Doktori (PhD) értekezés tézisei

Feltételes egyenletek általánosított monom függvényekre

Garda-Mátyás Edit

Témavezető: Dr. Boros Zoltán

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2020.

Motiváció

Jelölje $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{N}$ a valós, racionális, egész és pozitív egész számok halmazát. Továbbá $\mathbb{R}^+$ jelölje a pozitív valós számok halmazát.

Definiáljuk a következő halmazokat:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = y\,\}, \\
&\quad m \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, m,\ a_m \neq 0,\, a_0 \neq 0\,, \\
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^m = y\},\ m \in \mathbb{Z}\,,\quad |m| \geqslant 2\,, \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}, \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1\}, \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}, \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \ \text{ és } \ \log x = y\,\}, \\
S_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^x = y\}.
\end{aligned}
$$

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *additív* függvénynek nevezzük, ha bármely valós x, y esetén $f(x+y) = f(x) + f(y)$ teljesül. Tudjuk, hogy léteznek nem folytonos additív függvények. Egy additív f függvény akkor és csakis akkor folytonos, ha lineáris, azaz $f(x) = cx$ alakú, c valós számmal.

A kutatás motivációjaként bizonyos additív függvényekre megoldott problémák szolgáltak.
A probléma a következő:
Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy additív függvény. Ha f teljesíti az $xf(y) = yf(x)$ kiegészítő egyenletet az $(x,y) \in S_i$, $i = 0, 1, 2, 4$ párok esetén, következik-e ebből az f folytonossága (azaz f lineáris-e)? Ezekben az esetekben az additív függvény folytonosságát igazolták:

$(x, y) \in S_0$: a pozitív válasz megtalálható a [12]-ben.
$(x, y) \in S_1$: 1968-ban A. Nishiyama és S. Horinouchi [35] bizonyították, hogy minden $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív leképezés, mely teljesíti az $xf(y) = yf(x)$ egyenletet bármely $(x, y) \in S_1$ esetén, $f(x) = f(1)x$ alakú, bármely $x \in \mathbb{R}$-re.
$(x, y) \in S_2$: a problémát I. Halperin vetette fel 1963-ban (J. Aczél [1] közölte). Halperin kérdésére S. Kurepa [30] adta meg az igenlő választ egy olyan tétel bizonyításával, amely általánosabb eredményt tartalmaz és az $f(x) = f(1)x$ -hez vezet. W. B. Jurkat [25] ugyanezt az eredményt érte el, Halperintől függetlenül.
Ezt az eredményt több szerző is kiterjesztette különböző irányokba. Számos további publikáció között találunk általánosításokat a [29, 14.3.3 Tétel], [27] és [31]-ben.
$(x, y) \in S_4$: a problémát W. Benz [5] fogalmazta meg 1989-ben. Erre a problémára, a derivációkkal kapcsolatos hasonló kérdéssel együtt Z. Boros és P. Erdei [6] adtak igenlő választ.

B. Ebanks [12] általánosította a problémát egy f, g additív függvénypárra, melyek az $yf(x) = xg(y)$ kiegészítő egyenletet teljesítik egy adott görbe minden (x, y) pontja esetén. Számos (de nem mindenik) görbetípus esetén azt az eredményt kapta, hogy a feltételes egyenletet teljesítő f és g függvények egyenlőek és lineárisok (beleértve S_i, $i = 0, 4, 5, 6$-ot).

Előzmények és célkitűzések

A kutatás céljának ismertetése és a főbb eredmények bemutatása előtt felidézzük ezeknek a megfogalmazásához szükséges terminológia fontosabb elemeit.
Az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényt n*–additív* függvénynek nevezzük, ha minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és bármely $x_1, \ldots, x_n, y_i \in \mathbb{R}$ esetén

$$F\left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, ..., x_n\right) =$$
$$= F\left(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n\right) + F\left(x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n\right),$$

azaz F minden x_i ($x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$) változójában additív. Az 1-additív függvényeket egyszerűen additívnak, a 2-additív függvényeket pedig biadditívnak hívjuk. Továbbá a konstans függvényeket 0-additívnak nevezzük.
Adott $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén az F *diagonalizáltjának* nevezzük azt az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amelyet az F-ből kapunk az összes ($\mathbb{R}$-beli) változó egyenlővé tételével:

$$f(x) = F(x, \ldots, x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Sajátos esetben, ha f az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n–additív függvény diagonalizáltja, akkor azt mondjuk, hogy f *általánosított* n *-edfokú monom.* A harmadfokú általánosított monomokat köbfüggvényeknek nevezzük, a kvadratikus függvények a másodfokú általánosított monomok. Az additív függvények elsőfokú általánosított monomok, a valós állandók pedig 0-fokú általánosított monomok.
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ általánosított n-edfokú monom ($n \in \mathbb{N}$) akkor és csakis akkor folytonos, ha

$$f(x) = cx^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, c valós számmal.
A kvadratikus függvényeket az

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

függvényegyenlet jellemzi, amely az úgynevezett *norma-négyzet egyenlet.*

Az f kvadratikus függvényt generáló biadditív szimmetrikus F függvényt a következő képlet adja:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]$$

bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.
Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváció*, ha f additív és teljesíti az $f(xy) = f(x)y + xf(y)$ függvényegyenletet bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivációk halmazát $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-rel jelöljük. A $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *bi-derivációnak* nevezzük, ha a $t \mapsto B(t,x)$ és $t \mapsto B(x,t)$ ($t \in \mathbb{R}$) leképezések derivációk minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív leképezést n-edrendű derivációnak nevezünk, ha létezik $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ úgy, hogy B egy $(n-1)$-edrendű (szimmetrikus) bi-deriváció (vagyis B $(n-1)$-edrendű deriváció mindkét változójában) és $f(xy) - xf(y) - f(x)y = B(x,y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Az azonosan nulla leképezés az egyetlen nulladrendű deriváció. Az n-edrendű derivációk halmazát $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$-nel jelöljük.

A PhD értekezés célja olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ általánosított n-edfokú monom függvények tanulmányozása ($n \geqslant 2$), amelyek teljesítik az $y^n f(x) = x^n f(y)$ vagy $y^n f(x) = x^n g(y)$ feltételes egyenletet egy adott görbe összes (x,y) pontjára: $(x,y) \in S_i$, $i = 0, \ldots, 6$. Következik-e ebből az f és g folytonossága?

Legfontosabb eredményeinket négy fejezetben mutatjuk be, görbék szerint csoportosítva.

Polinomfüggvényeket tartalmazó feltételes egyenletek

A 3. fejezetben olyan általánosított monom függvények folytonosságát vizsgáljuk, amelyek nem nulla konstans taggal rendelkező polinomfüggvényeket tartalmazó feltételes egyenleteket teljesítenek.

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *és* $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *általánosított* n*-edfokú monomok* ($n\in\mathbb{N}$)*, amelyek teljesítik az* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x,y)\in S_0$ *párokra. Akkor* $f(x)=g(x)=x^n f(1)$ *minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén.*

Megjegyzés. Ha $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = 0$, akkor $y = a_0$ konstans. Ekkor a feltételes egyenlet

$$a_0^n f(x) = x^n g(a_0)$$

alakú, és így

$$f(x) = x^n \frac{g(a_0)}{a_0^n} = x^n f(1),$$

de a g függvényről nincs további információnk a $g(a_0) = a_0^n f(1)$-en kívül.

Megjegyzés. Az $m = 1$, $a_0 = 0$ sajátos esetben, vagyis ha $y = a_1 x$, a feltételes egyenlet $a_1^n x^n f(x) = x^n g(a_1 x)$ alakú, azaz $g(a_1 x) = a_1^n f(x)$.
Ha $a_1 = 0$, akkor ez az egyenlet nem nyújt információt, így f és g bármilyen monom függvény lehet.
Abban az esetben, ha $a_1 \neq 0$, legyen f bármilyen nem folytonos valós monom függvény. Akkor a feltételes egyenletből adódik, hogy g sem folytonos.

Ha a vizsgálatot egyetlen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ monom függvényre szűkítjük, akkor a fenti tétel azonnali következményeként kapjuk:

Következmény. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [10]). Ha az* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ n*-edfokú* ($n\in\mathbb{N}$) *monom függvény teljesíti az* $y^n f(x) = x^n f(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x,y)\in S_0$ *párokra, akkor* $f(x) = x^n f(1)$ *bármely* $x\in\mathbb{R}$ *esetén.*

A fenti következményben nincs szükség az $a_m \neq 0$ korlátozásra. $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = 0$ esetén az állítás triviálisan igaz.

Megjegyzés. A fenti következményben $m = 1,\ a_0 = 0$ esetén az implikáció nem áll fenn. Ebben az esetben, ha például $a_1 \neq 0$, a feltételes egyelet

$$a_1^n x^n f\left(x\right) = x^n f\left(a_1 x\right)$$

alakú, vagyis $f\left(a_1 x\right) = a_1^n f\left(x\right)$. Valóban, létezik $f(x) = \left(h(x)\right)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú nem folytonos példa, ahol $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem folytonos additív függvény, úgy, hogy a h homogenitási teste tartalmazza a_1-et.

Megjegyezzük, hogy az $a_0 \neq 0$ korlátozás, vagyis hogy a görbe nem halad át az origón, fontos szerepet játszik. Egyébként még egyszerű esetben is sok komplikáció lép fel, ezt láthatjuk a következő fejezetben.

A hatványfüggvényt tartalmazó feltételes egyenletek

A 4. fejezet a hatványfüggvényt tartalmazó feltételes egyenleteket teljesítő kvadratikus és köbfüggvények eredményeit tartalmazza. Először azt az esetet tanulmányozzuk, amikor a kiegészítő egyenletben csak egy kvadratikus függvény található.

Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9], E. Garda-Mátyás [16]). Ha* $2 \leqslant |m|,\ m \in \mathbb{Z}$ *és az* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény teljesíti az*

$$f(x^m) = x^{2m-2} f(x)$$

egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ *esetén, akkor létezik* $C \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

$$f(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyezzük, hogy az $m = 0$ esetben ez a következtetés triviális, vagyis maga a kiegészítő egyenlet az f folytonosságát adja, míg $m = 1$ esetén maga a feltétel triviális azonossága válik, azaz nem jelent semmilyen korlátozást az f számára (ezért f lehet nem folytonos is).

Az $m = 2$ sajátos esetben, de a kiegészítő egyenlet módosított változatával nem folytonos megoldásokat találunk.

Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [9]). Legyen $K \in \mathbb{R}$. Ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti az*

$$f(x^2) = Kx^2 f(x) \tag{2}$$

kiegészítő egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor vagy $f = 0$, vagy $K \in \{1, 2, 4\}$. Ez utóbbi esetekben f-nek a következő reprezentációi vannak.

- *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus leképezés a $K = 1$ esetben akkor és csak akkor tesz eleget a (2) feltételnek, ha*

$$f(x) = f(1) \cdot x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus leképezés a $K = 2$ esetben akkor és csak akkor tesz eleget a (2) feltételnek, ha létezik $\varphi \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ úgy, hogy*

$$f(x) = 4x\varphi(x) - \varphi(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

- *Ha $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szimmetrikus bi-deriváció, akkor*

$$f(x) = B(x, x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a (2) egyenlet egy kvadratikus megoldása $K = 4$ esetén.

Megjegyzés. Ha $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, akkor a (3) egyenletből $f(x) = \varphi(x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ következik. Ez a megfigyelés biztosítja a (2) egyenlet egy nem nulla kvadratikus f megoldásának létezését $K = 2$ esetén. Az ilyen megoldások létezése $K = 1$ és $K = 4$ esetén az utolsó tétel nyilvánvaló következménye.

Megjegyzés. Megfigyelhetjük, hogy $K = 4$ esetén ez a tétel csak elégséges feltételt biztosít az f számára ahhoz, hogy teljesítse az (1) és a (2) egyenleteket. Nyitott kérdés, hogy ez szükséges feltétel-e.

Ebben az esetben azonban valamivel gyengébb szükséges feltételt tudunk bizonyítani.

Tétel. *Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függgvény teljesíti az*

$$f\left(x^2\right) = 4x^2 f(x)$$

kiegészítő egyenletet bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f egy másodfokú szimmetrikus bi-deriváció diagonalizáltja.

Az előző eredmények jelentőségét a következő tétel emeli ki, ahol a kiegészítő egyenletben két kvadratikus függvény szerepel.

Tétel. *Az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvények akkor és csakis akkor teljesítik az $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x, y) \in S_1$ párokra $m = 2$ esetén, ha létezik egy $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvény és egy $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény, mely teljesíti a*

$$h(x^2) = 4x^2 h(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletet úgy, hogy

$$f(x) = h(x) + \varphi(x^2) \quad \text{és} \quad g(x) = \frac{1}{4}h(x) + x\varphi(x)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

És végül, köbfüggvényekre kiterjesztve a vizsgálatot a következő eredményt kapjuk.

Tétel. *(Z. Boros és E. Garda-Mátyás [10]). Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy általánosított harmadfokú monom, amely teljesíti az $y^3 f(x) = x^3 f(y)$ kiegészítő egyenletet $(x, y) \in S_1$ feltétel mellett, akkor $f(x) = x^3 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Egyenletek kúpszeletek mentén

Az 5. fejezetben olyan additív, kvadratikus és magasabb rendű monom függvények folytonosságát vizsgáljuk, amelyek a hiperbolák vagy az egységkör mentén teljesítenek kiegészítő egyenleteket.
Negatív eredménnyel kezdünk az $xy = 1$ egyenlet által adott hiperbola mentén. Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy n-edfokú általánosított monom függvény ($2 \leqslant n \in \mathbb{N}$), f eleget tesz az

$$f(x) = x^{2n} f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\forall\ x \neq 0)$$

kiegészítő egyenletnek, könnyen belátható, hogy léteznek nem folytonos megoldások.
Például, ha $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy nem azonosan nulla deriváció, akkor egy nem folytonos f megoldás az

$$f(x) = x^{n-2k} \left(d(x)\right)^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol $k \in \{ 1, 2, \ldots, [n/2] \}$.
Habár tudjuk, hogy minden $n \geqslant 2$ esetén vannak nem folytonos megoldásai az $y^n f(x) = x^n f(y)$ kiegészítő egyenletet teljesítő monom függvényeknek az $(x, y) \in S_2$ feltétel mellett, folytatjuk a vizsgálatain-

kat kvadratikus függvényekkel. Ebben az esetben a feltételes egyenlet

$$f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (\forall\ x \neq 0) \tag{4}$$

alakú. Annak ellenére, hogy az f folytonossága nem következik ebből a feltevésből, érdekes és fontos eredményeket kaphatunk az $x \mapsto F(x,1)$ és $x \mapsto F(x,1/x)$ leképezésekre. Ezeket az eredményeket felhasználva a továbbiakban igazoljuk a kvadratikus függvények folytonosságát több kapcsolódó esetben.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti a* (4) *kiegészítő egyenletet, akkor*

$$F(x,1) = xf(1)$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény teljesíti az $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x,y) \in S_2$ párok esetén, akkor*

$$f\left(x^2\right) = 2x^4 F\left(x, \frac{1}{x}\right) + 6x^2 f(x) - 7x^4 f(1)$$

minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ -ra.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény eleget tesz az*

$$F\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

feltételnek bármely $x \neq 0$ esetén, akkor $f(x) = x^2 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re.

Ezután a kiegészítő egyenleteket az $x^2 - y^2 = 1$ egyenletű hiperbola mentén teljesítő additív és kvadratikus függvények folytonosságát vizsgáljuk. Első eredményünk az additív esetre vonatkozik.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additív függvények. Ha f, g teljesítik az $yf(x) = xg(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x, y) \in S_3$ párok esetén, akkor $f(x) = g(x) = xf(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re.*

A következő eredményünk a kvadratikus esetre vonatkozik, egyetlen kvadratikus függvénnyel.

Tétel. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény eleget tesz az $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ kiegészítő egyenletnek az $(x, y) \in S_3$ feltétel mellett, akkor $f(x) = x^2 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.*

Ezt az eredményt általánosítjuk egy második kvadratikus függvény használatával.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvények. Ha f, g teljesítik az $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ kiegészítő egyenletet az $(x, y) \in S_3$ párok esetén, akkor $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re.*

A kiegészítő egyenleteket az egységkör mentén teljesítő kvadratikus valós függvényekkel folytatjuk vizsgálatainkat. Amikor a feltételes egyenletben egyetlen kvadratikus függvény van, a következő eredményt kapjuk.

Tétel. *(E. Garda-Mátyás [16]). Ha egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus függvény eleget tesz az $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ kiegészítő egyenletnek az $(x, y) \in S_4$ párok esetén, akkor $f(x) = x^2 f(1)$ minden $x \in \mathbb{R}$-re.*

Általánosítva ezt az eredményt egy második kvadratikus függvény használatával, a következő tételt kapjuk.

Tétel. *Ha* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvények teljesítik az* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *kiegészítő egyenletet az* $(x, y) \in S_4$ *párok esetén, akkor* $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *-re.*

Végül, figyelembe véve a függvényegyenletek irodalmának további eszközeit, amelyek nagyon friss eredményeket is tartalmaznak, érdekes szükséges feltételt kapunk a (4) kiegészítő egyenletet teljesítő kvadratikus függvényekre.

Tétel. *Ha egy* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvadratikus függvény eleget tesz az* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *kiegészítő egyenletnek az* $xy = 1$ *feltétel mellett, akkor létezik egy* H *harmadrendű szimmetrikus bi-deriváció, amelyre*

$$f(x) = H(x, x) + x^2 f(1).$$

Transzcendens függvényeket tartalmazó feltételes egyenletek

A 6. fejezetben olyan $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kvadratikus és köbfüggvényeket vizsgálunk, amelyek logaritmus illetve exponenciális függvényeket tartalmazó feltételes egyenleteket teljesítenek. Ezekben az esetben bebizonyítjuk az f, g kvadratikus és köbfüggvények egyenlőségét és folytonosságát.

Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *n-edfokú monom függvények* ($n \in \{2, 3\}$) *és* f, g *eleget tesznek az* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *kiegészítő egyenletnek* $\mathbb{R}^+$*-on minden* $(x, y) \in S_5$ *esetén. Ekkor* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$.

Megjegyzés. A fenti tétel eredményei átvihetők az exponenciális függvény esetére, amikor $(x, y) \in S_6$, mivel az azonos alapú exponenciális és logaritmus függvények egymás inverzei.

Megjegyezzük, hogy mind a logaritmus, mind az exponenciális függvény alapja bármely pozitív valós szám lehet, az 1-et kivéve.

A szerzőnek az értekezésben feldolgozott közleményei

1. E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93 (2)** (2019), 451–465,
2. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar., **154 (2)** (2018), 389–401,
3. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (közlésre elfogadva).

Kéziratok

1. Linked pairs of monomial functions,
2. Quadratic functions fulfilling an additional condition along the hyperbola $xy = 1$.

A szerző további közleményei

1. E. Garda-Mátyás and G. Zsombori, *VII. Sapi tehetségnap*, Matlap - Ifjúsági matematikai lapok **5** (2017), 161–173. (ISSN: 1224-3140)
2. E. Garda-Mátyás and G. Zsombori, *Sapi tehetségnap*, Matlap - Ifjúsági matematikai lapok **4** (2012), 129–137. (ISSN: 1224-3140)

3. E. Garda-Mátyás and Z. Makó, *The modified joint optimal strategy concept in zero-sum fuzzy matrix games*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., **36** (2012), 103–116. (ISSN: 0138-9491, Mathematical Reviews)

4. Z. Makó, F. Szenkovits, E. Garda-Mátyás and I. Csillik, *Classification of near Earth asteroids wih artificial neural network*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, **L(1)** (2005), 85–92. (ISSN: 0252-1938, Mathematical Reviews)

5. Z. Makó, F. Szenkovits, E. Garda-Mátyás, *Solution of Kepler-equation with artificial neural network*, Automation Computers Applied Mathematics, **13** (2004), 119–127. (ISSN: 1221-437X, Zentralblatt)

6. E. Garda-Mátyás, Z. Makó, F. Szenkovits and I. Csillik, *The chaotic variation of capture effect in the three body problem*, Proceedings of the 4nd International Conference of PHD Students (Natural Science), Miskolc, (2003), 31–38. (ISBN: 963 661 580 5)

Hivatkozások jegyzéke

[1] J. Aczél, *Some unsolved problems in the theory of functional equations*, Arch. Math. **15** (1964), 435–444.

[2] J. Aczél, *The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with the aid of Hamel bases*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **20** (1965), 65–73.

[3] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1989.

[4] M. Amou, *Quadratic functions satisfying an additional equation*, Acta Math. Hungar. (2020). https://doi.org/10.1007/s10474-020-01047-0

[5] W. Benz, *5. Problem* in *Report of Meeting: The twenty-seventh international symposium on functional equations*, Aequationes Math. **39** (1990), 302.

[6] Z. Boros and P. Erdei, *A conditional equation for additive functions*, Aequationes Math. **70** (2005), 309–313.

[7] Z. Boros and W. Fechner, *An alternative equation for polynomial functions*, Aequationes Math. **89/1** (2015), 17–22.

[8] Z. Boros, W. Fechner and P. Kutas, *A regularity condition for quadratic functions involving the unit circle*, Publ. Math. Debrecen **89/3** (2016), 297–306.

[9] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar. **154 (2)** (2018), 389-401.

[10] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (accepted).

[11] B. Ebanks, *Characterizing ring derivations of all orders via functional equations: results and open problems*, Aequationes Math. **89** (2015), 685–718.

[12] B. Ebanks, *Linked pairs of additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 1025–1040.

[13] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 317–330.

[14] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions-II*, Aequationes Math. **92** (2018), 581–597.

[15] B. Ebanks and C.T. Ng, *Homogeneous tri-additive forms and derivations* Linear Algebra and its Applications **435** (2011), 2731–2755.

[16] E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93 (2)** (2019), 451–465.

[17] A. Grząślewicz, *Some remarks to additive functions*, Math. Japon. **23** (1978/79), 573–578.

[18] E. Gselmann, *Notes on the characterization of derivations*, Acta Sci. Math. (Szeged) **78** (2012), 137–145.

[19] E. Gselmann, *Derivations and linear functions along rational functions*, Monatsh. Math. **169** (2013), 355–370.

[20] E. Gselmann, Cs. Vincze and G. Kiss, *On functional equations characterizing derivations: methods and examples*, Results Math **73 (2)** (2018), https://doi.org/10.1007/s00025-018-0833-6.

[21] F. Halter-Koch, *Characterization of field homomorphisms and derivations by functional equations*, Aequationes Math. **59** (2000), 298–305.

[22] F. Halter-Koch, *A characterization of derivations by functional equations*, Math. Pannon. **11** (2000), 187–190.

[23] F. Halter-Koch und L. Reich, *Charakterisierung von Derivationen höherer Ordnung mittels Funktionalgleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber II **207** (1998), 123–131.

[24] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$*, Math. Ann. **60** (1905), 459–462.

[25] W. B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 683–686.

[26] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions I*, Aequationes Math. **4** (1970), 163–175.

[27] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions II*, Aequationes Math. **6** (1971), 46–58.

[28] Z. Kominek, L. Reich and J. Schwaiger, *On additive functions fulfilling some additional condition*, Sitzungsber. Abt. II **207** (1998), 35–42.

[29] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities (second edition)*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2009.

[30] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **19** (1964), 23–36.

[31] S. Kurepa, *Remarks on the Cauchy functional equation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **5 (19)** (1965), 85–88.

[32] P. Kutas, *Algebraic conditions for additive functions over the reals and over finite fields*, Aequationes Math. (in print).

[33] Gy. Maksa, *On the trace of symmetric bi-derivations*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. **IX**, No. **6** (1987), 303–307.

[34] M. A. McKiernan, *On vanishing n-th ordered differences and Hamel bases*, Ann. Polon. Math. **19** (1967), 331–336.

[35] A. Nishiyama and S. Horinouchi, *On a system of functional equations*, Aequationes Math. **1** (1968), 1–5.

[36] L. Reich, *Derivationen zweiter Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen — ein überblick*, Grazer Math. Ber. **337** (1998), 45–65.

[37] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29 (1-2)** (1982), 19–28.

[38] L. Székelyhidi, *Convolution Type Functional Equation on Topological Abelian Groups*, World Scientific, Singapore, 1991.

[39] J. Unger und L. Reich, *Derivationen höherer Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen*, Grazer Math. Ber. **336** (1998), 1–83.

[40] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. I.* With the cooperation of I. S. Cohen. The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/373/2020.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Garda-Mátyás Edit Mária
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

1. **Garda-Mátyás, E. M.**: Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle.
   Aequ. Math. 93 (2), 451-465, 2019. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-018-0591-2
   IF: 0.851
2. Boros, Z., **Garda-Mátyás, E. M.**: Conditional equations for quadratic functions.
   Acta Math. Hung. 154 (2), 389-401, 2018. ISSN: 0236-5294.
   DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-018-0795-x
   IF: 0.538

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

3. **Garda-Mátyás, E. M.**, Makó, Z.: The modified joint optimal strategy concept in zero-sum fuzzy matrix games.
   Ann. Univ. Sci. Bp. Rolando Eötvös Nomin. Sect. comput. 36, 103-116, 2012. ISSN: 0138-9491.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,389
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 1,389

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2020.12.14.

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Conditional equations for monomial functions

by Garda-Mátyás Edit

Supervisor: Dr. Boros Zoltán

UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2020.

Introduction

Let $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, and $\mathbb{N}$ denote the set of all real numbers, rationals, integers and positive integers, respectively. Let $\mathbb{R}^+$ denote the set of positive real numbers.

We define the following sets:

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = y\,\} \\
&\quad \text{with } \ m \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,\ldots,m,\ a_m \neq 0,\ a_0 \neq 0\,, \\
S_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^m = y\} \quad \text{with } m \in \mathbb{Z}\,,\ \ |m| \geqslant 2\,, \\
S_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\}, \\
S_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1\}, \\
S_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}, \\
S_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \ \text{ and } \ \log x = y\,\}, \\
S_6 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^x = y\}.
\end{aligned}
$$

We call a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additive* if $f(x+y) = f(x) + f(y)$ holds for all $x, y \in \mathbb{R}$. It is well known, that there exist discontinuous additive functions. A continuous additive function f is linear, i.e., has the form $f(x) = cx$, with some real number c.

The motivation for our investigations are some problems solved for additive functions.

The problem is the following:

Suppose that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an additive function. If f satisfies the additional equation $xf(y) = yf(x)$ for the pairs $(x,y) \in S_i$, $i = 0, 1, 2, 4$, does it imply that f is continuous (i.e., linear)? In these cases the continuity of the additive function was proved.

Case $(x,y) \in S_0$: the affirmative answer can be found in [12].

Case $(x, y) \in S_1$: in 1968 A. Nishiyama and S. Horinouchi [35] proved that every additive mapping $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, which satisfies $xf(y) = yf(x)$ for all $(x, y) \in S_1$ is of the form $f(x) = f(1)x$ for all $x \in \mathbb{R}$.
Case $(x, y) \in S_2$: the problem was posed by I. Halperin in 1963 (communicated in J. Aczél [1]). To Halperin's question S. Kurepa [30] has given the answer in the affirmative by proving, among others, a theorem which contains a more general result and leads to $f(x) = f(1)x$. W. B. Jurkat [25] has obtained independently the same result. Several authors extended this result in various directions. Among numerous further publications they provided generalizations in [29, Theorem 14.3.3], [27], and [31].
Case $(x, y) \in S_4$: the problem was formulated by W. Benz [5] in 1989. This question, together with a similar one for derivations, was answered in the affirmative by Z. Boros and P. Erdei [6].

B. Ebanks [12] generalizes the problem to a pair of additive functions f, g related by the functional equation $yf(x) = xg(y)$ for all points (x, y) on a specified curve. He finds that for many (but not all) types of curves this forces f and g to be equal and linear (including S_i, $i = 0, 4, 5, 6$).

Preliminaries

Before describing the purpose of the dissertation and presenting the main results, let us look at the necessary terminology.
A function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ is called *n–additive* if, for every $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and for every $x_1, \ldots, x_n, y_i \in \mathbb{R}$,

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + F(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

i.e., F is additive in each of its variables $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. We call 1-additive functions simply additive, 2-additive functions biadditive. Further, constant functions will be called 0-additive.
Given a function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, by the *diagonalization* of F we understand the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ arising from F by putting all the variables (from $\mathbb{R}$) equal:

$$f(x) = F(x, \ldots, x) \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

If, in particular, f is the diagonalization of an n–additive function $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, we say that f is a *monomial function (or generalized monomial) of degree* n . Generalized monomials of degree 3 are called cubic functions, quadratic functions are generalized monomials of degree 2. Further, additive functions are generalized monomials of degree 1 and real constants are generalized monomials of degree 0.
A monomial function $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of degree $n \in \mathbb{N}$ is continuous if, and only if, it can be given as

$$f(x) = cx^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

with some real number c.
Quadratic functions are characterized by the functional equation

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

which is the so called *norm square equation* or *parallelogram law.*
The biadditive symmetric functional F that generates the quadratic function f is given by the formula

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[f(x + y) - f(x) - f(y)]$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.
We say that $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a *derivation* if f is additive and satisfies the functional equation $f(xy) = f(x)y + xf(y)$ for every $x, y \in \mathbb{R}$. The family of derivations $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is denoted by $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. A functional $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called a *bi-derivation* if the mappings $t \mapsto B(t, x)$ and $t \mapsto B(x, t)$ $(t \in \mathbb{R})$ are derivations for each $x \in \mathbb{R}$. For each $n \in \mathbb{N}$, an additive mapping $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is called a derivation of order n, if there exists $B\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that B is a (symmetric) bi-derivation of order $n-1$ (that is, B is a derivation of order $n-1$ in each variable) and $f(xy) - xf(y) - f(x)y = B(x, y)\,(x, y \in \mathbb{R})$. The identically zero map is the only derivation of order zero. The set of derivations of order n will be denoted by $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

The aim of the dissertation is to study monomial functions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of degree $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ which satisfy the conditional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ or $y^n f(x) = x^n g(y)$ for all points $(x, y) \in S_i$, $i = 0, \ldots, 6$. Does it imply that f and g are continuous?

Our main results are presented in four chapters, classified by curves.

Conditional equations involving polynomial functions

In Chapter 3 we investigate the continuity of monomial functions satisfying additional equations involving polynomial functions whose graphs do not pass through the origin (S_0).

We get the following result.

Theorem. *Suppose that $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are generalized monomials of degree $n \in \mathbb{N}$ that satisfy the additional equation*

$y^n f(x) = x^n g(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_0$. Then $f(x) = g(x) = x^n f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Remark. If $a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = 0$ then $y = a_0$ is constant. Therefore we have

$$a_0^n f(x) = x^n g(a_0)$$

and thus

$$f(x) = x^n \frac{g(a_0)}{a_0^n} = x^n f(1),$$

but we have no further information about g other than $g(a_0) = a_0^n f(1)$.

Remark. In the particular case $y = a_1 x \quad (a_0 = 0)$ the conditional equation has the form

$$a_1^n x^n f(x) = x^n g(a_1 x),$$

i.e., $g(a_1 x) = a_1^n f(x)$. We note that, if $a_1 = 0$ then this equation yields no information, so f and g can be any monomial functions. In the case $a_1 \neq 0$, let f be any discontinuous real monomial function. Then it follows from the conditional equation that g is also discontinuous.

If we tighten the study to a single monomial function $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we have an immediate consequence of the above theorem, without the restriction $a_m \neq 0$:

Corollary. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [10]). If a monomial function $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of degree $n \in \mathbb{N}$ satisfies the additional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_0$, then $f(x) = x^n f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

Remark. In case $m = 1$, the implication in Corollary does not hold if $a_0 = 0$. In this case, if, for instance, $a_1 \neq 0$, the conditional equation takes the form

$$a_1^n x^n f(x) = x^n f(a_1 x),$$

i.e., $f(a_1 x) = a_1^n f(x)$. Indeed, there exists a discontinuous example of the form $f(x) = (h(x))^n$ $(x \in \mathbb{R})$, where $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a discontinuous additive function, such that the homogeneity field of h contains a_1.

Conditional equations involving the power function

Chapter 4 contains results for quadratic and cubic functions satisfying conditional equations involving the power function (S_1). First we study the case when there is a single quadratic function in the conditional equation.

Theorem. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9], E. Garda-Mátyás [16]). If* $2 \leqslant |m|$, $m \in \mathbb{Z}$ *and the quadratic function* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies*

$$f(x^m) = x^{2m-2} f(x)$$

for every $x \in \mathbb{R}$*, then there exists* $C \in \mathbb{R}$ *such that*

$$f(x) = C \cdot x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

We note that in case $m = 0$ the same implication is trivial, while in case $m = 1$ the additional equation becomes a trivial identity that does not imply any restriction for f (hence f can be discontinuous as well).

In the particular case $m = 2$, but with a modified version of the additional equation, we find discontinuous solutions.

Theorem. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [9]). Let* $K \in \mathbb{R}$*. If a* *quadratic function* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *satisfies the additional equation*

$$f(x^2)=Kx^2f(x) \tag{2}$$

for every $x\in\mathbb{R}$, *then either* $f=0$ *or* $K\in\{1,2,4\}$. *In the latter cases, we have the following representations for* f.

- *A quadratic mapping* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fulfills* (2) *with* $K=1$ *if, and only if,*
$$f(x)=f(1)\cdot x^2 \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

- *A quadratic mapping* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fulfills* (2) *with* $K=2$ *if, and only if, there exists* $\varphi\in\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ *such that*
$$f(x)=4x\varphi(x)-\varphi(x^2) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{3}$$

- *If* $B\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *is a symmetric bi-derivation, then*
$$f(x)=B(x,x) \qquad (x\in\mathbb{R})$$
is a quadratic solution of the equation (2) *with* $K=4$.

Remark. If $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, then equation (3) yields $f(x)=\varphi(x^2)$ $(x\in\mathbb{R})$. This observation ensures the existence of a non-zero quadratic solution f of (2) for $K=2$. The existence of such solutions in the cases $K=1$ and $K=4$ is an obvious consequence of the last theorem.

Remark. We can observe that, in case $K=4$, this theorem provides only a sufficient condition for f to satisfy equations (1) and (2). It is an open question whether this condition is necessary.

However, we can prove a somewhat weaker necessary condition in that case.

Theorem. *If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation*

$$f\left(x^2\right) = 4x^2 f(x)$$

for every $x \in \mathbb{R}$, *then* f *is the trace of a symmetric bi-derivation of order 2.*

The significance of the previous results is highlighted by the following theorem, where two quadratic functions are involved.

Theorem. *The quadratic functions* $f\,,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfy the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_1$ *with* $m = 2$ *if, and only if, there exist an additive function* $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *and a quadratic function* $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfying the condition*

$$h(x^2) = 4x^2 h(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

such that

$$f(x) = h(x) + \varphi(x^2) \quad \text{and} \quad g(x) = \frac{1}{4}h(x) + x\varphi(x)$$

for all $x \in \mathbb{R}$.

And finally, extending the study to cubic functions, we get the following result.

Theorem. *(Z. Boros and E. Garda-Mátyás [10]). If* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a generalized monomial of degree 3 that satisfies the additional equation* $y^3 f(x) = x^3 f(y)$ *under the condition* $(x, y) \in S_1$, *then* $f(x) = x^3 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Equations along conic sections

In Chapter 5 we investigate the continuity of additive, quadratic and higher order monomial functions that satisfy subsidiary equa-

tions along hyperbolas or the unit circle (S_2, S_3, S_4).
We start with a negative result along the hyperbola given by the equation $xy = 1$. If $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a generalized monomial of degree $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, f satisfies the additional equation

$$f(x) = x^{2n} f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\forall\, x \neq 0),$$

it is easy to see, that there exist discontinuous solutions.
For example, if $d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a not identically zero derivation, then a discontinuous solution f is

$$f(x) = x^{n-2k} \left(d(x)\right)^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

where $k \in \{ 1 , 2 , \dots , [n/2] \}$.
Although we know that for all $n \geqslant 2$ there are discontinuous solutions of monomial functions satisfying the additional equation $y^n f(x) = x^n f(y)$ for all $(x, y) \in S_2$, we continue our investigations for quadratic functions. In this case, the conditional equation has the form

$$f(x) = x^4 f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\forall\, x \neq 0). \tag{4}$$

Despite the fact that the continuity of f does not follow from this assumption, we can obtain some interesting and important results for the mappings $x \mapsto F(x, 1)$ and $x \mapsto F(x, 1/x)$. Using these results hereinafter, we prove the continuity of quadratic functions in several related cases.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the additional equation* (4) *then*

$$F(x, 1) = xf(1)$$

for all $x \in \mathbb{R}$.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies the additional equation* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_2$*, then*

$$f\left(x^2\right) = 2x^4 F\left(x, \frac{1}{x}\right) + 6x^2 f(x) - 7x^4 f(1)$$

for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lemma. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfies*

$$F\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

for every $x \neq 0$ *, then* $f(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Thereafter we investigate the continuity of additive and quadratic functions satisfying additional equations along the hyperbola given by the equation $x^2 - y^2 = 1$. Our first result relates to the additive case.

Theorem. *Let* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *be additive functions. If* f, g *satisfy the additional equation* $yf(x) = xg(y)$ *for the pairs* $(x, y) \in S_3$*, then* $f(x) = g(x) = xf(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

Our next result applies to the quadratic case with a single quadratic function.

Theorem. *(E. Garda-Mátyás [16]). If* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *is a quadratic function that satisfies the conditional equation* $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ *for all* $(x, y) \in S_3$ *, then* $f(x) = x^2 f(1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}$.

We generalize this result by using a second quadratic function.

Theorem. *Let $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be quadratic functions. If f, g satisfy the additional equation $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_3$, then $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

We continue our investigations with quadratic real functions that satisfy conditional equations along the unit circle. When the conditional equation is with a single quadratic function, we have the following result.

Theorem. *(E. Garda-Mátyás [16]). If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_4$, then $f(x) = x^2 f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

Generalizing this result by using a second quadratic function, we obtain the following theorem.

Theorem. *If $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are quadratic functions that satisfy the additional equation $y^2 f(x) = x^2 g(y)$ for the pairs $(x, y) \in S_4$, then $f(x) = g(x) = x^2 f(1)$ for all $x \in \mathbb{R}$.*

Finally, considering further tools from the literature of functional equations, which include very recent results as well, we get an interesting necessary condition for quadratic functions that satisfy the additional equation (4).

Theorem. *If a quadratic function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfies the additional equation $y^2 f(x) = x^2 f(y)$ under the condition $xy = 1$, then there exists a symmetric bi-derivation H of order 3 for which $f(x) = H(x, x) + x^2 f(1)$.*

Conditional equations involving transcendental functions

In Chapter 6 we investigate quadratic and cubic functions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy conditional equations involving logarithmic and exponential functions (S_5, S_6). In these cases, we prove the equality and continuity of the quadratic and cubic functions f, g.

Theorem. *Suppose* $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are monomial functions of degree* $n \in \{2, 3\}$ *and* f, g *satisfy the additional equation* $y^n f(x) = x^n g(y)$ *on* $\mathbb{R}^+$ *for the pairs* $(x, y) \in S_5$*, then* $f(x) = g(x) = x^n f(1)$*.*

Remark. The results of the above theorem can be transferred to the case of exponential functions, that is $(x, y) \in S_6$, since the exponential and logarithmic functions of the same basis are inverses of each other.

We note that both the base of the logarithm, and the base of the exponential can be any positive real number except 1.

Publications of the author related to the dissertation

1. E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93 (2)** (2019), 451–465,

2. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar., **154 (2)** (2018), 389–401,

3. Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (accepted).

Manuscripts

1. Linked pairs of monomial functions,

2. Quadratic functions fulfilling an additional condition along the hyperbola $xy = 1$.

Further publications of the author

1. E. Garda-Mátyás and G. Zsombori, *VII. Sapi tehetségnap*, Matlap - Ifjúsági matematikai lapok **5** (2017), 161–173. (ISSN: 1224-3140)

2. E. Garda-Mátyás and G. Zsombori, *Sapi tehetségnap*, Matlap - Ifjúsági matematikai lapok **4** (2012), 129–137. (ISSN: 1224-3140)

3. E. Garda-Mátyás and Z. Makó, *The modified joint optimal strategy concept in zero-sum fuzzy matrix games*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., **36** (2012), 103–116. (ISSN: 0138-9491, Mathematical Reviews)

4. Z. Makó, F. Szenkovits, E. Garda-Mátyás and I. Csillik, *Classification of near Earth asteroids wih artificial neural network*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai", Mathematica, **L(1)** (2005), 85–92. (ISSN: 0252-1938, Mathematical Reviews)

5. Z. Makó, F. Szenkovits, E. Garda-Mátyás, *Solution of Kepler-equation with artificial neural network*, Automation Computers Applied Mathematics, **13** (2004), 119–127. (ISSN: 1221-437X, Zentralblatt)

6. E. Garda-Mátyás, Z. Makó, F. Szenkovits and I. Csillik, *The chaotic variation of capture effect in the three body problem*, Proceedings of the 4nd International Conference of PHD Students (Natural Science), Miskolc, (2003), 31–38. (ISBN: 963 661 580 5)

References

[1] J. Aczél, *Some unsolved problems in the theory of functional equations*, Arch. Math. **15** (1964), 435–444.

[2] J. Aczél, *The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with the aid of Hamel bases*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **20** (1965), 65–73.

[3] J. Aczél and J. Dhombres, *Functional equations in several variables*, Encyclopaedia of Mathematics and its Applications vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1989.

[4] M. Amou, *Quadratic functions satisfying an additional equation*, Acta Math. Hungar. (2020). https://doi.org/10.1007/s10474-020-01047-0

[5] W. Benz, *5. Problem* in *Report of Meeting: The twenty-seventh international symposium on functional equations*, Aequationes Math. **39** (1990), 302.

[6] Z. Boros and P. Erdei, *A conditional equation for additive functions*, Aequationes Math. **70** (2005), 309–313.

[7] Z. Boros and W. Fechner, *An alternative equation for polynomial functions*, Aequationes Math. **89/1** (2015), 17–22.

[8] Z. Boros, W. Fechner and P. Kutas, *A regularity condition for quadratic functions involving the unit circle*, Publ. Math. Debrecen **89/3** (2016), 297–306.

[9] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for quadratic functions*, Acta Math. Hungar. **154 (2)** (2018), 389-401.

[10] Z. Boros and E. Garda-Mátyás, *Conditional equations for monomial functions*, Publ. Math. Debrecen (accepted).

[11] B. Ebanks, *Characterizing ring derivations of all orders via functional equations: results and open problems*, Aequationes Math. **89** (2015), 685–718.

[12] B. Ebanks, *Linked pairs of additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 1025–1040.

[13] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions*, Aequationes Math. **91** (2017), 317–330.

[14] B. Ebanks, *Polynomially linked additive functions-II*, Aequationes Math. **92** (2018), 581–597.

[15] B. Ebanks and C.T. Ng, *Homogeneous tri-additive forms and derivations* Linear Algebra and its Applications **435** (2011), 2731–2755.

[16] E. Garda-Mátyás, *Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle*, Aequationes Math., **93 (2)** (2019), 451–465.

[17] A. Grząślewicz, *Some remarks to additive functions*, Math. Japon. **23** (1978/79), 573–578.

[18] E. Gselmann, *Notes on the characterization of derivations*, Acta Sci. Math. (Szeged) **78** (2012), 137–145.

[19] E. Gselmann, *Derivations and linear functions along rational functions*, Monatsh. Math. **169** (2013), 355–370.

[20] E. Gselmann, Cs. Vincze and G. Kiss, *On functional equations characterizing derivations: methods and examples*, Results Math **73 (2)** (2018), https://doi.org/10.1007/s00025-018-0833-6.

[21] F. Halter-Koch, *Characterization of field homomorphisms and derivations by functional equations*, Aequationes Math. **59** (2000), 298–305.

[22] F. Halter-Koch, *A characterization of derivations by functional equations*, Math. Pannon. **11** (2000), 187–190.

[23] F. Halter-Koch und L. Reich, *Charakterisierung von Derivationen höherer Ordnung mittels Funktionalgleichungen*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber II **207** (1998), 123–131.

[24] G. Hamel, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$*, Math. Ann. **60** (1905), 459–462.

[25] W. B. Jurkat, *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 683–686.

[26] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions I*, Aequationes Math. **4** (1970), 163–175.

[27] Pl. Kannappan and S. Kurepa, *Some relations between additive functions II*, Aequationes Math. **6** (1971), 46–58.

[28] Z. Kominek, L. Reich and J. Schwaiger, *On additive functions fulfilling some additional condition*, Sitzungsber. Abt. II **207** (1998), 35–42.

[29] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities (second edition)*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2009.

[30] S. Kurepa, *The Cauchy functional equation and scalar product in vector spaces*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Društvo Mat. Fiz. Hrvatske **19** (1964), 23–36.

[31] S. Kurepa, *Remarks on the Cauchy functional equation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **5 (19)** (1965), 85–88.

[32] P. Kutas, *Algebraic conditions for additive functions over the reals and over finite fields*, Aequationes Math. (in print).

[33] Gy. Maksa, *On the trace of symmetric bi-derivations*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, Vol. **IX**, No. **6** (1987), 303–307.

[34] M. A. McKiernan, *On vanishing n-th ordered differences and Hamel bases*, Ann. Polon. Math. **19** (1967), 331–336.

[35] A. Nishiyama and S. Horinouchi, *On a system of functional equations*, Aequationes Math. **1** (1968), 1–5.

[36] L. Reich, *Derivationen zweiter Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen — ein überblick*, Grazer Math. Ber. **337** (1998), 45–65.

[37] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29 (1-2)** (1982), 19–28.

[38] L. Székelyhidi, *Convolution Type Functional Equation on Topological Abelian Groups*, World Scientific, Singapore, 1991.

[39] J. Unger und L. Reich, *Derivationen höherer Ordnung als Lösungen von Funktionalgleichungen*, Grazer Math. Ber. **336** (1998), 1–83.

[40] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. I.* With the cooperation of I. S. Cohen. The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958.

NIVERSITY AND NATIONA IBRARY
NIVERSITY O DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/373/2020.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Edit Mária Garda-Mátyás
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publi ations related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. **Garda-Mátyás, E. M.**: Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle.
   Aequ. Math. 93 (2), 451-465, 2019. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-018-0591-2
   IF: 0.851
2. Boros, Z., **Garda-Mátyás, E. M.**: Conditional equations for quadratic functions.
   Acta Math. Hung. 154 (2), 389-401, 2018. ISSN: 0236-5294.
   DOI: https://doi.org/10.1007/s10474-018-0795-x
   IF: 0.538

List of other publi ations

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

3. **Garda-Mátyás, E. M.**, Makó, Z.: The modified joint optimal strategy concept in zero-sum fuzzy matrix games.
   Ann. Univ. Sci. Bp. Rolando Eötvös Nomin. Sect. comput. 36, 103-116, 2012. ISSN: 0138-9491.

Total IF of journals (all publi ations): 1,389
Total IF of journals (publi ations related to the dissertation): 1,389

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

14 December, 2020