252 000 páratlan osztóinak számát.

Megoldás

Prímtényezős felbontása: $252\,000 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$. A 2-t nem tartalmazó osztók a $3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ osztói közül kerülhetnek ki, ezek száma $(2+1)(3+1)(1+1) = 24$.

Tehát a 252 000-nek 24 darab páratlan osztója van.

1. 3. Oszthatósági feladatok

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $15 \mid 2^{16} - 1$!

Megoldás: Mivel $2^{16} - 1 = 2^{16} - 1^{16} = \left(2^8\right)^2 - \left(1^8\right)^2 = \left(2^8 + 1^8\right) \cdot \left(2^8 - 1^8\right) = 257 \cdot 255 =$

$= 257 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 27 = 257 \cdot 15 \cdot 27 \Rightarrow \mathit{osztható}$

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $2^{62} + 1$ osztható $2^{31} + 2^{16} + 1$ számmal!

Megoldás: $2^{62}+1=\left(2^{31}+1\right)^2-2\cdot 2^{31}=\left(2^{31}+1\right)^2-2^{32}=\left(2^{31}+1\right)^2-\left(2^{16}\right)^2=$

$=\left(2^{31}+1+2^{16}\right)\cdot\left(2^{31}+1-2^{16}\right)\Rightarrow$ *osztható*

3. feladat

Mely egész n-ekre egész szám a következő kifejezés $\frac{2n+6}{n-3}$?

Megoldás: $\frac{2n+6}{n-3}=\frac{2n-6+12}{n-3}=\frac{2(n-3)+12}{n-3}=2+\frac{12}{n-3}\Rightarrow(n-3)$ -nak a 12 osztójának kell lennie. Így $(n-3)=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12,-1,-2,-3,-4,-6,-12$ a lehetséges értékek;

n lehetséges értékei: $4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 15,\ 2,\ 1,\ 0,-1,-3,-9$

Ezekben az esetekben a $\frac{2n+6}{n-3}$ kifejezés értékei $14,\ 8,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,-10,-4,-2,-1,\ 0,\ 1$.

4. feladat

Bizonyítsa be, hogy $8\,|\,5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ (n pozitív egész)!

Megoldás teljes indukcióval:

- Nézzük meg, hogy $n=1$- re teljesül-e?

  $8\,|\,5+2+1$, ez igaz.

- Tegyük fel, hogy $n=k$ - ra igaz, vagyis $5^k+2\cdot 3^{k-1}+1=8A$ $\quad(A\ \textit{pozitív egész})$

  $$\Downarrow$$

  $$5^k=8A-2\cdot 3^{k-1}-1$$

- Bizonyítandó, hogy $n=k+1$- re öröklődik, azaz $B=5^{k+1}+2\cdot 3^k+1$ osztható 8-cal.

  $B=5^{k+1}+2\cdot 3^k+1=5\cdot 5^k+2\cdot 3\cdot 3^{k-1}+1$ behelyettesítve a feltételt:

  $B=5\cdot(8A-2\cdot 3^{k-1}-1)+2\cdot 3\cdot 3^{k-1}+1=5\cdot 8A-5\cdot 2\cdot 3^{k-1}-5\cdot 1+6\cdot 3^{k-1}+1=$
  $=40A-4\cdot 3^{k-1}-4=40A-4\cdot(3^{k-1}+1)$

  $$\Downarrow$$

  Ha k pozitív egész, akkor (3^{k-1}) páratlan.

  $$\Downarrow$$

A ( )-ben páros szám áll, ennek négyszerese osztható 8-cal, az első tag a feltétel miatt osztható 8-cal, vagyis az egész kifejezés is osztható 8-cal. Tehát igaz az állítás.

1. 4. Tökéletes számok

Az osztók keresésének gyakorlására jól használhatók és főleg érdekesek a tökéletes és barátságos számok, ezért ezekről is szólok röviden.

Definíció: **Tökéletes szám**nak nevezzük azt a számot, amely egyenlő az önmagánál kisebb osztóinak összegével.

Például: 6 mert $1+2+3=6$ ahol 1, 2, 3 a 6 osztói.

28 mert $1+2+4+7+14=28$ 1, 2, 4, 7, 14 a 28 osztói.

A tökéletes számok nagyon ritkák. Az ókorban csak négyet ismertek közülük: 6; 28; 496; 8128.

A tökéletes számok előállítására Euklidesz IX. könyvének 36. tétele ad útmutatást.

Tétel: Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk mértani sorozatot, amíg a sorösszeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, tökéletes számot kapunk.

Bizonyítás: Legyen tehát *k* olyan pozitív egész szám, amelyre a *k* darab tagból álló $1+2+2^2+...+2^{k-1}=p$ összeg értéke prímszám. Az $n=p\cdot 2^{k-1}$ számról kell megmutatni, hogy tökéletes. A fenti *n* szám *n*-nél kisebb pozitív osztói: $1, 2, 2^2, ... 2^{k-2}, 2^{k-1}$, továbbá $p,\quad 2p,\quad 2^2p,\quad ... 2^{k-2}p$, ezek összegének egyik része $1+2+2^2+...+2^{k-1}=2^k-1=p$, másik része $1p+2p+2^2p+...2^{k-2}p=\left(2^{k-1}-1\right)\cdot p$ így az osztók összege mindösszesen $p+\left(2^{k-1}-1\right)\cdot p=2^{k-1}\cdot p=n$ azaz *n* tényleg tökéletes.

Definíció: Egy természetes számot **hiányos**nak nevezzük, ha önmagától kisebb pozitív osztóinak összege kisebb a számnál.

Például: 15 önmagától kisebb pozitív osztói 1, 3, 5. Ezek összege $1+3+5=9<15 \Rightarrow 15$ hiányos. Néhány hiányos szám: 4; 8; 10; 14.

Definíció: Egy természetes számot **bővelkedő**nek nevezünk, ha önmagától kisebb pozitív osztóinak összege nagyobb a számnál.
Például: 18 önmagától kisebb pozitív osztói 1, 2, 3, 6, 9. Ezek összege: $1+2+3+6+9=21>18 \Rightarrow 18$ bővelkedő. Néhány bővelkedő szám: 20; 24; 30.

1. 5. Barátságos számok

A püthagoreusoknak köszönhetjük a barátságos számok fogalmát is.

Definíció: Az a és b természetes számok **barátságos számpár**t alkotnak, ha az a önmagától különböző pozitív osztóinak összege *b*, s *b* önmagától különböző pozitív osztóinak összege *a*.
Az ilyen számpárok egyik tagja bővelkedő, míg a másik hiányos. Az ókori görögök csak a 220 és 284 párt ismerték.

220 osztóinak összege: $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

284 osztóinak összege: $1+2+4+71+142=220$

Az arab Szábit Ibn Kurra (836-901) fedezte fel az 1184 és 1210 baráti számpárt. Pierre Fermattól való 17296 és 18416, René Descartes adta meg a 9363584 és 9437056 baráti számpárt. Euler további 61 ilyen párt fedezett fel. Ezek közül néhány: 2620 és 2924; 5020 és 5564; 6232 és 6368. Szábit Ibn Kurra fogalmazta meg és bizonyította az alábbi tételt a barátságos számpárokról.

Tétel: Ha $p=3\cdot 2^{n-1}-1$ és $q=3\cdot 2^{n}-1$ és $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$ prímszámok, akkor $a=2^{n}\cdot p\cdot q$ és $b=2^{n}\cdot r$ számok barátságos párok.

Érdekesség

Ez a tétel $n<20000$ esetén 3 esetben ad p - re, q - ra és r - re is prímszámot.

$n=2 \quad p=5 \quad q=11 \quad r=71 \quad a=220 \quad b=284$

$n=4 \quad p=23 \quad q=47 \quad r=1151 \quad a=17296 \quad b=18416$

$n=7 \quad p=191 \quad q=383 \quad r=73727 \quad a=9363584 \quad b=9437056$

Nyitott kérdés, hogy a barátságos számpárok száma véges vagy végtelen. Erdős Pál magyar matematikus feltételezése szerint végtelen. Eddig olyan párt sem találtak, melynek egyik tagja páros, a másik pedig páratlan.

2. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

2. 1. Legnagyobb közös osztó

1. példa

Egyszerűsítsük a $\frac{1020}{1224}$ törtet.

Megoldás

Eljárhatnánk úgy, hogy egy-egy számmal egyszerűsítünk és megnézzük, hogy az új számlálót és nevezőt mivel lehet még egyszerűsíteni. Keressük meg a legnagyobb számot, amellyel egyszerűsíteni tudunk.

Készítsük el a számok prímtényezős felbontását:

$$\begin{array}{r|l} 1020 & 2 \\ 510 & 2 \\ 255 & 5 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad 1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

$$\begin{array}{r|l} 1224 & 2 \\ 612 & 2 \\ 306 & 2 \\ 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad 1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17.$$

Láthatjuk, hogy a közös prímtényezők miatt a két számnak vannak közös osztói. A legnagyobb közös osztót a közös prímtényezőkből képezhetjük: $2^2 \cdot 3 \cdot 17 = 204$.

Ezzel egyszerűsítve: $\frac{1020}{1224} = \frac{5}{6}$.

<u>Definíció:</u> Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám **legnagyobb közös osztó**jának nevezzük. Az *a* és *b* legnagyobb közös osztójának jele: $(a; b)$.

Például az előbbi esetben $(1020; 1224) = 204$.

A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból előállítható, ha a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

2. példa

Keressük a következő számpárok legnagyobb közös osztóját:

a) $(73125; 7425)$; b) $(4617; 6800)$.

Megoldás

a) A számok prímtényezős felbontása:

$73125 = 3^2 \cdot 5^4 \cdot 13$; $7425 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$.

A legnagyobb közös osztó tehát $(73125; 7425) = 3^2 \cdot 5^2 = 225$.

b) A számok prímtényezős felbontása:

$4617 = 3^5 \cdot 19$; $6800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 17$.

A két prímtényezős felbontásban nincs közös tényező. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös osztójuk van, az 1. Tehát $(4617; 6800) = 1$.

<u>Definíció:</u> Azokat a pozitív egész számokat, melyeknek a legnagyobb közös osztója 1, **relatív prím**eknek nevezzük.

Fontos látnunk, hogy ha két különböző szám relatív prím, akkor nem feltétlenül kell prímnek lenniük, de ha prímszámok, akkor biztosan relatív prímek is. Például $(15; 8) = 1$, $(11; 43) = 1$, de $(11; 275) = 11$.

Nemcsak két szám esetén beszélhetünk legnagyobb közös osztóról, hanem három vagy több szám esetén is.

Például $(7425;6800;73125)=5^2=25$ az előző prímtényezős felbontások alapján.

2. 2. Legkisebb közös többszörös

1. példa

Végezzük el az $\frac{1}{1176}+\frac{1}{720}$ összeadást.

Megoldás

Közös nevezőnek választhatnánk a két nevező szorzatát, de nagy számok esetén nehéz lenne megtalálnunk az egyszerűsítés lehetőségeit, ezért próbáljuk a lehető legkisebb közös nevezőt előállítani.

A nevezők prímtényezős felbontása: $1176=2^3\cdot 3\cdot 7^2$; $720=2^4\cdot 3^2\cdot 5$.

Ha az összes itt előforduló prímtényezőt (a közöseket a nagyobb hatványon) összeszorozzuk, akkor mindkét szám többszöröse áll elő, mégpedig a legkisebb: $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2=35280$.

Az összeadás: $\frac{1}{1176}+\frac{1}{720}=\frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 7^2}+\frac{1}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}=\frac{2\cdot 3\cdot 5+7^2}{2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2}=\frac{79}{35280}$.

<u>Definíció:</u> Két pozitív egész szám esetén a közös többszörösök közül a legkisebb pozitív számot a két szám **legkisebb közös többszörös**ének nevezzük.

Az *a* és *b* legkisebb közös többszörösének jele: $[a; b]$.

Például az előző esetben: $[1176;\ 720]=35280$.

A számok prímtényezős felbontásából a legkisebb közös többszörös előállítható, ha minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legnagyobb hatványon.

2. példa

Keressük a 972, 8775 számok legkisebb közös többszörösét.

Megoldás

A számok prímtényezős felbontása: $972=2^2\cdot 3^5$, $8775=3^3\cdot 5^2\cdot 13$.

A legkisebb közös többszörös: $[972;\ 8775]=2^2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13=315900$.

Észrevehetjük, hogy ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörös a két szám szorzata lesz.

2. 3. Euklideszi algoritmus

A lnko és a lkkt meghatározásához használt prímtényezős felbontás sajnos nagy számok esetén nem hatékony. Nem a közös prímtényezők megtalálása jelent gondot, hanem a prímtényezős felbontások. Ezért a legnagyobb közös osztó keresésére maradékos osztást alkalmazunk. Ennek neve euklideszi algoritmus.

Euklideszi algoritmus: Tegyük fel hogy $b \neq 0$.

$$\begin{array}{ll}
a = bq_0+r_0, & 0<r_0<|b|, \\
b = r_0q_1+r_1, & 0<r_1<r_0 \\
r_0=r_1q_2+r_2, & 0<r_2<r_1 \\
\dots\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots\dots & \\
r_{k-2} = r_{k-1}q_k+r_k, & 0<r_k<r_{k-1}, \\
\dots\dots\dots\dots & \\
r_{n-2} = r_{n-1}q_n+r_n, & 0<r_n<r_{n-1}, \\
r_{n-1} = r_nq_{n+1}+0, & (\text{azaz } r_{n+1}=0)
\end{array}$$

Tétel: Az euklideszi algoritmus utolsó nem nulla maradéka r_n az a és b legnagyobb közös osztója.

Bizonyítás: Mutassuk meg először fentről lefelé haladva, hogy r_n - t osztja bármely d közös osztója a-nak ill. b-nek. A fenti egyenletek közül az elsőből következik, hogy $d|r_0$, a másodikból $d|r_0$ és $d|b$ miatt $d|r_1$ adódik, ... , az n-2 egyenletből, mivel $d|r_{n-2}$ és $d|r_{n-1}$ következik végül, hogy $d|r_n$.

Ha alulról jövünk felfelé, akkor azt lehet könnyen látni, hogy r_n közös osztója a-nak ill. b-nek. Valóban az utolsó egyenlet azt jelenti, hogy r_n osztja r_{n-1}-t, az utolsó előttiből $r_n|r_n$-t és $r_n|r_{n-1}$-ből adódik, hogy r_n osztja r_{n-2}, és így tovább, végül az első egyenletből következik, $r_n|\, b$ és $r_n\, |r_0$ miatt $r_n|a$-t.

2. 4. Feladatok

1. Legyenek $A = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ $\quad B = 2 \cdot 5^4 \cdot 11$

$C = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 13$ $\quad D = 2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 17$

Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!

a) $(AD; BC)$ b) $[AD; BC]$

Megoldás

$A \cdot D = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 17$

$B \cdot C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 11^3 \cdot 13$

a) $(AD; BC) = 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2$

b) $[AD; BC] = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 11^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$

2. Egy kikötőben 2008. január 2-án együtt van négy hajó. Tudjuk, hogy az első hajó 4 hetenként, a második 8 hetenként, a harmadik 12 hetenként, a negyedik 16 hetenként tér vissza a kikötőbe. Találkoznak-e még 2008-ban mind a négyen ebben a kikötőben?

Megoldás: $[4; 8; 12; 16] = ?$

$4 = 2^2$ $\quad \Rightarrow \quad [4; 8; 12; 16] = 2^4 \cdot 3 = 48$

$8 = 2^3$ $\quad \Downarrow$

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\quad$ 48 hét múlva tehát újra találkoznak.

$4 = 2^4$ $\quad$ Tehát igen. (1 év 52 hét, január 2-a 1. hét)

3. Milyen X-ekre teljesülnek a következő egyenlőségek?

a) $(899; 1147) = x$

b) $[x; 16] = 48$

Megoldás: Euklideszi algoritmussal

a) $(899; 1147) = x$

$1147 = 1 \cdot 899 + 248$

$899 = 3 \cdot 248 + 155$

$248 = 1 \cdot 155 + 93$

$$155 = 1 \cdot 93 + 62$$

$$93 = 1 \cdot 62 + 31 \qquad \Rightarrow \quad x = 31.$$

$$62 = 2 \cdot 31 + 0$$

b) $[x; 16] = 48$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow 48 = 2^4 \cdot 3$$

48 osztói: 1; 2; 3; 6; 12; 24; 48;

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow 16 = 2^4$$

16 osztói:1; 2; 4; 8; 16

$$\Downarrow$$

$$x = 3; 6; 12; 24; 48$$

4. Mivel egyenlő $(3960; P)$ és $[3960; P]$ ha P az alábbi keresztrejtvény négyzeteiben szereplő számjegyek szorzata?

1		
		2
3		

Vízszintes: 1. $[(A; B); C]$ ahol $A = 72,\ B = 108,\ C = 18$

3. A vízszintes 1. 21-szerese.

Függőleges 1. Három olyan prímszám, melyek egy $\mathrm{d} = 2$ differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai.

2. Negyedik hatvány.

Megoldás:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2^3 \cdot 3^2 \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2^2 \cdot 3^3 \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 2 \cdot 3^2$$

$(A;\, B) = 2^2 \cdot 3^2$

$[(A;\, B);\, C] = 2^2 \cdot 3^2 = 36 \qquad 36 \cdot 21 = 756 \quad \Rightarrow \quad 3;\, 5;\, 7$ *a prímszámok*

$\Rightarrow$ Függőleges 2. $\Rightarrow\ 16 = 2^4$

$\Downarrow$

$P = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 5^2 \cdot 6^2 \cdot 7 = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

1 3	6	
5		2 1
3 7	5	6

$$\begin{array}{r|l} 3960 & 2 \\ 1980 & 2 \\ 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \Rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$(3960;\, P) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$[3960;\, P] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$

3. Számrendszerek

3. 1. A számrendszerek kialakulása

Az emberré válás kora a csiszolatlan kőkorszak idejére tehető, ami kb. Kr. e. 500 000 -től Kr. e. 10 000 -ig tartott. Ekkor jött rá az ember a tűz használatára, gyűjtögető majd vadászó életmódot folytatott. Ekkor kezdődött meg a szám fogalmának kialakulása is.
Az őskorban a számok leírására jeleket használtak. Ahol nagy számokra volt szükség, ott újabb jeleket vezettek be. A fejlett ókori társadalmakban a nagy számok leírása mellett az azokkal végzett műveletek is szükségessé váltak. A számokat csoportosították, és egy-egy csoportra vezettek be újabb jeleket. Attól függően, hogy hány számból képezünk újabb csoportot, különböző számrendszerekről beszélünk.

Az ötös számrendszer még ma is él egyes dél-amerikai indián törzseknél. Így számolnak: egy, kettő, három, négy, kéz, kéz és egy, kéz és kettő stb.

A hatos számrendszer egyes északnyugat-afrikai törzseknél használatos, keverve a tizenkettes számrendszerrel. Ez utóbbira utaló jelek az európai kultúrákban is felfedezhetők. Elég, ha az év hónapjaira vagy az óra beosztására gondolunk.

A húszas számrendszert a maják és a kelták használták. Mexikóban és Közép-Amerikában még ma is használják a csillagászatban.

A babiloniak hatvanas számrendszerben számoltak, innen ered az óra 60 perce, a perc 60 másodperce és a szögmérésünk rendszere.

A római számírás jegyei az ötös és tízes számrendszer keveredését mutatják. Ezeket a jeleket Európában évszázadokig használták, bár velük a műveletek elvégzése meglehetősen komplikált.

A számlálás legegyszerűbb eszköze a kéz az ujjakkal, ez a magyarázata annak, hogy a tízes számrendszer vált legtágabb körben használhatóvá.

Az ókori hindu kultúrában találjuk a helyi értékes számírás első jeleit. Itt a leírt számjegyek a számrendszer alapjául szolgáló alapszám hatványainak többszörösét jelölik.

3. 2. A tízes számrendszer

A ma használt számrendszerek helyiértékes számrendszerek. Minden művelet írásbeli elvégzésekor kihasználjuk a helyiérték-rendszer adta lehetőségeket. A tízes számrendszer és a helyiérték-rendszer összeolvadása valószínűleg Indiában történt meg. Ekkor keletkezett a zérus jele is. Az első tízes helyiérték-rendszerben leírt számemlék a „346”, amely egy i.sz. 595-ből fennmaradó hindu táblán egy dátumot jelöl. De vannak korábbi szövegek is, amelyekben előfordul a nullát jelentő „szunja” szó. A karavánutakon keresztül jutott el a tízes helyiérték-rendszer a Közel-Keletre, Perzsiába, Egyiptomba majd az arabok közvetítésével Európába. Csak nagyon lassan terjedt el, például a Mediciek üzleti könyveiben csak 1494-től használtak kizárólag arab számokat. A tizedes törteket 1585-ben Stevin vezette be a „La disme” (A tizedes egység) című könyvében. Magyarországon a XV. században terjedt el az arab számjegyek használata. Az első ilyen írásos emlék 1407-ből való.

A műveletek írásbeli elvégzése előtt meg kell érteni három fontos fogalmat: alaki érték, helyiérték, valódi érték. A három fogalmat egy egyszerű példán szemléltetem:

Ha a szám: 346

alaki érték	3	4	6
helyiérték	100	10	1
valódi érték	300	40	6

A tízes számrendszer helyiérték táblázatának részlete:

a tizedesvesszőtől balra:

Milliárdok			Milliók			Ezresek			Egyesek		
10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{0}
Százmilliárdos	Tízmilliárdos	Milliárdos	Százmilliós	Tízmilliós	Milliós	Százezres	Tízezres	Ezres	Százas	Tízes	Egyes

a tizedesvesszőtől jobbra:

Tizedes törtek					
10^{-2}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Tized	Század	Ezred	Tízezred	Százezred	Milliomod

A műveletek elvégzésére itt nem térek ki, mert ezt általános iskolában megtanulják és gyakorolják is, de a más alapú számrendszerekben a helyiérték ismerete fontos volt.

3. 3. Nem tízes alapú számrendszerek

A nem tízes alapú számrendszerek tanítása bekerült a középiskolai tananyagba. Ez igen fontos, hiszen a számítástechnika oktatásához elengedhetetlen a kettes számrendszer ismerete és annak megértése.

A tízes számrendszerekhez hasonlóan itt is készíthetünk helyiérték táblázatokat, de ezekben a megfelelő alapszám hatványai szerepelnek. Nézzük néhány számrendszer helyiérték táblázatának egy-egy részletét.

A vesszőtől balra:

Kettes:

$2^5=32$	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$

Hármas:

$3^5=243$	$3^4=81$	$3^3=27$	$3^2=9$	$3^1=3$	$3^0=1$

Ötös:

$5^5=3125$	$5^4=625$	$5^3=125$	$5^2=25$	$5^1=1$	$5^0=1$

A vesszőtől jobbra, kettes:

$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$2^{-4}=\frac{1}{16}$	$2^{-5}=\frac{1}{32}$

Hármas:

$3^{-1}=\frac{1}{3}$	$3^{-2}=\frac{1}{9}$	$3^{-3}=\frac{1}{27}$	$3^{-4}=\frac{1}{81}$	$3^{-5}=\frac{1}{243}$

Ötös:

$5^{-1}=\frac{1}{5}$	$5^{-2}=\frac{1}{25}$	$5^{-3}=\frac{1}{125}$	$5^{-4}=\frac{1}{625}$	$5^{-5}=\frac{1}{3125}$

A műveleteket bármelyik számrendszerben ugyanúgy végezzük, mint a tízes számrendszerben. Műveletek elvégzése előtt hasznos lehet összeadó- és szorzótáblák készítése. A műveletek bármelyik számrendszerben ugyanígy végezzük, mint a tízes számrendszerben. Műveletek elvégzése előtt hasznos lehet összeadó- és szorzótáblák készítése:

Kettes:

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	10

$\cdot_2$	0	1
0	0	0
1	0	1

Hármas:

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	0	2	10
2	0	10	11

$\cdot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	10

Ötös:

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Ezekből a táblázatokból sok érdekes és hasznos információ leolvasható. A kettes számrendszerben a páros számok a 0-ra végződő számok, míg az ötösben a végződésről nem lehet eldönteni, hogy páros-e vagy páratlan. A kettes számrendszerben 0-ra és 1-re is végződhetnek négyzetszámok, de az ötösben csak 0-ra, 1-re és 4-re.

A gyakorlatban fontos a 16-os számrendszer is, mert ezt használják a számítástechnikában a kettes mellett. A 9 feletti számjegyekre betűket használnak, így a számjegyek: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E, F*.

Néhány művelet: $A_{16} + B_{16} = 15_{16}$

$2_{16} \cdot 8_{16} = 10_{16}$ $C_{16} : 4_{16} = 3_{16}$

$$\begin{array}{r} 1011_2 \\ +\quad 1_2 \\ \hline 1100_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9BC_{16} \\ -\ 6DA_{16} \\ \hline 2E2_{16} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32102_5 \\ +\ 14213_5 \\ \hline 101320_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \underline{\ 3201_5} \cdot 32_5 \\ 20103 \\ \underline{\ \ 11402} \\ 212432_5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111_3 \\ -\ 22_3 \\ \hline 012_3 \end{array}$$

3. 4. Átváltás számrendszerek között

Ebben a részben feladatokon keresztül mutatom be az átváltás módszerét.

1. Mennyit ér a tízes számrendszerben $3123{,}12_4$? (az index a számrendszer alapszáma)

Helyiérték táblázat segítségével könnyen meghatározható a számjegyek alaki értékéhez tartozó valódi érték.

helyi érték	64	16	4	1	0,25	0,0625
alaki érték	3	1	2	3	1	2
valódi érték	192	16	8	3	0,25	0,125

$$3123{,}12_4 = 192 + 16 + 8 + 3 + 0{,}25 + 0{,}125 = 219{,}375$$

$$\Downarrow$$

$3123{,}12_4 = 219{,}375$ (Tízes számrendszernél nem jelöljük az alapszámot)

Ha tetszőleges számrendszerből tízesbe szeretnénk váltani, akkor a számjegyek alaki értékét meg kell szorozni a helyi értékkel, majd a kapott eredményeket össze kell adni.

2. Mennyit ér 3411 a hatos számrendszerben?

Megoldás :

Képezzünk 6-os csoportokat, azaz osszuk el a számot 6-tal:

$3411 : 6 = 568$ maradék **3**.

Az 568 db 6-os csoportból hozzunk létre újabb 6-os csoportokat:

$568 : 6 = 94$ maradék **4**.

A 94 db 36-os csoportból hozzunk létre újabb 6-os csoportokat:

$94 : 6 = 15$ maradék **4**.

A 15 db 216-os csoportból alkossunk újabb 6-os csoportokat:

$15 : 6 = 2$ maradék **3**.

A 2-t osszuk el 6-tal:

$2 : 6 = 0$ maradék **2**.

Tehát 3411-ből létrehoztunk:

2 db 1296-os csoportot

3 db 216-os csoportot

4 db 36-os csoportot

4 db 6-os csoportot

3 db 1-es csoportot.

Azaz $3411 = 23443_6$.

3. Tízes számrendszerből tetszőlegesbe váltáskor a számok egész és törtrészét külön kell választani. A törtrész átalakításakor a tízes számrendszerbeli alakot meg kell szorozni az új számrendszer alapszámával. Az eredmény egészrésze lesz a keresett szám következő számjegye, a törtrésszel pedig ugyanúgy számolunk tovább.

Példa: $0{,}125_{10}$ keressük a 6-os számrendszerbeli megfelelőjét!

$\underline{0{,}125} \cdot 6$
0,75
$\underline{0{,}75} \cdot 6$
4,50
$\underline{0{,}5} \cdot 6$
3,0
$\underline{0 \cdot 6}$
0

Az eredmény: $0{,}125 = 0{,}043_6$.

4. Keressük meg $73{,}73$ hatos számrendszerbeli megfelelőjét.

Megoldás: 73,73 egész része 73.

Kezdjük ezzel: $73:6=12$ $\qquad$ $12:6=2$ $\qquad$ $2:6=0$

1 $\qquad$ **0** $\qquad$ **2**

$$73=201_6$$

Folytassuk a törtrésszel:

$\underline{0{,}73}\cdot 6$
4,38
$\underline{0{,}38}\cdot 6$
2,28
$\underline{0{,}28}\cdot 6$
1,68
$\underline{0{,}68}\cdot 6$
4,08
$\underline{0{,}08}\cdot 6$
0,48
$\underline{0{,}48}\cdot 6$
2,88
$\underline{0{,}88}\cdot 6$
5,28
$\underline{0{,}28}\cdot 6$
1,68
ismét megjelent a $0{,}28$. Ez azt jelenti, hogy végtelen szakaszos tizedes törtet kaptunk.

$0{,}73=0{,}42\dot{1}402\dot{5}_6$ $\qquad$ Így $73{,}73=201{,}42\dot{1}402\dot{5}$.

3. 5. Feladatok különböző alapú számrendszerekben

1. Milyen alapú számrendszerben igazak a következő egyenlőségek?

a) $12_x+13_x=30_x$

b) $6_x+6_x=51_x$

Megoldás:

a) $12_x=1\cdot x^1+2\cdot x^0=x+2$

$13_x=1\cdot x^1+3\cdot x^0=x+3$

$$30_x = 3\cdot x^1 + 0\cdot x^0 = 3x$$

$$(x+2)+(x+3)=3x$$

$$2x+5=3x$$

$$5=x$$

b) $6_x = 6\cdot x^0 = 6$

$51_x = 5\cdot x \ \ +1 \qquad \Rightarrow \ 6\cdot 6 = 5x+1$

$$36=5x+1$$

$$35=5x$$

$$7=x$$

2. A 6-os számrendszerben mely számok oszthatók 5-tel?

Megoldás

Tízes számrendszerben az öttel oszthatóságot az utolsó számjegy határozza meg.

Hatos számrendszerben az utolsó jegy a 2-vel, 3-mal vagy 6-tal való oszthatóságról dönt.

Mivel minden hatványa 5-tel osztva 1-et ad maradékul, ezért csoportosítsuk át a hatos számrendszerben felírt számot úgy, hogy abban elhagyjuk az 5 többszöröseit tartalmazó tagokat.

Így az 5-tel való oszthatóság szempontjából elég a számjegyek összegét vizsgálnunk.

Tehát a 6-os számrendszerben egy szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha a számjegyeinek összege osztható 5-tel.

Például a 201354_6 osztható 5-tel, a 33420_6 5-tel osztva 2 maradékot ad.

3. Melyik az a legkisebb pozitív egész, ami a 8-as számrendszerben felírva 3-ra, 9-es számrendszerben felírva pedig 4-re végződik?

Megoldás

Olyan *B* számot keresünk, ami 8-cal osztva 3, 9-cel osztva pedig 4 maradékot ad. Ekkor viszont *B*+5 osztható 8-cal és 9-cel is. A legkisebb ilyen pozitív szám a 72. Ekkor $B=67$.

4. Bizonyítsuk be, hogy minden n > 3 egész számra 1320_n szám 6-tal osztható!

Megoldás

$1320_n = 1\cdot n^3 + 3\cdot n^2 + 2\cdot n \ + 0\cdot n^0 = n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^2 + 3n + 2) = n(n+1)(n+2)$, ami három szomszédos egész szám $\Rightarrow$ mindig van köztük 3-mal osztható és 2-vel osztható $\Rightarrow$ szorzatuk osztható 6-tal.

5. Egy tízes számrendszerben felírt pozitív egész szám számjegyeit fordított sorrendben is felírjuk, és az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez.

a) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1997 jegyű számot?

b) Kaphatunk-e így csupa 9-esből álló 1998 jegyű számot?

Megoldás

a) Megmutatom, hogy ilyen 1997 jegyű szám nincs. Ha a feladatban szereplő két szám összege 1997 jegyű, akkor kell, hogy az eredeti szám is 1997 jegyű legyen. Tegyük fel, hogy az N egy tízes számrendszerben felírt 1997 jegyű szám:

$$N = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{1996} a_{1997}}\,.$$

A fordított szám: $F = \overline{a_{1997} a_{1996} \ldots a_2 a_1}\,.$

Az összeg: $N + F = 99\ldots99\,.$

Az írásbeli összeadás szabályai szerint N-et és F-et összeadva az egymás alatti számjegyek összege nem lehet 10-nél nagyobb, mert akkor 19-nek kellene lennie, de két számjegy összege legfeljebb 18 lehet.

Ezért $N + F$ -ben a jegyek összege N és F jegyeinek az összegével egyenlő:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1997}) + (a_{1997} + a_{1996} + \ldots + a_1) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{1997})$$

tehát $N + F$ jegyeinek az összege páros.

Viszont $N + F$ jegyeinek feltételezett összege: $9\cdot 1997$ páratlan, ezért ilyen N szám nincs.

b) Viszont 1998 jegyű ilyen szám van, pl.: a 999 darab 1-esből és 999 darab 8-asból álló szám: $11\ldots1188\ldots88$

4. Diofantoszi problémák, diofantoszi egyenletek

4. 1. Bevezetés

A diofantoszi egyenletek története az ókorba nyúlik vissza. A diofantoszi egyenletek nevüket az Alexandrában élő *Diophantosz*ról kapták, aki Arithmetica című művében számos ilyen jellegű feladattal foglalkozott. A tizenhárom kötetes műből a hat első maradt meg. A kor matematikájától eltérően, a görög geometrikus irányzatot megtagadva, kizárólag algebrával foglalkozott. Első- és másodfokú egyenleteket oldott meg igen ügyesen, és határozatlan egyenleteket tárgyalt. Először használt algebrai jeleket. Őt tekintjük az első kezdetleges algebrai nyelv és jelrendszer megteremtőjének.

<u>Definíció:</u> **Diofantoszi** (diofantikus) **egyenlet**nek (egyenletrendszernek) nevezzük az olyan egyenletet (egyenletrendszert), amelynek együtthatói egész számok, és a megoldásait is az egész számok körében keressük.

Legegyszerűbb az elsőfokú diofantoszi egyenlet, amelynek általános alakja $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = b$; ennek akkor és csakis akkor van egész számokból álló megoldása, ha az $a_1, \ldots a_k$ együtthatók legnagyobb közös osztója *b*-nek is osztója, s ebben az esetben a megoldások száma végtelen.

Míg az elsőfokú diofantoszi egyenletek megoldásaira különböző eljárások ismeretesek, addig a magasabbfokú diofantoszi egyenletek megoldásaira alig ismerünk általános módszert. Nevezetes magasabbfokú egyenletek szerepelnek a Fermat-sejtésben is.

4. 2. Feladatok

1. feladat

Az Állatiskola Sárkányosztályába 3, 4 és 5 fejű sárkányok járnak. Egy négyfejű sárkánynak kétszer annyi négyfejű osztálytársa van, mint ötfejű, és a négyfejűek összes fejeinek a száma 1-gyel nagyobb, mint a háromfejűek összes fejeinek a száma. Hány 3,4 és 5 fejű sárkány jár ebbe az osztályba, ha összes fejeik száma nem több mint 132?

Megoldás

Legyen *n* a négyfejűek, *h* a háromfejűek, *ö* az ötfejűek száma. A feltételek szerint

$n-1=2ö$, $4n-1=3h$, $3h+4n+5ö\leq 132$

Innen $4n-1+4n+\frac{5(n-1)}{2}\leq 132$

$$8n-2+8n+5n-5\leq 264$$

$$21n-7\leq 264$$

$$21n\leq 271$$

$$n\leq\frac{271}{21}\Rightarrow n\leq 12$$

Minden feltételt figyelembe véve: $n=7$, $h=9$, $ö=3$.

2. feladat

Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az alábbi egyenleteket! $(n\neq k)$

a) $k^3+7n=n^3+7k$

b) $k^4+9n^2=n^4+9k^2$

Megoldás

a) $k^3+7n=n^3+7k$

$k^3-n^3=7k-7n$

$(k-n)(k^2+kn+n^2)=7(k-n)$, tehát $(k^2+kn+n^2)=7$

A feltételek miatt $k=2$ vagy $k=1$. Első esetben $n=1$ adódik, a másik esetben pedig $n(n+1)=6$, ahonnan $n=2$. Tehát *n* és *k* egyike 2, a másik 1.

b) $k^4+9n^2=n^4+9k^2$

$k^4-n^4=9k^2-9n^2$

$(k^2-n^2)(k^2+n^2)=9(k^2-n^2)$ ahonnan $(k^2+n^2)=9$. Mivel a 9 nem bontható fel két négyzetszám összegére, így ennek az egyenletnek nincs megoldása.

3. feladat

Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor valamelyik oldala osztható 5-tel!

Megmutatjuk, hogy ha egyik befogó sem osztható 5-tel, akkor az átfogó osztható 5-tel.

Ha egyik befogó sem osztható 5-tel, akkor ezek négyzete 5-tel osztva csak 1vagy 4 maradékot adhat. Ha mindkettő 1 maradékot ad, akkor az átfogónk $n^2=5k+2$ alakú négyzetszám, így n^2 vagy 2-re, vagy 7-re végződik, ami lehetetlen. Ugyanígy ellentmondásra jutunk, ha mindkét befogó négyzete 5-tel osztva 4 maradékot ad. Így az egyik befogó négyzete 5-tel osztva 1, a másik négyzete 4 maradékot ad, vagyis ezek összege – s így az átfogó is – osztható 5-tel.

4. feladat

Házunk előtt háromszor annyi kerékpár és autó halad el együttesen, mint szekér. A kerékpárosok és kerekeik, valamint az autók s kerekeik száma együttesen száz. Hány kerékpár, autó és szekér haladt el a házunk előtt?

Megoldás

Jelölje a kerékpárosok számát x, az autók számát y, a szekerek számát z.

A feladat szerint

$x+y=3z$ (1)

$3x+5y=100$ (2)

A fenti egyenletrendszernek keressük a pozitív egész megoldásait.

Az első egyenlet háromszorosát kivonva a második egyenletből kapjuk, hogy

$2y=100-9z$ $\Rightarrow$ mivel a baloldal páros, a jobboldalon a z is csak páros lehet.

Legyen $z=2t>0$

Ebből $y=50-9t>0$, azaz $t<\frac{50}{9}$.

$x=3z-y=6t-50+9t=15t-50>0$, azaz $t>\frac{50}{15}$

A fentiek alapján: $3\frac{1}{3} < t < 5\frac{5}{9}$

vagyis: $t = 4 \quad vagy \quad t = 5$

Ha $t = 4$ akkor $x = 10$ $y = 14$ $z = 8$

Ha $t = 5$ akkor $x = 25$ $y = 5$ $z = 10$

5. feladat

Egy tál süteményt szeretnénk feldarabolni a téglalap alakú tepsi oldalaival párhuzamos vágásokkal úgy, hogy szeletelés után a tepsi szélével érintkező (kicsit égett) sütemények száma egyenlő legyen a tepsi szélével nem érintkező sütemények számával. Hogyan tehetjük ezt meg?

Megoldás

Legyen a felszeletelt süteményben n oszlop és k sor. Ekkor a sütemények száma $n \cdot k$. A tepsi szélével nem érintkező sütemények száma $(n-2)(k-2)$.

A feltételek szerint: $n \cdot k = 2 \cdot (n-2)(k-2)$, ahonnan $nk - 4n - 4k + 8 = 0$, azaz $(n-4)(k-4) = 8$.

Innen $n = 5$, $k = 12$ vagy $n = 6$, $k = 8$. (Természetesen, ha a tepsit elforgatjuk 90° -kal, akkor n és k szerepe felcserélődik.)

Összegzés

Az általam választott témakör csak egy kis szelete a középiskolai tananyagnak. A témakörhöz szorosan kapcsolódik például a kongruencia, de a maradékosztályok nem tartoznak a középiskolai tantervi követelményekhez, ezért dolgozatomban erről nem akartam írni. Az algebrai számelmélet témakörét is csak érintettem, hiszen ez a középiskolában algebra néven külön fejezetté vált.

Az új érettségi követelményekhez hozzátartozik a matematika történet is, ezért a dolgozatomat rövid történei áttekintéssel kezdtem.

Az egyik legfontosabb a számokkal végzett műveletek közül az osztás, az oszthatóság, ezért fontosnak tartottam, hogy ebben a fejezetben a középiskolában tanult oszthatósági szabályokat ismertessem. Nem adtam általános bizonyítást ezekre a tételekre, inkább konkrét feladatokból vontam le következtetésként az állításokat. Ezeket a középiskolában kilencedi osztályban tanítjuk, ezért itt nem lenne szerencsés bonyolult formalizmussal még terhelni a tanulókat. Cél, hogy tudják és alkalmazzák ezeket a szabályokat. Természetesen emelt szinten később ezek a tételek precízen bizonyíthatók. Az oszthatóságra választott feladataim között régi versenyfeladatok is találhatók, sőt mutatok példát teljes indukciós bizonyításra is. A tökéletes, a barátságos számok azért kerültek be a dolgozatomba, mert igen érdekesek és bár túlmutatnak a középiskolai kötelező tantervi anyagon, én úgy gondolom ezekről a diákoknak hallani kell. Akiknek ez felkelti az érdeklődését és kutatnak ezek után szép és fontos tulajdonságokra bukkannak a számokkal kapcsolatban.

A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös tárgyalását is olyan feladatokon keresztül mutatom meg, melyeket a diákok könnyen megértenek, látják azonnal a gyakorlati hasznát, alkalmazását, így hasznosnak és fontosnak érzik majd. Ezek például az egyszerűsítés, törtek összeadása és kivonása. Természetesen a jobb képességű tanulókra is gondoltam ezért az euklideszi algoritmust is ismertettem. A feladatokat itt változatosak és a valós élethez szorosan kapcsolódnak.

A számrendszerek fejezetben is található rövid történeti áttekintés. Itt is konkrét számokkal és adott alapú számrendszerekkel foglalkozom. Úgy vélem így könnyebb megtanítani az átváltásokat egyik számrendszerből a másikba.

A diofantoszi problémákat vettem be utolsóként a dolgozatomba. Itt különösen figyeltem arra, hogy olyan feladatokat válogassak, amelyek elsősorban izgalmasak, másodsorban jól fejlesztik a tanulók logikus gondolkodását, problémamegoldó, problémalátó készségét.

Úgy gondolom, hogy sikerült célkitűzéseimet megvalósítanom, hiszen tanári munkám során fogom tudni használni az itt leírtakat. Remélem dolgozatom megfelelő betekintést nyújt a középiskolai számelmélet világába. Remélem érdekességként olyan részeket is sikerült beiktatni, melyek a tehetségesebb tanulókat is lekötik és segítik látás és gondolkodásmódját kiszélesíteni.

Tartalomjegyzék

Felhasznált irodalom

- Matematika történeti ABC / Sain Márton - Budapest: Tankönyvkiadó 1980
- Nincs királyi út! / Sain Márton - Budapest: Gondolat Kiadó 1986
- Sokszínű matematika 9. / Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urban, Vincze - Szeged: Mozaik Kiadó, 2002
- KÖMAL 38. évfolyam, 1988.
- Matematika feladatgyűjtemény I. / Bartha - Bogdán - Csúri - Duró Lajosné - Gyapjas Ferencné - Kántor Sándorné - Pintér Lajosné - Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó 1997
- Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából - Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó 1993
- Számelmélet / Freud Róbert - Gyarmati Edit - Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó 2000
- Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I. / Gerőcs László, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné Simon Judit - Budapest: Nemzeti tankönyvkiadó 2005.
- Elemek / Euklidesz - Budapest: Gondolat 1983
- http://www.om.hu

Köszönetemet fejezem ki tanáraimnak, Dr. Turjányi Sándor egyetemi adjunktusnak, aki megszerettette velem a számelméletet, Dr. Lakatos Piroska egyetemi docensnek, akitől algebrából sokat tanultam, Dr. Győry Kálmán egyetemi tanárnak, akinek az előadásain továbbfejleszthettem a számelméletről tanult ismereteimet, s végezetül témavezetőmnek Dr. Bérczes Attila egyetemi adjunktusnak a dolgozatom megírásához nyújtott segítségért.