Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Preserver problems on structures of positive operators

Nagy Gergő

Témavezető: Dr. Molnár Lajos

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2013.

1. Introduction

Preserver problems appear in many parts of mathematics and their investigation forms an extensive research field. They have been studied systematically rather in matrix theory. The corresponding study concerns the characterizations of all linear transformations on a given vector space of matrices that preserve certain functions, subsets, relations, etc. which are closely related to the space. Such problems are called linear preserver problems (LPPs). For surveys on these problems the reader can consult the papers [**2, 3, 11**]. Nowadays, the area of LPPs is investigated also in the infinite dimensional setting, i.e. in the case where instead of matrices, bounded linear operators on Hilbert or Banach spaces are considered. For a corresponding survey we refer to, e.g. [**1**].

In the last few decades the investigation of preserver problems has been extended to researches in which nonlinear structures of operators are involved. In the mathematical formulation of quantum mechanics due to John von Neumann several such structures of Hilbert space operators appear. These objects are usually called quantum structures. One of the most important such structure is the collection of density operators. In the dissertation, there are several results about preserver problems on the set of these operators.

Some words about the content of the thesis which is mainly based on the papers [**6, 7, 9, 10**]. In the first chapter, we give a general overview about preserver problems on algebraic structures of operators, then we collect those preliminaries and terminology which are necessary for the material of the dissertation. The second chapter is devoted to the description of some bijections on the set of density operators with preserver properties related to commutativity. In the third chapter relative entropy preserving maps on the collection of density operators or of invertible density operators are investigated. Chapter 4 contains results concerning the structure of the isometries of certain spaces of positive operators in the von Neumann - Schatten classes with respect to metrics which are closely related to the p-norms. Moreover, we present identification lemmas which form the key part of the proof of some of these results. In the fifth chapter, we determine the general form of the surjective isometries of the space of invertible positive operators acting on a 2-dimensional Hilbert space endowed with the Thompson metric or the Hilbert projective metric.

In what follows, we collect those notions, basic facts and notation which are used throughout the dissertation. H denotes a complex Hilbert space and the C^*-algebra of all bounded linear operators acting on H is denoted by $B(H)$. We now present the notions of von Neumann - Schatten classes and some related concepts which are used in several chapters of the thesis. If $A \in B(H)$, then $|A| = \sqrt{A^*A}$ stands for its absolute value. Let $p \geq 1$ be a number. We denote by $C_p(H)$ the set of those elements of $B(H)$ which have the property that for every orthonormal basis $(e_i)_{i\in I}$ of H the series $\sum_{i\in I}\langle |A|^p e_i, e_i\rangle$ is convergent. This set is usually called the von Neumann - Schatten p-class. We remark that in the case where $\dim H < \infty$ one has $C_p(H) = B(H)$. Before introducing the usual norm on $C_p(H)$, we define the trace functional in the following way. If $A \in C_1(H)$, then

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i\in I}\langle Ae_i, e_i\rangle,$$

where $(e_i)_{i\in I}$ is an orthonormal basis in H. We remark that the trace $\operatorname{tr} A$ of A is well-defined, since the latter sum is convergent and its value does not depend on the special choice of the orthonormal basis $(e_i)_{i\in I}$. For each $A \in C_p(H)$ one defines the p-norm of A by the formula

$$\|A\|_p \doteq (\operatorname{tr} |A|^p)^{\frac{1}{p}} .$$

It is well-known that the function $\|.\|_p \colon C_p(H) \to \mathbb{R}$ is a complete norm on the linear space $C_p(H)$. As for the case $p = \infty$, let $\|.\|_\infty$ signify the operator norm on $B(H)$. We call a positive element of $C_1(H)$ a density operator if it has unit trace. The set of the density operators acting on H is denoted by $S(H)$. By an antiunitary operator we mean a surjective conjugate-linear isometry on H.

2. Commutativity preserving maps on density operators

Chapter 2 is devoted to problems concerning bijective transformations on density operators with invariance properties related to commutativity. The corresponding results describe the general forms of those maps. Before we formulate our theorem on the structure of commutativity preserving bijections of $S(H)$, we introduce a notation which is used in it. If $A \in B(H)$ and $\lambda \in \sigma_p(A)$ is an eigenvalue of A, then denote by $P_A(\lambda)$ the projection on H whose range is the eigensubspace of A corresponding to λ. A more restrictive version of the following result is the statement [**9**, Theorem 1.] which contains a separability condition, too.

Theorem. (Nagy)
Assume that $\dim H \geq 3$. *Moreover, suppose that* $\phi \colon S(H) \to S(H)$ *is a bijection which preserves commutativity, i.e. satisfies*

$$\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A) \iff AB = BA$$

for any $A, B \in S(H)$. *Then there is a unitary or an antiunitary operator* U *on* H*, and for any* $A \in S(H)$ *there exists an injective function* $f_A \colon \sigma_p(A) \to [0, 1]$ *such that*

$$\phi(A) = U\left(\sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} f_A(\lambda) P_A(\lambda)\right) U^*.$$

The above statement shows that the form of the commutativity preserving bijections of $S(H)$ is slightly irregular. To obtain a more regular form we have to assume a bit more requirements concerning the transformations under consideration. In the results of Chapter 2, we determine the structure of those bijections on $S(H)$ which preserve not only commutativity but also a certain measure of it. We define this quantity as follows. For a fixed unitarily invariant norm $\|.\| \colon C_1(H) \to \mathbb{R}$ (i.e., a norm which satisfies $\|UTV\| = \|T\|$ for each $T \in C_1(H)$ and unitary operators U, V on H) and any $A, B \in S(H)$ the measure of commutativity between them is

$$\|AB - BA\|.$$

The below assertions describe the structure of the bijections on $S(H)$ which preserve the last displayed quantity. Those special cases of these statements when $\|.\|$ is a p-norm ($1 \leq p \leq \infty$) have been appeared in the author's paper [**9**] as Theorems 2 and 3.

THEOREM. (Nagy)
Suppose that $\dim H = \infty$ *and that* $\phi \colon S(H) \to S(H)$ *is a bijection which satisfies*

$$\|\phi(A)\phi(B) - \phi(B)\phi(A)\| = \|AB - BA\| \tag{2.1}$$

for each pair $A, B \in S(H)$. *Then we have a unitary or an antiunitary operator* U *on* H *such that* ϕ *can be written in the form*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H)).$$

As for finite dimensional spaces we have the following statement.

THEOREM. (Nagy)
Suppose that $3 \leq \dim H < \infty$ *and that* $\phi \colon S(H) \to S(H)$ *is a bijective mapping with the property that* (2.1) *holds for every* $A, B \in S(H)$. *Then there is a unitary or an antiunitary operator* U *on* H *such that for each* $A \in S(H)$ *one has*

$$\phi(A) = UAU^*$$

or

$$\phi(A) = \frac{2}{\dim H} I - UAU^*,$$

where I *denotes the identity operator on* H.

In the last result of Chapter 2, we give the form of those bijective commutativity preserving transformations on $S(H)$ which leave the fidelity between commuting elements invariant. This quantity, which has a fundamental role in quantum information theory is defined in the following way. For any $A, B \in S(H)$ the fidelity $F(A, B)$ between them is

$$F(A, B) = \operatorname{tr} \sqrt{\sqrt{A} B \sqrt{A}}.$$

The last theorem in the second chapter reads as follows.

THEOREM. (Nagy [**9**])
Assume that $\dim H \geq 3$. *Furthermore, suppose that* $\phi \colon S(H) \to S(H)$ *is a bijection which preserves commutativity and has the property that*

$$F(\phi(A), \phi(B)) = F(A, B)$$

holds for each pair $A, B \in S(H)$ *of commuting operators. Then there exists a unitary or an antiunitary operator* U *on* H *such that* ϕ *can be written in the form*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H)).$$

3. Relative entropy preserving maps on density operators

This chapter contains theorems on relative entropy preserving maps of subsets of density operators. Throughout it we assume that H is finite dimensional. Relative entropy is a fundamental notion in quantum information theory which has several versions. We recall the definitions of those which are considered in the third chapter.

(i) Umegaki relative entropy: $S(A\|B) = \operatorname{tr} A(\log A - \log B)$ if $\operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B$, and $S(A\|B) = \infty$ otherwise
(ii) Belavkin-Staszewski relative entropy:
$S_B(A\|B) = \operatorname{tr} \sqrt{A} \log \sqrt{A} B^{-1} \sqrt{A}$ if $\operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B$, and $S_B(A\|B) = \infty$ otherwise
(iii) Tsallis relative entropy: $S_T(A\|B) = 1/(1-q)(1 - \operatorname{tr} A^q B^{1-q})$
(iv) Quadratic relative entropy: $S_Q(A\|B) = \operatorname{tr} A^{-1}(A-B)^2$ if $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$, and $S_Q(A\|B) = \infty$ otherwise
(v) Jensen-Shannon divergence:
$$D_J(A\|B) = \frac{S\left(A \,\middle\|\, \frac{1}{2}(A+B)\right) + S\left(B \,\middle\|\, \frac{1}{2}(A+B)\right)}{2}$$

In these definitions, $A, B \in S(H)$, the number $0 < q < 1$ is fixed, supp signifies the orthogonal complement of the kernel of a density operator and log denotes the logarithm with base 2. Furthermore, the -1$^{\text{th}}$ power and the logarithm of a positive operator on H are only taken on its range.

In [**8**], the authors have determined the structure of those transformations on $S(H)$ which preserve the Umegaki relative entropy. Motivated by their result, we have described the general form of all mappings of the set of density operators on H which leave one of the quantities (ii)–(v) invariant. We emphasize that in the corresponding statement there are no assumptions on the transformation in question only that it should preserve the relative entropy under consideration. However the conclusion is that such a map has a very simple form. This is formulated in the first theorem of Chapter 3.

Theorem. (Molnár, Nagy [**7**])
Let $X(.\|.)$ signify any of the quantities (ii)–(v). *Assume that $\phi\colon S(H) \to S(H)$ is a mapping with the property that*

$$X(\phi(A)\|\phi(B)) = X(A\|B) \tag{3.1}$$

holds for all $A, B \in S(H)$. Then there exists a unitary or an antiunitary operator U on H such that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H)).$$

In the differential geometric aspects of quantum theory, instead of $S(H)$ they usually consider the set $M(H)$ of invertible density operators on H. The reason is that from differential geometric point of view $M(H)$ is a much richer structure, it is a manifold. In [**5**] Molnár has determined the general form of those surjective transformations on $M(H)$ which preserve the relative entropy (i) or (ii). We have extended the corresponding results to the case of the quantities (iii),(iv) and obtained the second theorem in Chapter 3.

Theorem. (Molnár, Nagy [**7**])
Let $X(.\|.)$ signify one of the relative entropies (iii),(iv). *Assume that ϕ is a surjective selfmap of $M(H)$ with the property that* (3.1) *holds for each pair $A, B \in M(H)$. Then there exists a unitary or an antiunitary operator U on H such that ϕ can be written in the form*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in M(H)).$$

4. Isometries of positive operators and identification lemmas

Chapter 4 is devoted to the investigation of isometries of spaces of positive operators and it also deals with some identification lemmas. Before summarizing the results of this chapter, we present the main notation used in it. Let $1 \leq p < \infty$. The metric induced by the p-norm is denoted by d_p (this concerns also the case $p = \infty$), the symbol $C_p(H)^+$ stands for the set of all positive operators in $C_p(H)$ and $C_p(H)_1^+$ signifies the collection of those elements in $C_p(H)^+$ which have unit p-norm. We remark that $C_1(H)_1^+ = S(H)$.

Now we can formulate the identification lemmas appearing in the fourth chapter. It is an immediate consequence of them that, roughly speaking, in finite dimension the elements of $C_p(H)_1^+$, respectively $S(H)$ can be identified by their distances to the members of $P_1(H)$ in the metric d_p, respectively d_∞.

Lemma. (Nagy [**10**])
Assume that H is finite dimensional and let $1 \leq p, \gamma < \infty$ be fixed numbers. If $A, B \in C_p(H)_1^+$ have the property that

$$d_p(A, \gamma P) = d_p(B, \gamma P)$$

is satisfied by each $P \in P_1(H)$, then $A = B$.

Lemma. (Nagy)
Assume that H is finite dimensional and let $A, B \in S(H)$ be such that

$$d_\infty(A, P) = d_\infty(B, P)$$

for each $P \in P_1(H)$. Then $A = B$.

In the fourth chapter, there are several results concerning the isometries of $C_p(H)_1^+$ and those of $C_p(H)^+$ $(1 \leq p < \infty)$. In the first theorem of Chapter 4, we determine the structure of the isometries of $(S(H), d_p)$ $(1 < p < \infty)$. This result appeared as part of [**7**, Theorem 1] under the additional condition $\dim H < \infty$. It reads as follows.

Theorem. (Molnár, Nagy)
Let $1 < p < \infty$ be a fixed number and assume that ϕ is an isometry of $(S(H), d_p)$. Then we have a linear or a conjugate-linear isometry V of H with the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = VAV^* \quad (A \in S(H)).$$

The next result of Chapter 4 describes the structure of the isometries of $(S(H), d_\infty)$ under the condition $\dim H < \infty$.

Theorem. (Nagy [**10**])
Suppose that H is finite dimensional and that ϕ is an isometry of $(S(H), d_\infty)$. Then we have a unitary or an antiunitary operator U on H with the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H)). \tag{4.1}$$

In what follows we formulate the third theorem of the fourth chapter which describes the general form of the surjective isometries of $C_p(H)^+$ with respect to d_p $(1 < p < \infty)$.

Theorem. (Nagy)
Let $1 < p < \infty$ and assume that ϕ is a surjective isometry of $(C_p(H)^+, d_p)$. Then there exists a unitary or an antiunitary operator U on H which has the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in C_p(H)^+).$$

As for finite dimensional spaces, we present the structure of the isometries of the cone of complex positive semidefinite matrices with respect to d_p in the statement below $(1 < p < \infty)$.

Theorem. (Nagy)
Assume that $\dim H < \infty$ and let $1 < p < \infty$. Furthermore, suppose that $\phi\colon C_p(H)^+ \to C_p(H)^+$ is an isometry with respect to d_p. Then there is a positive operator $X \in B(H)$ and there exists either a unitary or an antiunitary operator U on H such that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = UAU^* + X \quad (A \in C_p(H)^+).$$

There is a statement in Chapter 4 concerning the description of the surjective isometries of $(C_p(H)^+_1, d_p)$ $(1 < p < \infty)$. It reads as follows.

Theorem. (Nagy [**10**])
Let $1 < p < \infty$ be a number and assume that ϕ is a surjective isometry of $(C_p(H)^+_1, d_p)$. Then there exists a unitary or an antiunitary operator U on H which has the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in C_p(H)^+_1).$$

There is a corollary of this statement in Chapter 4. It concerns the structure of the isometries of $(S(H), \rho_p)$, where $1 \le p < \infty$ and ρ_p is the function defined by

$$\rho_p(A, B) = d_p\left(A^{\frac{1}{p}}, B^{\frac{1}{p}}\right) \quad (A, B \in S(H)).$$

These metrics are introduced in quantum information theory to measure the distance between quantum states, the quantum mechanical objects represented by density operators. The mentioned corollary describes the general form of the surjective isometries of $(S(H), \rho_p)$. It can be read below.

COROLLARY. (Nagy)
Let $1 < p < \infty$ *and assume that* ϕ *is a surjective isometry of* $(S(H), \rho_p)$. *Then there exists a unitary or an antiunitary operator* U *on* H *which has the property that* ϕ *can be written in the form* (4.1).

5. Thompson isometries of positive operators

The results in Chapter 5 concern the structure of the surjective isometries of the space of invertible positive operators on H equipped with the Thompson metric or the Hilbert projective metric under the condition $\dim H = 2$. In what follows, we introduce the definitions of these metrics. Let X be a real normed space and $K \neq \emptyset$ be a closed convex cone in X with the property that $K \cap (-K) = \{0\}$. We define a relation $\leq$ on the space X in the following way. For a given pair $x, y \in X$ of vectors $x \leq y$ if and only if $y - x \in K$. An equivalence relation $\sim$ is defined on $K \setminus \{0\}$ by $x \sim y$ if and only if there exist numbers $s, t > 0$ with the property that $sx \leq y \leq tx$. The equivalence classes of $K \setminus \{0\}$ induced by $\sim$ are called components. Let C be a component and for each pair $x, y \in C$ define $M(x/y) = \inf\{t > 0 \mid x \leq ty\}$. The Thompson metric d_T is defined by

$$d_T(x, y) = \log \max\{M(x/y), M(y/x)\} \quad (x, y \in C)$$

on C, where log signifies the natural logarithm. One defines the Hilbert projective metric d_H by

$$d_H(x, y) = \log M(x/y)M(y/x) \quad (x, y \in C)$$

on C. We remark that d_H is not in fact a metric, it is just a pseudo-metric.

It is well-known that the set $B(H)^+$ of all positive operators on H is a nonempty closed convex cone in $B(H)$ considered as a real normed space, and $B(H)^+ \cap (-B(H)^+) = \{0\}$. Moreover, the collection $B(H)^+_{-1}$ of the invertible elements in $B(H)^+$ is a component of $B(H)^+ \setminus \{0\}$. In [**4**] Molnár has determined the general forms of the surjective isometries of $B(H)^+_{-1}$ with respect to d_T or d_H under the condition $\dim H \geq 3$. The results of the fifth chapter extend the theorems in the cited paper to the 2-dimensional case. They read as follows.

Theorem. (Molnár, Nagy [**6**])
Assume that H is 2-dimensional and that ϕ is a surjective isometry of $B(H)^+_{-1}$ with respect to d_T. Then we have a bijective linear or conjugate-linear operator S on H with the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = SAS^* \quad (A \in B(H)^+_{-1})$$

or in the form

$$\phi(A) = SA^{-1}S^* \quad (A \in B(H)^+_{-1}).$$

Theorem. (Molnár, Nagy [**6**])
Assume that H is 2-dimensional and that $\phi\colon B(H)^+_{-1} \to B(H)^+_{-1}$ is a surjective isometry with respect to d_H. Then we have a bijective linear or conjugate-linear operator S on H and a function $\tau\colon B(H)^+_{-1} \to]0, \infty[$ with the property that ϕ can be written in the form

$$\phi(A) = \tau(A) S A S^* \quad (A \in B(H)^+_{-1}).$$

1. Bevezetés

A megőrzési problémák a matematika sok ágának fontos részét képezik, vizsgálatuk napjainkra kiterjedt kutatási területté vált. Ezen problémák szisztematikus tanulmányozására nagyrészt a mátrixelmélet keretei között került sor. A kapcsolódó vizsgálatok valamely mátrixokból álló vektortér olyan lineáris transzformációi karakterizációira vonatkoznak, melyek invariánsan hagynak bizonyos, az adott térre jellemző függvényt, részhalmazt, relációt, stb. A kapcsolódó problémákat lineáris megőrzési problémáknak nevezik (LPP-k). Ezekkel kapcsolatos tanulmányok olvashatók a [**2, 3, 11**] dolgozatokban. Napjainkban az LPP-k területén a végtelen dimenziós esetben is folynak kutatások, azaz azon esetben, melyben mátrixok helyett Hilbert- vagy Banach-terek korlátos lineáris operátorai szerepelnek. Egy ezekre vonatkozó tanulmányt tartalmaz például az [**1**] publikáció.

Az utóbbi évtizedekben a megőrzési problémák területe olyan kérdések vizsgálatára is kiterjedt, melyekben operátorok nemlineáris struktúrái szerepelnek. A kvantummechanika Neuamnn János-féle matematikai leírásában több ilyen, Hilbert-terek operátorai alkotta struktúra jelenik meg. Ezeket általában kvantumstruktúráknak hívják. Az egyik legfontosabb ilyen struktúra a sűrűségoperátorok tere. Eme dolgozat több olyan eredményt tartalmaz, mely az említett operátorok halmaza megőrzési problémáira vonatkozik.

A következőkben a disszertáció tartalmának néhány mondatos összefoglalója található. A dolgozat új eredményei túlnyomó többsége a [**6, 7, 9, 10**] cikkeken alapul. Az első fejezet áttekintést ad operátorok algebrai struktúrái megőrzési problémáiról, ezt követően pedig összefoglaljuk azon alapismereteket és azt a terminológiát, melyeket a dolgozatban használunk. A második fejezet a sűrűségoperátorok halmazán értelmezett, kommutativitással kapcsolatos invariancia tulajdonságokkal bíró, bijektív transzformációk struktúrája leírásáról szól. A harmadik fejezetben a sűrűségoperátorok, illetve az invertálható sűrűségoperátorok halmaza relatív entrópiát megőrző leképezései kerülnek ismertetésre. A következő fejezetben a Neumann-Schatten-osztályok pozitív elemei olyan izometriái szerkezetével kapcsolatos eredmények találhatók, melyek a p-normákhoz szorosan kapcsolódó metrikákra vonatkoznak. Továbbá azonossági lemmák is bemutatásra kerülnek, melyek kulcsfontosságú részét képezik az utóbbi eredmények némelyike bizonyításának. Az ötödik fejezetben meghatározzuk a $\dim H = 2$ esetben a H-n ható pozitív invertálható operátorok tere Thompson-metrikára illetve Hilbert projektív metrikára vonatkozó szürjektív izometriái általános alakját.

A következőkben ismertetjük azokat a fogalmakat, előismereteket és jelöléseket, melyeket a disszertációban használunk. H egy komplex Hilbert-teret jelöl, a H-n ható korlátos lineáris operátorok C^*-algebrájának jele pedig $B(H)$. Az alábbiakban bevezetjük a Neumann-Schatten-osztályokat és néhány kapcsolódó fogalmat, melyek a disszertáció több fejezetében előfordulnak. Ha $A \in B(H)$, akkor $|A| = \sqrt{A^*A}$ jelöli az abszolút értékét. Legyen $p \geq 1$ egy szám. $C_p(H)$-val jelöljük azon $A \in B(H)$ elemek halmazát, melyekre a $\sum_{i\in I}\langle |A|^p e_i, e_i\rangle$ sor minden $\{e_i\}_{i\in I} \subset H$ ortonormált bázis esetén konvergens. Ezen halmazt általában a Neumann-Schatten p-osztálynak nevezik. Megjegyezzük, hogy a $\dim H < \infty$ esetben $C_p(H) = B(H)$. Mielőtt megadjuk a szokásos normát $C_p(H)$-n, definiáljuk a trace funkcionált a következő módon. Ha $A \in C_1(H)$, akkor

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i\in I}\langle Ae_i, e_i\rangle,$$

ahol $(e_i)_{i\in I} \subset H$ egy ortonormált bázis. Megjegyezzük, hogy a $\operatorname{tr} A$ mennyiség jól definiált, mivel az utóbbi sor konvergens és értéke független az $(e_i)_{i\in I}$ bázis megválasztásától. Adott $A \in C_p(H)$ esetén az A operátor p-normája az

$$\|A\|_p \doteq \left(\operatorname{tr} |A|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

formulával van definiálva. Jól ismert, hogy a $\|.\|_p : C_p(H) \to \mathbb{R}$ függvény egy Banach-tér norma a $C_p(H)$ vektortéren. Ami a $p = \infty$ esetet illeti, a konvencióknak megfelelően $\|.\|_\infty$-val jelöljük az operátornormát. Egy $A \in C_1(H)$ pozitív elemet sűrűségoperátornak mondunk, ha $\operatorname{tr} A = 1$. A H-n ható sűrűségoperátorok halmazának jele $S(H)$. Antiunitér operátoron H egy szürjektív konjugált-lineáris izometriáját értjük.

2. Kommutálástartó leképezések sűrűségoperátorokon

A második fejezet olyan problémák vizsgálatát tartalmazza, melyekben a sűrűségoperátorok halmazán értelmezett, kommutativitással kapcsolatos invariancia tulajdonságokkal bíró, bijektív transzformációk szerepelnek. A kapcsolódó eredmények leírják ezen leképezések általános alakját. Mielőtt megfogalmazzuk $S(H)$ kommutálástartó bijekciói struktúrájáról szóló tételünket, bevezetünk egy benne szereplő jelölést. Ha $A \in B(H)$ egy operátor, $\lambda \in \sigma_p(A)$ pedig egy sajátértéke A-nak, akkor jelölje $P_A(\lambda)$ azon H-n ható projekciót, mely értékkészlete az A operátor λ-hoz tartozó sajátaltere. Az alábbi eredmény általánosítása a [**9**, Theorem 1.] állításnak, mely egy szeparábilitási feltételt is tartalmaz.

TÉTEL. (Nagy)
Tegyük fel, hogy $\dim H \geq 3$. *Továbbá legyen* $\phi\colon S(H) \to S(H)$ *egy olyan bijekció, mely tartja a kommutálást, azaz teljesül rá, hogy tetszőleges* $A, B \in S(H)$ *esetén* $\phi(A)\phi(B) = \phi(B)\phi(A)$ *akkor és csak akkor áll fenn, ha* $AB = BA$. *Ekkor van olyan* U *unitér vagy antiunitér operátor* H*-n, és bármely* $A \in S(H)$ *esetén létezik olyan* $f_A\colon \sigma_p(A) \to [0,1]$ *injektív függvény, melyekre*

$$\phi(A) = U\left(\sum_{\lambda\in\sigma_p(A)} f_A(\lambda)P_A(\lambda)\right)U^*.$$

A fenti állítás mutatja, hogy $S(H)$ kommutálástartó bijekciói alakja kevéssé reguláris. Ahhoz, hogy regulárisabb alakot kapjunk, valamivel több feltételt kell szabnunk a szóban forgó transzformációkra. A második fejezetben levő eredmények megadják $S(H)$ azon bijekciói struktúráját, melyek nemcsak a kommutálást, hanem annak egyfajta mértékét is megőrzik. Ezen mennyiséget a következőképpen definiáljuk. Tetszőlegesen rögzített $\|.\|\colon C_1(H) \to \mathbb{R}$ unitér invariáns norma (azaz olyan norma, mellyel $\|UTV\| = \|T\|$ teljesül minden $T \in C_1(H)$ operátorra és $U, V \in B(H)$ unitér elemekre) és bármely $A, B \in S(H)$ esetén a kommutálásuk mértékét az

$$\|AB - BA\|$$

számként értelmezzük. Az alábbi állítások megadják $S(H)$ azon bijekcióinak struktúráját, melyek megőrzik az utóbbi mennyiséget. Ezen eredmények azon speciális esetei, melyekben $\|.\|$ egy p-norma ($1 \leq p \leq \infty$) a szerző [**9**] publikációjában jelentek meg (lásd Theorem 2 és Theorem 3).

TÉTEL. (Nagy)
Tegyük fel, hogy $\dim H = \infty$ *és, hogy* $\phi\colon S(H) \to S(H)$ *egy bijekció, mely*

kielégíti a

$$\|\phi(A)\phi(B) - \phi(B)\phi(A)\| = \|AB - BA\| \tag{2.1}$$

egyenletet bármely $A, B \in S(H)$ *pár esetén. Ekkor létezik egy* U *unitér vagy antiunitér operátor* H*-n úgy, hogy* ϕ *a*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H))$$

alakba írható.

Véges dimenziós alaptér esetén a következő eredmény érvényes. Ebben I jelöli H identikus operátorát.

TÉTEL. (Nagy)
Tegyük fel, hogy $3 \leq \dim H < \infty$ *és, hogy* $\phi\colon S(H) \to S(H)$ *egy olyan bijekció, mely kielégíti* (2.1)*-t bármely* $A, B \in S(H)$ *esetén. Ekkor van olyan* U *unitér vagy antiunitér operátor* H*-n, melyre minden egyes* $A \in S(H)$ *esetén fennáll a*

$$\phi(A) = UAU^*,$$

vagy a

$$\phi(A) = \frac{2}{\dim H} I - UAU^*$$

egyenlőségek valamelyike.

A második fejezet utolsó eredményében megadjuk $S(H)$ azon kommutálástartó bijekciói alakját, melyek invariánsan hagyják a felcserélhető elemek közötti fidelitást. Ezen mennyiséget, melynek alapvető szerepe van a kvantum-információelméletben, a következőképpen definiáljuk. Tetszőleges $A, B \in S(H)$ esetén az $F(A, B)$ fidelitásuk az

$$F(A, B) = \operatorname{tr} \sqrt{\sqrt{A} B \sqrt{A}}$$

egyenlőséggel van értelmezve. A második fejezet utolsó tétele a következőképpen szól.

TÉTEL. (Nagy [**9**])
Tegyük fel, hogy $\dim H \geq 3$*. Továbbá legyen* $\phi\colon S(H) \to S(H)$ *egy olyan bijekció, mely megőrzi a kommutálást és kielégíti az*

$$F(\phi(A), \phi(B)) = F(A, B)$$

egyenletet minden olyan $A, B \in S(H)$ *esetén, melyekre* $AB = BA$*. Ekkor van olyan* U *unitér vagy antiunitér operátor* H*-n, mellyel* ϕ *a*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H))$$

alakba írható.

3. Relatív entrópiát megőrző leképezések sűrűségoperátorokon

Eme fejezetben feltesszük, hogy H véges dimenziós. Jelen szakasz sűrűségoperátorok halmazai relatív entrópiát megőrző leképezéseivel kapcsolatos eredményeket tartalmaz. A relatív entrópia egy alapvető mennyiség a kvantum-információelméletben, melynek több változata van. Ezek közül a harmadik fejezetben tárgyaltak definíciója:

(i) Umegaki relatív entrópia: $S(A\|B) = \operatorname{tr} A(\log A - \log B)$, ha $\operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B$ és $S(A\|B) = \infty$ egyébként

(ii) Belavkin-Staszewski relatív entrópia: $S_B(A\|B) = \operatorname{tr} \sqrt{A} \log \sqrt{A} B^{-1} \sqrt{A}$, ha $\operatorname{supp} A \subset \operatorname{supp} B$ és $S_B(A\|B) = \infty$ egyébként

(iii) Tsallis relatív entrópia: $S_T(A\|B) = 1/(1-q)(1 - \operatorname{tr} A^q B^{1-q})$

(iv) Kvadratikus relatív entrópia: $S_Q(A\|B) = \operatorname{tr} A^{-1}(A-B)^2$, ha $\operatorname{supp} B \subset \operatorname{supp} A$ és $S_Q(A\|B) = \infty$ egyébként

(v) Jensen-Shannon divergencia:
$$D_J(A\|B) = \frac{S\left(A \,\middle\|\, \frac{1}{2}(A+B)\right) + S\left(B \,\middle\|\, \frac{1}{2}(A+B)\right)}{2}$$

Ezen definíciókban $A, B \in S(H)$ operátorok, $0 < q < 1$ rögzített szám és supp jelöli a sűrűségoperátorok magja ortogonális komplementerét, illetve log a 2-es alapú logaritmusfüggvényt. Továbbá megállapodunk abban, hogy egy H-n ható pozitív operátor -1 kitevőjű hatványát illetve logaritmusát csak az operátor értékkészletén képezzük.

A [**8**] cikkben a szerzők megadták $S(H)$ azon transzformációi struktúráját, melyek megőrzik az Umegaki relatív entrópiát. A kapcsolódó eredmény motivált bennünket arra, hogy meghatározzuk $S(H)$ azon leképezései általános alakját, melyek invariánsan hagyják a (ii)–(v) mennyiségek valamelyikét. Hangsúlyozzuk, hogy a kérdéses transzformációkkal kapcsolatban csak azzal a feltételezéssel élünk, hogy megőrzik a szóban forgó relatív entrópiát. Mindazonáltal a kapcsolódó eredményünkben azt állítjuk, hogy az ilyen transzformációk nagyon egyszerű alakúak. Erről szól a harmadik fejezet első tétele.

Tétel. (Molnár, Nagy [**7**])
Jelölje $X(.\|.)$ *a* (ii)–(v) *mennyiségek valamelyikét. Tegyük fel, hogy* ϕ *az* $S(H)$ *tér olyan transzformációja, mely kielégíti az*

$$X(\phi(A)\|\phi(B)) = X(A\|B) \tag{3.1}$$

egyenletet bármely $A, B \in S(H)$ esetén. Ekkor van olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, mellyel ϕ a

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H))$$

alakba írható.

A kvantumelmélet differenciálgeometriai vonatkozásaiban $S(H)$ helyett általában a H-n ható invertálható sűrűségoperátorok $M(H)$ halmazát vizsgálják. Ennek az az oka, hogy differenciálgeometriai szempontból $M(H)$ egy sokkal gazdagabb struktúra, egy sokaság. Az [**5**] dolgozatban Molnár meghatározta $M(H)$ azon szürjektív transzformációi általános alakját, melyek megőrzik az (i) vagy a (ii) relatív entrópiát. A vonatkozó eredményeket kiterjesztettük a (iii),(iv) mennyiségek esetére, erről szól a harmadik fejezet második tétele.

Tétel. (Molnár, Nagy [**7**])
Jelölje $X(.\|.)$ a (iii),(iv) *relatív entrópiák egyikét. Tegyük fel, hogy ϕ az $M(H)$ tér olyan szürjektív transzformációja, mely kielégíti a* (3.1) *egyenletet minden $A, B \in M(H)$ esetén. Ekkor van olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, mellyel ϕ a*

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in M(H))$$

alakba írható.

4. Izometriák pozitív operátorok terein és azonossági lemmák

A negyedik fejezet célja pozitív operátorok terei izometriáinak vizsgálata, továbbá úgynevezett azonossági lemmákat is tanulmányozunk benne. Mielőtt összegezzük a fejezet eredményeit, bevezetjük az abban használt főbb jelöléseket. Legyen $1 \leq p < \infty$ egy szám. A p-normából származó metrikát d_p jelöli (ez a $p = \infty$ esetre is vonatkozik), a $C_p(H)$-beli pozitív operátorok halmazának jele pedig $C_p(H)^+$. Továbbá használjuk a

$$C_p(H)_1^+ = \{A \in C_p(H)^+ \ : \ \|A\|_p = 1\}$$

definíciót. Megjegyezzük, hogy $C_1(H)_1^+ = S(H)$.

Az alábbiakban ismertetjük a negyedik fejezetben található azonossági lemmákat. Ezek azonnali következménye, hogy – szemléletesen – $C_p(H)_1^+$, illetve $S(H)$ elemei beazonosíthatók a $P_1(H)$-beli operátoroktól a d_p, illetve a d_∞ metrikában mért távolságaik segítségével.

Lemma. (Nagy [**10**])
Tegyük fel, hogy H véges dimenziós, és legyenek $1 \leq p, \gamma < \infty$ rögzített számok. Ha $A, B \in C_p(H)_1^+$ operátorok úgy, hogy minden $P \in P_1(H)$ esetén teljesül a

$$d_p(A, \gamma P) = d_p(B, \gamma P)$$

egyenlőség, akkor $A = B$.

Lemma. (Nagy)
Tegyük fel, hogy H véges dimenziós és legyenek $A, B \in S(H)$ operátorok úgy, hogy minden $P \in P_1(H)$ esetén

$$d_\infty(A, P) = d_\infty(B, P).$$

Ekkor $A = B$.

A negyedik fejezetben több eredmény található $C_p(H)_1^+$ és $C_p(H)^+$ izometriáival kapcsolatban ($1 \leq p < \infty$). A fejezet első tételében meghatározzuk az $(S(H), d_p)$ $(1 < p < \infty)$ metrikus tér távolságtartó transzformációi struktúráját. Eme eredmény véges dimenziós változatát tartalmazza a [**7**, Theorem 1] állítás is. Az alábbiakban megfogalmazzuk az említett tételt.

Tétel. (Molnár, Nagy)
Legyen $1 < p < \infty$ egy rögzített szám és tegyük fel, hogy ϕ egy izometriája $(S(H), d_p)$-nek. Ekkor van olyan V lineáris vagy konjugált-lineáris izometriája H-nak, mellyel ϕ a

$$\phi(A) = VAV^* \quad (A \in S(H))$$

alakba írható.

A negyedik fejezet következő eredménye megadja $(S(H), d_\infty)$ izometriái struktúráját a $\dim H < \infty$ feltétel mellett.

TÉTEL. (Nagy [**10**])
Tegyük fel, hogy H véges dimenziós és, hogy ϕ egy izometriája $(S(H), d_\infty)$-nek. Ekkor van olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, mellyel ϕ a

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in S(H)) \tag{4.1}$$

alakba írható.

A alábbiakban található a negyedik fejezet harmadik tétele, mely megadja a $C_p(H)^+$ tér d_p-re vonatkozó szürjektív izometriái általános alakját ($1 < p < \infty$).

TÉTEL. (Nagy)
Legyen $1 < p < \infty$ és tegyük fel, hogy ϕ egy d_p-re vonatkozó szürjektív izometriája $C_p(H)^+$-nak. Ekkor van olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, mellyel ϕ az alábbi alakba írható:

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in C_p(H)^+).$$

Ami a véges dimenziós tereket illeti, az alábbi állításban megadjuk a pozitív szemidefinit komplex mátrixok kúpja d_p-re vonatkozó izometriái struktúráját ($1 < p < \infty$).

TÉTEL. (Nagy)
Legyen $1 < p < \infty$ és tegyük fel, hogy $\dim H < \infty$. *Ha ϕ egy izometriája $(C_p(H)^+, d_p)$-nek, akkor van olyan $X \in B(H)$ pozitív operátor és olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, melyekkel ϕ az alábbi alakba írható:*

$$\phi(A) = UAU^* + X \quad (A \in C_p(H)^+).$$

A negyedik fejezetben egy $(C_p(H)_1^+, d_p)$ szürjektív izometriái jellemzésével kapcsolatos állítás is található ($1 < p < \infty$). Ezt ismertetjük az alábbiakban.

TÉTEL. (Nagy [**10**])
Legyen $1 < p < \infty$ egy szám, és tegyük fel, hogy ϕ egy szürjektív izometriája $(C_p(H)_1^+, d_p)$-nek. Ekkor van olyan U unitér vagy antiunitér operátor H-n, mellyel ϕ az alábbi alakba írható:

$$\phi(A) = UAU^* \quad (A \in C_p(H)_1^+).$$

A negyedik fejezetben ezen állítás egy következménye is megtalálható. Ez az $(S(H), \rho_p)$ metrikus tér izometriáira vonatkozik, ahol $1 \leq p < \infty$ egy szám, ρ_p pedig azon függvény, mely a

$$\rho_p(A, B) = d_p\left(A^{\frac{1}{p}}, B^{\frac{1}{p}}\right) \quad (A, B \in S(H))$$

formulával van definiálva. Ezen metrikákat a sűrűségoperátorok által reprezentált kvantummechanikai objektumok, a kevert állapotok távolságának mérésére vezették be a kvantum-információelméletben. Ami az említett következményt illeti, abban megadjuk $(S(H), \rho_p)$ szürjektív izometriái általános alakját. Ezen állítás alább található.

KÖVETKEZMÉNY. (Nagy)
Legyen $1 < p < \infty$ *és tegyük fel, hogy* ϕ *egy szürjektív izometriája* $(S(H), \rho_p)$*-nek. Ekkor megadható olyan U unitér-antiunitér operátor H-n, mellyel* ϕ *a* (4.1) *alakba írható.*

5. Thompson-izometriák pozitív invertálható operátorokon

Az ötödik fejezetben található eredmények a $\dim H = 2$ esetben a H-n ható pozitív invertálható operátorok tere Thompson-metrikára illetve Hilbert projektív metrikára vonatkozó szürjektív izometriái struktúrájával kapcsolatosak. Az alábbiakban megadjuk ezen metrikák definícióit. Legyen X egy valós normált tér, $K \neq \emptyset$ pedig egy zárt konvex kúp X-ben, melyre teljesül a $K \cap (-K) = \{0\}$ egyenlőség. Definiálunk egy $\leq$ relációt X-n a következő módon. Adott $x, y \in X$ elempár esetén $x \leq y$ akkor és csak akkor, ha $y - x \in K$. Ezek után a $\sim$ ekvivalencia relációt $K \setminus \{0\}$-n a következőképpen értelmezzük. Adott $x, y \in K \setminus \{0\}$ esetén $x \sim y$ pontosan akkor, ha léteznek olyan s, t pozitív valós számok, melyekre $sx \leq y \leq tx$. A $K \setminus \{0\}$ halmaz $\sim$ által indukált ekvivalencia osztályait komponenseknek nevezik. Legyen C egy komponens, és tetszőleges $x, y \in C$ elempár esetén definiáljuk az $M(x/y)$ mennyiséget az $M(x/y) = \inf\{t > 0 \mid x \leq ty\}$ formulával. A d_T Thompson-metrika C-n a

$$d_T(x, y) = \ln \max\{M(x/y), M(y/x)\} \quad (x, y \in C)$$

módon van értelmezve. A d_H Hilbert projektív metrikát C-n a

$$d_H(x, y) = \ln M(x/y)M(y/x) \quad (x, y \in C)$$

képlettel definiáljuk. Megjegyezzük, hogy d_H valójában nem metrika, hanem szemimetrika.

Jól ismert tény, hogy a H-n ható pozitív operátorok $B(H)^+$ halmaza egy nemüres, zárt konvex kúp $B(H)$-ban, mint valós vektortérben, és $B(H)^+ \cap (-B(H)^+) = \{0\}$. Továbbá a $B(H)^+$-beli invertálható elemek $B(H)^+_{-1}$ összessége komponense $B(H)^+ \setminus \{0\}$-nak. A [**4**] dolgozatban Molnár a $\dim H \geq 3$ feltétel mellett meghatározta a $B(H)^+_{-1}$ tér d_T-re, illetve d_H-ra vonatkozó szürjektív izometriái általános alakjait. Az ötödik fejezetben és az alábbiakban is megtalálható eredmények az idézett cikkben szereplő tételeknek a kétdimenziós esetre való kiterjesztései.

Tétel. (Molnár, Nagy [**6**])
Tegyük fel, hogy H kétdimenziós és ϕ szürjektív izometriája $(B(H)^+_{-1}, d_T)$-nek. Ekkor van olyan S bijektív, lineáris vagy konjugált-lineáris operátor H-n, mellyel ϕ az alábbi alakok valamelyikébe írható:

$$\phi(A) = SAS^* \quad (A \in B(H)^+_{-1}), \qquad \phi(A) = SA^{-1}S^* \quad (A \in B(H)^+_{-1}).$$

TÉTEL. (Molnár, Nagy [**6**])
Tegyük fel, hogy H kétdimenziós és $\phi\colon B(H)^+_{-1} \to B(H)^+_{-1}$ *egy* d_H*-ra vonatkozó szürjektív izometria. Ekkor van olyan S bijektív, lineáris vagy konjugáltlineáris operátor H-n és olyan* $\tau\colon B(H)^+_{-1} \to]0,\infty[$ *függvény, melyekkel* ϕ *az alábbi alakba írható:*

$$\phi(A) = \tau(A) SAS^* \quad (A \in B(H)^+_{-1}).$$

Talks held by the author

(1) Some preserver problems on quantum structures, *9th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities,* Bedlewo, Poland, 2009 February 4–7.

(2) Some preserver problems on quantum states, *The 5th International Students' Conference on Analysis,* Szare, Poland, 2009 February 7–10.

(3) Some preserver problems on quantum states, *Quantum structure 2009*, Kocovce, Slovakia, 2009 February 24–27.

(4) Preservers on sets of positive operators, *The 6th International Students' Conference on Analysis,* Noszvaj, Hungary, 2010 January 31–February 3.

(5) Isometries of spaces of positive operators, *The Sixth Conference on Function Spaces,* Edwardsville, USA, 2010 May 18–22.

(6) Transformations on density operators, *Quantum Structures 2010 Boston,* Boston, USA, 2010 June 21–26 (2010 Best Paper Award of the International Quantum Structures Association).

(7) Transformations on spaces of positive operators, *János Bolyai Memorial Conference,* Budapest, Hungary, 2010 August 30.

(8) Entropy preserving maps and isometries on quantum structures, *The 7th International Students' Conference on Analysis,* Wisla, Poland, 2011 February 5–8.

(9) Sűrűségoperátorokra vonatkozó azonossági lemmák és következményeik, *Az Analízis Tanszék Síkfőkúti Szemináriuma,* Noszvaj, Hungary, 2011 May 27–29.

(10) Relative entropy preserving maps and isometries on density operators, *22nd International Workshop on Operator Theory and its Applications,* Seville, Spain, 2011 July 3–9.

(11) Isometries on positive operators via identification lemmas, *12th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities,* Hajdúszoboszló, Hungary, 2012 January 25–28.

(12) Isometries of positive operators and identification lemmata, *The 8th International Students' Conference on Analysis,* Noszvaj, Hungary, 2012 January 28–31.

(13) Isometries of positive operators with unit norm, *50th International Symposium on Functional Equations,* Hajdúszoboszló, Hungary, 2012 June 17–24 (ISFE-Medal for outstanding contribution to the 50th International Symposium on Functional Equations).

(14) On some isometries of density operators, *Quantum Structures 2012,* Cagliari, Italy, 2012 July 23–27.

(15) Maps on sets of density operators preserving the Holevo quantity, *13th Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities,* Zakopane, Poland, 2013 January 30–February 2.

(16) Maps on sets of density operators preserving the Holevo quantity, *The 9th International Students' Conference on Analysis,* Ustroń, Poland, 2013 February 2–5.

Publications of the author

1. G. Nagy, *Commutativity preserving maps on quantum states*, Rep. Math. Phys. **63** (2009), 447–464.
2. L. Molnár and G. Nagy, *Thompson isometries on positive operators: The 2-dimensional case,* Electron. J. Linear Algebra **20** (2010), 79–89.
3. L. Molnár and G. Nagy, *Isometries and relative entropy preserving maps on density operators*, Linear Multilinear Algebra **60** (2012), 93–108.
4. G. Nagy, *Isometries on positive operators of unit norm,* Publ. Math. Debrecen, **82** (2013), 183–192.
5. L. Molnár, G. Nagy and P. Szokol, *Maps on density operators preserving quantum f-divergences*, Quantum Inf. Process., to appear, DOI 10.1007/s11128-013-0528-6.
6. L. Molnár and G. Nagy, *Transformations on density operators that leave the Holevo bound invariant*, submitted.

Bibliography

[1] M. Brešar and P. Šemrl, *Linear preservers on B(X),* Banach Cent. Publ. **38** (1997), 49-–58.

[2] C. K. Li and S. Pierce, *Linear preserver problems,* Amer. Math. Monthly **108** (2001), 591—605.

[3] C. K. Li and N. K. Tsing, *Linear preserver problems: A brief introduction and some special techniques,* Linear Algebra Appl. **162-164** (1992), 217-–235.

[4] L. Molnár, *Thompson isometries of the space of invertible positive operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), 3849–3859.

[5] L. Molnár, *Order automorphisms on positive definite operators and a few applications*, Linear Algebra Appl., **434** (2011), 2158–2169.

[6] L. Molnár and G. Nagy, *Thompson isometries on positive operators: The 2-dimensional case,* Electron. J. Linear Algebra **20** (2010), 79–89.

[7] L. Molnár and G. Nagy, *Isometries and relative entropy preserving maps on density operators*, Linear Multilinear Algebra **60** (2012), 93–108.

[8] L. Molnár and P. Szokol, *Maps on states preserving the relative entropy II*, Linear Algebra Appl., **432** (2010), 3343–3350.

[9] G. Nagy, *Commutativity preserving maps on quantum states*, Rep. Math. Phys. **63** (2009), 447–464.

[10] G. Nagy, *Isometries on positive operators of unit norm,* Publ. Math. Debrecen, **82** (2013), 183–192.

[11] S. Pierce et al., *A survey of linear preserver problems,* Linear and Multilinear Algebra **33** (1992), 1–129.