



1949

Renormálás valós időben

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Steib Imola Pálma

Témavezető: Dr. Nagy Sándor

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
Debrecen, 2020.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Fizikai Tudományok Doktori Iskolájának Részecskefizika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2020. október 8.

Steib Imola Pálma
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Steib Imola Pálma doktorjelölt 2016-2020 között a fent megnevezett Doktori Iskola Részecskefizika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2020. október 8.

Dr. Nagy Sándor
témavezető

Renormálás valós időben

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a fizika tudományágban

Írta: Steib Imola Pálma
okleveles fizikus

Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolája
Részecskefizika programja keretében

Témavezető: Dr. Nagy Sándor

Az értekezés bírálói:

Dr. _____
Dr. _____
Dr. _____

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. _____
tagok: Dr. _____
Dr. _____
Dr. _____
Dr. _____

Az értekezés védésének időpontja: _____

Köszönetnyilvánítás

„A világ labirintus, és a labirintus nyílása nem más, mint a világ szépsége.”
–Simone Weil

Ezúton szeretném kifejezni köszönetemet témavezetőmnek, Dr. Nagy Sándornak, aki szakértelmével, magyarázataival és hasznos tanácsaival hatalmas segítséget nyújtott a munkám során. Végtelenül hálás vagyok a hosszú beszélgetésekért, amelyek lehetővé tették, hogy a kvantumelmélet ne csupán a kutatómunkám része legyen, hanem meglássam annak igazi szépségét a világ labirintusában.

Köszönettel tartozom Dr. Polónyi Jánosnak a sok éves közös munkáért és a renormálás területén átadott széles körű ismereteiért.

Végül, de nem utolsó sorban szeretném kifejezni köszönetemet a családomnak, akik végig mellettem álltak és segítettek. Különösen köszönöm édesapámnak a tanulmányaim során nyújtott támogatását és a tudomány szeretetében és tiszteletében való példamutatását.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Funkcionális renormálási csoport módszer	5
2.1. Bevezetés	5
2.2. Renormálás	5
2.3. Renormálási csoport módszer	6
2.4. Wegner-Houghton egyenlet	9
2.5. Wetterich egyenlet	11
2.6. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása	14
3. Zárt időtengelyes formalizmus	17
3.1. A CTP formalizmus	18
3.2. A CTP propagátor	21
4. Kvantum renormálási csoport módszer	26
4.1. Bevezetés	26
4.2. Fa-szintű evolúció	26
4.3. Összefoglalás	34
5. Bilokális potenciál evolúciója	35
5.1. Bevezetés	35
5.2. Nemlokalitás	35
5.3. Bilokális hatás	37
5.4. Nyeregpontri evolúció	39
5.5. Fluktuációk	44
5.5.1. Bilokális evolúció	46

5.5.2.	A lokális evolúció	49
5.5.3.	Evolúciós egyenletek három dimenzióban	50
5.6.	Fázisdiagram	50
5.6.1.	Lokális fázisszerkezet	50
5.6.2.	Bilokális fázisszerkezet	52
5.7.	Szemiklasszikus energia	54
5.7.1.	Inhomogén vákuum	56
5.7.2.	Fázisok	58
5.8.	Összefoglalás	59
6.	Bilokális sine-Gordon modell	62
6.1.	Bevezetés	62
6.2.	Lokális sine-Gordon modell	63
6.2.1.	Lokális potenciál közelítés	64
6.2.2.	Hullámfüggvény renormálás	65
6.3.	Nyeregpont	67
6.4.	Bilokális sine-Gordon (BSG) modell fa-szintű evolúciója	67
6.4.1.	Alapállapot	69
6.5.	Összefoglalás	72
7.	Konform redukált gravitáció	73
7.1.	Bevezetés	73
7.2.	Evolúciós egyenletek	76
7.2.1.	Lorentz formalizmus	77
7.2.2.	Wetterich egyenlet	79
7.2.3.	Lorentz evolúció	84
7.3.	Eredmények	85
7.3.1.	Éles levágás	88
7.4.	Kritikus exponensek	90
7.4.1.	A modell	91
7.4.2.	Eredmények	92
7.5.	Összefoglalás	94
8.	Összefoglalás	96
9.	Kitekintés	101

Rövidítések

- RG renormálási csoport (renormalization group)
- LPA lokális potenciál közelítés (local potential approximation)
- UV ultraibolya (ultra violet)
- IR infravörös (infrared)
- CTP zárt időtengely(es) (closed time path)
- STP egyidőtengely(es) (single time path)
- QRG kvantum renormálási csoport (quantum renormalization group)
- WH Wegner-Houghton
- SG sine-Gordon
- WF Wilson-Fisher
- GFP gaussi fixpont
- NGFP nem-gaussi fixpont
 - nd n-dimenzió
- BSG bilokális sine-Gordon
- KT Kosterlitz-Thouless
- CR konform redukált (conformally reduced)
- QEG kvantum Einstein gravitáció (quantum Einstein gravity)
- EH Einstein-Hilbert
- CREH konform redukált Einstein-Hilbert (conformally reduced Einstein-Hilbert)
- PMS minimális érzékenység elve (principle of minimal sensitivity)

1. fejezet

Bevezetés

A renormálás alapgondolata az az elsőre talán furcsának tűnő állítás, miszerint nincsenek valódi állandók a fizikában. Jól tudjuk, hogy a körülöttünk lévő világ más és más arcát mutatja különböző skálákon szemlélve azt. Mást látunk kis, szubatomi szinten, és megint mást látunk kozmológiai távolságokon. A fizika törvényeihez skálatartomány tartozik, ahol azok érvényesek. Ezen tartományokhoz tartoznak fizikai állandók, melyekkel a jelenségeink leírhatóak. Minden ilyen állandónak tűnő mennyiség, amely valamely mérés eredménye, függ attól, hogy a mérést milyen energia, idő vagy tömegskálán vizsgáljuk. A függés esetleges gyengesége miatt úgy tűnhet, hogy ezek valódi fizikai állandók, ám minden ilyen mennyiség skálafüggő. A mikrovilágunk elemi részecskéi közötti rövid hatótávolságú kölcsönhatások leírhatóak, itt a fizika törvényeit ismerjük, megfelelő formalizmusban egyszerűnek mondhatók. Az energia csökkentésével (a távolság növelésével) eljutunk olyan tartományig, ahol a folyamatok leírására az elemi részek már nem elegendőek, más változót kell bevezetnünk. A távolság további növelésével pedig eljuthatunk az alacsony energiás, infravörös tartományig. Felmerülhet tehát a kérdés, megérthetjük-e a makrovilágunk komplexitását a mikrovilág egyszerűségéből kiindulva. Ennek megválaszolására alkalmas eszköz a renormálás, melynek segítségével megérthetjük, hogyan függnak a fizika törvényszerűségei a parametrizáló skálától.

A renormálási csoport (RG) módszer [1, 2, 3, 4, 5] lényege, hogy a szabadsági fokokat a k impulzus (energia) skála szerinti csökkenő sorrendbe rendezzük. Az RG egyenlet egy funkcionális differenciálegyenletet ad a

hatásra, ahol a k skála változik a nagy energiájú (ultraibolya, UV) tartományból kiindulva az alacsony energiájú (infravörös, IR) felé. A renormálás során infinitezimális blokkosítási lépéseken keresztül kapjuk meg a modell alacsony energiás viselkedését. A k skála egyfajta határt képez azon szabadsági fokok között, amelyeket nyomon követünk, s amelyek már nem. A k skála alatti módusokat megfigyeljük, ezek a fizikai rendszerhez tartoznak. A k skála feletti módusokat nem figyeljük meg, ezek alkotják a rendszer környezetét. Egy RG blokkosítási lépés felfogható úgy is, hogy az a rendszer módusait transzformálja a környezetbe. A rendszer és a környezet szabadsági fokai összefonódhatnak, kevert állapotok jelenhetnek meg. A k skála élesen szétválasztja a rendszer és környezet szabadsági fokait, ezért olyan renormálási eljárást szükséges használnunk, ahol éles levágás szerepel.

A hagyományos RG módszerben a szokásos RG blokkosítás a kiindulásként választott tiszta állapotot tiszta állapotba transzformálja, a kevert állapotok járuléka hiányzik. Azon túl, hogy ezen járulékok nagy mértékben megváltoztathatják a módszerrel eddig kapott eredményeket, hiányuk elvi szempontból is jelentős. A kevert állapotok járuléka akkor nagy, ha az UV módusok nem hanyagolhatók el, azaz a nem renormálható elméletekben. A realiztikus modellek általában funkcionális értelemben nem renormálhatók, effektív modellek. Erre példa a Standard Modell is, ahol a Higgs-teret leíró skalártér triviális. A nem perturbatív, azaz funkcionális értelemben vett nem renormálhatóság esetén a csatolás futásakor szingularitás jelenik meg, ahogyan a Standard Modellben az elektromágneses kölcsönhatás csatolása divergál a Landau pólusnál. Amennyiben effektív elméletekre alkalmazzuk a hagyományos RG módszert, hiányos eredményt kapunk. A kutatás során tehát az egyik kitűzött célom az volt, hogy teljessé tegyem az RG módszert azzal, hogy az kövesse a kevert állapotok járulékát. Mivel az így leírható kvantumelméleti összefonódásnak nincs klasszikus fizikai megfelelője, illetve nyitott kvantum rendszerek módszeres és nemperturbatív tárgyalásaként is felfoghatjuk, az eljárást kvantum renormálási csoport módszernek neveztem el.

A tradicionális renormálási csoport módszer az átmeneti amplitúdók skálainvarianciáján alapszik. Itt a kezdeti és végállapot rögzített, ezért hívják in-out formalizmusnak is. Bevezettek egy másik formalizmust, amellyel a fentebbi problémák orvosolhatók. Ez az úgynevezett zárt időtengelyes (CTP) formalizmus, ahol az átmeneti amplitúdó helyett a fizikai mérésekhez

közelebb álló várható értékekre kaphatunk összefüggést. A hagyományos, egyidőtengelyes (STP) formalizmus esetén a kezdeti tiszta alapállapotból indulva valamely tiszta végállapotba érkezünk. A CTP formalizmusban a kezdeti vákuumállapotot a t_f végső időpontig elfejlesztjük és ott tükrözzük. A tükrözött állapotot egy másik időtengelyen visszafejlesztjük a kezdeti állapotba, emiatt ezt a formalizmust gyakran in-in formalizmusnak is hívják. A módszerben megjelenik a sűrűségmátrix, ami fontos szerepet játszik az összefonott állapotok leírásában. Előfordulhat, hogy különböző folyamatok kísérleti vizsgálatánál olyan környezetet állítunk elő, ahol eltekinthetünk az összefonódástól, ám a kvantumfizikai folyamatokban ez az effektus mindig jelen van. Kutatásom során arra törekszem, hogy úgy módosítsam a renomálási csoport eljárást, hogy annak segítségével kevert állapotokról, összefonódásról lehessen beszélni.

Értekezésem hét nagyobb fejezetre tagolódik. Az elméleti háttérrel bemutatkozó fejezet után a 3 dimenziós (3d) ϕ^4 modell vizsgálatát ismertetem CTP formalizmusban. A hagyományos STP formalizmussal nem tudjuk az összefonott állapotokat leírni, az lényegében csak a nagyenergiás szórásoknál használható. Ezzel szemben a zárt időtengelyes formalizmus alkalmas az összefonott állapotok tárgyalására, hiszen a sűrűségmátrix segítségével a kevert állapotok járuléka megjelenik. Az összefonódás a végső időpillanatban a tömeghég-gerjesztések között történik meg. Ezzel szemben gyakran képzetes időre, euklideszi téridőben oldják meg a kvantumtérelméleteket, ahol nincs tömeghég és csak virtuális részecskék fordulnak elő, melyek dinamikáját lokális hatás segítségével tárgyalhatjuk. A valódi, tömeghéjon terjedő részecskék dinamikáját azonban nem lehet egy lokális potenciállal követni, ezért kénytelenek vagyunk az RG evolúciós egyenleteket nem lokális CTP hatásra kiterjeszteni. Ennek bemutatását tartalmazza a harmadik és negyedik fejezet. A multilokalitás, esetünkben bilokalitás, bevezetésével a lokális mellett bilokális csatolások is megjelennek, ez utóbbiak impulzusfüggők. A bilokális tag egy nemtriviális nyeregpontra ad, ezért a fa-szintű evolúciós egyenleteket szükséges először megoldani. A CTP RG egyenletek fa-szinten analitikusan megoldhatók. Releváns kérdés az, hogyan néznek ki a CTP RG hurok korrekciók az adott skaláris modellre. Ezen a ponton válik nyilvánvalóvá a bilokalitás bevezetésének fontossága.

A potenciál nem lokálisnak választása elengedhetetlen a CTP formalizmus esetén, viszont egy ilyen potenciált tartalmazó hatás vizsgálata már

euklideszi téridőben és hagyományos RG módszerrel tárgyalva sem triviális. Az ötödik fejezetben tárgyalom a 3d egykomponensű skaláris modell vizsgálatát bilokális potenciál esetén STP formalizmusban. Az értekezésem ezen fejezetének célja, hogy bemutassam, hogy tudjuk a bilokalitás segítségével a blokkosítási lépés során generálódó bilokális, nyeregponti tag fa-szintű evolúcióját követni. Ugyanezt lokális esetben nem lehet megtenni. Ismertetem még a továbbiakban, miként járulnak hozzá a bilokális csatolások a modell helyes leírásához, az összes releváns kölcsönhatás feltárásához.

A munka folytatásaként euklideszi téridőben, hagyományos RG eljárással vizsgálom a 2d sine-Gordon (SG) modellt bilokális potenciál közelítésben. Azt, hogy a bilokalitás segítségével hogyan található meg a Coleman pont, továbbá az a pont, melynél a SG modell ekvivalens a Thirring modellel a hatodik fejezetben ismertetem.

Célom a bilokalitás bevezetése mellett az RG módszer Minkowski téridőbeli megfogalmazása, amellyel már tömeghéjon lévő részecskék járulékaival is számolhatok. Ebben a formalizmusban a téridő nem kompakt, ez divergenciákhoz vezet, amit nem lehet Lorentz invariáns módon regularizálni. A hetedik fejezetben a gravitációs elmélet konform redukált (CR) változatának vizsgálatát mutatom be. A CR gravitációs modell skaláris elméletre vezet. A fejezetben bemutatom a modell valós idejű RG vizsgálatát. Vizsgálom a modell aszimptotikus biztonságát és a kritikus exponensek regulátorfüggését. Az utóbbi vizsgálatot a 3d kvantum Einstein gravitációs (QEG) modell esetén is megteszem a görbület kvadratikus tagjának figyelembe vételével.

A doktori értekezésemet összefoglaló fejezettel és kitekintéssel zárom.

2. fejezet

Funkcionális renormálási csoport módszer

2.1. Bevezetés

A renormálási csoport (renormalization group, RG) módszer a kvantumtérelmélet egyik legfontosabb nemperturbatív eszköze [1, 2, 3, 4, 5]. Ez szolgáltatja azt az "elméleti mikroszkópot", amellyel egy fizikai rendszer viselkedését különböző felbontásban, azaz különböző méret-, illetve energiaskálán tanulmányozhatjuk. Ebben a fejezetben ismertetem a renormálás alap gondolatát, fogalmait, majd a funkcionális renormálási csoport módszert tárgyalom. Ezt követően a Wegner-Houghton séma, illetve a Wetterich féle effektívhatás-szemlélet esetén tárgyalom a renormálási csoport egyenleteket.

2.2. Renormálás

A kvantumtérelméletben a Lagrange-függvény tartalmazza az elemi gerjesztésekhez tartozó kinetikus tagot és a kölcsönhatási tagokat. Utóbbi azt tartalmazza, hogy a részecskék mely esetleges további gerjesztésekkel hatnak kölcsön, illetve a kölcsönhatások erősségét jellemző csatolási állandót. Ahogy már a bevezetésben megfogalmaztam, a renormálás alap gondolata az, hogy valódi állandók nem léteznek a fizikában, a csatolási állandók értéke függ attól, hogy milyen energiaskálán tekintjük azokat. Feltételezzük,

hogy az elemi részek között a lehető legegyszerűbb, lokális kölcsönhatások vannak. Ez azonban súlyos nehézségekhez vezet. A részecskék kölcsönhatását vezető rendben fa-szintű gráfokkal írhatjuk le. Tisztán fa-gráfokkal számolva viszont nem kapjuk vissza helyesen a mérési eredményeket, a pontosabb számoláshoz figyelembe kell vennünk a vezető renden túli hurok korrekciókat is. A hurokintegrálok impulzusokra vonatkoznak. A lokális kölcsönhatás azt feltételezi, hogy az impulzusintegrál felső határa a végtelenben van. Ez komoly gondot okoz, mert így bizonyos fizikai mennyiségek végtelennek adódnak. Ez egy általános probléma a kvantumtérelméletben. A hurokintegrálokat regularizálnunk kell. Ennek egy lehetséges módja lehet egy Λ felső integrálási határ, azaz egy UV levágás bevezetése. A véges integrál nemlokalitást eredményez, továbbá azt is jelenti, hogy az eredeti elmélet helyett egy olyan effektív elméletet vizsgálunk, amelyben bizonyos szabadsági fokokat elhanyagolunk, nem veszünk figyelembe, vagy a hatásukat kiintegráljuk. A divergenciák elkerülhetetlenek a kvantumtérelméletben, ahhoz, hogy véges eredményeket kapjunk regularizálnunk kell. Általánosan megmutatható, hogy a kapott effektív elméletek nemlokálisak és instabilak.

A probléma egyik lehetséges megoldási módja, ha a divergens integrálokat osztályozzuk és csoportosítjuk, ezzel véges fizikai mennyiségeket kaphatunk. Véges számú kölcsönhatás esetén a csatolásokat átdefiniálva, újranormálva kiküszöbölhetjük a divergenciákat. Történetileg így jelent meg a renormálás fogalma. Mivel ez az eljárás perturbatív keretek között született, ezt perturbatív renormálásnak szokás hívni.

2.3. Renormálási csoport módszer

A renormálási csoport módszerrel [6] sok (termodinamikai limeszben végtelen sok) szabadsági fokkal rendelkező rendszert vizsgálunk. Statisztikus fizika esetén ezek a szabadsági fokok a termikus fluktuációk, kvantumtérelmélet esetén pedig a kvantumfluktuációk. A módszer jelentősége abban rejlik, hogy hidat képez a vizsgált rendszer makroszkópikus és mikroszkópikus viselkedése között. A statisztikus fizikában a részecskék átlagos távolsága, azaz az a rácsállandó szabja meg a fluktuációk legkisebb hullámhosszát. A skála növelésével, a rácsállandó a' értéke majd összemérhetővé válik a korrelációs hosszal. A kérdés az, hogy az a' felbontás további növelésével milyen effektív elméletet kapunk a rendszerre. Az effektív elmélet

már csak azokat a fluktuációkat, szabadsági fokokat tartalmazza, amelyek hosszú hullámhosszakkal kapcsolatosak, vagyis ahol $\lambda > a'$. Eredetileg a statisztikus fizikában kritikus állapotú rendszereknél használták a gondolatmenetet, ahol a végtelenhez tartó korrelációs hossz miatt a fluktuációk minden hullámhosszon egyformán fontosak. A gondolatmenet nagyon hasonló a kvantumtérelméletben is, leszámítva azt, hogy ott nincsen "beépítve" rácsállandó. Szemben a statisztikus fizikával, nincsen nagy energiás UV levágás, amely a legkisebb méretnek, azaz a rácsállandónak felel meg, az UV levágást nekünk kell sajátkezűleg bevezetnünk. Ezt másképpen úgy mondjuk, hogy a modelleket nekünk kell regularizálnunk. Ezek után vizsgáljuk, hogyan viselkedik a rendszer akkor, ha azt a levágásnál alacsonyabb energiás méréseknek vetjük alá.

A renormálás első lépése a blokkosítás, vagy más néven a tizedelés (decimálás). A blokkosítás lényege, hogy bizonyos szabadsági fokokat egyetlen szabadsági fokkal helyettesítünk úgy, hogy a modell fizikai tulajdonságai ne változzanak (pl. a generáló funkcionál vagy a partíciós függvény invariáns legyen). Tekintsük most a spin modellekre bevezetett Kadanoff-féle blokkosítási eljárást [7]. A modellben a szomszédos rácspontokon ülő, spinnel rendelkező fermionikus részecskék hatnak kölcsön. A blokkosítás elvégzése képpen a rácspontokban lévő spin szabadsági fokokat összevonjuk, és helyettesítjük egyetlen új szabadsági fokkal. A modellben így a szabadsági fokok számának csökkentésével megnöveljük a rácsállandót. A rácsállandó megváltozásával a csatolási állandó szintén változik, ezzel őrizzük meg az invarianciát. Mivel a gondolatmenet nem követelte meg, hogy a csatolási állandó kicsi legyen, az RG módszer már nem perturbatív. A Kadanoff-féle blokkosítást minden sokrészecskés rendszer kritikus tartományára, így például a kritikus hőmérséklet közelében lévő Ising modell tulajdonságainak leírására is alkalmazhatják.

A kritikus hőmérséklet egy fázisátalakulási pontot jelöl a fázistérben, közelében linearizálhatók az evolúciós egyenletek, így a csatolások osztályozására nyílik lehetőség. Relevánsnak nevezzük azokat a csatolásokat, amelyek a távolság növelésével (az impulzus csökkentésével) nőnek, irrelevánsnak azokat, amelyek csökkennek.

Ezen a ponton jegyezném meg, hogy a szakirodalomban használt renormálási csoport elnevezés talán félrevezető lehet. A blokkosítás során értelemszerűen az a rácsállandójú rendszerből csinálunk egy $a' = ba > a$

rácsállandójút. A különböző b -vel jelölt transzformációk ugyanis félcsoportot alkotnak. Ez a tulajdonság természetesen arra utal, hogy a blokkosítási eljárással nagyobb távolságok, kisebb energiák vagy impulzusok felé haladunk. Az, hogy a renormálási transzformáció nem invertálható értelemszerű, hiszen egy renormálási lépés során végtelen sok szabadsági foktól szabadulunk meg úgy, hogy azok hatását viszont véges sok paraméter megváltoztatásával vesszük figyelembe.

A véges UV levágás miatt tetszőleges számú kölcsönhatást, ezzel együtt tetszőleges számú csatolást vezethetünk be. Ezek között néhány releváns van, a többi (végtelen sok) pedig irreleváns. Kis impulzusok felé haladva a releváns csatolások felnőnek, az irrelevánsok pedig nullához tartanak. Az UV-ből IR-be történő RG blokkosítással a véges számú releváns csatolást tudjuk nyomon követni. Egy fordított irányú blokkosításnál az összes irreleváns csatolás felnőne, ami csak úgy kivitelezhető, ha ezeket szintén kézben tartjuk. Ezt úgy lehetne feloldani, ha minden irreleváns csatolást kinullázunk, ez azonban csak akkor működik, ha nincsenek további fixpontok, ahol a csatolások skálázása megváltozna. Például a kvantum Einstein gravitációban a g Newton állandónak megfelelő csatolás az IR-ben irreleváns, tehát el kellene hagynunk, azonban az UV felé közeledve egy új, nem-gaussi fixpontot (NGFP) találhatunk, amelynek közelében a g már releváns.

Az RG módszer ma használatos formáját a munkájáért 1982-ben Nobel-díjjal jutalmazott Kenneth G. Wilson fejlesztette ki [8]. A blokkosítás során itt már megjelenik egy k impulzus vagy energia skála, ami a Kadanoff-féle elméletben a rácsállandó reciprokának felel meg. Az, hogy a renormálási csoport módszert a kvantumtérelméletben is használjuk, Wilson munkásságának köszönhető. Tekintsük a csatolási állandók által kifizített paraméterteret. Ez a renormálási csoport fázistere. A fizikai rendszert egy pont jelöli ebben a térben. Egy renormálási transzformáció során ez a pont vándorol a paraméterterben és így előáll egy renormálási csoport trajektória, melynek mentén nyomon követhetjük egy fizikai rendszer evolúcióját. A fázistér feltérképezésénél elengedhetetlen a fixpontok megkeresése. Fixpontoknak nevezzük a paramétertér azon pontjait, ahol a renormálási transzformáció a dimenziótlan csatolások értékeit változtatlanul hagyja. Az RG módszerrel a fázistér fixpontjai körül lévő kritikus viselkedést, illetve a fixpontok közötti evolúciót analitikusan leírhatjuk, ugyanis a kritikus

jelenségek esetén a fixpontok körüli elmélet leírásakor az RG egyenletek linearizálhatóvá válnak, a renormálási transzformációk a csatolási állandóknak analitikus függvényei. A csatolások futását k^a alakban írhatjuk fel, ahol az a a skálázási exponens, mellyel a csatolások relevancia szempontjából rendszerezhetők. Releváns csatolás a k impulzus skála UV-be való növelése esetén nő, azaz $a > 0$. Irreleváns esetben csökken, ott az $a < 0$. Az exponens valós és komplex szám is lehet. Komplex esetben a valós rész előjele dönti el a csatolás típusát.

A kvantumos modellek esetén a hatás felírását annak klasszikus alakjának segítségével tehetjük meg. A renormálási csoport egyenlet a potenciál k függésére felírt differenciálegyenlet. Segítségével megkaphatjuk a potenciált különböző impulzus (energia) skálákon. Ezen a ponton jelenik meg az a már sokszor említett kép, miszerint az RG módszer lehetőséget ad az átmenetre egy elmélet nagy és alacsony energiás viselkedése között [9]. Mivel az RG egyenlet a skála szerinti differenciálás mellett, térváltozó szerinti deriváltakat is tartalmaz, ez az egyenlet egy funkcionális integro-differenciálegyenlet. Az RG egyenlet más és más alakot ölt a funkcionális renormálásban kialakult két fontos szemléletmódban. Ez a két megközelítés a Wilson-féle [8] és az effektívhatás-formalizmus [1]. A következőkben ezt a két sémát ismertetem.

2.4. Wegner-Houghton egyenlet

Az értekezésemben későbbiekben bemutatott modellek tárgyalásánál a wilsoni szemléletet alkalmazom, azon belül is a számomra releváns Wegner-Houghton renormálási sémát. A hagyományos wilsoni RG módszer során a generáló funkcionál az átmeneti amplitúdók skálainvarianciáján alapszik. Tiszta vákuumállapotból indulunk ki és szintén tiszta vákuumállapotba érkezünk. Az állapotok közötti átmeneti valószínűség az S_k blokkosított hatás segítségével kapható meg. A generáló funkcionálban elvégezzük a pályaintegrált a k skálán megadott euklideszi blokkosított hatásra:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-(S_k + J \cdot \phi)}, \quad (2.1)$$

ahol a $J(x)$ a térhez csatolt külső forrás. Bevezetem a $f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x f(x) g(x)$ jelölést. Egy blokkosítási lépés elvégzésével megtudjuk, milyen új hatást

kapunk, ha Δk impulzussal csökkentjük a k értékét. Ez a $[k, k - \Delta k]$ impulzushéjban lévő módusok kiintegrálásával érhető el. Az eljárással $k - \Delta k$ skálán kapunk egy blokkosított hatást, ami már tartalmazza a Δk vastagságú gömbhéj módusainak járulékat. Feltesszük, hogy ez a gömbhéj infinitezimálisan vékony, azaz a Δk nullához tart. A blokkosítási lépés után megkapott hatás az eredeti hatásnak egy alacsonyabb energián vett effektív elméletének tekinthető. A wilsoni formalizmusban Λ éles levágást alkalmazunk, a szabadsági fokokat k skáláig integráljuk ki.

Feltesszük tehát, hogy a $Z[J]$ generáló funkcionál invariáns marad, ha kiintegráljuk az impulzushéjban lévő skálával jellemző térváltozókat:

$$e^{-S_{k-\Delta k}} = \int \mathcal{D}\phi_{k \in [k-\Delta k, k]} e^{-S_k} = e^{-S_k[\phi+\phi_0] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S_k[\phi+\phi_0]}{\delta\phi\delta\phi} + \mathcal{O}((\Delta k/k)^2)}. \quad (2.2)$$

A pályaintegrál elvégzésekor a $[k, k - \Delta k]$ impulzusú módusokat a ϕ_0 nyeregpont körül vesszük figyelembe. Ebből származtatjuk az alábbiakban a Wegner-Houghton egyenletet. Felhasználva az $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$ kifejezést, az exponensekre a következő kifejezést kapjuk:

$$S_k[\phi] - S_{k-\Delta k}[\phi] = -\frac{\hbar}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta\phi\delta\phi} \right], \quad (2.3)$$

más alakban felírva

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta\phi\delta\phi} \right], \quad (2.4)$$

ahol a $\dot{x} = k\partial_k x$. A Tr -rel jelölt művelet a

$$\text{Tr} \ln \frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta\phi\delta\phi} = \int_{k-\Delta k < |p| < k} \ln \frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta\phi_{-p}\delta\phi_p}. \quad (2.5)$$

impulzusintegrált jelenti az adott impulzushéjra. A Tr egy Δk szélességű gömbhéjra vett integrál, ahol a k impulzus hossza a gömbhéj sugara:

$$\dot{S}[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \Delta k \int_p \delta(q-k) \ln \left[\frac{\delta^2 S_q[\phi]}{\delta\phi\delta\phi} \right], \quad (2.6)$$

ahol q egy d -dimenziós impulzus. A $\Delta k/k$, mint kis paraméter jelenik meg. Lokális potenciál közelítés (LPA) esetén feltételezzük, hogy a skálától függő blokkosított hatás a következő alakban írható fel:

$$S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_x \phi_x D_0^{-1} \phi_x + \int_x U_k(\phi_x), \quad (2.7)$$

ahol a D_0^{-1} az euklideszi tömegtelen propagátor inverze, értéke p^2 . A U_k potenciál ϕ szerinti sorfejtésében a konstans tagok értékeit szabadon meg tudjuk választani, a modellünk vizsgált tulajdonságait nem befolyásolják. A (2.7) egyenletből evolúciós egyenlet vezethető le az U_k potenciálra:

$$k \partial_k U_k = -\alpha_d k^d \ln(k^2 + U_k''). \quad (2.8)$$

A szakirodalmi jelöléseket megtartva a továbbiakban a vessző jelöli a térváltozó szerinti deriválást ($U_k'' = \delta^2 U_k / \delta \phi \delta \phi$).

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}, \quad (2.9)$$

amelyben Ω_d a d dimenziós gömbi koordináta-rendszerben elvégzett impulzusintegrálnak a járuléka a térszögekre történő integrálás után. Alakja $\Omega_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$ módon írható fel. Itt a $\Gamma(d)$ az Euler-féle gamma függvény.

A (2.8) egyenlet az úgynevezett Wegner-Houghton (WH) egyenlet. Ez a skálafüggő blokkosított hatásfunkcionálra vonatkozó parciális integro-differenciálegyenlet, ahol a kiindulópontunk az UV-ban felírt Λ levágásnál definiált hatás. A Wegner-Houghton egyenlet esetén gyakran kiemelik azt a tényt, miszerint ebben a sémában az LPA túllépésekor problémákba ütközhetünk. A kutatásom vezérfonalát képző bilokális potenciál bevezetése megoldja ezt a kérdést.

2.5. Wetterich egyenlet

Az RG módszer másik megközelítése az effektív hatás evolúcióját írja le [1, 4]. Ebben az esetben a funkcionális differenciálegyenletet Wetterich egyenletnek nevezzük. Ebben a megközelítésben fontos szerepe van az úgynevezett regulátorfüggvénynek, mely eltünteti az UV és az IR divergenciákat. A módszer egyik hátránya, hogy regulátorfüggő eredményt kapunk.

Problémát jelenthet még az is, hogy eltávolíthatunk olyan divergenciákat, amik fizikai tartalommal bírnak. A Wetterich egyenlet ismertetéséhez induljunk ki a generáló funkcionálból:

$$Z = e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-(S + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)}. \quad (2.10)$$

Az előző egyenletben szereplő $\mathcal{R}_k[\phi]$ az úgynevezett regulátor, melynek alakja:

$$\mathcal{R}_k[\phi] = \frac{1}{2} \phi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \phi. \quad (2.11)$$

Itt a pont továbbra is intergált jelöl. A regulátornak nincsen konkrét fizikai jelentése, az UV és IR divergenciák eltüntetésére alkalmazott függvény, IR levágásként hat. Úgy választjuk meg, hogy a k -nál nagyobb módusokat változatlanul hagyjuk, a kisebb energiájúakat elnyomjuk. A regulátornak ki kell elégítenie a következő azonosságokat:

1. $\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k > 0$, azaz IR regulátorként viselkedik, mert eltünteti az IR divergenciákat,
2. $\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k \rightarrow 0$, amely azt fejezi ki, hogy $k \rightarrow 0$ határesetben a regulátort eltávolítva vissza kell kapnunk az átmeneti amplitúdó alakját,
3. $\lim_{k^2 \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k \rightarrow \infty$, amely szerint az $S = \lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k$ határesetben visszakapjuk a mikroszkopikus hatást. A regulátor UV levágásként is működik.

A regulátorfüggvény sokféleképpen megválasztható, különböző alakjai különböző renormálási sémát jelentenek. A generáló funkcionálból IR limeszben kapott effektív hatás nem függ a regulátortól annak 2. tulajdonsága miatt, ugyanis akkor a (2.10) egyenletben olyan, mintha nem is szerepelne a regulátor. Ennek ellenére a számolások eredményei mégis mutatnak különbséget a különböző renormálási sémákban. Ez az alkalmazott közelítéseknek tudható be. Ilyen közelítés a véges számú csatolás figyelembe

vétele. A szakirodalomban használt regulátorok közül először tekintsük az úgynevezett *css* regulátort:

$$r_{css} = \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b / (1 - s_2 y^b)] - 1} \theta(1 - s_2 y^b). \quad (2.12)$$

Bevezetjük a $r = \mathcal{R}_k/p^2$ és $y = p^2/k^2$, ahol p a Wetterich egyenletben lévő hurokintegrálokhoz tartozó impulzust jelöli. Az előbbi függvényalakban szereplő s_1 és s_2 szabad paraméterek, amelyek megfelelő megválasztásával visszkapjuk a következő regulátorokat:

$$\begin{aligned} \lim_{s_1 \rightarrow 0} r_{css} &= \left(\frac{1}{y^b} - s_2 \right) \theta(1 - s_2 y^b), \\ \lim_{s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 0} r_{css} &= \frac{1}{y^b}, \\ \lim_{s_2 \rightarrow 0} r_{css} &= \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b] - 1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Az első kifejezés a Litim (optimalizált) regulátor, ahol $s_2 = 1$. Az előbbi megválasztásával a Wetterich egyenletből visszakapható a korábban bemutatott WH egyenlet [10]. A második sor a hatványfüggvény regulátort, a harmadik az exponenciális függvény regulátort jelöli $s_1 = 1$ esetben.

A (2.10) egyenlet mindkét oldalát a k skála szerint differenciálva a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} \partial_k W_k[J] &= e^{-W_k[J]} \int \mathcal{D}[\phi] \partial_k \mathcal{R}_k[\phi] e^{-(S + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)} \\ &= e^{-W_k[J]} \partial_k \mathcal{R}_k \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] e^{W_k[J]}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A $W_k[J]$ az összefüggő green függvények generáló funkcionálja. A $\Gamma_k[\phi]$ effektív hatáshoz a $W_k[J]$ Legendre transzformációjával jutunk:

$$\Gamma_k[\phi] = W_k[J] - J \cdot \phi, \quad (2.15)$$

ahol a térváltozó:

$$\phi = \frac{\delta W[J]}{\delta J}. \quad (2.16)$$

Az effektív hatás k skála szerinti deriváltja:

$$\partial_k \Gamma_k = -\partial_k W_k[J] - \frac{\delta W[J]}{\delta J} \partial_k J + \partial_k J \phi = -\partial_k W_k[J]. \quad (2.17)$$

alakú lesz. Az effektív hatást $\Gamma_k[\phi] + \mathcal{R}_k[\phi] \rightarrow \Gamma_k$ szerint átdefiniálva megkapjuk a Wetterich egyenletet:

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\Gamma_k'' + \mathcal{R}_k}. \quad (2.18)$$

Az egyenletben szereplő pont a $t = \ln k$ RG idő szerinti derivált, míg a vessző a térváltozó szerinti deriválást jelöli. A Tr jelenti a hurokintegrált és a belső indexere történő összegzést.

Mindkét megközelítésben kapott egyenlet egy parciális integrodifferenciálegyenlet, azonban ha a ϕ térváltozóban sorba fejtjük a hatást, a skálafüggő csatolásokra kapunk egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert.

2.6. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása

A Wetterich-féle evolúciós egyenletnél bevezettük a regulátorfüggvényt. Jól látszik a (2.10) generáló funkcionál alakjából, hogy ez az egyetlen k skálafüggő tag. Mindamellet, hogy az IR és UV divergenciák kiküszöböléséhez szükségünk van a regulátorra, a Wetterich egyenlet levezetésekor a regulátorfüggő tagot deriválva kapjuk meg az evolúciós egyenletet. A regulátor hasonló technikai segítséget nyújt, mint a J forrás, melynek deriváltjával eljuthatunk a ϕ térváltozóhoz. A regulátor skálafüggése teszi lehetővé, hogy megkapjuk a Wetterich egyenletet. A regulátor nélkül az egyenlet trivialitás lenne. Ezzel szemben a WH egyenletnél a skálafüggést a wilsoni hatás hordozza, nincs szükség a regulátorra.

Megjegyzem, hogy a regulátor néhány esetben túlregularizál. Vannak olyan divergenciák is, amelyek fizikai tartalommal bírnak, ezért nem szükséges regularizálni azokat. Erre példa lehet bizonyos modellek spontán szimmetriasértett fázisában látható IR fixpont, amelynél az evolúciós egyenletek divergálnak, szingulárisak. Ez a divergencia fizikai, azt fejezi ki, hogy az elméletben szereplő módusok már nem alkalmasak a modell leírására, új szabadsági fokokat kell bevezetnünk. A szingularitás a modell alkalmazhatósági határát jelöli. Vannak azonban olyan regulátorok, amelyek az IR fixpontbeli szingularitást is regularizálják, ezzel olyan tartományokra terjesztve ki a modellt, ahol az már nem érvényes. Ilyen probléma a regulátor hiányában a WH egyenletnél nem fordulhat elő.

Nincs arra vonatkozóan megbízható ismeretünk, hogy a regulátor bevezetése nem befolyásolja jelentős mértékben a megoldást. Megjegyzem, hogy a szakirodalomban általánosan elfogadott tény, hogy a Wetterich egyenlet megoldásaként kapott effektív hatás, pontosabban annak IR limeszében kapott effektív potenciál nem függ a regulátortól. Azért gondolják regulatorfüggetlennek az effektív potenciált, mert IR-ben a regulátor nullához tart, és a generáló funkcionálban a regulátor nulla. A Wetterich egyenlet a generáló funkcionálból származik, abból kapott differenciálegyenlet. Az egyenlet egzakt módon nem oldható meg, a differenciálegyenlet megközelítés viszont többször differenciálható függvényeket tételvez fel mind a térváltozóban, mind a csatolások skálafüggésében. Ezzel az eredeti generáló funkcionálból kidobjuk azokat a függvényeket, térkonfigurációkat, amelyek ugrást szenvednek. Ilyen módon nem tekinthető a generáló funkcionál és a Wetterich egyenlet IR limesze ekvivalensnek. A Wetterich egyenletben van egy regulátor, és ezek után merész feltételeznünk, hogy a megoldás ettől független lenne. A regulatorfüggetlenség nem bizonyítható állítás, és inkább a szakterületen kutatók kívánalmát fejezik ki, mintsem egy biztos matematikai (vagy valamilyen fizikai) elven nyugvó kijelentés. A regulátor az evolúció folyamán mindig módosítja az adott skálán lévő effektív hatást. Ugyan azt feltételezzük, hogy a regulátor által bevezetett impulzusfüggő kvadratikus tagok irrelevánsak, ezért a módosítás is irreleváns, azonban ez is okozhat problémát, hiszen az irrelevancia adott fixponthoz tartozó tulajdonság, adott esetben egy adott másik fixpont közelében a regulatorfüggés relevánssá válhat. Amint már megjegyeztem, az irreleváns kölcsönhatásokat elhagyjuk a realiztikus modellekben. Ennek fő oka az, hogy gyakran az UV tartomány felé (fordított irányú) evolúciót keresünk. Ekkor viszont az irreleváns csatolások egyre nagyobbak, és jelentősen befolyásolják a modellek fizikai tulajdonságát.

A wilsoni formalizmusban egy elmélethez tartozó hatást vizsgálunk, ahol az elemi gerjesztéseket a hatás által leírt megfelelő dinamikával vesszük figyelembe. A Wetterich egyenlet esetén a regulátor miatt módosult a hatás, ezáltal a módusok diszperziós relációja is megváltozik, azokat így nem az eredeti hatásban szereplő dinamikával vesszük figyelembe. Lényegében az eredeti elemi gerjesztések helyett újakat vezetünk be, amelyek egyfajta kvázirészecskéknak tekinthetők egy olyan új elméletben, amit az eredeti hatás és a regulátor együtt definiálnak.

A Wetterich egyenlet felírásakor fontos megemlíteni, hogy a (2.10) pályaintegrálból kiindulva, bevezetve a (2.15) transzformációt a (2.16) egyenletben definiált térváltozó már nem egyezik meg a kezdeti térváltozóval, annak a várható értékét szolgáltatja. A (2.10) egyenletben formálisan elvégezzük a pályaintegrált addig a pontig, ameddig a k skála tart. A k -ig értelmezett effektív hatás Legendre transzformációját is elvégezzük. Ezek után a k skálát lépésről lépésre csökkentve különböző k -hoz tartozó effektív hatások láncolatát, elméletek evolúcióját kapjuk eredményül.

Ezzel szemben a WH formalizmusban az S_k blokkosított hatás evolúcióját követjük UV-ből IR felé. Szigorúan figyelembe véve, hogy a Wetterich egyenlet nem RG egyenlet, hiszen nem egy elmélet evolúcióját figyelhetjük meg a skála függvényében, hanem elméletek láncolatát. Van-e a különbség két formalizmussal kapott evolúcióban? Alapjában véve nincs, a skaláris elméletek fázisszerkezetében hasonló eredményeket kapunk. A valódi eltérés a CTP formalizmusban mutatkozik meg. A rendszer-környezet szétválasztás csak éles levágás esetén tehető meg. A modellek effektivitásából származó nemlokális tagok nemtriviális nyeregpontra szintén csak éles levágás esetén számolható hatékony módon. Az összefonódás leírása csak a WH egyenlet keretei között tehető meg. Az említett eltérések között több csupán elvi jelentőségű, azonban a WH egyenlet minden szempontból korrektebb leírást ad.

Az $\mathcal{R}_k = k^2$ választással élve a Wetterich egyenletből a Callan-Symanzik egyenlet származtatható, ami az előző gondolatmenetet követve szintén nem tekinthető RG egyenletnek. A perturbatív közelítésben kapott Callan-Symanzik egyenletben egy csupasz tömeg a változó, ami szintén nem tekinthető skálának, ezért tévesen gondolják, hogy az egyenletnek (a formai hasonlóságon túl) bármi köze is van a renormáláshoz. A Callan-Symanzik egyenlet megoldása különböző tömeggel jellemzett elméletek között teremt kapcsolatot.

A Wetterich-féle effektív hatás szemlélet mellett a szakirodalomban széleskörűen alkalmazott wilsoni formalizmusban jelentős szerepet játszik a Polchinski egyenlet. Ez a blokkosított hatáson alapuló RG egyenlet, ahol simított függvényt adunk meg levágásként. Értekezésemben, a gravitációs modell vizsgálatait leszámítva a Wegner-Houghton egyenletet fogom alkalmazni.

3. fejezet

Zárt időtengelyes formalizmus

Az előző fejezetben bemutattam, hogy az RG módszer az átmeneti amplitúdó invarianciáján alapszik. Egy kezdeti vákuumállapotból indulunk ki, és egy végállapotba érkezünk, ami szintén vákuumállapot. A hagyományos RG módszer esetén ennek alakja:

$$Z[j] = \langle 0_+ | U(t_f, t_i; j) | 0_- \rangle = e^{iW[j]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S+j\phi)}, \quad (3.1)$$

amely j forrás jelenlétében számolt generáló funkcionál.

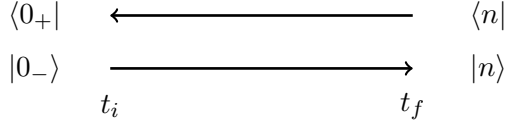
Tiszta $|0_- \rangle$ vákuumállapotból indulunk ki. A mínusz előjel azt jelöli, hogy az állapotot a $t = -\infty$ időpontban vesszük. Az állapotra az U időfejllesztő operátor hat, utána a $|0_+ \rangle$ tiszta vákuumállapotba érkezünk. Az RG blokkosításokkal a vákuumállapotokat, vagyis tiszta állapotok sorozatát kapjuk, a kevert állapotok nem jelenhetnek meg. Ez komoly hiányosság. Egy RG blokkosítási lépés a rendszer IR módusaiból a környezethez tartozó UV módusokat hoz létre. A kevert állapotok úgy jelenhetnek meg, hogy az UV és az IR módusok összefonódnak. Az UV módusok kiintegrálása után a maradék IR rendszer módus már lehet kevert állapotban. Amennyiben szeretnénk a kevert állapotok járulékát kiszámolni, akkor nem indulhatunk ki az átmeneti amplitúdók invarianciájából. A kevert állapotokat a sűrűségmátrix segítségével írhatjuk le. Olyan formalizmusból kell kiindulnunk, amelyből az átmeneti amplitúdó helyett a sűrűségmátrix számolható. Erre alkalmas a zárt időtengelyes (angolul closed time path, CTP) formalizmus.

3.1. A CTP formalizmus

A CTP formalizmus segítségével a fizikai rendszerre vonatkozó várható értéket kaphatjuk meg. A

$$Z[j^+, j^-] = e^{iW[j^+, j^-]} = \sum_n \langle 0_+ | U^\dagger(t, t_i; j^-) | n \rangle \langle n | U(t, t_i; j^+) | 0_- \rangle \quad (3.2)$$

generáló funkcionál alakjából látszik, hogy a kezdeti $|0_- \rangle$ vákuumállapotot j^+ forrás jelenlétében a $U(t_f, t_i; j^+)$ időfejlesztő operátorral elfejleszttem a végső t_f időpontig, ahol ezt az állapotot tükrözöm. A tükrözött állapotot visszafejleszttem j^- forrásnál a $U^\dagger(t_f, t_i; j^-)$ időben visszafelé fejlesztő operátor segítségével a kezdeti $\langle 0_+ |$ vákuumállapotba. Ezt szemlélteti a (3.1) ábra.



3.1. ábra. A zárt időtengelyes időfejlődés szemléltetése.

A hagyományos RG módszerrel az állapotok közötti átmeneti valószínűséget kaphatom meg. Ezt egy operátor mátrixelemmel, $\langle 0_+ | T | 0_- \rangle$ formában adjuk meg. Ez általában komplex szám. A CTP formalizmus, annak köszönhetően, hogy kezdeti állapotból indulunk és kezdeti állapotba érkezünk, alkalmas kezdeti érték problémák leírására. Amennyiben a kezdeti és a végállapot megegyezik, azaz $|0_- \rangle = |0_+ \rangle \equiv |0 \rangle$, akkor (3.2) egyenlet várható értékre vezet:

$$\begin{aligned} Z[j^+, j^-] &= \sum_n \langle 0 | \bar{U}^\dagger(t, t_i; j^-) | n \rangle \langle n | U(t, t_i; j^+) | 0 \rangle \\ &= \text{Tr} \left[U(t, t_i; j^+) | 0 \rangle \langle 0 | U^\dagger(t, t_i; j^-) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A második sorban a trace-képzésnél felcseréltem a sorrendet. Az időfejlesztő operátorok között megjelenő $|0 \rangle \langle 0|$ operátor a kezdeti sűrűségmátrix.

Hogyan képzelhetjük el az RG blokkosítást a CTP formalizmusban? A térváltozót a szokásos módon IR és UV módusokra bontom fel:

$$\phi = \phi_{IR} + \phi_{UV} = \phi_{<} + \phi_{>}. \quad (3.4)$$

Az RG módszer során szisztematikusan eltávolítjuk a nagyenergiás UV szabadsági fokokat. A generáló funkcionál CTP formalizmusbeli alakja a (3.3) egyenlet alapján:

$$Z[j^+, j^-] = \text{Tr} \left[U(t, t_i; j^+) \rho_i U^\dagger(t, t_i; j^-) \right], \quad (3.5)$$

ahol definiálom a kezdeti állapotokból előálló $\rho_i = |0\rangle\langle 0|$ sűrűségmátrixot. Az evolúciót az előbbi egyenlet alapján a trace-képzésével kapom. Az RG módszer során a k skálát csökkentem, részlegesen végzem el a trace-képzés műveletét, mellyel a $\rho_r(k)$ redukált sűrűségmátrixot kapom:

$$\begin{aligned} Z[j^+, j^-] &= \text{Tr} [\rho(k)] \\ &= \rho_r(k). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A CTP alkalmas formalizmus arra, hogy a sűrűségmátrixszal dolgozzunk. Az RG blokkosítás során a redukált sűrűségmátrixhoz jutok, melynek segítségével figyelembe tudom venni a kevert állapotok járulékát, az összefonódás leírható. Ezt hagyományos STP formalizmussal nem tudjuk megtenni.

Úgy tűnik, hogy a CTP formalizmus megfelelő keretet ad az RG módszer olyan kiterjesztésére, amely már az összefonott állapotokat is tartalmazza. Megjegyzem, hogy a CTP keret valóban alkalmas ennek leírására, azonban további elemek szükségesek. Az összefonódás a rendszerhez tartozó IR módusok és a kiintegrált, környezethez tartozó UV módusok között valósul meg. Ahhoz, hogy megtörténjen az összefonódás, a rendszernek nyílnak kell lennie, az UV módusoknak a nyílt környezethez kell tartozniuk. A nyíltság során valódi részecskék jelennek meg, amelyek nem lokálisak. A szabad részecske az impulzustérben lokális, amely a Fourier-transzformáció után a koordinátatérben már nem lesz lokális. A nyílt rendszer leírása megköveteli, hogy a kölcsönhatás alakja legyen nemlokális. Megmutatom, hogy a nemlokális kölcsönhatás és a CTP formalizmus együtt elvezet az összefonódáshoz.

Hogyan kapunk nemlokális kölcsönhatást? Ehhez nem lesz szükség mesterséges módon nemlokális tagokat bevezetnünk a hatásba. A következő fejezetben megmutatom, hogy az RG blokkosítás folyamán megjelenik egy nemtriviális nyeregpont, amelyet eddig a szakirodalomban nem vettek figyelembe, ami nemlokális tagot ad a potenciálhoz. Ez azt mutatja, hogy az RG módszer kezdettől fogva nemlokális evolúciót ad, csak eddig mindig a lokális potenciált számoltuk. A nemlokalitás megjelenik az STP formalizmusban is, és az önmagában nem elég az összefonódás leírásához. Szükség van a CTP formalizmusra, amely megadja a keretet ahhoz, hogy a nemlokális kölcsönhatás olyan kölcsönhatási vertexeket adjon, ahol a két időtengely is kölcsön tud hatni, és ezzel valóban megjelenik az összefonódás. Az összefonódást azok a nemlokális kölcsönhatások fogják adni, amelyek a két időtengelyt kapcsolják össze, vagy másképp fogalmazva, a két időtengelyhez tartozó két különböző ϕ^+ és ϕ^- térváltozókhöz tartoznak.

Ha tiszta állapotból indulunk ki, akkor bizonyos szabadsági fokok kiintegrálása nem ad összefont állapotot. Összefont állapotból kell kiindulnunk ahhoz, hogy például két részecske kölcsönhatásakor az egyik részecske állapotát "ki trace-elve", a másik részecske állapota kevert legyen.

Az RG módszer, mint effektív elmélet, nemlokális kölcsönhatást generál. Ez azért nagyon újszerű, mert ha tiszta állapotból indulunk ki, és végrehajtunk egyetlen RG blokkosítási lépést, akkor megjelenik a nemlokalitás, ezzel együtt pedig megjelenhetnek a kevert állapotok. A renormálás trace-képzése alkalmas arra, hogy tiszta állapotból kiindulva is megjelenhessenek a kevert állapotok.

A CTP formalizmus a modern fizikai szinte minden területén széles körben használt formalizmus. A zárt időtengelyes formalizmus eredetileg a kvantumtérelmélet keretei között született. Segítségével várható érték problémák [11, 12, 13, 14, 15, 16] is leírhatóak, időfejődés számolható. (Hasonló séma került az előbbtől függetlenül bevezetésre a kvantummechanikában [17], illetve a CTP formalizmus segítségével a Schrödinger-képbeli átmeneti amplitúdók mellett a várható értékek problémája kezelhető Heisenberg reprezentációban [18]). A CTP formalizmus alkalmas sok-test problémák kezelésére [19], véges hőmérsékletű kvantumtérelmélet leírására [20, 21], sűrűségmátrix [22] és kevert állapotok járulékeinak leírására [23]. Alkalmas nem egyensúlyi rendszerek [24, 25, 26], lokális operátorok várható értékeinek mozgásegyenletének vizsgálatára [11, 16], illetve a dekoherencia

jelenségének tárgyalása is [27, 28, 29, 30, 31]. A CTP formalizmusban próbálkoztak már a renormálással, ez az úgynevezett CGEA (coarse grained effective action) [32, 33], azaz durva szemcsésítéssel kapott hatásra vonatkozó blokkosítással [22, 34]. A CGEA "in-in", vagyis CTP leírása lehetőséget ad nyílt rendszer jellemzésére. A CTP formalizmus felhasználása kozmológiai témában igen sokrétű [35, 36, 37, 38, 39]. A CGEA nagyon jól használható kvantumkozmológia kutatásokban [40, 41, 42, 43], így annak CTP leírása elengedhetetlen. Megjegyzem, hogy ezen munkák többségében a nemlokalitás nem jelenik meg, ami komoly hiányosság.

CTP formalizmus segítségével tárgyalható klasszikus fizikai problémák közé tartozik az úgynevezett Abraham-Lorentz erő is [16, 44, 45, 46]. Az Abraham-Lorentz erő gyorsuló töltött részecskére hat, amelyet az általa kibocsátott sugárzás fejt ki. A megoldás öngyorsuló és nem kauzális eredmény, ami a klasszikus világméretűvel nehezen összeegyeztethető. A kisugárzott elektromágneses tér felfogható a rendszert, azaz a próbatöltést körülvevő környezetként. Ekkor a környezet hatását egy effektív erővel vesszük figyelembe. A rendszer nyílttá válik, melyet már nem tudunk a hagyományos Hamilton elvvel, a kezdeti és végértékek megadásával tárgyalni. A CTP formalizmus segítségével azonban a rendszer és a környezet összefonódásának járuléka számolható, a kevert állapotok leírhatók. Az Abraham-Lorentz erő CTP formalizmussal az eddigi leírásoknál pontosabban tárgyalható.

3.2. A CTP propagátor

Ebben a fejezetben a CTP formalizmus keretében kiszámolom a CTP propagátort. A CTP alakban felírt $\hat{\phi} = (\phi^+, \phi^-)$ térváltozóra a generáló funkcionál szabad elmélet esetén Gauss integrál alakú. Ezt $t_i \rightarrow -\infty$ és $t_f \rightarrow \infty$ esetben el lehet végezni, hiszen ekkor a Fourier-térbeli alak diagonális. Skalártér esetén a propagátor 2×2 -es mátrix, elemei a következők:

$$\begin{aligned}
i \frac{\delta^2 W[\hat{j}]}{\delta i j_a^+ \delta i j_b^+} &= \sum_n \langle 0 | \bar{T}[U^\dagger(t, t_i; j^-)] | n \rangle \langle n | T[\phi_a \phi_b U(t, t_i; j^+)] | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[\phi_a \phi_b] | 0 \rangle = i D_{ab}^{++}, \\
i \frac{\delta^2 W[\hat{j}]}{\delta i j_a^- \delta i j_b^-} &= \sum_n \langle 0 | \bar{T}[\phi_a \phi_b] | n \rangle \langle n | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T[\phi_b \phi_a] | 0 \rangle^* = (i D_{ba}^{++})^* = i D_{ab}^{--}, \\
i \frac{\delta^2 W[\hat{j}]}{\delta i j_a^+ \delta i j_b^-} &= \sum_n \langle 0 | \phi_b | n \rangle \langle n | \phi_a | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_b \phi_a | 0 \rangle \\
&= i D_{ab}^{+-}, \\
i \frac{\delta^2 W[\hat{j}]}{\delta i j_a^- \delta i j_b^+} &= \sum_n \langle 0 | \phi_a | n \rangle \langle n | \phi_b | 0 \rangle = \langle 0 | \phi_a \phi_b | 0 \rangle \\
&= i D_{ab}^{-+} = i D_{ba}^{+-} = (i D_{ab}^{+-})^*. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Az a és b indexek a téridő-koordinátákat, a T és \bar{T} az időrendezés és az anti-időrendezés operátorát jelöli. A propagátor első ”++” indexszel jelölt eleme az egyidőtengely esetén felírt propagátorral egyezik meg. Itt gyakran a CTP indexeket elhagyjuk. A propagátor elemei nem függetlenek egymástól. A $D - D^* = D^{+-} - D^{+*}$ miatt a $T[\phi_a \phi_b] + \bar{T}[\phi_a \phi_b] = \phi_a \phi_b + \phi_b \phi_a$ alakúnak adódik. A CTP propagátor alakja a következő függvényekkel:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D^n + iD^i & -D^f + iD^i \\ D^f + iD^i & -D^n + iD^i \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

ahol az említett függvények alakja a koordináta függvényében:

$$\begin{aligned}
D_{x,x'}^n &= -\frac{1}{2} \Theta(t - t') i \langle 0 | [\phi_x, \phi_{x'}] | 0 \rangle - \frac{1}{2} \Theta(t' - t) i \langle 0 | [\phi_{x'}, \phi_x] | 0 \rangle, \\
D_{x,x'}^f &= -i \frac{1}{2} \langle 0 | \phi_x \phi_{x'} | 0 \rangle + i \frac{1}{2} \langle 0 | \phi_{x'} \phi_x | 0 \rangle = -i \frac{1}{2} \langle 0 | [\phi_x, \phi_{x'}] | 0 \rangle, \\
D_{x,x'}^i &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \phi_x \phi_{x'} | 0 \rangle - \frac{1}{2} \langle 0 | \phi_{x'} \phi_x | 0 \rangle = -\frac{1}{2} \langle 0 | \{\phi_x, \phi_{x'}\} | 0 \rangle. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

A D^n és D^f az elektrodinamikából ismert közeletér és távöltér Green függvények. Az utóbbi a valódi fotonok leírására alkalmas. A valódi és

virtuális fotonokat együtt a közeltér Green függvénnyel tudjuk leírni. A közeltér elnevezést a virtuális fotonok rövid hatótávolsága indokolja. A propagátorban megjelenő mátrixelemek komplex részét a D^i tag jelöli, ezek mindig tömeghéjon vannak. A propagátor nem diagonális elemei a (3.9) egyenletekben szereplő Wightman függvények miatt szintén tömeghéjon vannak, ahogyan a D^f távoltér függvény is. A D^f valódi részecskek leírására alkalmas.

A CTP propagátor komplex része meghatározza a hozzá tartozó elemi gerjesztés, részecske véges élettartamát. A

$$D^i \sim \frac{1}{\tau} \quad (3.10)$$

alakjában a részecske élettartamát τ -val jelöljük. A hagyományos formalizmusban, STP esetén ez a $D^i = \epsilon$ megegyezik a Feynman-féle ϵ -nal. Ez egy végtelen élettartamnak felel meg, stabil részecske írható le a segítségével. Egy véges élettartamú részecske elbomlása irreverzibilis folyamat, az időmegfordítási szimmetria sérül. Ez a D^i véges értékével kapható meg, azaz megkaphatjuk az irreverzibilitást. A D^i a taghoz szorosan kapcsolódik a dekoherencia jelensége is, mert a tag exponenciálisan lecsengő járulékot ad a nemdiagonális elemekhez a sűrűségmátrix felírásánál. A D^i tag valós, hiszen a hatás és a D^i tag előtti imaginárius egység közösen -1 -et ad. Az STP formalizmus segítségével csak irreverzibilitás kapható vissza, a hozzá szorosan kapcsolódó dekoherencia nem. Ebből is látszik, hogy a CTP formalizmus alkalmazása bővíti a látóterünket.

A koordinátafüggő CTP propagátort a számolásoknál Fourier-transzformálnom kell impulzustérre. A három dimenzióban felírt szabad tömeges skalártér keltő és eltüntető operátorainak csererelációjából indulok ki:

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (3.11)$$

A térváltozó alakja:

$$\phi(x) = \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}]. \quad (3.12)$$

Definiálok a lépcsőfüggvényt pályaintegrálos alakban:

$$\Theta(t - t') = -\frac{1}{i} \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\epsilon}. \quad (3.13)$$

A propagátor nemdiagonális elemeit az előbbiekkal kifejtve:

$$\begin{aligned}
D_{x,x'}^{-+} &= -i\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle \\
&= -i\int_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\frac{1}{4\omega_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}'}}\langle 0|a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k}')e^{ik'x'-ikx}|0\rangle \\
&= -i\int_{\mathbf{k}}\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-t')+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \\
&= -i\int_{\mathbf{k},\omega}e^{-i\omega(t-t')+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}2\pi\Theta(\omega)\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}(\delta(\omega-\omega_{\mathbf{k}})+\delta(\omega+\omega_{\mathbf{k}})) \\
&= -2\pi i\int_k e^{-ik(x-x')}\delta(k^2-m^2)\Theta(k_0). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Bevezetem a $(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow k$ jelölést illetve az utolsó sorban élek a $k \rightarrow -k$ helyettesítéssel. A D^{+-} az előző mintájára:

$$\begin{aligned}
D_{x,x'}^{+-} &= -i\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle \\
&= -2\pi i\int_k e^{-ik(x-x')}\delta(k^2-m^2)\Theta(-k_0). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

A lépcsőfüggvényt tartalmazó tagokat felírom, ezekre szükségem lesz a propagátor elemek kiszámításához:

$$\begin{aligned}
\Theta(t-t')iD_{x,x'}^{-+} &= i\int_{\mathbf{k},\omega}\frac{e^{-i\omega(t-t')+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\omega-\omega_{\mathbf{k}}+i\epsilon} \\
\Theta(t'-t)iD_{x,x'}^{+-} &= -i\int_{\mathbf{k},\omega}\frac{e^{-i\omega(t-t')+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\omega+\omega_{\mathbf{k}}-i\epsilon}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

A CTP propagátor elemei:

$$\begin{aligned}
D_{xx'} &= \Theta(t-t')D_{x,x'}^{-+} + \Theta(t'-t)D_{x',x}^{+-} \\
&= -\int_{\mathbf{k},\omega}e^{-i\omega(t-t')+i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(\frac{1}{\omega+\omega_{\mathbf{k}}-i\epsilon} - \frac{1}{\omega-\omega_{\mathbf{k}}+i\epsilon} \right) \\
&= \int_k e^{-ik(x-x')}\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Kihasznlom a $D = -D^{--*}$ kapcsolatot az elemek között, így a

$$D_{xx'}^{--} = -\int_k e^{-ik(x-x')}\frac{1}{k^2-m^2-i\epsilon}. \tag{3.18}$$

A CTP formalizmus propagátorának alakja impulzustérben:

$$\begin{pmatrix} D & D^{+-} \\ D^{-+} & D^{--} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} & -2\pi i \delta(k^2 - m^2) \Theta(-k^0) \\ -2\pi i \delta(k^2 - m^2) \Theta(k^0) & -\frac{1}{k^2 - m^2 - i\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

A D^n , D^f és D^i függvények:

$$\begin{aligned} D_k^n &= P \frac{1}{k^2 - m^2}, \\ D_k^f &= -i\pi \delta(k^2 - m^2) \text{sign}(k_0), \\ D_k^i &= -i\pi \delta(k^2 - m^2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

ahol a P a főérték integrált jelöli. Az inverz propagátor alakja:

$$\hat{D}_k^{-1} = \begin{pmatrix} K^n + iK^i & K^f - iK^i \\ -K^f - iK^i & -K^n + iK^i \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Itt $K^n = k^2$, $K^f = i\epsilon \text{sign}(k_0)$ és $K^i = i\epsilon$.

A bevezetett közel-, és távotér függvényekkel $D_{x,x'}^A = D_{x,x'}^n \pm D_{x,x'}^f$ módon kifejezhetőek a retardált és az avanszált Green függvények. Ezek $D^{\bar{a}} = (K^{\bar{a}})^{-1}$ és $D^i = -D^r K^i D^a$ alakúak, ahol $D^{\bar{a}} = D^n \pm D^f$ a retardált és az avanszált függvények. A $K^{\bar{a}} = K^n \pm K^f$ jelöli a kernelt, melynek elemei:

$$\begin{aligned} K_p^n &= p^2 - m^2, \\ K_p^f &= i\epsilon \text{sign}(p^0), \\ K_p^i &= i\epsilon(1 + 2n_p). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Az $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ tagokat elhagytam. A kölcsönható rendszer esetén a hatás alakja szabad és kölcsönható elemek összegeként, $S[\phi] = S_0[\phi] + S_i[\phi]$ alakban írható fel. A CTP hatás alakja így :

$$S[\hat{\phi}] = S_0[\hat{\phi}] + S_i[\phi^+] - S_i[\phi^-]. \quad (3.23)$$

4. fejezet

Kvantum renormálási csoport módszer

4.1. Bevezetés

Értekezésemben bemutatott munka egyik kitűzött célja az volt, hogy leírjam egy fizikai rendszer effektív elméletét a környezete jelenlétében. Az RG módszer során a környezet kiintegrálása az UV és a rendszerhez tartozó IR módusok összefonódását adja, amely a kevert állapotok figyelembe vétele nélkül nem kapható meg. A kevert állapotok tárgyalása nélkül az RG módszer leírása nem teljes, és nem is lehet teljessé tenni a hagyományos formalizmus keretein belül, szükségünk van a zárt időtengelyes, azaz a CTP formalizmusra. Az összefonódás jelensége csak a kvantummechanika keretében értelmezhető, ezért a CTP RG módszert kvantum renormálási csoport (QRG) módszernek neveztem el [P1].

4.2. Fa-szintű evolúció

A vizsgált modellem a 3d ϕ^4 modell, ahol a potenciálban a ϕ_x térváltozó négyzetének hatványai szerepelnek. A hatás kezdetben lokális, az $U(\phi_x)$ potenciál egy téridőponttól függ:

$$U(\phi_x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} \phi_x^n. \quad (4.1)$$

Kiindulási pontom a zárt rendszer csatolási állandóit tartalmazó csupasz hatás:

$$S_B[\hat{\phi}] = \int dx \left[\frac{1}{2} \hat{\phi}_x \hat{D}_0^{-1} \hat{\phi}_x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_B n}{n!} (\phi_x^{+n} - \phi_x^{-n}) \right], \quad (4.2)$$

ahol B (bare) a csupasz paramétereket jelöli. A CTP propagátor dimenziótlan.

Ahhoz, hogy a hatásban szereplő kölcsönhatási vertexeket véges impulzusnál vegyem, egy bilokális hatást választok, amely a két tengelyt összeköti, utána pedig az impulzustérbeli propagátort olyan impulzusokra szorítom meg, hogy az adott k skála mellett megvalósulhasson véges impulzusátadás, azaz kölcsönhatás a két időtengely között. A blokkosított wilsoni hatást két tag összegeként, $S[\hat{\phi}] = S_1[\hat{\phi}] + S_2[\hat{\phi}]$ alakban veszem fel, ahol

$$S_1[\hat{\phi}] = \int dx \left[\frac{1}{2} \hat{\phi}_x \hat{D}_0^{-1} \hat{\phi}_x - U(\phi_x^+) + U(\phi_x^-) \right], \quad (4.3)$$

ahol S_1 a térváltozóban lokális, illetve LPA-ban nem változik. Az U valós potenciál alakja a (4.1) egyenlettel adható meg, amely tartalmazza a STP-beli, azaz egyidőtengelyhez tartozó csatolásokat. A hatásban szereplő bilokális tagot klaszter kifejtésben veszem fel a következőképpen:

$$S_2[\hat{\phi}] = - \int dx dy V_{x-y}(\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y). \quad (4.4)$$

Ez a tag tartalmazza azokat a csatolásokat, amelyek a két tengelyt kötik össze. A térváltozó szerint kifejtve:

$$V_{x-y}(\hat{\phi}, \hat{\phi}') = \sum_{\sigma, \sigma'} \sum_{m, n \geq 1} \frac{1}{m! n!} \phi_x^{\sigma m} v_{m, n, x-y}^{\sigma, \sigma'} \phi_y^{\sigma' n}, \quad (4.5)$$

ahol a v jelöli a keveredési csatolásokat, a σ, σ' pedig a $+, -$ CTP indexeket. A v csatolások a $S(\phi^+, \phi^-) = -S^*(\phi^-, \phi^+)$ CTP szimmetriából adódó szimmetriatulajdonságokkal rendelkeznek:

$$\begin{aligned} v_{m, n, x}^{\sigma, \sigma'} &= v_{n, m, -x}^{\sigma', \sigma}, \\ v_{m, n, x}^{\sigma, \sigma'} &= -v_{m, n, x}^{*- \sigma, - \sigma'}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A szabadsági fokokat impulzusnagyságuk alapján a k skála két részre bontja. A $0 < |\mathbf{p}| < k$ tartománybeli infravörös (IR) nagyságú impulzussal

jellemezhetem a rendszer szabadsági fokait, a $k < |\mathbf{p}| < \Lambda$ intervallumhoz tartozó (UV) szabadsági fokok a környezethez tartoznak. Ennek megfelelően felbontom a térváltozót:

$$\hat{\phi} \rightarrow \hat{\phi} + \hat{\varphi}, \quad (4.7)$$

ahol $\hat{\phi}$ a $0 < |\mathbf{p}| < k - dk$ impulzusokra véges, a $\hat{\varphi}$ pedig a $k - dk < |\mathbf{p}| < k$ impulzusokra. Egy RG blokkosítási lépés a rendszer módusaiból a környezeti módusokat hoz létre. A környezeti, UV módusokat kiintegrálok:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{k-\Delta k}[\hat{\phi}]} = \int D[\hat{\varphi}] e^{\frac{i}{\hbar} S_k[\hat{\phi} + \hat{\varphi}]}. \quad (4.8)$$

A hatást lokális és bilokális tagok összegeként adtam meg. Fa-szintű renormálás esetén a blokkolást nem a nulla, hanem egy véges térkonfiguráció körül végzem. (Ez lehet akár egy síkhullám, ahol a hullámszámot azonosítjuk a k skálával.) A részecskét leíró térhez tartozó mozgásegyenlet megoldása a keresett térkonfiguráció. Ezt a hatás szélsőértéke adja. Fa-szintű közelítésnél a nyeregpontra körüli fluktuációkat elhanyagoljuk. A nyeregpontra $\hat{\varphi}^n$ $\mathcal{O}(\Delta k^n)$ -nel arányos, ezért elegendő $\hat{\varphi}$ -vel arányos tagokat megtartani a mozgásegyenletben. A nyeregpontra levezetését az 5.4 fejezetben részletesen tárgyalom.

A rendszerhez tartozó IR térváltozót eltoljuk: $\hat{\phi}_x \rightarrow \hat{\Phi} + \hat{\phi}_x$, ahol $\hat{\Phi} = (\Phi, \Phi)$ a potenciál valós részének minimumát jelöli: $\Re U'(\Phi) = 0$, $\Re U''(\Phi) > 0$. Ezzel megjelenik a modellben a szokásos két fázis. A $\Phi = 0$ esetben a potenciál minimuma az origóban van, $\Phi \neq 0$ esetben van egy nemtriviális minimum, ami a sértett fázisnak felel meg. Az inverz propagátort Φ konfigurációban számolom.

A mozgásegyenlet:

$$0 = \frac{\delta S_k}{\delta \hat{\phi}} \approx \hat{D}^{-1} \hat{\phi} - \hat{L} \rightarrow \hat{\phi} = \hat{D} \hat{L}, \quad (4.9)$$

ahol

$$\begin{aligned} (D^{-1})^{\sigma, \sigma'} &= (D_0^{-1})^{\sigma, \sigma'} - \delta^{\sigma, \sigma'} \sigma U''(\Phi^\sigma), \\ L_x^\sigma &= \sigma U'(\phi_x^\sigma) - 2 \int dy \partial_{\phi_x^\sigma} V_{x-y}(\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y). \end{aligned} \quad (4.10)$$

A blokkosított hatást $S_{k-\Delta k} = S_k + \Delta S_k$ alapján számolom. Ezt a hatás megváltozásának formulájába visszaírva a következőt kapom:

$$\Delta S_k = \frac{\Delta k}{2} \int dx dy \hat{L}_x \hat{D}_{x-y}^{(k)} \hat{L}_y, \quad (4.11)$$

ahol a propagátort az eliminálandó módusokra veszem figyelembe:

$$\hat{D}_{x-y}^{(k)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(|\mathbf{q}| - k) \hat{D}_q e^{-i(x-y)q}. \quad (4.12)$$

A ΔS -beli két-klaszter szerkezet megőrzésére:

$$L_x^\sigma \rightarrow \bar{L}_x^\sigma = \sigma \tilde{U}'(\phi_x^\sigma) - 2 \int dy W_{x-y}^\sigma(\hat{\phi}_y), \quad (4.13)$$

ezzel a klaszter kifejtés magasabb rendű járulékait eldobom. A

$$W_{x-y}^\sigma(\hat{\phi}) = \partial_{\phi'_x} V_{x-y}(\hat{\phi}', \hat{\phi})|_{\phi'=0} \quad (4.14)$$

jelölést használom. Ezzel megkapom az evolúciós egyenletet, melynek alakja:

$$\frac{dS}{dk} = \frac{1}{2} \int dx dy \hat{L}_x \hat{D}_{x-y}^{(k)} \hat{L}_y, \quad (4.15)$$

kifejtve:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dk} &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \int dx dy \left[\sigma U'(\phi_x^\sigma) D_{x-y}^{(k)\sigma, \sigma'} \sigma' U'(\phi_y^\sigma) \right. \\ &\quad - 4 \int dz W_{z-x}^\sigma(\hat{\phi}_x) D_{z-y}^{(k)\sigma, \sigma'} \sigma' U'(\phi_y^\sigma) \\ &\quad \left. + 4 \int dz dz' W_{z-x}^\sigma(\hat{\phi}_x) D_{z-z'}^{(k)\sigma, \sigma'} W_{z'-y}^{\sigma'}(\hat{\phi}_y) \right]. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Sikerült megőriznem a hatás kezdeti, két-klaszter szerkezetét. Az impulzustérbeli alak:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dk} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(|\mathbf{q}| - k) \left[4[W_{-q}^\sigma(\hat{\phi})]_{-q} D_q^{\sigma, \sigma'} [W_q^{\sigma'}(\hat{\phi})]_q \right. \\ &\quad - 4[W_{-q}^\sigma(\hat{\phi})]_{-q} D_q^{\sigma, \sigma'} \sigma' [U'(\phi^\sigma)]_q \\ &\quad \left. + \sigma [U'(\phi^\sigma)]_{-q} D_q^{\sigma, \sigma'} \sigma' [U'(\phi^\sigma)]_q \right]. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Mivel a v_q csatolások egy $k \rightarrow k - \Delta k$ blokkosítási lépéskor más v -től nem kapnak járulékot, fa-szintű evolúció esetén egyszerűen felösszegezhetem az egyes blokkosítási lépésben kapott járulékokat. A keveredési csatolások

értéke kezdetben nulla, ezért a (4.17) egyenletnek csak az utolsó tag ad fa-szinten járulékot:

$$S^t[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \sigma \sigma' \int dx dy U'(\phi_x^\sigma) D_{x-y}^{(k, \Lambda) \sigma \sigma'} U'(\phi_x^{\sigma'}), \quad (4.18)$$

ahol az S^t a fa-szintű hatást jelöli. A propagátor alakja:

$$\hat{D}_{x-y}^{(k, \Lambda)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Theta(|\mathbf{q}| - k) \Theta(\Lambda - |\mathbf{q}|) \hat{D}_q e^{-i(x-y)q}. \quad (4.19)$$

Ez veszi figyelembe független módus közelítésben a $[\Lambda, k]$ tartománybeli evolúciót. A két-klaszterhez tartozó csatolások alakja:

$$v_{m, n, x-y}^{\sigma, \sigma'} = g_{m+1} g_{n+1} \sigma D_{x-y}^{(k, \Lambda) \sigma, \sigma'} \sigma'. \quad (4.20)$$

A (4.20) egyenlet mutatja az UV és IR módusok összefonódását, hiszen a v környezeti szabadsági fokokat leíró csatolások evolúciója elindul a rendszerhez tartozó g csatolások segítségével.



4.1. ábra. Egy $\mathcal{O}(g_4)$ rendű csatolás, amely összeköti a két időtengelyt, $\sigma = -\sigma' = 1$. A két vertex közötti szaggatott vonal a $D^{(k) +-}$ elemnek felel meg a zárt időtengelyes környezeti propagátorban.

Ez kölcsönhatáshoz vezet a CTP-beli két időtengely között. A kölcsönhatást a tömeghéjon lévő részecskék közvetítik, és $\mathcal{O}(\hbar^0)$ rendű járulékot adnak. Ezt reprezentálja a (4.1) ábra. A diagramban lévő vertexek külső lábainak összimpulzusa k , ami megegyezik a környezeti propagátor által reprezentált impulzussal.

A CTP gráfnak három típusát különböztetjük meg [47]. Homogén gráf esetén minden külső láb és minden vertex ugyanahhoz a CTP kópiához, azaz ugyanahhoz a ϕ^+ (vagy ϕ^-) térváltozóhoz tartozik. Ezek a gráfok az STP formalizmusban is megjelennek. Inhomogén gráf esetén minden külső láb ugyanahhoz a ϕ^+ -hoz (vagy ϕ^- -hoz) tartozik, de a vertexeknél



4.2. ábra. A generáló funkcionálhoz tartozó egyik Feynman diagramm. A sima és a szaggatott vonal jelöli a (ϕ) rendszerhez és a (φ) környezethez tartozó propagátort. A bal (jobb) oldali kör tartozik a U (U^\dagger) időfejlesztő operátorhoz. A körök belső, nulla lábbal bíró vonalai reprezentálják a $\rho_i = |0\rangle\langle 0|$ sűrűségoperátort. A külső lábak a t_f végtelen időhöz tartoznak. A gráf két oldala a $t_f \rightarrow \infty$ -ben találkoznak. A külső lábak száma a két oldalon megegyezik. Jelen esetben 2-2 rendszer és környezet láb van a végállapotban.

mindkét térváltozó megjelenik. Az inhomogén gráfok a CTP formalizmus következtében jelennek meg, azonban nulla járulékot adnak, amennyiben a kezdeti állapot vákuumállapot [47]. A harmadik típusú gráf, az úgynevezett valódi CTP gráf, ahol az előzőekkel ellentétben a külső lábak mindkét térváltozót tartalmaznak.

A (3.3) egyenletbeli generáló funkcionált a (4.2) ábrán szemléltetem. Az ábrán egy valódi CTP gráf látható. A végállapotra felösszegzek a (3.3) egyenlet alapján. Homogén gráfok esetén csak a gráf egyik oldalán lennének külső lábak, amelyek önmagukban záródnának. Ebben az esetben a felösszegzést meg lehet tenni. Az RG blokkosítás az UV környezet módusokat, azaz a szaggatott vonalakat távolítja el. Az UV módusok kiintegrálása után a visszamaradt IR módusok már tartalmazhatják a kevert állapotok járulékat is.

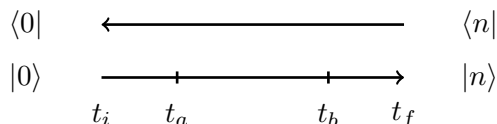
A CTP formalizmusban a bilokalitás alapvető elem, hogy az UV és IR módusok összefonódása kialakulhasson. A v bilokális csatoláshoz már faszinten is kapok egy nemtriviális evolúciót, ezt mutatja a (4.20) egyenletben szereplő bilokális környezeti propagátor. Az RG evolúció "felöltözteti" a propagátort, ezért abban a hurok járulékok is megjelennek. Ezekre adok példát a (4.4) és (4.6) ábrákon. A környezeti propagátor egy 2×2 elemű mátrix, melynek diagonális és nem-diagonális elemei különböző járulékokat

adnak az evolúcióhoz. A környezeti propagátor első diagonális eleme

$$\langle 0|T[\varphi_a^+ \varphi_b^+]|0\rangle \quad (4.21)$$

alakú, ami az STP formalizmusban is megtalálható. A gráfot a (4.3) ábrán szemléltetem. A t_a és t_b felel meg a + időtengelyen lévő két időpontnak. A t_b (vagy t_a) az STP formalizmusban nem kerülhet a másik időtengelyre, hiszen csak egy időtengely áll rendelkezésre. Tovább haladva az időtengelyen elérem $t_f \rightarrow \infty$ időpontot, utána a másik időtengelyen fejlődik a rendszer időben visszafelé. A (4.4) ábrán a propagátor diagonális eleméhez tartozó Feynman diagrammot szemléltetem. Az a és b pontok a ϕ^+ oldalon találhatóak. Az ábrán két rendszer és két környezet módus van a végállapotban. Ebben az elrendezésben a végállapoti felösszegzést mindig megtehetem.

A t_a és t_b időpontok közé be lehet illeszteni az egységoperátort, de abban csak lokális virtuális gerjesztések lehetnek, mivel azok véges élet-tartamúak. Az összefonódás megjelenhet az IR és UV módusok között, azonban csak véges időtartamig, amelynek nincs hatása az RG evolúcióra. A renormáláshoz olyan típusú összefonódás ad járulékot, ahol az IR és UV módus a valódi részecskék között valósul meg, azok viszont a $t_f \rightarrow \infty$ határesetben jelenhetnek meg. Erre mutatok példát a következő esetben.

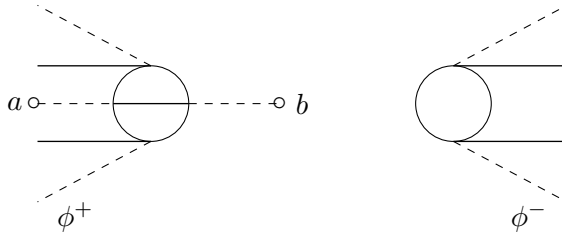


4.3. ábra. A propagátorban lévő $\langle 0|T[\varphi_a^+ \varphi_b^+]|0\rangle$ diagonális elemnek megfelelő zárt időtengelyes evolúciót bemutató gráf. A STP formalizmus esetén a t_a és t_b időpontok az ábrán látható módon egy időtengelyen helyezkednek el.

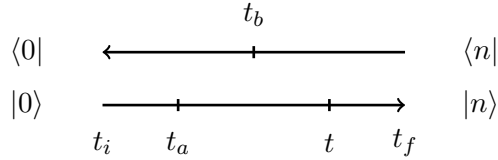
A nem diagonális elemekben a két térváltozó szétválasztható az egységoperátorral a

$$\sum_n \langle 0|\varphi_a|n\rangle \langle n|\varphi_b|0\rangle \quad (4.22)$$

alapján. A (4.5) ábrán ez látható. A t_a és t_b más-más időtengelyen fekszik. Itt különböző időtengelyek között valósul meg kölcsönhatás, azaz különböző

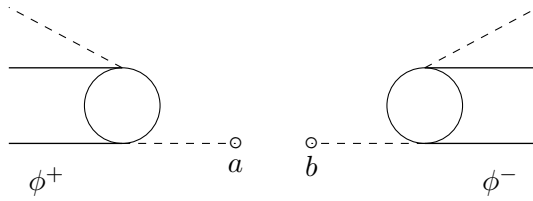


4.4. ábra. A zárt időtengelyes propagátor diagonális eleméhez tartozó egyik Feynman-gráf. Az ábrán az a és b pontok ugyanazon (ϕ^+) az oldalon találhatóak. Az ábrán két rendszer és két környezet módus található a végállapotban.



4.5. ábra. A zárt időtengelyes propagátorban lévő $\sum_n \langle 0|\varphi_a|n\rangle \langle n|\varphi_b|0\rangle$ alakú nemdiagonális elemei esetén a t_a és t_b más-más időtengelyen fekszik. A propagátor különböző időtengelyeken fekvő pontok közötti átmenti amplitúdót jelöl.

időtengelyeken fekvő pontok közötti átmenti amplitúdót jelöl a propagátor. Ez látható a (4.6) ábrán. A $|n\rangle$ végállapot valódi állapot. Időben haladva a végállapot felé, ott több különböző valódi részecskéhez tartozó gerjesztett állapot található. A (4.6) ábrán a végállapotban van környezeti gerjesztés. Megvalósul az összefonódás valódi UV és IR módusok között, amely stabil időben. Ez a járulék csak a CTP formalizmusban található meg. Az RG blokkosítás után, eliminálva a UV módust, a visszamaradt IR, rendszer módus kevert állapotban van. Ezek a járulékok újak az RG módszerben, eddig ezeket nem vették figyelembe.



4.6. ábra. A zárt időtengelyes propagátor nemdiagonális eleméhez tartozó egyik Feynman-gráf. Az ábrán az a és b a gráf különböző oldalain helyezkednek el. A végállapotban van környezeti gerjesztés megvalósul az összefonódás.

4.3. Összefoglalás

A funkcionális renormálási csoport módszert általánosítottam zárt időtengelyes formalizmusban. Levezettem a Wegner-Houghton egyenletet. Az éles levágás lehetővé tette a rendszer és környezet módusainak egyértelmű szétválasztását. A 3-dimenziós egykomponensű skalármodellt vizsgáltam. Azt kaptam, hogy modellek megmarad a szimmetrikus és a szimmetriasértett fázisa. Megmutattam, hogy a blokkosítás egy nemtriviális nyeregpontra ad a bilokális potenciál evolúciójához. A nemlokalitás megjelenik az evolúció során. Azt kaptam, hogy a bilokális potenciálhoz tartozó csatolások az összefonott állapotok járulékát is tartalmazzák. Ezen csatolások evolúcióját fa-szinten meghatároztam. Azt a renormálási csoport módszert, ami az összefonott állapotok járulékával is számol, kvantum renormálási csoport módszernek neveztem [P1].

5. fejezet

Bilokális potenciál evolúciója

5.1. Bevezetés

A hagyományos RG eljárásnál a blokkosítás során csak a tiszta állapotok járulékát tudjuk figyelembe venni. A CTP formalizmust használva úgy általánosítottam a módszert, hogy az figyelembe vegye a kevert állapotok járulékát is. Ezzel az IR és az UV módusok összefonódását sikerült megkapnom. Az UV és IR szabadsági fokok kölcsönhatása csak véges impulzusnál vett vertexek esetén valósul meg, amely szükségessé teszi egy bilokális potenciál bevezetését a hatásba. A QRG vizsgálat során a blokkosítási lépéskor generálódó nyeregponthoz tartozó járulék bilokális. A bilokális csatolások evolúciója elindul kezdeti feltétel nélkül, a lokális csatolások segítségével. Ez nem a CTP formalizmus következménye, STP esetén is jelen van. Egy bilokális potenciált tartalmazó hatás vizsgálata már euklideszi téridőben, STP-ben és hagyományos RG módszerrel tárgyalva sem triviális. Ennek vizsgálatát mutatom be a következőkben [P2].

5.2. Nemlokalitás

A kvantumtérelméletben a csupasz hatást lokálisnak szoktuk venni, ennek ellenére megjelennek az elméletben nemlokális tagok. Egy gaussi elméletben

a pályaintegrál elvégzése után például a generáló funkcionál alakja:

$$Z \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x,y} J_x D_\Lambda(x-y) J_y\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} \int_p J_{-p} D_\Lambda(p^2) J_p\right), \quad (5.1)$$

ahol D az elmélethez tartozó propagátort jelöli egy adott Λ levágásnál. Ez a tag nem lokális. A propagátor impulzustérben "lokális", azaz:

$$D_{p,p'} = \delta_{p,p'} D_p, \quad (5.2)$$

az impulzustérben diagonális mátrixszal reprezentálható. Az impulzus és a koordináta Fourier-transzformációval hozható kapcsolatba. Az impulzusnak egy derivált felel meg, ami szintén nem tekinthető lokálisnak, ugyanis a deriváltat két egymástól infinitezimálisan kicsiny távolságra lévő koordináta között vesszük. Az impulzus magasabb hatványai magasabb rendű deriváltaknak felelnek meg. A Wetterich egyenletben szereplő regulátort tartalmazó tag kvadratikus a térváltozóban, a regulátor maga viszont tetszőleges magas hatványú impulzust tartalmazhat. Ez világosan mutatja, hogy az elmélet nem lokális.

Hogyan lehet a nemlokalitást kezelni? Az egyik lehetséges mód, hogy feltesszük, hogy az impulzusfüggő tagok analtikusak p -ben és p^2/Λ^2 szerint sorfejthetők. Ezt nevezzük kvázilokalitásnak [48]. Amennyiben $\Lambda \rightarrow \infty$, akkor a hatás lokálissá válik. Ez minden további nélkül megtehető a renormálható elméletekben. Azonban, ahogy korábban említettem, a realiztikus elméletek nem renormálhatóak. Példaként véve a Standard Modellt, általában feltesszük, hogy a Planck skála fölött új fizika jelenhet meg. Ellenkező esetben a Standard Modell keretében minden részecskefizikai jelenség értelmezhető lenne. Ebből következik, hogy nem tudjuk a $\Lambda \rightarrow \infty$ határátmenetet képezni, a modell nemlokális marad. Hasonló okfejtéssel lehet gondolkodni a többi realiztikus modell esetében. A kvázilokális elméletek jól kezelhetők a gradiens kifejtéssel. A gradiens kifejtés pont azt a gyenge nemlokalitást tudja figyelembe venni, ami a kifejtésben szereplő deriváltakkal még lehetséges. Érdemes megjegyezni, hogy az előző fejezetben vett Minkowski téridőben tárgyalt nemlokalitást gradiens kifejtéssel nem lehet kiváltani, mert a valódi részecskék tetszőleges impulzusnál tömeghőz szingularitást adnak, ezért ott a kifejtés nem működik.

Az RG egyenletekben szintén megjelennek a nemlokális tagok. A Wetterich egyenletben a regulátort tartalmazó tag impulzusfüggése miatt nemlokálisnak tekinthető. A Polchinski egyenletben lévő UV regulátort tartalmazó

tag szintén nemlokális. Ezeknek a tagoknak az evolúcióját általában úgy veszik figyelembe, hogy a blokkosított hatást gradiens kifejtéssel adják meg. A nagy impulzusoktól való függést infinitezimális koordinátafüggéssel vehetjük figyelembe.

Nemlokális tag szerepel a WH egyenletben is [3]. Ezzel nem szoktunk számolni, mert feltesszük, hogy a nyeregpont triviális. A hatás gradiens kifejtésének LPA-n túli evolúcióját nem lehet követni éles levágás esetén. A WH egyenlet nyeregpontja fontos szerepet játszhat, ha az evolúció szingularitásba fut, megjelenik a spinodális instabilitás, és mi az azon túli fejlődésre vagyunk kíváncsiak [3].

Ebben a fejezetben megmutatom, hogy az UV módusok között van egy nemtriviális nyeregpont. Ezzel korábban nem számoltak a WH egyenlet használatakor. A nyeregpont véges impulzusnál jelenik meg, így nemlokális járuléka van. Emiatt a WH egyenletben eddig elhagyott nemlokális tag fontos szerephez jut. Az éles levágás miatt a nyeregponti járulék analitikusan számolható. A Polchinski egyenlet nemlokális tagja is eredményezhet nemlokális evolúciót, azonban ezekben a számolásokban a gradiens kifejtésben szereplő lokális csatolásokkal követjük az evolúciót. A nehézség, hogy az UV regulátor impulzusban elkent (nem éles) levágása miatt a nyeregponti térkonfiguráció nagyon nehezen számolható. A másik gyenge pontja a Polchinski egyenletnek, hogy nem egyértelmű az UV és IR módusok szétválasztása, ezért az összefont állapotok járulékát nem kaphatjuk meg.

A fejezetben azt vizsgálom euklideszi téridőben, hogy ha a potenciált kiegészítem egy nemlokális taggal, akkor az elkezd-e fejlődni. Ez teljesen eltérő gondolkodásmód a szokványos gradiens kifejtéssel tárgyalttól. Utóbbinál a cél a hatás lokalitásának megőrzése, míg a vizsgálatomban komolyan veszem a bilokális tag jelenlétét, ahhoz csatolást rendelék, és követem annak futását. A nemlokális evolúció tárgyalása nemcsak a WH egyenletben tehető meg, például a Wetterich egyenletnél is levezethetünk a nemlokális tagokra evolúciós egyenletet [49].

5.3. Bilokális hatás

Kvantumtérelméleti modellek esetén a hatás alakját szimmetriaelvek szorítják meg. A bilokális STP RG során a WH egyenletet használom. Az egyenletben LPA-t alkalmazok, így csak a potenciálra szükséges szimmet-

riefeltételeket kiróni, a kinetikus tag rögzítve van, abban nem szerepel további térfüggés. A vizsgált modellem a szokásos egykomponensű ϕ^4 modell, ahol a potenciál alakja már bevezetésre került a (4.1) egyenletben. A bilokális potenciál bevezetésének egyik motivációja a CTP-beli két időtengely összekötése, amihez két különböző, nem csupán infinitezimális távol lévő térpont kölcsönhatása szükséges. Továbbá az előző fejezetben megmutattam, hogy az RG blokkosítás bevezet nemlokalitást. A LPA-n túli gradiens kifejtés nem alkalmazható az éles levágás miatt. Megjegyzem, hogy ez a kérdés technikai. A szokásos gömbszimmetrikus leírás esetén két egymáshoz képest eltoltt gömbhéj metszete ad járulékot a hullámfüggvény renormáláshoz, ami nullmértékű. Ha Descartes koordináta rendszerben írom fel a járulékot, akkor eltoltt téglatesteket kapok, amelyek metszete már nem nullmértékű. Ez utóbbi tárgyalás nehézkes, mert az impulzusfüggést csak numerikusan tudom kezelni, de elvileg lehetséges a hullámfüggvény renormálás számolása.

A hatás nemlokalitását egy bilokális potenciál segítségével vezetem be:

$$S_2 = \int_{xy} V_{x-y}(\phi_x, \phi_y). \quad (5.3)$$

A V bilokális potenciál két, az x és az y téridőkoordinátától függ. Egy általános multilokális potenciál természetesen tetszőleges számú koordinátától függhet. A potenciál alakjában feltettem, hogy az a pontok távolságától függ, azaz a potenciál koordinátafüggése eltolási invariáns. Ez igaz a v -vel jelölt bilokális csatolásokra is. A bilokális potenciál Taylor sorfejtett alakja:

$$V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) = \sum_{mn \geq 1} \frac{V_{x-ymn}}{m!n!} \phi_x^m \phi_y^n. \quad (5.4)$$

A következő fejezetben a SG modellnél Fourier sorfejtést fogok alkalmazni. Ugyanazt a V szimbólumot használom a potenciálra, illetve a bilokális csatolásra, az indexük alapján lehet megkülönböztetni őket. Impulzustérbe áttérve az egy téridőponttól függő lokális csatolás átalakul nulla impulzusú, kizárólag k skálafüggő csatolássá. Bilokalitásból kiindulva az impulzustérbeli csatolások nem zérus, véges impulzusfüggést tartalmaznak, hiszen a pontok koordináttérbeli távolsága az impulzus reciprokával lesz arányos. A végtelenhez tartó impulzus a lokális limesznek felel meg. Ez problémát okozhat, hiszen a Λ -nál nagyobb impulzusokat eliminálok a WH egyenletben, emiatt úgy tűnhet, hogy az infinitezimális távolságok járulékai nem

jelennek meg az evolúcióban. Azonban a blokkosítás során vett impluzusbeli éles levágás a koordinátában 'elkent' függést eredményez. Ez jól követhető a Fourier-transzformációnál, ahol a lokalizált (Dirac-deltához közeli) impulzusfüggés koordinátában a teljes koordinátatengelyen kiterjedő függést ad, pl. a Dirac-delta esetén konstans függvényt. Másrészt a határozatlansági elv miatt is láthatjuk, hogy a lokalizált, éles impulzus széles koordinátafüggést ad. Ennek következtében a kis távolságokból származó járulék az alacsonyabb impulzusoknál (pl. a k skálán) is tudja éreztetni a hatását.

5.4. Nyeregponti evolúció

Hagyományos, STP RG vizsgálat során is új helyzetet teremt a bilokalitás használata. A csatolások az eddigi k skálafüggés mellett egy q impulzusfüggést is tartalmaznak. Ebben a fejezetben a legalacsonyabb rendben, fa-szinten vizsgálom, hogy a 3d ϕ^4 modellben milyen, eddig nem észlelt változásokat kelt egy nem lokális hatás bevezetése. A későbbiekben a nyeregpontra kapott eredményeket a SG modell vizsgálatánál is használni fogom. A ϕ^4 modell esetén az euklideszi hatás alakja a következő:

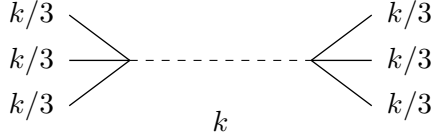
$$S = -\frac{1}{2} \int_x \phi_x \square \phi_x + \int_x \left(\frac{m^2}{2} \phi_x^2 + \frac{g}{4!} \phi_x^4 \right), \quad (5.5)$$

ahol a térváltozót a szokásos módon felbontjuk $\phi \rightarrow \phi + \varphi$ alakban, ahol egy rendszerhez és egy környezethez tartozó térváltozó összege szerepel.

Az inverz propagátor $-\square + m^2 = D_0^{-1}$ összefüggését figyelembe véve a mozgásegyenlet

$$D_0^{-1}(\phi_p + \varphi_k) = -\frac{1}{6}g(\phi_p^3 + 3\phi_p^2\varphi_k + 3\phi_p\varphi_k^2 + \varphi_k^3) \quad (5.6)$$

alakúnak adódik. A φ_k -hoz tartozó UV módusok impulzusa a $[k - \Delta k, k]$ eliminálandó héjba esik, míg a ϕ_k IR módusok a $[0, k - \Delta k]$ tartománybeli impulzussal rendelkeznek. Tekintsük az impulzusok összegét az egyes tagokban. A bal oldalon az impulzus vagy k vagy p . Ez utóbbihoz tartozó tagot elhagyom, mert a jobb oldalon nincs olyan tag, amely összipulzusa p lenne. Az egyenlet jobb oldalán lévő tagok közül az egyes tagok impulzusa a (5.6) sorrendjében $3p$, $2p + k$, $p + 2k$, $3k$. Ha a zéró módust kizárjuk (azaz nincs ϕ_0), akkor az első tag kivételével a további tagokban megjelenő



5.1. ábra. A bilokalitáshoz járulékot adó diagrammok egyik legegyszerűbb formája. A környezeti propagátor (szaggatott vonal) k impulzust hordoz, a vertexbe csatlakozó rendszer módusokhoz lábak impulzusát egyformának választottam ($k/3$).

impulzusok összege meghaladja a k értékét. Mivel a bal oldalon az impulzus k , ezért a jobb oldalon is maximum k impulzusú tag maradhat. Az első tagban ez kielégíthető ha $k = 3p$. Az egyszerűség kedvéért felteszem, hogy az egyes IR módusok ugyanakkora impulzust hordoznak, azaz $p = k/3$. Ekkor az (5.6) egyenlet alakja:

$$\varphi_k = -\frac{1}{6}gD_0\phi_{k/3}^3. \quad (5.7)$$

Ezzel φ_k UV módusra találtam egy nemtriviális nyeregponot, amelyeket kifejeztem az IR módusok segítségével. A nyeregponi járulékot adó Feynman diagramm a (5.1) ábrán látható. A k impulzusú UV módus és 3 IR módus tartozik egy vertexhez. A két vertex a szaggatott vonallal jelölt környezeti propagátorral együtt egy bilokális hat lábú vertexet alkot. Ebből az következik, hogy a nemtriviális nyeregpon hatodrendű lokális vertexekhez ad járulékot. Természetesen magasabb rendű járulékok is elképzelhetőek a (5.1) ábra alapján több külső lábbal, ha azok összimpulzusa továbbra is k nagyságú.

A nemtriviális nyeregponi evolúció fa-szinten járulékot ad az RG evolúcióhoz. Egy blokkosítási lépés során a hatás megváltozása

$$S_{k-\Delta k}[\phi] = S_k[\phi + \varphi] \quad (5.8)$$

alakú, amiből:

$$\Delta S \approx -\frac{1}{2}\varphi S^{(2)}\varphi. \quad (5.9)$$

Ez egy nem lokális (bilokális) járulékok, melyet, ahogy a 5.2 fejezetben írtam, a hagyományos RG vizsgálat során, ahol rendszerint lokális evolúciót

követünk, rendszerint elvetünk. A bilokális nyeregpontri járulék már fa-szinten, vezető rendben, hurok korrekciók nélkül is megjelenik. Ahhoz, hogy ennek a evolúcióját követni tudjuk, nem elegendő a lokális hatás. Bevezetem a bilokális hatást (5.3) alakban. A hatás a kinetikus, a lokális és a bilokális tag összegeként $S = S_0 + S_1 + S_2$ írható fel. Az S_2 -ben feltett eltolási szimmetria miatt a Fourier-transzformációval kapott alak csak egy impulzustól függ:

$$V_q(\phi_1, \phi_2) = \int_x e^{iq(x-y)} V_{x-y}(\phi_1, \phi_2). \quad (5.10)$$

A V bilokális csatolásban az egyetlen betűből álló index impulzust jelöl, a különbség pedig koordinátát. A bilokalitás következtében a folytonos q impulzustól függenek a bilokális csatolások. A q impulzus miatt kontinuum végtelen darab bilokális csatolásom van.

A fejezet elején bemutatott gondolatmenet, amely segítségével analitikusan megkaptam nyeregpontot, könnyen általánosítható bilokális potenciál jelenlétében is, melynek tetszőleges formája esetén a mozgásegyenlet

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = D_0^{-1} \varphi + U'(\phi_x + \varphi_x) + 2 \int_y \partial_1 V_{x-y}(\phi_x + \varphi_x, \phi_y + \varphi_y) = 0 \quad (5.11)$$

alakú. Fa-szintű közelítés estén elhanyagoljuk a nyeregpont körüli fluktuációkat. A nyeregpontri φ térkonfiguráció Fourier-transzformáltja

$$\varphi_x = \int_{k-\Delta k < |q| < k} \varphi_q e^{-iqx} \quad (5.12)$$

alakú. Az impulzustérbeli integrált azokra az impulzusokra kell elvégezni, melyek a blokkosítási lépés során kiintegrált gömbhéjban vannak. A φ^n -nel arányos tagok járulékának általános alakja:

$$\begin{aligned} \int_x f_x \varphi_x^n &= \int_x f_x \prod_{j=1}^n \int_{k-\Delta k < |q_j| < k} \varphi_{q_j} e^{-iq_j x} \\ &= \int_{xq} f_q e^{-iqx} \prod_{j=1}^n \int_{k-\Delta k < |q_j| < k} \varphi_{q_j} e^{-iq_j x} \\ &= \int_q f_q \prod_{j=1}^n \int_{k-\Delta k < |q_j| < k} \varphi_{q_j} \delta_{q, -\sum_j q_j} = \mathcal{O}(\Delta k^n). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ez azt mutatja, hogy a Δk -val arányos tag φ -ben, a magasabb rendű tagok elhagyhatók. A (5.11) egyenlet linearizálás után a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_y [D_{0x-y}^{-1} + \delta_{xy} U''(\phi) + 2\delta_{xy} \int_z \partial_1^2 V_{x-z}(\phi_x, \phi_z) \\
&\quad + 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y)] \varphi_y \\
&\quad + U'(\phi_x) + 2 \int_y \partial_1 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

alakot ölti. Bevezetem a

$$D_{xy}^{-1} = D_{x-y}^{-1} + \delta_{xy} U''(\phi) + 2\delta_{xy} \int_z \partial_1^2 V_{x-z}(\phi_x, \phi_z) + 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) \tag{5.15}$$

teljes propagátort, illetve a

$$L_x = U'(\phi_x) + 2 \int_y \partial_1 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) \tag{5.16}$$

jelölést, mellyel a nemtriviális nyeregponrt egyszerű formában írható:

$$\varphi = -DL. \tag{5.17}$$

Ezt visszahelyettesítve az (5.9) egyenletbe azt kapom, hogy:

$$\Delta S_k = -\frac{\Delta k}{2} \int_{xy} L_x D_{x-y}^{(k)} L_y, \tag{5.18}$$

amely a bilokális potenciálhoz megváltozásához a következő járulékot adja:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta V_{x-y}(\phi_x, \phi_y)}{\Delta k} &= \frac{1}{2} L_x D_{x-y}^{(k)} L_y \\
&= \frac{1}{2} \left[U'(\phi_x) D_{x-y}^{(k)} U'(\phi_y) \right. \\
&\quad + 4 \int_z \partial_1 V_{z-x}(0, \phi_x) D_{z-y}^{(k)} U'(\phi_y) \\
&\quad \left. + 4 \int_{zz'} \partial_1 V_{z-x}(\phi_x) D_{0z-z'}^{(k)} \partial_1 V_{z'-y}(0, \phi_y) \right].
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Használva az impulzustérre való áttérés

$$\int dz dx w_{z-x}(\phi_x) D_z = \int_q [w_{-q}(\phi)]_{-q} D_q \quad (5.20)$$

összefüggését, a hatás változása

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_k}{\Delta k} &= \int_q \left[2[w_{-q}(\phi)]_{-q} D_q^{(k)} [w_q(\phi)]_q \right. \\ &\quad \left. + 2[w_{-q}(\phi)]_{-q} D_q^{(k)} [U'(\phi)]_q + \frac{1}{2} [U'(\phi)]_{-q} D_q^{(k)} [U'(\phi)]_q \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$

alakú, amelyből

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta V_q^{tree}(\phi_1, \phi_2)}{\Delta k} \\ &= 2D_q^{(k)} \left[\partial_2 V_q(\chi_1, 0) + \frac{1}{2} U'(\chi_1) \right] \left[\partial_1 V_q(0, \chi_2) + \frac{1}{2} U'(\chi_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Bevezettem a

$$D_q^{(k)} = \frac{w_{q,k}}{\omega_k^2} \quad (5.23)$$

impulzusfüggő környezeti propagátort, ahol az $\omega_k^2 = k^2 + g_2 + 2V_{k11}$ és bevezettem egy ablakfüggvényt $w_{q,k} = \theta(q - k + \Delta k) - \theta(q - k)$ alakban. A bilokális csatolások fa-szintű evolúciójára a következő egyenleteket kaptam:

$$\begin{aligned} \Delta V_{q11} &= 0, \\ \Delta V_{q31} &= 0, \\ \Delta V_{q22} &= 0, \\ \Delta V_{q33} &= \frac{2w_{q,k}}{\omega_k^2} \left(V_{q31} + \frac{1}{2} g_4 \right)^2, \\ \Delta V_{q42} &= 0, \\ \Delta V_{q51} &= 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

A V_{q11} béta függvénye azért nulla, mert a vertexbe futó UV és IR módus impulzusa meg kellene egyezzen. Ez éles levágás esetén nem lehetséges, azonban simított levágás esetén a béta függvény nem nulla.

5.5. Fluktuációk

Szétválasztom a térváltozót a $\phi_x = \Phi + \chi_x$ módon egy Φ homogén és egy χ_x inhomogén térváltozó összegére. Ennek az a szerepe, hogy szét tudjuk választani a lokális és a bilokális potenciál evolúcióját. A lokális evolúció a χ_x^0 , fluktuációmentes tagból származtatható, a bilokális egyenlet pedig a χ_x^2 -es tagból. Megjegyzem, hogy a Wetterich egyenletnél a hullámfüggvény renormálás evolúciós egyenleteinek levezetésénél ugyanígy járunk el, és az evolúciót ott is a χ_x^2 -es tagból kapjuk meg.

A hatás a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
 S[\Phi + \chi] &= \frac{1}{2} \int_x \chi_x D_B^{-1} \chi_x + \int_x \tilde{U}(\Phi + \chi_x) + \int_{xy} \tilde{V}_{x-y}(\Phi + \chi_x, \Phi + \chi_y) \\
 &= L^d W(\Phi) + \frac{1}{2} \int_x \chi_x D_B^{-1} \chi_x + \int_x U(\chi_x) + \int_{xy} V_{x-y}(\chi_x, \chi_y), \\
 W(\Phi) &= \tilde{U}(\Phi) + \tilde{V}_0(\Phi, \Phi).
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

A WH egyenlet levezetéséhez szükségem van a sajátenergiára, aminek alakja:

$$\begin{aligned}
 S_{x_1 \dots x_n}^{(n)}[\chi] &= \frac{\delta^n S}{\delta \phi_{x_1} \dots \delta \phi_{x_n}} \\
 S_x^{(1)}[\chi] &= (D_B^{-1} \chi)_x + U'(\chi_x) + \int_y \partial_1 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
 &\quad + \int_y \partial_2 V_{y-x}(\chi_y, \chi_x) \\
 S_{xy}^{(2)}[\chi] &= D_{Bx-y}^{-1} + \delta_{xy} U''(\chi_x) + 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
 &\quad + \delta_{xy} \int_z [\partial_1^2 V_{x-z}(\chi_x, \chi_z) + \partial_2^2 V_{z-x}(\chi_z, \chi_x)] \\
 &= D_{xy}^{-1} - \Sigma_{xy}[\chi] \\
 \Sigma_{xy}[\chi] &= -\delta_{xy} U''(\chi_x) - 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
 &\quad - \delta_{xy} \int_z [\partial_1^2 V_{x-z}(\chi_x, \chi_z) + \partial_2^2 V_{z-x}(\chi_z, \chi_x)] \\
 &\quad + \delta_{xy} U''(0) + 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(0, 0) \\
 &\quad + \delta_{xy} \int_z [\partial_1^2 V_{x-z}(0, 0) + \partial_2^2 V_{z-x}(0, 0)] \\
 &= \delta_{xy} (\Sigma_x^{dl} + \Sigma_x^{dbl}) + \Sigma_{xy}^{12l} + \Sigma_{xy}^{12bl}.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Bevezetem a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\Sigma_x^{dl} &= -U''(\chi_x) + U''(0) \\
\Sigma_x^{dbl} &= -\int_z [\partial_1^2 V_{x-z}(\chi_x, \chi_z) + \partial_2^2 V_{z-x}(\chi_z, \chi_x)] + \partial_1^2 V_0(0, 0) + \partial_2^2 V_0(0, 0) \\
\Sigma_{xy}^{12l} &= -2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(\chi_x, 0) - 2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(0, \chi_y) + 4\partial_1\partial_2 V_{x-y}(0, 0) \\
\Sigma_{xy}^{12bl} &= -2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) + 2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(0, \chi_y) + 2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(\chi_x, 0) \\
&\quad - 2\partial_1\partial_2 V_{x-y}(0, 0). \tag{5.27}
\end{aligned}$$

A WH egyenletbeli trace-képzést másodrendig megtartva vezetem le a bilokális tagra vonatkozó evolúciót:

$$\begin{aligned}
\dot{S}[\Phi + \chi] &= L^d \dot{W}(\Phi) + \frac{1}{2} \int_x \chi_x \dot{D}_B^{-1} \chi_x + \int_x \dot{U}(\chi_x) + \int_{xy} \dot{V}_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
&= -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln [D^{-1} - \Sigma] \\
&= -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln D^{-1} + \frac{\hbar k}{2\Delta k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} (D\Sigma)^n, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

ahol a sajátenergia:

$$\Sigma_{xy} = \delta_{xy} (\Sigma_x^{dl} + \Sigma_x^{dbl}) + \Sigma_{xy}^{12l} + \Sigma_{xy}^{12bl} = \delta_{xy} \Sigma_x^d + \Sigma_{xy}^{12}. \tag{5.29}$$

A WH egyenlet χ -ben másodrendig vett járuléka:

$$\begin{aligned}
\dot{S}^{(0)} &= -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln D^{-1} \\
\dot{S}^{(1)} &= \frac{\hbar k}{2} \left(\int_x D_{xx}^{(k)} \Sigma_x^d + \int_{xy} D_{yx}^{(k)} \Sigma_{xy}^{12} \right) \\
\dot{S}^{(2)} &= \frac{\hbar k}{4} \int_{abcd} D_{ab}^{(k)} (\delta_{bc} \Sigma_b^d + \Sigma_{bc}^{12}) D_{cd}^{(k)} (\delta_{da} \Sigma_a^d + \Sigma_{da}^{12}) \\
&= \frac{\hbar k}{4} \left(\int_{ab} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^d D_{ba}^{(k)} \Sigma_a^d + \int_{abcd} D_{ab}^{(k)} \Sigma_{bc}^{12} D_{cd}^{(k)} \Sigma_{da}^{12} \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_{abc} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^d D_{bc}^{(k)} \Sigma_{ca}^{12} \right). \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Összesítve:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \hbar k \left[-\frac{1}{2\Delta k} \text{Tr} \ln D^{-1} + \frac{1}{2} \int_x D_{xx}^{(k)} \Sigma_x^d + \frac{1}{2} \int_{xy} D_{yx}^{(k)} \Sigma_{xy}^{12} \right. \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{ab} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^d D_{ba}^{(k)} \Sigma_a^d + \frac{1}{4} \int_{abcd} D_{ab}^{(k)} \Sigma_{bc}^{12} D_{cd}^{(k)} \Sigma_{da}^{12} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{abc} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^d D_{bc}^{(k)} \Sigma_{ca}^{12} \right]. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Az eredeti hatásban szereplő tagok evolúcióját őrizve azt kapom, hogy:

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= \hbar k \left[-\frac{1}{2\Delta k} \text{Tr} \ln D^{-1} + \frac{1}{2} \int_a D_{aa}^{(k)} (\Sigma^{dl} + \Sigma_a^{dbl}) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{ab} D_{ba}^{(k)} (\Sigma_{ab}^{12l} + \Sigma_{ab}^{12bl}) + \frac{1}{4} \int_{ab} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^{dl} D_{ba}^{(k)} \Sigma_a^{dl} \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_{abcd} D_{ab}^{(k)} \Sigma_{bc}^{12l} D_{cd}^{(k)} \Sigma_{da}^{12l} + \frac{1}{2} \int_{abc} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^{dl} D_{bc}^{(k)} \Sigma_{ca}^{12l} \right]. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

5.5.1. Bilokális evolúció

A bilokális potenciál evolúciós egyenlete:

$$\begin{aligned}
&\int_{xy} \dot{V}_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
&= \hbar k \left[\frac{1}{2} \int_a D_{aa}^{(k)} \Sigma_a^{dbl} + \frac{1}{2} \int_{ab} D_{ba}^{(k)} \Sigma_{ab}^{12bl} + \frac{1}{4} \int_{ab} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^{dl} D_{ba}^{(k)} \Sigma_a^{dl} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_{abcd} D_{ab}^{(k)} \Sigma_{bc}^{12l} D_{cd}^{(k)} \Sigma_{da}^{12l} + \frac{1}{2} \int_{abc} D_{ab}^{(k)} \Sigma_b^{dl} D_{bc}^{(k)} \Sigma_{ca}^{12l} \right], \tag{5.33}
\end{aligned}$$

amelyből a csatolásokra azt kapom, hogy

$$\begin{aligned}
& \dot{V}_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \\
&= \hbar k \left\{ -\frac{1}{2} D_{00}^{(k)} [\Delta \partial_1^2 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) + \Delta \partial_2^2 V_{x-y}(\chi_x, \chi_y)] \right. \\
&\quad - D_{yx}^{(k)} (\Delta \partial_1 \partial_2 V)_{xy}^{bl}(\chi_x, \chi_y) + \frac{1}{4} D_{xy}^{(k)} D_{yx}^{(k)} \Delta U''(\chi_x) \Delta U''(\chi_y) \\
&\quad + 2 \int_{ac} D_{ax}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{xc}(\chi_x, 0) D_{cy}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{ya}(\chi_y, 0) \\
&\quad + 2 \int_{cd} D_{yx}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{xc}(\chi_x, 0) D_{cd}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{yd}(\chi_y, 0) \\
&\quad + \int_a D_{ax}^{(k)} \Delta U''(\chi_x) D_{xy}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{ya}(\chi_y, 0) \\
&\quad \left. + \int_a D_{xy}^{(k)} \Delta U''(\chi_y) D_{ya}^{(k)} \Delta \partial_1 \partial_2 V_{xa}(\chi_x, 0) \right\}. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

A két, egy UV és egy IR módushoz tartozó lábat tartalmazó vertexet kizárom a számolásból, ezért bevezetem a

$$\begin{aligned}
\Delta U''(\chi) &= U''(\Phi + \chi) - U''(\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{n+2}}{n!} \chi^n - g_2 \\
\Delta \partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\chi_1, \chi_2) &= \partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\Phi + \chi_1, \Phi + \chi_2) - \partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\Phi, \Phi) \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{V_{x-ym+1n+1}}{m!n!} \chi_1^m \chi_2^n - V_{x-y11} \tag{5.35}
\end{aligned}$$

szimbólumokat. Ezek segítségével a koordinátafüggő bilokális csatolások evolúciója levezethető. Bevezetve a $\int_q \dot{V}_{qmn} e^{-iq(x-y)}$ impulzusfüggő bilokális

csatolásokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{qmn} &= \hbar k \left\{ -\frac{1}{2}(V_{qm+2n} + V_{qmn+2}) \int_p D_p^{(k)} - \int_p D_p^{(k)} V_{p-qm+1n+1} \right. \\
&+ \frac{1}{4} g_{m+2} g_{n+2} \int_p D_p^{(k)} D_{p-q}^{(k)} + 2 \int_p D_p^{(k)} D_{p-q}^{(k)} V_{p-qm+11} V_{pn+11} \\
&+ 2 \int_p D_p^{(k)} D_{p-q}^{(k)} V_{p-qm+11} V_{p-qn+11} \\
&+ g_{m+2} \int_p D_p^{(k)} D_{p-q}^{(k)} V_{pn+11} + g_{n+2} \int_p D_p^{(k)} D_{p-q}^{(k)} V_{pm+11} \left. \right\} \\
&= \hbar k \left[-\frac{1}{2}(V_{qm+2n} + V_{qmn+2}) \int_p D_p^{(k)} - \int_p D_p^{(k)} V_{p-qm+1n+1} \right]. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlőségnél kihasználtam, hogy két különböző impulzushoz tartozó környezeti propagátor integrálási mértéke Δk -val arányos, ezért ezek a tagok elhagyhatók. A nulla módushoz tartozó környezeti propagátor:

$$D_{00}^{(k)} = \int_p D_p^{(k)} = \int_p \frac{\delta(|p| - k)}{p^2 + m^2 + K_p} = 2\alpha_d \frac{k^{d-1}}{\omega_k^2}. \tag{5.37}$$

Használok továbbá a szögintegrálokra vonatkozó

$$\Omega_d = \Omega_{d-1} \int_{-1}^1 d \cos \theta (\sin \theta)^{d-3} \tag{5.38}$$

azonosságot. Egy propagátor és egy bilokális csatolás impulzusintegrálja:

$$\begin{aligned}
\int_p D_p^{(k)} V_{p-q} &= \int_p \frac{\delta(|p| - k)}{\omega_p^2} V_{p-q} = \frac{k^{d-1}}{\omega_k^2} \int d^{d-1} \nu V_{k\nu-q} \\
&= -\frac{k^{d-2} \Omega_{d-1}}{(2\pi)^d \omega_k^2 q} \int_{|k-q|}^{k+q} dp p (1 - c^2)^{(d-3)/2} V_p, \tag{5.39}
\end{aligned}$$

ahol

$$c = \frac{p^2 - k^2 - q^2}{2kq}, \quad p = \sqrt{q^2 - 2kqc + k^2}. \tag{5.40}$$

3-dimenzióban:

$$\int_p D_p^{(k)} V_{p-q} = -\frac{k\Omega_2}{(2\pi)^3 \omega_k^2 q} \int_{|k-q|}^{k+q} dp p V_p. \quad (5.41)$$

A tetszőleges impulzusra és nulla módusra kapott evolúciós egyenletek végleges alakja $d = 3$ esetén:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{qmn} &= \hbar \frac{k^3}{4\pi^2 \omega_k^2} \left[\frac{1}{kq} \int_{|k-q|}^{k+q} dp p V_{pm+1n+1} - V_{qm+2n} - V_{qmn+2} \right] \\ \dot{V}_{0mn} &= \hbar \frac{k^3}{4\pi^2 \omega_k^2} (2V_{km+1n+1} - V_{qm+2n} - V_{qmn+2}). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ehhez természetesen hozzájárul a fa-szinten kapott járulék a (5.24) egyenletben. Ha a lokális potenciál csak másod-, negyed-, illetve hatodrendű tagot tartalmaz, akkor a fluktuációkból származó béta függvények sok esetben nullák, pl.:

$$\dot{V}_{q31} = \dot{V}_{q33} = \dot{V}_{q51} = \dot{V}_{q42} = 0. \quad (5.43)$$

5.5.2. A lokális evolúció

A nulla módusú bilokális csatolás evolúciója megjelenik a lokális csatolások evolúciójában. A WH egyenlet χ^0 rendben:

$$\dot{W} = -\frac{\hbar k}{2} \int_q \ln D_q^{-1} = -k^d \alpha_d \hbar \ln[k^2 + m^2 + K_k] = G. \quad (5.44)$$

A kapott béta függvények:

$$\begin{aligned} \dot{U}(\Phi) + \dot{V}_0(\Phi, \Phi) &= G \\ \dot{g}_{2n} &= \partial_{2n} G_{\Phi=0} - \sum_{n_1+n_2=2n} \frac{(2n)!}{n_1!n_2!} \dot{v}_{0n_1n_2} \\ \dot{g}_2 &= \partial_2 G_{\Phi=0} - 2\dot{v}_{011} \\ \dot{g}_4 &= \partial_4 G_{\Phi=0} - 6\dot{v}_{022} - 8\dot{v}_{031} \\ \dot{g}_6 &= \partial_6 G_{\Phi=0} - 20\dot{v}_{033} - 30\dot{v}_{042} - 12\dot{v}_{051}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

5.5.3. Evolúciós egyenletek három dimenzióban

Összegyűjtöm a 3d modellhez tartozó béta függvényeket. A (4.1) lokális potenciált $\mathcal{O}(\phi^6)$ rendben veszem figyelembe.

Az $m = n = 3$ komponens esetén az evolúciós egyenlet alakja:

$$\Delta_k V_{q33} = 2D_q^{(k-\Delta k, k)} \left(V_{q31} + \frac{1}{2}g_4 \right)^2, \quad (5.46)$$

ami csak fa-szintű elemeket tartalmaz és véges differenciálegyenlet formáját ölti. A bilokális csatolások béta függvényeinek fluktuációkból származó járuléka:

$$\dot{V}_{qmn} = \hbar \frac{k^3}{4\pi^2 \omega_k^2} \left[\frac{1}{kq} \int_{|k-q|}^{k+q} dpp V_{pm+1n+1} - V_{qm+2n} - V_{qmn+2} \right]. \quad (5.47)$$

A (5.44) evolúciós egyenlet összekapcsolja a lokális és a bilokális csatolások evolúcióját. A lokális csatolások evolúciós egyenlete:

$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= -\frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \frac{g_4}{\omega_k^2}, \\ \dot{g}_4 &= \frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \left(3 \frac{g_4^2}{\omega_k^4} - \frac{g_6}{\omega_k^2} \right) - 6\dot{V}_{022}, \\ \dot{g}_6 &= \frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \left(\frac{15g_4g_6}{\omega_k^4} - \frac{30g_4^3}{\omega_k^6} \right), \end{aligned} \quad (5.48)$$

ahol $\omega_q^2 = q^2 + g_2 + 2V_{q11}$.

5.6. Fázisdiagram

Ebben az alfejezetben bemutatom a 3-dimenziós ϕ^4 modell fázisdiagramját és a trajektóriákat. Az ismertetést a lokális esettel kezdem, majd felvázolom a bilokális eset fázisszerkezetét.

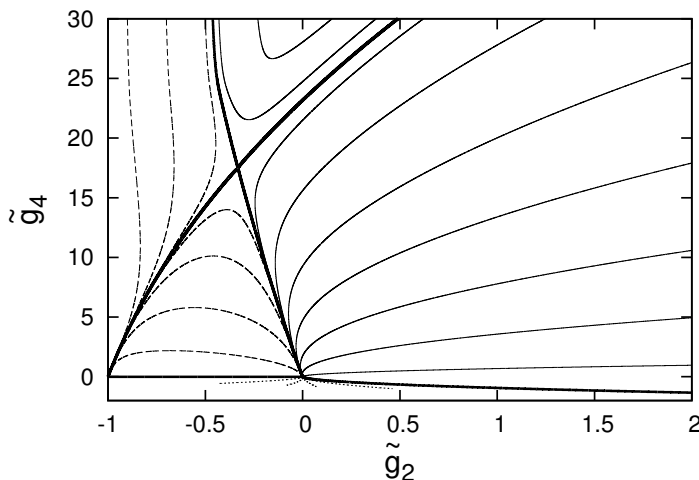
5.6.1. Lokális fázisszerkezet

Először áttekintem a lokális potenciálhoz tartozó evolúcióból kapott eredményeket ϕ^6 rendig.

A lokális modellnek két fixpontja van, egy triviális gaussi fixpont (GFP) $\tilde{g}_{G2}^* = \tilde{g}_{G4}^* = \tilde{g}_{G6}^* = 0$ és egy Wilson-Fisher (WF) fixpontja:

$$\tilde{g}_{WF2}^* = -\frac{1}{3}, \quad \tilde{g}_{WF4}^* = \frac{16 \pi^2}{9 \hbar}, \quad \tilde{g}_{WF6}^* = \frac{256}{27} \left(\frac{\pi^2}{\hbar} \right)^2. \quad (5.49)$$

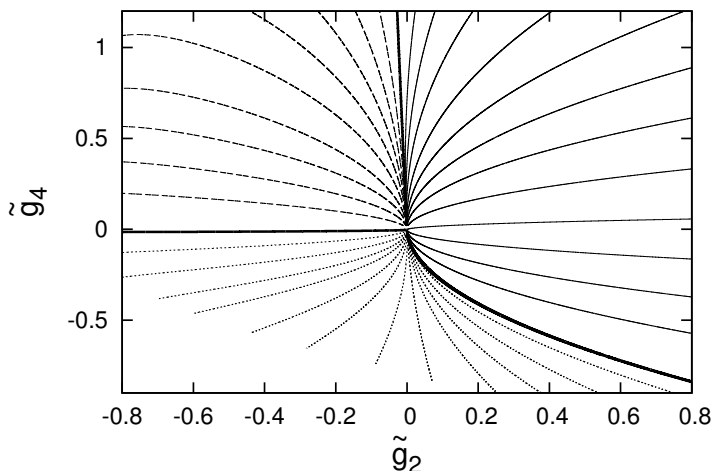
A fixpontokhoz tartozó exponensek $\nu_G = \{-2; -1, 0\}$ és $\nu_{WF} = \{19, 34; -1.71; 1, 36\}$. A (5.2) ábrán látható fázisszerkezeten három típusú



5.2. ábra. A $3d \phi^4$ modell fázisszerkezete lokális potenciál esetén. A folytonos vonal jelöli a szimmetrikus fázist, a szaggatott vonalak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak. Az instabilitáshoz vezető trajektóriákat a pontozott vonalak jelölik. Az ábrán jelölt vastag vonal a szeparátrix.

görbe látható. A folytonos vonalak alkotják a szimmetrikus, a szaggatott vonalak pedig a szimmetriasértett fázist. A két fázis között másodrendű fázisátalakulást találok. A pontozott vonalak az instabilitási vonalak, amelyeknél a g_6 csatolás negatívvá válik. Megjegyzem, hogy amikor a WF fixpontot keresnek a szakirodalomban, akkor a stabilitási kérdést nem veszik komolyan. A Taylor sorfejtés magasabb rendjeiben ugyan konvergáló fixpontot találnak, de gyakran negatív a legmagasabb fokú csatolás előjele. Adott közelítésben ez hibás. Ha azonban csak a konvergenciára koncentrálnak, akkor elfogadható, és nem zárja ki a fixpont létezését az instabilitás.

Továbbá a sorfejtés nélkül kapott egyenletek is alátámasztják a fixpont létezését. A WF fixpont elhagyása után a trajektóriák a szimmetriasértett fázishoz tartozó $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_4) = (-1, 0)$ pontba, vagy a szimmetrikus fázishoz tartozó $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_4) = (\infty, \infty)$ pontba tartanak. A (5.3) ábrán látható a fázisszerkezet a GFP közelében. A GFP-ből kiinduló folytonos vastag vonal szeparálja a fázisokat. A negatív \tilde{g}_4 tartományban található szeparátrix a stabilitási határ. A \tilde{g}_4 lehet negatív, amíg $\tilde{g}_6 > 0$.



5.3. ábra. A lokális csatolások által adott fázisszerkezet a gaussi fixpont közelében. A folytonos vonal jelöli a szimmetrikus fázist, a szaggatott vonalak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak. A instabilitáshoz vezető trajektóriákat a pontozott vonalak jelölik. Az ábrán jelölt vastag vonal a szeparátrix.

5.6.2. Bilokális fázisszerkezet

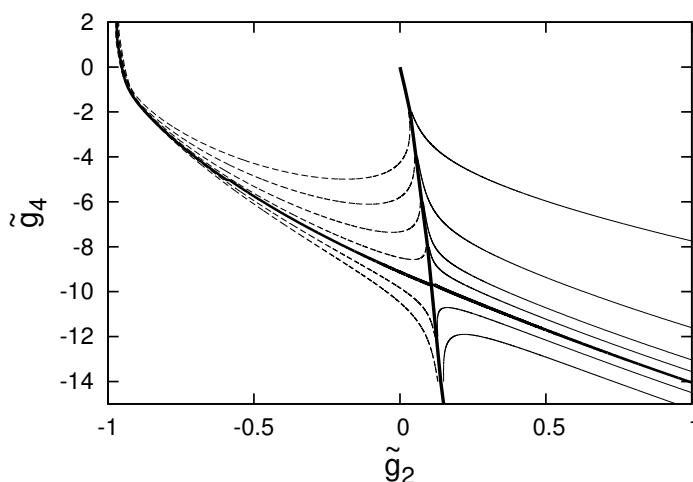
Bilokális közelítésben a fixpontok száma megmarad. A triviális GFP $\tilde{g}_{G2}^* = \tilde{g}_{G4}^* = \tilde{g}_{G6}^* = 0$ -ban van, illetve egy WF fixpontot is találunk

$$\tilde{g}_2^* = \frac{1}{9}, \quad \tilde{g}_4^* = -\frac{80}{81} \frac{\pi^2}{\hbar}, \quad \tilde{g}_6^* = \frac{1280}{729} \left(\frac{\pi^2}{\hbar} \right)^2, \quad \tilde{v}_{022} = \frac{400}{41^2} \frac{\pi^2}{\hbar^2} \quad (5.50)$$

értékeknél, $\nu = \{-3, 63; -2, 08; 0, 71\}$ exponenssel. Ebben a számolásban elhagytam a bilokális csatolások fluktuációjából származó tagokat, azokkal

a fixpont csak numerikusan határozható meg. A nemtriviális fixpontnál két releváns operátorunk van a lokális közelítésben szereplő eggyel szemben. Ez nagy nehézséget okozott a fázisdiagram feltérképezésénél, mert olyan helyekről kellett indítani a trajektóriákat a fázistérben, amelyek nagyon közel helyezkedtek el a szeparátrixhoz, azok helye viszont nem ismert.

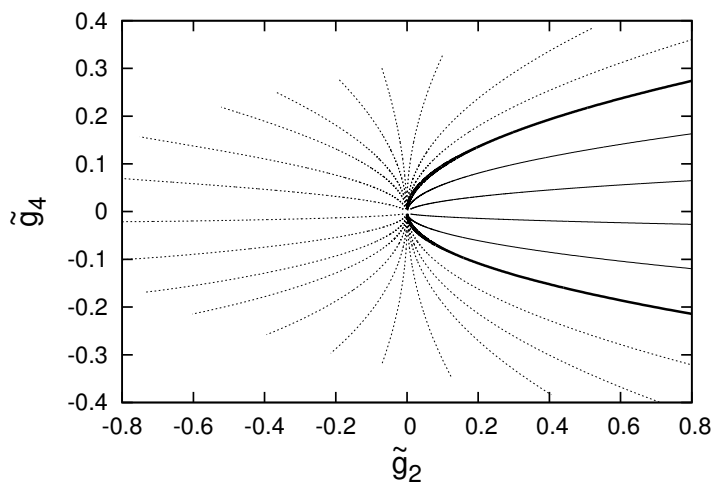
Az (5.4) ábrán a fázisdiagramon kétféle vonal található, melyek lokális esethez hasonlóan jelzik a szimmetrikus (folytonos vonal), illetve a szimmetriasértett (szaggatott vonal) fázishoz tartozó trajektóriákat. Az instabilitást jelző vonalakat nem ábrázoltam. A WF fixpont egy másik



5.4. ábra. A $3d \phi^4$ modell fázisszerkezete bilokális közelítésben. A folytonos vonal jelöli a szimmetrikus fázist, a szaggatott vonalak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak.

síknegyedbe kerül. A 5.7.2 fejezetben erre vissza fogok térni. Az eredeti, másodrendű fázisátalakuláshoz tartozó WF fixpont eltűnik, az új egy elsőrendű fázisátalakuláshoz tartozhat. A szokásos WF fixpont hiánya nem probléma, ugyanis a WF fixpont a ϕ^4 modellben nem mint mikroszkopikus modellhez tartozó eredmény szerepel, nem támasztja alá mérés. A skaláris elméleteket általában egy bonyolultabb fizikai rendszer effektív modelljeként használjuk. Ilyenek például a ferro-paramágneses átalakulás, vagy a víz forrásánál megjelenő fázisátalakulás, melyet az egyszerűség kedvéért a

ϕ^4 modellel tárgyalhatunk.



5.5. ábra. Bilokális fázisszerkezet a gaussi fixpont közelében. A folytonos vonal jelöli a szimmetrikus fázist. A instabilitáshoz vezető trajektóriákat a pontozott vonalak jelölik. Az ábrán jelölt vastag vonal a szeparátrix.

A bilokális fázisdiagram esetén is ráközelítettem a GFP tartományára, ez az (5.5) ábrán látható. A folytonos vonal jelöli ismét a szimmetrikus fázist, a pontozott pedig az instabilitásra vezető trajektóriákat.

5.7. Szemiklasszikus energia

Szemiklasszikus közelítésben a fizikai rendszer energiáját azonosíthatjuk az euklideszi hatással. Ennek pontosabb meghatározása nehézségekbe ütközne, mert az energia egy összetett operátor, számolása nem kivitelezhető. Ebben a fejezetben azt vizsgálom, hogy az energia hogyan függ az alapállapot térkonfigurációtól. Maga az energia tartalmazza a skálafüggő csatolásokat is, ezért az alapállapot más-más lehet különböző k skálákon.

Adott q impulzus esetén $\phi_x = \phi \cos(qx)$ alakban felírt térkonfiguráció esetén vizsgálom az energia (hatás) minimumát. A ϕ és q paramétereket a

hatás sűrűségének fa-szintű minimalizálásával határozom meg

$$\begin{aligned} s(\phi, q) &= \frac{1}{V} \left[\frac{1}{2} \int_x \phi_x D_0^{-1} \phi_x + \int_x U(\phi_x) + \int_{xy} V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) \right] \\ &= \frac{q^2 \phi^2}{4} + s_1 + s_2 \end{aligned} \quad (5.51)$$

alakban, ahol $V = \int_x 1$ és

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_n \frac{g_{2n} \phi^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \\ s_2 &= \sum_{mn} \frac{\phi^{m+n}}{m! n! 2^{m+n}} \sum_{j=\max(0, \frac{m-n}{2})}^{\min(m, \frac{m+n}{2})} \binom{m}{j} \binom{n}{\frac{m+n}{2}-j} V_{(2j-m)pmn}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

A hatássűrűséget $\mathcal{O}(\phi^6)$ rendig veszem figyelembe, így az általánosan a

$$s(\phi, q) = a\phi^2 + \frac{b}{2}\phi^4 + \frac{c}{3!}\phi^6 \quad (5.53)$$

formában írható fel, ahol

$$\begin{aligned} a &= \frac{q^2 + m^2 + K_q}{4}, \\ b &= \frac{1}{8} \left(\frac{g_4}{4} + \frac{V_{2q22}}{2} + 2V_{q31} + V_{022} \right), \\ c &= \frac{3}{32} \left(\frac{g_6}{36} + \frac{V_{3q33}}{18} + \frac{V_{q33}}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

A stabilitás megköveteli a $c > 0$ feltétel megtartását. Az (5.53) kifejezésben keresem a zérushelyeket ϕ -ben, ezek:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0, \\ \phi_0 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 2ac}}{c}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Egyetlen zérushelyet találok, ha

$$\begin{aligned} a &> 0 & b &> 0, \\ a &< 0 & b^2 &< 2ac. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Egy negatív és egy pozitív zérushely van (a nulla mellett), ha

$$a < 0 \quad b^2 > 2ac. \quad (5.57)$$

Az (5.6(a)) ábrán mutatom be ezeknek a paramétereknek megfelelő potenciál alakját. A potenciál a másodrendű fázisátalakulást szemlélteti, amely esetén a pozitív zérushely az a paraméter növelésével a triviális minimumhoz tart. Ezt szemléltetik az ábrán lévő folytonos vonalak. A nulla mellett két pozitív zérushelyet kapok, ha

$$a > 0, \quad b < 0, \quad d > 0, \quad (5.58)$$

ahol

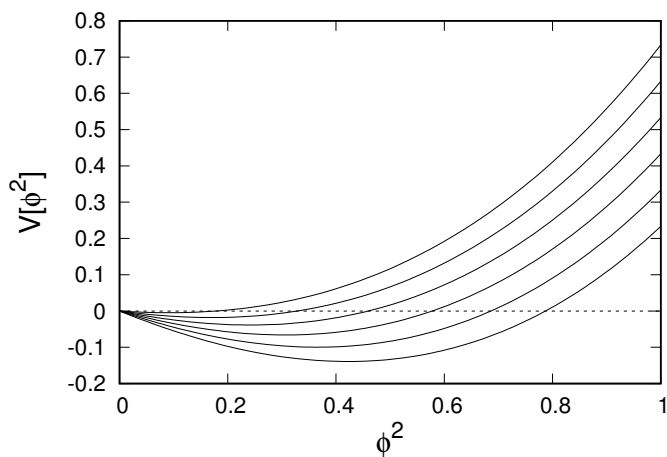
$$d = b^2 - \frac{8ac}{3}, \quad (5.59)$$

amely az (5.53) egyenlet megoldásában lévő $\sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{2}{3}ac}$ diszkrimináns pozitívitasából adódik. A megfelelő potenciál alakját az (5.6(b)) ábrán mutatom be. A ábrázolt minimumok az a stabilitási paraméter növelésével véges értékhez tartanak, így az ábra az elsőrendű fázisátalakulást szemlélteti.

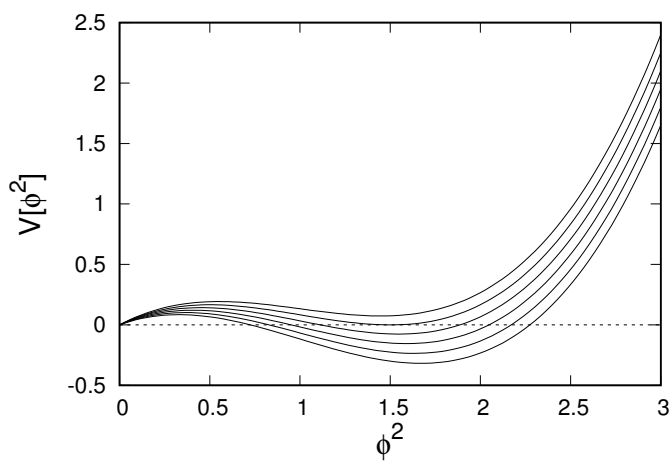
Az energiának nemtriviális minimuma van $\phi \neq 0$ esetén, ha $d > 0$. Ekkor a minimum az elsőrendű fázisátalakulásnak feleltethető meg, ezért a $d > 0$ paraméterérték az elsőrendű fázisátalakulás megjelenésének egyik feltétele. A hatássűrűséget $\mathcal{O}(\phi^6)$ rendig figyelembe véve szemiklasszikus közelítésben, kvalitatív módon az elsőrendű fázisátalakulás is megjelenhet, ha követjük a bilokális potenciál evolúcióját.

5.7.1. Inhomogén vákuum

A térváltozó $\phi_x = \phi \cos(qx)$ várható értékére a következő különböző eseteket kaphatom. Zérus tér esetén triviális vákuumról, konstans érték esetén homogén vákuumról beszélhetünk. Ha a $\phi_x = \phi \cos(qx)$ térkonfigurációt kapom véges q -nál és ϕ -nél, akkor az inhomogén vákuum esete áll fenn. A hatás q impulzustól való függését ábrázoltam olyan módon, hogy a ϕ értékét az (5.6(b)) ábrához tartozó feltételekkel állítottam be. Az eredményeket az (5.7(a)) és (5.7(b)) ábra szemlélteti. Az energia értéke negatív és az evolúció során ez megmarad. Ez azt mutatja, hogy létezik az eredeti zérus értéknél kedvezőbb vákuum. Fontos megjegyezni, hogy bilokalitás nélkül



(a) Az ábra másodrendű fázisátalakulást szemléltet. A $b = 1$, $c = 2$ esetén ábrázolt 6 vonal a legalsótól kezdve a $a = -0, 6; -0, 5; -0, 4; -0, 3; -0, 2; -0, 1$ értékekhez tartozik.

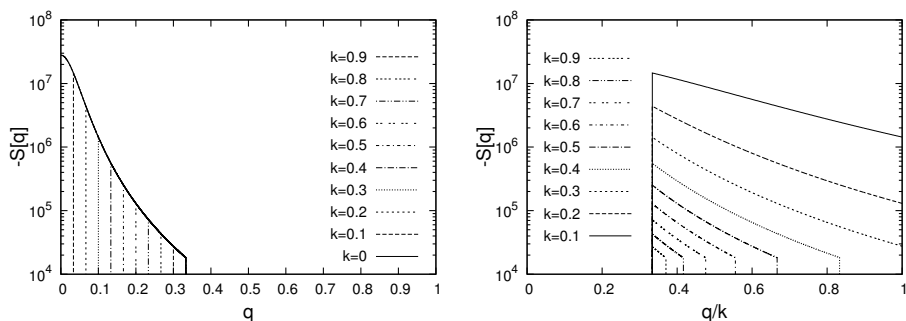


(b) Az ábra elsőrendű fázisátalakulást szemléltet. A $b = -2$, $c = 2$ esetén ábrázolt 6 vonal a legalsótól kezdve a $a = 0, 55; 0, 6; 0, 65; 0, 7; 0, 75; 0, 8$ értékhez tartozik.

5.6. ábra. A potenciál triviális és nem triviális minimuma.

ez az eredmény nem kapható meg, hiszen akkor nem áll rendelkezésünkre a q -függés.

Az (5.7(a)) ábrán az energiát ábrázoltam. Ahogy $k \rightarrow 0$, a minimum tart $q = 0$ -hoz. Véges k skálán ugyan találok inhomogén vákuumot, de az evolúció végére eltűnik az inhomogenitás, homogén vákuum alakul ki.



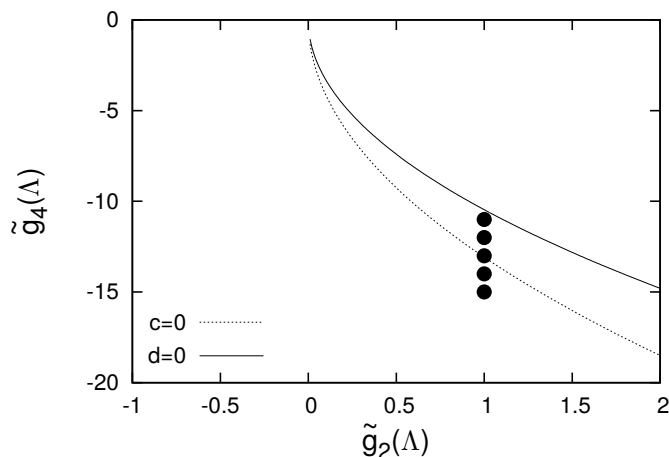
(a) Az energia impulzusfüggése, amikor mi- (b) Az eredeti, zérus értéknél kedvezőbb
nimum a $q = 0$ -ban van. vákuumállapot (alapállapot).

5.7. ábra. Az energia impulzusfüggése.

A következőkben ábrákon azt vizsgálom, hogy a fázistér mely tartományában alakulhat ki az inhomogén vákuum. A (5.8) ábrán jelölt $(\tilde{g}_2, \tilde{g}_4)$ fázisdiagramon a folytonos és a pontozott vonalak által kijelölt tartományból (felső 3 pont) indított evolúció segítségével juthatunk el az inhomogén vákuumhoz. Ez a stabilitási és az elsőrendű fázisátalakulás által körülhatárolt tartomány. Ezt mutatom be az (5.9(a))-(5.9(c)) ábrán, ahol kialakul az inhomogén vákuum. A tartományon kívüli pontokból indított evolúció (5.9(d)) és (5.9(e)) ábrákon van ábrázolva. Ebben az esetben az evolúció végén eltűnik az inhomogén vákuum.

5.7.2. Fázisok

A csatolások hurok szintű evolúciójával kiegészített fázisszerkezetet az (5.10) ábrán a (\bar{g}_2, \bar{g}_4) dimenziótlan csatolások által kijelölt síkon ábrázoltam, ahol a $\bar{g}_n = g_n \Lambda^{(n-6)/2}$ és $\bar{g}_6 = 10$. A másodrendű fázisátalakuláshoz tartozó vonal függőleges fa-szinten. Ez lokális evolúció estén is hasonló. A pontozott vonal a $\tilde{g}_2 = 0$ -nak felel meg. Ha $\tilde{g}_2 < 0$, akkor az evolúció fa-szinten az

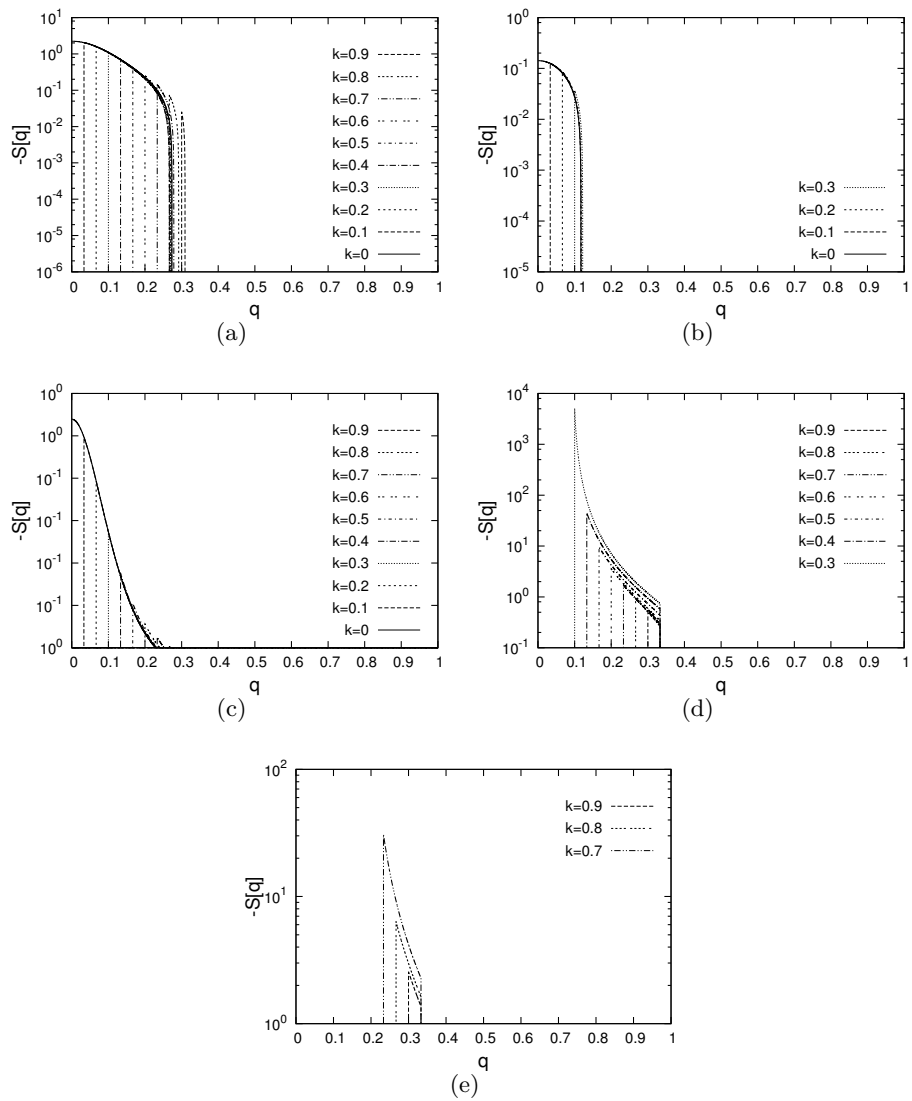


5.8. ábra. Inhomogén vákuumhoz tartozó fázistartomány.

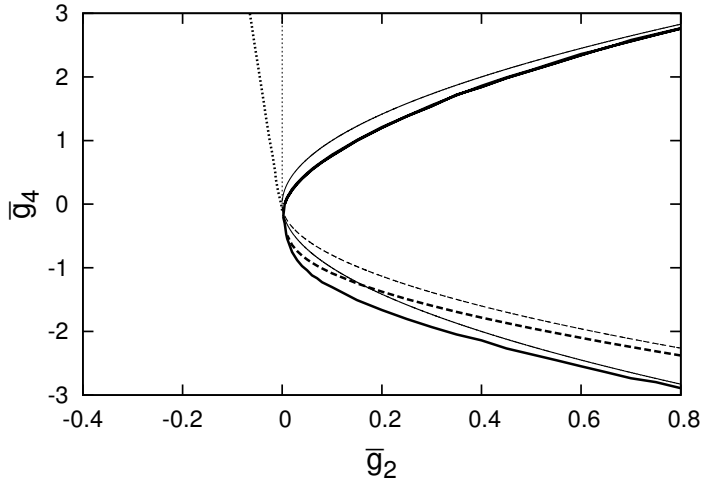
eredeti értékén hagyja a csatolást, a modell a szimmetriasértett fázisában van, a $\tilde{g}_2 > 0$ pedig a szimmetrikus fázishoz tartozik. A hurok korrekciók hatására a szeparátrix vonala balra dől, továbbá leáll az evolúció a $k^2 = -g_2$ ponton. A $d = 0$ eset felel meg az elsőrendű fázisátalakulásnak. Az (5.10) ábrán a bilokális potenciálnál ábrázoltam a $c = 0$ stabilitási feltételhez tartozó vonalat is. Látható, hogy bilokális esetben a $c = 0$ és $d = 0$ vonalak közötti kis tartomány rajzolódik ki, ahol megtaláltam az inhomogén vákuumot. Feltételezésem szerint az inhomogén vákuum kapcsolatban van az elsőrendű fázisátalakulással, továbbá a bilokális modellben megtalált WF fixpont a homogén és az inhomogén vákuumot szeparálja. A WF fixpont (5.50) numerikus értéke erre a tartományra esik.

5.8. Összefoglalás

Euklideszi téridőben egyidőtengelyes formalizmusban vizsgáltam a 3-dimenziós egykomponensű skalármodellt, funkcionális renormálási csoport módszerrel, bilokális potenciál mellett. Levezettem a Wegner-Houghton egyenletet a fa-szinten túli hurok korrekciók figyelembe vételével. A modellnek egy gaussi és egy nem triviális nyeregpontja van, amely különbözik a szokásos Wilson-Fisher fixponttól. Találtam két új releváns csatolást.



5.9. ábra. Inhomogén vákuumhoz tartozó fázistartományból és azon kívülről indított evolúciók.



5.10. ábra. A (\bar{g}_2, \bar{g}_4) sík fázisdiagramja $\bar{g}_6(\Lambda) = 10$ esetén. A fa-, és hurokszintű fázis-határokat vékony és vastag vonalak jelölik. A függőleges pontozott vonalak másodrendű fázisátmeneteket jelölik pozitív g_4 -re. A bilokális elmélet stabil, $c > 0$. Ezt folytonos vonal jelzi. A szaggatott vonalak jelölik az elsőrendű fázisátmenetet. A fluktuációk visszaállítják a kis negatív g_2 szimmetriáját és kis eltolódást indukál g_4 csökkenésével pozitív g_2 irányába.

Kiszámoltam a modell alapállapot energiáját szemiklasszikus szinten, és a szimmetriasértett inhomogén alapállapotot találtam [P2].

6. fejezet

Bilokális sine-Gordon modell

6.1. Bevezetés

Funkcionális RG módszer esetén nemlokális tagok generálódnak egy blokkosítási lépés során [P1, P2]. A nemlokalitás figyelembe vétele jelentős változásokat okozhat az eddig vizsgált modellek tulajdonságaiban. A lokális modell régi fixpontjai eltűnhetnek, új fixpontok jelenhetnek meg, melyek bevezethetnek új fázisokat a modellben. A 3d ϕ^4 modellben is jelentős változásokat okozott a bilokalitás figyelembe vétele, hiszen eltűnt a szokásos WF fixpont és egy új hiperbolikus pont jelent meg. Az eredményeim azt mutatták, hogy érdemes más modellt is vizsgálni bilokális közelítésben [P3].

A 2d SG modell eukldieszi téridőben egy fontos skalármodell, hiszen a modern fizika szinte minden területén széles körben alkalmazzák [50, 51, 52, 53, 54, 55]. A modell Kosterlitz-Thouless (vagy Berezinskii-Kosterlitz-Thouless) (KT) típusú végtelen rendű fázisátalakulást mutat [56, 57]. Érdekes módon az RG vizsgálat szignifikáns különbséget mutat, ha összehasonlítjuk az LPA-val kapott és a gradiens kifejtés következő rendje mellett kapott eredményeket. LPA-ban az SG modellben két fázist találunk, a hullámszám paraméter $\beta_c^2 = 8\pi$ kritikus értékénél, a Coleman pontnál elválasztva [50], ahol β a skaláris modell periodikus potenciáljának hullámszáma. A fázistérben függőleges egyenes vonalak

jelzik a trajektóriákat. Amennyiben a hullámfüggvény renormálási konstans is fejlődik az evolúció során, akkor az egyenes vonalak hiperbolákká válnak a fázistérben (lásd a 6.1 ábrát), és a ξ korrelációs hossz skálázása is megkapható.

Az SG modellben van egy nagyon fontos eredmény, melyet a hagyományos RG módszerrel nem lehet megkapni, nevezetesen a $\beta^2 = 4\pi$ paraméterérték speciális szerepe. A $\beta^2 = 4\pi$ esetén az SG modell a 2d tömeges nemkölcsonható Thirring modell bozonizált változata [58]. Az a várakozás, hogy ennél a paraméterértéknél vagy ennek a közelében a trajektóriák valamilyen módon megváltoznak, konvergálnak ehhez, vagy a konkrét értéknél befagy az evolúció. A lokális RG evolúció semmilyen módon nem érzékeny a $\beta^2 = 4\pi$ értékre.

Ebben a fejezetben az a célom, hogy a lokális SG modellt kiegészítsem egy bilokális taggal és megmutassam, hogy a bilokális SG (BSG) modell a KT fázisátalakulás mellett a $\beta^2 = 4\pi$ speciális szerepét is megjeleníti.

6.2. Lokális sine-Gordon modell

Ebben a fejezetben a lokális SG modellben ismert eredményeket gyűjtöttem össze. Az euklideszi téridőben felírt 2d SG modell wilsoni hatása

$$S = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_x)^2 + U_k(\phi_x) \right] \quad (6.1)$$

alakú, ahol a periodikus potenciál alakja:

$$U_k(\phi_x) = u \cos(\beta \phi_x). \quad (6.2)$$

A modell egy diszkrét $\phi_x \rightarrow -\phi_x$ Z_2 szimmetriával rendelkezik és periodikus $\phi_x \rightarrow \phi_x + 2\pi/\beta$ szerint, ahol β hullámszám. A periodicitást az RG eljárás megőrzi.

A modellnek két fázisa van, melyek között KT típusú végtelen rendű, topologikus fázisátalakulás figyelhető meg. Ez a fázisátalakulás a periodikus szimmetria spontán sérülése miatt következik be. A modellt jellemző két fázis a $\beta_c^2 = 8\pi$ Coleman pontnál válik szét. A Coleman pont felett a szimmetrikus, míg a β_c^2 alatt a szimmetriasértett fázis található. Az XY-modellben ennek felel meg az alacsony és a magas hőmérsékletű fázis.

Az előbbiben a vortex-antivortex párok [59], míg az utóbbiban ezek felbomlnak. A vortexek a spinváltozó zárt görbe mentén történő elfordulása által megvalósuló speciális spinkonfigurációk, a vortex és az antivortex közötti különbség a spinek elfordulásának irányában van. Az alacsony hőmérsékletű fázisban nem figyelhető meg a hosszútávú térbeli rendezettség, azt topologikus rendezettség jellemzi.

6.2.1. Lokális potenciál közelítés

A WH egyenletet alkalmazom. A térváltozókat a már sokszor használt $\phi \rightarrow \phi + \varphi$ összegre bontom fel, ahol a ϕ jelöli a IR rendszerbeli módusokat $0 < |p| < k - \Delta k$ impulzussal, míg a φ az UV környezeti $k - \Delta k < |p| < k$ impulzushéjbeli módusokhoz tartozik. A blokkosított hatást a (2.2) egyenlethez hasonlóan

$$e^{-S_{k-\Delta k}[\phi]} = \int D[\varphi] e^{-S_k[\phi+\varphi]} \approx e^{-\frac{1}{\hbar} S_k[\phi+\varphi[\phi]] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S_k''} \quad (6.3)$$

alapján számolhatom, ahol a $\varphi[\phi]$ a nyeregpont (ha van ilyen), a $' = \partial/\partial\varphi$ jelöli. Az S_k blokkosított hatásból indulok ki a k értékét infinitezimális Δk -kal csökkentve. A hatás a megszokott módon egy kinetikus tagból és egy lokális potenciálból épül fel $S = S_0 + S_1$ alakban, ahol

$$S_0 = -\frac{1}{2} \int_x \phi_x \square \phi_x, \quad (6.4)$$

és

$$S_1 = \int_x U(\phi_x). \quad (6.5)$$

A (6.3) egyenlet a (2.8)-hoz hasonlóan a WH LPA alakjához vezet:

$$\dot{U} = -\alpha_d k^d \ln(k^2 + U''), \quad (6.6)$$

ahol a (2.9)-ben felírt konstanst használom. Linearizálok az RG egyenletet a potenciálban és megkapom a

$$\dot{U} = \frac{1}{4\pi} U'' \quad (6.7)$$

egyenletet $d = 2$ esetén. Behelyettesítem a potenciál periodikus alakját (6.2) a (6.7) egyenletbe megkapom a csatolásra vonatkozó evolúciós egyenletet:

$$\dot{\tilde{u}} = -2\tilde{u} + \frac{\beta^2}{4\pi} \tilde{u}. \quad (6.8)$$

Ennek analitikus megoldása:

$$\tilde{u} = \tilde{u}(\Lambda)k^{-2+\beta^2/4\pi}, \quad (6.9)$$

ahol a k skála Λ -tól nulláig fut, $\tilde{u}(\Lambda)$ a csatolás kezdeti értéke. A (6.9) egyenletbeli kitevőből azonosíthatom a $\beta_c^2 = 8\pi$ Coleman pontot, ahol a \tilde{u} csatolás marginális [52, 53, 54]. A Coleman pont felett a szimmetrikus fázisban az \tilde{u} nullához tart. Ebben a fázisban a \tilde{u} csatolás irreleváns ezért ez a fázis perturbatív értelemben nem normálható. A Coleman pont alatt a csatolás végtelenhez tart és releváns. Ezek a trajektóriák megfelelnek a szimmetriasértett fázisnak.

A Coleman pont helye a LPA-n túllépve sem változik [60]. Ekkor a fázistér egy IR és egy UV nem GFP-tal kiegészíthető [61], de ezek messze vannak a fizikailag érdekes Coleman ponttól. A szimmetriasértett fázis trajektóriái szingularitásba, az $\tilde{u} \rightarrow -1$ IR pontba futnak.

A Coleman pont az RG egyenlet vezető rendbeli megoldásával már megkapható. Ennek az az oka, hogy a csatolások fa-szintű skálázása megváltozik. A vezető rendű skálázást a csatolások kanonikus dimenziója határozza meg. A (6.7) egyenletben a linearizált RG egyenletből korrekciókat kaphatunk a fa-szint skálázására, amennyiben $U'' \sim U$. Az SG modell esetében tehát a $\tilde{u} \sim k^{-2}$ kanonikus dimenzióhoz hozzá kell adnom a $\beta^2/4\pi$, ami a Coleman ponthoz vezet. Polinomiális modellek esetén az U'' tag csak azokhoz a csatolásokhoz ad járulékot, amelyek a magasabb rendű kölcsönhatásokhoz tartoznak. Ez azt jelenti, hogy a vezető rendű skálázás nem változik ebben a közelítésben, a hurok korrekciók lehetnek képesek a fázis szerkezet vagy a fixpontok helyének megváltoztatására.

6.2.2. Hullámfüggvény renormálás

Az effektív hatást tartalmazó Wetterich egyenletből kiindulva megkapható a z hullámfüggvény renormálási konstans evolúciója [1, 4, 2]. Az egyenlet alakja:

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\dot{R}}{\Gamma'' + R}, \quad (6.10)$$

ahol a trace Tr jelöli az impulzusintegrált. Az R hatványfüggvény regulátort használom:

$$R = p^2 \left(\frac{k^2}{p^2} \right)^b, \quad (6.11)$$

$b \geq 1$ paraméterekkel. Felteszem, hogy a (6.10) egyenletben lévő effektív hatás alakja megegyezik a wilsoni hatással:

$$\Gamma = \int_x \left[\frac{z}{2} (\partial_\mu \varphi_x)^2 + U(\phi_x) \right], \quad (6.12)$$

a (6.2)-hez hasonlóan lokális potenciállal és térfüggetlen z hullámfüggvény renormálási együtthatóval. A térváltozó újraskálázása után a $z = 1/\beta^2$ összefüggés adható meg a hullámszám és a hullámfüggvény renormálás között [62]. A (6.10) egyenletből a következő evolúciós egyenleteket kapom:

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_p \mathcal{D}_k \dot{R}, \quad (6.13)$$

$$\dot{z} = \mathcal{P}_0 U^{m_2} \int_p \mathcal{D}_k^2 \dot{R} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}_k}{\partial p^2 \partial p^2} p^2 + \frac{\partial \mathcal{D}_k}{\partial p^2} \right), \quad (6.14)$$

ahol $\mathcal{D}_k = 1/(z p^2 + R + U'')$, és $\mathcal{P}_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi$. Ismételten csak a vezető rendet tartom meg. A 2d impulzusintegrálok elvégzése után a

$$\dot{\tilde{u}} = -2\tilde{u} + \frac{1}{4\pi z} \tilde{u}, \quad (6.15)$$

$$\dot{z} = -\frac{\tilde{u}^2}{z^{2-2/b} c_b} \quad (6.16)$$

egyenleteket kapom a $c_b = b\Gamma(3 - 2/b)\Gamma(1 + 1/b)/48\pi$ konstanssal [60]. A fázistér trajektóriái (z, \tilde{u}) síkbeli hiperbolák, melyek kielégítik a

$$\tilde{u}^2(z) = \frac{2}{(8\pi)^{1-2/b} c_b} (z - 1/8\pi)^2 + \tilde{u}^{*2} \quad (6.17)$$

egyenletet, mellyel a KT típusú fázisátmenet szokásos fázisstruktúráját kapjuk vissza [60]. (A \tilde{u}^* csatolásérték a szimmetriasértett fázis trajektóriáinak a fordulópontban vett értékét jelzi.) Természetesen a modell vizsgálata a Coleman-pont közvetlen közelében és kis csatolások esetén érvényes.

A (6.16) egyenlet jobb oldala éles levágás esetén divergál ($b \rightarrow \infty$), így simított levágásra van szükség ahhoz, hogy a z evolúcióját megkapjam. A következő fejezetben megmutatom, hogy a bilokális potenciál és a WH egyenlet együttes használata segítségével visszakaphatom a gradiens kifejtéssel kapott eredményeket.

6.3. Nyeregpont

A nyeregponti evolúcióhoz az 5.4 fejezetbeli megoldásokat használom fel. A 5.4 fejezetben bemutatott módon juthatok el az (6.20) egyenlethez. Bevezetem a

$$D_{xy}^{-1} = D_{x-y}^{-1} + \delta_{xy} U''(\phi) + 2\delta_{xy} \int_z \partial_1^2 V_{x-z}(\phi_x, \phi_z) + 2\partial_1 \partial_2 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) \quad (6.18)$$

teljes propagátort, illetve a

$$L_x = U'(\phi_x) + 2 \int_y \partial_1 V_{x-y}(\phi_x, \phi_y) \quad (6.19)$$

jelölést. A nemtriviális nyeregpont

$$\varphi = -DL \quad (6.20)$$

formában írható. A (6.21) egyenlet levezetését ebben az esetben is teljesen analóg módon végzem el. Az előbbieket segítségével megkapom a

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta V_q^{tree}(\phi_1, \phi_2)}{\Delta k} \\ &= -2D_q^{(k)} \left[\partial_2 V_q(\phi_1, 0) + \frac{1}{2} U'(\phi_1) \right] \left[\partial_1 V_q(0, \phi_2) + \frac{1}{2} U'(\phi_2) \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

fa-szintű evolúció alakját.

6.4. Bilokális sine-Gordon (BSG) modell fa-szintű evolúciója

Az előző részben összefoglaltam, hogyan lehet kiszámítani a fa-szintű bilokális járulékot az RG evolúcióhoz. Most ezeket az eredményeket a 2d SG modellre alkalmazom.

Az euklideszi hatás tartalmazza a tömegtelen kinetikus tagot és a lokális (6.2) alakú periodikus potenciált. A periodikus függvényekből többféle

bilokális potenciált kombinálhatunk. A (6.2) deriváltját felhasználva a (6.21) fa-szintű megoldásban a következő alakú hatás adja:

$$S_2 = \int_{xy} V_{x-y}(\phi_x \phi_y) = \int_{xy} v_{x-y} \sin(\beta \phi_x) \sin(\beta \phi_y). \quad (6.22)$$

Keresem a V bilokális potenciálhoz tartozó nemtriviális evolúciót. Bevezetem a v_{x-y} bilokális csatolást, melyet kezdetben nulla értékre állítottam be, ezért az evolúció csupasz lokális hatással indul. A bilokális potenciál nulla impulzusú tagjai megjelennek a lokális csatolások béta-függvényeiben, ám ezeket elhanyagoljuk, mert fa-szinten nem evolválhatnak. A közelítés miatt a WH egyenlet a (6.6)-beli alakra redukálódik, csak a lokális potenciált tartalmazza, ami a (6.8)-beli \tilde{u} -ra vonatkozó analitikus megoldásra vezet.

A bilokális potenciál megváltozását a (6.21) egyenletből származtatom, aminek segítségével

$$\frac{\Delta V_q^{tree}(\phi_1, \phi_2)}{\Delta k} = - \frac{2\beta^2 \sin(\beta \phi_1) \sin(\beta \phi_2) (v_q - \frac{u}{2})^2}{k^2 - \beta^2 u + 2\beta^2 v_q} \quad (6.23)$$

alakú egyenletre jutok impulzustérben. Áttérek a koordinátáfüggő bilokális csatolásokról az impulzusfüggő v_q csatolásokra. A q impulzus folytonos indexnek tekinthető, végtelen sok csatolásunk van. A $\beta^2 \rightarrow 1/z_0$ helyettesítést használom, ahol z_0 a hullámfüggvény renormálás kezdeti értéke. A vezető rendet megtartva kapom a

$$\Delta v_q = - \frac{u^2}{2z_0 k^2} \omega_{q,k} \quad (6.24)$$

kifejezést, amely leírja a bilokális csatolás megváltozását egy infinitezimális RG blokkosítási lépés alatt. Az u lokális csatolás beindítja a bilokális csatolás evolúcióját. Használom a korábban bevezetett $w_{q,k}$ ablakfüggvényt. A különböző q -hoz tartozó fa-szintű bilokális járulékok függetlenek, egyszerűen felösszegezhetjük őket, hogy megkapjuk a teljes IR megoldást. A bilokális hurok járulékokat elhanyagolva csak a $q = k$ impulzus nemtriviális [P2]. Ezt használva azt kapom, hogy

$$v_k = \frac{u^2}{2z_0 k^2} \frac{\Delta k}{k}. \quad (6.25)$$

A wilsoni hatáshoz tartozó teljes inverz propagátor bilokális járulékokkal

$$D_0^{-1} = z_0 k^2 - u + 2v_k \quad (6.26)$$

alakú, ahol a z_0 kezdeti paramétert a β hullámszámból származtatom. Összehasonlítva a

$$D_0^{-1} = zk^2 - u \quad (6.27)$$

lokális modellhez tartozó inverz propagátorral látható, hogy a z_0 és v_k paraméterek között kapcsolat teremthető a

$$z - z_0 = \frac{u^2}{k^2 z_0} \Delta k \quad (6.28)$$

módon. Ez a következő dimenziótlan egyenletet adja a hullámfüggvény renormálásra:

$$\dot{z} = -\frac{\tilde{u}^2}{z}. \quad (6.29)$$

Ez megegyezik a (6.16)-beli $b = 2$ esettel. Azt kapom, hogy a bilokalitással és z -vel felírt béta függvény alakja megegyezik. Ha a béta függvények megegyeznek, akkor természetesen az azokból kapott eredmények is, például visszakapom a z, \tilde{u} síkbeli

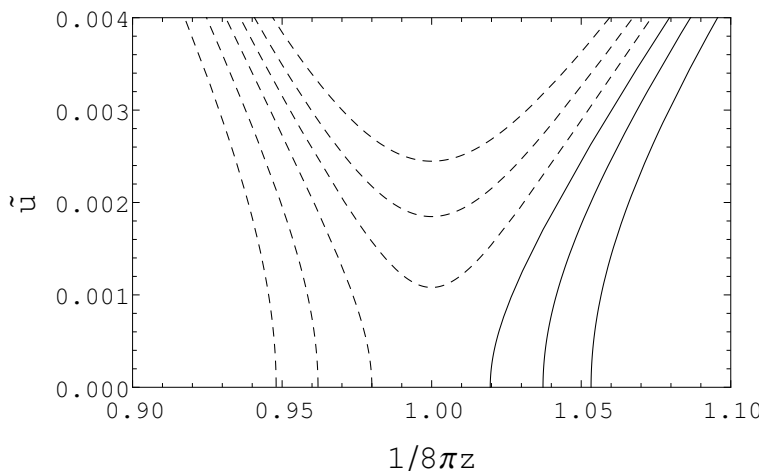
$$\tilde{u}^2(z) = 2(z - 1/8\pi)^2 + \tilde{u}(z_0)^2 \quad (6.30)$$

alakú hiperbolákat. Ezt a (6.17)-tel összehasonlítva látható, hogy csupán a $c_2 = 1/48\sqrt{\pi}$ tényezőben különböznek.

A trajektóriákat a (6.1) ábrán szemléltetem. Visszakapom a KT fázisátalakulást jellemző struktúrát, a trajektóriák jól láthatóan kijelölik a Coleman pont helyét ($1/z = 8\pi, \tilde{u} = 0$). Továbbra is igaz, hogy számolás során kapott eredményeim a Coleman pont kis környezetében, illetve kis lokális csatolásra érvényesek.

6.4.1. Alapállapot

Szemiklasszikus esetben az euklideszi hatást a rendszer energiájával azonosíthatom, annak minimuma lesz a rendszer alapállapota. Az energia egy összetett operátor, ennek pontosabb nyomon követése nem lehetséges. Az egyszerűség kedvéért ezt a minimumot $\phi_x = \phi \cos(qx)$ alakú periodikus



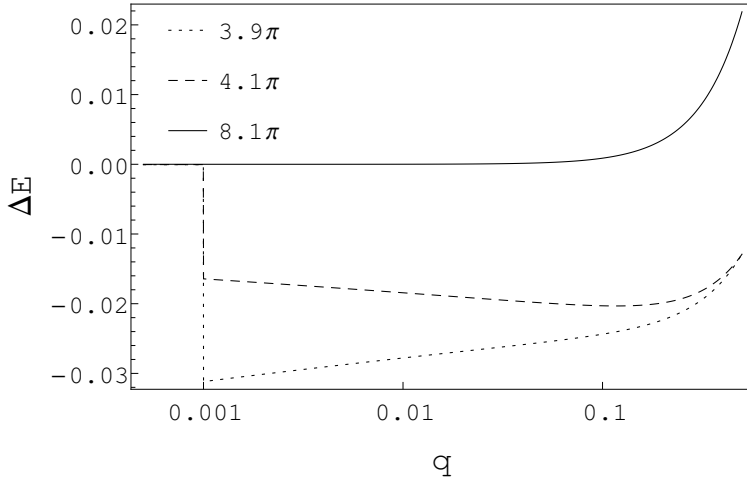
6.1. ábra. A bilokális sine-Gordon modell csatolások által kijelölt fázisszerkezete. A folytonos (szaggatott) vonalak a szimmetrikus (szimmetriasértett) fázist jelölik.

térkonfiguráció esetén keresem. A $q = 0$ esetben konstans térkonfiguráció mellett keresem az energiaminimumot. A két eset különbségéből származó energiakülönbség:

$$\Delta E = \frac{1}{4}q^2\phi^2 - 2J_0(\pi)u(\cos\phi - 1) + \int_q v_q 4J_0^2(\pi) \sin\phi_1 \sin\phi_2. \quad (6.31)$$

Itt csak a vezető rendű Fourier tagokat veszem figyelembe. A J_0 az első típusú Bessel függvényt jelöli, az integrál pedig a (6.24) egyenlet alapján számolható. Az energia minimumát a (ϕ, q) síkban keresem, eredményét a (6.2) ábrán szemléltetem.

Az energia z_0 különböző értékei mellett különbözőképpen viselkedik. A szimmetrikus fázisban $1/z_0 > 8\pi$ értéke mellett a minimum a $\phi = 0$ -ban található, az alapállapot triviális. Vannak bizonyos kezdeti értékek, melyeknél hamis minimum jelenik meg $q = \Lambda$ esetén. (Ezeket nem vettem figyelembe, mert az RG blokkoláskor ezek a környezethez tartoznak.) A szimmetriasértett fázisban található nemtriviális alapállapotot és két tartományt is megkülönböztethetünk. Amennyiben $1/z_0 < 4\pi$, akkor van nemtriviális minimumunk, de csak véges k esetén. Az IR határesetben, a q impulzus nullához tart és az alapállapot inhomogén jellege eltűnik, a



6.2. ábra. Az energiakülönbség q függését z_0 különböző értékei mellett mutatom be. A folytonos vonal jelöli a szimmetrikus fázis energiáját $1/z_0 = 8.1\pi$ esetén. A pontozott vonal $1/z_0 = 3.9\pi$ esetén ábrázolja az energiát. Ennek nemtriviális minimuma van a $q = k = 0.001$ értéknél. A szaggatott vonal a $1/z_0 = 4.1\pi$ esetet mutatja be, $q = 0.106$ -beli nemtriviális minimummal.

fázist homogén térkonfiguráció jellemzi. A $4\pi < 1/z_0 < 8\pi$ tartományban az energiának q véges értékére is van nemtriviális minimuma, van el nem tűnő periodikus térkonfiguráció az alapállapotban. A periodikus tér hullámszámának fix értéke alapján arra gondolhatunk, hogy ebben a fázisban a spinmodellek nyelvén Néel típusú alapállapot van. A véges q azt jelenti, hogy a bilokális potenciál inhomogén alapállapotot generál. A homogén és inhomogén alapállapotokat a $1/z_0 = 4\pi$ kritikus érték választja el. A szimmetrikus fázissal együtt már három fázisunk van a 2d SG modellben. A fázisszerkezet összhangban van a [63] cikkben bemutatott eredményekkel.

A szimmetriasértett fázis a $1/z_0 = 4\pi$ speciális értéknél kettéválik, a konkrét értéknél az SG modell a nemkölcönható Thirring modell bozonizáltjának tekinthető [64, 65]. A $1/z_0 = 4\pi$ esetben a bilokális csatolások nem fejlődnek, az SG modell lokálissá válik ezeknél a paraméterértéknél. Az eredményeim azt mutatják, hogy az SG modell bilokális vizsgálata a Coleman pont körül visszaadja a KT fázisátalakulást, továbbá megvilágítja a $1/z_0 = 4\pi$ speciális szerepét. Az utóbbi eredményt a funkcionális RG

módszer keretében eddig nem sikerült megmutatni.

6.5. Összefoglalás

A 2-dimenziós bilokális sine-Gordon modellt vizsgáltam euklideszi tér-időben ,funkcionális renormálási csoport módszerrel. Megmutattam, hogy a bilokális potenciál figyelembe vételével visszakapom a Kosterlitz-Thouless fázisátalakulást jellemző fázisstruktúrát. Meghatároztam a modell alapállapotát a szemiklasszikus energia számolásával. Találtam egy inhomogén alapállapotot, amelynél a tér periodikus szerkezetű. A homogén és az inhomogén alapállapotot a $\beta^2 = 4\pi$ kritikus hullámszám érték választja el egymástól. Ebben a pontban a bilokális csatolások nem fejlődnek, a modell lokálissá válik [P3].

7. fejezet

Konform redukált gravitáció

Értekezésem korábbi fejezeteiben bemutattam, hogyan lehet teljessé tenni az RG módszer leírását. Ennek egy fontos lépése a CTP formalizmus alkalmazása. A QRG vizsgálat során a munkának két fontos eleme rajzolódott ki, a bilokalitás és a valós idejű formalizmus alkalmazása. Az előbbivel végzett vizsgálatokat az előző két fejezetben mutattam be. A CTP esetén a valós idő szerepe kitüntetett, így elengedhetetlen annak használata. A kvantumelméletek valós idejű megfogalmazása még nyitott kérdés. A valós idejű vizsgálatot először egy skalármodellen végzem el. A gravitációs elméletben a valós idejű formalizmus alkalmazása elengedhetetlenül fontos, ezért a munkámat ebben a témában folytattam. A gravitációs elmélet konform redukált (CR) változatával dolgoztam, ami a korábbi témákhoz hasonló skaláris elméletre vezet. Ebben a fejezetben bemutatom az RG módszerrel vizsgált kvantum Einstein gravitációs modell (QEG) CR változatát valós időben, azaz Lorentz szignatúra használatával. Megmutatom, hogy a modell aszimptotikusan biztonságos, és különböző regulátorfüggés mellett vizsgálom a kritikus exponenseket [P4].

7.1. Bevezetés

Az általános relativitáselmélet segítségével makroszkopikus testek gravitációs kölcsönhatását tárgyalhatjuk. Mikroszkopikus szinten azonban nehézségbe ütközünk, mert a kvantumfizikai effektusokat is figyelembe kell vennünk. Ez szükségessé teszi a kvantumelmélet és a gravitáció egyesítését

[66, 67, 68]. A kvantumelméletben a Newton és a kozmológiai állandó skálafüggővé válik, csatolások lesznek [1, 4, 2, 3]. A Newton állandó dimenziális okokból a végtelenhez tart az UV-ben, ami azt jelenti, hogy az elmélet nem renormálható és nem tehetünk elméleti jóslatokat.

A QEG modellben kvantumtérelmélet keretein belül kezelhetjük a gravitációs kölcsönhatást, és a metrika tölti be a térváltozó szerepét a pályaintegrálban. Felvetődik a kérdés, hogy a modellt érdemes-e az RG módszerrel vizsgálni. A válasz azért nem triviálisan igen, mert az RG módszert akkor alkalmazzuk, amikor egy modellben több olyan energiaskála van, melyet a jelenség megértéséhez fontos figyelembe vennünk. Ha a modell fázisátalakulást mutat, akkor a kritikus pont környékén minden skála fontos, ezért az RG módszer hatékonyan alkalmazható. Van-e fázisátalakulás a QEG modellben? A perturbatív, nem renormálható modellben nincs. Hasonló a helyzet kozmológiai modellekben, ahol nem jelennek meg karakterisztikus skálák az elméletben és ezért nincs értelme az RG módszert használni.

A QEG modellben a renormálás használata indokolható. Nagy energiákon tudjuk, hogy új kölcsönhatások jelenhetnek meg, ez a globális renormálási csoport gondolatának a képe [3]. E szerint a mindenség elméletéből kiindulva, UV-ből alacsonyabb energiákon fixpontok közelében találhatjuk meg a nagy egyesített elméletet, utána a Standard modellt, stb. Ez a kép több szempontból is fontos. Egyrészt kibúvót adhat a QEG nem-renormálhatósága alól azáltal, hogy további fixpontokat feltételez nagy energián. Ez meg is valósul a QEG modellben, mert a fázistérben találhatunk egy UV nem-gaussi fixpontot (NGFP), ráadásul az új fixpontnál a csatolások a relevánsak, azaz helyreáll a renormálhatóság. Emiatt a QEG modellt euklideszi téridőben aszimptotikusan biztonságos modellnek nevezzük [69, 66, 70, 71, 72, 73]. A NGFP egy kölcsönható elméletet ír le, hiszen a fixpont nem az origóban van. A QEG modell kiterjesztéseit szintén széles körben vizsgálták. Megmutatták, hogy az előbbi fixpont megmarad anyagi terek figyelembe vétele mellett is [74, 75, 76, 77, 78], azaz a modell aszimptotikusan biztonságos marad.

A globális renormálás gondolata arról is információt ad, hogy az egyes fizikai elméleteknek hol van a határa. Az adott határon belül a kísérletek és az elméleti számolások összevetése jól alkalmazható. Ilyenkor az empíria, a tapasztalat segíti a megismerést, viszont az új ismeretek nem lépik túl

az elmélet határait. Feltehető a kérdés, hogy a határon belüli, más szóval immanens ismereteken túl megtudhatunk-e valamit a világunkról. A globális renormálás képe erre ad lehetőséget, mert az elméletek határainak pontos ismerete arról is beszél, hogy a határokon túl milyen törvényekre kell cserélnünk a régiakat. Az UV NGFP közelében, a Planck skála tartományában létező kvantumgravitációs elméletről keveset tudunk, csupán néhány kritikus exponens számolható, amelyet reménytelen kísérleti eredményekkel összevetni. Azonban a globális RG-ből pontosan tudjuk, hogy létezik egy trajektória, amely a GFP-hoz vezet, és ahol a klasszikus általános relativitás elmélete kristályosodik ki. Ugyan a trajektóriáról szinte semmit sem tudunk, de a trajektória mentén lenni kell egy kvantum-klasszikus átmenetnek. Ez az információ tapasztalati úton nem szereshető meg, azon túlmutat. A globális renormálás alkalmas arra, hogy a fizikai modellek határon kívül eső, azaz transzcendens ismeretekről is kaphassunk információt. Ez azt mutatja, hogy a fizika nem csak a mérés-számolás kapcsolatáról szól. Az RG módszer a megismerés általánosabb keretét adja.

Matematikailag egyszerűbb a QEG modellt euklideszi tér időben vizsgálni. Céлом, hogy a QEG modell Lorentz szignatúrával tárgyaljam, ugyanis a modellt eredetileg valós időben fogalmazzuk meg. A Wick forgatás összeköti az euklideszi, képzetes idejű és Lorentz szignatúrával vett valós idejű vizsgálatot. Meg kell győződünk arról, hogy az áttérés a két formalizmus között nem változtat-e meg valamit a modellben. A Wick forgatással az időtengelyt elfogatjuk a komplex számsíkon, miközben nem érinthetünk pólust. Perturbatív esetben ez nem okoz problémát, ám nem perturbatív esetben nem feltétlen tudjuk, hol vannak ezek a pólusok. Még ha nem is érintünk pólust, a kontúr zárása a végtelenben sérti a Lorentz szimmetriát.

Lorentz formalizmusban a propagátor tömeghéj (on-shell) szingularitással rendelkezik, hiszen egy négyesimpulzus tetszőleges véges frekvencia vagy térimpulzus esetén szingulárisává válhat. Ezzel szemben euklideszi esetben a szingularitás csak az IR limeszben jelenhet meg. A Wick rotáció után a propagátor nem lesz tömeghéjon (off-shell), a tömeghéj járulékok eltűnnek. Ugyanez a kérdés merül fel az RG módszerben is, ahol a felöltöztetett propagátorok megjelennek az evolúciós egyenletek funkcionális alakjában. Ez azt jelenti, hogy az evolúciós egyenleteknek is vannak tömeghéj járulékaik valós időben. A szingularitás nem csupán egy matematikai probléma, az a valódi részecskék miatt jelenik meg. Az euklideszi vizsgálatok során csak a

virtuális részecskékhez tartozó off-shell gerjesztések járulékait követhetjük. A valódi részecskék impulzusukat tekintve lokálisak, ami miatt koordinátákban nem lokálisak, ezért a tömeghøj járulékok a nemlokális hatással követhetők [P1, 79, P2, 80]. A virtuális gerjesztések lokálisnak tekinthetők a koordinátában, így a szokásos lokális hatás használható. Ez azt jelenti, hogy az euklideszi formalizmus hiányos, a valós idejű formalizmus a modell pontosabb leírását adja.

A QEG modell CR változata is a szokásos fázistér struktúrával, NGFP-tal és aszimptotikus biztonsággal rendelkezik [81, 82, 83, 84, 85, 86]. A konform redukció előnye, hogy az eredeti QEG modell egy skalártérre egyszerűsödik. A modell egyik hátránya, hogy a kinetikus tag negatív előjele miatt a konform gravitációs modell alulról nem korlátos, ezt nevezzük konformfaktor instabilitásnak.

Az euklideszi eredmények mellett a szakirodalomban széles körben vizsgálták, hogyan lehet a gravitációs kölcsönhatást és a megfelelő RG egyenleteket Lorentz formalizmusban megfogalmazni. Különbözö vizsgálátokat végeztek, például kauzális halmazok segítségével [87, 88], az Arnowitt-Deser-Misner (ADM) dekompozícióval [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95], ahol az idő iránya kitüntetett, vagy olyan fóliázott téridőt használva, ami megörzi a differomorfizmus invarianciát [96].

A Wetterich egyenletet Lorentz szignatúrával írom fel. Ez egy ADM módszerre emlékeztető megközelítés, mely során az idő (vagy az annak megfelelő frekvencia) irányába tartozó módusokat kiintegrálom és az RG blokkolás a fennmaradó impulzustérben történik. Először kiszámítom a Newton és a kozmológiai csatolásra vonatkozó evolúciós egyenletek euklideszi formalizmusban, ahol a téridőnek egy komponense van kiintegrálva. Ezután levezetem az RG egyenleteket Lorentz szignatúrával, majd összehasonlítom a kapott eredményeket az előző és az eredeti, CR gravitációs modellben kapott eredményekkel. Mindegyik esetben kiszámítom a NGFP-hoz tartozó korrelációs hossz ν exponensét, majd vizsgálom az eredmények regulátorfüggését.

7.2. Evolúciós egyenletek

Az RG egyenleteket az átmenti amplitúdóból, vagy más néven generáló funkcionálból vezetjük le. Ezt Lorentz szignatúrában is megtehető, azonban

az RG blokkolási lépés számos kérdést vet fel, melyeket először tisztázni kell.

7.2.1. Lorentz formalizmus

Az egyszerűség kedvéért először éles levágást veszek, a gondolatmenet könnyen általánosítható a simított levágásra. Euklideszi téridőben egy d dimenziós k sugarú gömbhéjban végzem a blokkolást, egy lépésben eliminálom a Δk vastag gömbhéjban lévő módusokat. A térfogat véges, így egy blokkosítási lépés nem vezet további divergenciákhoz. Lorentz szignatúra esetén egy Lorentz-invariáns k renormálási skála hiperbolikus felületeket definiál a d dimenziós Lorentz-téridőben. Egy RG blokkosítási lépés alatt Δk vastagságú, végtelen nagy térfogatú hiperboloidot eliminálok. A végtelen térfogat regularizációja miatt a Lorentz invariancia sérülhet. További probléma, hogy a k skála negatív is lehet. A nulla impulzusú móduson keresztül blokkolva a $\Delta k/k \ll 1$ feltétel sem teljesülhet. Egy lehetséges kiskapu lehet, ha elimináljuk a $|k^2|$ invariáns hosszúságú módusokat, azonban az ilyen típusú RG skála fizikailag nehezen értelmezhető.

Azt mondhatjuk, hogy a Lorentz szimmetria sértése elkerülhetetlen, viszont akkor célszerűbb definiálni egy nem Lorentz invariáns skálát, amely könnyen kezelhető. Azt a definíciót választom, ahol a négyesimpulzusban elkülönítem a frekvenciát a 3d térbeli impulzustól, a renormálási skálát pedig az utóbbi terében adom meg. Elvégzem a frekvenciaintegrált az evolúciós egyenletekben, a fennmaradó β függvények pedig csak a térbeli impulzustól függenek. A Lorentz szimmetria tehát nem menthető meg, de a sérülés mértéke vizsgálható. Ha különböző hullámfüggvény renormálást vezetünk be a hatás időbeli és térbeli deriváltjai mellé, akkor azok viszonya jellemezheti a szimmetriasértés mértékét.

Az új formalizmust gömbszimmetria helyett hengersizimmetria jellemzi. Érdemes megvizsgálni, hogy a hengersizimmetrikus elrendezésnek van-e valamilyen következménye. Három esetet vizsgálok. Az első a négydimenziós euklideszi számolás elisméltése gömbszimmetrikus esetben. Ezután az evolúciót egy euklideszi hengersizimmetrikus rendszer esetén számoltam, ahol az egyik impulzuskomponenst kiintegráltam. Végül a modellt Lorentz szignatúra mellett vizsgálom, szintén hengersizimmetria mellett. Megjegyzem, hogy a modell véges hengerrel is tárgyalható. Ekkor a csatolások komplexekké válnak. Ennek vizsgálata túlmutat a jelen tárgyaláson, ezért

ezt az esetet nem vizsgálom.

Bár a mértékszimméria nem játszik szerepet a CR gravitáció esetében, a háttértér módszert alkalmazom. A konform redukált Einstein-Hilbert (CREH) hatásból indulok ki:

$$S_k[f; \chi_B] = -Z \int_x \sqrt{\hat{g}_x} \left\{ -\frac{1}{2} f \hat{\square} f + \frac{1}{12} \hat{R} (\chi_B + f)^2 - \frac{\Lambda}{6} (\chi_B + f)^4 \right\}, \quad (7.1)$$

ahol a χ_B a konstans háttértér, f a kvantumfluktuációkat jelöli. A G Newton csatolás a $Z = \frac{3}{4\pi G}$ hullámfüggvény renormálás kifejezésében található, Λ a kozmológiai csatolás. A \hat{g} a referencia metrika, $-\hat{\square}$ a Laplace-Beltrami operátor.

Hasonló az effektív hatás a derivált sorfejtés legalacsonyabb rendjében:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] = -Z_k \int_x \sqrt{\hat{g}_x} \left\{ -\frac{1}{2} \bar{f} \hat{\square} \bar{f} + \frac{1}{12} \hat{R} (\chi_B + \bar{f})^2 - \frac{\Lambda_k}{6} (\chi_B + \bar{f})^4 \right\}, \quad (7.2)$$

itt a csupasz hatásokat futó csatolásokkal helyettesítem. Hengerszimméria esetén $-\hat{\square} = -\partial_0^2 - \hat{\Delta}$, euklideszi téridőben, Lorentz szignatúra esetén pedig $-\hat{\square} = \partial_0^2 - \hat{\Delta}$ alakú. A háttér metrika a \hat{g} metrika segítségével van definiálva: $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^2 \hat{g}_{\mu\nu}$. A $-\bar{\square}$ operátor helyett a

$$-\bar{\square} \Rightarrow -\bar{\square} + k^2 R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right) \quad (7.3)$$

operátort alkalmazom, ahol $\hat{\square} = \chi_B^2 \bar{\square}$ [97, 1]. A metrika választása attól függ, hogy milyen szignatúrában vizsgálódom. A frekvencia és a térimpulzus integrálokat a Wetterich egyenlet jobb oldalán található trace-képzésben választom szét. A trace-képzést a következő módokon végzem el:

- (E4) az impulzustérben megtartom az $O(4)$ szimetriát, a referencia metrika $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$,
- (E1+3) a négyesimpulzus egyik komponensét, a frekvencia integrált külön végzem el. A metrika ebben az esetben is $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$,
- (L) a Lorentz szignatúra esetén az (E1+3) esethez hasonlóak járok el, de a metrika $\hat{g}_{00} = -1$ és $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Az impulzustérben felírt teljes inverz propagátor (E4) esetben

$$D^{-1} = \chi_B^2 k^2 (z + R^{(0)}(z)) \quad (7.4)$$

alakú, ahol $z = p^2/\chi_B^2 k^2$. Az (E1+3) esetbeli hengersizimmetria esetén

$$D^{-1} = \chi_B^2 k^2 (s^2 + z + R^{(0)}(z)), \quad (7.5)$$

ahol a térszerű impulzussal írom fel a $z = \mathbf{p}^2/\chi_B^2 k^2$ mennyiséget, továbbá $s^2 = \omega^2/\chi_B^2 k^2$. Lorentz szignatúra esetén a β függvények konvergenciájához infinitezimális képzetes kifejezésre van szükség a

$$D^{-1} = \chi_B^2 k^2 (-s^2 + z + (1 - i\epsilon)R^{(0)}(z)) \quad (7.6)$$

inverz propagátorban. Ez megfelel a Feynman-féle $i\epsilon$ -nak. Az egyszerűség kedvéért ezt a tagot nem írom ki.

7.2.2. Wetterich egyenlet

A Wetterich egyenlet levezetéséhez háttértér módszer esetén is az átmeneti amplitúdóból indulok ki:

$$Z[J; \chi_B] = e^{W_k[J; \chi_B]} = \int \mathcal{D}f e^{-S_k[f; \chi_B] + J \cdot f}. \quad (7.7)$$

Bevezetem a $\int_x = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}|}$, $J \cdot f = \int_x J_x f_x$ jelöléseket. A CREH hatás a következő tagokat tartalmazza:

$$S_k[f; \chi_B] = S_{EH}[\chi_B + f] + \Delta_k S[f; \chi_B], \quad (7.8)$$

ahol $\Delta_k S[f; \chi_B]$ a regulátor, és

$$\Delta_k S[f; \chi_B] = \frac{1}{2} \int_x f_x R_k(-\bar{\square}_x; \chi_B) f_x, \quad (7.9)$$

a $R_k(-\bar{\square}_x; \chi_B) \delta_{x,y}$ pozitív definit függvénnyel. A szokásos levezetés után a Wetterich egyenletet kapom:

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\dot{R}_k[\Gamma^{(2)} + R_k]^{-1} \right), \quad (7.10)$$

ahol $\text{Tr}A = \int_x A_{xx} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}_x|} A_{xx} = \int d^4x d^4y \delta_{x,y} \sqrt{|\hat{g}_x|} A_{xy}$. Az effektív hatás a χ_B háttérter függvénye, az f klasszikus térváltozó a csupasz hatás térváltozójának Legendre transzformációja. Az (7.10)-beli RG evolúciós egyenlet mind az (E4), mind az (E1+3) esetekre alkalmazható.

Hasonló levezetést alkalmazok Lorentz formalizmus esetén. Ismét az átmeneti amplitúdóból indulok ki:

$$Z_k[J; \chi_B] = e^{iW_k[J; \chi_B]} = \int \mathcal{D}f e^{iS_k[f; \chi_B] + iJ \cdot f}, \quad (7.11)$$

ahol a (7.9) egyenletbeli regulátort használom. A $\Gamma \rightarrow -\Gamma$ után

$$\dot{\Gamma}_k[\bar{f}; \chi_B] = -i \frac{1}{2} \text{Tr} \left([\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \dot{R}_k \right) \quad (7.12)$$

kifejezést kapom. Bevezetem a következő potenciálokat:

$$V_k(\phi) = Z_k U_k(\phi), \quad U_k(\phi) = \frac{\Lambda_k}{6} \phi^4 - \frac{c_k}{12} \hat{R} \phi^2, \quad (7.13)$$

$$u_k(\phi) = U_k(\phi) + \frac{c_k}{12} \hat{R} \phi^2 = \frac{\Lambda_k}{6} \phi^4. \quad (7.14)$$

Az euklideszi formalizmusban felírt Wetterich egyenletet

$$\dot{\Gamma} = \frac{k^2 \chi_B^2}{Z_k} \text{Tr} \{ [K - \delta\mu]^{-1} N \} \quad (7.15)$$

alakban írhatom fel, ahol $K = A + \hat{R}/6$, $\delta\mu(\bar{f}) = U_k'''(\chi_B) \bar{f} + \frac{1}{2} U_k''''(\chi_B) \bar{f}^2$, továbbá a

$$A = \begin{cases} -\hat{\square} + k^2 \chi_B^2 R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right) - u_k''(\chi_B) & (E4) \\ -\partial_0^2 - \hat{\Delta} + k^2 \chi_B^2 R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2} \right) - u_k''(\chi_B) & (E1+3) \end{cases} \quad (7.16)$$

$$N = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right) - \frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} R^{(0)'} \left(\frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right) & (E4) \\ \left(1 - \frac{1}{2} \eta \right) R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2} \right) - \frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2} R^{(0)'} \left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2} \right) & (E1+3), \end{cases} \quad (7.17)$$

és $u_k''(\chi_B) = 2\Lambda_k \chi_B^2$. Bevezetem az anomális dimenziót:

$$\eta = -\frac{\dot{Z}_k}{Z_k}. \quad (7.18)$$

A \bar{f} második hatványát tartalmazó tagokat megtartom a (7.15) egyenlet Neumann kifejtésében, így

$$\dot{\Gamma} \approx \frac{k^2 \chi_B^2}{Z_k} (T_0 + T_1 + T_2), \quad (7.19)$$

ahol

$$T_0 = \text{Tr}\{K^{-1}N\}, \quad (7.20)$$

$$T_1 = \text{Tr}\{K^{-1}\delta\mu K^{-1}N\}, \quad (7.21)$$

$$T_2 = \text{Tr}\{K^{-1}\delta\mu K^{-1}\delta\mu K^{-1}N\}. \quad (7.22)$$

Lorentz szignatúra esetén a (7.12)-hez hasonló evolúciós egyenletet kapok:

$$\dot{\Gamma} \approx -i \frac{k^2 \chi_B^2}{Z_k} (T_0 + T_1 + T_2), \quad (7.23)$$

ahol a (E1+3)-beli (7.16) egyenletbeli K -t és N -t használom, továbbá

$$A = \partial_0^2 - \hat{\Delta} + k^2 \chi_B^2 R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2} \right) - u_k''(\chi_B). \quad (7.24)$$

7.2.2.1. Gömbszimmetrikus euklideszi evolúció

Az $u_k(\chi_B)$ potenciálra vonatkozó evolúciós egyenletekhez az \hat{R} görbületben lineáris tagokat tartom meg. A CREH hatás kezdeti, k_i skálán felírható a csupasz $\Lambda_{k_i} \equiv \Lambda_i$, $G_{k_i} = G_i$ csatolásokkal. (A korábbi fejezetekben a k_i -t Λ -val jelöltem, de Λ -val ebben a témakörben a kozmológiai csatolást jelöli.) A potenciálra vonatkozó evolúciós egyenleteket úgy kapom meg, hogy a Wetterich egyenlet mindkét oldalának tagjait \bar{f}^0 rendig veszem figyelembe, így $\bar{f} = 0$ esetén a

$$\left(-\eta U_k(\chi_B) + \dot{U}_k(\chi_B) \right) \Omega = \frac{k^2 \chi_B^2}{Z_k} T_0 \quad (7.25)$$

egyenletet kapom, ahol $\Omega = \int_x \sqrt{\hat{g}}$. A K^{-1} -t \hat{R} -ben Neumann sorfejtve azt kapom, hogy $T_0 = T_{00} - \frac{1}{6} \hat{R} T_{01}$, ahol

$$T_{00} = \text{Tr} W_{01}(-\hat{\square}) = (4\pi)^{-2} \left[Q_2[W_{01}] + \frac{1}{6} \hat{R} Q_1[W_{01}] + \dots \right] \Omega \quad (7.26)$$

$$T_{01} = \text{Tr} W_{02}(-\hat{\square}) = (4\pi)^{-2} \left[Q_2[W_{02}] + \dots \right] \Omega, \quad (7.27)$$

$W_{0n}(y) = N(y)/A^n(y)$ $n = 1, 2$ esetén. Az impulzusok kifejezései:

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} W(y), \quad (7.28)$$

részletesen:

$$Q_n(W_{0p}) = \frac{(\chi_B^2 k^2)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{(1 - \frac{1}{2}\eta)R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^p}. \quad (7.29)$$

Az utóbbi alak a küszöbfüggvényekkel megadható [81].

$$Q_n(W_{0p}) = (\chi_B^2 k^2)^{n-p} [\phi_n^p(w) - \frac{1}{2}\eta\tilde{\phi}_n^p(w)], \quad (7.30)$$

ahol $w = -u_k''(\chi_B)/\chi_B^2 k^2$. Az így kapott kifejezések:

$$\phi_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{(z + R^{(0)}(z) + w)^p}, \quad (7.31)$$

$$\tilde{\phi}_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z)}{(z + R^{(0)}(z) + w)^p}. \quad (7.32)$$

A kozmológiai csatolás RG egyenletét az \hat{R} legalacsonyabb rendjével [98]:

$$\dot{\lambda} = -(2 - \eta)\lambda + \frac{g}{2\pi} (\phi_2^1(w) - \eta\tilde{\phi}_2^1(w)), \quad (7.33)$$

ahol a $\lambda = k^{-2}\Lambda_k$ dimenziótlan csatolás. A dimenziótlan $g = k^2 G_k$ Newton csatolásra vonatkozó evolúciós egyenlet:

$$\dot{g} = (d - 2 + \eta)g, \quad (7.34)$$

ahol bevezetem az η anomális dimenziót, ami

$$\eta = \frac{gB_1(\lambda, 1)}{1 - gB_2(\lambda, 1)} \quad (7.35)$$

alakban a következő függvényekkel számolható:

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{6\pi} (\phi_1^1(w) - \phi_2^2(w)), \quad B_2(\lambda) = -\frac{1}{12\pi} (\tilde{\phi}_1^1(w) - \tilde{\phi}_2^2(w)). \quad (7.36)$$

7.2.2.2. Hengerszimmetrikus euklideszi evolúció

A hengerszimmetrikus euklideszi esetben szeparálom a frekvenciát és a térszerű impulzus változókat. A szimmetria a következő referencia metrikát követeli meg:

$$(\hat{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{h} \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

ahol \hat{h}_{ij} nem függ az x^0 koordinátától. A $4d$ Laplace-Beltrami operátor

$$\hat{\square} = \partial_0^2 + \hat{h}^{-1/2} \partial_i \hat{h}^{1/2} \hat{h}^{ij} \partial_j = \partial_0^2 + \hat{\Delta} \quad (7.38)$$

alakban írható fel, ahol a $\hat{\Delta}$ szimbólum a $3d$ Laplace-Beltrami operátor. Ezután elvégzem a frekvencia integrált. Alkalmazom a heat-kernel technikát a fennmaradó $3d$ integrál esetén és sorfejtek a $3d$ $^{(3)}\hat{R}$ görbület hatványaiban. A referencia metrika felépítése szerint a tér fóliázott $n^\mu = (1, 0, 0, 0) = n_\mu$ normálvektorú Σ_t ($t = x_0$) hiperfelületekből épül fel. Így $\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ fennáll, $h_{00} = h_{01} = 0$. Ebben a felépítésben a n^μ vektorok a x_0 koordinátavonalak érintő vektorjai és

$$n^\mu \nabla_\mu t = 1. \quad (7.39)$$

Ez azt jelenti, hogy a n^μ az "időszerű" t^μ vektormező szerepét tölti be, kielégítve $t^\mu \nabla_\mu t = 1$ kifejezést. A $4d$ és a $3d$ görbület közötti összefüggés a következőképpen adható meg:

$$\hat{R} = {}^{(3)}\hat{R} + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} - K^2, \quad (7.40)$$

ahol $K_{\mu\nu}$ a Σ_t külső görbülete,

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} (\partial_t h_{\mu\nu} - D_\mu N_\nu - D_\nu N_\mu), \quad (7.41)$$

ahol D_μ a $3d$, $\hat{h}_{\mu\nu}$ metrikához kapcsolódó kovariáns derivált, $D_\mu \hat{h}_{\nu\kappa} = 0$, N a lapse függvény és N_ν jelöli az eltolás vektorát. Teljesül a $\partial_t h_{\mu\nu} = 0$ kifejezés, és a $\sqrt{\hat{g}} = N \sqrt{\hat{h}}$ egyenletből azt kapom, hogy $N = 1$. A n^μ normálvektor és az időszerű t^μ között fennáll a

$$n^\mu = \frac{1}{N} (t^\mu - N^\mu) \quad (7.42)$$

reláció, ami azt jelenti, hogy az eltolás vektor eltűnik, $N^\mu = 0$. A Σ_t külső görbület eltűnése azt eredményezi, hogy a referencia metrikához tartozó $4d$ és $3d$ görbületek megegyeznek.

A (E1+3) esetben a trace-képzés

$$\begin{aligned} \text{Tr}_3 W_{0p}(\omega^2, -\hat{\Delta}_x) &= (4\pi)^{-3/2} \left(Q_{3/2}[W_{0p}] \int d^3x \sqrt{\hat{h}} \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} Q_{1/2}[W_{0p}] \int d^3x \sqrt{\hat{h}} \left({}^{(3)}\hat{R} + \mathcal{O}({}^{(3)}\hat{R}^2) \right) \right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

módon történik, ahol a (7.28) egyenletbeli Q impulzus esetén a $n > 0$. Ennek alakja így, impulzustérben a következő:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} Q_\nu[W_{0p}] = (\chi_B^2 k^2)^{\nu-p+\frac{1}{2}} (\phi_n^p(w) - \frac{1}{2} \eta \tilde{\phi}_n^p(w)). \quad (7.44)$$

A küszöbfüggvények hengersizmetrikus alakja:

$$\begin{aligned} \phi_n^p(w) &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{(s^2 + z + R^{(0)}(z) + w)^p}, \\ \tilde{\phi}_n^p(w) &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z)}{(s^2 + z + R^{(0)}(z) + w)^p}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

A $\phi_n^p(w)$ és $\tilde{\phi}_n^p(w)$ integrálok segítségével felírható λ evolúciós egyenlete a (E4) esethez hasonló módon:

$$\dot{\lambda} = -(2 - \eta)\lambda + \frac{g}{2\pi} \left(\phi_{3/2}^1(w) - \frac{1}{2} \eta \tilde{\phi}_{3/2}^1(w) \right). \quad (7.46)$$

A g evolúciója (7.34) alapján felírható a (7.35)-beli anomális dimenzió segítségével, ahol

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{6\pi} \left(\phi_{1/2}^1(w) - \phi_{3/2}^2(w) \right), \quad B_2(\lambda) = -\frac{1}{12\pi} \left(\tilde{\phi}_{1/2}^1(w) - \tilde{\phi}_{3/2}^2(w) \right). \quad (7.47)$$

7.2.3. Lorentz evolúció

A Lorentz formalizmusban felírt evolúcióhoz az (E1+3) esethez hasonló úton indulok el. A momentumok megegyeznek a (7.44) egyenletben felírtakkal,

azonban a küszöbfüggvények eltérnek, azok

$$\begin{aligned}\phi_n^p(w) &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{(-s^2 + z + R^{(0)}(z) + w)^p}, \\ \tilde{\phi}_n^p(w) &= \frac{1}{\pi\Gamma(n)} \int_0^\infty ds \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z)}{(-s^2 + z + R^{(0)}(z) + w)^p}\end{aligned}\quad (7.48)$$

alakúak. Az s -re vonatkozó kontúrintegrál elvégzése után az előbbi egyenletek már csak i faktorban térnek el az (7.45)-beli alaktól. A λ -ra vonatkozó evolúciós egyenlet a (7.46)-hez hasonló alakot ölt, kiegészítve egy $-i$ taggal, mely a (7.19) és (7.23) egyenletek különbségéből adódik:

$$\dot{\lambda} = -(2 - \eta)\lambda - i\frac{g}{2\pi} \left(\phi_{3/2}^1(w) - \frac{1}{2}\eta\tilde{\phi}_{3/2}^1(w) \right). \quad (7.49)$$

A g csatolás evolúciós egyenletét a (7.34)-ből kapom, az anomális dimenzió

$$\eta = -i \frac{g_k B_1(\lambda)}{1 + ig B_2(\lambda)} \quad (7.50)$$

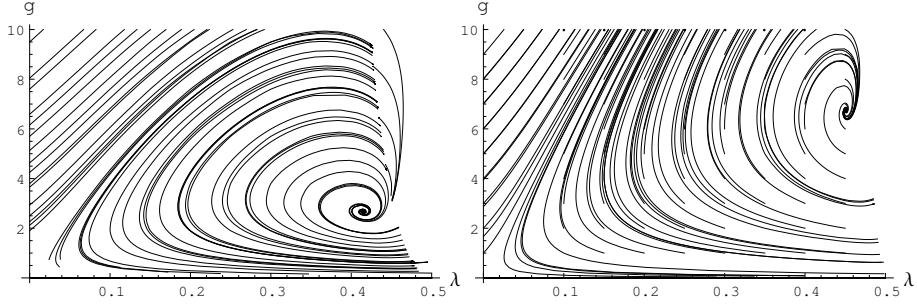
alakú, amelyben használtam a (7.47)-beli függvényeket. A küszöbfüggvények kifejezésében található i faktor miatt a (7.50)-beli η megegyezik a (7.35) egyenletbeli alakkal. A (7.49) egyenletben felírt λ -ra vonatkozó evolúciós egyenlet megegyezik a (E1+3) esetben kapott (7.46) egyenlettel.

Megállapítható, hogy a hengeres euklideszi eset ugyanolyan evolúciós egyenleteket ad, mint a Lorentz-féle formalizmus. A továbbiakban csak két esetet tekintek, a gömbszimmetrikus euklideszi (E), illetve a hengerszimmetrikus Lorentz (L) formalizmust.

7.3. Eredmények

Összehasonlítom az euklideszi és a lorentzi evolúcióból kapott fázisterét. A küszöbfüggvények Litim regulátor esetén analitikusan számolhatók [99, 100], alakjuk [98]:

$$\begin{aligned}\phi_n^p(w) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+w)^p}, \\ \tilde{\phi}_n^p(w) &= \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+w)^p}.\end{aligned}\quad (7.51)$$



7.1. ábra. A konform redukált gravitáció g és λ csatolások által kijelölt fázisszerkezete euklideszi és lorentzi formalizmus esetén Litim regulátor alkalmazása mellett. A modellnek két fázisa van, melyek a $\lambda^* = 0$, $g^* = 0$ hiperbolikus Gaussi fixpontnál szeparálódnak.

Form.	R	b	g^*	λ^*	θ'	θ''
E	Litim	1	2,6776	0,413398	1,47122	9,30442
	Litim	2	2,60252	0,460511	7,87679	7,79822
	Exponenciális	2	1,84031	0,636067	3,94478	9,10336
	Hatványfüggvény	2	1,32287	0,829843	3,40539	10,4214
L	Éles		1,97025	0,479998	31,5447, 6,55266	0
	Litim	1	6,76028	0,449782	4,44505	11,6619
	Éles		4,77643	0,496293	38,6719, 14,966	0

7.1. táblázat. A nem-gaussi fixpont regulátorfüggése és a hozzá tartozó exponensek összefoglalása euklideszi és Lorentz formalizmus esetén.

A β függvények analitikusak. A fázisteret a (7.1) ábrán mutatom be. A fázisábra megmutatja, hogy a modellnek két fázisa van, melyek a

$$\lambda^* = 0, \quad g^* = 0 \quad (7.52)$$

hiperbolikus GFP-nál szeparálódnak. Ez a pont bármely geometria és bármely regulátor mellett megjelenik. Az (E) eset evolúciós egyenletei egy további, nem-gaussi UV vonzó fixponttal rendelkeznek. Ennek fázistérbeli helyét és a hozzá tartozó kritikus exponenseket a 7.1 táblázatban mutatom be. Az exponenseket

$$\theta = -\theta' \pm i\theta'' \quad (7.53)$$

alakban paraméterezem. A ν kritikus exponenst $\nu = 1/\theta'$ szerint definiálom, ahol θ' az exponens (vagy sajátérték) valós része, $\theta' > 0$. Litim regulátor mellett a NGFP fókuszpont, mely taszítja a spirális trajektóriákat. A NGFP UV vonzó, a modell renormálható. A szokásos szóhasználat alapján a NGFP UV vonzó, ami azt jelenti, hogy az UV felé haladva a trajektóriák konvergálnak a fixpontba. Azonban az RG evolúció az IR felé halad, tehát az RG nyelvezete szempontjából szerencsésebb volna taszító fixpontnak nevezni a NGFP-t.

A fázisszerkezetet csak a csatolások pozitív értékénél tekintem. Bizonyos fázistér területek esetén az evolúciós egyenletek szingulárisává válnak. A $\lambda \rightarrow 1/2$ határesetben a β függvények divergálnak, a trajektóriák közelednek az IR szinguláris ponthoz, ahol $g^* = 0$ és $\lambda^* = 1/2$. Ennek környezetében lehetőségem van meghatározni az IR fixponthoz tartozó ν exponenst, mely általában a $\nu = 1/2$ értéket vesz fel [101]. Az η anomális dimenzió nevezője további szingularitási problémákat okoz. Ez egy szinte függőleges vonalat jelöl ki a fázistéren az IR fixpontból indulva.

Litim regulátor esetén (L) formalizmusban a küszöbfüggvények alakja:

$$\begin{aligned}\phi_n^p(w) &= \frac{i}{2p\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+w)^{p-1/2}}, \\ \tilde{\phi}_n^p(w) &= \frac{i}{2p\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+w)^{p-1/2}}.\end{aligned}\tag{7.54}$$

A β függvények ismét analitikusak. A (7.1) ábrán mutatom be a fázisszerkezetet, mely az (E) esethez hasonlóan GFP-t és NGFP-t tartalmaz. Az utóbbi megint komplex exponensekkel rendelkezik, spirális trajektóriákat eredményezve. A pont helyét és az exponenseket a 7.1 táblázatban foglalom össze. A szingularitási tartomány az előzőekhez hasonló módon azonosítható. Az (L) formalizmus ugyanolyan fázisszerkezetet ad, mint az (E) formalizmus, csak kvantitatív változásokat találók.

Megvizsgálom a NGFP regulátorfüggését. Ez fontos kérdés a renormálásban, hiszen ez garantálja a kiszámított megfigyelhető eredmények megbízhatóságát. A *css* regulátor [102] mellett kiszámítom a fixpont helyét. A regulátor kiválasztására számos lehetőség van [103]. A *css* regulátort [104] és határeseteit a (2.12) és (2.13) egyenletekben korábban bemutattam. A kritikus exponensek regulátorfüggését vizsgálom az (E) és az (L) formalizmus esetén. Az (E) formalizmusban $b = 1$ mellett a fixponti analízis

csak olyan s_1 -re hajtható végre, amely a $[0, 0.5)$ intervallumba esik, mert a NGFP a szingularitási régióba esik, ahol $\lambda > 1/2$. A $b = 2$ választáskor a szingularitás elkerülhető és az egész s_1, s_2 sík bejárható. A *css* regulátorból határesetekkel képzett exponenciális-, hatványfüggvény-, illetve Litim regulátorral kapott értékeket a 7.1 táblázatban sorolom fel. A s_1, s_2 síkban a ν exponensnek nincs szélsőértéke, monoton módon változik a regulátor paraméterekkel. Ez azt jelenti, hogy nem találtam olyan regulátort, ahol minimalizálni lehet a regulátor paramétereitől való függést.

A Lorentz szignatúra mellett vett evolúció eredményei korlátozottak, csak a *css* regulátor Litim határesetének közvetlen közelében tudok vizsgáldni. Gyakorlatilag csak a Litim regulátorral számolhatok $b = 1$ esetén, más paraméterértékek a NGFP-t a szingularitási régióba viszik. Az említett értéket a 7.1 táblázatban adom meg.

7.3.1. Éles levágás

Az éles levágás regulátor mellett a Wetterich egyenlet alakja megegyezik a WH egyenlettel [105]. A WH egyenlet előnye, hogy az effektív hatás helyett az eredeti wilsoni hatás evolúcióját veszi figyelembe. Az éles levágás nem módosítja a hatást, nincs szükség regulátorra, az elméletben fellépő gerjesztések megfelelő dinamikával vehetők figyelembe. Mindezek mellett az éles levágást ritkán alkalmazzák, mivel úgy gondolják, nem kompatibilis a gradiens kifejtéssel. Ennek megoldása lehet a korábban említett, nem lokális kölcsönhatások figyelembe vétele [P2, P3]. Az éles levágás egy másik problémája a Taylor sorfejtés lassú konvergenciája a kritikus exponensek számításakor [106], de ez inkább technikai probléma, mint fizikai kérdés.

Amikor az éles levágást alkalmazom, a blokkosítás során egy Δk szélességű gömbhéjból eliminálom a módusokat. A simított levágás alkalmazásával az eliminált és a megmaradó módusok nem választhatók el élesen. Ez számos RG módszerrel vizsgált kérdésben nem okoz problémát, ám az értekezésemben bemutatott munkában a rendszer és a környezeti módusok éles szétválasztása alapvető fontosságú elem [P1].

A éles levágás alkalmazása ellenére meg tudom határozni az anomális dimenziót, mert azt most nem a gradiens kifejtésből, hanem a görbülettel arányos tagból számolom ki. Ezt a WH egyenlet keretében korábban mások

is vizsgálták [73, 85, 107]. Az éles levágás a

$$R_k(p^2) = R_0 \Theta(1 - p^2/k^2) \quad (7.55)$$

módon van bevezetve [98], ahol a $R_0 \rightarrow \infty$ határértéket a p integrál után képezzük.

A küszöbfüggvények analitikusan számolhatók [98], alakjuk $p > 1$ esetén:

$$\Phi_n^p(\omega) = \frac{1}{(p-1)\Gamma(n)} \frac{1}{(1+\omega)^{p-1}}. \quad (7.56)$$

A függvények kielégítik a

$$\frac{d}{d\omega} \Phi_n^p(\omega) = -p \Phi_n^{p+1}(\omega) \quad (7.57)$$

relációt, amely segít meghatározni a küszöbfüggvényt $p = 1$ értéknél. A relációt felhasználva

$$\Phi_n^1(\omega) = -\frac{1}{\Gamma(n)} \ln(1+\omega) + \varphi_{d/2} \quad (7.58)$$

alakot kapom, ahol a $\varphi_{d/2}$ -t a Riemann-féle ζ -függvényből származtatok:

$$\varphi_{d/2} = \frac{d}{2} \zeta(d/2 + 1). \quad (7.59)$$

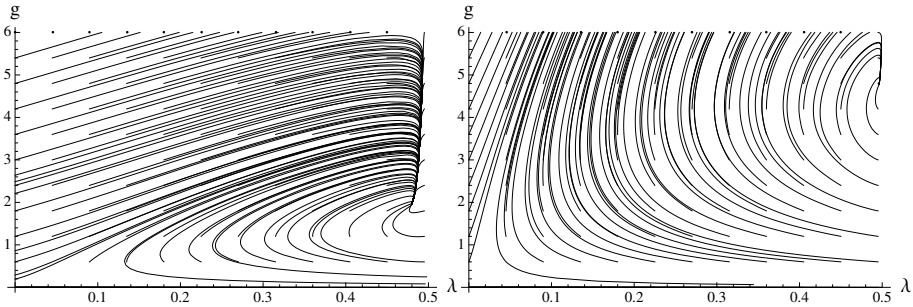
Az éles levágás a QEG modellben a jól ismert fázisszerkezetet adja két fázissal és egy NGFP-tal. Az utóbbi fixpont UV vonzó marad, de nem fókusz, hanem csomópont, mivel a (7.53)-beli skálázási exponens valós. A trajektóriák nem spirálisak, gyorsabban távolodnak a fixponttól, mint komplex esetben. Ezt a (7.2) ábrán mutatom be.

Az (E) esethez hasonlóan a $\lambda = 1/2$ esetén az evolúciós egyenletek szingulárisá válnak. Meghatározom éles levágás mellett a küszöbfüggvényeket (L) formalizmusban, ezek $p > 1$ és $p = 1$ esetén rendre

$$\Phi_n^p(\omega) = \frac{\pi}{4\Gamma(n)} \frac{1}{\sqrt{1+\omega}}, \quad \Phi_n^1(\omega) = -\frac{\pi}{2\Gamma(n)} \sqrt{1+\omega} + \varphi_{d/2}. \quad (7.60)$$

A φ -t $d = 3$ esetén adom meg. A fázisszerkezetet a (7.2) ábrán mutatom be. A fázistér a szokásos szerkezetű, két fázis és egy NGFP jellemzi. A megfelelő valós exponensek a 7.1 táblázatban találhatóak.

A CR gravitáció vizsgálatát Lorentz formalizmusban a Litim-, és az éles levágás regulátor mellett lehetett csak számolni. A többi regulátor a NGFP-t a szingularitási tartományba taszítja.



7.2. ábra. Az ábra az éles levágással tárgyalt konform redukált gravitáció g és λ csatolások által kijelölt fáziszerkezetét euklideszi és Lorentz formalizmus esetét mutatja be. A modellnek két fázisa van, a trajektóriák azonban nem spirálisak, gyorsabban távolodnak a fixponttól, mint komplex exponens esetében.

7.4. Kritikus exponensek

A gravitációs elméletek valós idejű vizsgálata elengedhetlenül fontos. Nem cél az euklideszi téridőben kapott eredmények rekonstruálása, hiszen a valós idejű, vagy Lorentz formalizmus az eredeti téridő, arról térünk át Wick forgatással az euklideszi téridőre. Az előző fejezetben megmutattam, hogy a két formalizmus hasonló eredményeket ad. A NGFP-t vizsgáltam. A fixpont típusa mindkét esetben UV vonzó. Úgy lehet fogalmazni, hogy az euklideszi téridő eredményei alátámasztják a Lorentz formalizmussal kapott eredményeket.

A NGFP-hoz tartozó kritikus exponenseknek nagy jelentősége van. A QEG az RG módszer napjainkban leginkább vizsgált modellje, és a NGFP korrelációs hosszához tartozó kritikus exponens a leggyakrabban számolt paraméter. Nincs lehetőség a kísérletekkel való összevetésre, többnyire azt vizsgáljuk, hogy valós-e vagy képzetes az exponens. A QEG modell és kiterjesztései azt mutatják, hogy a NGFP létezik és UV vonzó. Ezt nemcsak $d = 4$ esetén, hanem alacsonyabb dimenzióban is fontos kérdés.

Ebben a fejezetben $d = 3$ számoltam kritikus exponenseket a QEG modellben [P5]. A béta függvények annyira bonyolultak, hogy ez a számolás csak euklideszi téridőben végezhető el. A görbület négyzetes (\hat{R}^2) tagját tartalmazó QEG modell RG vizsgálatát végzem el, \hat{R}^2 -hez tartozó csatolást vezettem be. Meghatározom a NGFP helyét és a korrelációs hossz kritikus exponensét különböző regulátorok mellett három dimenzióban. Keresem

azt az optimális regulátort, ahol a fizikai paraméterek a legkisebb regulátorfüggést mutatják. Vizsgálom az IR fixpontot, ahol az exponens várhatólag nem érzékeny az R^2 kifejezés által bevezetett harmadik csatolásra [P5].

A QEG modell egy lehetséges kiterjesztése az \hat{R} skaláris görbület magasabb rendű alakjainak figyelembe vétele. (Vannak munkák, melyek közvetlenül kezelik a teljes $f(\hat{R})$ függést [108, 109].) A QEG modell evolúciós egyenletei \hat{R} kvadratikusan kifejezése mellett is visszaadják az UV NGFP-t Litim regulátor esetén [110]. Célom az volt, hogy megkeressem azt a regulátort, amely az \hat{R}^2 tag figyelembe vételekor a regulátorparaméterekre a legkisebb érzékenységet mutatja [111, 112].

Korábban megadták a ξ korrelációs hossz ν kritikus exponensének értékét a *css* regulátor paramétereinek függvényében Einstein-Hilbert (EH) közelítésben. Ebben az esetben a Litim regulátor módosított változata mutatja a paraméterek legkisebb érzékenységét [104]. A vizsgálatot elismétlem az \hat{R}^2 tagot tartalmazó QEG modell esetén. Először a *css* regulátor bizonyos paramétereinél feltérképezem a modell fázisszerkezetét. Ezután megkeresem a ν értékét a NGFP fixpont közelében, vizsgálom, hogy ez hogyan függ a regulátor paramétereitől.

7.4.1. A modell

A QEG modell effektív hatása \hat{R}^2 taggal kiegészítve:

$$\Gamma_k = \int d^d x \sqrt{g} \left[\frac{1}{16\pi G_k} \left(-R + 2\Lambda_k \right) + \frac{1}{b_k} \hat{R}^2 \right], \quad (7.61)$$

ahol a G_k ismét a Newton csatolás, a Λ_k a kozmológiai csatolás és a \bar{b}_k az \hat{R}^2 taghoz tartozó csatolás. A modell fázisszerkezetének feltérképezéséhez szükség van a

$$g = \frac{G_k}{k^{2-d}}, \quad \lambda = \frac{\Lambda_k}{k^2}, \quad b = \frac{\bar{b}_k}{k^{4-d}} \quad (7.62)$$

dimenziótlans csatolásokra.

Egy adott modell esetén az optimalizált regulátor kiválasztására számos lehetőség van. Egy egyszerű és megbízható módszer az ilyen regulátor megtalálására az, hogy megkeressük azokat a regulátor paramétereket, amelyek mellett a kritikus exponensek a legkevésbé függenek a regulátortól. Ez az úgynevezett minimális érzékenység elve (PMS) [112, 113, 114]. Sajnos ez a módszer bizonyos modellekben nem vezet eredményre. Léteznek

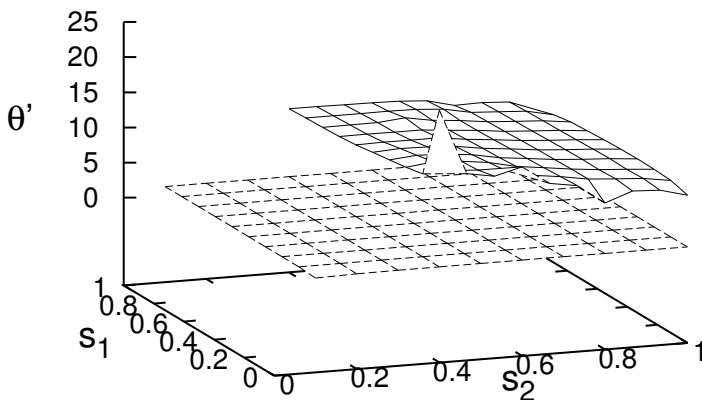
konstruktív módszerek az optimalizált regulátor előállítására [103], de ezek használata korlátozott. Az LPA-ban a Litim regulátor optimálisnak bizonyult, ám azon túl és a realiztikus modellekben csak kevés eredmény van az optimalizált regulátorra [103]. Ez a helyzet a QEG modell esetében is, ahol eddig még az EH közelítés mellett sem hajtották végre az optimalizálást. Az \hat{R}^2 tag \bar{b} csatolásának bevezetése még nehezebbé teszi az optimalizálási problémát, ezért megelepszem a PMS vizsgálattal.

7.4.2. Eredmények

Megvizsgálom a QEG modell fázisszerkezetét, majd numerikusan meghatározom a ν exponenseket. Linearizálom a β függvényeket az UV NGFP körül, ez stabilitási mátrixot ad a θ_i ($i = 1..d$) által jelölt sajátértékekkel. A ν kritikus exponenszt itt is a komplex sajátérték valós részével azonosítom, $\nu = 1/\theta'$, ahol $\theta_{1,2} = -\theta' \pm i\theta''$. A θ_3 értéke negatív. A sajátérték negatív valós része miatt az UV NGFP vonzó fixpont, a $\theta_{1,2}$ komplex volta miatt a trajektóriák spirálisak.

A stabilitási mátrix könnyen megkapható a GFP közelében. Meghatároztam, hogy $\theta_1 = -2$, $\theta_2 = d - 2$ és $\theta_3 = d - 4$. Ha $d > 2$, a GFP nyeregpontra, azaz vonzó és taszító irányokkal rendelkezik a fázistérbeli trajektóriák számára. Ez a helyzet a vizsgált modellben is. A GFP tulajdonságai jól ismertek, ezért a továbbiakban az UV NGFP viselkedésére és a ξ korrelációs hossz ν kritikus exponensének számolására koncentrálok. Az R^2 közelítés eredményeinek összehasonlítása érdekében először megismétlem a ν exponens számolását az EH esetben. A numerikus vizsgálatot $d = 3$ -ban végzem el. A *css* regulátor mellett θ' -t kiszámolom a $s_1, s_2 = 0 \dots 1$ paraméterek síkjában. A $b = 1$ választással élek, de megjegyzem, hogy a néhány modellben a $b = 1$ eset UV divergenciákat eredményezhet. Az eredményeket a (7.3) ábrán szemléletem. A számolás csak a nullánál kicsit nagyobb s_1 esetében hajtható végre, mivel a regulátor $s_1 = 0$ -ben szinguláris. A (7.3) ábra szerint a sajátérték gyenge paraméterfüggést mutat, minden érték $\theta' \approx 1$ körül van. A θ' pontos értékei alapján megkapom, hogy az $s_1 = 0$ és $s_2 \approx 1$ értékek lokális minimumot mutatnak az s_1, s_2 síkban. Ez megfelel a Litim regulátor esetének, ahol $\theta' = 1.145$. Ugyan a Litim regulátort szokták optimálisnak tartani, de ez csak LPA-ban igaz, ezért az eredményem nem triviális.

Az evolúciós egyenleteket, beleértve az R^2 görbülethez tartozó csatolás



7.3. ábra. A θ' sajátérték regulátorfüggése az Einstein-Hilbert (szaggatott) és az R^2 (a görbület kvadratikus tagja) közelítés (folytonos) rács esetén.

evolúcióját már több munkában vizsgálták [71, 115, 110]. A [115, 110]-beli tetszőleges dimenzióban és tetszőleges regulátor mellett felírható egyenleteket használom. Az EH közelítéshez hasonlóan először a θ' -t számolom ki a regulátor paramétereinek függvényében. Az eredményeket a (7.3) ábra szemlélteti.

Numerikusan kiszámolom a *css* regulátort $s_2 = 1$ és $s_1 = 0$ Litim határesetben. A $s_1 \rightarrow 0$ határértékben azt kapom hogy az $s_1 \approx 0.001$ eset visszaadhatja a Litim regulátor mellett kapott eredményeket [110]. Ez a numerikus eredmény messze nemtriviális, mivel a Litim regulátor esetében a hurokintegrálokat analitikusan végezték el [110]. A ν exponens értékeinek kiszámítását a regulátorparaméterekre a Litim határértékről kezdem.

A fixponti egyenletek bonyolult felépítése miatt nehéz numerikus probléma azok megoldása. Ha több, az GFP környék próbapontot választok az UV NGFP megtalálására, az eredmények különböző UV fixpontokat adnak, többségük hamis fixpont. Hasonló viselkedést mutat a Litim határeset is. Az előbbi miatt a fixpontot közvetlenül az RG egyenletekből határozom meg. A GFP közelében lévő csatolások kezdeti értékéből indulok ki és az RG egyenlet numerikus megoldása során a k skálát növelem az UV tartomány felé. Úgy tűnik, hogy ez a módszer ellentmond az RG eredeti filozófiájának, hiszen az RG skálát csökkenteni szoktuk, azonban ez a technika egy egyszerű trükk a differenciálegyenletek fixpontjainak megtalá-

lásához. Miután meghatározom az UV NGFP-t és a Litim eset exponensét, a regulátor paraméterein változtatok. Felteszem, hogy a *css* paramétereinek kis változtatása a fixpont helyén nem változtatnak túlságosan.

A (7.3) ábrán látható, hogy az exponenseket csak a paraméterter egy bizonyos részén számítom ki. További tartományokon nem találtam meg az UV NGFP-t. A probléma oka, hogy a *css* regulátor bonyolult az impulzusfüggése gyenge konvergenciát okozott a impulzusintegrálban, ez nagy számítási időt eredményezett a regulátorparaméterekre.

A PMS módszer szerint meg kell keresni azt a tartományt a regulátor paraméterterében, ahol a leggyengébb regulátorfüggés van. Az EH közelítés esetén a Litim regulátor határesetében kaptam meg az optimalizált regulátort. Az (7.3) ábrán az első, ami szembetűnő, hogy az R^2 esetben az exponens értéke jelentősen megnő. A $\theta' \approx 10$, ami egy nagyságrenddel nagyobb, mint az EH esetben. Az (7.3) ábrán látható, hogy van egy lokális minimum az s_1, s_2 síkon a regulátor Litim határesetének közelében. A $s_1 = 0, s_2 = 0.8$ szélsőérték megfelel a módosított Litim regulátornak:

$$r_{opt} = \left(\frac{1}{y} - 0.8 \right) \theta (1 - 0.8y). \quad (7.63)$$

A (7.3) ábrán a θ' értéke nagyobb mértékben változik az R^2 , mint az EH közelítés esetén. Az $s_1 = 0$ és $s_2 = 0$ esetben, a hatványfüggvény regulátor limeszben, a sajátérték divergál $b = 1$ esetben, ami fellépő divergens impulzusintegrál miatt van. Bár az R újabb rendjére optimalizált regulátort és a θ' optimalizált értékét találtam, az eredmény nem konvergál. Ez azt sugallja, hogy nem valószínű, hogy találunk konvergenciát, ha az R négyzetes rendjén túllépünk.

7.5. Összefoglalás

A konform redukált gravitációs modellt vizsgáltam a funkcionális renormálási csoport módszerrel, Minkowski téridőben. Megtaláltam a modell ultraibolya nem-gaussi fixpontját, és meghatároztam a nem-gaussi fixpont-hoz tartozó korrelációs hossz kritikus exponensét. Az eredmények kvalitatív egyezést mutatnak az euklideszi téridőben kapottakkal [P4]. Számoltam 3-dimenzióban euklideszi téridőben a korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponenst olyan gravitációs modell esetén is, amikor, a hatás a görbület

négyzetéhez tartozó csatolást is tartalmazza. Azt kaptam, hogy az exponens értéke nem mutat konvergenciát a görbület függvényében [P5].

8. fejezet

Összefoglalás

Értekezésemben bemutattam a funkcionális renormálási csoport (RG) módszer olyan lehetséges módosítását, amely segítségével a kevert állapotok és az összefonódás leírható. A hagyományos egyidőtengelyes (STP) formalizmussal nem tudjuk az összefonott állapotokat leírni, a zárt időtengelyes formalizmusra (CTP) van szükség. Kutatásom során vizsgáltam a 3-dimenziós (3d) skalármodellt CTP formalizmusban. A munka során nyilvánvalóvá vált a valós idő és a bilokalitás bevezetésének fontossága. A továbbiakban a 3d egykomponensű skalármodellt vizsgáltam bilokális közelítésben, STP formalizmusban. Értekezésemben bemutattam az előbbieket mellett a bilokális potenciállal felírt 2d sine-Gordon (SG) modell RG vizsgálatát. Kutatásom célja a bilokalitás bevezetése mellett az RG módszer valós idejű, Minkowski téridőbeli tárgyalása. A gravitációs modell konform redukált (CR) változatát vizsgáltam szintén valós időben, azaz Lorentz szignatúrával. A különböző modellek RG feltérképezésekor fontos pont volt a kritikus exponensek számolása. Ezt a vizsgálatot a 3d kvantum Einstein gravitációs (QEG) modell esetén a görbület kvadratikusan tagjának bevezetése mellett is megtettem.

A zárt időtengelyes, bilokális, illetve a valós idejű RG eljárások bemutatása előtt az értekezésem 2. fejezetében áttekintést adtam a renormálás filozófiájáról és az RG módszerről. Ismertettem a wilsoni és az effektív hatás formalizmus szemléletet, bemutattam az ezekhez tartozó Wegner-Houghton (WH) és a Wetterich egyenlet levezetését. Összehasonlítottam az evolúciós egyenleteket. Arra jutottam, hogy bár az eltérések között sok csak elvi

jelentőségű, de a WH egyenlet fizikailag jobban értelmezhető leírást ad az RG vizsgálatok során. Értekezésem nagy részében ezt az egyenletet alkalmaztam.

A hagyományos (STP) formalizmusban csak a tiszta állapotok járulékát vesszük figyelembe, mert az átmenti amplitúdók skálainvarianciájából indulunk ki. A kevert állapotok leírásához a sűrűségmátrixra van szükség, erre alkalmas a CTP formalizmus. Értekezésem harmadik fejezetében összefoglaltam a tiszta és az összefonott állapotokra vonatkozó ismereteket. Részletesen ismertettem a CTP formalizmust, amely megfelelő keretet ad egy olyan kiterjesztett módszerre, mellyel az összefonott állapotok is figyelembe vehetők. A CTP keret mellett további elemek is szükségesek a cél elérése érdekében. Az összefonódás egy alacsony energiás, infravörös (IR) módussal jellemzett rendszer és egy nagyenergiás, ultrabolya (UV) módusú kiintegrált környezet között jelenik meg. Ehhez a környezetnek nyílnak kell lennie, mely során valódi részecskék jelennek meg, melyek nem lokálisak. Kiemeltem azt a fontos tény, hogy ha tiszta állapotból indulunk ki, akkor adott szabadsági fokok kiintegrálása után nem kapunk kevert állapotokat. Az RG módszerben egy blokkosítási lépés után megjelenik a nemlokális. Megmutattam, hogy a nemlokális és a CTP formalizmus együtt a renormálás olyan általánosításához vezet, amely már figyelembe veszi az összefonott állapotok járulékát is.

Az összefonódás jelensége a klasszikus mechanikában nem értelmezhető jelenség, csak a kvantummechanikában jelenik meg, így a 4. fejezetben bemutatott módszert kvantum renormálási csoport (QRG) módszernek neveztem el. A fejezetben bemutattam a $3d \phi^4$ modell QRG vizsgálatával kapott eredményeket. Első lépésként az RG egyenletet általánosítottam Minkowski téridőre és zárt időtengelyre. Megmutattam, hogy a blokkosítási lépéskor egy nyeregponthoz járulék jelenik meg, amely a bilokális potenciál evolúciójához járul hozzá. Az UV és IR szabadsági fokok összefonódása a két időtengelyt összekötő véges impulzusú vertexek esetén valósulhat meg, azonban az ilyen típusú kölcsönhatás megjelenik a generálódó bilokális potenciálban. Ezzel sikerült megkapnom az UV és IR módusok összefonódását. Ismertettem a CTP gráfok három típusát, ezzel is bemutatva az STP és CTP formalizmus közötti különbséget.

A QRG módszer során generálódott bilokális nyeregponthoz járulék nem a CTP formalizmus sajátja, STP esetén is jelen van. Értekezésem 5. feje-

zetében bemutattam a bilokális potenciált tartalmazó hatás vizsgálatát euklideszi téridőben, hagyományos RG módszerrel.

Ismertettem a kvantumtérelméletben megjelenő nemlokalitás szerepét és azt, hogy hogyan lehet azt kezelni. A WH egyenlet használatakor korábban nem számoltak a véges impulzusnál megjelenő nyeregpontról. Ez eltér az eddigi renormálásban használt gradiens kifejtéssel kiegészített vizsgálattól. A bilokális taghoz csatolást rendeltem és követtem annak futását. A bilokális csatolásokat véges impulzusfüggés jellemzi. Az UV módusra találtam egy nemtriviális nyeregpontot, amely fa-szinten ad járulékot az RG evolúcióhoz. Meghatároztam a lokális és a bilokális potenciál evolúcióját a fa-szinten túli fluktuációk figyelembe vételével. Ismertettem a vizsgált modell fázisdiagrammját. Lokális esetben meghatároztam a fixpontok helyét és a hozzájuk tartozó exponenseket, majd ugyanezeket megadtam bilokális esetben is. Utóbbi esetben két releváns operátort találtam a lokális eset egy releváns operátorához képest. Az eredeti, másodrendű fázisátalakuláshoz tartozó fixpont eltűnik, és új helyen jelenik meg, ami feltételezésem szerint az elsőrendű fázisátalakuláshoz tartozik.

Ezután bemutattam, hogyan függ az energia az alapállapotú térkonfigurációtól szemiklasszikus közelítésben. A térre egy periodikus térkonfigurációt tétéleztem fel. Az energia minimumát határoztam meg a tér paramétereire függvényében. Azt kaptam, hogy míg az RG módszerrel csak másodrendű fázisátalakulás írható le, a szemiklasszikus közelítésben számolt energia kvalitatív módon jelezheti az elsőrendű fázisátalakulás jelenlétét.

Az eddigi eredmények azt mutatták, hogy a bilokalitás jelentős mértékben változtatja meg a modell eredményét, ezért érdemes más modellt is megvizsgálni a bilokális hatással kiegészítve. A 6. fejezetben mutattam be a 2d bilokális SG (BSG) modell vizsgálatát euklideszi téridőben. Céлом az volt hogy, a szokásos Kosterlitz-Thouless (KT) fázisátalakulás mellett megmutassam, hogy a $\beta^2 = 4\pi$ hullámszámnál újabb fázis jelenhet meg. Ismertettem a lokális SG modell eddigi eredményeit lokális potenciál közelítésben és hullámfüggvény renormálás mellett. Megmutattam, hogy a bilokális potenciál és a WH egyenlet együttes használata segítségével visszakapom a gradiens kifejtéssel kapott eredményeket. Az előző fejezetekben megkaptam, hogyan lehet kiszámítani a bilokális járulékot az RG evolúcióhoz, ezt alkalmaztam a bilokális 2d SG modellre. Bemutattam, hogy a SG modell lokális csatolása beindítja a bilokális csatolás evolúcióját.

Visszakaptam a KT fázisátalakulást jellemző fázisstruktúrát a Coleman ponttal. Feltérképeztem az alapállapotot a szemiklasszikus energia számolásával. Megjelent egy homogén alapállapot, amit véges de konstans tér jellemez. Emellett megjelent egy inhomogén alapállapot, amelynél a tér periodikus szerkezetű. A homogén és az inhomogén alapállapotú esetet a $\beta^2 = 4\pi$ kritikus érték választja el egymástól. A szimmetrikus fázissal együtt három fázist sikerült feltérképeznem a modellben. A kritikus értéknél a SG modell a nemkölcönható Thirring modell bozonizált változatának tekinthető. Ebben a pontban a bilokális csatolások nem fejlődnek, a modell ennél a paraméterértéknél lokálissá válik. Sikerült megmutatnom, hogy a BSG modell a Coleman pont körül visszaadja a KT fázisátalakulást, továbbá megkaptam a $\beta^2 = 4\pi$ speciális szerepét. Az utóbbit eddig még funkcionális RG módszer keretében nem sikerült megmutatni.

A korábbi fejezetekben bemutattam, hogy a bilokalitás és a CTP formalizmus használata elengedhetetlen ahhoz, hogy teljessé tegyem az RG módszer leírását. Az utóbbi esetén a valós idő szerepe kitüntetett. A valós idejű megfogalmazás a gravitációs elméletben fontos szerepet játszik, így munkámat ebbe az irányban folytattam. A gravitációs elmélet CR változatát vizsgáltam, amely a kutatásom korábbi szakaszaihoz hasonló skalármodellre vezetett. A 7. fejezetben bemutattam az RG módszerrel vizsgált QEG modell CR változatát valós időben.

Lorentz invariáns renormalizációs skálát nem lehet definiálni, ezért egy könnyebben kezelhető nem invariáns skálát vezettem be. A négyesimpulzusban elkülönítettem a frekvenciát a többi 3d térimpulzustól, a renormalizációs skálát az utóbbi térben definiáltam. Az evolúciós egyenletekben elvégeztem a frekvenciára vonatkozó integrált, így azok már csak a térbeli impulzustól függttek. A nemperturbatív Lorentz invariáns regulátor hiánya megakadályozta, hogy az RG módszert Lorentz invariáns módon fogalmazzam meg. Emiatt olyan RG sémát alkalmaztam, ami bár sérti a szimmetriát, de hatékonyan használható.

Az új formalizmusban gömbszimmetria helyett hengersizimetriával kellett dolgoznom. Levezettem a Wetterich egyenletet euklideszi esetre, majd Lorentz szignatúra esetén is. Összehasonlítottam az euklideszi és a lorentzi evolúció fázisszerkezetét. A modellnek mindkét esetben két fixpontja van. A pontok helyét és az ezekhez tartozó kritikus exponensek értékét különböző regulátorok mellett meghatároztam. A két formalizmus csak

kvantitatív változásokat ad. Litim regulátor mellett a nem-gaussi fixpont (NGFP) fókuszpont, mely taszítja a spirális trajektóriákat. A regulátorfüggés vizsgálata során nem találtam olyan regulátort, ahol minimalizálni lehet a regulátor paramétereitől való függést.

Éles levágás alkalmazása mellett is vizsgáltam mindkét formalizmus fázisterét. Ez felel meg a WH egyenletnek. Ebben az esetben is a QEG modellben jól ismert fázisszerkezetet kaptam két fázissal és egy NGFP-tal. Az utóbbi fixpont UV vonzó, de most nem fókusz, hanem csomópont. A CR gravitáció vizsgálatát Lorentz szignatúra esetén csak a Litim-, és az éles levágás regulátor mellett lehetett számolni. A többi regulátor a NGFP-t a szingularitási tartományba taszítja. Megmutattam, hogy a két formalizmus hasonló eredményeket ad, a NGFP mindkét esetben UV vonzó. Az euklideszi téridő eredményei alátámasztják a lorentzi eredményeket.

A NGFP korrelációs hosszához tartozó kritikus exponensnek nagy jelentősége van, gyakran számolt paraméter. Többnyire azt vizsgálják, hogy valós-e vagy képzetes az exponens. Az eddigi eredmények szerint 4d-ban a NGFP létezik és UV vonzó. Ez fontos kérdés alacsonyabb dimenzióban is, ezért 3d-ban numerikusan számoltam a NGFP-hoz tartozó kritikus exponensek értékét a görbület négyzetes (\hat{R}^2) tagját tartalmazó QEG modellben euklideszi téridőben. Kerestem azt a regulátort, amely a legkisebb érzékenységet mutatta a regulátorparaméterekre. Az optimalizált regulátornak a Litim regulátort kaptam.

Összefoglalva, az értekezésem legfontosabb eredményének azt tartom, hogy általánosítottam az RG módszert úgy, hogy az alkalmas legyen a kevert állapotok járulékeinak és az összefonódás leírására. Ehhez a CTP formalizmusra volt szükség. Az új módszert *kvantum renormálási csoportnak* neveztem. A vizsgálat során nyilvánvalóvá vált a nemlokalitás és a valós idő fontossága. Az értekezésemben példákat mutattam be ezen elemek szerepéről különböző skaláris modellekben.

9. fejezet

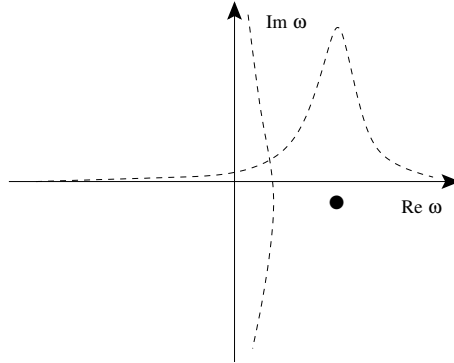
Kitekintés

A munkám folytatása megannyi irányban lehetséges. Számos megválaszolatlan kérdés maradt. CTP formalizmusban tulajdonképpen csak fa-szinten sikerült evolúciós egyenletet levezetnem és megoldanom. A hurok járulékok számolása nehezen kivitelezhető. Ehhez szükséges két alapvető elem: a bilokalitás és a valós idő. Előtanulmányokat végeztem a bilokális potenciál evolúciójának megértéséhez, és egy egyszerű modellben valós időben számoltam evolúciót.

A CTP formalizmus nyílt rendszerek leírására alkalmas. Nyílt rendszerek esetén megjelenhet a disszipáció és a véges élettartamú gerjesztések. Ez utóbbi esetén a propagátor pólusa komplex. A Feynman-féle $i\epsilon$ is komplex pólust eredményez, de ebben az esetben az ϵ végtelen kicsiny értéke végtelen élettartamú gerjesztéshez vezet.

A komplex pólus a propagátorban egy komplex tömeg csatolás. Az általam használt valós idejű formalizmusban a frekvenciaintegrált szeparáltan végeztem el. Ezáltal a csatolás valós maradt. Ez azt mutatja, hogy ilyen módon nem jelennek meg a komplex csatolások. Amennyiben a frekvenciaintegrált nem végtelen, hanem véges intervallumon végzem el, akkor a csatolások komplexek lesznek. Az eljárás azonban csak mesterséges módon vezet be komplex csatolást, azoknak nincs közük a véges élettartamhoz.

Feltehető a kérdés, hogy Minkowski téridőben, a hagyományos RG technikát követve miért nem jelennek meg komplex csatolások. A válasz kulcsa a (9.1) ábrán szemléltethető. A propagátor pólusát ábrázoltam. Wick rotációval áttérve euklideszi téridőre a propagátorhoz tartozó kvázirészecske



9.1. ábra. A propagátor pólusa és annak energiafüggése. A függőleges tengelyhez közelebb lévő szaggatott vonal az euklideszi, a másik a Minkowski propagátornak felel meg.

energia komplex lesz, $\omega = i/\sqrt{k^2 + m^2}$. Ezt szemlélteti a közel függőleges szaggatott vonal. Látható az ábrán, hogy ebben az esetben a pólushoz akkor vagyok legközelebb, ha az energia közel nulla, továbbá a pólus véges valós része nem okoz szingularitást az energiában. A Minkowski esetben ez megváltozik. Az energia valós, $\omega = 1/\sqrt{k^2 + m^2}$, és a pólus által megjelenő szingularitás jelentősen befolyásolja a propagátor energiafüggését. A legnagyobb járulék véges impulzusnál a pólus közvetlen közeléből kapható. Ez azt jelenti, hogyha hagyományos, nulla impulzusú térváltozóval dolgozom, az euklideszi téridőben megfelelő leírást ad, azonban a Minkowski esetben a pólus járulékát nem veszem figyelembe. Emiatt kapok Minkowski téridőben is valós csatolásokat.

Ahhoz hogy valóban megjelenjen a komplex csatolás, és közelebb jussak a valós idejű formalizmushoz, olyan térváltozót kell bevezetni Minkowski téridőben, amely impulzusfüggő. Ezáltal a pólus járulékát is megkapom. A propagátor jelenik meg a WH egyenletben is, ezért azt véges impulzusú térváltozó esetén kell levezetnem.

Elsőnek a véges impulzusú térváltozót egy síkhullámnak vettem fel. Levezettem az evolúciós egyenleteket az egykomponensű skalártérre. Megjelennek a komplex csatolások. Azonban a síkhullám evolúció a kölcsönhatást minden esetben nullába vitte, ráadásul a modellben eltűnt a GFP. A probléma úgy oldható meg, hogyha az implusfüggést egy Lorentz görbével veszem figyelembe. Ennek a szélessége megoldja a síkhullámnál megjelent

problémákat [116].

A kézirat legfontosabb eredménye a komplex csatolások megjelenése, amely megoldja a trivialitási problémát. Ezzel a Higgs tér 4d-ban aszimptotikusan szabaddá válik. A komplex csatolások másik fontos következménye a valódi gerjesztések (kvázirészecskék) megjelenése. Ez mutatja a valós idejű formalizmus hatékonyságát. Az euklideszi formalizmusban csak virtuális részecskéink vannak. A valós idő használatával a modellek gazdagodnak.

Az eredmények azt mutatják, hogy a valós idejű formalizmushoz szükség van véges impulzusú térváltozókra. A véges impulzusú gerjesztések CTP-ben alkalmasak arra, hogy a két időtengely közötti kölcsönhatást eredményezzék. Ezt eddig csak a bilokalitás figyelembe vételével tudtam elérni. A munkám következő lépése a CTP RG egyenletek levezetése, s általános tárgyalása. Mivel az inhomogén CTP gráfok nullák, ezért az egyidőtengelyes Minkowski számolásban kapott eredmények a CTP esetben nem változnak, a keveredést adó $g_{11}, g_{22} \dots$ csatolások nem szerepelnek a $g_2, g_2 \dots$ csatolások evolúciós egyenletében. A CTP formalizmus olyan általános keretet ad, amely segítségével a nyílt rendszerek konzisztens módon tárgyalhatók, ezért az egyidőtengelyes Minkowski téridőben kapott eredmények fizikai jelentését csak a CTP-ben érthetjük meg. Ez az a munka, amin jelenleg is dolgozunk.

10. fejezet

Angol nyelvű összefoglalás

In my dissertation, I have presented possible modifications of the functional renormalization group (RG) method, which can be used to describe the mixed states and the entanglement.

The traditional single time path (STP) formalism cannot describe mixed states, closed time path (CTP) formalism is required. During my research, I have examined the 3-dimensional (3d) scalar model in CTP formalism. The importance of introducing real time and bilocality became apparent during the work. Afterwards, I have examined the 3d one-component scalar field in bilocal approximation in single time path formalism and presented the RG analysis of the 2d sine-Gordon (SG) model with bilocal potential. In addition to the bilocality in Minkowski spacetime, I have introduced the RG method in real time. I have also examined the conformational reduced version of the gravity model in real time, with Lorentz's signature. A crucial point in the RG mapping of the various models is the calculation of critical exponents. In the case of the 3d quantum-Einstein gravity (QEG) model, I have also performed this analysis with the introduction of the quadratic term of the curve.

Before introducing the closed-time, bilocal, and real-time RG methods, I have presented an overview of the philosophy of renormalization and the RG method in the second chapter of my dissertation. I have introduced the Wilson and the effective action formalism, the derivations of the Wegner-Houghton (WH) and Wetterich equations and also compared their evolutions. I came to the conclusion that although many of the differences

are of theoretical significance only, the WH equation gives a physically more meaningful description in RG analysis. For most of my dissertation I have used this equation.

In the traditional (STP) formalism, we can consider only the contribution of pure states. We cannot do this unless we start from the scale invariance of the transition amplitudes. The density matrix is required for the description of the mixed states, for which the CTP formalism is appropriate. In the third chapter of my dissertation, I have summarized the most characteristic properties of pure and mixed states. I have given a detailed description of the CTP formalism, which provides a suitable framework for an extended method that takes into account the contributions of the mixed states. In addition to the CTP framework, other elements are needed to achieve the goal. The entanglement appears between the low energy, infrared (IR) mode system and a high energy, ultraviolet (UV) integrated environment. For this, the environment must be open, with real particles appearing that are not local. I have emphasized the important fact that if we start from a pure state, then after integrating over the degrees of freedom, we do not get mixed states. The RG method generates a nonlocal interaction, as a blocking step results nonlocality. I have shown that nonlocality and the CTP formalism together lead to the entanglement.

In classical mechanics there is no phenomenon like entanglement, it appears only in quantum mechanics, so I have referred to the method described in the fourth chapter as the quantum renormalization group (QRG) method. In the same chapter, I have presented the results obtained by the QRG analysis of the 3d ϕ^4 model. As a first step, I have generalized the RG equation to Minkowski spacetime and closed time path, and described the action in a bilocal approximation. I got the expression that shows the entanglement of UV and IR modes. The bilocal couplings describing degrees of environmental freedom starts to evolve due to the system couplings, that is, the degrees of freedom of the system excite the degrees of freedom of the environment. I have found that the saddle point contribution generated during the blocking step is bilocal. The entanglement of the UV and IR degrees of freedom can be realized only with finite momentum vertices, which requires the introduction of the bilocal potential. I have managed to show the entanglement of the UV and IR degrees of freedom. I have introduced three types of CTP graphs,

showing the differences between the STP and CTP formalisms.

The bilocal saddle point contribution generated by the QRG method is not unique to the CTP formalism, it is also present in the case of STP. In the fifth chapter of my dissertation, I have presented the investigation of the action containing bilocal potential in Euclidean spacetime using the traditional renormalization group method.

I have described the role of nonlocality in quantum field theory and how to deal with it. When using the WH equation, the saddle point at the finite momentum had not been considered previously. This is different from the standard gradient expansion analysis. I have assigned a coupling to the bilocal term and followed its evolution. Bilocal couplings are characterized by finite momentum dependence. I have found a non-trivial saddle point for the UV mode, which adds a tree-level contribution to the RG evolution. I have determined the evolution of the local and bilocal potentials by considering fluctuations beyond the tree level. I have presented the phase diagram of the model. In the local case, I have determined the location of the fixed points and their exponents and did the same in the bilocal case. In the bilocal case, I have found two relevant operators, in the local case I found one. The original fix point for the second-order phase transition disappears and a new fix point appears in a new location, which I assume to belong to the first-order phase transition.

Then I have presented how the energy depends on the ground state configuration in a semiclassical approximation. For space, I have assumed a periodic space configuration. I have determined the minimum energy as a function of space parameters. I have found that while the RG method can only describe second-order phase transitions, the energy calculated in the semiclassical approximation can qualitatively indicate the presence of the first-order phase transition.

The results have shown that bilocality significantly changes the model results, so it is worth examining another model with a bilocal action. In the sixth chapter, I have presented an analysis of the 2d bilocal sine-Gordon (BSG) model in Euclidean spacetime. My goal was to show, in addition to the usual Kosterlitz-Thouless (KT) phase transition, that a new phase may appear at the $\beta^2 = 4\pi$ wave number. I have presented the results of the local SG model, in the local potential approximation and the wave function renormalization. I have shown that the use of the bilocal potential and the

WH equation return the results obtained by gradient expansion. In the previous chapters, I have learnt how to calculate the bilocal contribution to RG evolution and applied it to the bilocal 2d SG model. I have shown that the local u coupling of the SG model initiates the evolution of bilocal coupling. I have regained the phase structure characteristics of the KT phase transition with the Coleman point. I have examined the ground state by calculating semiclassical energy. A homogeneous ground state appears, characterized by a finite, but constant space. In addition, an inhomogeneous ground state appears, with a periodic space structure. The homogeneous and the inhomogeneous ground state cases are separated by the $\beta^2 = 4\pi$ critical value. Along with the symmetric phase, I have managed to found three phases in the model. At this critical value, the SG model is considered to be the bosonized version of the non-interacting Thirring model. At this point, the bilocal couplings do not evolve, and the model becomes local at this parameter value. I have shown that the BSG model around the Coleman point reproduces the KT phase transition, and I have recognized the special role of $\beta^2 = 4\pi$. This has not been demonstrated yet in the functional RG method.

In the previous chapters, I have shown that the use of bilocality and closed time path formalism is essential to complete the description of the RG method. In CTP formalism, the role of real-time is necessary. The real-time formulation plays an important role in gravity theory, so I have continued my work in that direction. I have examined the conformally reduced (CR) version of gravity theory, which leads to a scalar model similar to the ones discussed earlier. In the seventh chapter, I have presented a real-time CR version of the QEG model investigated by the RG method.

The Lorentz invariant scale cannot be defined, so I have introduced a more manageable non-invariant scale. In the 4-vector momentum I have separated the frequency from the other 3d spatial momentum. I have defined the renormalization scale in the 3d momentum space. In the evolution equations, I have performed the path integration of frequency, so they depend only on the spatial momentum. However, the lack of a non-perturbative Lorentz invariant regulator prevents the RG method from being formulated in a Lorentz invariant way. For this reason, I have used an RG scheme that, although it breaks symmetry, can be used effectively.

In the new formalism, I have worked with cylinder symmetry instead

of spherical symmetry. I have derived the Wetterich equation for the Euclidean case and then for the Lorentz signature. I have compared the phase structure of Euclidean and Lorentz evolution. In both cases, the model has two fixed points. The location of the points and the value of their critical exponents were determined by different regulators. The two formalisms cause quantitative changes only. In addition to the Litim regulator, the non-gaussian fixed point (NGFP) is a focal point that repels spiral trajectories. During the examination of the regulator dependence, I have not found a regulator where the dependence on the regulator parameters can be minimized.

I have examined the phases of both formalisms with sharp cutoff. This corresponds to the WH equation. In this case too, I have obtained a well-known phase structure in the QEG model with two phases and a non-gaussian fixed point. Although the NGFP remains UV attractive, it is not a focal point. The investigation of CR gravity could only be carried out with the Lorentz signature with the Litim and the sharp cutoff regulator. Other regulators push the non-gaussian fix point into the singularity range. I have shown that the two formalisms give similar results, the non-gaussian fix point is UV attractive in both cases. The Euclidean spacetime results support the Lorentz results.

The critical exponent of the correlation length of NGFP is an important, frequently calculated parameter. In most cases, the exponent is examined to determine whether it is real or imaginary. According to the results so far, NGFP exists in 4d and is UV attractive. This may also be an important issue in lower dimensions. In 3d, I have calculated the value of the critical exponents in the QEG model containing the quadratic curve (\hat{R}^2) in Euclidean space. My goal was to show that there is NGFP in the case of \hat{R}^2 truncation, therefore, I was looking for the regulator that showed the least sensitivity to the regulator parameters. I have determined the critical exponents numerically. The properties of GFP are well known, so I have focused on the behavior of the NGFP. To compare the results with the new truncation, I have repeated the calculation of the critical exponents for the Einstein-Hilbert (EH) action. The principle of minimal sensitivity (PMS) method was used to find the range in the space of the regulator parameters where the regulator dependence is the weakest. In the case of EH I got the Litim regulator for the optimized regulator.

In conclusion, the most important result of my dissertation is that I have generalized the renormalization group method so that it can be used to describe the contributions of mixed states and the entanglement. This required the application of closed time path formalism. I have referred the new method as *quantum renormalization group*. The importance of non-locality and real-time has become evident during the research. For illustration, I have presented multiple examples for the role of these concepts in various scalar models.

Irodalomjegyzék

A szerző publikációi

- [P1] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib. “Quantum renormalization group”. In: *Phys. Rev. D* 93.2 (2016), p. 025008. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.025008. arXiv: 1508.04277.
- [P2] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib. “Euclidean scalar field theory in the bilocal approximation”. In: *Phys. Rev. D* 97.8 (2018), p. 085002. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.085002. arXiv: 1801.08171.
- [P3] I. Steib and S. Nagy. “Renormalization of the bilocal sine-Gordon model”. In: *Int. J. Mod. Phys. A* 34.21 (2019), p. 1950117. DOI: 10.1142/S0217751X19501173. arXiv: 1812.09008.
- [P4] S. Nagy, K. Sailer, and I. Steib. “Renormalization of Lorentzian conformally reduced gravity”. In: *Classical and Quantum Gravity* 36.15 (July 2019), p. 155004. DOI: 10.1088/1361-6382/ab2e20. URL: <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab2e20>.
- [P5] S. Nagy, B. Fazekas, Z. Peli, K. Sailer, and I. Steib. “Regulator dependence of fixed points in quantum Einstein gravity with R^2 truncation”. In: *Class. Quant. Grav.* 35.5 (2018), p. 055001. DOI: 10.1088/1361-6382/aaa6ee. arXiv: 1707.04934 [hep-th].

További hivatkozások

- [1] Christof Wetterich. “Exact evolution equation for the effective potential”. In: *Phys.Lett.* B301 (1993), pp. 90–94. DOI: 10.1016/0370-2693(93)90726-X.

- [2] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. “Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics”. In: *Phys.Rept.* 363 (2002), pp. 223–386. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00098-9. arXiv: hep-ph/0005122.
- [3] Janos Polonyi. “Lectures on the functional renormalization group method”. In: *Central Eur.J.Phys.* 1 (2003), pp. 1–71. DOI: 10.2478/BF02475552. arXiv: hep-th/0110026.
- [4] Tim R. Morris. “The Exact renormalization group and approximate solutions”. In: *Int. J. Mod. Phys. A*9 (1994), pp. 2411–2450. DOI: 10.1142/S0217751X94000972. arXiv: hep-ph/9308265.
- [5] Sandor Nagy. “Lectures on renormalization and asymptotic safety”. In: *Annals Phys.* 350 (2014), pp. 310–346. DOI: 10.1016/j.aop.2014.07.027. arXiv: 1211.4151.
- [6] N. N. Bogolyubov and D. V. Shirkov. “Charge renormalization group in quantum field theory”. In: *Nuovo Cim.* 3 (1956), pp. 845–863. DOI: 10.1007/BF02823486.
- [7] L. P. Kadanoff. “Scaling laws for Ising models near $T(c)$ ”. In: *Physics* 2 (1966), pp. 263–272.
- [8] Kenneth G. Wilson. “Renormalization group and critical phenomena. 1. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture”. In: *Phys. Rev.* B4 (1971), pp. 3174–3183. DOI: 10.1103/PhysRevB.4.3174.
- [9] K. G. Wilson and John B. Kogut. “The Renormalization group and the epsilon expansion”. In: *Phys. Rept.* 12 (1974), pp. 75–200. DOI: 10.1016/0370-1573(74)90023-4.
- [10] Daniel F. Litim. “Critical exponents from optimized renormalization group flows”. In: *Nucl. Phys.* B631 (2002), pp. 128–158. DOI: 10.1016/S0550-3213(02)00186-4. arXiv: hep-th/0203006.
- [11] R. D. Jordan. “Effective Field Equations for Expectation Values”. In: *Phys. Rev.* D33 (1986), pp. 444–454. DOI: 10.1103/PhysRevD.33.444.
- [12] Pradip M. Bakshi and Kalyana T. Mahanthappa. “Expectation value formalism in quantum field theory. 1.” In: *J. Math. Phys.* 4 (1963), pp. 1–11. DOI: 10.1063/1.1703883.
- [13] Zhao-bin Su, Liao-yuan Chen, Xiao-tong Yu, and Kuang-chao Chou. “Influence functional and closed-time-path Green’s function”. In: *Phys. Rev.* B37 (1988), pp. 9810–9812. DOI: 10.1103/PhysRevB.37.9810.
- [14] T. Arimitsu and H. Umezawa. “Nonequilibrium thermo field dynamics”. In: *Prog. Theor. Phys.* 77 (1987), p. 32. DOI: 10.1143/PTP.77.32.

- [15] Antonio Campos and Enric Verdaguer. “Semiclassical equations for weakly inhomogeneous cosmologies”. In: *Phys. Rev. D* 49 (1994), pp. 1861–1880. DOI: 10.1103/PhysRevD.49.1861. arXiv: gr-qc/9307027.
- [16] Janos Polonyi. “Quantum-classical crossover in electrodynamics”. In: *Phys. Rev. D* 74 (2006), p. 065014. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.065014. arXiv: hep-th/0605218.
- [17] B. Reznik and Y. Aharonov. “Time-symmetric formulation of quantum mechanics”. In: *Phys. Rev. A* 52 (1995), pp. 2538–2550. DOI: 10.1103/PhysRevA.52.2538.
- [18] Julian S. Schwinger. “Brownian motion of a quantum oscillator”. In: *J. Math. Phys.* 2 (1961), pp. 407–432. DOI: 10.1063/1.1703727.
- [19] L.P. Kadanoff and G. Baym. *Quantum Statistical Mechanics*. New York: W.A. Benjamin Inc., 1962.
- [20] A. J. Niemi and G. W. Semenoff. “Finite Temperature Quantum Field Theory in Minkowski Space”. In: *Annals Phys.* 152 (1984), p. 105. DOI: 10.1016/0003-4916(84)90082-4.
- [21] Antti J. Niemi and Gordon W. Semenoff. “Thermodynamic Calculations in Relativistic Finite Temperature Quantum Field Theories”. In: *Nucl. Phys. B* 230 (1984), pp. 181–221. DOI: 10.1016/0550-3213(84)90123-8.
- [22] Esteban A. Calzetta, Bei Lok Hu, and Francisco D. Mazzitelli. “Coarse grained effective action and renormalization group theory in semiclassical gravity and cosmology”. In: *Phys. Rept.* 352 (2001), pp. 459–520. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00043-6. arXiv: hep-th/0102199.
- [23] R. P. Feynman and F. L. Vernon Jr. “The Theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system”. In: *Annals Phys.* 24 (1963). [257(1963)], pp. 118–173. DOI: 10.1016/0003-4916(63)90068-X.
- [24] Kuang-chao Chou, Zhao-bin Su, Bai-lin Hao, and Lu Yu. “Equilibrium and Nonequilibrium Formalisms Made Unified”. In: *Phys. Rept.* 118 (1985), pp. 1–131. DOI: 10.1016/0370-1573(85)90136-X.
- [25] Esteban A. Calzetta and Bei-Lok B. Hu. *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780511421471, 9780521641685. DOI: 10.1017/CB09780511535123.
- [26] E. Calzetta and B. L. Hu. “Nonequilibrium Quantum Fields: Closed Time Path Effective Action, Wigner Function and Boltzmann Equation”. In: *Phys. Rev. D* 37 (1988), p. 2878. DOI: 10.1103/PhysRevD.37.2878.

- [27] H. D. Zeh. “On the interpretation of measurement in quantum theory”. In: *Found. Phys.* 1 (1970), pp. 69–76. DOI: 10.1007/BF00708656.
- [28] W. H. Zurek. “Environment induced superselection rules”. In: *Phys. Rev. D* 26 (1982), pp. 1862–1880. DOI: 10.1103/PhysRevD.26.1862.
- [29] B. L. Hu, J. P. Paz, and Y. Zhang. “Quantum Brownian motion in a general environment. 2: Nonlinear coupling and perturbative approach”. In: *Phys. Rev. D* 47 (1993), pp. 1576–1594. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.1576.
- [30] Wojciech H. Zurek, Salman Habib, and Juan Pablo Paz. “Coherent states via decoherence”. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), pp. 1187–1190. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.1187.
- [31] Juan Pablo Paz, Salman Habib, and Wojciech H. Zurek. “Reduction of the wave packet through decoherence: How long does it really take?” In: *Phys. Rev. D* 47 (1993), p. 488. DOI: 10.1103/PhysRevD.47.488.
- [32] S. Sinha and B. L. Hu. “Validity of the minisuperspace approximation: An Example from interacting quantum field theory”. In: *Phys. Rev. D* 44 (1991), pp. 1028–1037. DOI: 10.1103/PhysRevD.44.1028.
- [33] Fernando Lombardo and Francisco D. Mazzitelli. “Coarse graining and decoherence in quantum field theory”. In: *Phys. Rev. D* 53 (1996), pp. 2001–2011. DOI: 10.1103/PhysRevD.53.2001. arXiv: hep-th/9508052.
- [34] Diego A. R. Dalvit and Francisco D. Mazzitelli. “Exact CTP renormalization group equation for the coarse grained effective action”. In: *Phys. Rev. D* 54 (1996), pp. 6338–6346. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.6338. arXiv: hep-th/9605024.
- [35] R. D. Jordan. “Expectation Values in Quantum Cosmology”. In: *Phys. Rev. D* 36 (1987), pp. 3604–3613. DOI: 10.1103/PhysRevD.36.3604.
- [36] E. Calzetta and B. L. Hu. “Dissipation of Quantum Fields From Particle Creation”. In: *Phys. Rev. D* 40 (1989), pp. 656–659. DOI: 10.1103/PhysRevD.40.656.
- [37] E. Calzetta and B. L. Hu. “Closed Time Path Functional Formalism in Curved Space-Time: Application to Cosmological Back Reaction Problems”. In: *Phys. Rev. D* 35 (1987), p. 495. DOI: 10.1103/PhysRevD.35.495.
- [38] E. Calzetta and B. L. Hu. “Quantum fluctuations, decoherence of the mean field, and structure formation in the early universe”. In: *Phys. Rev. D* 52 (1995), pp. 6770–6788. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.6770. arXiv: gr-qc/9505046.
- [39] Chad R. Galley and Manuel Tiglio. “Radiation reaction and gravitational waves in the effective field theory approach”. In: *Phys. Rev. D* 79 (2009), p. 124027. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.124027. arXiv: 0903.1122.

- [40] Carsten Greiner and Berndt Muller. “Classical fields near thermal equilibrium”. In: *Phys. Rev. D* 55 (1997), pp. 1026–1046. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.1026. arXiv: hep-th/9605048.
- [41] S. A. Ramsey and B. L. Hu. “Nonequilibrium inflaton dynamics and reheating. 1. Back reaction of parametric particle creation and curved space-time effects”. In: *Phys. Rev. D* 56 (1997). [Erratum: *Phys. Rev. D* 57, 3798 (1998)], pp. 678–705. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.3798, 10.1103/PhysRevD.56.678. arXiv: hep-ph/9706207.
- [42] D. Boyanovsky, M. D’Attanasio, H. J. de Vega, R. Holman, and D. -S. Lee. “Reheating and thermalization: Linear versus nonlinear relaxation”. In: *Phys. Rev. D* 52 (1995), pp. 6805–6827. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.6805. arXiv: hep-ph/9507414.
- [43] J. P. Paz. “Dissipative effects during the oscillations around a true vacuum”. In: *Phys. Rev. D* 42 (1990), pp. 529–542. DOI: 10.1103/PhysRevD.42.529.
- [44] Philip R. Johnson and B. L. Hu. “Stochastic theory of relativistic particles moving in a quantum field. 2. Scalar Abraham-Lorentz-Dirac-Langevin equation, radiation reaction and vacuum fluctuations”. In: *Phys. Rev. D* 65 (2002), p. 065015. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.065015. arXiv: quant-ph/0101001.
- [45] Chad R. Galley, B. L. Hu, and Shih-Yuin Lin. “Electromagnetic and gravitational self-force on a relativistic particle from quantum fields in curved space”. In: *Phys. Rev. D* 74 (2006), p. 024017. DOI: 10.1103/PhysRevD.74.024017. arXiv: gr-qc/0603099.
- [46] Janos Polonyi. “Effective dynamics of a classical point charge”. In: *Annals Phys.* 342 (2014), pp. 239–263. DOI: 10.1016/j.aop.2014.01.008. arXiv: 1302.3864.
- [47] Janos Polonyi. “Classical and quantum effective theories”. In: *Phys. Rev. D* 90.6 (2014), p. 065010. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.065010. arXiv: 1407.6526.
- [48] Oliver J. Rosten. “Fundamentals of the Exact Renormalization Group”. In: *Phys.Rept.* 511 (2012), pp. 177–272. DOI: 10.1016/j.physrep.2011.12.003. arXiv: 1003.1366.
- [49] Gregory Schehr and Pierre Le Doussal. “Exact multilocal renormalization on the effective action: Application to the random sine-Gordon model statics and nonequilibrium dynamics”. In: *Phys. Rev. E* 68 (2003), p. 046101. DOI: 10.1103/PhysRevE.68.046101. arXiv: cond-mat/0304486.

- [50] Sidney R. Coleman. “The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model”. In: *Phys.Rev.* D11 (1975), p. 2088. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.2088.
- [51] Daniel J. Amit, Yadin Y. Goldschmidt, and G. Grinstein. “Renormalization Group Analysis of the Phase Transition in the 2D Coulomb Gas, Sine-Gordon Theory and xy Model”. In: *J.Phys.* A13 (1980), p. 585. DOI: 10.1088/0305-4470/13/2/024.
- [52] I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. “On the renormalization of periodic potentials”. In: *Phys.Rev.* D63 (2001), p. 045022. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.045022. arXiv: hep-th/9910167.
- [53] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. “Renormalizable parameters of the sine-Gordon model”. In: *Phys.Lett.* B647 (2007), pp. 152–158. DOI: 10.1016/j.physletb.2007.01.060. arXiv: hep-th/0611061.
- [54] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer. “Quantum censorship in two dimensions”. In: *Phys.Lett.* B694 (2010), pp. 89–93. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.09.041. arXiv: 0907.0496.
- [55] R. Daviet and N. Dupuis. “Nonperturbative functional renormalization-group approach to the sine-Gordon model and the Lukyanov-Zamolodchikov conjecture”. In: *Phys. Rev. Lett.* 122.15 (2019), p. 155301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.155301. arXiv: 1812.01908.
- [56] V. L. Berezinskii. “Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems with a continuous symmetry group. II. Quantum systems”. In: *Sov. Phys.-JETP* 34 (1972), pp. 610–616.
- [57] J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless. “Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems”. In: *J.Phys.* C6 (1973), pp. 1181–1203.
- [58] S. Mandelstam. “Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation”. In: *Phys. Rev.* D11 (1975). [138(1975)], p. 3026. DOI: 10.1103/PhysRevD.11.3026.
- [59] Kerson Huang and Janos Polonyi. “Renormalization of the sine-Gordon model and nonconservation of the kink current”. In: *Int.J.Mod.Phys.* A6 (1991), pp. 409–430. DOI: 10.1142/S0217751X91000253.
- [60] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. “Functional renormalization group approach to the sine-Gordon model”. In: *Phys.Rev.Lett.* 102 (2009), p. 241603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.241603. arXiv: 0904.3689.
- [61] J. Kovacs, S. Nagy, and K. Sailer. “Asymptotic safety in the sine-Gordon model”. In: *Phys. Rev.* D91.4 (2015), p. 045029. DOI: 10.1103/PhysRevD.91.045029. arXiv: 1408.2680.

- [62] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. “Generalized universality in the massive sine-Gordon model”. In: *Phys.Rev.* D77 (2008), p. 025026. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.025026. arXiv: hep-th/0611216.
- [63] Stefan Kehrein. “Flow equation solution for the weak to strong coupling crossover in the sine-Gordon model”. In: *Phys.Rev.Lett.* 83 (1999), pp. 4914–4917. DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.4914. arXiv: cond-mat/9908048.
- [64] I. Nandori. “On the renormalization of the bosonized multi-flavor Schwinger model”. In: *Phys.Lett.* B662 (2008), pp. 302–308. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.03.011. arXiv: 0707.2745.
- [65] I. Nandori. “Bosonization and Functional Renormalization Group Approach in the Framework of QED₂”. In: *Phys.Rev.* D84 (2011), p. 065024. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.065024. arXiv: 1008.2934.
- [66] M. Reuter. “Nonperturbative evolution equation for quantum gravity”. In: *Phys.Rev.* D57 (1998), pp. 971–985. DOI: 10.1103/PhysRevD.57.971. arXiv: hep-th/9605030.
- [67] Martin Reuter and Frank Saueressig. “Functional Renormalization Group Equations, Asymptotic Safety, and Quantum Einstein Gravity”. In: *Geometric and topological methods for quantum field theory.* 2010, pp. 288–329. DOI: 10.1017/CB09780511712135.008. arXiv: 0708.1317.
- [68] Martin Reuter and Frank Saueressig. “Quantum Einstein Gravity”. In: *New J.Phys.* 14 (2012), p. 055022. DOI: 10.1088/1367-2630/14/5/055022. arXiv: 1202.2274.
- [69] Steven Weinberg. *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation.* In *General Relativity: An Einstein centenary survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, 1979. Chap. 16, pp. 790–831.
- [70] Djamel Dou and Roberto Percacci. “The running gravitational couplings”. In: *Class. Quant. Grav.* 15 (1998), pp. 3449–3468. DOI: 10.1088/0264-9381/15/11/011. arXiv: hep-th/9707239.
- [71] O. Lauscher and M. Reuter. “Is quantum Einstein gravity nonperturbatively renormalizable?” In: *Class.Quant.Grav.* 19 (2002), pp. 483–492. DOI: 10.1088/0264-9381/19/3/304. arXiv: hep-th/0110021.
- [72] Roberto Percacci. “Asymptotic Safety”. In: (2007). arXiv: 0709.3851.
- [73] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. “Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation”. In: *Annals Phys.* 324 (2009), pp. 414–469. DOI: 10.1016/j.aop.2008.08.008. arXiv: 0805.2909.

- [74] Gaurav Narain and Roberto Percacci. “Renormalization Group Flow in Scalar-Tensor Theories. I”. In: *Class. Quant. Grav.* 27 (2010), p. 075001. DOI: 10.1088/0264-9381/27/7/075001. arXiv: 0911.0386.
- [75] Pietro Donà, Astrid Eichhorn, and Roberto Percacci. “Matter matters in asymptotically safe quantum gravity”. In: *Phys. Rev.* D89.8 (2014), p. 084035. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.084035. arXiv: 1311.2898.
- [76] Nicolai Christiansen, Daniel F. Litim, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. “Asymptotic safety of gravity with matter”. In: *Phys. Rev.* D97.10 (2018), p. 106012. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.106012. arXiv: 1710.04669.
- [77] Natália Alkofer and Frank Saueressig. “Asymptotically safe $f(R)$ -gravity coupled to matter I: the polynomial case”. In: *Annals Phys.* 396 (2018), pp. 173–201. DOI: 10.1016/j.aop.2018.07.017. arXiv: 1802.00498.
- [78] Astrid Eichhorn. “An asymptotically safe guide to quantum gravity and matter”. In: (2018). arXiv: 1810.07615.
- [79] Janos Polonyi. “Stability and causality of multi-local theories”. In: *EPL* 120.4 (2017), p. 40005. DOI: 10.1209/0295-5075/120/40005. arXiv: 1708.02027.
- [80] Janos Polonyi. “Boost invariant regulator for field theories”. In: *Int. J. Mod. Phys.* A34.03n04 (2019), p. 1950017. DOI: 10.1142/S0217751X19500179. arXiv: 1803.09292.
- [81] Martin Reuter and Holger Weyer. “Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity”. In: *Phys. Rev.* D79 (2009), p. 105005. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.105005. arXiv: 0801.3287.
- [82] Martin Reuter and Holger Weyer. “The Role of Background Independence for Asymptotic Safety in Quantum Einstein Gravity”. In: *Gen. Rel. Grav.* 41 (2009), pp. 983–1011. DOI: 10.1007/s10714-008-0744-z. arXiv: 0903.2971.
- [83] Jan-Eric Daum and Martin Reuter. “The Effective Potential of the Conformal Factor in Quantum Einstein Gravity”. In: *PoS CLAQG08* (2011), p. 013. DOI: 10.22323/1.079.0013. arXiv: 0910.5401.
- [84] Pedro F. Machado and R. Percacci. “Conformally reduced quantum gravity revisited”. In: *Phys. Rev.* D80 (2009), p. 024020. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.024020. arXiv: 0904.2510.
- [85] Alfio Bonanno and Filippo Guarnieri. “Universality and Symmetry Breaking in Conformally Reduced Quantum Gravity”. In: *Phys. Rev.* D86 (2012), p. 105027. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.105027. arXiv: 1206.6531.

- [86] Juergen A. Dietz and Tim R. Morris. “Background independent exact renormalization group for conformally reduced gravity”. In: *JHEP* 04 (2015), p. 118. DOI: 10.1007/JHEP04(2015)118. arXiv: 1502.07396.
- [87] Astrid Eichhorn. “Towards coarse graining of discrete Lorentzian quantum gravity”. In: *Class. Quant. Grav.* 35.4 (2018), p. 044001. DOI: 10.1088/1361-6382/aaa0a3. arXiv: 1709.10419.
- [88] Astrid Eichhorn. “Steps towards Lorentzian quantum gravity with causal sets”. In: *9th International Conference: Spacetime - Matter - Quantum Mechanics: From discrete structures and dynamics to top-down causation (DICE2018) Castiglioncello, Tuscany, Italy, September 17-21, 2018*. 2019. arXiv: 1902.00391.
- [89] Elisa Manrique, Stefan Rechenberger, and Frank Saueressig. “Asymptotically Safe Lorentzian Gravity”. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011), p. 251302. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.251302. arXiv: 1102.5012.
- [90] Stefan Rechenberger and Frank Saueressig. “A functional renormalization group equation for foliated spacetimes”. In: *JHEP* 03 (2013), p. 010. DOI: 10.1007/JHEP03(2013)010. arXiv: 1212.5114.
- [91] Jorn Biemans, Alessia Platania, and Frank Saueressig. “Quantum gravity on foliated spacetimes: Asymptotically safe and sound”. In: *Phys. Rev. D* 95.8 (2017), p. 086013. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.086013. arXiv: 1609.04813.
- [92] Jorn Biemans, Alessia Platania, and Frank Saueressig. “Renormalization group fixed points of foliated gravity-matter systems”. In: *JHEP* 05 (2017), p. 093. DOI: 10.1007/JHEP05(2017)093. arXiv: 1702.06539.
- [93] W. B. Houthoff, A. Kurov, and F. Saueressig. “Impact of topology in foliated Quantum Einstein Gravity”. In: *Eur. Phys. J. C* 77 (2017), p. 491. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5046-8. arXiv: 1705.01848.
- [94] Alessia Platania and Frank Saueressig. “Functional Renormalization Group Flows on Friedman–Lemaître–Robertson–Walker backgrounds”. In: *Found. Phys.* 48.10 (2018), pp. 1291–1304. DOI: 10.1007/s10701-018-0181-0. arXiv: 1710.01972.
- [95] Alessio Baldazzi, Roberto Percacci, and Vedran Skrinjar. “Quantum fields without Wick rotation”. In: (2019). arXiv: 1901.01891.
- [96] Benjamin Knorr. “Lorentz symmetry is relevant”. In: (2018). arXiv: 1810.07971.
- [97] Max Niedermaier and Martin Reuter. “The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity”. In: *Living Rev. Rel.* 9 (2006), p. 5.

- [98] M. Reuter and Frank Saueressig. “Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation”. In: *Phys.Rev.* D65 (2002), p. 065016. DOI: 10.1103/PhysRevD.65.065016. arXiv: hep-th/0110054.
- [99] Daniel F. Litim. “Optimization of the exact renormalization group”. In: *Phys.Lett.* B486 (2000), pp. 92–99. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00748-6. arXiv: hep-th/0005245.
- [100] Daniel F. Litim. “Optimized renormalization group flows”. In: *Phys.Rev.* D64 (2001), p. 105007. DOI: 10.1103/PhysRevD.64.105007. arXiv: hep-th/0103195.
- [101] S. Nagy, J. Krizsan, and K. Sailer. “Infrared fixed point in quantum Einstein gravity”. In: *JHEP* 1207 (2012), p. 102. DOI: 10.1007/JHEP07(2012)102. arXiv: 1203.6564.
- [102] I. Nandori. “Functional renormalization group with a compactly supported smooth regulator function”. In: *JHEP* 1304 (2013), p. 150. DOI: 10.1007/JHEP04(2013)150. arXiv: 1208.5021.
- [103] Jan M. Pawłowski, Michael M. Scherer, Richard Schmidt, and Sebastian J. Wetzel. “Physics and the choice of regulators in functional renormalisation group flows”. In: *Annals Phys.* 384 (2017), pp. 165–197. DOI: 10.1016/j.aop.2017.06.017. arXiv: 1512.03598.
- [104] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhasz, and K. Sailer. “Critical exponents in quantum Einstein gravity”. In: *Phys. Rev.* D88.11 (2013), p. 116010. DOI: 10.1103/PhysRevD.88.116010. arXiv: 1307.0765.
- [105] Franz J. Wegner and Anthony Houghton. “Renormalization group equation for critical phenomena”. In: *Phys. Rev.* A8 (1973), pp. 401–412. DOI: 10.1103/PhysRevA.8.401.
- [106] Sen-Ben Liao, Janos Polonyi, and Michael Strickland. “Optimization of renormalization group flow”. In: *Nucl.Phys.* B567 (2000), pp. 493–514. DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00496-4. arXiv: hep-th/9905206.
- [107] Alfio Bonanno and Martin Reuter. “Modulated Ground State of Gravity Theories with Stabilized Conformal Factor”. In: *Phys. Rev.* D87.8 (2013), p. 084019. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.084019. arXiv: 1302.2928.
- [108] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. “Ultraviolet properties of f(R)-gravity”. In: *Int.J.Mod.Phys.* A23 (2008), pp. 143–150. DOI: 10.1142/S0217751X08038135. arXiv: 0705.1769.
- [109] Pedro F. Machado and Frank Saueressig. “On the renormalization group flow of f(R)-gravity”. In: *Phys.Rev.* D77 (2008), p. 124045. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.124045. arXiv: 0712.0445.

- [110] Stefan Rechenberger and Frank Saueressig. “The R^2 phase-diagram of QEG and its spectral dimension”. In: *Phys.Rev.* D86 (2012), p. 024018. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.024018. arXiv: 1206.0657.
- [111] Daniel F. Litim. “Mind the gap”. In: *Int.J.Mod.Phys.* A16 (2001), pp. 2081–2088. DOI: 10.1142/S0217751X01004748. arXiv: hep-th/0104221.
- [112] Leonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. “Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group”. In: *Phys.Rev.* D67 (2003), p. 065004. DOI: 10.1103/PhysRevD.67.065004. arXiv: hep-th/0211055.
- [113] Leonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. “Nonperturbative renormalization group approach to the Ising model: A Derivative expansion at order partial**4”. In: *Phys.Rev.* B68 (2003), p. 064421. DOI: 10.1103/PhysRevB.68.064421. arXiv: hep-th/0302227.
- [114] Leonie Canet. “Optimization of field-dependent nonperturbative renormalization group flows”. In: *Phys. Rev.* B71 (2005), p. 012418. DOI: 10.1103/PhysRevB.71.012418. arXiv: hep-th/0409300.
- [115] O. Lauscher and M. Reuter. “Flow equation of quantum Einstein gravity in a higher derivative truncation”. In: *Phys.Rev.* D66 (2002), p. 025026. DOI: 10.1103/PhysRevD.66.025026. arXiv: hep-th/0205062.
- [116] I. Steib, S. Nagy, and J. Polonyi. “Renormalization in Minkowski space-time”. In: (2019). eprint: arXiv:1908.11311.