A SZÁMÍTÓGÉP-ALGEBRAI RENDSZEREK A FŐISKOLAI MŰSZAKI INFORMATIKA SZAKOS HALLGATÓK MATEMATIKATANÍTÁSÁBAN

doktori (PhD) értekezés

Sárvári Csaba

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2004

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából

Debrecen, 2004. július 1.

Sárvári Csaba
jelölt

Tanúsítom, hogy Sárvári Csaba doktorjelölt 2002-2004-ben a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2004. július 1.

Dr. Klincsik Mihály
témavezető

A tökéletlen dolgok hatékonysága

Relief alakok azért hatnak olyan erősen a fantáziára, mert mintegy félúton vannak afelé, hogy lelépjenek a falról, és hirtelen – mintha valami megakadályozná őket ebben – mégis megállnak. Így van ez néha valamely gondolat vagy egész filozófia reliefszerű ábrázolásával is: így hatékonyabbak, mint teljes megfogalmazásban.

Nietsche: A vándor árnyéka, 178. oldal

Köszönetnyilvánítások

Köszönöm Klincsik Mihálynak mint témavezetőnek és mint munkatársnak a sok együttes gondolkodással eltöltött órát, a téma kidolgozásához nyújtott támogatást.
Köszönetet mondok Szigeti Márton, informatikus kollégámnak, aki mindennemű informatikai kérdés megválaszolásában fáradhatatlanul segédkezett, és az E-Learning rendszer speciális informatikai tudást igénylő munkáit végezte és végzi.

Tartalomjegyzék

1. A témaválasztás indoklása

A kognitív fejlődésre, a tanulásra tárgyi, információs és szociális környezetelemek egyaránt hatnak.
A 20. század utolsó évtizedei az információs-kommunikációs technológia gyökeres átalakulását, megújulását hozták magukkal. Ezen rendkívül összetett eszközrendszernek a matematikatanítás számára fontos elemei a számítógép-algebrai rendszerek.(angolul Computer Algebra System, (CAS)).
A CAS, és más számítógépes szoftverek megjelenése nagy kihívást jelent a matematikai didaktika s általában a kognitív tudományok számára. A gyökeresen új technológiai elemek elterjedése egyaránt hat a tanári- és a tanulói attitűdrendszerre, messzemenő következményei vannak a tudásreprezentáció és a tudásmérés területén is. Ráadásul ezek a rendszerek bizonyos értelemben többek, mint a matematika művelésének eszközei, a matematikai tartalmat segítségükkel új módon jeleníthetjük meg, tehát médium szerepet is játszanak.
A számítógépes algebrai rendszereknek az oktatásba történő bevonása- ebben már a pedagógus közvélemény komolyan nem kételkedik- szükséges. A CAS oktatásban való alkalmazása azonban rendkívül összetett didaktikai feladatot jelent. Megjelenése, használata a matematikai készségek, jártasságok rendszerét alapjaiban érinti. Azoknak az eljárásoknak a tanítása, amelyeknek elsajátítása korábban sok időt emésztett fel, ma sokszor felesleges: a számítógépes algebrai rendszerek használatával az ilyen típusú feladatokat könnyen és rövid idő alatt megoldhatjuk, anélkül, hogy a technikai részletek készség szintű fejlesztésére hosszú időt fordítanánk. Például ma nem kézi számítással határozzuk meg egy szám négyzetgyökét, ezt bármely számológép pillanatok alatt megteszi. Viszont célszerű megismernünk az iteratív módszerek témakörében a gyökvonás elvégzésére is alkalmas Newton-iterációt.
A CAS oktatásban való alkalmazása nem jelentéktelen hangsúly-áthelyeződést eredményez a tanítandó témaköröket illetően. Bizonyos témakörök kisebb jelentőségűvé válnak, mások szerepe felértékelődik, s új témakörök válnak taníthatókká.
A CAS alkalmazása érinti a visszacsatolás, ellenőrzés, vizsgáztatás rendszerét is. Az ellenőrzés egyrészt természetesen kiterjed a CAS-eljárások ismeretére is, de ami ennél összetettebb feladat: ki kell dolgozni a CAS segítségével megoldott feladatok értékelésének didaktikáját Alapvető kérdés, például az, hogy milyen tevékenységek egyenértékűek didaktikailag, ha egy adott feladatot „papír-ceruzás” módszerrel, illetve CAS-szel oldanak meg a tanulók?
A CAS alkalmazásának módja természetesen függ az oktatási környezettől. Más-más didaktikai feladatot jelent az alap-, közép ill. a felsőfokú oktatásban való alkalmazás. Dolgozatunkban a számítógépes algebrai rendszereknek a felsőfokú műszaki matematikaoktatásban játszott szerepével kapcsolatos vizsgálatainkról számolunk be. Vizsgálódásunk ezen belül is elsősorban a műszaki főiskolai oktatásra vonatkozik. A számítógépes algebrai rendszerek, mint minden

számítógépes szoftver rendkívül gyorsan változnak, fejlődnek. Arra törekedtünk tehát, hogy a mondanivaló, a vizsgálatok mind nagyobb része a konkrét számítógépes rendszertől, s főképp az éppen alkalmazott verziótól független legyen.

Az információs-kommunikációs technológia megújulása eredményeként a tanulási környezet az elmúlt évtizedben a hipermédia eszközeivel is gazdagodott.

Hipermédia alatt a multimédiás prezentáció, az adatok hipertextes megjelenítése, és a számítógépes hálózat együttes használatát értjük. A hipertanulás technikai hátterét az előzők, didaktikai alapját a kibernetikai kutatások és a kognitív tudományok eredményei adják.

Az Internet hatalmas mennyiségű szelektálatlan információt tár elénk. A jövő didaktikája számára az egyik legnagyobb kérdés: Hogyan biztosítható a megfelelő belső mentális fogadórendszer, amely képessé tesz a hatalmas mennyiségű és folyton gyarapodó információtömeg "letöltésére", szelektálására és feldolgozására?

Az egyik oldalon állnak a személyes mikrovilágok, mikrokozmoszok, a másik oldalon a médiaszféra, a multimédiás univerzum. A két világ közötti összhang megteremtéséhez és az eligazodáshoz közvetítőre van szükség. A matematika elsajátításának területén ez az összekötő kapocs, mezovilág lehet- mások mellett- a helyi hálózaton elhelyezett, CAS alapú tudásbázis. Bár mindez 1997-ben, amikor a PTE PMMFK Matematika Tanszékén elkezdtük a Maple számítógépes algebrai rendszer használatával megvalósuló matematikai kurzusok anyagának írását, kipróbálását, még nem volt számunkra ilyen világos, az időközben kiépült s elérhetővé vált hipermédiás világ kihívásai mindenképpen motiválták tevékenységünket.

Témaválasztásunk indoklásaként elmondhatjuk tehát, hogy a CAS–nek oktatásunkban való alkalmazása szükségessé tette a témakörrel kapcsolatos kutatások áttekintését, az egyéni, az adott oktatási környezethez illeszkedő megoldások keresését, az új eszközök használatának didaktikai szemszögből való vizsgálatát.

2. Kutatási célok

A Pécsi Tudományegyetem (korábban Janus Pannonius Tudományegyetem) Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Karán az 1997-98-as tanévtől kezdődően végezzük a műszaki informatika szakos hallgatók matematika oktatását a Maple számítógépes algebrai rendszer bevonásával. Az informatika szakos hallgatók három félévig (Matematika I.-II.-III.) tanulnak matematikát, heti 2 óra előadás és 2 óra gyakorlat keretében. Az első félévben csak az előadásokon tudjuk használni a számítógép algebrai rendszert, a második félévtől kezdve a hallgatók egy része a teljes képzés során használja azt.

Az oktatási környezet a számítógép-algebrai rendszer bevonása mellett a helyi hálózat és az Internet használatával is bővült. Kutatási tevékenységünk két, egymást kiegészítő és feltételező részből áll:

1. A számítógépes algebrai rendszer használatával folyó matematikaoktatás tananyagának kidolgozása, a tananyag kipróbálása, hatékonyságának folyamatos vizsgálata. Ennek során létre kellett hoznunk a Maple számítógépes algebrai rendszer munkalapjainak rendszeréből álló, a kurzusok teljes anyagát magában foglaló tananyagot és meg kellett teremteni a hálózati felhasználás feltételeit.
2. A CAS matematikaoktatásban való alkalmazásának didaktikai problémarendszerére vonatkozó nemzetközi eredmények megismerése után a témakörben elméleti kutatások végzése. Ez a megismert eredmények kritikai elemzését, és továbbfejlesztését jelenti.
Kutatásaink során a következő főbb kérdésekre igyekeztünk választ keresni:

- Melyek a CAS oktatásban való használatának főbb nemzetközi tendenciái?
- Milyen módon használható föl a számítógépes algebrai rendszer a matematika oktatásának eredményesebbé tételére?
- Hogyan használható a helyi számítógépes hálózat a matematikai tudásbázis alapjaként?
- Milyen kiegészítő formai és szervezeti elemekkel gazdagítható a CAS felhasználásával a matematikaoktatás?
- Milyen általánosítható didaktikai elvek fogalmazhatók meg a CAS matematikatanításban való alkalmazásával kapcsolatban?
- Hogyan érvényesülnek a modern didaktikai paradigmák a CAS felhasználásával megvalósuló matematikatanításban?
- Hogyan változik a tanulói attitűd a CAS használata esetén a „hagyományos” eszközökkel történő oktatáshoz képest?
- Hogyan változnak az oktató feladatai, munkamódszerei az új oktatási környezetben?
- Milyen módon oldható meg a teljesítmények adekvát mérése?
- Milyen tartalmi változás, gazdagodás érhető tetten a CAS segítségével megvalósuló matematikaoktatásban?
- Melyek a CAS alkalmazása során fellépő veszélyek?
- Mi a hallgatók véleménye a CAS használatával megvalósuló matematikatanulásról?
- Hogyan vélekednek a kollégák a CAS használatáról?
- Mennyire terjedt el a CAS használata a hazai műszaki főiskolai oktatásban?

3. Kutatási módszerek

Főbb kutatási módszereink a következők voltak:
- A szakirodalom követése és a publikált eredmények értelmezése.
- Részvétel és előadások tartása nemzetközi konferenciákon. Eredményeink egybevetése a nemzetközi tapasztalatokkal. A CAS-nek a matematika oktatásában játszott szerepével foglalkozó konferenciák rendezése.

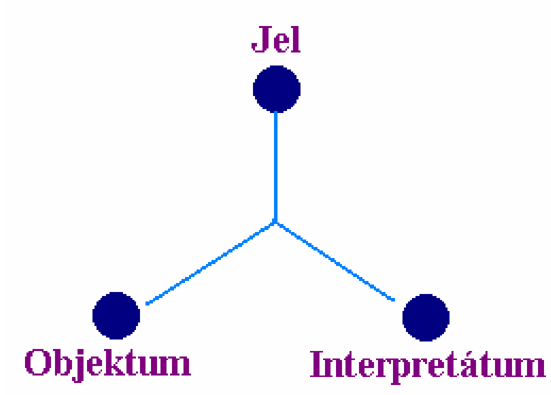
- A műszaki informatika szakos hallgatók matematika tárgya Maple számítógépes rendszer használatán alapuló tananyagának kidolgozása, a Főiskola hálózatán valamint az E-Learning web-portálon történő elhelyezése, a tananyag felhasználása eredményességének mérése.
- Pedagógiai megfigyelés és adatgyűjtés.
- Statisztikai kiértékelések és elemzések.
- Kontrollcsoportos kísérlet és ennek elemzése.
- Hallgatói felmérések, kérdőívek alkalmazása és értékelése.
- A tanárok véleményének kérdőívekkel történő megismerése.
- Interjúk készítése olyan oktató kollégákkal, akik a CAS felhasználásával tanítanak.
- Kiegészítő oktatási tevékenységek szervezése és kivitelezése (Maple klubfoglalkozások, feladatmegoldó verseny) a CAS népszerűsítése és hatékonyságának fokozása érdekében. Az itt folyó munka értékelése.
- Konzultáció a CAS felhasználásával készített tananyagokról bel- és külföldi kollégákkal.
- A számítógépes algebrai rendszerekkel foglalkozó Internetes fórumot létrehozása.

4. Elméleti alapok

Az alábbiakban azokat a nézetrendszereket, filozófiai, tudományelméleti megfontolásokat írjuk le röviden, amelyek a CAS használatával megvalósuló oktatói tevékenységünk során történő alkalmazásánál iránymutatóak. Ezek az elméleti alapok a számítógépes algebrai rendszereknek az oktatásban történő alkalmazása során sokszor alapvető támogatást, megfelelő kiindulópontot jelentettek.

4. 1. Triadikus reprezentációelmélet

A számítógépes algebrai rendszerek ember-számítógép interakciót valósítanak meg. C. S. Peirce triadikus reprezentációelmélete azért kínálkozik megfelelő keretelméletnek, mert egységbe foglalja az ember-gép interakció kutatásában az egyes tudományágak (információelmélet, számítógép-tudomány, ergonómia, grafikus megjelenítés, pszichológia, szociológia, neveléstudomány) által végzett kutatásokat, elért eredményeket. Peirce szemiotikai indíttatású elmélete [1] szerint a jel kettős funkciót tölt be: egyrészt a jel az objektumot reprezentálja, hogy aztán annak interpretációja létrejöhessen, másrészt a jel minden kognitív tevékenység esetén a megismerés alapja. Peirce a jelet az objektum, jel, interpretátum hármas alapvető elemének tekinti. (1. ábra)



1. ábra

A jelnek Peirce értelmezésében a megismerésben játszott szerepét Kant ismeretelméletéből indulva vizsgálhatjuk. Kant szerint egyrészt a megismerés mindig közvetett, általános megismerési feltételek által meghatározott, másrészt apriori szemléleti formák- a tér és az idő- közvetítésével jön létre. Másképpen szólva soha sincs magukhoz a dolgokhoz közvetlen hozzáférésünk. Peirce a jel fogalmát felhasználva általánosítja a kanti „meghatározottság", „közvetettség" gondolatát. Peirce felfogása azonban egy lényeges ponton eltér Kantétól. Kanttal szemben Peirce a megismerés lehetőségeinek fejlődését hangsúlyozza. Ebben az értelemben Peirce filozófiája a kanti elmélet dinamizálásának tekinthető.
A jel Peirce-nél kettős szerepű, a megismerés és a reprezentáció eszköze. A jel az objektum egy bizonyos képét alakítja ki a tudatban, reprezentációt hoz létre, tehát újabb jelet. Az egyszeri megismerési folyamat során a közvetlen (adott módon reprezentált) objektum ismerhető meg. A jel Peirce szerint determinálja az interpretációt, meghatározza az objektum bizonyos reprezentációját. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a jel interpretációs játékteret definiál, meghatározott korlátot állít. Ebből rögtön következik, hogy egy adott jel keltette reprezentáció önmagában nem képes arra, hogy kellően feltárja az objektumot. Reprezentációk sorozatára van szükség, másképpen szólva **többszörös reprezentációra!** Peirce szerint az objektum dinamikus volta éppen a megismerési folyamat sajátosságából következik. A dinamikus jelző itt az objektum perspektivikus jellegére utal. A perspektivikus reprezentációk sorozata hivatott az aperspektivikus objektum lehető legjobb megközelítésére.

4. 2. Tudásreprezentáció, fogalmi háló, transzfer

A memóriában tárolt információhalmaz nem különálló részenként van jelen, hanem összefüggő, állandóan változó relációs rendszert alkot. (Gagné, [10])
A rendszer elemei a képzetek, fogalmak, amelyeket kapcsolatok fűznek össze. A fogalmi háló egy-egy eleme annál könnyebben felidézhető, minél több szállal kapcsolódik a többi elemhez.
Tanulás során az új fogalmakat be kell építeni az egyes tanulók fogalmi hálójába. Ez csak akkor mehet sikeresen végbe, ha a tanulók rendelkeznek a megfelelő

előismeretekkel, azaz a megfelelő fogalmi hálóval, amelybe beilleszthetők az új fogalmak. A kibővült fogalmi struktúrát a hallgatóknak aktivizálniuk kell. Ez akkor eredményes, ha az új elemek és a régi hálózat elemei között sokszálú, elmélyült kapcsolat jön létre. Ebben nagy segítséget nyújthat a CAS a fogalmak többféle megjelenítésével, reprezentációjával. A kellően reprezentált tudáselemek között könnyebben keletkeznek szerves kapcsolatok, és ilyen módon képesek lesznek a hallgatók megfelelő transzferre. Ez azt jelenti, hogy az elsajátított tudást különböző, az eredetitől messzebb eső helyzetekben, tudásterületeken is alkalmazni tudják.

4. 3. A reprezentációs háló és a többszörös reprezentáció

A matematika műveléséhez, a matematikai gondolkodáshoz és kommunikációhoz valamilyen módon reprezentálni kell a matematikai struktúrák elemeit ill. magukat a struktúrákat. A kommunikáció *külső reprezentáció*t igényel nyelvi eszközök, írott szimbólumok, ábrák, formulák, tárgyak formájában. (Lesh, Post és Behr, [12])

A gondolkodás esetében a pszichikumban való *belső reprezentáció*ról beszélünk. Mivel e reprezentáció nem figyelhető meg, a rá irányuló elemzések feltételezéseken, következtetéseken alapulnak. A korábbi lélektani irányzatok, így például a viselkedés-lélektan, kikerülték a belső reprezentáció tárgyalását, mivel az közvetlenül nem figyelhető meg. A kognitív tudomány a legutóbbi évtizedekben a modellezés révén tette legitim területté a belső reprezentáció tanulmányozását.

A külső és a belső reprezentációk között a kognitív tudomány állása szerint létezik valamilyen kapcsolat. Ez természetesen azt jelenti, hogy a tanítás eredményessége, a matematikai fogalmak megértése, elsajátításuk sikeressége nagymértékben függ a matematikai struktúrák megfelelő reprezentációjától.

A matematikai ismeretszerzés folyamatának elemzése alapján azt mondhatjuk, hogy a külső matematikai reprezentációk nagymértékben meghatározzák a belső reprezentáció természetét, színvonalát. A kapcsolat megfordítva is igaz: az a mód, ahogyan a tanuló tudását megjeleníti, következtetni enged a belső, a mentális reprezentációjára.

A matematikai tudás hatékonysága, de már szűkebb értelemben maga a megértés is a tudáselemek szervezettségének oldaláról közelíthető meg. A megfelelően reprezentált, a tudás más elemeivel kapcsolatban álló tudáselemet megérettnek, míg az elszigetelt, a fogalmi hálóba nem, vagy csak lazán bekapcsolódó elemeket kellően nem feldolgozottnak, az így létrejövő tudást felszínesnek, egyoldalúan értelmezettnek tekintjük. Ennek megfelelően egy matematikai tényt, fogalmat, eljárást megértettnek, feldolgozottnak mondunk, ha az részévé válik a tudást reprezentáló relációs rendszernek, azaz, ha beépül a reprezentációs hálózatba. A matematikai ismeretelsajátítás tehát alapvetően a tények, fogalmak, eljárások közötti kapcsolatrendszer kiépítése jelenti. Ennek megfelelően a megértés foka is alapvetően e kapcsolatok száma és minősége által meghatározott. A megértés, az

új tudáselemek beépítése tehát reprezentációk relációs rendszerének fokozatos kiépítését jelenti.
A reprezentációs hálózat kiépülése hosszú folyamat, amelyben jelentős szerepe van a tanulók (hallgatók) találékonyságának. (Piaget, 1973, [13]). A produktív találékonyság jellegzetes vonása a reprezentáció természete, amelyben működik (Resnick, 1987 [14]). Elfogadható az az álláspont, hogy a belső kapcsolatokban gazdag reprezentáció, tehát az erősebb megértés a mély tudás révén hatékony találékonyságot biztosít. Másrészt, ha a találékonyság nem kellően összefüggő hálózatú tudáson alapul, akkor valószínűbb, hogy a gondolkodás hibás eredményre vezet.
A matematikai struktúrákat többféleképpen reprezentálhatjuk. A négy általánosan elfogadott reprezentációs mód a következő: **leíró, analitikus, grafikus és numerikus** reprezentáció.
Ismeretes az úgynevezett négyes szabály (Rule of Four; US NCTM-2000 Standards), amely szerint ajánlatos minden matematikai fogalmat (objektumot) *numerikusan*, *grafikusan*, *algebrailag* (analitikusan) és *leíró* módon is (re) prezentálni. A hatékony fogalombővítést megkövetelő mentális kép kialakítása, az új fogalmak, objektumoknak a tudásreprezentációs hálóba való mély beágyazása egyaránt megköveteli a CAS alkalmazásával megvalósított matematikatanítás során a fenti négyes szabály alkalmazását. A többszörös reprezentáció alkalmazása mellett szóló érvek közül legalapvetőbb, hogy önmagában egyik reprezentáció sem teljesíti a matematikai struktúra, probléma megfelelő leírásához, feltárásához szükséges feltételeket.
Minden egyes reprezentáció kiemeli a tárgyalt matematikai objektum bizonyos sajátosságát, megvilágítja valamely nézőpontból, s ugyanakkor árnyékban hagyja más oldalát, kevésbé világítja meg más jellemzőit (Kaput, J. J. ,1992,[15]). A számítógépes algebrai rendszerek (CAS) hatékony numerikus, grafikus és szimbolikus reprezentációkat lehetővé tevő adottságaikkal ideális tanulási környezetet nyújtanak a matematikai fogalmak több reprezentációt felhasználó sokoldalú feldolgozására, mély megértésére.(Goldenberg, Paul (1995), [16])
Gödel nevezetes tételének szellemében úgy is fogalmazhatunk, hogy a teljes igazság csak az álláspont változtatásával ismerhető meg. Az egyes reprezentációformák mindegyike olyan módon is hozzájárul a matematikai igazság megismeréséhez, ahogy más formák ezt nem tudják megtenni. A leíró reprezentáció az alapvető nyelvi formák kialakításáért felelős. Az analitikus reprezentáció, amely alapvetően szimbolikus reprezentációelemekkel valósul meg alapvető a matematikai tartalmak hatékony, plasztikus megjelenítésében. A CAS használata megköveteli a szimbolikus inputot, vagyis ez a forma nélkülözhetetlen.
A grafikus megjelenítés több nyilvánvaló előnyéből emeljük ki a reprezentációk és a rövid távú memória kapcsolatát. Ismeretes az un. 7±2 törvény, vagyis az, hogy a rövid távú memória befogadó képessége körülbelül 7 információegység. A vizuális szimbólumokból felépített struktúrák (ábrák, grafikonok, gráfok, folyamatábrák stb.) a verbális információk integrálásának, strukturálásának kiváló eszközei lehetnek. Larkin és Simon [17] az információk diagramok formájában

való megjelenítését diagrammatikus reprezentációnak nevezi. Az általuk kidolgozott modell szerint az a legnagyobb különbség a verbális és a diagrammatikus reprezentáció között, hogy míg a verbális információkat mondatok egymás utáni elrendezésével tudjuk leírni, a diagramok az összes információt síkban elrendezve egy időben hozzáférhetővé teszik. Mivel a síkban az információelemek bármelyike összehasonlíthatatlanul gyorsabban előkereshető, egyik elemről a másikra gyakorlatilag tetszőlegesen gyorsan át lehet térni, ezáltal az így reprezentált információk feldolgozása kevésbé terheli a rövid távú memóriát, tehát sokkal hatékonyabbá válik. Ezt a hatékonyságot tovább növeli a számítógépes algebrai rendszerek animációs lehetősége, amellyel dinamikát adhatunk a vizuális reprezentáció több formájának. A numerikus reprezentáció, a numerikus számítások kivitelezhetősége nagymértékben megnöveli a tárgyalható eljárások, algoritmusok körét. Mindezek előre bocsátásával megkíséreljük a többszörös reprezentáció szükségességének episztemológiai - szemiotikai indokainak feltárását.

4. 4. Episztemikus- és pragmatikus érték

Episzteme: görög filozófiai kifejezés, először Platon használta az „igaz és filozófiailag megalapozott ismeret, tudás” értelelemben. Arisztotelesz az egyazon tárgyra vonatkozó ismeretanyag jól szervezett szerkezetét nevezi ’episzteme’-nek. Adott eljárás, adott ismeretelem episztemikus értéke mindig környezetfüggő, és a curriculumban betöltött szerep által meghatározott. Minél inkább beépül egy adott ismeretelem a tudásreprezentációs hálózatba, minél több relációban hasznosulhat, minél több transzfer keletkezése fűződhet hozzá, annál nagyobb az episztemikus értéke. A pragmatikus érték fogalmát a megszokott értelemben használjuk, tehát az adott ismeretelem, adott eljárás, algoritmus adott helyzetben való konkrét alkalmazhatóságát értjük alatta.
Tehát a pragmatikus érték körülírása a konkrét kivitelezhetőség, kiszámíthatóság, gyakorlatias haszon. Természetesen a két értékforma sohasem válik el teljesen, ellenkezőleg: adott ismeretelem mindkettővel rendelkezik, adott konkrét esetekben, más-más arányban.

4. 5. Antropológiai megközelítés

Michele Artigue idézi, a CAME Symposium 2001 keretében [2] elhangzott, előadásában Bosch és Chevallard antropológiai megközelítésmódját [3]. Ennek legfontosabb tézisei a következők

- A matematikai objektumok a közösségi gyakorlatból származtathatók. A közösség szót itt igen tág értelemben használjuk.
- A technikának pragmatikus és episztemikus értéke is van. A technika szó magában foglalja az adott probléma megoldására bevetett rutinokat, részfeladatok kezelésének módját, az érvelési módot, tehát komplex fogalom.

- A tudás gyarapodása a feladatok kezelésének, a technikáknak rutinná válásával megy végbe.
- A matematikai objektumok érzékelésünk számára közvetlenül általában nem ragadhatók meg („non-ostensive”). Ezeket az érzékelésünk számára megragadható („ostensive”) reprezentációk segítségével kell feldolgoznunk

Az utóbbi kapcsán nem nehéz tetten érnünk, hogy itt tulajdonképpen Peirce nézetrendszere öltött más köntöst. A francia matematikadidaktikai iskola több jeles képviselője által elfogadott és alkalmazott nézet megerősíti a triadikus reprezentációelmélet állításait. Egyúttal megerősíti a többszörös reprezentáció szükségességéről tett megállapítást.

4. 6. Szocio-kulturális megközelítés

Sierpinska és Lermann [4] szerint **a matematikai objektumok nem abszolút objektumok**, hanem az adott közösség praktikuma által definiált entitások. Adott fogalom feltárásának módja, a feltárás részletessége a tanulási folyamatban részt vevők mentális felkészültségétől, a curriculum célrendszerétől függ. A műszaki felsőoktatás matematika oktatása számára ez, többek között, azt jelenti, hogy az ismeretek feldolgozása során az elméleti igényesség és a gyakorlati alkalmazhatóság optimális arányát kell keresnünk.

4. 7. Instrumentális genezis, instrumentális orkesztráció

A számítógép-algebrai rendszerek, más, a tanulási folyamatban alkalmazott eszközökhöz hasonlóan, összetett entitások. A tanulási folyamat kezdetén a CAS önmagában létező eszköz (tool) csupán. A L. Trouche [5] által **instrumentális genezis**nek nevezett összetett folyamat eredményeként válik szerszámmá (instrumentummá).
A folyamat során a felhasználónak instrumentációs sémákat kell kifejlesztenie. Ezek a sémák a konkrét fizikai eszközzel (tool, ’artifact’) együtt alkotják az instrumentumot. Az instrumentációs sémák két egymással összefonódó elemből állnak: a **technikai** és a **mentális komponens**ből. A technikai összetevő azon akciók sorozata, amelyeket a CAS eljárások készítése, felhasználása során, a számítógépen végre kell hajtani. Ezek a szó igen tág értelmében vett technikai készségek (rutinok), algoritmikus tevékenységek. A mentális összetevő a matematikai objektumoknak, valamint a problémamegoldás lépéssorozatának ill. a gépi akcióknak a mentális képeiből áll. Az instrumentális genezis tehát sémák felépítésének a folyamata. Olyan sémák felépítéséé, amelyek technikai és fogalmi részből állnak, s az utóbbiak adnak értelmet a technikai összetevőnek. Az instrumentációs genezis kettős értelemben is szocializációs, szociális dimenzióval rendelkező folyamat. Egyrészt a technikai kiinduló elem, a tool maga is tárgyiasult szociális tartalom, másrészt a mentális részt alkotó instrumentációs

sémarendszer is a tanulási környezetet alkotó közösség normarendszerében gyökeredzik.
Az instrumentális genezis közösségben megvalósuló személyes konstrukció eredménye. Ennek külső irányítását L. Trouche nyomán **instrumentális orkesztráció**nak nevezzük. Az orkesztráció szó arra utal, hogy a több médium együttes használatát feltételező, összetett munkafolyamat koordinálásáról van szó.
Az instrumentális orkesztráció komponensei:

- Az oktatási folyamat résztvevői;
- Az adott típusú feladat végrehajtásához rendelkezésre álló tárgyi környezet elemei;
- Didaktikai konfiguráció, vagyis a tevékenységek végrehajtásának átfogó akcióterve;
- Az adott konfiguráció hasznosítási módozatainak halmaza.

Az instrumentális orkesztráció több szinten is megvalósulhat:

1. *Materiális szint*. A szerszám (tool) szintjén az adott eszköz (ök) használatának külső irányítását jelenti. Ennek során pl. a felhasznált eszköz és az alkalmazott szoftver alapvető illesztését segíthetjük elő.
2. *Pszichológiai szint.* Az instrumentum keletkezésének szintje. Döntően ennek során megy végbe az instrumentális genezis keretében a technikai és mentális összetevőt egyaránt magában foglaló entitás, az instrumentum.
3. *Metaszint*. A fejlettebb eszközhasználat szintje, amelynek során a felhasználó metakommunikativ stratégiájának részévé válik az instrumentum értékelt reflexiókkal kísért használata.

Az instrumentális genezist organikus fejlődésként kell felfognunk. Kibontakozása időigényes, hisz egy eszköznek, a maga lehetőségeivel, korlátaival kell a szubjektum aktivitásával, tudásával, korábbi munkájával, tapasztalataival összeforrnia.

4. 8. Karl Popper elmélete tudásunk gyarapodásáról

Számunkra a mindennapi oktatási gyakorlat során talán Karl Popper [6] ismeretelméleti megfontolásai jelentettek és jelentenek a legtöbbször elméleti hátteret, beállítódási alapot. Ismert és méltán sokak által elfogadott Popper falszifikációs elmélete. A hibakiküszöbölés módszere Popper szerint alapvető eszköze a tudás megszerzésének. Némiképp leegyszerűsítve, ez a következő tetradikus séma szerint megy végbe:

$$P_1 \rightarrow KE \rightarrow HK \rightarrow P_2$$

Itt P_1 azt a problémát jelenti, amelyből kiindulunk, KE a kísérleti elmélet, amelyet a probléma megoldására ajánlunk. HK a hiba kiküszöbölésének folyamata a kritikai vizsgálatok és kritikai megvitatások révén. P_2 azt a befejező problémát jelenti, amely a vitákból és a vizsgálatokból kialakult.

Mi a popperi elmélet, amelyet itt nyílván csak éppen érinthetünk, fő tanulsága számunkra? Legfőképpen az, hogy nincs végleges, befejezett tudás! Közelítések vannak. Kezdeti, jobb és később talán még jobb közelítések. A számítógépes algebrai rendszerek oktatásban való alkalmazója számára nehéz jobb üzenetet megfogalmazni. Ezek a rendszerek talán éppen ezen a területen nyújthatják a legnagyobb segítséget. Az időkorlát lebontásával, a kísérletezés elősegítésével, a közelítések jóságának vizsgálati lehetőségeivel.
És éppen Popper az a gondolkodó, aki láthatóan középponti szerepet játszik a jelenkori irányadó didaktikai megközelítések megfogalmazói szerint! A konstruktív didaktikai paradigma Popper nézeteivel összhangban fejlődött ki. De Peirce és Popper nézetei is közeli rokonságot mutatnak. Peirce-nek dinamikus objektumról alkotott fogalma igen jó összhangban van a popperi falszifikációs elmélettel! [50]

4. 9. A konstruktív pedagógiai paradigma

Az oktatási folyamat megtervezése, kivitelezése, értékelése során komplex szemlélet, az előtörténések, tapasztalatok rendszere hat a pedagógus munkájára. Mindemellett bizonyos beállítódások, elméletek általában a többi fölé emelkednek. A CAS alkalmazásával megvalósuló matematikatanítás esetén számunkra a konstruktív- és a cselekvéspedagógiai paradigma bizonyult a leghasznosabbnak.
A konstruktivizmus a tudás természetére és keletkezésére vonatkozó ismeretelmélet, amelynek legfőbb állítása, hogy a tanuló ember ill. közösség maga hozzák létre a tudást, a világról alkotott kép, az ismeretek rendszere konstrukció eredménye. (Glasersfeld, [7]). Ez a szemlélet a tanulást egy alapvetően aktív folyamatnak tartja, amelyben a leglényegesebb mozzanat, hogy a tanuló ember meglévő és kognitív rendszerekbe rendezett ismeretei segítségével értelmezi az új információt.
A konstruktív tanulásszemlélet összhangban van azokkal a kognitív pszichológiai elképzelésekkel, amelyek az emberi elme működését a modellezés segítségével közelítik meg. A világról, környezetünkről kognitív struktúrákat, modelleket építünk föl.
A modern tudományelméletek- és így a konstruktivizmus- episztemológiai, ismeretelméleti bázisa nem tükrözéselmélet. Az új megközelítések szerint nem vonhatunk semmilyen fizikai vagy strukturális párhuzamot a valóságelem és a neki megfelelő ismeret között. A bennünk kialakuló tudás jellegére vonatkozóan az adaptivitás szempontja vethető föl egyedül. (Glasersfeld, [8]) Ez azt jelenti, hogy a tudás az ember biológiai értelemben vett adaptivitását fokozza, képessé teszi arra, hogy jobban alkalmazkodjék a környezetéhez.
Az ismeretelsajátítás konstruktivista modelljének központi fogalma *a fogalmi váltás* (angolul: conceptual change). A fogalmi váltás során a szóban forgó ismerettel kapcsolatban gyökeres átalakulás zajlik le az elmében. A meglévő magyarázó rendszer és az új ismeretrendszer között ellentmondás keletkezik. Ha kellő szándékot sikerül ébresztenünk a tanulóban ahhoz, hogy valódi

ismeretfeldolgozás részese legyen, akkor az új ismeret tartós helyet kaphat az elmében és megkezdődhet az új magyarázó rendszer kialakítása. Az új magyarázó rendszer elfogadása, elsajátítása döntő jelentőségű és általában hosszú folyamat eredménye. Gondoljunk a határérték fogalmára! Rá kell jönniük a hallgatóknak, hogy bármilyen nagy számú pontban ismerhetjük a függvényt, bizonyos kritikus pontok környezetében való viselkedésének leírásához ez még nem mindig elegendő. Ezt a kijelentést nem elegendő a kijelentés tudomásul vételének szintjén elfogadni, hanem sok-sok példa tanulmányozása során kell elérni, hogy az ellenkező megközelítés hibás volta nyilvánvalóvá váljék. Nem nehéz meggondolni, hogy ebben milyen nagy segítséget nyújthat a számítógépes algebrai rendszer. Segítségével példák sorozatát generálhatjuk. Mivel a technikai nehézségektől jórészt megszabadulhatunk, figyelmünk egészét a példasor változó eleme hatásának megfigyelésére összpontosíthatjuk.

A konstruktív pedagógia a cselekvéspedagógiai felfogás nézetrendszeréből természetes módon elfogadja az alábbiakat:

-a megismerési folyamat tevékenység közben bontakozik ki, a konkrét, cselekvéses tapasztalat alapján alakul ki a valóban mélyen beágyazott, hatékony tudást biztosító ismeretrendszer;

-az önálló tevékenységre is építő tudáselsajátítás általában eredményesebb a puszta ismeretközlésnél;

-a felfedeztetés az egyik legfontosabb eszköz a tanulás során.

4. 10. Kognitív stratégia, metakogníció

A kognitív stratégia körébe mindaz a tudás tartozik, amely lehetővé teszi az elsajátított ismeretek hatékony adaptálását új szituációkban. Másképpen szólva, a tanulók azon képessége, hogy a megtanult ismereteket transzferálni tudják a konkrét megoldandó feladatokra. Ez a folyamat magába foglalja a szelektív figyelmet, az információk aktivizációját, lokalizációját, az ismeretek felidézését, szükséges kiegészítését, a dekódolást, a próbálgatást, az elaborációt, a strukturálást, a kérdezést, a szabályok felidézését, alkalmazását, a javítást, az ismeretek önálló felhasználását. [9] Mindezek a tevékenységek akkor végezhetőek hatékonyan, ha kellő szintű metakognitív képességgel, tudással társulnak. A metakogníció saját értelmi képességünkre vonatkozó tudásunkat jelenti. Komplex folyamat, amelynek során saját gondolkodásunkat és a megoldandó problémát, feladatot megfelelő rálátással, „felülről” szemléljük. A metakognitív tudás önmagunk gondolkodásáról való tudásunk.

A metakogníció magában foglalja az információk felvételének, feldolgozásának, tárolásának, felidézésének, kiegészítésének minden fázisát. A legalapvetőbb metakognitív stratégiák:

- Az új információk kapcsolatba hozatala a korábbi tudással.
- A gondolkodási műveletek tudatos kiválasztása.
- A gondolkodási folyamatok tervezése, ellenőrzése és értékelése.

A számítógépes algebrai rendszerek a figyelem tehermentesítésével, a komplexitás csökkentésével, az ismeretelemek kombinálásának sokszínű lehetőségével, az önálló feladatmegoldás sokoldalú támogatásával hatékonyan segítik a metakogníciót és így a megfelelő kognitív stratégia kialakítását.

5. A számítógépes algebrai rendszerekről

5. 1. Történeti áttekintés

A számítógépes algebrai rendszerek (angolul Computer Algebra Systems, rövidítve CAS) olyan interaktív programok, amelyek a numerikus számítógépes programokkal szemben szimbolikus kifejezésekkel való matematikai számításokat is megengednek. Az interaktivitás az ilyen rendszerek nyitott architektúrájának köszönhetően lehetőséget nyújt a felhasználónak arra, hogy a rendszer könyvtári eljárásait módosítsa, megváltoztassa, új könyvtárakat hozzon létre. A számítógép-algebrai rendszereket két nagyobb kategóriába sorolhatjuk: A speciális célú és az általános célú rendszerek kategóriájába.
*A speciális típusú rendszerek*et a fizika vagy a matematika egy adott területén felmerülő speciális problémák megoldására tervezték. A fizikában használatosak közül a legismertebbek közé tartozik például a SCHOONSCHIP (égi mechanika), vagy a STENSOR (általános relativitás) Az operációkutatás területén az oktatásban is használják a LINDO és a LINGO rendszert.
Az általános célú rendszerek változatos adatstruktúrákat és sok matematikai függvényt kínálnak felhasználóiknak. A ma használatosak közül a legrégebbi általános célú rendszerek a MACSYMA és a REDUCE. A nyolcvanas években a PC típusú számítógépekre kifejlesztett nem programozható kalkulátorok első példái voltak a MuMATH, és követője a DERIVE. A legtöbb modern számítógép-algebrai rendszert a C programozási nyelven implementálták. Ezzel olyan hatékony, portábilis számítógépes programokat készíthetnek a fejlesztők, amelyek ténylegesen kihasználják a célba vett platform tulajdonságait. Az első olyan rendszer, amelyben a szimbolikus- és numerikus számításokat, valamint a grafikai lehetőségeket úgy ötvözték, hogy együttesen kellemes, felhasználóbarát környezetet kínáljanak, a Mathematica. A Mathematica másik említésre méltó tulajdonsága a jól strukturált felhasználói szintű programozási nyelv. Éppen ezért a kiválóan alkalmas funkcionális programozásra. A paderborni egyetemen fejleszették ki a MuPAD rendszert, amely a Mathematica néhány előnyös tulajdonságával is rendelkezik, és a Maple felhasználói is ismerősnek érezhetik.

5. 2. A Maple rendszer

A Maple rendszert - amelyet mi az oktatásban használunk – 1980-ban kezdték el fejleszteni a kanadai Waterloo Egyetemen, ma már a Maple 9-et, a kilencedik verziót is használhatjuk.

A Maple a számítógépek széles skáláján futtatható, a szuperszámítógépektől a Macintosh és IBM PC kompatíbilis asztali számítógépekig. Ez elsősorban moduláris tervezésének köszönhető. A rendszer négy részből áll: az Iris-nek nevezett felhasználói felületből, az alapvető algebrai műveleteket végző kernel-ből, a külső könyvtárból és a Maple fölhasználói által fejlesztett osztott könyvtárból (share library).

Az Iris és a kernel a rendszer kisebbik részét alkotja. Mindkettőt a C programozási nyelven írták meg. Ezek töltődnek be a memóriába, amikor egy Maple munkalapot elindítunk. Az Iris kezeli a matematikai kifejezések inputját, megjeleníti a kifejezéseket, kirajzolja a függvényeket, és támogatja a rendszernek a felhasználóval folytatott egyéb kommunikációját. A leggyakrabban előforduló operációs rendszerek megengedik a munkalapnak (worksheet) nevezett speciális grafikus felhasználói felület alkalmazását. A munkalapokon a Maple inputot és outputot grafikával és egyéb szöveggel kombinálhatjuk. A munkalapos felület további sajátosságai: hipertext lehetőségeket biztosít a dokumentumokon belül és különböző dokumentumok között, bizonyos platformokon megengedi multimédia objektumok beágyazását. A Maple munkalap régiók hierarchiájából áll, a régiók fejezetekbe és alfejezetekbe foglalhatók össze. Ezek „becsukhatók”, ha tartalmukat el akarjuk rejteni. A munkalapok szöveges, vagy LATEX formátumban ill. HTML formátumban exportálhatók.

A Maple kernel értelmezi a fölhasználói inputot, végrehajtja az alapvető algebrai műveleteket.

A Maple matematikai tudásának többségét a Maple programozási nyelvén kódolták, és függvények formájában, a külső könyvtárban helyezték el. Ezek egy részét a rendszer magától betölti a memóriába, amikor a felhasználónak szüksége van rájuk, a ritkábban használatos eljárásoknál kell csak a Maple-t explicit módon a betöltésre „megkérni”.

A Maple nyelve jól strukturált, áttekinthető, magas szintű programozási nyelv. Adatstruktúrák széles választékát támogatja: függvényeket, sorozatokat, halmazokat, listákat, táblákat, stb. Számos, ezeken az adatstruktúrákon definiált, könnyen használható művelet is rendelkezésünkre áll, mint például a típusellenőrzés, szelekció, az adatstruktúrák kompozíciója stb.

A **Maple grafikája** rendkívül sokrétű megjelenítést tesz lehetővé. A kétváltozós valós függvénnyel definiált felület generálása, paraméteres egyenletekkel definiált felületek, csövek és térgörbék generálása, vektor- és gradiens mezők ábrázolása, az animációk 2 D-s és 3 D-s változatai csak néhány példáját adják a gazdag grafikus ábrázolási lehetőségeknek.

A hagyományos numerikus rendszerekkel ellentétben a Maple az egész-, a racionális- és a **valós számok pontos ábrázolását** biztosítja. Például az egész számokat úgynevezett dinamikus adatvektorban ábrázolja, mégpedig 10^4 alapú számrendszerben. Mivel 17 bitet használ föl az adatvektor hosszának ábrázolására, a legnagyobb ábrázolható szám jegyeinek száma 2^17-1. Ez azt jelenti, hogy a legnagyobb ábrázolható tízes számrendszerbeli szám jegyeinek

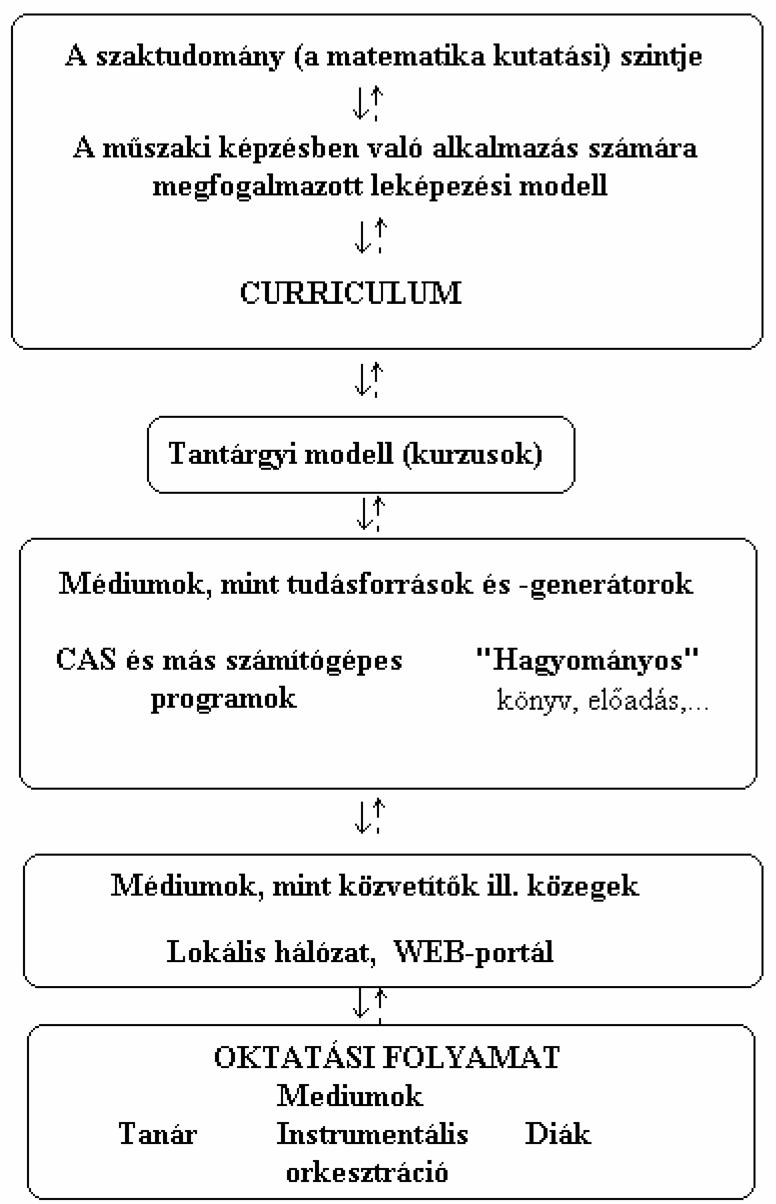
száma 4*(2^17-1)=524284. Tehát ennyi számjegye van a legnagyobb ábrázolható számnak.
A Maple előnyös tulajdonsága felhasználóbarát tervezése. A help használatával lényegében a Maple-eljárások on-line kézikönyvét lapozgathatjuk. A hibrid algoritmus sruktúra révén a rendszer maga el tudja dönteni, hogy melyik algoritmus végrehajtása előnyös.

5. 3. A számítógép-algebrai rendszer funkciói a matematika oktatásában

A számítógép-algebrai rendszer- így a Maple is- egyszerre **forrása**, **médiuma** és **generátora** a matematikai ismeretszerzésnek. A médium szerep is kettős, a rendszer *közvetítője* és egyik fontos *közege* is a matematikai tartalomnak ill. munkavégzésnek.
A számítógépes algebrai rendszerek a tanítási folyamatban a tudásforrásként elsősorban a beépített eljárások segítségével lépnek föl. A közvetítő szerep a CAS szakértői rendszer mivoltából következik: A Maple és a hozzá hasonló rendszerek egyre növekvő, a matematika legkülönbözőbb fejezeteit, érintő tudást képesek közvetíteni, mozgósítani. A Maple 8-as, és még inkább a 9-es verziója a matematikai ismeretanyag néhány fejezeténél tutor szerepkört is képes betölteni. Ennek részletes ismertetésével nem foglalkozunk, mert pénzügyi nehézségek miatt karunkon a hallgatók számára csak a MAPLE V5 verzió volt elérhető.
A CAS munkalap (pl. Maple-worksheet) a tananyag-egységek realizálásával a közeg szerepét természetes módon tölti be. A generátor szerepkör azt jelenti, hogy a matematikai eljárások, algoritmusok a beépített és a felhasználó által kifejlesztett eljárások hívásával realizálódik. Tehát a matematikai munkavégzés, a matematikai tartalom kivitelezése jelentős részben a CAS-ben definiált adatstruktúrák felhasználásával, a CAS-utasítások rendszerével valósul meg.
A CAS didaktikailag megfelelő felhasználása az ismeret-feldolgozó, ismeretgeneráló tevékenység optimalizálását jelenti.

6. A több médiumot felhasználó oktatás didaktikai prototípusa

Az oktatás adott szektorának tananyaga, célrendszere nem környezetfüggetlen. A tudomány, esetünkben a matematika építményének egy része egy meghatározott absztrakciós szinten képezheti a tananyagot. Esetünkben a műszaki képzés számára megfogalmazott leképezési modell alkotja a curriculum készítés alapját. Tehát a szaktudomány által kínált eredményeknek karakterisztikus részhalmazát tudjuk egy adott képzés keretében feldolgozni, és a feldolgozás eszközrendszere, a képzést közvetítő médiumok rendszere is sajátos, a képzésre jellemző. A curriculumban megfogalmazott célok a tantárgyak ismeretanyagában öltenek testet. Az egyes tárgyak ismeretrendszere a médiumok segítségével hat az oktatás résztvevőire. (3. ábra) Az ábrán a folytonos nyilak szükségszerű, a szaggatottak lehetséges hatásra utalnak. (Vásárhelyi Éva, [11])



3. ábra

7. A kutatás hipotézisei

1. Didaktikai alaphipotézis

A CAS didaktikailag átgondolt, megtervezett használatával a matematika tanítható tananyaga tartalmilag bővül, és az elsajátítás színvonala is emelkedik. Ez a kedvező hatás azonban csak a matematika elsajátítására szánt időkeret megnövelésével válhat igazán érezhetővé. A CAS alkalmazásának hatékonysága akkor a legnagyobb, ha felhasználását a matematikai kurzus szerves részévé tesszük. Ilyen módon a számítógépes algebrai rendszer a matematika tanulásának folyamatában egyszerre játszik *közvetítő*, *közeg* és *generátor* szerepet.

2. A tanulási nehézségek kezelése

A CAS alkalmazásával előálló tanulási nehézségek, akadályok elemzése a továbblépés legfőbb feltétele. Különös figyelmet kell fordítanunk a matematikai tartalom transzpozíciójával kapcsolatos tanulási nehézségekre. Az instrumentális genezis körültekintő külső irányítása, tehát az instrumentális orkesztráció, a több médium felhasználásával történő ismeretfeldolgozás sikerének egyik legfontosabb tényezője.

3. A CAS használata és a didaktikai törvényszerűségek

A CAS oktatásban való eredményes használatának alapfeltétele, hogy feltárjuk azokat a didaktikai, pszichológiai törvényszerűségeket, amelyek a rendszer működtetésével kapcsolatosak. Ezek között kiemelkedő jelentőségű a modularizáció és a többszörös reprezentáció témaköre.

4. A médium-rendszer

A bárhonnan elérhető, rugalmas, változatos médiumokkal operáló, a hipertext eszközeit is felhasználó CAS alapú tananyag létrehozása elősegíti azt, hogy a matematika tárgy alapozó szerepkörét eredményesebben tölthesse be, és hatékonyabban működjön közre a gondolkodás fejlesztésében.

5. A tanári szerep változása

A CAS és általában a modern médiumok alkalmazása a tanári tevékenység súlypont- eltolódását eredményezi. A tanár ismeretátadó tevékenysége átstrukturálódik. A tananyag ismeretelemeinek folyamatos „újratermelése”, a tanulási infrastruktúra karbantartása, az ismeretszerzés komplex feltételrendszerével folyó tanulási tevékenység szervezése, irányítása a korábbiaknál nagyobb súlyt kap a tanári tevékenységben.

6. A tanulói attitűd változása

A CAS felhasználásával történő tanulás motiváltabb, a rendszer használata –körültekintő tanári munka esetén- vonzó a hallgatók többsége számára. A rendszer alkalmazása megnöveli a tanulás időszükségletét. Célszerű a számítógépes algebrai rendszer használatát szervezetten, esetleg külön kurzus keretében is tanítani. A befektetett idő azonban többszörösen megtérül.

7. A tanítható tananyag változása, bővülése

A CAS ill. esetenként a CAS és a szerzői rendszerek együttes alkalmazása szélesíti a tanítható tananyagok körét. A tananyag számos fejezete mélyebben és gazdagabb tartalommal tárgyalható. Az egyes fejezetek közötti kapcsolatrendszer kiépítésére több alkalom nyílik. Bizonyos témakörök tárgyalása éppenséggel a CAS matematikaoktatásban történő használatával válik lehetővé.

A továbbiakban *kutatásaink eredményeit* foglaljuk össze. Előbb a CAS felhasználásával kapcsolatos *didaktikai meggondolásainkat* részletezzük (8. fejezet), majd az általunk létrehozott *oktatási modellt* ismertetjük. (9. fejezet)

8. A CAS használatának didaktikai megközelítése

A CAS oktatásban való okszerű, kellő időkeretben történő használata az operatív tevékenység időigényének csökkentésével kognitív- és időkapacitást szabadít fel. Ezáltal lehetőségünk nyílik arra, hogy a matematikai fogalmak reprezentációjával, a vizsgálatok eredményének interpretációjával kimerítőbben foglalkozhassunk. Ez megteremtheti annak a lehetőségét, hogy a tananyag egyes fejezetei közötti kapcsolatok feltárására is lehetőség nyíljon. Ebben a fejezetben áttekintjük a felhasználás didaktikailag legfontosabb jellemzőit.

8. 1. A többszörös reprezentáció megvalósítása a CAS felhasználásával

A reprezentáció az ismeretszerzés, a tanulás folyamatának egyik alapvető és egyúttal izgalmas kérdése. Duval [18] egyenesen úgy fogalmaz, hogy a reprezentáció a matematika területén a megértés alapja. A CAS bevonása megnöveli az ismeretfeldolgozás résztvevőinek esélyét, hogy hatékony reprezentációkat alkalmazzanak. Segítségével ugyanis a különböző reprezentációk hajlékony és gyors előállítása és elérése nagyságrendben megnöveli a többszörös reprezentáció hatékonyságát.

8. 1. 1. A CAS-nek köszönhető jelentés-eltolódások

A CAS -reprezentációk nemcsak azzal tűnnek ki, hogy feleslegessé tesznek több manuálisan konstruált reprezentációs formát, hanem jelentés-eltolódásokat is magukkal hoznak. A tradicionális matematikaoktatásban nagy jelentőséggel bírtak a különböző függvényérték *táblázatok*. Ezek a CAS segítségével bármikor és tetszőleges formátumban reprodukálhatók. Természetesen nem arról van szó, hogy nincs szükség most már táblázatokra, csupán azok funkciója változott meg. Bizonyos függvénytulajdonságok például igen szemléletesen jeleníthetők meg táblázatokkal. De itt nem az egyes függvényértékek érdekesek, hanem a táblázat holisztikus szemlélete, az értékek egymáshoz viszonyított viselkedése, a tendenciák játszanak fontos szerepet.

A függvények *grafikus ábrázolás*ának szerepe is megváltozik. A tradicionális eszközök birtokában a grafikus ábrázolás gyakran a részletes függvényvizsgálatot

betetőző végcél volt. Ez az eljárásmód a CAS birtokában többnyire elveszíti relevanciáját. Az előzetes grafikus ábrázolás - még ha az csupán tájékozódó jellegű csupán - fontos előfeltétele a függvényről alkotott fogalmunk intuitív fejlesztésének.
Harmadikként a rekurzív reprezentációk szerepének megváltozását említjük. Kézi számolás esetén a rekurzív algoritmusok használata a gyakorlatban szinte megoldhatatlan mennyiségű számítás elvégzését jelentette. Ezért a zárt formulákat többnyire előnyben kellett részesíteni a rekurzióval szemben. A rekurziók CAS-szel való könnyű kivitelezhetősége nagymértékben megnövelte ezek jelentőségét a zárt algebrai formákhoz viszonyítva. Ezzel együtt előtérbe kerül az algoritmusok kivitelezésének időigénye, az un. időkomplexitás. Hogyan tehetjük az algoritmusokat olyanná, hogy futtatásuk gazdaságosabbá váljék? Ez alapvető, a gyakorlatias matematikatanítás szempontjából is fontos kérdéssé vált. Mindez persze azt is jelenti, hogy a matematika és a programozás elemeinek ismerete, ha pragmatikusan közelítjük meg az ismeretszerzést közelebb került egymáshoz.

8. 1. 2. Interpretációs követelmények

A CAS-reprezentációk változatos formáinak gyors elérhetősége önmagában nem nyújt garanciát e reprezentációk adekvát, didaktikailag érzékeny használatára.(Schneider és Peschek [19]) Egyrészt fennáll annak a veszélye, hogy a tanulók öncélúan, valós cél nélkül állítják elő a reprezentációkat, akár nagy mennyiségben, anélkül, hogy ezekből értékelhető következtetéseket vonnának le.
Valójában a CAS használata, már az első lépésektől kezdve járulékos erőfeszítést követel az interpretáció terén. Az egyezményes matematikai formátumban adott objektumokat interpretálni, majd transzformálni kell a CAS szintaktikának megfelelően. Ez sokszor, éppen a kötött CAS szintaktika miatt nagyon is, figyelmes munkát, többlet ismeretet igényel.
Hasonlóan, ha a változatos formájú és könnyen elérhető CAS-reprezentációk használatát tűzzük ki célul, akkor számottevő többletmunkára kell számítanunk. Több szerző számol be a különböző reprezentációk közötti váltás tanulói nehézségeiről. (Schneider [19], Canet [20], Yerushalmy [21]). A különböző reprezentációk közötti kapcsolatok feltárása nem várható a tanulók önálló tevékenységének eredményeként. Közvetlen irányítás, tanári segítség szükséges ahhoz, hogy a különböző reprezentációk nyújtotta megközelítések révén valódi interpretációs többleteredményhez jussunk.
Természetesen a CAS-reprezentációk nem csupán járulékos munkavégzést követelnek, hanem sokszor megkönnyítik a felhasználó munkáját. Az egyenletek megoldásához például nem szükséges a típus megállapítása, csupán a megfelelő szintaktikájú utasítást kell végrehajtanunk. Természetesen, mihelyt a megoldást igazolni, vagy valamely kontextus szerint értelmezni akarjuk, nem térhetünk ki a megfelelő interpretáció elől.
A többszörös reprezentáció, ahogy az előzőkben kifejtettük, a fogalom kialakításának hatékony eszköze. Máskor a probléma megoldásának nélkülözhetetlen eszköze. Sokszor a követett eljárás által kapott eredmény

hitelességét, vagy éppen tarthatatlanságát tárjuk fel a megoldásban használttól különböző reprezentáció segítségével. Az alábbiakban bemutatjuk a többszörös reprezentáció általunk használt főbb, didaktikailag eltérő esetét.

8. 1. 3. A többszörös reprezentáció didaktikai funkcióinak megvalósítása a CAS segítségével

Példák segítségével mutatjuk be a többszörös reprezentáció didaktikai cél szempontjából elkülöníthető eseteit.

a. Többoldalú fogalomfeltárás

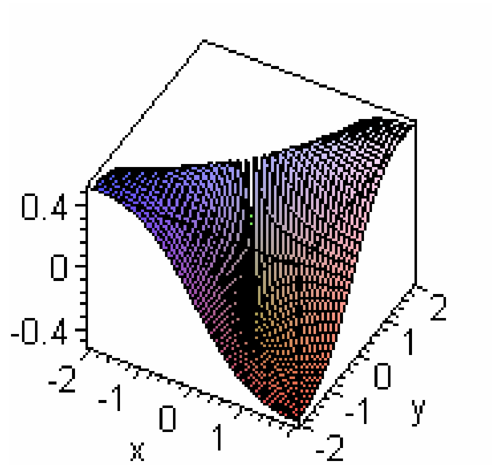
Példa

Mutassuk meg, hogy a $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}$ *határérték nem létezik!*

Megoldás

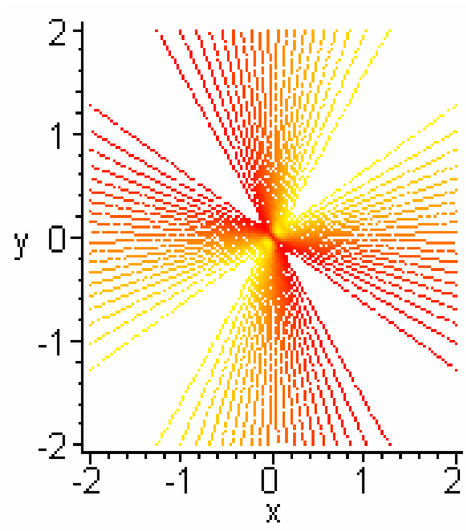
Először vizsgáljuk a kérdést **grafikusan**. Ezt többféle reprezentációval is megvalósítjuk. Rajzoljuk föl a függvényt a **plot3d** segítségével (4. ábra) illetve készítsük el az xy síkra vetített ill. a térbeli szintvonalas ábrákat a **contourplot** (5. ábra) és **contourplot3d** (6.ábra) eljárásokkal:

```
with(plots):# A plot csomagot be kell töltenünk
f:=(x,y)->x*y/(x^2+y^2):
plot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,
orientation=[-61,44], grid=[40,40],axes=BOXED);
```



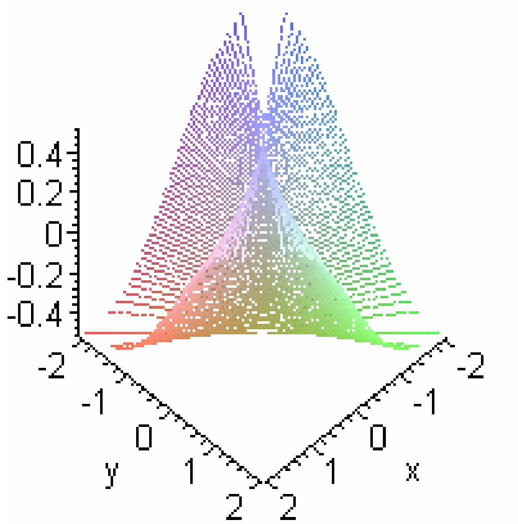
4. ábra

```
> contourplot(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,
          grid=[40,40],contours=20,axes=FRAMED);
```



5. ábra

```
> contourplot3d(f(x,y),x=-2..2,y=-2..2,
          grid=[40,40],contours=25,axes=FRAMED);
```



6. ábra

Az ábrákból láthatóan meglehetősen furcsán viselkedik a függvény a (0,0) pont környezetében. Sok különböző értéket vesz föl a függvény az origó környezetében.

Másként is valószínűsíthetjük, hogy a kérdéses határérték nem létezik. Alkalmazzunk most **numerikus reprezentációt**! Képezzük *véletlenszerűen választott* értékpárok (pontok) sorozatát és számítsuk ki ezeken a helyeken a függvényértéket!

```
> r:='r':
     r:=proc(n)
          local a,b;
          a:=evalf(rand()*12^(-12-n));
          b:=evalf(rand()*12^(-12-n));
          [a,b,f(a,b)]
          end:
array(1..12,1..3,[[x[n],y[n],'f(x[n],y[n])'],seq(r(n),n
=0..10)]);
```

$$\begin{bmatrix} x_n & y_n & f(x_n, y_n) \\ 0.04945561849 & 0.09439307182 & 0.4110870605 \\ 0.001806575649 & 0.009252076341 & 0.1880903055 \\ 0.0002048772454 & 0.0007526787967 & 0.2534211079 \\ 0.00004504236147 & 0.00002614306573 & 0.4341542648 \\ 0.4924685337\ 10^{-7} & 0.2525182232\ 10^{-5} & 0.01949488212 \\ 0.3876288938\ 10^{-6} & 0.2991268993\ 10^{-6} & 0.4836639073 \\ 0.1130385197\ 10^{-7} & 0.3575436504\ 10^{-7} & 0.2874242183 \\ 0.1241319787\ 10^{-9} & 0.2226376602\ 10^{-8} & 0.05558237231 \\ 0.2406157879\ 10^{-9} & 0.2034337513\ 10^{-9} & 0.4930374372 \\ 0.3813940047\ 10^{-11} & 0.1846681379\ 10^{-10} & 0.1980804043 \\ 0.9304678847\ 10^{-12} & 0.6901002222\ 10^{-12} & 0.4784738323 \end{bmatrix}$$

Az elkészített táblázat harmadik oszlopa mutatja, hogy a függvényértékek nem torlódnak egyetlen érték körül.
Ezek után jöhet az **analitikus igazolás**, a perdöntő bizonyíték! Valóban az $y = x$ egyenes mentén közelítve $f(x, y) = f(x, x) = \frac{1}{2}$, míg az $y = -x$ mentén $f(x, y) = f(x, -x) = -\frac{1}{2}$. Tehát a kérdéses határérték valóban nem létezik.

$$f(x, x) = \frac{1}{2}$$

$$f(x, -x) = \frac{-1}{2}$$

b. A problémamegoldás nélkülözhetetlen eleme a többféle reprezentáció

Példa

Adott változóértékek egy listája és a megfelelő függvényértékek listája:

$X := [.2, .4, .6, .8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]$;

$Y := [-4.595, -1.997, -.541, .457, 1.336, 1.769, 2.513, 2.669, 3.369, 3.667]$

Készítsük el ezekből az összetartozó értékpárok kételemű listájának listáját. Az összetartozó értékpárok ábrázolásával állapítsuk meg az empirikus képlet típusát, majd linearizálással ellenőrizzük választásunk helyességét és adjuk meg a pontokra jól illeszkedő függvényt!

A legkisebb négyzetek elvének alkalmazása, a tapasztalati képlet típusának megállapítása, a linearizálás, több szempontból is olyan problémakör, amelynek feldolgozásához a CAS alkalmazása pragmatikus és episztemikus szempontból is kívánatos:

- A numerikus számítások kézi elvégzése ma már aligha jöhet szóba. Az operatív munka terhétől megszabadulva a feladat lényegére összpontosíthatunk, és jelentős idő- és energia megtakarítást érhetünk el.
- A CAS modulok egymáshoz kapcsolódó, többféle reprezentációval létrehozott sorozata a funkcionális programozás természetéből adódóan áttekinthető, általánosan alkalmazható algoritmust eredményez.
- A kapott illesztés jóságának többféle úton való ellenörzése könnyen elvégezhető

Megoldás

1. Betöltjük regressziós egyenes kiszámítására szolgáló eljárást. Az eljárás többféle reprezentációt nyújt. **Grafikus reprezentációt**, mert ábrázolja a regressziós egyenest. Megadja a regressziós egyenes egyenletét, tehát **analitikus reprezentációt** is megvalósít. Kiszámítja az eltérések négyzetösszegét, ami **numerikus reprezentáció**t jelent. Az eljárás részletes kódja a függelékben megtalálható.

2. Létrehozzuk a megfelelő listákat, majd a zip utasítással előállítjuk az összetartozó értékpárok listáját. Ez **numerikus reprezentáció**t jelent.

```
> X:=[seq(i*0.2,i=1..10)];
```

$X := [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0]$

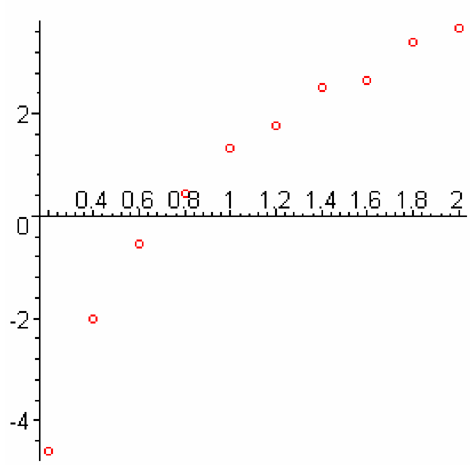
```
>Y:=[-4.595,-1.997,-
0.541,0.457,1.336,1.769,2.513,2.669,3.396,3.667];
```

$Y := [-4.595, -1.997, -0.541, 0.457, 1.336, 1.769, 2.513, 2.669, 3.396, 3.667]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[0.2, -4.595], [0.4, -1.997], [0.6, -0.541], [0.8, 0.457], [1.0, 1.336], [1.2, 1.769], [1.4, 2.513], [1.6, 2.669], [1.8, 3.396], [2.0, 3.667]]$

3. Ábrázoljuk a **pontok**at és megpróbáljuk megállapítani a megfelelő képlettípust. Tehát ismét **grafikus reprezentáció** következik.



4. Elvégezzük a megfelelő transzformációt. Ez **szimbolikus reprezentációt** jelent. Mivel itt $\mathrm{f}(x) = a\ln(x) + b$ alakú függvény illesztése várható, ezért az $u = \ln(x)$ transzformációt kell elvégeznünk. Ezt az **X** lista elemeire a map utasítással tehetjük meg

```
> X1:=evalf(map(ln,X));
```

$X1 := [-1.609437912, -0.9162907319, -0.5108256238, -0.2231435513, 0., 0.1823215568, 0.3364722366, 0.4700036292, 0.5877866649, 0.6931471806]$

5. Létrehozzuk a transzformáció utáni értékpárok listáját és meghatározzuk a **regressziosegy** eljárással a regressziós egyenest.

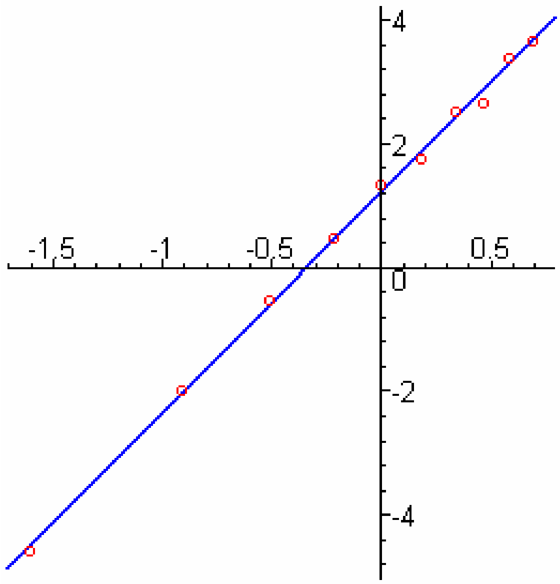
```
> pontokln:=zip((x,y)->[x,y],X1,Y);
```

$pontokln := [[-1.609437912, -4.595], [-0.9162907319, -1.997], [-0.5108256238, -0.541], [-0.2231435513, 0.457], [0., 1.336], [0.1823215568, 1.769], [0.3364722366, 2.513], [0.4700036292, 2.669], [0.5877866649, 3.396], [0.6931471806, 3.667]]$

```
> regressziosegy(pontokln);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.1038010289

A regressziós egyenes, $3.560585568\, x + 1.219886061$



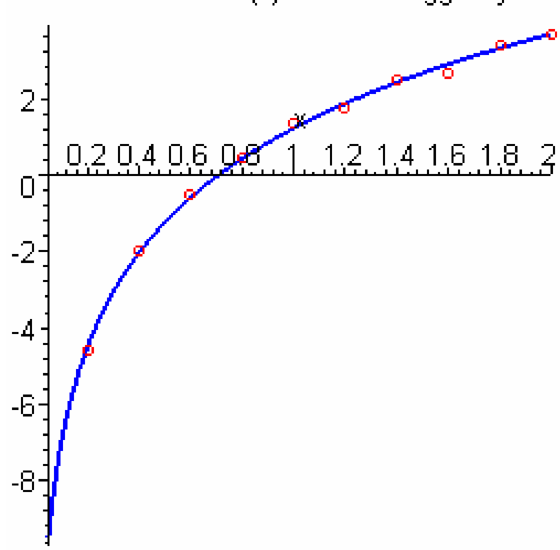
6. Megalkotjuk a keresett függvényt. A **regressziosegy** globális változói, az ***a*** és a ***b*** a megfelelő együtthatók A keresett logaritmus-függvény a meghatározott együtthatókkal:

```
> f:=unapply(a*ln(x)+b,x);
```

$f := x \to 3.560585568 \ln(x) + 1.219886061$

7. Ábrázoljuk a pontokat és a közelítő függvényt. Ezáltal **vizuális ellenőrzést** végzünk.

```
>abra:=plot(f(x),x=op(1,X)-
0.15..op(nops(X),X),color=blue,thickness=2):
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle):
> plots[display]({abra,kep},title=`A keresett a*ln(x)+b
alakú függvény`);
```



8. Kiszámítjuk az eltérések négyzeteit, majd az eltérések négyzetösszegét. Így algebrai úton, **numerikusan** is meggyőződünk az illesztés jóságáról.
Az eltérések négyzetei:

```
> seq(evalf((f(X[i])-Y[i])^2),i=1..nops(X));
```

0.007114021502, 0.002083511214, 0.003358467105, 0.001000814186, 0.01348244683, 0.01001151631, 0.009039398048, 0.05034378163, 0.006930433130, 0.0004366390129

A négyzetösszeg:

```
> Sum('((f(X[i])-
Y[i])^2)',i=1..nops(X))=sum('evalf((f(X[i])-
Y[i])^2)',i=1..nops(X));
```

$$\sum_{i=1}^{10} (\mathrm{f}(X_i) - Y_i)^2 = 0.1038010290$$

c. A többszörös reprezentáció az eljárás tökéletesítésének és a korrekt működés vizsgálatának eszköze

Az alábbi példa több szempontból jelentős. Segítségével a következőkre mutatunk rá:

- A meglepő, új jelenségek didaktikailag körültekintő kezeléséhez nélkülözhetetlen a különböző reprezentációk használata, és az adott jelenséget csak több reprezentáció szimultán alkalmazásával tudjuk meggyőzően bemutatni.
- Az is kitűnik a példából, hogy a rekurzív reprezentáció -amely CAS nélküli oktatási környezetben inkább a szuggesztív bemutató erejével hat, a konkrét számítások terén viszont nehézkesen alkalmazható, hisz igen sok számolást igényel- számítógép algebrai rendszer használata esetén jól kezelhető és rendkívül hatékony.
- A példa arról is tanúskodik, hogy a problémák hatékony kezeléséhez nélkülözhetetlen a megfelelő stratégia kidolgozása. (adequate strategy)
- Meggyőzően szemlélteti azt is, hogy a CAS kétségtelenül hatalmas numerikus képességei is csak okszerű felhasználás esetén vezetnek korrekt eredményhez.
- A CAS kiválóan alkalmas a matematikai jelenségek sokoldalú bemutatására. Az adott eljárás stabilitásának bizonyítása fontos, és CAS nélkül is elvégezhető. De legalább ennyire fontos, az eljárás alkalmazhatóságának, pontosságának vizsgálata. Tehát fontos, hogy könnyen konstruálhassunk a működést monitorozó eljárást (effektív monitoring), az eljárás könnyen kezelhető és meggyőző eredményt hozó legyen. Mindez azt is jelenti, hogy a **CAS a matematikai vizsgálat fontos integráló eszköze lehet**!

Példa numinst.mws

Az $I_n(x) = \int_0^x t^n \mathrm{e}^{(-t)}\, dt$ *alakú integrálok (* $n = 0, 1, 2, \ldots,\ 0 < x$ *) a*

valószínűségszámításban (χ^2 eloszlás) fontos szerepet játszanak.
a) Állítsunk elő - parciális integrálással - rekurzív formulát az

$$I_n(x) = \int_0^x t^n \, e^{(-t)} \, dt$$

integrálok kiszámítására.
b) Mutassuk meg - konkrét x értéket választva (pl. $x = 1$) -, hogy az eljárás nem vezet eredményre!
c) Keressük meg az eredménytelenség okát!
d) Mutassuk meg, hogy a rekurzív eljárást "leszálló" módon (csökkenő sorozatot alkotva) alkalmazva helyes értékeket kapunk!

Megoldás

1. Lépés: A rekurzív összefüggés előállítása

A parciális integrálást a Maple student programcsomagjának **intparts** eljárásával végezhetjük.

```
> with(student):
>Int(t^n*exp(-t),t=0..x)=intparts(Int(t^n*exp(-t),t=0..x),t^n);
```

$$\int_0^x t^n \, e^{(-t)} \, dt = -x^n \, e^{(-x)} - \int_0^x -\frac{t^n \, n \, e^{(-t)}}{t} \, dt$$

```
> simplify(%);# Egyszerűbb alakra hozzuk
```

$$\int_0^x t^n \, e^{(-t)} \, dt = -x^n \, e^{(-x)} + n \int_0^x t^{(n-1)} \, e^{(-t)} \, dt$$

Ha I_n -nel jelöljük $\int_0^x t^n \, e^{(-t)} \, dt$ értékét, akkor:

$$I_n = -x^n \, e^{(-x)} + n \, I_{n-1}$$

Az I_0 kezdőérték:

```
> I[0]=int(exp(-t),t=0..x);
```

$$I_0 = -e^{(-x)} + 1$$

2. Lépés Megmutatjuk, hogy az *eljárás instabil!*

2. 1. Írjuk meg az eljárás pszeudokódját:

procedure eljaras(n : nonnegative integer)

if $n = 0$ **then** eljaras(n):= $-e^{(-x)} + 1$

else eljaras(n) := $-x^n e^{(-x)} + n\ \mathrm{eljaras}(n-1)$

2. 2. Ezek után állítsuk elő a Maple-kódot! (**Szimbolikus reprezentáció**)

```
> eljaras:=proc(n)
> option remember:
> if n=0 then RETURN(-exp(-x)+1);
> else
> (-x^n*exp(-x)+n*eljaras(n-1));
> fi;
> end;
```

2. 3. Teszteljük az eljárást. Legyen $x = 1$.

```
> x:=1:
> eljaras(0);
```

$$-e^{(-1)} + 1$$

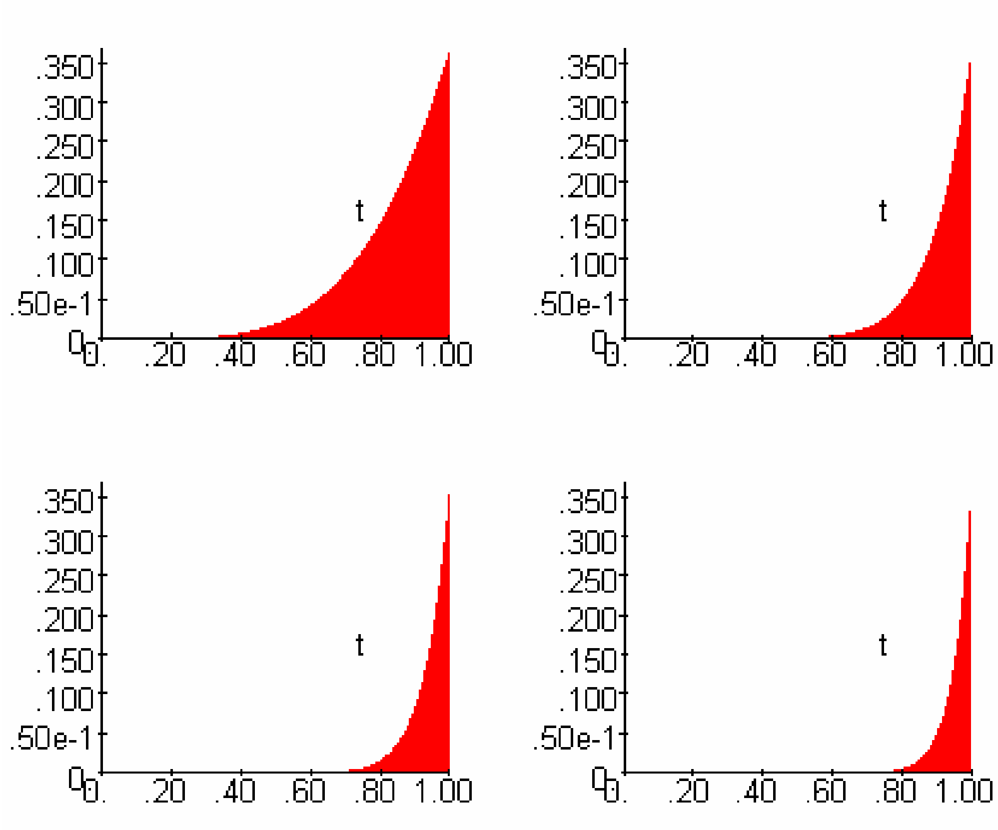
```
> lista:=[seq(evalf(eljaras(n)),n=1..40)]:
```

Hívjuk meg az eljárást az első 40 pozitív egészre! (**Numerikus reprezentáció**)

```
> linalg[matrix](8,5,lista);
```

$$\begin{bmatrix} 0.2642411176 & 0.160602794 & 0.113928941 & 0.08783632 & 0.0713022 \\ 0.0599336 & 0.051656 & 0.04537 & 0.0404 & 0.036 \\ 0.03 & 0. & -2. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.1\ 10^{7} & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.1\ 10^{15} & -0.1\ 10^{17} \\ 0.1\ 10^{18} & 0. & 0. & -0.1\ 10^{22} & 0. \\ 0. & 0. & 0.1\ 10^{28} & -0.1\ 10^{30} & 0. \\ -0.2\ 10^{33} & 0. & 0. & 0. & -0.1\ 10^{39} \end{bmatrix}$$

Láthatóan a tizedesjegyek elég gyorsan "kiegyszerűsödnek", az eljárás nyilvánvalóan hamis értékeket szolgáltat. Nagy abszolút értékű negatív számokat is kaptunk, s 0 értékeket, holott a megfelelő $t^n e^{(-t)}$ függvények pozitív értékűek és növekvő n mellett a [0,1) intervallumon egyre kisebb értékűek. Erősítsük meg az előbbi állításunkat grafikus úton! Rajzoljuk föl a függvényosztály néhány elemét.(7. ábra) Legyen n =5, 10, 15, 20. (**Grafikus reprezentáció**)



7. ábra

2. 4. Az instabilitás **analitikus** igazolásához tegyük föl, hogy az $I_0{}^*$ kezdőérték hibája ε_0, és a további számításokat tökéletes pontossággal végezzük. $I_n{}^*$ -gal jelölve a pontatlan kezdőértékből számított értéket:

$$I_0{}^* = I_0 + \varepsilon_0 ,$$

$$I_n{}^* = -\mathrm{e}^{(-x)} + 1 + n\, I_{n-1}{}^*$$

A pontos értékre vonatkozó

$$I_n = -\mathrm{e}^{(-x)} + 1 + n\, I_{n-1}$$

összefüggést kivonva azt kapjuk, hogy pontatlan kezdőérték miatti

$$r_n = I_n{}^* - I_n$$

eltérések eleget tesznek az

$$r_0 = \varepsilon_0 , \quad r_n = n\, r_{n-1}$$

rekurzív összefüggésnek.

Ennek a megoldása egyszerűen adódik:

$$r_n = n!\, \varepsilon_0$$

Látható, tehát, hogy a hiba az n-edik lépésben n-szeresére nő, tehát, ha pl. $10 = n$,

akkor
10-szeresére. Így, a számításba vehető tizedesjegyek száma rohamosan csökken, a hiba rohamosan nő.

3. A leszálló algoritmus

Abból, hogy az eljárás növekvő n esetén instabil, egyáltalán nem következik, hogy csökkenő n esetén is ilyen!

3. 1. Oldjuk meg az

$$I_n = -x^n e^{(-x)} + n\, I_{n-1}$$

egyenletet I_{n-1} -re

$$I_{n-1} = \frac{I_n + x^n e^{(-x)}}{n}$$

Mivel itt $\frac{1}{n}$ -nel való szorzás szerepel, azt sejtjük, hogy az eljárás stabil!

3. 2. Állítsuk elő a "leszálló" rekurziónak megfelelő eljárást:

eljaras1 := **proc** (n)

option *remember*;

x^(n + 1)×exp(−x)/(n + 1) + eljaras1(n + 1)/(n + 1)

end proc

3. 3. Vizsgáljuk először **numerikusan** az eljárást! Számítsuk ki az integrál értékét néhány „elég nagy” n-re!

```
> x:=1:
> eljaras1(100):=0:#A kezdőérték lényegében tetszőleges!
> for i from 45 to 50 do evalf(eljaras1(i)) od;
```

0.008171154918

0.007993685071

0.007823757117

0.007660900494

0.007504682961

Úgy látszik, hogy valóban jól működik, stabil az eljárás.

3. 4. Most **igazoljuk az eljárás stabilitását.** Jelöljük az

$$I_n = -x^n e^{(-x)} + n\, I_{n-1}$$

rekurzió I_0 pontos értékhez tartozó elméletileg pontos megoldását I_n -nel, az

$$I_{n-1} = \frac{I_n + x^n \mathrm{e}^{(-x)}}{n}$$

rekurzió $I_m^{[m]} = I_m = 0$ kezdőértékhez tartozó megoldását $I_n^{[m]}$ - mel.
Ekkor az

$$I_{n-1}^{[m]} = \frac{1}{n} \; I_n^{[m]} + \frac{x^n \mathrm{e}^{(-x)}}{n}$$

és az

$$I_{n-1} = \frac{I_n}{n} + \frac{x^n \mathrm{e}^{(-x)}}{n}$$

összefüggések különbségét képezve kapjuk:

$$d_n^{[m]} = I_n^{[m]} - I_n$$

ebből

$$d_{n-1}^{[m]} = \frac{1}{n} \; (\; I_n^{[m]} - I_n \;)$$

Innen

$$d_{m-1}^{[m]} = \frac{1}{m} \; (\; I_m^{[m]} - I_m \;)$$

$$d_{m-2}^{[m]} = \frac{1}{m\,(m-1)} \; (\; I_m^{[m]} - I_m \;)$$

és így tovább:

$$d_n^{[m]} = 1/((\; m - (m - n - 1)\;)...(\; m - 1 \;)\,\mathrm{m})(\; I_m^{[m]} - I_m \;)$$

azaz $I_m^{[m]} = 0$ miatt:

$$d_n^{[m]} = 1/((\; n + 1 \;)....(\; m - 1 \;)\,\mathrm{m})(\; -I_m \;)$$

Ebből adódik, hogy rögzített n esetén:

$$\lim_{m \to \infty} d_n^{[m]} = 0 \,,$$

azaz

$$\lim_{m \to \infty} I_n^{[m]} = I_n \,,$$

és így a "leszálló" algoritmus mindig pontos I_n értéket ad, ha elég nagy m-től indítjuk.

Ezek után már csak azt kell tudnunk, hogy milyen messziről kell az eljárást indítanunk ahhoz, hogy előre adott eltérésnél kisebb hibával közelítsük meg a pontos értéket!

3. 5. Írjunk eljárást a hiba becslésére! **(analitikus reprezentáció)**

Legyen $x = 1$ .Ekkor az $|I_m| < 1$ nyílvánvaló.

Így az eljárás:

$hiba := \mathbf{proc}(m, n)$

$\quad \mathbf{if}\ m \le n\ \mathbf{then}\ \mathrm{RETURN}(\ `Hibás\ adatok`)\ \mathbf{end\ if};$

$\quad \mathrm{evalf}(\mathrm{abs}(1/\mathrm{product}(i, i = n+1\ ..\ m)))$

end proc

```
> hiba(100,99);
```

0.01000000000

Hívjuk meg a hiba eljárást értékek egy sorozatára! (**numerikus reprezentáció**) Vizsgáljuk meg például, hogyan változik a hiba értéke, ha a kiinduló értéktől való távolság 1, 2,...,10:

```
> for j from 99 by -1 to 90 do
>  hiba(100,j);
> od;
```

$$0.01000000000$$
$$0.0001010101010$$
$$0.1030715316\ 10^{-5}$$
$$0.1062593110\ 10^{-7}$$
$$0.1106867823\ 10^{-9}$$
$$0.1165124024\ 10^{-11}$$
$$0.1239493642\ 10^{-13}$$
$$0.1332788863\ 10^{-15}$$
$$0.1448683546\ 10^{-17}$$
$$0.1591959941\ 10^{-19}$$

A hiba láthatóan igen gyorsan csökken.

8. 2. Modularizáció

A számítógép-algebrai rendszerek használatának talán legalapvetőbb, legösszetettebb, didaktikai szempontból igen jelentős kérdése a modulok használata. Ezért ezzel a kérdéskörrel behatóan, a CAS más didaktikai megközelítéseihez viszonyítva nagyobb terjedelemben foglalkozunk. Ismertetjük a modulok általunk kidolgozott osztályozási rendszerét. Részletezzük a CAS-modularizáció motivációs rendszerét, és ismertetjük a curriculum-alapú modularizációval kapcsolatos elgondolásunkat. Példák segítségével mutatjuk be a modulok használatának gyakorlatunkban előfordult felhasználási módjait. Összevetjük a CAS-modularizációval kapcsolatos, az irodalomban előforduló nézeteket is.

8. 2. 1. A modul definíciója

Definíció

Modul alatt az általánosított tudás olyan többé-kevésbé komplex és összekapcsolt elemét értjük, amelyet mint egységes egészet meghívhatunk és alkalmazhatunk, anélkül, hogy explicit módon kifejtenénk, a belső szerkezetét ismerve kezelnénk. (Dörfler, [22])
A modulok az emberi gondolkodásban, cselekedetekben, a mindennapi életben, de a tudományok terén is lényeges szerepet játszanak. A modularizáció a kognitív tudás fontos és hatékony szerkesztő- és szervező elve. Hozzunk néhány példát a modul fogalmára!

Példa

A **changevar** modul-a Maple student csomagjának eljárása- a helyettesítéses integrálás egy lépését végzi el.

```
>Int(ln(x)/(x*sqrt(1+ln(x))),x)=student[changevar](sqrt
(1+ln(x))=t,Int(ln(x)/(x*sqrt(1+ln(x))),x),t);
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx = \int 2\ln(\mathrm{e}^{(-1+t^2)})\,dt$$

A jobb oldal egyszerűbb alakra hozható, hisz tudjuk, hogy
$\ln(\mathrm{e}^{u}) = u$

A **symbolic** opcióval megerősített **simplify** modul (utasítás) az integrandust egyszerűbb alakra hozza

```
> simplify(%,symbolic);
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx = 2\int (t-1)(t+1)\,dt$$

Az **expand** modul a jobb oldalt széttagolja, tehát elvégzi a beszorzást, és alkalmazza a tagonkéni integrálás szabályát.

```
> lhs(%)=expand(rhs(%));
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx = -2\int 1\,dt + 2\int t^2\,dt$$

Végezzük el az integrálást! Ezt a **value** modul segítségével tehetjük meg:

```
> lhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx = -2\,t + \frac{2}{3}t^3$$

Térjünk vissza az eredeti változóhoz, tehát helyettesítsünk a t helyére
$\sqrt{1+\ln(x)}$ -et. Ezt a **subs** modullal végezhetjük el

```
> lhs(%)=subs(t=sqrt(1+ln(x)),rhs(%));
```

$$\int \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}\,dx = -2\sqrt{1+\ln(x)} + \frac{2}{3}(1+\ln(x))^{(3/2)}$$

Mutassuk Meg deriválással, hogy az eredmény helyes A deriválást a **diff** modul segítségével végzi el a rendszer:

```
> diff(%,x);
```

$$\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\ln(x)}\,x} + \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}$$

A **normal** modullal közös nevezőre hozzuk a jobb oldalt:

```
> normal(%);
```

$$\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}} = \frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}$$

A két oldal azonos, tehát az eredmény helyes!

Példa

A CAS lehetőséget nyújt arra, hogy matematikai objektumokat tároljunk, s azokat modulokként tekintsünk, műveleteket végezzünk velük. Az alábbiak -egy szám, majd egy mátrix, s végül egy függvény- erre szolgálnak példaként:

```
> Pi=evalf(Pi,20);
```

$$\pi = 3.1415926535897932385$$

```
> M:=matrix([[2,3,4],[-2,0,-5]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> f:=x->ln(x^2+1);
```

$$f := x \to \ln(x^2+1)$$

Az emberi gondolkodás alapvetően fogalmakban és fogalmakkal valósul meg. A fogalmak egymással összefüggő információk sűrített, kötegelt önálló egységét jelentik. Így a fogalmak általában is modul jellegűek és ilyen értelemben az emberi gondolkodás is moduláris. Természetesen a matematikai tartalmakat megvalósító CAS modulok különböznek a fogalmaktól általában, mint moduloktól. Gondoljuk csak meg, milyen gazdag és egyénenként milyen változó tartalommal bír például a 'mosoly' fogalmunk! A CAS modulok általában szigorúan determinált tartalmat hordoznak.

8. 2. 2. A CAS modul funkciói

A modulok fő funkciói **a gondolkodás tehermentesítése** és **a komplexitás csökkentése**. A komplexitás csökkentése sokszor döntő jelentőségű, tehát azt is jelentheti, hogy modulok alkalmazása nélkül a kérdéses témakört- figyelembe véve az igencsak véges időkeretet- fel sem tudnánk dolgozni. A modulok használatának másik nagy előnye, hogy a moduláris építkezés során az összetett műveletsor egyes részelemeit nem kell a részleteket illetően végiggondolnunk, figyelmünket az új tudáselemre összpontosíthatjuk.

Példa

Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$\frac{x^2+4\,x-3}{(x^2+x+3)^2}=\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)\mathrm{y}(x)}{\mathrm{y}(x)^2+1}$$

Betöltjük a differenciálegyenletek kezelését végző eljárásokat tartalmazó csomagot:

```
> with(DEtools):
> de:=(x^2+4*x-
3)/((x^2+x+3)^2)=diff(y(x),x)*y(x)/(y(x)^2+1);
```

$$de := \frac{x^2+4\,x-3}{(x^2+x+3)^2}=\frac{\left(\frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x)\right)\mathrm{y}(x)}{\mathrm{y}(x)^2+1}$$

Látható, hogy a differenciálegyenlet szétválasztható változójú, ezt az **odeadvisor** eljárással is megállapíthatjuk:

```
> odeadvisor(de);
```

$[\_separable]$

A megoldás algoritmusa egyszerű, de nagyon sok munkával járna. Racionális törtfüggvény integrálását kéne elvégeznünk. Ez időigényes és könnyű eltéveszteni. Érdemes tehát a Maple **sebarablesol** eljárásával dolgozni:

```
> separablesol(de,y(x));
```

$$\left\{-\frac{8}{121}\sqrt{11}\,\arctan\left(\left(\frac{2\,x}{11}+\frac{1}{11}\right)\sqrt{11}\right)+\frac{-\frac{15\,x}{11}-\frac{24}{11}}{x^2+x+3}-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{y}(x)^2+1)+\_C1=0\right\}$$

Megjegyezzük, hogy a közönséges differenciálegyenletek megoldására általában használatos **dsolve** eljárás nem boldogul a feladattal!

Természetesen a modulok szerepe nem merül ki a kétségkívül alapvető funkcióik -a komplexitás csökkentése, a gondolkodás tehermentesítése-teljesítésével. Gondoljunk csak például a grafikus ábrázolást végző modulokra.

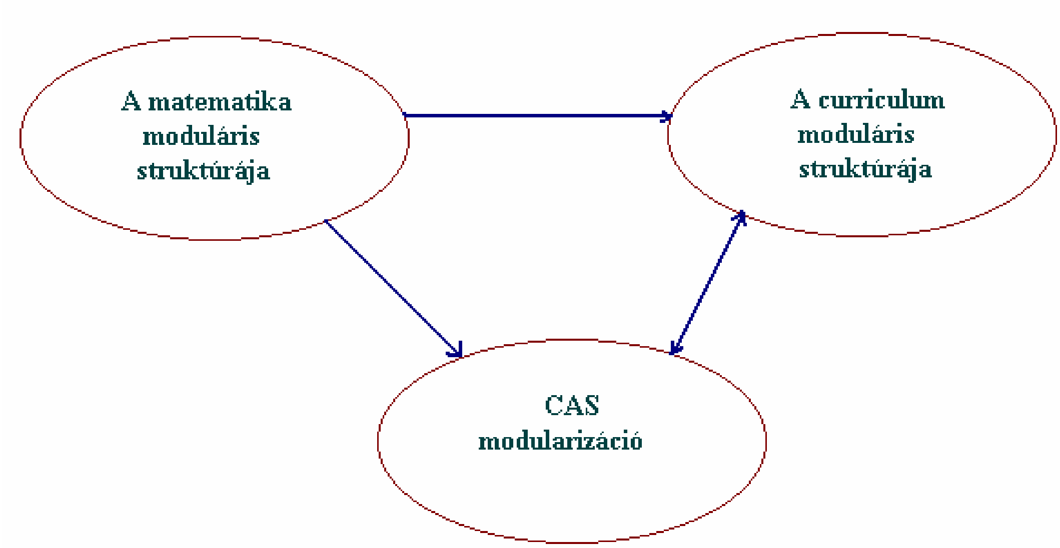
8. 2. 3. A modularizáció az oktatási folyamatban. A matematikai-, a CAS- és a curriculum modulok

Ha a CAS moduloknak a matematikai ismeretek elsajátítása során betöltött

szerepét vizsgáljuk, akkor abból kell kiindulnunk, hogy mind a matematika, mint tudomány, mind a curriculum által indukált oktatási folyamat moduláris szerkezetű. A matematika moduláris szerkezete a tudomány önfejlődésének eredménye. Az oktatási folyamat moduláris szerkezetét alapvetően a curriculumban megadott oktatási célok határozzák meg. Természetesen, a konstruktív didaktika elveivel egyezően úgy gondoljuk, hogy a curriculum nem merev előírásrendszert ad, "a valóban érvényes curriculumot magának a tanuló közösségnek kell összeállítania, természetesen legfontosabbként a pedagógus szakértő asszisztálásával." (Nahalka I., [24])
A CAS-modularizáció struktúráját alapvetően a következő tényezők határozzák meg:

- A matematika belső szerkezete, moduláris felépítése.
- A meghatározott kvantumokban feldolgozandó, a curriculum elvei szerint felépülő tananyag moduláris szerkezete.

A CAS-modulok rendszerének, természetszerűleg, meg kell felelnie a fenti kettős szerkezeti rendszernek, hiszen célunk ezek használatával éppen a tárgyalandó matematikai tananyag jobb, mélyebb elsajátítása. A CAS-modulok a matematikai ismeretanyag feldolgozása során generátor és médium szerepet is betöltenek. Tehát a matematikai eljárásokat maga a CAS is generálhatja (gondoljunk csak pl. a rekurzív eljárásokra!), a médium szerep-mint ahogy erre már korábban is utaltunk- maga is kettős, a CAS közege és közvetítője is lehet a matematikai tartalomnak. Mindeközben a CAS- modulok, -eljárások rendszere alapvetően illeszkedik a matematikai tartalom moduláris szerkezetéhez, nem passzív kiszolgálója annak! A CAS használata -numerikus, szimbolikus, grafikus eszközrendszere segítségével- sok esetben tartalmi bővülést is eredményez. Tehát a CAS használata módosítja magát a curriculumot is, bizonyos ismeretek, készségek súlya csökken, másoké megnő, bizonyos ismeretelemek feleslegessé válhatnak, új ismeretek lépnek be. (8. ábra)
Sok esetben a matematikai eljárás és a CAS-algoritmus lényegében egybeesik, a matematikai tartalom megalkotása a CAS-algoritmus megírásával, kifejtése az algoritmus végrehajtásával, működtetésével valósul meg. Máskor a CAS a fogalom mélyebb elsajátításában, gazdagabb kibontásában segít ugyan, de szerepe az alapvető tartalmi kibontásban mellérendelt. Bármelyik esetről legyen szó, mindenképpen hozzáadott érték keletkezik, a "hagyományos", vagy mondjuk úgy CAS-használat nélküli matematikai ismeretszerzéshez képest.



8. ábra

A CAS-modularizáció eddig érintett három meghatározó tényezője- a matematika moduláris szerkezete, a curriculum moduláris struktúrája és a tudásreprezentációs háló adekvát bővítésének, sűrítésének igénye- a matematikai megismerés, munkavégzés során lényegében azonos módon hat. A CAS használatának módjára azonban a tanulás egyes fázisainak sajátszerűsége is hatással van. H. Heugl [25] a matematika- szimbolikus rendszerek használata melletti-tanulásának három lépcsőfokát különbözteti meg:

I. Heurisztikus, vagy tapasztalati fázis

Tipikus tevékenységek: sejtések kidolgozása, bizonyítási stratégiák kidolgozása, tanulói kísérletezés, hibakiküszöbölés próbálgatással, modellek tesztelése, a nyert eredmények interpretálása.

II: Egzakt fázis

Tipikus tevékenységek: a sejtések megerősítése, algoritmusok levezetése, tételek bizonyítása.

III: Alkalmazási fázis

Tipikus tevékenységek: algoritmusok alkalmazása, problémamegoldás, modellezés, a valóságos életet leíró modellek felkutatása, a tanulók által az I. és a II. fázisban kidolgozott eljárások black box-ként való alkalmazása, tesztelése.

Kézenfekvő, hogy a fenti, egymást sokszor átszövő, fázisok során más és más módon alkalmazzuk a CAS-modularizáció módszerét.

A modularizáció módját alapvetően meghatározó negyedik tényező tehát a **tanulási fázis.** Természetesnek kell tartanunk, hogy más módon kell használnunk a modulokat a fenti tanulási fázisok mindegyikében.

Mindezek mellett a modularizációt nagymértékben formáló tényező a tanulók pszichés felfogásmódja, valamint a didaktikai keretrendszer.

Összegezve elmondhatjuk, hogy a CAS bevonásával megvalósított a moduláris tananyag- feldolgozás **a matematika,** mint tudomány, **moduljainak, a CAS**

moduloknak és a curriculum moduloknak hivatkozásokkal, a belső kapcsolatok explicitté tételével történő egységes rendszerbe foglalásán alapszik. A CAS-modularizáció olyan dinamikus tevékenység, amelynek célja, hogy a különböző tanulási fázisok eltérő igényéhez igazodva, a tárgyi- és curriculum-modulok szerkezetének megfelelően, a tudásreprezentációs háló minél optimálisabb fejlesztésével hatékony tudáselsajátítást támogasson. Ennek során figyelembe kell vennünk a tanulási fázisokat és a kognitív tudománynak elménk moduláris működéséről szóló megállapításait. (Pléh Csaba, [26])

8. 2. 4. A modulok osztályozása

A modulokat több szempont szerint osztályozhatjuk. A mi osztályozási szempontjaink a következők

- a létrehozó;
- a tanulási folyamatban betöltött szerep;
- a használat módja;
- a modul által végzett tevékenység.

A következőkben az előbbi szempontok alapján vizsgáljuk a modulokat.

8. 2. 4. 1. A létrehozó szerint

A felhasznált modulok jelentős része a rendszer által tartalmazott, **beépített modul**. A számítógépes algebrai rendszerek mindegyike ilyen modulok szisztematikusan kialakított rendszerét tartalmazza. Ezek felölelik a matematika legkülönbözőbb területein szükséges tevékenységeket végző eljárásokat éppúgy, mint a grafikus megjelenítéshez szükséges eszközöket tartalmazó modulokat. Ezek okszerű használatának elsajátítása, a paraméterek szerepének megismerése a CAS-szel való megismerkedés alapvető részét képezi.

A nyitott architektúrának köszönhetően a számítógépes algebrai rendszerek lehetővé teszik azt, hogy a felhasználó önállóan fejlesztett modulokkal bővítse a rendszert és ezekből saját könyvtárat alakítson ki.

Az oktatás során sok olyan modult használhatunk, amelyet a **tanár készített**, és fejlettebb CAS-használat esetén a modulok készítésében a **tanulók** is részt vesznek.

8. 2. 4. 2. A tanulási folyamatban betöltött szerep szerint

Mindenekelőtt le kell szögeznünk, hogy a CAS-nek az oktatási folyamatban való teljes integrálása alapján gondolkodunk. Tehát a CAS jelen van az előadásokon, a gyakorlatokon éppúgy, mint a házi feladatok végzése során, vagy a vizsgákon. Így természetesen differenciált szerepet tölt be az oktatási folyamat különböző részeiben. Az előadások során döntően **bemutató, demonstrációs** céllal használjuk.

A modulok bevetésének és így létrehozásának is természetesen az esetek nagy részében az a célja, hogy valamilyen műveletet, műveletsort, matematikai eljárást elvégezzünk, hogy kiszámítsunk valamit. A szerep szerinti osztályozás szerint ezek a döntően a tanulók **matematikai tevékenységét** megkönnyítő modulok.

A CAS használata melletti oktatás során ideális esetben a tanulók is rendszeresen készítenek- eleinte egyszerűbb- modulokat. Számos esetben előfordulhat, hogy létezik ugyan beépített, a rendszer által tartalmazott, modul egy bizonyos tevékenység elvégzésére, mégis a tanulókat arra ösztökéljük, arra tanítjuk, hogy maguk is készítsék el azokat az eljárásokat, modulokat, amelyek a szóban forgó matematikai tevékenységet megvalósítják. Ilyenkor az a célunk, hogy a tanulók mélyen sajátítsák el a CAS-szel történő munkavégzés fortélyait, váljanak képessé önálló modulkészítésre. Elképzelhető, hogy az így keletkező modul nem tekinthető minden szempontból optimális eszköznek, mégis didaktikailag hatalmas nyereség a tanuló ilyen területre is kiterjedő kreativitása. Ilyenkor tehát - a modulhasználattal összefüggő- **kreativitás növelése** a modulhasználat, modulkészítés, tehát a modularizáció fő célja
Mutassunk be mindhárom szerepkörre egy-egy példát

Demonstrációs célú modulhasználat

A határozott integrál létezésére vonatkozik a következő, elégséges feltételt tartalmazó, tétel.

Tétel

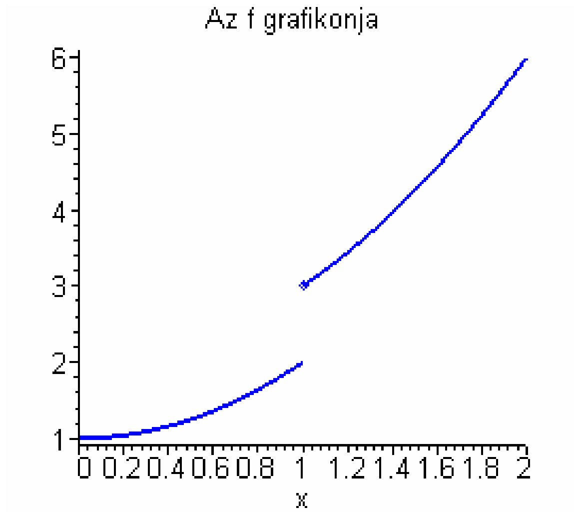
Az [a,b] zárt intervallumon monoton függvény integrálható az [a,b] intervallumon.

Ugyan a tétel szabatos bizonyítását általában nem végezzük el a műszaki főiskolai matematikai kurzusok keretében, de a bizonyítás alapgondolatának kifejtése fontos lehet az integrál fogalmának elmélyítése érdekében. A **monoton** nevű eljárás (programkódja a függelékben szerepel) ezt a célt szolgálja. Véletlenszerűen választott osztópontokkal készíti el az intervallum beosztását, úgy, hogy a leghosszabb részintervallum sem legyen hosszabb, mint $\frac{b-a}{n}$.

Ábrázolja az előző beosztáshoz tartozó oszcillációs összeget. Megjegyzi a legszélesebb intervallumot, s annak helyét, s ennek alapján az oszcillációs összeget alkotó téglalapokat elhelyezi a legszélesebb téglalap helyén képezett téglalapban. Ennek „vízszintes" oldala a maximális részintervallum hosszával egyezik meg, „függőleges" oldala pedig a függvénynek az intervallumra eső megváltozásával egyenlő, tehát az oszcillációs összeg tagjait megjelenítő téglalapok magasságainak összegével. Ilyen módon az oszcillációs összegeket geometriailag felülről becsüljük olyan téglalapokkal, amelyeknek egyik oldala a függvénynek az $[a, b]$ intervallumra eső növekménye, a másik oldal pedig tart 0-hoz, midőn n tart a ∞ -be.
Szemléltessük a bizonyítás lényegét egy példával!
Tekintsük a következő, a [0,2] intervallumon értelmezett, függvényt

$$\mathrm{f}(x) = \{ \begin{array}{ll} x^2+1 & -x \le 0 \text{ and } x < 1 \\ x^2+2 & x \le 2 \end{array}$$

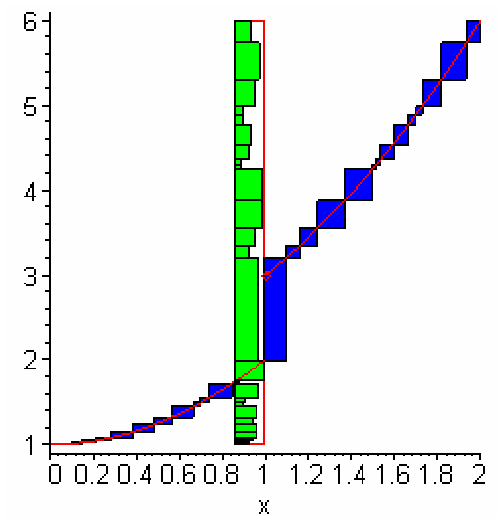
Ábrázoljuk a függvényt a kérdéses intervallumon! (9. ábra)



9. ábra

A függvény az adott intervallumon monoton és nem folytonos. A **monoton** nevű modul szemlélteti a bizonyítás lényegét, s ami nagyon lényeges, eleven mentális kép létrehozását segíti, hisz rendelkezik a diagrammatikus reprezentáció tömörítő, a rövid távú memória korlátos voltát jól ellensúlyozó tulajdonságával. (10. ábra)

```
monoton(f,0,2,15);
```



10. ábra

Természetesen a most bemutatott modul elkészítését nem várhatjuk el hallgatóinktól. Itt a tanuló kísérletező módon használhatja a modult. Különböző függvényekkel végrehajtva az eljárássorozatot megerősödhet tudatában a tétel geometriai interpretációja.

Műveletvégzés célú felhasználás

A parciális integrálásra a Maple-nek, és más rendszernek is, van beépített eljárása.

Itt az a cél, hogy a modul okszerű használatát megismertessük a tanulókkal.
A gyakorlatokra készített munkalap egy részletét írjuk ide illusztrációként:

A Maple student csomagjában található a parciális integrálást kivitelező **intparts** eljárás. Ha a student csomagot nem akarjuk betölteni, akkor a hosszabb **student[intparts]** alakkal használhatjuk az eljárást, ha betöltjük a student csomagot (with(student), akkor a rövidebb intparts kulcsszót alkalmazhatjuk. A hívás az **intparts(h, u)** jelsorozatból áll, ahol az első paraméter, tehát a *h* $\int \left(\frac{d}{dx}\mathrm{f}(x)\right)\mathrm{g}(x)\,dx$ alakú, vagyis maga a kiszámítandó integrál, a második paraméter az integrandusznak az a tényezője, amelyet deriválni kell a parciális integrálás során (a mostani jelöléssel a *g*). Mindenekelőtt be kell tölteni a student csomagot!

```
> with(student):
```

Példa

Végezzük el a következő integrálást:

$$\int (4\,x+5)\sin\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$

Megoldás

Célszerű a polinomot deriválnunk. Ugyanis a $\sin\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)$ függvény közvetlenül is integrálható...

```
> Int(sin(3*x+Pi/6),x)=int(sin(3*x+Pi/6),x);
```

$$\int \sin\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)dx = -\frac{1}{3}\cos\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)$$

...másrészt a deriválással a polinom fokszáma csökken, tehát itt állandót kapunk.

```
>
Int((4*x+5)*sin(3*x+Pi/6),x)=intparts(Int((4*x+5)*sin(3
*x+Pi/6),x),4*x+5);
```

$$\int (4\,x+5)\sin\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)dx =$$
$$-\frac{1}{3}(4\,x+5)\cos\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right) - \int -\frac{4}{3}\cos\left(3\,x+\frac{\pi}{6}\right)dx$$

A value utasítására elvégződik az integrálás:

```
> lhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int (4x+5)\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = -\frac{1}{3}(4x+5)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{9}\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Ellenőrizzük az eredményt deriválással:

```
> diff(rhs(%),x);
```

$$(4x+5)\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Az eredmény helyes.

A modul készítése és használata -elsődlegesen- a kreativitás növelését szolgálja

Ezeket a modulokat általában a tanulók készítik. Esetenként minta, hasonló algoritmus alapján, sokszor tanári segédlettel, máskor teljesen önállóan.
A következő modul, és annak néhány alkalmazása, hallgatói házi feladatból való. A szekciókra bontást is változatlanul átvettük. A hallgató az eljárást önállóan, minta nélkül készítette! A konv_div eljárás formális paramétere a sor általános tagja. Az eljárás a definíció felhasználásával vizsgálja, hogy létezik-e a sor összege.

Eljárás

```
> konv_div:=proc(alt_tag)
>   local f,s;
>   f:=n->alt_tag;
>   s:=limit(sum(f(n),n=1..k),k=infinity);
  if (s=infinity) or (type(evalf(s),range)) then
>     print(`A sor divergens.`)
>   else
>     print(`A sor konvergens, összege: `,s)
>   fi:
> end:
```

1. feladat

```
> alt_tag:=n/(2*n-1);
```

$$alt\_tag := \frac{n}{2n-1}$$

```
> konv_div(alt_tag);
```

A sor divergens.

2. feladat

```
> alt_alak:=(-1)^(n+1);
```

$$alt\_alak := (-1)^{(n+1)}$$

```
> konv_div(alt_alak);
```

A sor divergens.

3. feladat

```
> alt_alak:=1/(2*n-1)^2;
```

$$alt\_alak := \frac{1}{(2\,n-1)^2}$$

```
> konv_div(alt_alak);
```

A sor konvergens, összege: , $\frac{\pi^2}{8}$

8. 2. 4. 3. A használat módja szerint

A modulok használatával kapcsolatosan két fő nézet ismeretes:

1. A White-Box/Black-Box elv (B. Buchberger, [27]). Ezen elv képviselői szerint CAS modulok a matematika oktatásában csak úgy alkalmazhatók, ha az első, ún. White-Box, fázisban a tanulók (hallgatók) elsajátítják a modult alkotó fogalmakat, eljárásokat. Tehát ebben az első fázisban az éppen tárgyalt új ismeret feldolgozására nem ajánlatos a CAS igénybe vétele.

Miután az adott témakört a tanulók elsajátították, az algoritmusok belső szerkezetét megismerték, az ún. Black-Box fázisban, tehát a témakörök hierarchiájában feljebb levő tananyag feldolgozása során ezek az algoritmusok már Black-Box-okként használhatók.

A White-Box/Black-Box-elv szerint tehát csak olyan algoritmusokat, modulokat használhatnak a tanulók/hallgatók, amelynek belső szerkezetét előzőleg megismerték.

B. Buchberger mindazonáltal megenged kivételeket, azaz olyan eseteket, amikor a jobb megértés kedvéért a szóban forgó algoritmust először Black-Box-ként használjuk, s a részleteket később tisztázzuk.(Black-Box/ White-Box elv)

2. Az ún. **Auslagerungsprinzip (Principle of Outsourcing, "kiülepítési" elv)** W. Peschek, [28]) megengedi a modulok, algoritmusok alkalmazását azok belső szerkezetének ismerete nélkül is.

A *White-Box/Black-Box elv használatának szemléltetésére* tekintsük a következő problémát. A Simpson-szabályt megvalósító formulát az előadás keretében levezettük. A kiszámítást végző beépített eljárás a rengeteg részletszámítás nyűgét veszi le a vállunkról. A hiba becslése során a magasabb rendű deriváltak kiszámítása megint a fenti elv alkalmazására példa, hisz a derivált kiszámításában előzőleg jártasságra tettünk szert. A példa amellett, hogy a white box/black box elv alkalmazását szemlélteti, még a következőkre hívja föl a figyelmünket:

- A CAS modulok alkalmazása sok esetben megnöveli az eljárások gyakorlati, pragmatikus értékét, hisz a modulok alkalmazásával nagyságrendben csökken az elvégzendő operatív tevékenység, s ezzel együtt növekszik a számítások hibamentes elvégzésének esélye, különösebb nehézség nélkül elvégezhetjük a hibabecslést.

- Az elvégzendő tevékenységek forgatókönyvszerű interpretálása a hasonló számítások mintájául szolgálhat. Az ilyen mintákból könyvtárat készítve, a hallgatók hatékony, gyorsan mozgósítható eszközrendszer birtokába juthatnak.
- Az ismeretelem komplex feldolgozása több ismeretelem egyidejű alkalmazását követeli meg. Ez megerősíti a tudáselemek közötti kapcsolatot, tehát a tudásreprezentációs halo kapcsolatrendszerének erősítését, gyarapítását jelenti.

Példa

Határozzuk meg az $\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx$ *integrál értékét a Simpson szabály alkalmazásával.*

a) A részintervallumok száma legyen először n =10!

b) Becsüljük meg az elkövetett hibát!

c) Hány részre kell az intervallumot felosztanunk, ha azt akarjuk, hogy az elkövetett hiba $10^{(-6)}$ *alatt maradjon?*

Megoldás

a) Használjuk a Maple beépített eljárását:Vegyük fel az adatokat!

```
> f:=x->exp(-x^2);a:=0; b:=1;n:=10;h:=(b-a)/n;
```

Alkalmazzuk a student csomag simpson modulját (eljárását)!

```
> student[simpson](f(x),x=a..b,10);
```

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{30}e^{(-1)}+\frac{2}{15}\left(\sum_{i=1}^{5} e^{\left(-\left(\frac{i}{5}-1/10\right)^2\right)}\right)+\frac{1}{15}\left(\sum_{i=1}^{4} e^{\left(-\frac{i^2}{25}\right)}\right)$$

```
> Int(f(x),x=a..b)=evalf(%);
```

$$\int_0^1 e^{(-x^2)}\,dx = 0.7468249480$$

b) Tudjuk, hogy ha a függvény negyedik deriváltja is folytonos függvény, akkor a Simpson- szabály alkalmazásakor a hibát a

$$\frac{M\,(b-a)^5}{180\,n^4}$$

kifejezéssel becsülhetjük, tehát a valóságos hiba ennél nem lehet nagyobb. Ebben a kifejezésben az a és a b az intervallum végpontjai, az M értéke a negyedik derivált abszolút értékének felső becslése, tehát ennél az értéknél nem nagyobb a negyedik derivált az $[a, b]$ intervallumon, az n pedig a részintervallumok száma α) *A hibabecsléshez először* állítsuk elő a negyedik deriváltat:

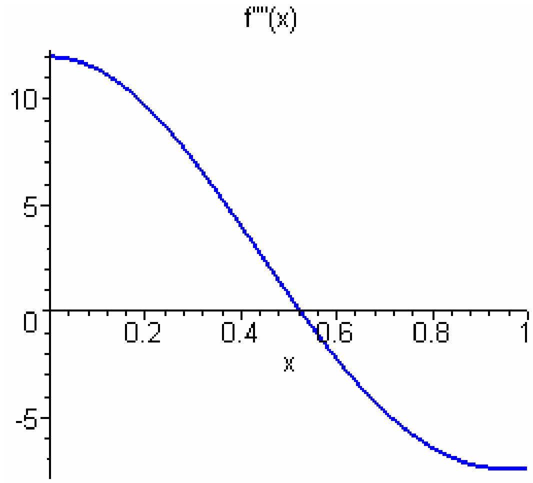
```
> diff(f(x),x$4);
```

$$12\,e^{(-x^2)} - 48\,x^2\,e^{(-x^2)} + 16\,x^4\,e^{(-x^2)}$$

```
> fd4:=unapply(factor(%),x);
```

$$fd4 := x \to 4\,e^{(-x^2)}\,(3 - 12\,x^2 + 4\,x^4)$$

β) *Meghatározzuk az M értékét. Először ábrázoljuk a negyedik deriváltat:*

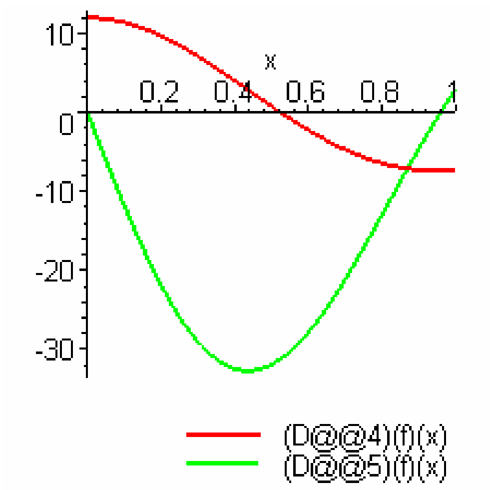


Láthatóan f '''' szigorúan monoton csökken majdnem az egész [0,1] intervallumban, s abszolút értéke a 0 helyen a legnagyobb. Az előbbi az ötödik derivált segítségével is belátható:

```
> Diff(f(x),x$5)=factor(D(fd4)(x));
```

$$\frac{d^5}{dx^5}\left(e^{(-x^2)}\right) = -8\,x\,e^{(-x^2)}\,(15 - 20\,x^2 + 4\,x^4)$$

Ábrázoljuk együtt a negyedik és az ötödik deriváltat:



Jelöljük c-vel azt a helyet, ahol a negyedik derivált abszolút értéke a legnagyobb:

```
> c:=0;
```

γ) Megadjuk a becslést.

A Simpson-módszer alkalmazása esetén a hiba $|R|$ abszolút értékére a következő becslés adható:

```
> abs(R)<'(b-a)^5/(180*n^4)*abs((D@@4)(f)(c))';
```

$$|R| < \frac{1}{180}\,\frac{(b-a)^5\,|(D^{(4)})(f)(c)|}{n^4}$$

Helyettesítsük be a paraméterek értékét.

```
> 'abs(R)'=(b-a)^5/(180*n^4)*abs((D@@4)(f)(c));
```

$$|R| = \frac{1}{150000}$$

```
> 'abs(R)'=evalf((b-a)/180*abs((D@@4)(f)(c))*h^4);
```

$$|R| = 0.6666666667\ 10^{-5}$$

A hiba kisebb, mint $10^{(-5)}$.

c) Most nézzük, mekkorának kell az n értékét választanunk, ha azt akarjuk, hogy a hiba $10^{(-6)}$-nál kisebb legyen.Ehhez a következő egyenlőtlenségnek kell teljesülnie:

$$\left(\frac{M\,(b-a)^5}{180\,\varepsilon}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} < n\,,$$

ahol most

$$\varepsilon = 10^{-6} \text{ és } M = \left(\frac{d^4}{dx^4}\,\mathrm{f}(x)\right)\Bigg|_{x=c}$$

Adjuk meg az M és az ε értékét!

```
> epsilon:=10^(-6);M:=abs((D@@4)(f)(c));
```

$$\varepsilon := \frac{1}{1000000}$$

$$M := 12$$

Most már kiértékelhetjük a hibát megadó kifejezést:

```
> evalf((M*(b-a)^5/(180*epsilon))^(1/4));
```

$$16.06856838$$

Az n értéke tehát, figyelembe véve, hogy a Simpson szabály esetén a részintervallumok száma páros, legalább 18.
Számítsuk ki most az integrál értékét a Simpson-módszerrel, s legyen

```
> n:=18;
> int1:=evalf(student[simpson](f(x),x=a..b,n));
```

$$int1 := 0.7468242106$$

Ellenőrzésként számítsuk ki az integrál értékét a Maple beépített eljárásával, és hasonlítsuk össze a két értéket!

```
> Int(f(x),x=a..b)=int(f(x),x=a..b);
```

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{(-x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(1)\sqrt{\pi}$$

```
> int2:=evalf(rhs(%));
```

$$int2 := 0.7468241330$$

Az f függvénynek nincs elemi függvényként megadható primitív függvénye, tehát csak közelítő érték adható:

```
> elteres:=abs(int1-int2);
```

$$elteres := 0.776\ 10^{-7}$$

A hiba kisebb mint $10^{(-6)}$, sőt $10^{(-7)}$-nél is.

A **kiülepítési elv**re álljon itt illusztrációként a következő, un. *szállítási feladat*. A szimplex módszert a műszaki főiskolák matematikai kurzusain részleteiben nem tudjuk tárgyalni. Csak a normálfeladat tárgyalásáig jutunk el. A Maple szimplex programcsomagja azonban lehetővé teszi azt, hogy más esetekben is megoldjuk az idevágó feladatokat. Ekkor természetesen a modulokban tárolt - kiülepített - ismeret részletezése fel sem merül, kézenfekvő tehát a kiülepedési elv szerinti modul-használat.

A probléma megfogalmazása

Egy cég két különböző telephelyen levő gyárában (F1 és F2) egyaránt gyártanak a P1 és a P2 termékből. A termékeket a D1, D2 és D3 elosztó központokba szállítják. Az elosztó központok számára közömbös az, hogy melyik üzemből kapják a terméket. Az alábbi táblázat tartalmazza az egyes üzemekből az egyes elosztó helyekre történő szállítás termékenkénti fajlagos költségét, az elosztó központok minimális igényét és az üzemek teljesítő képességét. Mennyit kell a különböző termékekből az egyes üzemekből az egyes telephelyekre szállítani, hogy a szállítási költség minimális legyen?

	F1/P1	F1/P2	F2/P1	F2/P2	Minimálisan szállítandó
D1/P1	\$0.75		\$0.80		500
D1/P2		\$0.50		\$0.40	400
D2/P1	\$1.00		\$0.90		300
D2/P2		\$0.75		\$1.20	500
D3/P1	\$0.90		\$0.65		700
D3/P2		\$0.80		\$0.95	300
Term. kapacitás	1000	400	800	900	

Modell-képzés

Az egyes szállítandó termékek darabszámát jelöljük a következőképpen

	F1/P1	F1/P2	F2/P1	F2/P2	Minimálisan szállítandó
D1/P1	**x1**		x7		500
D1/P2		x2		x8	400
D2/P1	x3		x9		300
D2/P2		x4		x10	500
D3/P1	x5		x11		700
D3/P2		x6		x12	300
Term. kapacitás	1000	400	800	900	

A szállítási összöltség:

z = 0.75 x1 +0.5x2 + x3 + 0.75x4 + 0.9x5 + 0.8x6 + 0.8x7 + 0.4x8 + 0.9x9 +1.2x10 + +0.85x11 +0.95x12

A korlátozó feltételek:

$x1 + x3 + x5 \leq 1000$, $x2 + x4 + x6 \leq 400$, $x7 + x9 + x11 \leq 800$, $x8 + x10 + x12 \leq 900$,

$500 \leq x1 + x7$, $400 \leq x2 + x8$, $300 \leq x3 + x9$, $500 \leq x4 + x10$, $700 \leq x5 + x11$,

$300 \leq x6 + x12$, és az x_i mennyiségek nem negatívak (i =1. . . .12)

Megoldás a simplex és linalg csomagokkal

A célfüggvényt elegánsan létrehozhatjuk a skaláris szorzással

```
> restart:
> with(linalg):

> c:=vector([.75,.5,1,.75,.9,.8,.8,.4,.9,1.2,.85,.95]);
```

$c := [0.75, 0.5, 1, 0.75, 0.9, 0.8, 0.8, 0.4, 0.9, 1.2, 0.85, 0.95]$

```
> x:=vector(12);
```

$x := \mathrm{array}(1 .. 12, [\ ])$

```
> z:=dotprod(x,c);
```

$$z := 0.75\, x_1 + 0.5\, x_2 + x_3 + 0.75\, x_4 + 0.9\, x_5 + 0.8\, x_6 + 0.8\, x_7 + 0.4\, x_8 + 0.9\, x_9 + 1.2\, x_{10} + 0.85\, x_{11} + 0.95\, x_{12}$$

```
feltetelek:={x[1]+x[3]+x[5]<=1000,x[2]+x[4]+x[6]<=400,x
[7]+x[9]+x[11]<=800,x[8]+x[10]+x[12]<=900,x[1]+x[7]>=50
0,
>
x[3]+x[9]>=300,x[5]+x[11]>=700,x[2]+x[8]>=400,x[4]+x[10
]>=500,x[6]+x[12]>=300};
```

$$feltetelek := \{x_1 + x_3 + x_5 \le 1000, x_2 + x_4 + x_6 \le 400, x_7 + x_9 + x_{11} \le 800, x_8 + x_{10} + x_{12} \le 900, 500 \le x_1 + x_7, 300 \le x_3 + x_9, 700 \le x_5 + x_{11}, 400 \le x_2 + x_8, 500 \le x_4 + x_{10}, 300 \le x_6 + x_{12}\}$$

```
> with(simplex):

>
minimalis_ertekek:=minimize(z,feltetelek,NONNEGATIVE);
```

$$minimalis\_ertekek := \{x_9 = 300, x_{10} = 100, x_{12} = 300, x_5 = 200, x_1 = 500, x_{11} = 500, x_4 = 400, x_6 = 0, x_7 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0, x_8 = 400\}$$

```
> assign(minimalis_ertekek):#Vegyék fel a változók a
kapott értéket
> z;
```

2115.00

Ellenőrzésképpen nézzük a feltételeket:

```
> feltetelek;
```

$$\{800 \le 900, 300 \le 300, 700 \le 700, 500 \le 500, 400 \le 400, 700 \le 1000, 800 \le 800\}$$

Láthatóan minden feltétel teljesül, az azonosak csak egyszer íródtak ki.
A táblázatba visszaírva tanulmányozhatjuk a kapott megoldást:

	F1/P1	F1/P2	F2/P1	F2/P2	Minimálisan szállítandó
D1/P1	500		0		500
D1/P2		0		400	400
D2/P1	0		300		300
D2/P2		400		100	500
D3/P1	200		500		700
D3/P2		0		300	300
Term. kapacitás	1000	400	800	900	

8. 2. 4. 4. A modul által végzett tevékenység szerint

A modulokat funkciójuk szerint két fő osztályba sorolhatjuk (Schneider, [29]):
-matematikai objektumokat tároló modulok;
-matematikai operációkat kivitelező modulok.

Matematikai objektumokat tároló modulok

A számítógépes algebrai rendszerek lehetőséget nyújtanak arra, hogy a legkülönbözőbb matematikai objektumokat, mint pl. számokat, függvényeket, mátrixokat, halmazokat, listákat, kifejezéseket, egyenleteket, azonosítóval megjelölve tároljunk, moduloknak tekintsük. A számítógépes algebrai rendszerek ilyen modulok kiterjedt rendszerét tartalmazzák, és a felhasználók ezek körét tetszőlegesen bővíthetik. Különös jelentősége van az egyes adatszerkezetek kombinált, strukturált használatának. Ehhez természetesen szükség van a műveleteket kivitelező modulokra is.

Matematikai operációkat kivitelező modulok

Több típust különböztethetünk meg

a) A különböző műveleteket végző modulok. Ilyenek például a számokkal, változókkal, mátrixokkal a megengedett műveleteket elvégző modulok. De ide soroljuk az abszolút értéket, faktoriálisokat, sin, cos, log, exp függvényértékeket, kiszámító modulokat is.

b) Az aritmetikai, algebrai kifejezések átalakítását, transzformációját végző modulok. Ehhez a csoporthoz tartoznak a kifejezések egyszerűsítésére (simplify), szorzattá alakítására, széttagolására stb. szolgáló modulok is. De ide sorolhatjuk az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldását végző modulokat (solve, fsolve), valamint a deriválás, integrálás végrehajtásánál használatosakat is.

c) A reprezentációk közötti kapcsolatokat létrehozó és váltást lehetővé tevő modulok. Leggyakrabban a **convert** utasítás tölti be ezt a funkciót.

Példaként definiáljunk először egy négyelemű listát.

```
> L:=[1,2,1,3];
```

$$L := [1, 2, 1, 3]$$

Alakítsuk át a listát halmazzá:

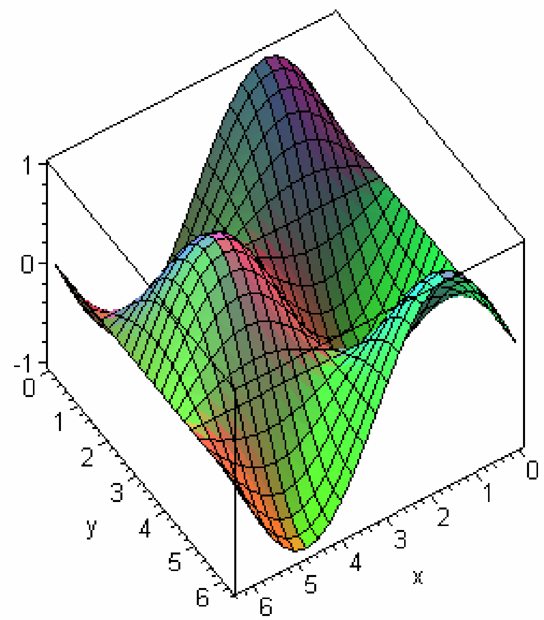
```
> H:=convert(L,set);
```

$$H := \{1, 2, 3\}$$

A négyelemű lista természetesen, mint halmaz, háromelemű.
d) A különböző "rendszerek" közötti váltást végző modulok, rendszerbeállításokat foganatosító modulok. Ilyen pl. a koordinátarendszerek választását lehetővé tevő modulok. Példaként álljon itt a kétváltozós $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$ függvény 3d-s ábrája. (11. ábra)

$f := (x, y) \to \sin(x)\cos(y)$

```
plot3d(f(x,y),x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,axes=boxed,lightmodel
=light1,shading=XYZ,orientation=[57,37]);
```



11. ábra

8. 2. 5. Modulok összekapcsolása, összetett modulok

A modulok használata azért is összetett jelenség, mert több szinten valósul meg. Tekintsük a számokat, változókat, mátrixokat, mint modulokat. Ezekből műveleteket kivitelező modulok segítségével tagokat, aritmetikai kifejezéseket, egyenleteket, függvényeket hozhatunk létre (legalsó szint). A kapott kifejezéseket ismét csak modulként foghatjuk föl, esetleg névvel láthatjuk el.
Ezekkel a modulokkal aztán tovább dolgozhatunk. Az egyenlet megoldása a **solve** vagy **fsolve** modullal történhet, a kifejezéseket szorzattá alakíthatjuk, a függvényeket deriválhatjuk, integrálhatjuk stb. Természetesen a kapott eredményeket, amelyek modulokkal végzett operációk útján keletkeztek, tárolhatjuk, hogy további modulok készítéséhez rendelkezésre álljanak. A számítógépes algebrai rendszerek természetesen lehetőséget nyújtanak a modulok egymásba skatulyázására is. Ez az eljárás megfelel a matematikában szokásos zárt

alak, zárt formula előállításának. Nézzünk egy példát erre a didaktikai szempontból értékelendő, mert veszélyeket is magában rejtő, módszerre!

Példa

Határozzuk meg az

$$f(x) = x^4 - 3\,x^2 + 1$$

függvény stacionárius helyeit (lehetséges szélsőérték-helyeit)

Megoldás

Lépésenként eljárva, először az f változóban elhelyezzük a függvényt definiáló kifejezést.

```
f:=x^4-3*x^2+1;
```

$$f := x^4 - 3\,x^2 + 1$$

Ezután deriváljuk a kifejezést,

```
Diff(f,x)=diff(f,x);
```

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 3\,x^2 + 1) = 4\,x^3 - 6\,x$$

majd megkeressük a derivált zérushelyeit

```
zh:=solve(diff(f,x));
```

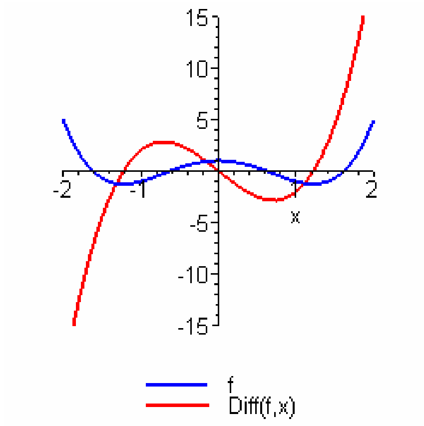
$$zh := 0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Mindez, a modulok egymásba skatulyázásával egy lépésben is elvégezhető:

```
solve(diff(x^4-3*x^2+1,x));
```

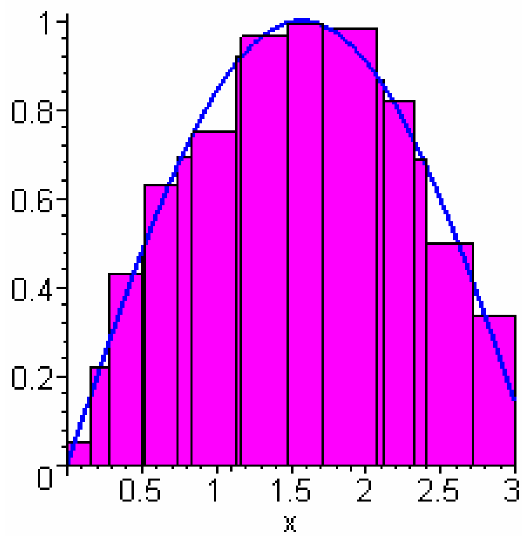
$$0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Nem nehéz meggondolnunk, hogy mindkét variánsnak helye van az oktatási gyakorlatban. Az utóbbi, egymásba skatulyázott modulokból álló változat rövidebbé teszi a kódot, de csak akkor alkalmazható, ha a tanulók már kellő jártasságra tettek szert az egyes lépések értelmezése és kivitelezése terén. Előzőleg tehát kellő számú probléma megoldása során a részletező kivitelezést kell választanunk, s csak ezután térhetünk rá az utóbbi változatra. Ha így teszünk, akkor okszerűen alkalmazzuk a modularizációt. Tehát alapvetően a **white box/ black box** eljárás szellemében célszerű eljárva kihasználjuk annak a komplexitást csökkentő, a figyelmet tehermentesítő funkcióját anélkül, hogy a tudáselemek kapcsolat-gazdag kiépülését megakadályoznánk. Mindkét változat alkalmazása esetén célszerű grafikus reprezentációt is adni. Ez itt a függvény és deriváltjának közös koordinátarendszerben történő ábrázolását jelenti:



A két grafikon együttes szemlélete megerősíti a függvény és deriváltja közti kapcsolatot.
Sok esetben a résztevékenységekből az adott probléma összetevőinek megismerése, a különböző variánsok taglalása után **összetett modul**t készítünk. Más szóval az összetett matematikai tevékenységet automatizáljuk. Lássunk erre is egy példát!
Készítsünk eljárást, amely szemlélteti az integrálközelítő összegeket!
Az [a,b] intervallum beosztását úgy készítjük, hogy a részintervallumok egyike sem lehessen hosszabb a $h = \dfrac{b-a}{n} = \delta$ értéknél, tehát legyen a beosztás δ fínomságú, röviden δ beosztás. Természetesen a δ másképpen is megválasztható, mi itt most a tekintett intervallum hosszának n-ed részét vettük mértékül.
Riemann1 eljárás így készült, tehát a részintervallumok általában nem egyenlő hosszúak, de adott $h = \dfrac{b-a}{n}$ hosszúságnál nem nagyobbak. A reprezentánsrendszer is véletlenszerűen választott. Az eljárás paraméterei: a függvény (f), az intervallum kezdőpontja (a), az intervallum végpontja (b) és a részintervallumok száma (n). (12. ábra) Az eljárás kódja a függelékben megtalálható.

```
Riemann(x->sin(x),0,3,8);
```



12. ábra

8. 2. 6. Curriculum alapú modularizáció

A számítógépes algebrai rendszereket az oktatásban használók véleménye nyílván megoszlik a modulok, s egyáltalán a CAS matematikaoktatásban való használatát illetően. Első látásra valószínűleg a White-Box/Black-Box elv tűnik a legelfogadhatóbbnak: a CAS használata így csak többlet értéket adhat, a tanulók/hallgatók minden fogalmat elsajátítanak "hagyományos" módon, s az új fogalom, új eljárás megtanulásánál a megelőző eljárásokat és fogalmakat a CAS segítségével elvégezve, kibontva több energia, figyelem jut az új ismeret beépítésére. Az esetek tekintélyes részében valóban így járunk el. Ugyanakkor a számítógépes algebrai rendszerek megjelenésével olyan kérdések is tárgyalhatókká váltak, amelyek korábban semmiképpen nem lehettek a tananyag részei. Ezek feldolgozása a CAS alkalmazása nélkül lehetetlen, ezek a számítógépes algebrai rendszer "termékei".

Tekintsünk olyan példát, amikor a "hagyományos" út fel sem merül. A példa a kereső algoritmusok köréből való. Adott egy rendezett lista, s meg kell keresni, hogy egy bizonyos elemet tartalmaz-e a lista, és ha igen, hányadik helyen. Az ilyen típusú problémákat **keresési problémá**nak nevezzük. Kézenfekvő, hogy ez a témakör a számítógép szülötte. A példával arra is rá szeretnénk mutatni, hogy kellő előkészítéssel- ez itt a pszeudokód megírása- a CAS algoritmus "megszülése" egészen könnyen megy. A pszeudokód gép- és programfüggetlen forma, tehát az olvasó az általa használt nyelven interpretálhatja. Példaként tekintsük a bináris keresést! A **bináris keresés** algoritmusa akkor alkalmazható, ha a lista (növekvőleg) rendezett. (Pl.: a tagok valós számok, szavak, amelyek nyílván alfabetikusan rendezhetők stb.)

a) Az eljárás leírása

Az elhelyezendő x elemet a lista középső elemével (ha a lista páros elemszámú, akkor az első felének utolsó elemével) hasonlítjuk össze. Ezután a listát két részlistára bontjuk. Ha az x nem nagyobb a "középső" elemnél, akkor az első részlistában folytatjuk a keresést, egyébként a másodikban. A keresés minden egyes lépésnél lényegében feleződő részlistában folytatódik, így a lineáris keresésnél hatékonyabb. A hatékonyság kérdését később részletesen is megvizsgáljuk majd.

b) Az eljárás pszeudokódja:

eljárás bináris keresés (x: egész, $a_1, a_2, \ldots, a_n$: különböző egészek növekvőleg rendezve)

$i := 1$ { i a keresés intervallumának baloldali végpontja}

$j := n$ { j a keresés intervallumának jobboldali végpontja}

AMÍG $i < j$ FENNÁLL

ISMÉTELD

KEZDET

$m := \text{floor}\left(\frac{i+j}{2}\right)$ { floor = "egész része"}

HA $a_m < x$ AKKOR $i := m + 1$

EGYÉBKÉNT $j := m$

VÉGE

HA $x = a_i$ AKKOR $hely := i$

EGYÉBKÉNT $hely := 0$

{ A **hely** az x-szel egyenlő elem indexe, vagy 0, ha az x-et nem találtuk a listában }

c) Az eljárás **Maple-kódja**:

```
binark := proc (x::integer, L::egeszek)
local i, j, m, hely, L1;
    i := 1;
    j := nops(L);
    L1 := sort(L);
    while i < j do
        m := floor(1/2×i + 1/2×j);
        if L1[m] < x then i := m + 1 else j := m end if
    end do ;
    if x = L1[i] then hely := i else hely := 0 end if
end proc
```

Az eljárás eldönti, hogy az első paraméterként megadott érték eleme-e a listának, vagy nem. Az első esetben kiírja azt, hogy hányadik eleme a listában, a második esetben a 0 hiírásával jelezzük, hogy az adott elem nincs a listában. Az eljárást az alábbiakban véletlenszerűen generált listával és ugyanígy megadott x elemmel hívjuk meg:

```
> K:=sort(convert({seq(rand() mod 150,i=1..100)},list));
> x:=rand() mod 150;
> binark(x,K);
```

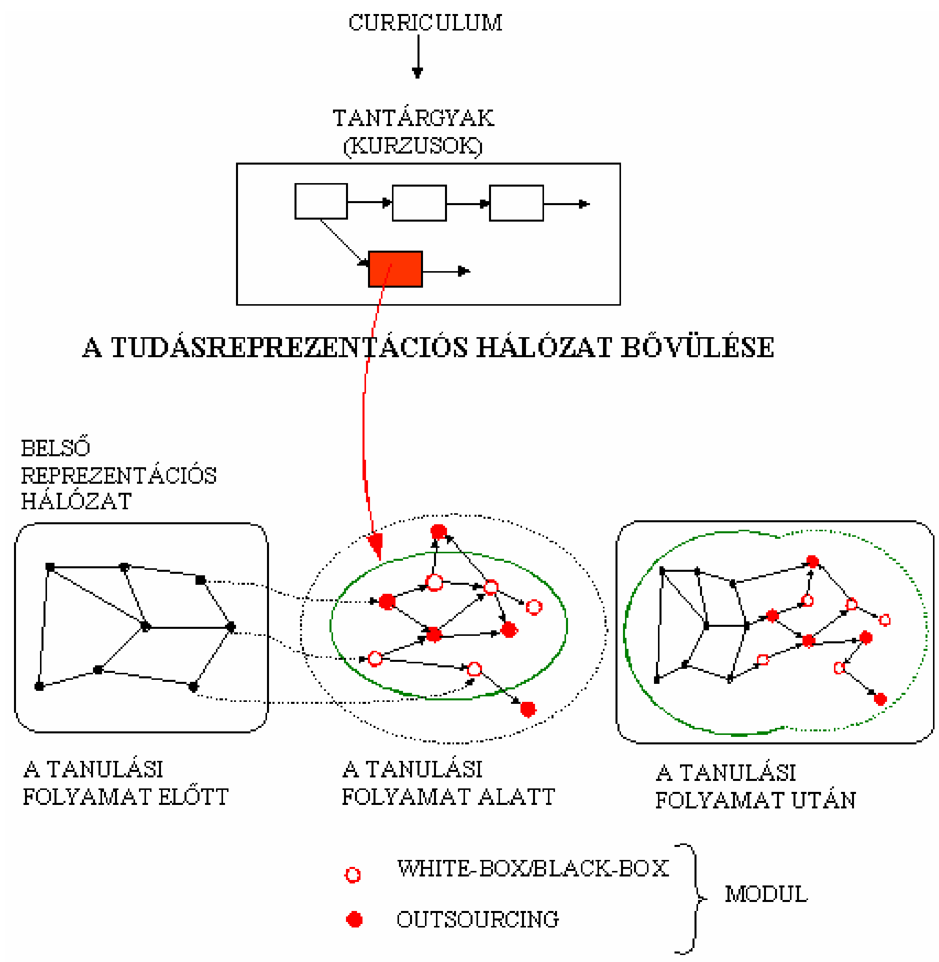
$K := [0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 37, 40, 42, 44, 48, 49, 50, 52, 53, 57, 60, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 75, 76, 80, 81, 83, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 94, 95, 96, 97, 107, 109, 110, 111, 113, 114, 122, 123, 124, 128, 129, 130, 133, 135, 137, 140, 141, 144, 145, 146, 147, 148]$

$x := 41$

0

A program válasza 0, tehát a kérdéses elem nincs a listában.
Sokszor a black-box-ként való alkalmazás fel sem merül, hiszen a didaktikai cél éppen a szóban forgó algoritmus (modul) létrehozása. S természetesen igen sok esetben a White-Box/Black-Box elv alapján kell eljárnunk. Mik legyenek ármost a modulok használatának fő rendező elvei? Nézetünk szerint ezt az elvet két fogalomból kiindulva lehet megfogalmazni. Ezek a **curriculum** és a **tudásreprezentációs hálózat**. A curriculum egy jól körülhatárolt tartalmi egységhez rendelhető tanítási folyamatnak a teljes és részletes leírását jelenti, a célok megjelölésétől az értékelésig. Taba [30] a curriculum hét összetevőjét emeli ki. Ezek: a nevelési célok diagnózisa (a társadalmi igények elemzése), a célok kijelölése, a tartalom kiválasztása, a tartalom organizációja, a tanulási feladatok terve, az alkalmazható módszerek, -stratégiák és az értékelés terve.
A tudásreprezentációs hálózat alatt azt a tudatunkban kifejlődő és folyamatosan alakuló relációs rendszert értjük, amelyet a fogalmak- jó esetben- egyre gazdagodó és folyamatosan újra strukturálódó hálózata alkot. A reprezentáció relációs rendszere fokozatosan épül föl, amint újabb információk kapcsolódnak a meglévő hálózathoz, vagy új kapcsolat jön létre az előzőleg széttagolt információk között. A tananyag megértésének szintje természetesen annál magasabb, minél bővebb és szervezettebb a hálózat. A belső kapcsolatokban gazdag reprezentáció, tehát az erősebb megértés hatékony találékonyságot biztosít. Egyúttal növeli a megszerzett tudás felhasználása során megjelenő átviteli képesség, a transzfer hatékonyságát is.
A modularizáció folyamatát úgy kell terveznünk, irányítanunk, hogy a curriculum által megjelölt tennivalókat a tudásreprezentációs hálózat optimális fejlesztésével hajtsuk végre. Ez azt jelenti, hogy ha a modul olyan szerkezeti egységeket tartalmaz, amelyek megismerésére, elsajátítására a rákövetkező ismeretek feldolgozásánál szükség lesz, akkor ezt a modult a White-Box/Black-Box elv alapján kell tárgyalnunk. [31] Ilyen modul például a lineáris algebrai kurzusnál az

elemi bázistranszformáció algoritmusa. Ennek készség szintű ismerete valamint mentális képének kialakulása nélkül a szimplex módszer elemei nem dolgozhatók fel érdemben. A szállítási feladat megoldása során viszont bízvást használhatjuk, pl. a Maple simplex és linalg programcsomagjainak eljárásait a kiülepítési elv értelmében. A műszaki főiskolák szűkre szabott időkerete nem teszi lehetővé a szimplex módszer kimerítő tárgyalását, így ezt a feladatot azért tárgyalhatjuk, hogy a módszer erejét, távlatait megmutassuk. Az 13. ábra a tudásreprentációs hálózat bővülését mutatja. A törzsanyag ismeretanyagát feldolgozó és rákövetkező modulok alapjául szolgáló eljárásokat a White-Box/Black-Box elv segítségével dolgozzuk fel, s igyekszünk minél több kapcsolat létesítésével minél jobban beágyazni a reprezentációs hálóba.



13. ábra

A modularizáció dinamikus folyamat. Egy későbbi kurzus során az előzőleg csak black box-ként alkalmazott modul "kifehéríthető", részletesen tárgyalható.

Másrészt a korábban a white box/ black box elv alapján tárgyalt modul a későbbi ismeretek feldolgozásakor black box- ként használható. Éppen azáltal válik a munka sokkal hatékonyabbá, hogy nem kell foglalkoznunk annak az immáron résztevékenységnek a részleteivel, amelyet a modul segítségével végzünk el.

8. 2. 7. Iteratív modularizáció CAS segítségével

A modularizáció akkor igazán eredményes, ha minél teljesebb fogalomfeltárás mellett jutunk el az adott probléma automatizált megoldásáig. Tehát a modulok előállítása ill. bemutatása során kettős feladatot kell megoldanunk

- Az adott tevékenység automatizált végrehajtását
- Az adott algoritmus, eljárás minél teljesebb feltárását, megismerését. Ez adott esetben az algoritmus létrehozását is jelentheti.

E kettős cél elérése érdekében gyakorlatunkban a modularizáció iteratív megvalósítása bizonyult célravezetőnek. Ez a következő lépésekből áll:

1. A félig automatizált változatot állítjuk elő. Ebben a fázisban az algoritmus lépései nyomon követhetőek, különböző variánsok kipróbálhatóak. Ezek egyre több funkció végrehajtására lehetnek képesek.
2. Kidolgozzuk ill., közreadjuk az algoritmus automatizált változatát.

Az előbbi két fő lépésben történő kidolgozás során a hallgatók megismerik az algoritmus működési módját. Képesek lesznek azon esetleg változtatni, az így előállított modult további eljárások során fel tudják használni. Mindezt azért tudják megtenni, mert az eljárás mentális térképét kialakítjuk. [32]
Másrészt az automatizált változat a komplexitás csökkentésével hatékonyan könnyíti a további munkát.

Példa

Kétváltozós függvény szélsőérték-számítása

A kétváltozós függvények szélsőértékének kiszámítása összetett feladat. A kritikus pontok meghatározása alkalmas arra, hogy a hallgatók az egyenletmegoldás terén föllépő problémák kezelésére vonatkozó ismereteiket elmélyítsék, és az eljáráskészítést gyakorolják. Célunk a témakör tárgyalása során többrétű. Természetesen alapvető cél a szélsőérték kiszámításának készség szintű elsajátítása. Ezzel egyenrangú feladat az eljárások kezelésére, létrehozására vonatkozó ismeretek fejlesztése. A részletek kidolgozásától a teljesen automatizált eljárásig jutunk el.

1. Lépés: az elméleti alapok összefoglalása

Tétel

(Szükséges feltétel) Ha a kétváltozós f függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban mindkét változója szerint parciálisan deriválható és a függvénynek a P_0-ban helyi szélsőértéke van, akkor szükségképpen.

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0\,.$$

Így az f(x,y) helyi szélsőérték-helyeit az

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x, y) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x, y) = 0$$

egyenletrendszert kielégítő $\mathrm{P}(x, y)$ pontok között kell keresni.(kritikus pontok vagy másképp stacionárius pontok) Az elsőrendű parciális deriváltak zérus volta csak szükséges, de nem elegendő feltétele a helyi szélsőérték létezésének!

Tétel

(A helyi szélsőérték létezésének elégséges feltétele)
Ha az f kétváltozós függvény parciális deriváltjai a $P_0(x_0, y_0)$ pontban zérus értékűek és a másodrendű parciális deriváltak mindegyike folytonos a P_0-ban, akkor ahhoz, hogy f-nek helyi szélsőértéke legyen a P_0-ban elegendő, hogy

$$0 < \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right)^2$$

teljesüljön. Az egyenlőtlenség jobboldalán szereplő kifejezést diszkriminánsnak nevezzük és D-vel jelöljük.

Ha a $0 < \mathrm{D}$ mellett $0 < \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{f}(x_0, y_0)$, akkor f-nek a P_0-ban *minimuma*, ha pedig $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{f}(x_0, y_0) < 0$, akkor helyi *maximuma* van

Ha

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\mathrm{f}(x_0, y_0)\right)^2 < 0$$

akkor f-nek a P_0 pontban **nincs** helyi szélsőértéke.Ekkor az (x_0 , y_0) pontban un. nyeregpont van. Ha D = 0, akkor így nem dönthetünk a P_0 (x_0 , y_0) pontbeli viselkedésről.

2. Lépés: az algoritmus felépítésének részletezése

Az algoritmus alapvetően három fő tevékenységből áll:

- a függvény megadása;
- a kritikus pontok meghatározása;
- a szélsőértékek kiszámítása.

A utóbbi két fő tevékenység résztevékenységekre bontható. A kritikus pontok meghatározása a következő tevékenységeket jelenti

- a parciális deriváltak előállítása;
- az előzők által alkotott egyenletrendszer megoldása;

A szélsőértékek kiszámításához

- képeznünk kell a diszkriminánst;
- ki kell számítani a diszkrimináns értékét a stacionárius helyeken és a diszkrimináns értékétől függő megállapítást kell tenni;
- meg kell határozni a szélsőértékek milyenségét.

Az egyes tevékenységek CAS segítségével történő megvalósítása során a fokozatos finomítás elvét alkalmazzuk. K. Popperrel szólva falszifikációról is beszélhetünk. A különböző esetek új és új járulékos elemmel gazdagítják az eljárást, amelytől azt várjuk, hogy univerzális legyen, tehát, ha bizonyos megszorítással is, de minden esetet tudjon kezelni.

Először az algoritmus **félig automatizált** változatát állítjuk elő. Ez azt jelenti, hogy a matematikai algoritmus ismeretében meghatározzuk az algoritmus primitíveket, és ezekből szerkesztjük meg és végezzük el lépésenként az eljárást. Ilyenformán az eljárás végrehajtása során annak minden új elemét saját magunk konstruáljuk, felhasználva korábban megismert CAS-modulokat. Ennek során feltárjuk a különböző variánsokat. Ezek elsősorban a kritikus helyek meghatározása során lépnek fel.

3. Lépés: a félig automatizált eljárás előállítása

A kritikus pontok meghatározása

A függvény megadása után a kritikus pontok meghatározását végezzük el. Az eljárást több függvénnyel elvégezzük, tehát kísérletezünk, s a lépésenkénti finomítással elérjük, hogy az eljárással széles függvényosztály esetében meg tudjuk határozni a kritikus pontokat.

1. Probléma

Állapítsuk meg az

$$f = x^3 + y^3 - 3\,x - 12\,y + 2$$

függvény kritikus pontjait!

Megoldás

Vegyük föl mindenekelőtt a függvényt!

```
> f:=x^3+y^3-3*x-12*y+2;
```

$$f := x^3 + y^3 - 3\,x - 12\,y + 2$$

Képezzük a parciális deriváltakat:

```
> dfx:=diff(f,x);
```

$$dfx := 3\,x^2 - 3$$

```
> dfy:=diff(f,y);
```

$$dfy := 3\,y^2 - 12$$

A kritikus pontok az $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x,y) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldásával adódnak. Megoldjuk az egyenletrendszert, s a megoldásokat egy listában helyezzük el, hogy később sorszámozott típusként hivatkozhassunk a megoldásokra.

```
> critpts:=[solve({dfx=0,dfy=0})];
```

$critpts := [\{y = 2, x = 1\}, \{y = -2, x = 1\}, \{y = 2, x = -1\}, \{y = -2, x = -1\}]$

2. Probléma

Állapítsuk meg az

$$f = y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

függvény kritikus pontjait!

Megoldás

Az előzők szerint járunk el.

```
> f:='f':
> f:=x*y*ln(x^2+y^2);
```

$f := x\,y\ln(x^2+y^2)$

A parciális deriváltak:

```
> dfx:=diff(f,x);
```

$$dfx := y\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

```
> dfy:=diff(f,y);
```

$$dfy := x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

```
> critpts:=[solve({dfx=0,dfy=0})];
```

$critpts := [\{y = 0, x = 1\}, \{y = 0, x = -1\}, \{y = 1, x = 0\}, \{y = -1, x = 0\}, \{$
$x = \mathrm{RootOf}(-1 + 2\_Z^2\,\mathbf{e}, label = \_L3),$
$y = \mathrm{RootOf}(-1 + 2\_Z^2\,\mathbf{e}, label = \_L3)\}, \{$
$x = -\mathrm{RootOf}(-1 + 2\_Z^2\,\mathbf{e}, label = \_L3),$
$y = \mathrm{RootOf}(-1 + 2\_Z^2\,\mathbf{e}, label = \_L3)\}]$

Az eredmény kissé meglepő. Válaszul -részben - bizonyos egyenleteket kaptunk, amelyek gyökét meg kell adnunk. Galois óta tudjuk, hogy ötöd- és annál magasabb fokú polinomokra nem létezik gyökképlet. A Maple ezért a RootOf jelölést használja az algebrai számok ábrázolására. Az **allvalues** és a **map** együttes (és esetenként az **evalf**) használatával ilyenkor is megkaphatjuk a gyökök szimbolikus, vagy közelítő alakját:

```
> if has(critpts,RootOf) then
> critpts:=map(allvalues,critpts);
> fi;
```

$$critpts := \left[\{y=0, x=1\}, \{y=0, x=-1\}, \{y=1, x=0\}, \{y=-1, x=0\}, \right.$$
$$\{x=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}, y=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}\},$$
$$\{x=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}, y=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}\},$$
$$\{y=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}, x=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}\},$$
$$\left. \{x=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}, y=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{(1/2)}}{\mathrm{e}}\} \right]$$

3. Probléma

Állapítsuk meg az
$f=x^4+y^4-x^2-2\,x\,y-y^2$

függvény kritikus pontjait!

Megoldás

```
  f:=x^4+y^4-x^2-2*x*y-y^2;
```

$$f := x^4+y^4-x^2-2\,x\,y-y^2$$

```
> dfx:=diff(f,x);
```

$$dfx := 4\,x^3-2\,x-2\,y$$

```
> dfy:=diff(f,y);
```

$$dfy := 4\,y^3-2\,x-2\,y$$

```
> critpts:=[solve({dfx=0,dfy=0})];
```

$$critpts := [\{y=0, x=0\}, \{y=0, x=0\}, \{y=0, x=0\}, \{y=1, x=1\},$$
$$\{x=-1, y=-1\}, \{x=$$
$$\mathrm{RootOf}(-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L9)+2\,\_Z^2-1, label=\_L8)$$
$$\mathrm{RootOf}(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L9), y=$$
$$\mathrm{RootOf}(-\mathrm{RootOf}(\_Z^2+\_Z+1, label=\_L9)+2\,\_Z^2-1, label=\_L8)$$
$$\}]$$

```
> if has(critpts,RootOf) then
> critpts:=evalf(map(allvalues,critpts));
```

```
> fi;
```

$$critpts := [\{x=0., y=0.\}, \{x=0., y=0.\}, \{x=0., y=0.\}, \{y=1., x=1.\}, \{y=-1., x=-1.\}, \{x=-0.6123724355+0.3535533906\,I, y=0.6123724355+0.3535533906\,I\}, \{x=0.6123724355-0.3535533906\,I, y=-0.6123724355-0.3535533906\,I\}, \{x=-0.6123724355-0.3535533906\,I, y=0.6123724355-0.3535533906\,I\}, \{x=0.6123724355+0.3535533906\,I, y=-0.6123724355+0.3535533906\,I\}]$$

Ezuttal a gyökök között nem valós komplex számok is vannak! Ki kell tehát válogatnunk a valós gyököket! Ezt a type utasítás segítségével tehetjük meg.
A kritikus pontokból kiválasztott valós koordinátájú pontokat az L halmazban gyűjtjük össze. A halmaz adatstruktúra azért megfelelő, mert így a többszörös gyökök csak egyszer szerepelnek. Ezután a halmazt listává konvertáljuk. Erre azért van szükség, hogy rendezett párokat kapjunk.

```
> L:=NULL:
> for i to nops(critpts) do
>if type(rhs(critpts[i][1]),realcons) and
type(rhs(critpts[i][2]),realcons)
> then
> L:=L,critpts[i]
> fi
> od;
> `A gyökök`= L;
```

$$A\ gyökök = (\{x=0., y=0.\}, \{x=0., y=0.\}, \{x=0., y=0.\}, \{y=1., x=1.\}, \{y=-1., x=-1.\})$$

```
> critpts:={L};#A gyökök,halmazként
```

$$critpts := \{\{x=0., y=0.\}, \{y=1., x=1.\}, \{y=-1., x=-1.\}\}$$

```
> critpts:=convert(critpts,list);
```

$$critpts := [\{x=0., y=0.\}, \{y=1., x=1.\}, \{y=-1., x=-1.\}]$$

A szélsőértékek kiszámítása

Ahhoz, hogy a kritikus pontok közül ki tudjuk választani a szélsőérték-helyeket, képeznünk kell a diszkriminánst, majd a gyököket, tehát az előzőkben kapott számpárokat ebbe be kell helyettesítenünk. A kapott érték alapján dől el, hogy az adott helyen van-e szélsőérték. Azokon a helyeken, ahol van szélsőérték, ki kell számítanunk az x-szerinti második deriváltat, hogy a szélsőérték milyenségéről dönthessünk. A tennivalókat konkrét függvény szélsőértékének meghatározásával szemléltetjük

Probléma

Határozzuk meg az
$f = x^4 + y^4 - x^2 - 2\,x\,y - y^2$
szélsőértékeit

Megoldás

A kritikus pontokat az előző fejezetben már meghatároztuk:

```
> `Kritikus pontok`=critpts;
```

$$\mathit{Kritikus\ pontok} = [\{x = 0., y = 0.\}, \{y = 1., x = 1.\}, \{y = -1., x = -1.\}]$$

Képezzük a megfelelő deriváltakat.

```
> dfxx:=diff(f,x$2);
dfyy:=diff(f,y$2);
dfxy:=diff(f,x,y);
```

$$dfxx := 12\,x^2 - 2$$

$$dfyy := 12\,y^2 - 2$$

$$dfxy := -2$$

Alkossuk meg a diszkriminánst...

```
> disc:=simplify(dfxx*dfyy-dfxy^2);
```

$$disc := 144\,x^2\,y^2 - 24\,x^2 - 24\,y^2$$

Vizsgáljuk meg az első kritikus pontot!

```
> critpts[1];
```

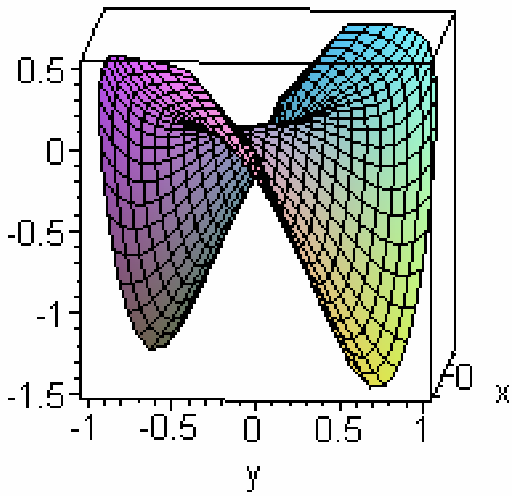
$$\{x = 0., y = 0.\}$$

Behelyettesítve a diszkriminánsba:

```
> subs(critpts[1],disc);
```

$$0.$$

Ez azt jelenti, hogy így nem tudunk dönteni. Készítsünk ezért ábrát a függvényről az adott pont környezetében!



Az ábra arra enged következtetni, hogy a (0,0) pontban nincs szélsőérték. Készítsünk az f kifejezésből függvényt

```
> f1:=unapply(f,x,y);
```

$$f1 := (x, y) \to x^4 + y^4 - x^2 - 2\,x\,y - y^2$$

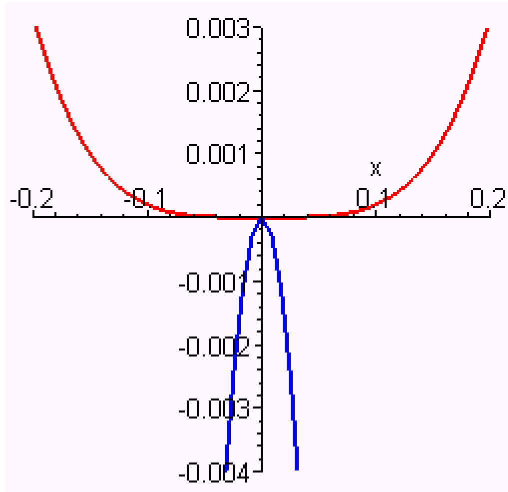
Tekintsünk két speciális irányt, nézzük a függvényt az y = x és az y = -x egyenes mentén. Legyen

$$\mathrm{f1}(x, x) = 2\,x^4 - 4\,x^2$$

és

$$\mathrm{f1}(x, -x) = 2\,x^4$$

Ábrázoljuk együtt a két síkmetszetet!



Az $\mathrm{f1}(x,x)$ függvénynek maximuma van az $x=0$ helyen, az $\mathrm{f1}(x,-x)$ függvénynek pedig minimuma, tehát a vizsgált függvénynek nincs szélsőértéke a (0,0) pontban!

Próbáljuk most tömörebbé tenni az eljárást! A kritikus pontok mindegyikét egy eljárással behelyettesítjük a diszkriminánsba. Ezt **for** ciklusba ágyazva érhetjük el. Ha a kapott érték pozitív, akkor meghatározzuk, hogy az adott helyen szélsőérték van, és eredményünket kiíratjuk. A megfelelő választ a diszkrimináns nulla, vagy negatív értéke alapján is kiíratjuk.

```
> for i to nops(critpts) do
>  delta0:=evalf(subs(critpts[i],disc)):
> if delta0>0 then lprint(`A`,critpts[i],`pontban helyi
szélsőérték van,`):
>  if evalf(subs(critpts[i],dfxx))>0 then lprint(` s
mivel f_xx>0, ez helyi minimum`):
>   else lprint(` s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`):
>  fi:
>  elif delta0=0 then lprint(`A diszkrimináns 0,igy nem
tudjuk eldönteni,`):
>  lprint(`hogy az`,critpts[i],`pontban van-e helyi
szélsőérték`):
>  else lprint(`A`,critpts[i],`pontban nyeregpont
van.`):
> fi:
> od:
`A diszkrimináns 0,igy nem  tudjuk eldönteni,`
`hogy az`, {x = 0., y = 0.}, `pontban van-e helyi szélsőérték`
A, {y = 1., x = 1.}, `pontban helyi szélsőérték van,`
` s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
A, {y = -1., x = -1.}, `pontban helyi szélsőérték van,`
` s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
```

5. Lépés az automatizált eljárások előállítása

Miután megalkottuk a szélsőérték kiszámítására alkalmas, és természetesen elég terjedelmes eljárássorozatot, fellép a feladat automatikus elvégzésének igénye. Egy későbbi feladat, alkalmazás során ugyanis a figyelmünket fel kell szabadítanunk a részfeladatokkal való bíbelődés nyűge alól.

Az automatizált eljárás(ok) megalkotása azért nem különösebben nehéz, mert azok nem követelnek új srukturális elemeket. A részeljárások egységes eljárásba szervezése tulajdonképpen inkább csak az egységes eljárás (proc) szintaktikai, technikai követelményeinek való megfelelést jelenti.

Elsőként a **kritikus** eljárást hozzuk létre. Ez, nevének megfelelően, a kritikus helyeket határozza meg. Kódja a függelékben megtalálható.

Alkalmazzuk a kritikus eljárást az előzőkben tekintett függvények egyikével! A megoldások listáját mindjárt helyezzük el a helyek változóban!

```
> f:='f':
> f:=x*y*ln(x^2+y^2);
```

$$f := x\,y\,\ln(x^2+y^2)$$

```
> helyek:=kritikus(f,x,y);
```

$$helyek := [\{x=0.4288819424, y=0.4288819424\},\\ \{y=-0.4288819424, x=-0.4288819424\},\\ \{y=0.4288819424, x=-0.4288819424\},\\ \{x=0.4288819424, y=-0.4288819424\}, \{x=1., y=0.\},\\ \{x=-1., y=0.\}, \{y=1., x=0.\}, \{y=-1., x=0.\}]$$

Az **ertek** eljárás (ld. A függelékben) a szélsőértékek meghatározását az előző szekcióban kidolgozott lépések szerint végzi. Első három paramétere rendre a függvényt definiáló kifejezés és a két változó, a negyedik pedig az előző eljárás eredményeként létrejött, a kritikus helyeket tartalmazó lista.

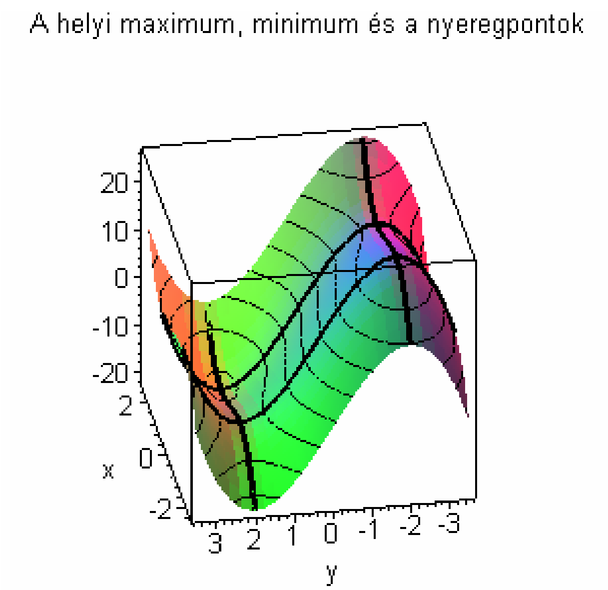
```
ertek(f,x,y,helyek);
Az, {x = .4288819424, y = .4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
Az, {y = -.4288819424, x = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
Az, {y = .4288819424, x = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`
Az, {x = .4288819424, y = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`
Az, {x = 1., y = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {x = -1., y = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {y = 1., x = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {y = -1., x = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
```

A két eljárás egyetlen eljárásba foglalható. A szélsőérték eljárás (ld. a függelékben) paraméterei rendre: a függvényt definiáló kifejezés és a függvény két változója.

```
szélsőérték(f,x,y);
Az, {x = .4288819424, y = .4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
Az, {y = -.4288819424, x = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx>0, ez helyi minimum`
Az, {y = .4288819424, x = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`
Az, {x = .4288819424, y = -.4288819424}, `pontban helyi szélsőérték van,`
`  s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`
Az, {x = 1., y = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {x = -1., y = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {y = 1., x = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
Az, {y = -1., x = 0.}, `pontban nyeregpont van.`
```

6. Ábrázolás

Ezután a függvényt ábrázolni szeretnénk. Az ábrát úgy készítjük el, hogy az értelmezési tartomány tartalmazza az összes stacionárius pontot. Ehhez először meghatározzuk a stacionárius pontok mindegyikét tartalmazó "minimális téglalapot", majd az így meghatározott tartományon elkészítjük a térbeli ábrát. A részletek mellőzésével itt csupán az ábrát mutatjuk be. (14. ábra)



14. ábra

8. 3. Kísérletező tanulás CAS környezetben

A CAS-nek a matematikai környezet részévé válása két fő előnnyel jár. Egyrészt az operatív tevékenység jelentős részét a CAS elvégzi ("kiülepítés, Auslagerung, outsourcing), másrészt a különböző ábrázolásmódok, reprezentációk könnyen és gyorsan elérhetők. Ez a két funkció teszi lehetővé azt, hogy a kísérletező, felfedező tanulás a képzés során nagyobb súlyt kapjon. Ebben a fejezetben a kísérletező tanulás különböző néhány típusát mutatjuk be.

A CAS szerepvállalása az operatív tevékenységben

A kísérletező munka során fellépő és a CAS által támogatott operatív tevékenységek az alábbi fő csoportokba oszthatók (Schneider, [29], Klincsik M. és Maróti Gy. [49])

- különböző változóértékek kipróbálása, a paraméter változtatgatása a CAS segítségével, szimbolikus síkon gyorsan és egyszerűen kivitelezhető;
- a számítások, konstrukciók különösebben nagy idő és operatív tevékenység ráfordítása nélkül sok különböző változatban megismételhetők;
- a különböző megjelenítések, reprezentációk előállítása, az ábrázolás több változatának elkészítése valamint az egyes ábrázolásmódok váltogatása a CAS alkalmazásával jelentősen könnyebbé és gyorsabbá válik.

A következőkben a kísérletező munka főbb típusaival foglalkozunk.

Szabályok felfedezése, eljárások tulajdonságainak feltárása

Számos szerző rámutat, hogy a CAS operatív lehetőségei lehetővé teszik azt, hogy a tanulók a matematikai szabályokat, szabályszerűségeket, összefüggéseket mintegy újra felfedezzék, az egyes eljárások működési módját kiismerjék. (Schneider, [29])

Példa

Legyen A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .Határozzuk meg A^2 -et, A^3 -öt és A^4 -t. Sejtsük meg, mivel egyenlő A^n . Bizonyítsuk be a sejtést!

Megoldás

Vegyük fel az A mátrixot!

```
> A:=matrix([[1, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 1, 1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az A első néhány hatványát, s figyeljük meg, adódik-e valamilyen törvényszerűség!

```
> for i to 5 do A^i=evalm(A^i); od;
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Az első oszlop és a második sor minden esetben azonos: a háromelemű vektorok terének bázisvektorai. Az első sor harmadik eleme és a harmadik sor második eleme mindig n-nel egyenlő. Az első sor második eleme pedig az első $n-1$ természetes szám összege. Sejtésünk tehát az hogy $A^n = B$ a következő alakú:

```
> n:='n':
> 'A^n'=matrix(3,3,[1,n*(n-1)/2,n,0,1,0,0,n,1]);
```

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n\,(n-1)}{2} & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B:=rhs(%):
```

A sejtést teljes indukcióval bizonyítjuk. Mivel $n = 1$ esetén az állítást természetszerűleg már igazoltuk, csak azt kell megmutatnunk, hogy abból, hogy az állítás valamilyen n értékre teljesül, következik az, hogy $n+1$ esetén is teljesül. Képezzük tehát az A n+1-edik hatványát, felhasználva az indukciós feltételt:

```
> 'A^(n+1)'=evalm(B&*A);
```

$$A^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{n(n-1)}{2} + n & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n+1 & 1 \end{bmatrix}$$

A simplify utasítással hozzuk a kapott mátrixot egyszerűbb alakra:

```
> simplify(rhs(%));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n+1 & 1 \end{bmatrix}$$

A map és a factor együttes alkalmazásával elvégezhetjük a szorzattá alakítást:

```
> map(x->factor(x),%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{n(n+1)}{2} & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n+1 & 1 \end{bmatrix}$$

A várt alakot kaptuk, ezzel a bizonyítás kész

Sejtések kidolgozása

Az előző pontban leírtakhoz hasonló tevékenységről van itt is szó, csak még önállóbb tevékenységről. A tanuló nem feltétlenül kap ötletet ahhoz, hogy milyen irányban induljon el a sejtés kidolgozásakor, sokszor a probléma általánosabb felvetése, a feltételek változtatása is elegendő a felfedező munka beindulásához. A következőkben egy ilyen esetet mutatunk be.

Tekintsük a következő függvényt:

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x = páros \\ 3\,x+1 & x = páratlan \end{cases}$$

Collatz sejtése: A kiinduló x értéktől függetlenül az f iterációja [f(f...f(x)))] mindig előállítja az 1 számot. Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy a függvénynek 3 hosszúságú periódusa van, mert $\mathrm{f}(1) = 4$, $\mathrm{f}(4) = 2$, $\mathrm{f}(2) = 1$.

Feladat: Igazoljuk a sejtést minél nagyobb n értékig bezárólag!

Hozzuk létre mindenekelőtt a függvényt! Ezt egy eljárás segítségével tehetjük meg:

```
> restart:
> Collatz:=proc(n::integer)
>   if type(n,even) then
>     n/2;
>   else
>     3*n+1;
>   fi;
> end:
> Collatz(1234);
```

617

Ezután írjunk eljárást, amely addig iterálja a Collatz függvényt, amig az 1 előáll. Bevezetünk egy count nevű számlálót. Ezt két célból tesszük. Egyrészt szeretnénk tájékozódni az iterációs lépések számáról, másrészt, nem tudjuk biztosan, hogy az iteráció stabilizálódik- e a kezdeti értékek mindegyikére. Ezért az iterációk számát korlátozzuk. (a korlátot "elegendően nagynak" választjuk)

```
> ICO:=proc(seed::integer)
>   local sentinel,count;
>   count:=0:
>   sentinel:=seed:
>   while sentinel<>1 and count<1000^10 do
>     sentinel:=Collatz(sentinel);
>     count:=count+1;
>   od;
>   RETURN(count);
> end:
```

Igazolandó a sejtést az első n egész számra a következőképpen járhatunk el:

```
> n:=100:
> seq(ICO(i),i=1..n);
```

0, 1, 7, 2, 5, 8, 16, 3, 19, 6, 14, 9, 9, 17, 17, 4, 12, 20, 20, 7, 7, 15, 15, 10, 23, 10, 111, 18, 18, 18, 106, 5, 26, 13, 13, 21, 21, 21, 34, 8, 109, 8, 29, 16, 16, 16, 104, 11, 24, 24, 24, 11, 11, 112, 112, 19, 32, 19, 32, 19, 19, 107, 107, 6, 27, 27, 27, 14, 14, 14, 102, 22, 115, 22, 14, 22, 22, 35, 35, 9, 22, 110, 110, 9, 9, 30, 30, 17, 30, 17, 92, 17, 17, 105, 105, 12, 118, 25, 25, 25

A sejtést a tekentett x értékekre (1, 2, . . . , n) igazoltuk, hiszen az iteráció minden esetben leállt.
A sejtés mindmáig ellenállt a bizonyítási kísérleteknek. Éppen ezért most mással folytatjuk, módosítsuk most kissé a Collatz-függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x = páros \\ 3\,x - 1 & x = páratlan \end{cases}$$

Kérdés: a változtatás- $3\,x + 1$ helyett $3\,x - 1$ szerepel - hogyan módosítja az iterációt?

Hozzuk létre az új függvényt, a függvény nevét nem változtattuk meg:

```
> restart:
> Collatz:=proc(n::integer)
>   if type(n,even) then
>     n/2;
>   else
>     3*n-1;
>   fi;
> end:
```

Vizsgáljuk az új függvényt, vajon most is előáll-e mindig az 1? Óvatosságból a számlálót kisebbre vettük!

Vizsgáljuk az új függvényt az első n egészre, legyen mondjuk $n = 50$.

```
> n:=50:
> seq(ICO(i),i=1..n);
```

0, 1, 4, 2, 10000, 5, 10000, 3, 10000, 10000, 6, 6, 10000, 10000, 9, 4, 10000, 10000, 10000, 10000, 10000, 7, 10000, 7, 10000, 10000, 10000, 10000, 10, 10, 10000, 5, 10000, 10000, 10000, 10000, 10000, 10000, 13, 10000, 10000, 10000, 8, 8, 10000, 10000, 10000, 8, 10000, 10000

Bizony itt koránt sem lehet az előzőhöz hasonló sejtésünk! Az esetek nagyobb részében az eljárás a korlátozó érték elérése miatt állt le. Tehát a függvény módosítása várhatóan az iterációs sorozat szerkezetét alapvetően módosította. Próbáljuk megsejteni a módosított függvény által generált iterációs sorozat szerkezetét! Írjuk át az eljárást! Az ICO1 (kódja a függelékben) az iterációs sorozatot is meg adja.

Kísérletezzünk az eljárással!

```
> ICO1(30);
```

30, 15, 44, 22, 11, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Ebben az esetben 2 hosszúságú ciklust kaptunk

```
> ICO1(31);
```

31, 92, 46, 23, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74, 37

Most a ciklus a 82 -vel kezdődik és hossza 18.

```
> ICO1(35);
```

35, 104, 52, 26, 13, 38, 19, 56, 28, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7

Ezuttal a ciklus hossza 5, a ciklus a 7-tel kezdődik. Felmerül a kérdés, hogy van-e másféle hosszúságu ciklus is, és mindig stabilizálódik-e a sorozat?
Az **IC** eljárás (kódja a függelékben) megvizsgálja, hogy az iteráció ciklust eredményez-e, meghatározza a periódus hosszát, a periódus kezdő értékét és magát a periódust. Mindezeket globális változóként adja meg. Közvetlenül a futtatás- az utolsó utasítás eredményeként a teljes iterációs sorozatot adja meg.
Példaként vizsgáljuk az iterációt $n = 1239$ esetén.

```
> IC(1239);
```

1239, 3716, 1858, 929, 2786, 1393, 4178, 2089, 6266, 3133, 9398, 4699, 14096, 7048, 3524, 1762, 881, 2642, 1321, 3962, 1981, 5942, 2971, 8912, 4456, 2228, 1114, 557, 1670, 835, 2504, 1252, 626, 313, 938, 469, 1406, 703, 2108, 1054, 527, 1580, 790, 395, 1184, 592, 296, 148, 74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74

```
> `A periódus kezdőeleme`=senit[i-1];
```

A periódus kezdõeleme = 74

```
> `A periódus hossza`=periodus;
```

A periódus hossza = 18

```
> `A periódus`:=ciklus;
```

A periódus :=

74, 37, 110, 55, 164, 82, 41, 122, 61, 182, 91, 272, 136, 68, 34, 17, 50, 25, 74

Vizsgáljuk meg az iterációt 1-től 1000-ig, vagyis hívjuk meg az IC eljárást mindezen értékekre, és jegyezzük föl a kapott 2, 5 illetve 18 hosszúságú periódusok előfordulását, valamint azt, hogy van-e más hosszúságú periódus! Azt is figyeljük, hogy minden esetben periódikussá válik-e az iterációs sorozat.

```
> a:=1:
b:=1000:period2:=0:period5:=0:period18:=0:mas:=0:nemjo:
=0:
> for m from a to b do
> IC(m):
> per[m]:=periodus:
> if periodus=5 then  period5:=period5+1 fi;
> if periodus=18 then  period18:=period18+1 fi;
> if periodus=2 then  period2:=period2+1 fi;
```

```
> if (periodus<>5 and periodus<>18 and periodus<>2 and
periodus<>0) then mas:=mas+1: fi;
> if periodus=0 then nemjo:=nemjo+1 fi
> od:
> `18-as periódusok száma`=period18;
> `5-ös periódusok száma`=period5;
> `2-es periódusok száma`=period2;
> `nem periodikus`=nemjo;
> `Más hosszúságú periódus`=mas;
```

$$18\text{-as periódusok száma} = 345$$

$$5\text{-ös periódusok száma} = 306$$

$$2\text{-es periódusok száma} = 349$$

$$\textit{nem periodikus} = 0$$

$$\textit{Más hosszúságú periódus} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy 1000-ig az iteráció mindig periódikussá válik, a ciklus hossza 2, 5 vagy 18.
Most vizsgáljuk meg, hogy milyen értékek adódnak cikluskezdőként!
Az IC eljárást ciklusban meghívva az **érték** változóban gyüjtjük a cikluskezdő értékeket

```
> ertek:=NULL:
> for s from 1 to 500 do
> IC(s):ertek:=ertek,senit[i-1]
> od:
> értékek=[ertek]:
```

Konvertáltuk a listát halmazzá, hogy a többszörös értékeket kiszűrjük...

```
> h:=convert(rhs(%),set);
```

$$h := \{1, 5, 7, 10, 14, 17, 20, 25, 34, 37, 41, 50, 55, 61, 68, 74, 82, 91, 110, 122, 136, 164, 182, 272\}$$

```
> `A h elemeinek száma`=nops(h);
```

$$\textit{A h elemeinek száma} = 24$$

Vajon kapunk-e olyan értéket később, ami nem szerepel a h-ban? Vizsgáljuk meg 10000-ig bezárólag

```
> s:=500:
> IC(s):senit[i-1]:
```

$$14$$

```
> while is(senit[i-1] in h) and s<=10000 do
>  s:=s+1:IC(s):senit[i-1]:
```

```
> od;
> senit[i-1];
> s;
```

10001

Nem bővült a h halmaz, a kezdőértékek az első 10 000 egészre a h halmaz elemeiből valók!
Vizsgálatunk eredményeként tehát a következő sejtést fogalmazhatjuk meg:

Sejtés

Az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x = páros \\ 3\,x - 1 & x = páratlan \end{cases}$$

függvény által generált iterációs sorozat egy kezdő szelettől eltekintve periodikus.
A periódus hossza 2,5 vagy 18, kezdőértéke pedig a

$h = \{1, 5, 7, 10, 14, 17, 20, 25, 34, 37, 41, 50, 55, 61, 68, 74, 82, 91, 110, 122, 136, 164, 182, 272\}$

elemei közül kerül ki.

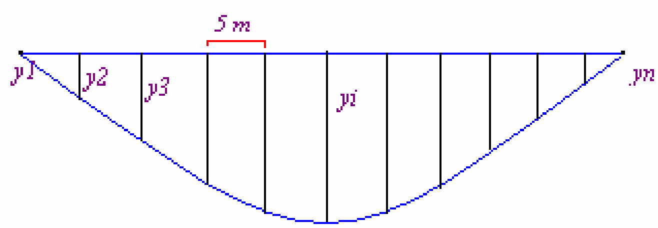
Modellértékelés

A kísérletező munka fontos területe a modellek összehasonlítása, a modellek "jóságának" vizsgálata, az általuk szolgáltatott eredmények összevetése. Már maga az a tény, hogy többféle modell kidolgozása szóba jöhet, többnyire feltételezi a számítógépes algebrai rendszerek valamelyikének használatát. Egyébként a rendelkezésre álló idő nem tenné lehetővé az efféle összehasonlító vizsgálatokat. A következő példa a különböző modellek összehasonlítását szemlélteti. Az ilyen típusú összehasonlító vizsgálatokkal a következő didaktikai célokat kívánjuk megvalósítani:

- A hallgatók figyelmének felhívása az állandó kontroll szükségességére és a többféle megközelítés lehetőségére.
- A korábban tanult ismeretek felidézése, elmélyítése
- Az egymástól elkülönülten tárgyalt tananyagelemek közötti kapcsolat létrehozása, s ilyen módon, a tudásreprezentációs háló sűrűbbé tétele.

Vízkivétel

Probléma: Egy folyó vízmélységét 5 m-enként megmérik



Az adatok rendre a következők (m-ben mérve):
0, 1.2, 2.3, 3.1, 3.4, 4.1, 5.0, 6.2, 7.1, 7.8, 7.4, 6.8, 5.7, 5.5, 5.2, 4.6, 3.9, 3.4, 2.6, 2.1, 1.4, .9, 0

A víz folyásának sebessége 1.5 m/s. A folyó menti város vízművének kapacitása napi 100000 m^3 víz kivételét igényli. Az előírás szerint a folyó vízhozamának $\frac{1}{100}$-át lehet ilyen célra igénybe venni.

Képes-e a folyó ellátni a vízművet, ha kisvíz esetén a jelenleginek $\frac{1}{3}$-a folyik át?

Megoldás: A feladatot többféleképpen megoldjuk.
1. Regressziós polinommal;
2. Minmax polinom illesztéssel,
3. Trapézszabállyal;
4. Simpson-szabállyal

1. A **kiegyenlit** eljárás (kódja a függelékben) regressziós polinomot illeszt, a fokszámmal kísérletezve megtalálhatjuk a viszonylag legjobb illesztést:
Első lépésként helyezzük el a mélységmérésre vonatkozó adatokat listákban!

```
> szelveny:=[seq((i-1)*5,i=1..23)];# Az osztópontok
```

$szelveny := [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110]$

```
> melyseg:=[ 0, 1.2, 2.3, 3.1, 3.4, 4.1,
5.0,6.2,7.1,7.8,7.4,6.8,5.7,5.5,5.2, 4.6, 3.9, 3.4,
2.6, 2.1, 1.4, 0.9, 0]; # A mért mélységek
```

$melyseg := [0, 1.2, 2.3, 3.1, 3.4, 4.1, 5.0, 6.2, 7.1, 7.8, 7.4, 6.8, 5.7, 5.5, 5.2, 4.6, 3.9, 3.4, 2.6, 2.1, 1.4, 0.9, 0]$

A zip utasítással egyesítjük a listákat:

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],szelveny,melyseg);#A pontok
#   listája
```

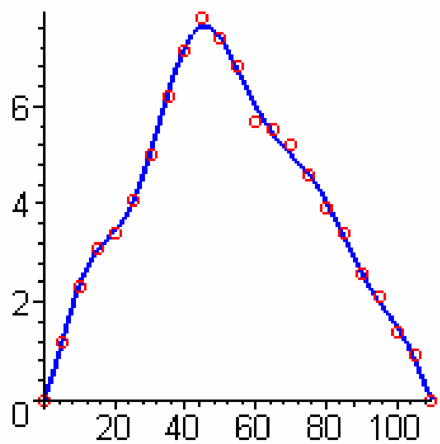
pontok := [[0, 0], [5, 1.2], [10, 2.3], [15, 3.1], [20, 3.4], [25, 4.1], [30, 5.0], [35, 6.2], [40, 7.1], [45, 7.8], [50, 7.4], [55, 6.8], [60, 5.7], [65, 5.5], [70, 5.2], [75, 4.6], [80, 3.9], [85, 3.4], [90, 2.6], [95, 2.1], [100, 1.4], [105, 0.9], [110, 0]]

A kiegyenlit eljárással meghatározzuk a regressziós polinomot. Az eljárás a regressziós polinom meghatározása mellett megadja az eltérések négyzetösszegét és ábrázolja a kapott pontokat és a rájuk illesztett polinomot. (15. ábra)

```
kiegyenlit(sum(a[i]*x^i,i=0..12),seq(a[i],i=0..12),pont
ok);
```

A regressziós polinom, $0.004971756974 + 0.2291746669\,x - 0.01030255820\,x^2 + 0.004611360582\,x^3 - 0.0006497366880\,x^4 + 0.00004187594853\,x^5 - 0.1506722866\;10^{-5}\,x^6 + 0.3319604009\;10^{-7}\,x^7 - 0.4666428321\;10^{-9}\,x^8 + 0.4208345954\;10^{-11}\,x^9 - 0.2358807996\;10^{-13}\,x^{10} + 0.7483858861\;10^{-16}\,x^{11} - 0.1026922272\;10^{-18}\,x^{12}$

Az eltérések négyzetösszege, 0.2582997005



15. ábra

A kapott polinommal a keresztmetszet:

```
> int(pol(x),x=0..110);
```

449.2162871

2. A **minmax** módszer [36] a szimplex módszerrel dolgozik és a maximális eltérést minimalizálja. Egymástól messze eső területek között hozunk létre kapcsolatot! A szimplex módszer tantervünkben a Matematika III. Kurzusban szerepel, a függvény illesztés problematikája a Matematika II. kurzus tananyagában. A módszer lényege a következő:

Feladatunk egy olyan p*(x) legfeljebb n-ed fokú polinom meghatározása ($n+2 \le N$), amelynek x = x_1, x_2,..., x_N pontokban az y_1, y_2 ,..., y_N értékektől vett eltéréseinek maximumát a p*(x) minimalizálja. Azaz tekintjük az alábbi eltérések maximumát

$$\max(\ |y_k - \mathrm{p}(x_k)|\ ,\ \ k=1\ ,\ 2\ , ...,\ N\ )$$

az összes legfeljebb n-edfokú polinomra. Majd a p(x) polinomok közül kiválasztjuk azt a p*(x)-t, amelyre az eltérés minimális. Jelöljük a minimális eltérést E-vel! Ekkor a p(x) polinom eleget tesz a

$$-E \le y_1 \ \text{-}\ \mathrm{p}(x_1) \le E$$

$$-E \le y_2 \ \text{-}\ \mathrm{p}(x_2) \le E$$

$$-E \le y_3 \ \text{-}\ \mathrm{p}(x_3) \le E$$

....

$$-E \le y_N \ \text{-}\ \mathrm{p}(x_N) \le E$$

egyenlőtlenségeknek. Ha a p(x) polinomot

$$\mathrm{p(x)} = \ c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + ... + \ c_n\, x^n$$

alakban keressük, akkor a fenti egyenlőtlenségek

$$y_k \text{ - } c_0 - c_1\, x_k - c_2\, x_k^{\ 2} \text{ -...- } c_n\, x_k^{\ n} \le E$$

$$y_k \text{ - } c_0 - c_1\, x_k - c_2\, x_k^{\ 2} \text{ -...- } c_n\, x_k^{\ n} \le -E$$

Ezekhez az egyenlőtlenségekhez az E---> minimum célfüggvényt hozzávéve egy lineáris programozási feladatot kaptunk az ismeretlen c_0 , c_1 ,.. c_n együtthatókra nézve. Nézzük ezek után a megoldás lépéseit :

a) Megadjuk az x_i és y_i adatokat egy - egy vektorban:

```
X:=[seq(i*5,i=1..23)];
Y:=[0.0, 1.2, 2.3, 3.1, 3.4, 4.1,
5.0,6.2,7.1,7.8,7.4,6.8,5.7,5.5,5.2, 4.6, 3.9, 3.4,
2.6, 2.1, 1.4. , 09, 0];
```

$X := [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115]$

$Y := [0., 1.2, 2.3, 3.1, 3.4, 4.1, 5.0, 6.2, 7.1, 7.8, 7.4, 6.8, 5.7, 5.5, 5.2, 4.6, 3.9, 3.4, 2.6, 2.1, 1.4, 0.9, 0]$

b) Keressük az egyenletesen legjobb közelítést adó tizenkettedfokú polinomot! Vegyük fel a keresett polinomot határozatlan együtthatókkal.

```
> p:=x->sum(a[j]*x^j,j=0..12);
```

$$p := x \to \sum_{j=0}^{12} a_j\, x^j$$

c) A korlátozó feltételeket felsoroljuk a 'korlatok' nevű változóban.

```
n:=nops(X):korlatok:=NULL:
for i from 1 to n do
 korlatok:=korlatok,Y[i]-p(X[i])<=e,Y[i]-p(X[i])>=-e:
od:
```

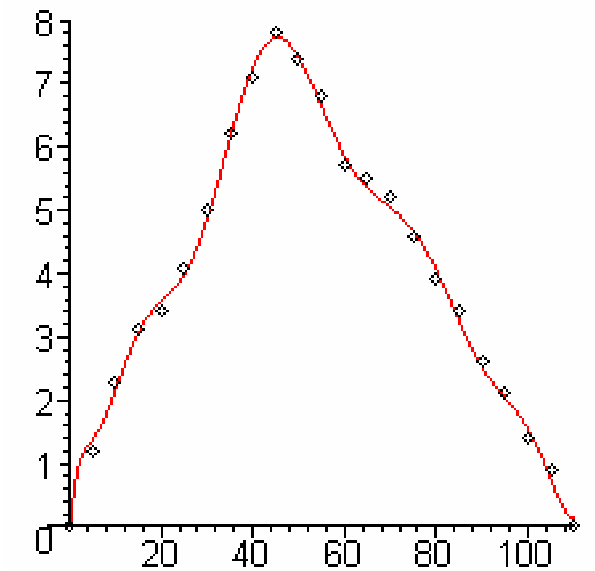
d) A 'simplex' csomag minimalizáló eljárásával meghatározzuk az adott feltételek mellett az 'e' cél függvénnyel a minimumot.

```
simplex[minimize](e,{korlatok});
> assign(%);
```

$$\{a_7 = 0.1847657265\ 10^{-6},\ a_9 = 0.1743687747\ 10^{-10},$$
$$a_{12} = -0.3387133152\ 10^{-18},\ a_1 = 9.312373170,$$
$$a_{10} = -0.8872999246\ 10^{-13},\ a_{11} = 0.2613207757\ 10^{-15},$$
$$a_5 = 0.0004098553609,\ a_6 = -0.00001057437023,$$
$$a_8 = -0.2194166122\ 10^{-8},\ a_3 = 0.1737583069,\ a_4 = -0.01054919985,$$
$$a_0 = -19.93767655,\ a_2 = -1.721506061,\ e = 0.1577397627\}$$

Megjegyzés: Mivel a minmax a 0 közelében instabil módon viselkedett, eltoltuk a pontokat az [5,0] vektorral, majd a kapott függvényt visszatranszformáltuk.
Rajzoljuk fel a pontokat és az egyenletesen legjobb közelítést adó polinomot! (16. ábra)

```
pontok1:=plot([seq([X[i]-5,Y[i]],i=1..n)],style=point,
              symbol=diamond,color=black):
graf:=plot(p(x+5),x=X[1]-5..X[n],color=red):
>                   plots[display]([pontok1,graf],view=[-
5..110,0..8],scaling=unconstrained);
```



16. ábra

```
> `metszet(minmax)`:=int(p(x+5),x=0..110);#a minmax
polinommal
```
metszet(minmax) := 447.7671869

```
> `metszet(regressz_pol)`:=int(pol(x),x=0..110); # A
polinomiális #regresszióval
```
metszet(regressz_pol) := 449.2162871

3. A **Trapéz** eljárás (kódja a függelékben) a diszkrét pontokkal dolgozik, a trapézformulát valósítja meg, s megegyezően a regreszios polinomot előállító kiegyenlit eljárással és a következő Simpsonnal, listák listáját várja (listlist):

```
> `metszet(trapéz)`:=Trapez(pontok,nops(pontok));
```
metszet(trapéz) := 448.5000000

4. A **Simpson** eljárás a Simpson-szabály diszkrét adatokra (ld. a függelékben):

```
> `metszet(simpson)`:=Simpson(pontok,nops(pontok));
```
metszet(simpson) := 451.3333333

Hasonlítsuk össze a kapott értékeket:

[metszet (*minmax*) , metszet (*regressz_pol*) , metszet (*trapéz*) , metszet (*simpson*)]

[447.7671869 , 449.2162871 , 448.5000000 , 451.3333333]

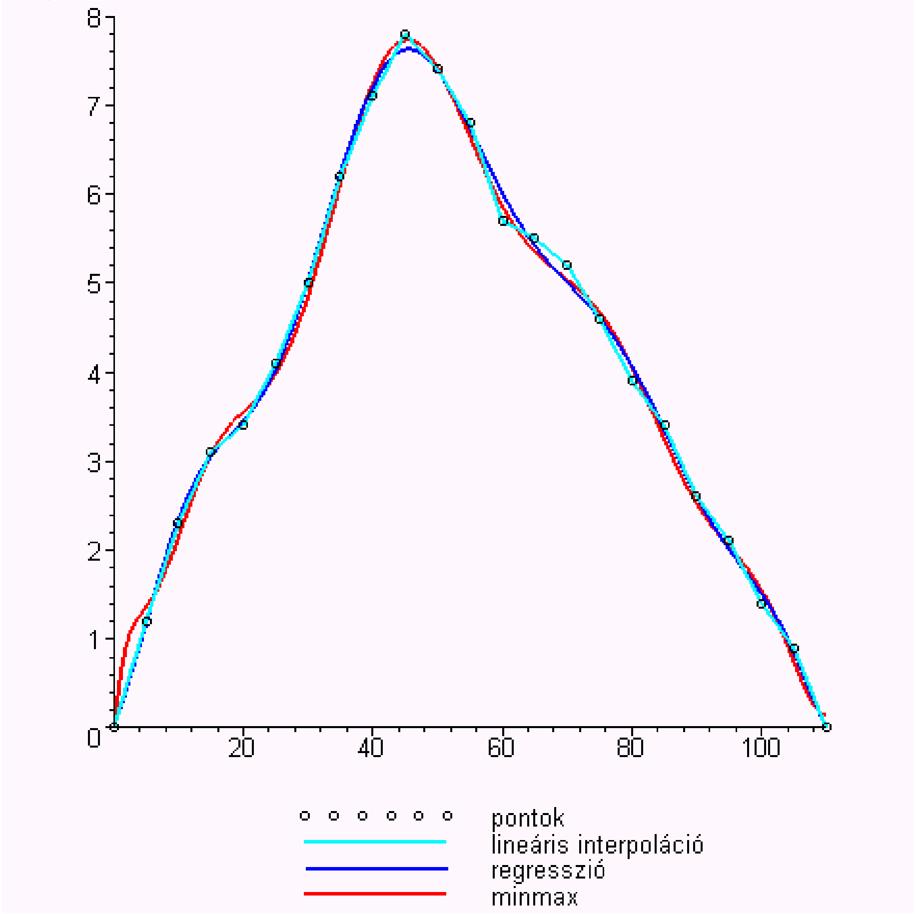
A legnagyobb és a legkisebb érték különbsége:

```
> evalf((`metszet(simpson)`-`metszet(minmax)`));
```
3.5661464

A relatív hiba közelítőleg:

```
> evalf((`metszet(simpson)`-`metszet(minmax)`)/450);
```
0.0079247699

Ez kevesebb, mint 1 %, tehát az eljárások megbízhatóak! Kövessük mindezt nyomon grafikusan is! (17. ábra)



17. ábra

A különböző módszer eredményeként kapott grafikonok kevéssel térnek el egymástól, tehát a grafikus reprezentáció megerősíti a numerikus reprezentáció segítségével kapott eredmények jóságába vetett hitünket!

8. 4. Problémamegoldás algoritmusok segítségével CAS környezetben

A matematikai problémamegoldás során talán legtöbbször fellépő résztevékenység az algoritmusok kidolgozása és alkalmazása. Az algoritmus fogalma alatt a következőt értjük:

Definíció: Az algoritmus műveletek olyan egyértelmű sorozata, amelynek végrehajtása véges idő alatt befejeződik, és amely mindig szolgáltat eredményt.
Az algoritmus résztevékenységekből épül föl. A legegyszerűbb résztevékenységet algoritmus primitívnek nevezzük. A primitív művelet, vagy algoritmus primitív az a legösszetettebb művelet, amit a végrehajtó (gép vagy ember) közvetlenül megért és végrehajt, anélkül, hogy azt alapvetőbb összetevőire kellene bontania.
A CAS környezetben történő algoritmus-fejlesztés a CAS matematikaoktatásban való alkalmazásának egyik legalapvetőbb didaktikai problémáját jelenti. A feladat összetett. Az esetek egy részében matematikailag korrekt módon megfogalmazott algoritmusból kell működőképes CAS algoritmust készíteni. Tágabb értelemben ez utóbbi azt is jelenti, hogy a CAS algoritmusok egymáshoz való kapcsolódását is ki kell építeni. Máskor az algoritmus eredendően CAS környezetben jön létre, a benne foglalt matematikai tartalommal egyenrangúvá válnak a CAS - specifikus algoritmuselemek. A két fejlesztési mód részben eltérő stratégiát követel. Az első esetet részletezzük az alábbiakban. Az összetett, több algoritmus kifejlesztésével megvalósuló, problémamegoldással a modularizáció témakörének tárgyalása soránmár érintettük. Ebben a fejezetben az algoritmus, mint önálló egység képezi a vizsgálat tárgyát. Ez természetesen nem zárja ki, hogy több önállóan is értelmes és végrehajtható részegység együttese legyen a tárgyalt algoritmus. Vizsgáljuk tehát egy példa kapcsán azt az esetet, amikor a **matematikai tananyagban kidolgozott eljárás, algoritmus CAS segítségével történő kivitelezése** a cél. Ekkor a következő lépések megtétele ajánlatos [33]:

1. A probléma matematikai megoldásának tanulmányozása, megértése az előadás, a tankönyv vagy más forrásanyag tanulmányozása segítségével.

   Ebben a részben feltárjuk a tárgyalt matematikai algoritmus belső szerkezetét. Ez kétirányú tevékenységet jelent. Egyrészt el kell különíteni az algoritmus nagy szerkezeti egységeit. Ez felülről lefelé irányuló, másként top-down szemléletet igényel, esetenként rekurzív elemekben való gondolkodást. Másrészt el kell különíteni az egy-egy részeljárással elvégezhető tevékenységeket, és tisztázni kell ezek egymáshoz való kapcsolódását.(bottom-up). Mindezek eredményeként elvégezhetők a következő tevékenységek.

2. Az algoritmus főbb eljárásainak elkülönítése, folyamatábra (blokkdiagram) ill. sruktogramm készítése

3. Az eljárások algoritmus-primitívekre bontása és ennek alapján az algoritmus megfogalmazása **pszeudokód** formájában.

   A pszeudokód átmeneti lépést jelent az algoritmus folyamatábra, blokkdiagram, vagy más egyértelmű jelsorozat formájában történő megadása és a programnyelven történő implementációja között. A pszeudokód felírása során az algoritmus kódját olyan lépésekből alakítjuk ki, hogy azok a lehető legjobban illeszkedjenek a programnyelvi megvalósításhoz, de ne tartalmazzanak program-specifikus elemeket.

4. A CAS eljárás megírása

   A pszeudokód felhasználásával az alkalmazott CAS segítségével futtatható eljárás(oka)t írunk.

5. Teszteljük, elemezzük, majd használjuk a teljes CAS programot.

Az automatizált CAS eljárás megírása és használata azonban természetesen hosszú folyamat végső eredménye. Az algoritmus részelemeit, önállóan is végrehajtható egységeit a kiépítés-alkalmazás során először interaktív módon kell használnunk. Önálló fejlesztés során ez kézenfekvő. Ekkor ugyanis minden esetben a top-down és a bottom-up algoritmusépítési technikák ötvözésével alakítjuk ki az algoritmust.

Példaként tekintsük az elemi bázistranszformáció esetét, ahol az előbb felsorolt lépések a következők:

1. Az elemi bázistranszformáció formuláit tárgyaló előadás anyagának elemzése. Az ismert levezetést itt nem részletezzük, csupán a fogalmak bevezetését és a bázistranszformáció végrehajtásának módját idézzük föl.
A lineáris térből végtelen sokféleképpen választható ki bázis. Ha a tér egy bázisáról egy másikra térünk át, akkor a tér vektorainak koordinátái - az új vektorrendszerre vonatkozó jellemzői - megváltoznak. **Bázistranszformáció**nak nevezzük azt az eljárást, amellyel egy vektornak adott bázisra vonatkozó koordinátáiból meghatározzuk egy másik bázisra vonatkozó koordinátáit. A bázistranszformációt lépésenként, ún. **elemi bázistranszformáció**k egymás utáni alkalmazásával hajtjuk végre.

Hogyan hajtható végre az elemi bázistranszformáció, azaz hogyan számítjuk ki egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátáinak ismeretében ennek a vektornak egy olyan új bázisra vonatkozó koordinátáit, amely az eredeti bázistól csak egy vektorban különbözik?

Legyen az n-dimenziós tér (L_n) egy bázisa:

$$\mathbf{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots, b_n}$$

és $c \neq 0$ az L_n egy vektora, amelyet bevonunk a bázisba (ezt választjuk bázisvektornak valamelyik régi bázisvektor helyett).
Tekintsük a tér egy tetszőleges **x** vektorát, amelynek koordinátái az eredeti bázisban:

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_k, \ldots, \; x_n \; .$$

Az **x** vektornak az új bázisra vonatkozó koordinátáit a következőképpen számíthatjuk ki:
Ha a lineáris tér k-adik bázisvektora helyett új bázisvektort választunk (csak olyan vektort választhatunk, amelynek a k-adik bázisvektorra vonatkozó

koordinátája nem 0), akkor a tér tetszőleges vektorának (**x**) az új bázisra vonatkozó koordinátáit a következőképpen számíthatjuk ki:

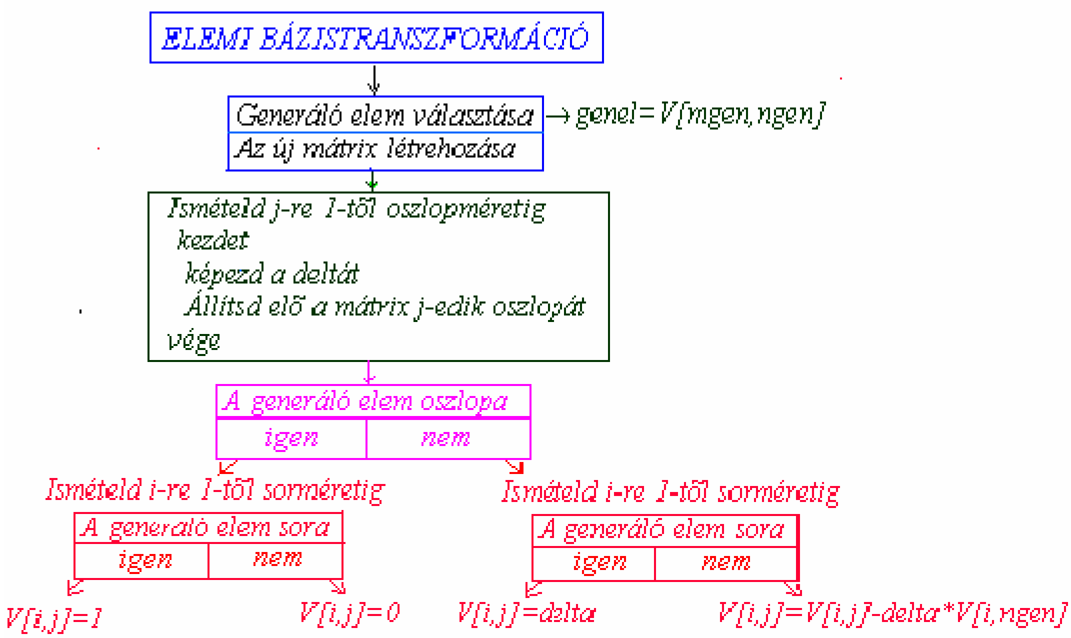
- Az **x** vektornak az új (k-adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátáját (x_k`) megkapjuk, ha az **x** régi (k-adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátáját elosztjuk az új (k-adik, **c**) bázisvektor régi (k-adik) bázisvektorra vonatkozó koordinátájával ($c_k \neq 0$)

  $x_k` = \frac{x_k}{c_k} = \delta$, ahol a $c_k \neq 0$ -t **generáló elem**nek nevezzük.

- Az **x** vektornak az új bázisra vonatkozó többi koordinátáját úgy kapjuk meg, hogy az **x** régi bázisvektorra vonatkozó koordinátájából rendre kivonjuk az új bázisvektor (**c**) régi bázisra vonatkozó megfelelő koordinátáinak $\frac{x_k}{c_k} = \delta$ -szorosát:

  $$x_i` = x_i - \delta\, c_i \qquad (i \neq k)$$

2. Az elemzés eredményeként kialakul az elemi tevékenységek rendszere. Ezekből állítjuk össze az egyes részeljárások rendszerét feltüntető **folyamatábrát.**



3. Az algoritmus pszeudokódja már lényegében a kész, nyelv- és gépfüggetlen algoritmus

elemi (mgen,ngen::pozitív egész, V:: mátrix)

genel:= $V_{mgen,\, ngen}$

ismételd j-re **1**-től **oszlopméret**ig

kezdet

$$\textbf{delta} := \frac{V_{mgen,j}}{genel}$$

ha $j \neq ngen$ akkor

kezdet

ismételd i-re 1-től **sorméret**ig

kezdet

ha $i \neq ngen$ akkor

$V_{i,j} = V_{i,j} - \delta\, V_{i,\,ngen}$

egyébként $V_{i,j} = \delta$

vége

vége

ismételd i-re 1-től **sorméret**ig

ha $i \neq mgen$ akkor $V_{i,\,ngen} = 0$

egyébként $V_{i,j} = 1$

eljárás vége

4. A CAS (Maple)-eljárás megírása ezek után már nem nehéz feladat. A szintaktikai kötöttségek és a nyelvi eszközök figyelembe vételével történő tevékenység- a megfelelő előkészítés után- a fordításhoz hasonlító tevékenység.

A szereplő vektorokat mátrixba foglaljuk. Az elemi eljárás paraméterei rendre:

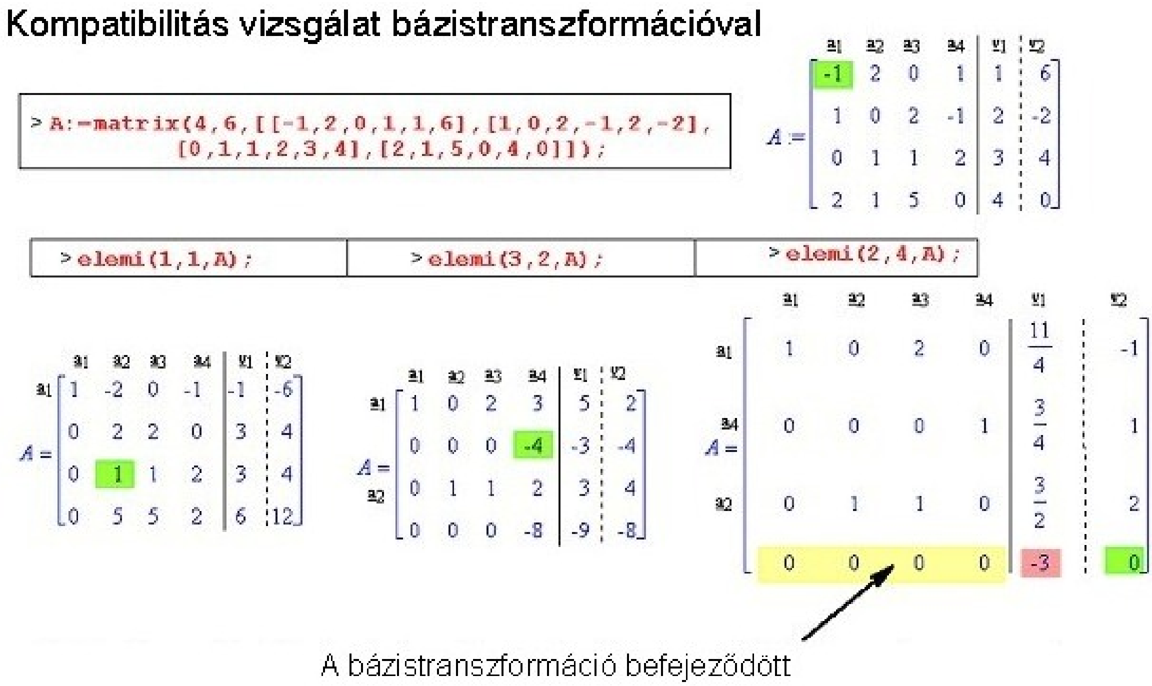
- a generáló elem első ill. második koordinátája,
- az illető mátrix.

```
elemi := proc(mgen, ngen::posint, V::matrix)
local i, j, genel, δ;
    genel := V[mgen, ngen];
    for j to coldim(V) do
        δ := V[mgen, j]/genel;
        if j ≠ ngen then for i to rowdim(V) do
                if i ≠ mgen then V[i, j] := V[i, j] − δ×V[i, ngen]
                end if ;
                if i = mgen then V[i, j] := δ end if
            end do
        end if
    end do ;
    for i to rowdim(V) do
        if i ≠ mgen then V[i, ngen] := 0 else V[i, ngen] := 1 end if
    end do ;
```

$V = \mathrm{evalm}(V)$

end proc

5. Az eljárás (tesztelésére) alkalmazására példaként szolgálhat a kompatibilitás vizsgálata:



9. A CAS használatára épülő, hálózatot is felhasználó matematikaoktatás általunk megvalósított modellje

9. 1. A CAS- ill. a CAS és a hálózat együttes használatának didaktikai motivációi

A számítógép-algebrai rendszert, a helyi hálózatot, és újabban az Internetet is, minden összetevőjében felhasználó matematikai kurzus alapmotivációjának feltárásakor a társadalmi környezetből kell kiindulnunk. Az információs-kommunikációs technológia, mindenekelőtt a hálózati kommunikációs infrastruktúra gyökeres átalakulása, a világháló használatának általánossá válása, a hipermédia (hipertext és multimédia együttese) megjelenése a tanulási környezet alapvetően új elemekkel való bővülését jelentik. Ez kettős kihívást jelent az oktatással foglalkozók számára:

- A kibővült oktatási környezet új elemeit az adott lehetőségek határáig optimálisan ki kell használni. Tehát a hálózati kommunikáció és a számítógépes információ feldolgozás, a számítógéppel segített tanulás eszközrendszerét megfelelő didaktikai feltárás mellett be kell vonni az oktatásba.

- A világháló rendezetlen ismeretek szinte végtelen méretű tárháza. Az ilyen ismeretek egyre könnyebb elérése azt a látszatot keltheti, és kelti is sokak szemében, hogy a rendszeres, a strukturált médiumok felhasználásán nyugvó tanulás helyettesíthető a böngészők virtuóz kezelésével. Alapvető didaktikai feladatunk a rendezett, jól kezelhető, folyamatosan elérhető tudásbázis létrehozása és az operatív munka okozta terhelést csökkentő, és ezzel nagyobb méretű feladatok megoldását segítő számítógépes rendszerek alkalmazása. Ezek ellensúlyozhatják az idézett kedvezőtlen hatásokat.

A számítógépes algebrai rendszernek az oktatásban való alkalmazása nem különíthető el mereven az ismeretrendszer hálózaton történő elérhetőségének kérdésétől. Így a következőkben ugyan elsősorban a CAS alkalmazásának motivációs bázisát részletezzük, de kitérünk a hálózat felhasználásának kérdéseire is. A csoportosítás, az egyes elemek súlya természetesen többé-kevésbé szubjektív, erősen függ az adott oktatási környezettől. Mi tehát csak arra vállalkozhatunk, hogy a saját oktatási gyakorlatunk során jelentkező motivációs tényezőket összegezzük. Öt fő motivációs csoportot különböztetünk meg. Ezek a csoportok nem diszjunktak, több CAS funkció több csoportban számba vehető.

A tananyag felépítése, elkészítése, karbantartása terén jelentkező nyereségek

- **A tananyag rugalmasan, könnyen módosítható, szerkeszthető**: az egyes tananyag egységek újra konfigurálása, módosítása lehetővé teszi az új gondolatoknak, megközelítéseknek az oktatási médiumokban való gyors, lényegében azonnali megjelenítését.
- **Összefüggő, kapcsolatokban gazdag ismeretrendszer alakítható ki:** a CAS munkalapok, és az egyéb formátumú tananyagelemek -a hiperlinkek segítségével- a korábban lehetségesnél jobban segíthetik a belső tudásreprezentációs háló sűrűbbé tételét.
- **A tananyag állandó elérhetősége, folyamatos kapcsolat lehetősége az oktatókkal:** a tananyagnak a helyi hálózaton és az Interneten történő elhelyezésével, és a tananyagra vonatkozó információszerzés hálózati lehetőségének megteremtésével a tanulási lehetőségek bővítését, a tanulási szokásokhoz való rugalmasabb alkalmazkodást érhetjük el.

Reprezentációs értéktöbblet

- **A grafikus reprezentációk** alkalmazhatóságának bővülése: a számítógép algebrai rendszerek a 2D-s és 3D-s grafikus reprezentációk sokszínű lehetőségeivel, az animációk segítségével korábban nem, vagy csak töredékesen megjeleníthető jelenségek tanulmányozását teszik lehetővé.

- **A numerikus számítások**nak nagyságrendben pontosabb elvégezhetősége.
- **A szimbolikus számítások** elvégezhetősége: a CAS a figyelem tehermentesítését, a komplexitás csökkentését elsősorban a szimbolikus számítások terén nyújtott segítség révén teszi lehetővé.

A gondolkodási műveletek támogatása

- **Az induktív megközelítés segítése:** a munkalapok algoritmikus részletei könnyen elkészíthetők, futtathatók több változatban. A paraméterek változtatgatása lehetővé teszi a jelenségek sokoldalú megfigyelését.
- **A felfedező tanulás, az alkotó kételkedés támogatása:** a résztevékenységek automatizálása (modularizáció), a feltételek rugalmas változtatgatásának lehetősége, a részletek kidolgozásának csökkent időigénye támogatják a felfedező tanulást.
- **Az általánosítás, az analógiák felfedezése:** az operatív tevékenység jelentős részét a CAS átvállalja. A figyelem részleges felszabadításával, a problémák kidolgozására fordítandó idő csökkentésével nő a tárgyalható variánsok száma, többféle megközelítés válik lehetővé. Ezáltal nagyobb az esélye annak, hogy a tanulók az általánosítások megtételének, az analógiák felismerésének területén előbbre lépjenek.
- **A heurisztikus stratégiák** alkalmazásának lehetősége növekszik: a heurisztikus gondolkodás, bizonyos értelemben, az előbbiekben már felsorolt és más megközelítések (szisztematikus próbálgatás, ismert esetre való visszavezetés, visszautalás, előre utalás, sejtések megfogalmazása) együttes alkalmazását követeli meg.

A tananyag szerkezeti –tartalmi, terjedelmi- változása, gazdagodása

- **Témakörök mélyebb feldolgozása**: korábban csak felszínesen tárgyalható fejezetek kimerítő feldolgozásának lehetősége.
- **Új témakörök feldolgozásának lehetősége**: CAS használata nélkül az adott oktatási struktúrában fel nem dolgozható témakörök tárgyalásának lehetősége.

A matematika tanulásának motivációs tényezői, munkastílus

- **A matematika alapozó funkciójának erősödése**: a matematika a műszaki oktatási intézményekben jelentős részen pragmatikus szerepet tölt be. A CAS alkalmazásával a matematikai ismeretrendszer szaktárgyakban való alkalmazhatósága nagymértékben növelhető.
- **Többcsatornás ismeretfeldolgozás**: a CAS, hálózaton elhelyezett egyéb formátumú tananyagok strukturált rendszerének feldolgozása nagyobb kognitív erőfeszítést követel meg, s ezzel együtt elmélyültebb, rendszeresebb, alkotóbb munkastílus elsajátítását teszi lehetővé.

9. 2. A számítógép-algebrai rendszer integrálása az oktatási folyamatba

A CAS-nek, esetünkben a Maple-rendszernek az oktatásunkba való integrálásánál mindenekelőtt azt kell kiemelnünk, hogy a folyamat irányítása során emberközpontú, a pszichológiai- didaktikai motivációjú megközelítést próbáltuk megvalósítani, és igyekeztünk a technikacentrikus nézőpontot távol tartani magunktól. Ennek megfelelően a rendszer használatának bevezetése és használat kiterjesztése kettős értelemben is ciklusok, **ciklikus tevékenységek sorozata**ként valósult és valósul meg. Egyrészt a matematikai kurzus egyre több összetevőjében alkalmaztuk a rendszert, másrészt a CAS eszközrendszerének is egyre több elemét vontuk és vonjuk be az oktatásba. A ciklusok a következő elemekből állnak:

- **A korlátok, feltételek analizálása**. Ez több résztevékenységet jelent, és egyúttal több megközelítést. A korlátok a rendszer adott állapotában kettős értelműek. Adott rendszer szükségképpen bizonyos idő után túljut a saját optimális állapotán, feszültségek keletkeznek, amelyeket orvosolni kell. Másrészt a továbblépésnél figyelembe kell venni a belső és külső korlátokat, feltételeket. A CAS-nek, mint rendszernek kurzusban, és a kurzus egyes komponenseiben történő alkalmazásánál számba kell vennünk a rendelkezésre álló időkeretet, a mentális fogadókészséget, az anyagi-technikai feltételrendszert. A CAS egyes funkcióinak alkalmazásánál ez ismét csak többdimenziós folyamat. Egyrészt a funkció valódi képességét kell analizálnunk. Mit tud az adott utasítás, milyen környezetben alkalmazható? Mik a mellékhatásai? Az utóbbi kérdés már átvezet a mentális, a didaktikai feltételrendszerrel kapcsolatos analízishez. A CAS számos funkciója, számos utasítása modulja pillanatok alatt képes a matematikai vizsgálatot új (néha a szó eredeti értelmében is új, és nem feltétlenül kívánatos, mert messzire vezető) dimenzióba helyezni. Az egyenletek megoldásánál a solve utasítás például a komplex számok halmazán dolgozik, miközben a tanulók esetleg csak a racionális számok körében járatosak. Tehát minden új funkció használatát meg kell tervezni.
- **Az oktatási környezetbe való integrálás.** A CAS egészének a kurzusba vagy annak egy újabb összetevőjébe történő bevezetésénél az eszközrendszer többi elemével és a didaktikai célrendszerrel történő

összehangolás összetett folyamatát kell megterveznünk és finoman szabályoznunk. A CAS egyes eszközeinek alkalmazásba vételénél a már használt eszközökhöz kell az új funkció alkalmazását illesztenünk.

- **A használat analizálása.** A CAS egészének használatba vételét illetően ebben a fázisban a felhasználás általunk megvalósított módozatának, vagy variánsainak eredményességét kell vizsgálnunk, mérnünk, összehasonlítanunk. Az egyes funkciók szintjén ki kell derítenünk, hogy milyen matematikai feladatok megoldására alkalmazható valójában az adott funkció, figyelembe véve a mellékhatásokat és a módszer abszolút és relatív hatékonyságát.
- **Új specifikációk definiálása.** A használat analízise során a CAS egészének használatát illetően kiderülhet, hogy a használat komplexitása növelhető, a munkavégzés újabb területén alkalmazva a rendszert, a hatékonyság nő. Az egyes funkciók területén az integrált elemmel bővült rendszer újabb eszközök, eljárások, utasítások, modulok bevonását teszi szükségessé, illetve lehetővé.

A fenti, először Lagrange és Py [35] által leírt, 4 elemű ciklus K. Popper tetradikus sémájával hozható kapcsolatba (4. 6.). A tetradikus séma a megismerés folyamatát általában jellemzi, az iménti séma ezt új rendszerelem integrálása kapcsán konkretizálja. A séma működésére oktatási gyakorlatunkból álljon itt rövid interpretációban a következő példa. Amikor a kétváltozós függvényeket először tanítottuk a CAS felhasználásával, akkor az alapvető operációkat, reprezentációkat kizárólag a beépített utasítások felhasználásával valósítottuk meg. Miután kiderült, hogy ezek használatát a kurzus keretében a hallgatók a manuális számítások alapvető elsajátítása mellett képesek az adott időkeretben megtanulni, tehát az új eszközöknek a tanulási folyamatba történő integrálása sikeres volt,- ezt a tanulási folyamat analízise megmutatta-, továbbléphettünk. A következő oktatási periódusban a részletező számításokat eljárásokba foglaltuk, tehát az egyes eljárások (például a szélsőérték meghatározása) részletes vizsgálata alapján összetett eljárásokat fejlesztettünk ki. A harmadik fázisban került sor a tananyag bővítésére, a legkisebb négyzetek módszerének CAS eljárásokkal való feldolgozására, majd a módszernek a modellalkotásban történő alkalmazására.

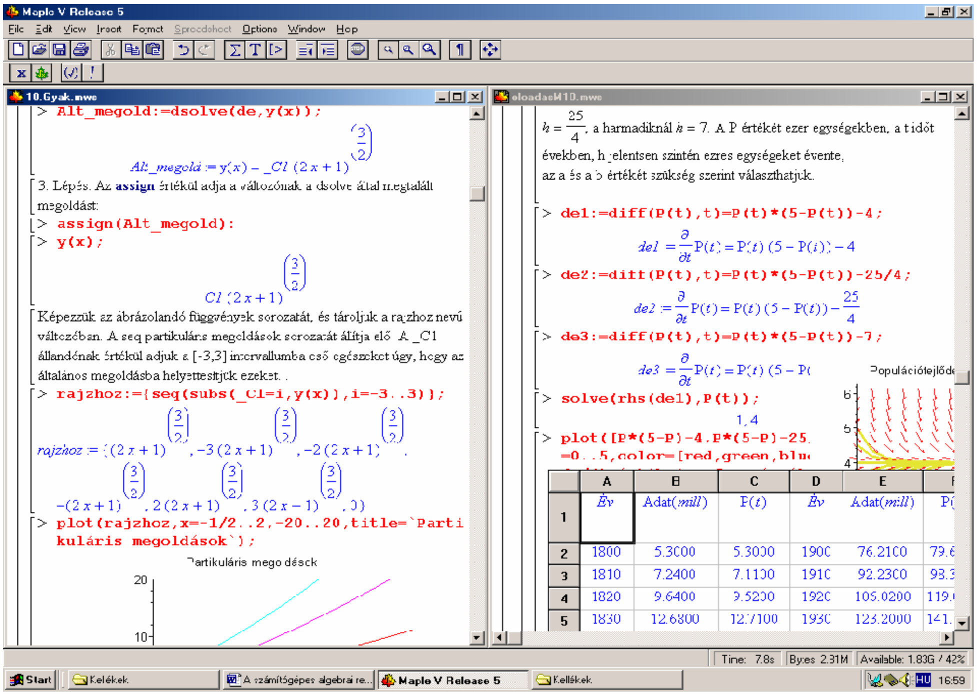
9. 3. Kommunikációs- mediális rendszer

Marshall McLuhan Understanding Media című könyve (Szabad fordításban: A média megértése) első fejezetének címe: The Medium Is the Message, tehát a médium az üzenet. Mc Luhan saját maga által is meglepőnek tartott (így ir: a bit of a shock), sokat idézett kijelentése arra utal, hogy a lényünk kiterjesztéseként működő technikai elemek, így a médiumok is, a környezetünkkel való kapcsolat új mértékét definiálják. Egészen természetesnek kell ezt tartanunk a matematikai ismeretelsajátítás területén is. Az alkalmazott médiumok az oktatás szinte minden

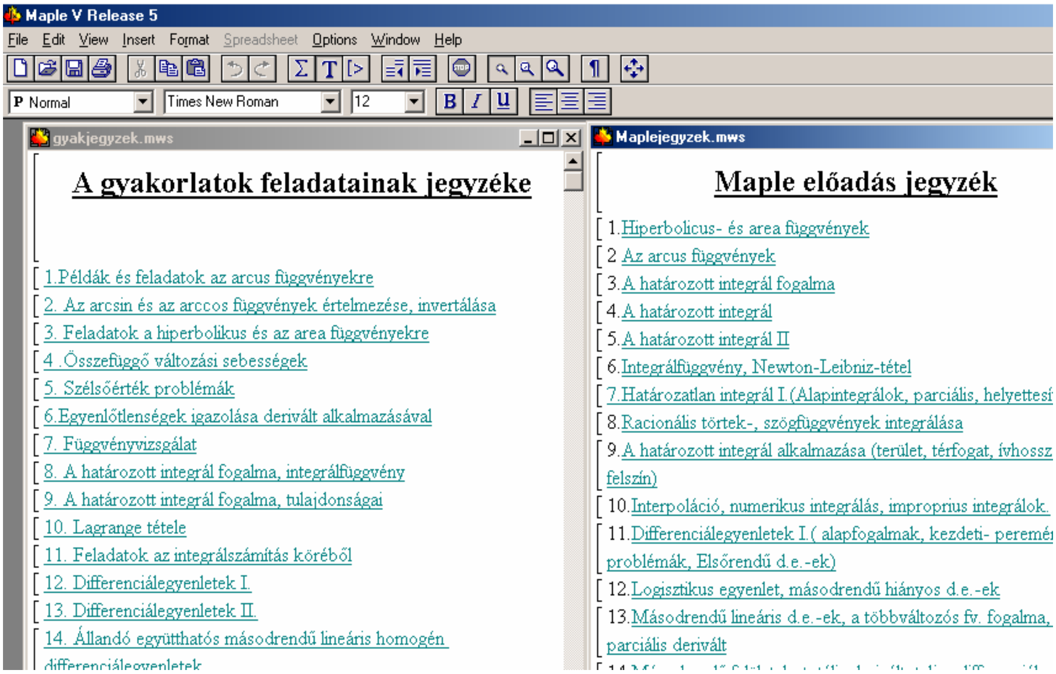
dimenziójára-így a tartalmi kérdésekre, az oktatás szervezésére, az alkalmazott értékelési módokra, a hallgatók tanulási szokásaira- hatással vannak.
A kommunikációs-mediális rendszer leírása követi a rendszer történeti alakulását. A tananyag a létrehozását követő első hét év során a lokális hálózaton volt elérhető, s csak egy éve áll rendelkezésre az Internetes hozzáférés is. Ezért a tananyag hálózati konfigurációját alapvetően a lokális hálózatról szóló fejezetben ismertetjük, s az újabb fejlesztés speciális jegyeivel külön foglalkozunk. Az alkalmazott médiumok közé a Maple CAS rendszert és a Toolbook szerzői rendszert sorolhatjuk.

9. 3. 1. Tananyagok a lokális hálózaton

A Mat. II és a Mat. III. matematikai kurzusok teljes tananyagát elhelyeztük a Főiskola lokális hálózatán. (Tananyag) Az előadások, gyakorlatok, zárthelyi dolgozatok, vizsgák, házi feladatok, alapeljárások a hallgatók számára a kar helyi hálózatán állandóan elérhetők. A gyakorlatokat a második szemesztertől kezdődően a Maple-vel tenulók számára számítógépes laboratóriumokban tartjuk. A tananyagok általában Maple worksheet (munkalap) formájában állnak rendelkezésre. Ennek nagy előnye, hogy a futtatás során a paraméterek változtathatók, s így lehetővé teszik a kísérletező, problémaközpontú tanulást. A Maple rendszer ezáltal a felfedező tudáselsajátítást lehetővé tevő tananyag létrehozását segíti. A gyakorlati foglalkozások és az otthoni tanulás során előnyös, hogy a teljes tananyag szerkeszthető formátumban rendelkezésre áll.
A visszacsatolásnak és a tudáselemek mentális képe kialakításának hatékony eszköze a ToolBook szerzői rendszer. Elsősorban az eljárások gyakorlására és kiemelkedően fontos fejezetek esetén a hallgatói önellenőrzés támogatására használjuk. Használatának részleteivel külön fejezetben foglalkozunk.
A hálózaton elhelyezett tananyag moduláris szerkezetű. Az egyes tudáselemek, kisebb-nagyobb fejezetek a Maple párhuzamos munkalap-szerkesztési lehetőségével könnyen kombinálhatók. A gyakorlati foglalkozásokon az előadás fontosabb elemeinek felidézése, a feladatok megoldásához szükséges részek áttanulmányozása, az éppen kidolgozandó munkalapba illesztése könnyedén elvégezhető e technika alkalmazásával.(18. ábra)



A hálózat használata lehetővé teszi a hallgatók munkájának hatékony ellenőrzését, rendszeres dokumentációját. Az egyes szemeszterek előadásait, gyakorlati foglalkozásait, zárthelyi dolgozatait, vizsgáit tartalmazó könyvtárak rendszere alkotja a hálózaton elhelyezett és folyamatosan karbantartott tananyagot. Az azonos könyvtárban lévő munkalapok (például az előadások) hiperlink segítségével összekapcsolva érhetők el. (19. ábra)



19. ábra

A kurzusok anyagának feldolgozását –az érdeklődők számára- Maple klubfoglalkozások tartásával igyekszünk megkönnyíteni. Ezeknek a foglalkozásoknak a következő funkciói vannak még:

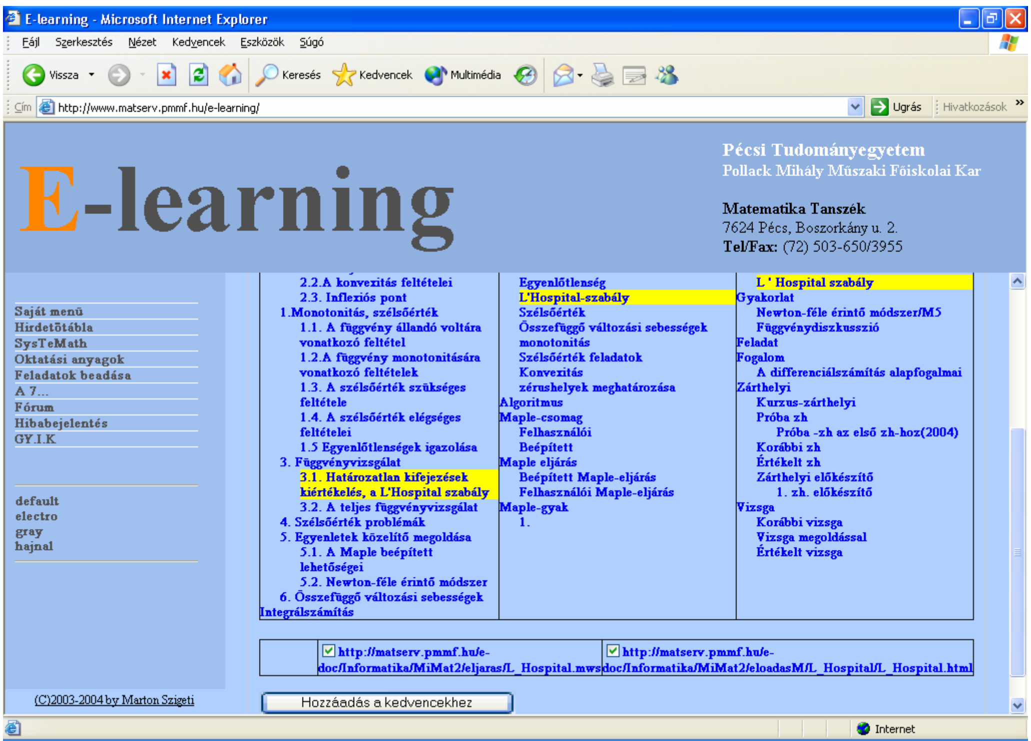
- A Maple-nyelv elemei elsajátításának elősegítése.
- A beadandó feladatokkal kapcsolatos konzultáció.
- A tananyag törzsanyagként nem szereplő fejezeteinek feldolgozása.
- A szaktárgyak tanulása során jelentkező, matematikai ismereteket igénylő, problémák kezelése.

9. 3. 2. Tananyagok az Interneten, az E-Learning portál szerepe

A 2003. februárjában létrehoztuk az **E-Learning nevű Internetes portált**, és ezen is elhelyezzük, és a hallgatók számára elérhetővé tesszük a teljes képzési anyagot. A portál létrehozásával a távoktatás e nagy hatékonyságú elemét a nappali tagozatos, jelenléti oktatás támogatására tudjuk felhasználni. Már a 90-es évek második felétől kezdve megfigyelhető volt a távoktatás és a hagyományos keretek között folyó oktatás közeledése. Ez azt jelenti, hogy a két oktatási forma részben a másikra jellemző eszközöket is hasznosítja. Az Internetes portál alkalmazásának létrehozását elsősorban ez a tény motiválta. A portál (www.matserv.pmmf.hu/e-learning) a következő funkciókat tölti be:

- *Tananyagforrás.* A kurzus teljes tananyaga elérhető az Interneten. A helyi hálózathoz hasonlóan az Internetről is elérhető a kurzusok teljes tananyaga. Az előadások, gyakorlatok mellett a régebbi zárthelyi dolgozatok, próba-zárthelyi dolgozatok, vizsgadolgozatok, az egyes modulokkal kapcsolatos kérdéssorozatok egyaránt letölthetők, sokszor html változatban is.

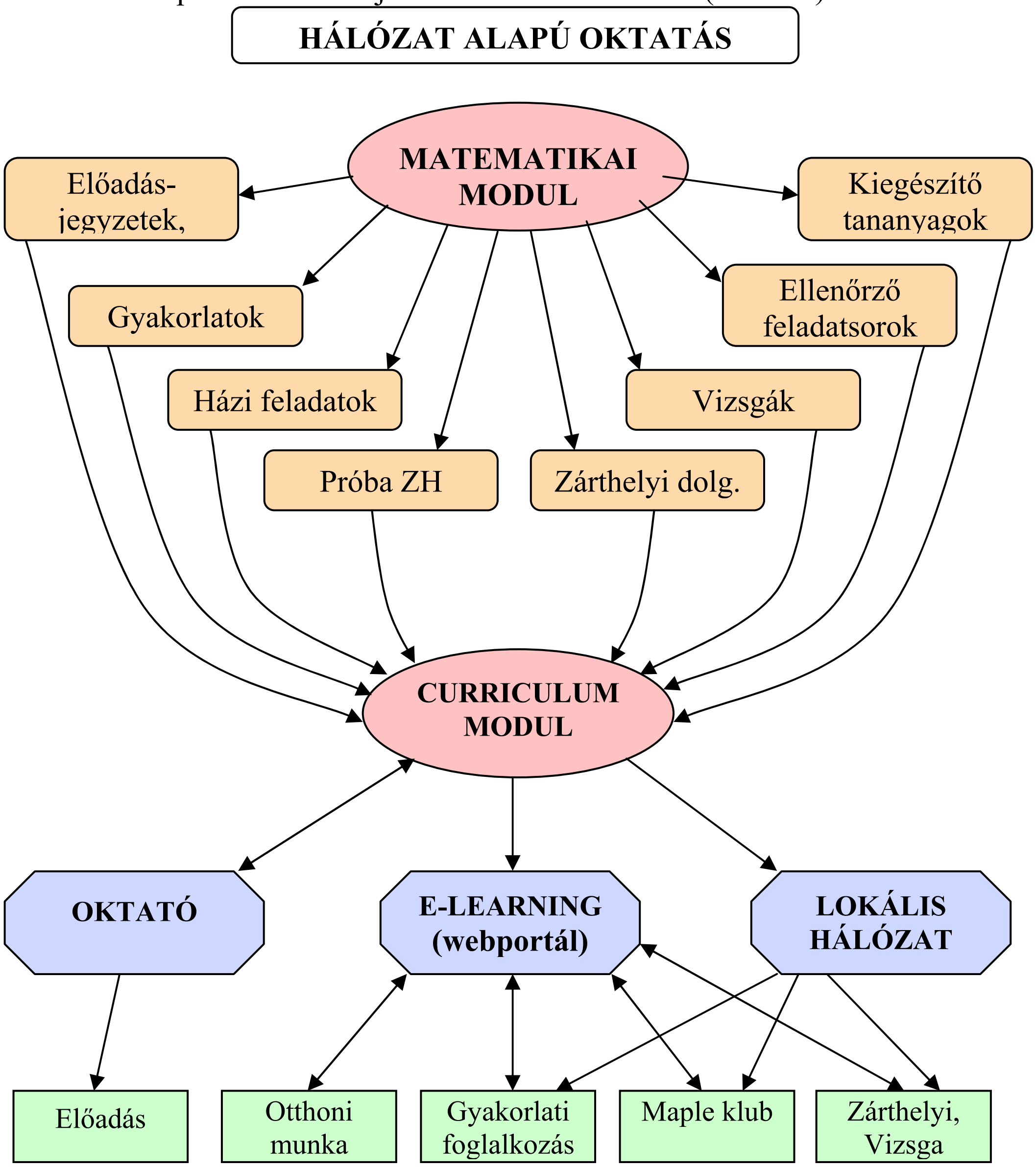
- *Tematikus tananyag-kiválasztás.* A matematika moduláris egységei, a curriculum modulok és a megfelelő Maple munkalapok egymáshoz rendelését a gráf alapú SysTeMath rendszer segítségével biztosítjuk. A hallgatóknak a rendszer kiválasztja az adott matematikai témakörrel foglalkozó mediális modulokat (Maple munkalapokat, html fájlokat és más dokumentumokat) valamint a megfelelő curriculum modulokat. A modulok közti kapcsolatrendszert a tanár az Interneten folyamatosan szerkesztheti (20. ábra)



20. ábra

- *Visszacsatolás, dokumentáció.* A hallgatók a gyakorlatokon végzett munkájukat, házi feladataikat, versenyfeladataikat a rendszer segítségével „beadhatják". a rendszer tárolja a tanári értékelés eredményét, a beküldött feladatokat.
- *Kapcsolattartás*. A tanár a rendszer segítségével közzéteheti a kurzussal kapcsolatos információkat, a fórum rovatban a hallgatók kérdéseket tehetnek föl.

A hálózat alapú oktatás sémája az alábbiakban látható. (21. ábra)



21. ábra. A hálózatalapú oktatás sémája

A **matematikai modul** alatt itt a kurzus tartalmai szempontból elkülöníthető, a többi egységgel természetesen szoros kapcsolatban levő részét értjük. A matematikai modul elektronikus és nyomdai eszközök segítségével készített oktatási anyagok formájában ölt testet. Ezek együttese az adott matematikai modul oktatási leképezésének tekinthető, s mint ilyen a **curriculum modul** elnevezéssel illethető. A hagyományos tananyag-feldolgozáshoz képest jóval szervesebb módon tartoznak a kurzus anyagához a régebbi zárthelyi dolgozatok, a korábbi vizsgadolgozatok, vizsgakérdések, a próba-zárthelyi dolgozatok, a

gyakorlatok elmentett változata. Ezek mind segítenek abban, hogy a hallgatók differenciált módon tudjanak foglalkozni a tananyaggal, változatos lehetőségük legyen a gyakorlásra, kellően meg tudják ítélni azt, hogy tanulásuk mennyire eredményes. Az utóbbi különösen fontos a kognitív önszabályozás, a metakognició hatékony alkalmazása érdekében.
A curriculum modulok realizálása többcsatornás modellünkben az **oktató**, az E-Learning nevű **webportál** és a **helyi hálózat** kommunikatív tevékenységével történik. Az oktató szerepe adott esetben természetesen az ábrából tükröződőnél jóval összetettebb is lehet, hiszen sokszor, oktató társaival együtt, a curriculum modul egyes elemeit is tervezi és kidolgozza, megtartja a gyakorlatokat, konzultációs foglalkozásokat.. A kurzus ezek után a curriculum modul egyes egységeinek a konkrét tanulási módok során történő megvalósításából áll. Ezek a következők: az előadások, a gyakorlati (laboratóriumban megvalósuló) foglalkozások, a zárthelyi dolgozatokra való készülés (korábbi dolgozatok tanulmányozása, próba-zárthelyik kidolgozása, konzultációk), a zárthelyi dolgozatok megírása és értékelése, a vizsgákra való felkészülés (a tematika értelmezése, a készülés kiegészítő elemeként, korábbi vizsgák tanulmányozása, konzultációk), otthoni munka és a Maple klub foglalkozásai. Rendszerünk működtetése tehát több médium több csatornás alkalmazását jelenti. A rendszer harmonikus, összerendezett működését az instrumentális orkesztráció segítségével igyekszünk biztosítani. Ennek részleteiről a 9. 5. fejezetben lesz szó.

9. 4. A kurzusok mediális típusáról

A számítógépes alkalmazásoknak a matematikai kurzus felépítésében vállalt szerepére több tényező hat. Mindenekelőtt figyelembe kell vennünk, hogy a CAS oktatásban való alkalmazásának sikere nagymértékben függ a számítógépes-, tágabban **az informatikai írástudás** társadalmai gyakorlatától, **színvonalától**, a kurzus résztvevőinek ilyen irányú előképzettségétől, beállítódásától, motiváltságától. Az alkalmazás módjára ható tényezők közül emellett a legfontosabb a matematikai kurzusnak (kurzusoknak) a curriculumban betöltött szerepe. A műszaki főiskolákon a matematika az alapozó tárgyak közé tartozik. Oktatása során az elmélet és gyakorlat aránya, az alkalmazások szerepe ennek függvényében alakul. A fogalmak mély, a biztos alkalmazást lehetővé tevő elsajátítása elsőrendű feladat. A bizonyítások természetesen más, és mindenképp kisebb szerepet játszanak, mint például a természettudományi karok matematika képzésében. Viszont igen fontos a műszaki gyakorlatban alkalmazható eljárások, algoritmusok ismerete.
Karsai J. [34] a matematikai kurzusokat érintő számítógépes alkalmazások három fő típusát különbözteti meg:

- Elméleti matematikai kurzus. Ezek kivitelezése során a számítógépes alkalmazások demonstrációként segítik a fogalmak, módszerek megértését.

- Számítógép használatán alapuló kurzusok. A hallgatók megfelelő, előzetesen megszerzett, matematikai tudás birtokában speciális matematikai programcsomagok ill. általános célú matematikai programok (CAS) használatával ismerkednek meg. Megtanulják ezek alkalmazását az algoritmusok kivitelezésére.
- Egyéni munka. A hallgatók a képzés teljes tartama alatt gyakorlati problémákat oldanak meg számítógéppel segített eljárások és módszerek felhasználásával.

Nem vitatva a fenti tipizálás ésszerűségét, gyakorlatunkban mi ezektől eltérő variánst valósítunk meg. Modellünk a következő fő vonásokkal jellemezhető:

- A Matematika I. kurzus (Tananyag) során lényegében az előbb ismertetett első modell szerint járunk el. Az előadásokon demonstrációs céllal alkalmazzuk a Maple rendszert. A gyakorlatokon és minden más tevékenységi forma során ekkor még a hagyományos eszközöket alkalmazzuk. Egyelőre csak a hallgatók kis része számára, de megteremtettük a számítógépes algebrai rendszer alapjai elsajátításának lehetőségét. Célunk, hogy ez az informatika szak egésze számára elérhető legyen.
- A Matematika II. és a Matematika III. kurzus Tananyag során a hallgatók egy része a kurzus minden foglalkozási típusában használja a Maple CAS-t. A hallgatók a gyakorlati foglalkozások során, a házi feladatok, a zárthelyi dolgozatok megírása során, és a vizsgákon egyaránt használják a Maple rendszert. Természetesen a tábla-kréta (papír-ceruza) módszerek, tehát a mentális képet megalapozó, a mentális folyamatokkal szinkronban lévő ismeretfeldolgozási formák itt is a legtöbb esetben megelőzik a számítógépes alkalmazást.

9. 5. Az instrumentális orkesztráció többszintű alkalmazása

A tanulói instrumentális genezis külső irányítását, -az **instrumentális orkesztrációt**- a több médium alkalmazásával, több csatornás ismeretfeldolgozással megvalósított matematikai kurzus alapvető didaktikai segítő eszközének tartjuk, és több szinten alkalmazzuk.

a) **Instrumentális orkesztráció a gyakorlatokon folyó munka során** (22. ábra)

   A gyakorlatokon folyó munka generálása modellünkben L. Trouche (2003, [5]) által leírt sherpa-tanuló módszer módosított és általánosított módozatával történik. A második típusú orkesztráció (lásd 4. 7.) alkotó elemei a következők:

- Munka 20 fős csoportokban, két oktató egyidejű részvételével. Utóbbi döntő fontosságú a modell eredményessége szempontjából. Ennek részleteire az alábbiakban kitérünk.
- Számítógépes laboratóriumok hálózatba kötött személyi számítógépekkel. A laboratóriumokban kivetítő áll rendelkezésre.

- A számítógépes laboratóriumban, alaphelyzetben, a tanári számítógép képernyőtartalma. A Tight VNC rendszer segítségével a hálózatba kötött tanulói gépek bármelyikének képernyője kivetíthető. Lehetőség van arra is, hogy a tanár „tettestársként” a hallgatói munkalapok bármelyikébe beleírjon, valamint arra, hogy a különösen szép megoldásrészleteket, vagy a jellegzetes hibákat azonnal megismerhesse a csoport minden tagja. A sherpa szerepét játszó hallgató munkáját egy-egy feladat megoldásának erejéig láthatóvá tesszük a kivetítőn. Ez több szempontból jelentős. Motiváló erejű, segít feltárni a szintaktikai és szemantikai nehézségeket, azonnali kontrollt biztosít.

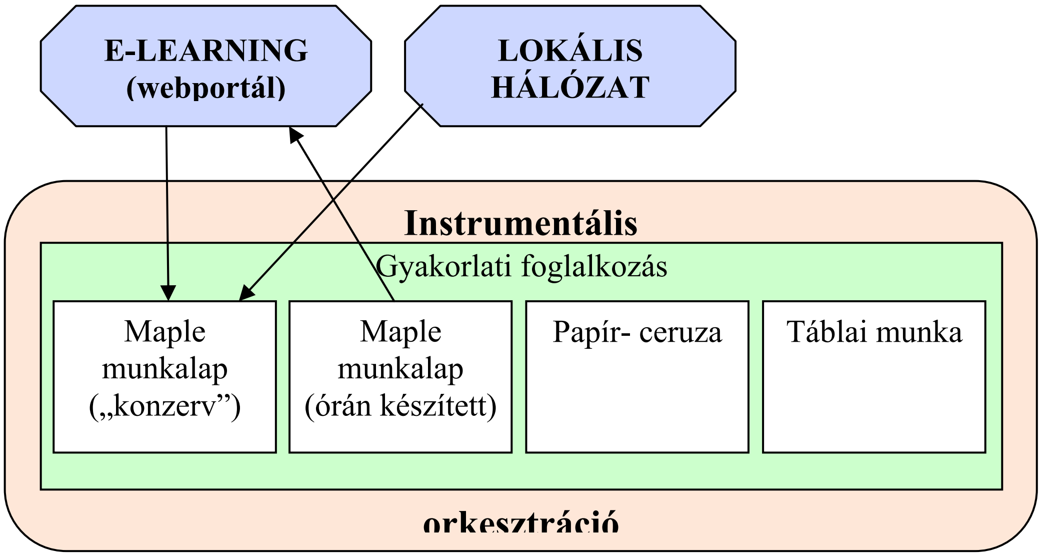
A fenti didaktikai konfiguráció alapján a következő munkafázisok kombinációit valósítottuk meg:

- A számítógép és a kivetítő kikapcsolt állapota mellett táblai magyarázat ill. önálló **papír-ceruzás munka**. Ez a fázis különösen jelentősnek mutatkozott az új fogalmak, eljárások mentális képének kialakítása céljából. Elhagyása, elnagyolt kivitelezése, tapasztalataink szerint a CAS alkalmazásának hatékonyságát döntően rontja.
- **Szigorúan irányított munka**. A hallgatói gépeken folyó munka, a kivetítő segítségével, szigorúan követi a tanári, vagy a kiszemelt tanulói gépen folyó munkát. Ebben a fázisban az instrumentális genezis korlátok közé szorítva, vezérelt módon megy végbe.
- A számítógép és a projektor is működik, és **szabadon szervezett munka** folyik. Ebben a szakaszban az instrumentációs folyamat relatíve kötetlenül halad előre. A kiszemelt tanulói, vagy a tanári gép kivetített tartalma biztosítja az ellenőrzést, a munka alapvető keretben tartását.
- Esetenként **csak a számítógép működik**, a projektort kikapcsoljuk, ilyenkor az insrtumentációs folyamat „gyenge” kontrollja valósul meg.

Az E-Learning rendszer igénybe vételével a következő módozatok váltak még lehetővé:

- A hallgatók az önállóan folyó munka eredményét az E-Learning megfelelő mappájába elmentik, ez a tanári kiértékelés és a későbbi tanulói önkontroll számára később rendelkezésre áll. Ugyanakkor a jellemző jó válaszokat, vagy karakterisztikus hibákat tartalmazó megoldásrészleteket a fázis végén kivetítjük. Így azonnali, több hallgató tevékenységét bemutató visszacsatolást tudunk megvalósítani. Tapasztalataink szerint ez a módszer a hallgatók körében tetszést aratott és didaktikailag hatékonynak bizonyult.
- A gyakorlatok kezdetén a korábban kitűzött feladatokkal kapcsolatos észrevételeket a hallgatók a saját, otthon elkészített, az E-Learning megfelelő mappájába mentett munkájukból vett idézetek kivetítésével illusztrálhatják.

- A gyakorlaton készített munkalapokat a hallgatók a gyakorlat végén elmentik, s ezek az E-Learning rendszeren számunkra későbbi elemzések elkészítéséhez rendelkezésre állnak.
- A tanári gépen folyó tevékenységet is rögzítjük, ezáltal a hallgatói munka a felkészülést segítő részletekkel, kommentárokkal egészül ki.



22. ábra. Instrumentális orkesztráció a gyakorlatokon

Amint már említettük, a CAS alkalmazásával szervezett gyakorlatok sikerének egyik döntő tényezője a hallgatói munka megfelelő irányítása, kontrollálása. Az instrumentális orkesztráció sikeres megvalósításához nagymértékben hozzájárul a két tanár együttes szereplése a gyakorlatokon. Míg az egyik oktató nagyobb részben a foglalkozás menetét, a tematikus előrehaladást irányítja, kollégája nagyobb figyelmet tud fordítani a hallgatók munkájára. Elsősorban ő veheti észre, ha a hallgatók valamelyike figyelmet érdemlő megoldásrészletet dolgoz ki, vagy jellemző hibát vét. Ezáltal a kivetített tartalom információértéke nagymértékben növelhető.

b) Instrumentális orkesztráció a curriculum szintjén

A curriculumot megvalósító különböző tananyagelemeknek a tanulási folyamatban betöltött szerepe, az ismeretek ezen egységekben való eloszlása, az egyes modulok együttes használatának módja a kurzus résztvevői számára általában nem triviálisan adott. Ellenkezőleg, a tanulási elemek közötti tartalmi kapcsolatok explicit módon történő feltárása bizonyíthatóan növeli a tanulás hatékonyságát. Még inkább így van ez az összetett eszközrendszert alkalmazó oktatás esetén. A tudásreprezentációs háló sűrűbb szövésűvé tétele, az egymástól olykor igen távolinak tűnő fogalmak közötti kapcsolatok létrehozása a CAS felhasználásával könnyebbé válhat, de igazán sikeres akkor lehet, ha ezeket a kapcsolatokat tudatosítjuk. Gyakorlatunkban ezt több módon is megvalósítjuk:

- A matematikai-, CAS- és a curriculum modulok kapcsolatrendszerének feltátásával: az E-Learning rendszer egyik szolgáltatása, az un, SysTeMat lehetővé teszi, hogy a kiválasztott matematikai modulhoz (részmodulhoz, tematikus egységhez) tartozó CAS munkalapokat (vagy más rendszerben írt anyagokat), valamint a szóban forgó matematikai témakört feldolgozó curriculum modulokat (előadás, gyakorlat, feladatcsoport, zárthelyi stb.) a felhasználó összegyűjtse" és az Internetről elmentse. Ezáltal struktúrát, bárhonnan elérhető ismeretrendszert nyújthatunk a hallgatóknak.
- CAS-munkalapok strukturált rendszerével: a különböző fejezetekben található tananyagelemekből készített munkalapsorozat az egyébként egymástól elkülönülten tárgyalt tudáselemekből összefüggő, új egységet képez.
- Hiperlinkek alkalmazásával: ezt a módszert főleg korábbi, s újra szükséges tudáselemekre való utalás esetén alkalmazzuk.

c) Instrumentális orkesztráció a kommunikációs csatornák szintjén.

A tanár verbális ismeretközlő tevékenysége és az elektronikus médiumok információsűrűsége egyaránt nyer, ha egységes rendszerré kapcsoljuk őket össze. Az E-Learning fórum- és hirdetés rovata ezt a célt szolgálja. Segítségével az egyébként is strukturált ismeretanyag áttekinthetőségét növelhetjük.

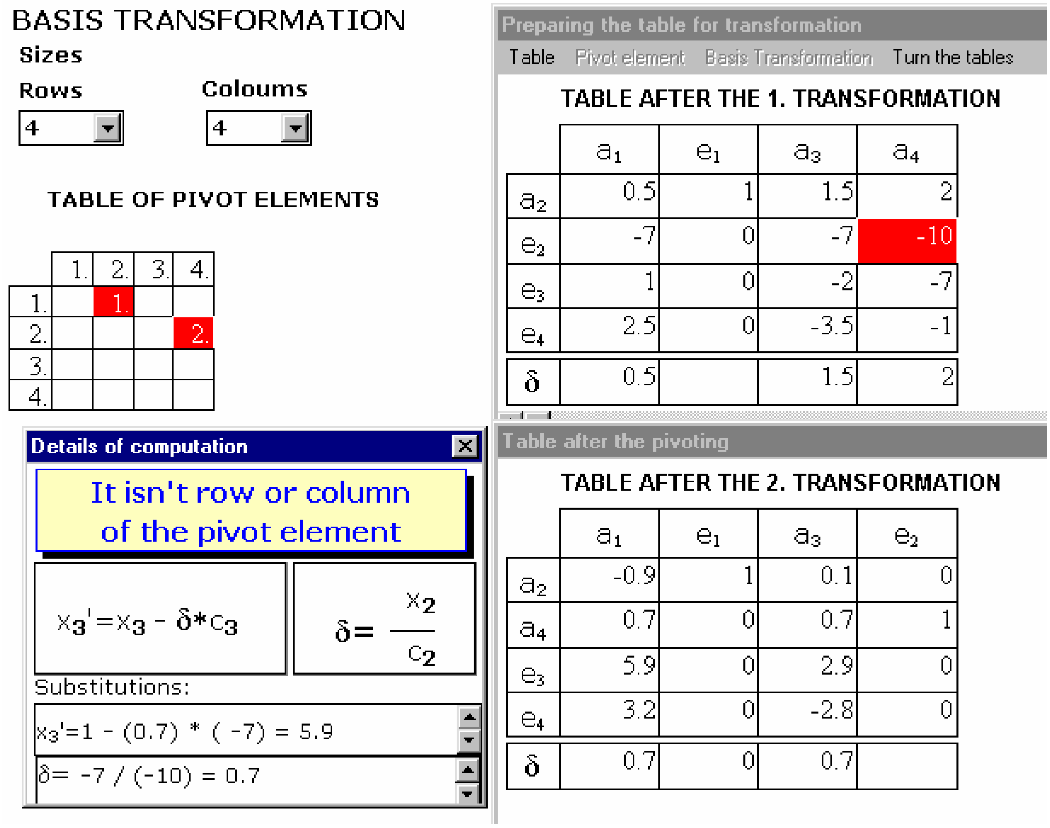
9. 6. A CAS és a szerzői rendszerek együttes használata

A gyakorlatokon folyó munka és a vizsgára való felkészülés segítésére a CAS rendszerrel együtt a ToolBook szerzői rendszer által generált interaktív feladatsorokat is használtunk. Tapasztalataink szerint a CAS és a szerzői rendszerek együttes használata számos didaktikai előnnyel jár. [36] A következő területeken szereztünk kedvező tapasztalatokat:

1. *Az algoritmusok szerkezetének megismerése, alapvető működtetési készség megszerzése*.

A szerzői rendszer alkalmazása lehetővé teszi, hogy az algoritmus mentális képe kialakuljon. A figyelem tehermentesítését úgy érhetjük el, hogy eközben az algoritmust teljes részletességgel hajtjuk végre. Ezáltal képesek leszünk az algoritmus teljes megragadására és a matematikai algoritmus CAS - reprezentációjának megírására. A Toolbook (vagy más) szerzői rendszer alkalmazásakor a háttérben fut az algoritmus, amelynek megírására a rendszerrel való gyakorlás képessé tesz bennünket.

A 23. ábra az elemi bázistranszformáció Toolbook segítségével történő gyakorlásáról készült pillanatfelvétel. A szerzői rendszer lehetővé teszi a folyamat egészének áttekintését, ellenőrzését. A generáló elem korábbi és jelenlegi választása, a részletszámítások egyaránt követhetőek. A megelőző lépések újra áttekinthetőek és módosíthatóak.



23. ábra

Az ilyen módon történő gyakorlással elérhetjük, hogy az eljárásról olyan mentális kép alakuljon ki, amely lehetővé teszi az összetett feladatokban való differenciált későbbi alkalmazást.

2. Dokumentált ellenőrzés, visszacsatolás.

Megtanulási események annál nagyobb valószínűséggel következnek be, minél kevesebb idő telik el a tanulási folyamat (pl. egy fejezet áttanulmányozása), a tanulási eredmény (pl. gyakorló feladatok megoldása, alkalmazások) és az elért eredmények visszajelzése között. (Búvári A., [37]) Másrészt a visszacsatolás didaktikai hatékonysága növelhető, ha változatos, vonzó formában történik. Mindkét szempont érvényesülését nagymértékben segítheti a CAS interaktív használatát lehetővé tevő, szerzői rendszer segítségével megvalósított visszacsatolás, értékelés, önértékelés.

Az általunk alkalmazott, Toolbook segítségével készített, ellenőrző feladatsorok a következő szempontoknak tesznek eleget:

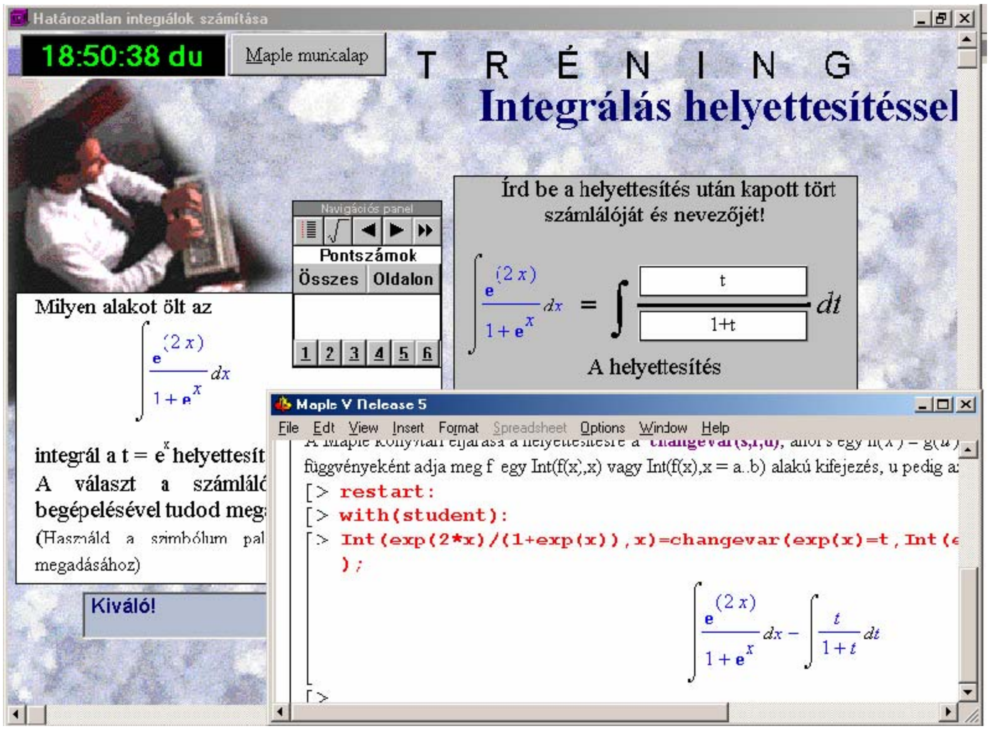
- a kérdések, feladatok sokrétűek;
- több analóg kérdéssor generálható;
- áttekinthető formátum;
- interaktív segítségkérésre van lehetőség;
- áttekinthető, dokumentálható, azonnali értékelés.

A szempontsor elemeinek megvalósítását a Toolbook mellett a **neuron plugin** segítségével létrehozott **logfile**-ok is hatékonyan segíthetik. Ezek segítségével a feladatsor megoldásának lépései, a segítségkérések, a megoldásra fordított idő egyaránt dokumentálható.
Az ilyen módon készített feladatsorokat két alapvető oktatási szituációban használtuk fel:

- a felkészülés segítésére
- az ellenőrzés (vizsgák) részeként.

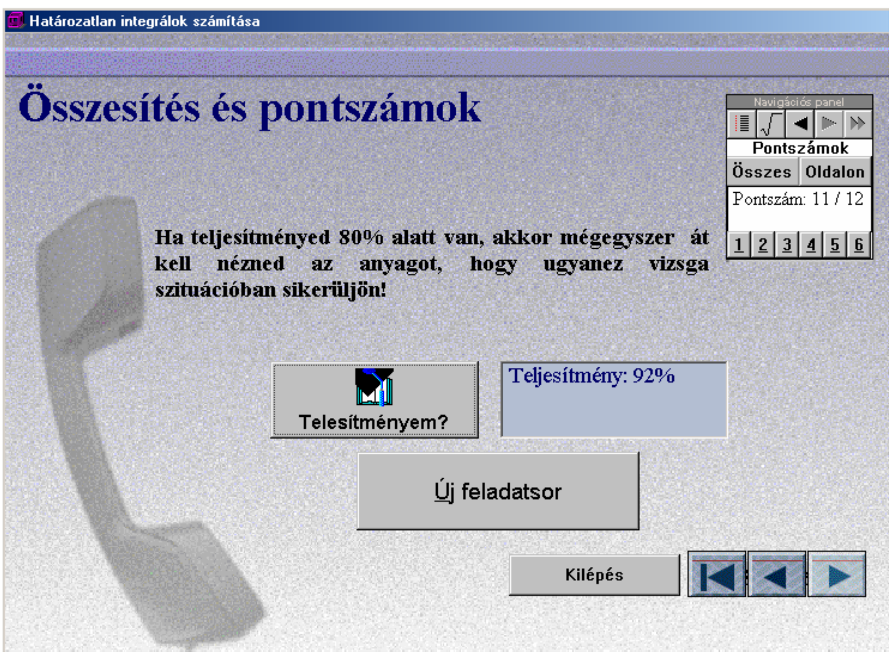
Az első esetben a feladatsorok megoldása során a válaszok javítását is megengedtük, míg erre az utóbbi esetben nyílván nem volt lehetőség.

A következőkben bemutatjuk a rendszer alkalmazását. A felkészülést segítő teszt alkalmazása a következő lépésekből áll:
1. *A teszt kiválasztása, bejelentkezés*.
Mivel a megoldás folyamatát dokumentáljuk, a felhasználó azonosítóját rögzítjük.
2. *A teszt megoldása.*
A teszt megoldása során lényeges szerepet szánunk a Maple alkalmazásának. Ez lehetőséget nyújt a kísérletezésre, a kapott eredmény ellenőrzésére. A választ röviden azonnal minősítjük, lehetőséget adva ezzel a javításra (24. ábra)



24. ábra

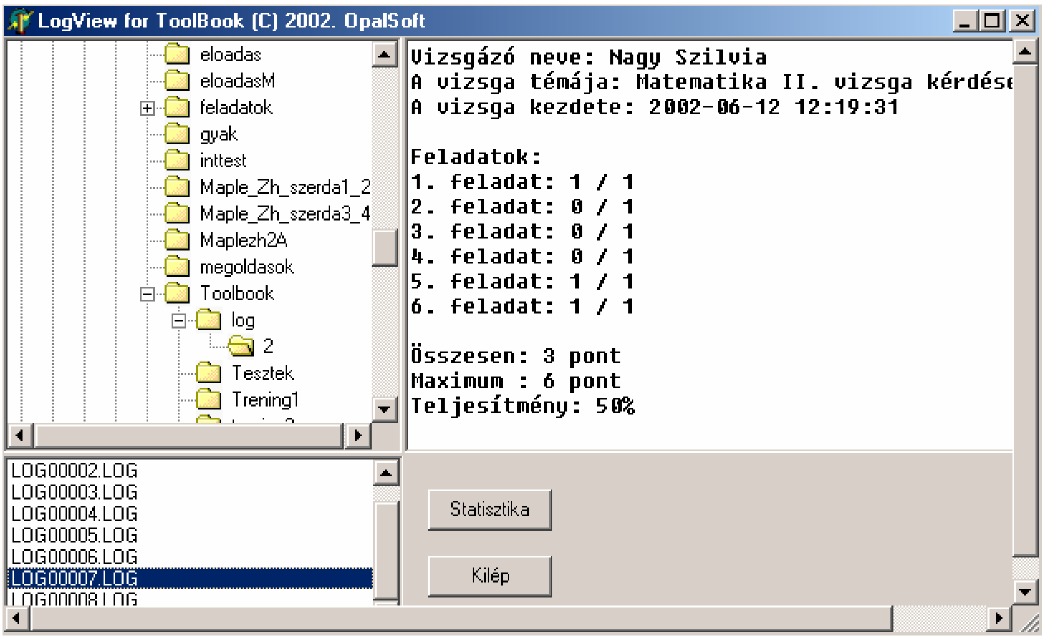
3. *Az eredmény megtekintése.* A teszt megoldása után a megoldó számára közöljük az elért pontszámot, és lehetőséget nyújtunk újabb teszt kitöltésére. (25. ábra)



25. ábra

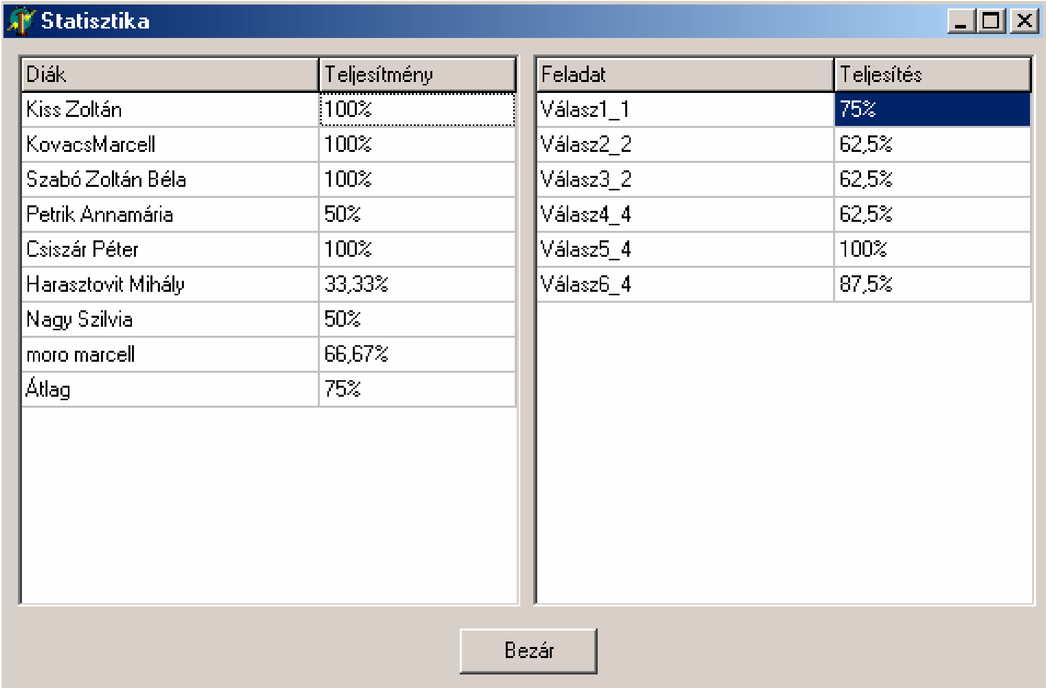
4. *A feladatsor megoldásáról log-file készül*. Ez tartalmazza mindazokat a navigációs lépéseket, amelyeket a tanuló a megoldás során végzett, és természetesen a részfeladatok megoldása során elért pontszámokat, valamint az összesített pontszámot. Azt is megtudhatjuk, hogy mennyi időt töltött el a hallgató az egyes feladatok megoldásával, megtekintette-e az útmutatásokat.

5. *A logwiev program segítségével megtekinthetjük a vizsgázók (feladatmegoldók teljesítményeit*. (26. ábra)



26. ábra

6. *A vizsgázók csoportjának teljesítményeiről statisztikát készítünk*. A vizsgázók egyénenkénti teljesítményét, és az egyes feladatok megoldásában elért teljesítmények átlagát is megjelenítjük. (27. ábra)



Diák	Teljesítmény
Kiss Zoltán	100%
KovacsMarcell	100%
Szabó Zoltán Béla	100%
Petrik Annamária	50%
Csiszár Péter	100%
Harasztovit Mihály	33,33%
Nagy Szilvia	50%
moro marcell	66,67%
Átlag	75%

Feladat	Teljesítés
Válasz1_1	75%
Válasz2_2	62,5%
Válasz3_2	62,5%
Válasz4_4	62,5%
Válasz5_4	100%
Válasz6_4	87,5%

27. ábra

9. 7. A tanítható tananyag változása

A számítógép-algebrai rendszernek az oktatásban való alkalmazása a tananyag feldolgozásának, terjedelmének, tartalmának egészére hat. Ha az okozott változásokat át akarjuk tekinteni, akkor az egymással interferáló hatásokkal kell számolnunk. A változások tettenérésének egyik színtere lehet az alkalmazott eszközrendszer hatása a tananyag elemeinek pragmatikus és episztemikus értékére. Célunk az összetett eszközrendszer- a CAS, esetenként a szerzői rendszerek, a hálózat- didaktikailag megtervezett, kontrollált használatával, hogy a pragmatikus és episztemikus érték olyan új egyensúlyát hozzuk létre, amely mind a két értékforma számára nyereséget jelent. Eközben a pragmatikus és episztemikus értéknek az adott szocio-kulturális környezet számára optimális arányát igyekszünk megtalálni. Tehát másként megy végbe a fogalomrendszer és egészében a matematikai ismeretrendszer kialakítása, például egy műszaki felsőoktatási intézményben, vagy egy TTK matematika tanár szakán. A CAS segítségével történő munka megfelelő hangszerelése (instrumentális orkesztráció) döntően segítheti a pragmatikus és episztemikus értékpáros optimális fejlesztését.

9. 7. 1. A pragmatikus és az episztemikus érték fejlesztésének néhány típusa oktatási gyakorlatunkban

- Egyes eljárások pragmatikus értéke a CAS megjelenésével látszólag csökken. Ilyen eljárás a Newton-féle érintő módszer is. A számítógépes algebrai rendszerek számos olyan numerikus, közelítő eljárással rendelkeznek, amelyek birtokában a Newton-módszer alkalmazása feleslegesnek tűnhet, tehát a módszert- gondolhatjuk-, azért tanítjuk, mert igen alkalmas az iteráció fogalmának bevezetésére, szemléltetésére. Kiderül azonban, hogy a CAS segítségével a feltételek gondos vizsgálata, az elért pontosság megítélése, a feltételek hiányos teljesülése esetén előálló szituációk elemzése révén nem csak az eljárás episztemikus értéke nő meg nagymértékben, hanem gyakorlati, pragmatikus értéke is növekszik. (Newton.mws) Másik jellemző példa lehet egyes integrálási eljárások esete. A parciális integrálás példáján mutatjuk be, hogy megfelelő motiváció esetén, az eljárás pragmatikus értéke nem hogy elvesznék, vagy csökkenne, hanem ellenkezőleg: a magasabb episztemikus érték megteremtésével pragmatikus nyereséget is elkönyvelhetünk. (parcint.mws)

- Bizonyos reprezentációkat, így például az eljárások rekurzív reprezentációit a CAS használata előtti időkben inkább szuggesztív erejük, hatékony szemléltető 'képességeik' miatt vettük igénybe. A rekurziók valódi *gyakorlatias, pragmatikus értéket a CAS alkalmazásával nyerhettek*. Segítségükkel, tehát azáltal, hogy az értékeket könnyedén kiszámíthatjuk, operatív értelemben a rekurzív reprezentációk a zárt formulák fölé nőttek. (rekurziok.mws)

- A CAS használata korábban –az oktatás keretei között– fel sem merülő problémák tárgyalhatóságának megteremtésével egyszerre jelent pragmatikus és episztemikus nyereséget. Ilyen probléma például a numerikus instabilitás. (numinst.mws)

- A fogalmak többoldalú feltárása, a többszörös reprezentáció egyértelmű episztemikus értéktöbbletet eredményezhet az új, összetett fogalmak bevezetésekor. A többváltozós függvény határértékének ilyen bemutatása lehet példa erre az esetre. (hatarert.mws)

- A CAS hajlékonyan alakítható strukturálható adatszerkezetei a matematikai tartalom generátoraivá válhatnak. Célszerű a sokszor előforduló és ilyenformán magas pragmatikus értékű lépéssorozatokat, mint önálló tananyag-elemeket is tudatosítani a tanulókban. Például szolgálhat erre a lineáris regresszió témaköre. (A témakör részletes kidolgozása a függelékben található)

9. 7. 2. A kurzusok tartalmi- terjedelmi változásai

A CAS és az alkalmazását segítő eszközrendszer hatását a tanítható tananyagra úgy is nyomon követhetjük, hogy **a tanítható tananyag tartalmi, terjedelmi változásai**ra vagyunk tekintettel. A változásokat a következő típusok figyelembe vételével figyeljük meg:

a) Az adott témakör (fejezet**) fogalomrendszere lényegében változatlan** maradt. Az ismeretrendszer mélyebb elsajátíthatóságát ebben az esetben elsősorban a reprezentációk számának növekedése, módjának változása segíti elő
b) Az adott témakör (fejezet) **tartalmilag bővült**, korábban nem alkalmazható eljárásokat, megoldási módokat tartalmaz.
c) **Korábban** az adott curriculum keretei között **nem tárgyalható témakör** került a tananyagba

Illusztrációképpen, a teljesség igénye nélkül, áttekintjük az általunk oktatott tananyag, a differenciál- és integrálszámítás alapjai, valamint a lineáris algebra alapjai témaköreit ebből a szempontból! Vegyük sorra átalakulásról tanúskodó változásokat!
A Matematika I. kurzus a függvényekre, sorozatokra vonatkozó alapismeretekkel és a differenciálhányados fogalmának bevezetésével foglalkozik. A kurzus során –eltekintve a fakultatív tárgyként Maple-vel foglalkozóktól- csak az előadásokon, szemléltetésre használtuk a CAS-t. A változások tehát itt az a) típusba tartoznak. A kidolgozott eljárások a dinamikus függvényszemlélet kialakítását, a többoldalú fogalomalkotás elősegítését szolgálják. A Matematika II. kurzus a differenciálszámítás alkalmazásait, a határozatlan- és a határozott integrál fogalmának kialakítását és az integrál néhány alkalmazását, a többváltozós függvények értelmezését, deriválását, valamint a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó alapismereteket tartalmazza. A túlságosan is gazdag ismeretrendszer elsajátítását lényegesen megkönnyíti, és hatékonyabbá teszi a CAS minden tanítási-tanulási elemre kiterjedő alkalmazása. A **differenciálszámítás alkalmazása** bővült az egyenletek közelítő megoldásának tárgyalásával. Részletesen tárgyaljuk a Newton-féle érintő módszert. A módszer tárgyalása során értelmezzük az iteráció fogalmát. Ez tehát b) típusú, jelentős pragmatikus- és episztemikus nyereséget hozó gyarapodás. **A határozatlan integrál** témakörének feldolgozása több területen eredményesebbé vált. A parciális- és a helyettesítéssel történő integráláshoz a Maple beépített eljárásokat tartalmaz. Ezek kísérletező alkalmazásával a hallgatók sok esetben olyan integrálásokat is el tudnak végezni, amelyet sem a rendszer nélkül, sem a rendszer megfelelő utasításával nem tudnak megoldani, vagy amelyekre a rendszer bonyolult, nehezen kezelhető megoldást ad. A racionális törtfüggvények integrálása sokszor az eljárás hosszadalmas volta miatt kézzel igen nehézkesen végezhető el. Ezt a nehézséget a CAS használata teljesen megszünteti, s egyúttal lehetővé teszi az algoritmus tökéletes áttekintését is, tehát a mentális kép kialakítása nem szenved csorbát. A **határozott integrál** közelítő módszerrel való kiszámítása korábban csak illusztratív jellegű volt, a CAS alkalmazásával teljes, a hibaanalízist is magában foglaló tárgyalást valósítunk meg. Ez tehát lényegében új fejezet beiktatását jelenti, tehát c) típusú változás. **A többváltozós függvények** tárgyalása igen sokat nyert a CAS bevetésével. A 3D-s grafikus

reprezentáció, a határérték többoldalú megközelítése a) típusú nyereségként könyvelhető el. A legkisebb négyzetek módszerének részletező tárgyalása regresszio.mws teljesen új modulnak számít, tehát igen jelentős c) típusú bővülést jelent. (Lásd a függeléket.) A témakör tárgyalása a függvényszemlélet differenciáltabbá tétele, az approximációs módszerek megismerése, a modellalkotás szempontjából egyaránt döntő változást, nagy nyereséget hozott.

A **differenciálegyenletek**kel általában mindössze 2-3 előadás és maximálisan ennyi gyakorlat keretében tudunk foglalkozni. Ez korábban lényegileg az alapfogalmak rövid bevezetésére és legalapvetőbb közönséges differenciálegyenletek megoldási algoritmusának ismertetésére és némi gyakorlására volt csupán elegendő. A CAS alkalmazása jelentős súlypont-áthelyeződést és tartalmi, fogalmi bővülést eredményezett. Tárgyalhatjuk az iránymező fogalmát, szóba hozhatjuk, ha csak néhány illusztráció erejéig is, a stabilitás fogalmát. Sor kerülhet a differenciálegyenletek numerikus megoldására, a különböző numerikus megoldások összevetésére.

A **lineáris algebra** elemeinek megismerésére mindössze 6-7 kétszer 45 perces előadás és ugyanennyi gyakorlat áll az informatika szak tantervében rendelkezésre. Ugyanakkor a témakör több szempontból is jelentős. Az előkerülő adatszerkezetek, eljárások az informatika-szak képzési anyagának elsajátítása során nélkülözhetetlenek, a feldolgozott modellek, pedig a gyakorlatilag is használható alkalmazásokat készítik elő. A mátrixaritmetika korábban igen sok és kézzel nehezen elvégezhető operatív tevékenységet igényelt. Ezeket, az eljárások mentális képének kialakítása után rábízhatjuk a számítógép algebrai rendszerre. A CAS alkalmazása lehetővé tette a szomszédsági mátrix, a termelésprogramozási feladat tárgyalásának tantervbe foglalását. Az elemi bázistranszformáció eljárását csak kisebb méretű feladatokon végezzük el néhányszor kézzel, illetve a ToolBook szerzői rendszer segítségével megírt interaktív program segítségével. Ezután az algoritmus Maple-kódú változata segítségével az operatív munka nyűgétől megszabadulva az algoritmus gyorsan, hatékonyan végrehajtható. Eközben teljes figyelmünket a tartalmai kérdésekre összpontosíthatjuk. A **lineáris programozás**, a **szimplex módszer** elemeinek tanulmányozása korábban egyetlen eset, a normálfeladat modelljének tárgyalására szorítkozott. Igaz, hogy a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt elméletileg ma sem lépünk túl ezen, de a CAS beépített eljárásai lehetővé teszik az általánosabb esetek bemutatását is. Ez mindenképpen motiváló erőt jelent, a módszer alaposabb megismerésének igényét ébresztheti fel.

9. 7. 3. A matematika műszaki tárgyakat alapozó jellegét érintő változások, kihívások

A matematika oktatásának a logikus gondolkodás, a modellalkotó készség fejlesztéséhez való hozzájárulása mellett fő funkciója a képzésben szereplő, többségében műszaki jellegű, tárgyak matematikai megalapozása. Olyan eszközrendszer kifejlesztéséhez kell a hallgatókat hozzásegítenünk, amely alkalmas arra, hogy különböző szintű és méretű, a matematika alkalmazását is igénylő, feladataikat hatékonyan megoldhassák. Ehhez a számítógépes algebrai rendszert a következő módokon használjuk, illetve használhatnánk föl:

- A matematikai kurzus során elsajátíttatjuk a hallgatókkal azokat a CAS eljárásokat, amelyek az **operatív tevékenységek** tetemes részét gyorsan és pontosan elvégzik (például a differenciálás, integrálás, mátrixaritmetika, nagy méretű egyenletrendszerek megoldása, numerikus- és függvénysorok előállítása) Ezek ismerete megkönnyíti a szaktárgyak eredményesebb elsajátítását, hisz a kézi számítás esetén sok időt igénylő részletszámítások a CAS okszerű, gyakorlott alkalmazásával innen gyorsan elvégezhetők. A mechanika, a jelek és rendszerek és más tárgyakkal kapcsolatban beszámoltak a hallgatók ilyen irányú, kognitív nyereséget eredményező, változásokról.
- A hallgatók az elméletileg részleteiben **megtanult ismeretkör bővítésé**hez tartozó problémákat is kezelni tudnak a CAS alkalmazásával. A matematikai kurzusok keretében például csak néhány differenciálegyenlet-típus megoldásának részletes megismerésére van mód. A CAS beépített eljárásait, mint black-box-okat használva, azonban a differenciálegyenletek sok típusa megoldható.
- Ha a jelenleginél több idő állna rendelkezésünkre, akkor a Maple nyelvű programok írásának alapjait is elsajátíthatnák a hallgatók. Ez komoly nyereség lenne, hisz elősegítené a **programozási ismeretek** szaktárgyi keretben történő mélyebb, összehasonlító látásmóddal is felvértezett, elsajátítását.
- Az időkeret növelésével rendszeressé válhatna a számítógép algebrai rendszer felhasználását igénylő szakdolgozatok, tudományos diákköri munkák készítésének segítése. Ilyen tevékenységre eddig csak esetlegesen került sor.

9. 8. Értékelés

9. 8. 1. Az értékelés problémái CAS környezetben

A CAS oktatásban való használata a teljes didaktikai eszközrendszer átgondolását szükségessé teszi. Talán az egyik legkritikusabb, legtöbb tennivalót adó terület az értékelés.

A CAS oktatásban való didaktikailag megalapozott használata természetszerűleg maga után vonja, hogy az értékelés minden olyan részében lehetővé kell tennünk használatát a tanulók számára, ahol ez a matematikai tartalom teljesebb, sokszínűbb kifejtése szempontjából kívánatos. Több alapvető problémával, megoldandó feladattal kell szembenéznünk. A felmerülő kérdésekre, érzésünk szerint, csak gondosan tervezett és kivitelezett vizsgálatok eredményeként, és nem végleges, de folyamatosan formálódó választ lehet adni. Talán érthető, ha saját gyakorlatunk ismertetése előtt kérdések, egyelőre válasz nélküli kérdések megfogalmazására vállalkozunk csupán ezen a területen.

- A CAS használata hatással van a CAS nélküli oktatási környezetben kitűzött feladatok, problémák nehézségi fokára. A problémák, feladatok egy részét könnyebbé teszi, másokat trivializál, és vannak olyan problémák is, amelyek nehézségi foka nem változik CAS környezetben.
    - **Kérdés:** Milyen módon lehet a CAS-nek az ilyen típusú problémák nehézségi fokára gyakorolt hatását mérni?

A CAS-nek a tradicionális oktatási környezetben megfogalmazott kérdések nehézségi fokára gyakorolt hatásával több szerző foglalkozott már eddig is az irodalomban. (P. Jones [38], V. Kokol-Voljc [39]). Macogain (2002) egyfajta CAS-indexet dolgozott ki.
A problémák pontértékét a szerint súlyozza, hogy milyen mértékben váltak könnyebbé (vagy maradtak azonos nehézségűek) a CAS felhasználásával történő megoldás során.

- A CAS olyan problémák felvetését, olyan feladatok megoldását is lehetővé teszi, amelyekkel korábban nem foglalkozhattunk. Sok esetben nem könnyű az adott probléma megoldásához szükséges matematikai- és a programozásbeli ismeretek arányát pontosan megadni. A CAS és általában a technológiai fejlődés felborítja az elméleti és a szélesebb értelemben vett technikai munka egyensúlyát, a közvetlenül megragadható és a közvetlenül nem megragadható fogalmak megismerésének korábbi dialektikus együttesét.
    - **Kérdés:** Milyen adekvát mérési eljárásokkal lehet az értékelésben az imént leírt változásokat nyomon követni?
- Az értékelési rendszert úgy kell kialakítanunk, hogy a fogalmi ismeretek elsajátításának szintjét, a problémamegoldó készséget és az operatív munkavégzés színvonalát egyaránt mérni tudjuk, és az értékelésben mindegyik terület megfelelő súllyal szerepeljen. A helyzetet bonyolítja, hogy az instrumentális technika, tehát az eszközhasználat segítségével végzett matematikai munka didaktikai megítélése nem kiforrott, szigorúbban szólva az eszközök fejlődéséhez képest elmaradott és végképp kevés a tapasztalatunk az instrumentalizált munkavégzés által generált, szükségeltetett új matematikai ismeretrendszerre vonatkozólag.
    - **Kérdés:** Miképpen lehet az értékelésben az instrumentalizált technika alkalmazása által a matematikai munkavégzés egyes elemeinek súlyára gyakorolt hatást figyelembe venni? Hogyan lehet a technikai munka episztemikus értékét mérni?

A matematikai készségek fejlesztése CAS környezetben korábbinál is tudatosabb pedagógiai munkát kíván. Általában nem könnyű feladat a CAS nélküli teljesítményszint és a CAS felhasználásával nyújtott eredmény didaktikailag hiteles értékarányát meghatározni. Alapvető mindenekelőtt megfelelő a taxonómiai látásmód, a differenciált értékelő rendszer kialakítása, használata.

Számunkra a **G. Smith** és társai által bevezetett**,** a Bloom-féle rendszer továbbfejlesztéseként tekinthető**, taxonómia** [40] jelent kiinduló pontot. Ez a taxonómiája egyébként a CAS felhasználásával oktatók között széleskörűen idézett és alkalmazott rendszer.
Smith az értékelés által tartalmazott tételeket három, növekvő kognitív értékű kategóriába sorolja (1. táblázat)

A csoport	**B csoport**	**C csoport**
ténytudás	információtranszfer	bizonyítás, interpretáció
megértés	alkalmazás új szituációkban	implikáció, sejtés és összehasonlítás
az eljárások rutinszerű használata		becslés, kiértékelés

1. táblázat

Galbraith és Haines szintén háromfokozatú skálát használnak. Mechanikus, interpretatív és konstruktív kategóriák mentén sorolják osztályokba a feladatmegoldás által megkövetelt készségeket.
A Smith-féle taxonómiát elemezve megállapíthatjuk, hogy feltétlenül azt kell célul kitűznünk, hogy a B ill. a C csoportba tartozó tudáselemek számát növeljük.

9. 8. 2. Értékelési gyakorlatunk szempontrendszere

Intézményünkben a tanulmányi munka értékelése a kreditrendszer alapján történik. A matematikai kurzusokon az érdemjegy kialakításánál mind a gyakorlatokon nyújtott teljesítményt, mind a vizsgán elért eredményt figyelembe vesszük. A CAS felhasználásával történő matematikaoktatásban számunkra az értékelés fő szempontjai a következők:

- Az értékelésnél arra törekszünk, hogy az a lehető legnagyobb arányban a matematikai ismeretelsajátítás mértékét tükrözze vissza. Tehát lehetőség szerint minimalizáljuk a pusztán technikai ügyességgel megszerezhető pontok értékét.
- Lehetőséget biztosítunk arra, hogy a hallgatók választhassanak a hagyományos eszközökkel, és a technikai eszközök, tehát alapvetően a CAS igénybe vételével történő teljesítés között.

- Az értékelés minden fázisában (zárthelyi dolgozatok, önállóan kidolgozandó feladatok, vizsgák) szerepeltetünk olyan problémákat is, amelyek feldolgozása a CAS igénybe vételével hatékonyabban mehet végbe és olyanokat is, amelyeket a CAS alkalmazása nélkül kell a hallgatóknak kidolgozniuk. Ugyanis csak ilyen módon érhető el az, hogy ne csökkenjen lényegesen a fogalmi megismerés, az elméleti ismeretek megtanulásának motivációja.
- A CAS munkalapok javításánál a matematikai hiányosságokra történő utalások mellett a programtechnikai, szintaktikai hibákra, hiányosságokra is kitérünk. Ez utóbbi már csak azért is lényeges, hogy az értékelés minél nagyobb arányban a matematikai ismeretelsajátítás eredményességét mérhesse.
- Arra törekszünk, hogy minél több formában adhassanak számot a hallgatók megszerzett tudásukról. Így például önállóan kidolgozandó feladatokat is adunk. Ezek átfogóbb, alapos elmélyülést igénylő problémák is lehetnek.

9. 8. 3. Az értékelés tárgyát képező dokumentumokról, tevékenységről

Oktatási gyakorlatunkban a hallgatói munka értékelésének három fő összetevője van: a beadandó ill. beadható feladatok, zárthelyi dolgozatok és a vizsgák. Mindhárom összetevő több variánsát kipróbáltuk a CAS felhasználásának kezdete óta is.

Beadandó-beadható feladatok

A beadandó-beadható feladatok kitűzésével több célt igyekszünk elérni. Mindenekelőtt ezek kidolgozása időben nincs korlátozva, tehát a lassabban, de esetleg alaposabban is dolgozó hallgatók számára is kedvező a velük való foglalkozás. Másodszor mód nyílik összetettebb, többoldalú problémák kitűzésére is. A harmadik szempont az, hogy várakozásunk szerint járulékos motivációt jelentenek a CAS-szel való foglalkozás és tágabban a matematikatanulás számára.
A *beadható feladatok* hallgatói feladatmegoldó verseny alapjául szolgáltak. A versenyben jelentős teljesítményt nyújtók teljesítményük színvonalának megfelelően a vizsga, vagy annak egy része alól felmentést kapnak.
A *beadandó feladatokat* a soron lévő témakör lezárását követően kell beadni. Ezek személyre szóló feladatok, kidolgozásuk során a hallgatók konzultációs lehetőséget kapnak. A hallgatói teljesítményekre gyakorolt hatásukat a vizsgálati eredményekről szóló 11. fejezetben elemezzük. A függelékben mintákat helyeztünk el mind a két feladattípusból.

Zárthelyi dolgozatok

A CAS használatával tanulók zárthelyi dolgozataival kapcsolatosan két módozatot is kipróbáltunk.

- A hallgatók megírják a CAS-t nem használókkal együtt a teljes dolgozatot, majd a számítógépes laboratóriumban a számukra külön összeállított részdolgozatot. Ez utóbbi főként olyan feladatokat tartalmaz, amelyek megoldása a CAS igénybe vétele nélkül nehézkesebb, vagy az operatív tevékenység nagy súlya miatt, figyelembe véve az idő-korlátot, nem lehetséges. A CAS-sel megírt dolgozat a teljes dolgozat egy részét helyettesítheti. Minden hallgató esetében, a számára kedvezőbb eredményt vesszük figyelembe.
- A CAS felhasználásával tanuló hallgatók dolgozatának első része azonos a többiekével, a második rész attól eltérő. Az első rész olyan feladatokból áll, amelyek megoldásánál a CAS alkalmazása nem jelentene előnyt. Ezek fogalmakra vonatkozó kérdések, amelyek elméleti megfontolásokat igényelnek. A második részben a CAS-t használók feladatai nagyobb mértékű operatív tevékenységet igénylők, esetenként olyan anyagra vonatkozóak, amelyeket a CAS alkalmazása nélkül nem tudunk feldolgozni.

A második változatot az utóbbi időben azzal a változtatással is kipróbáltuk, hogy a zárthelyin nyújtott teljesítmény mellett az adott téma értékelésébe a beadandó feladatok megoldása során elért eredményt is beszámítottuk

A két változat között az eredményesség szempontjából nem mutatható ki szignifikáns különbség. A beadandó feladatok elkészítésére és értékelésére fordított sok munka ugyan csak nagyon kis mértékű teljesítménynövekedést mutatott, mégis elmondható, hogy nem volt hatástalan, és a munkamorálra kedvezően hatott.

A zárthelyi dolgozatokra való felkészülést néhány éve próba zárthelyi dolgozatok kiadásával segítjük. Ezek előzetes önértékelésre és célirányos felkészülésre adnak lehetőséget. Ennek a segítségnek a hallgatói fogadtatása igen pozitív.

Vizsgák

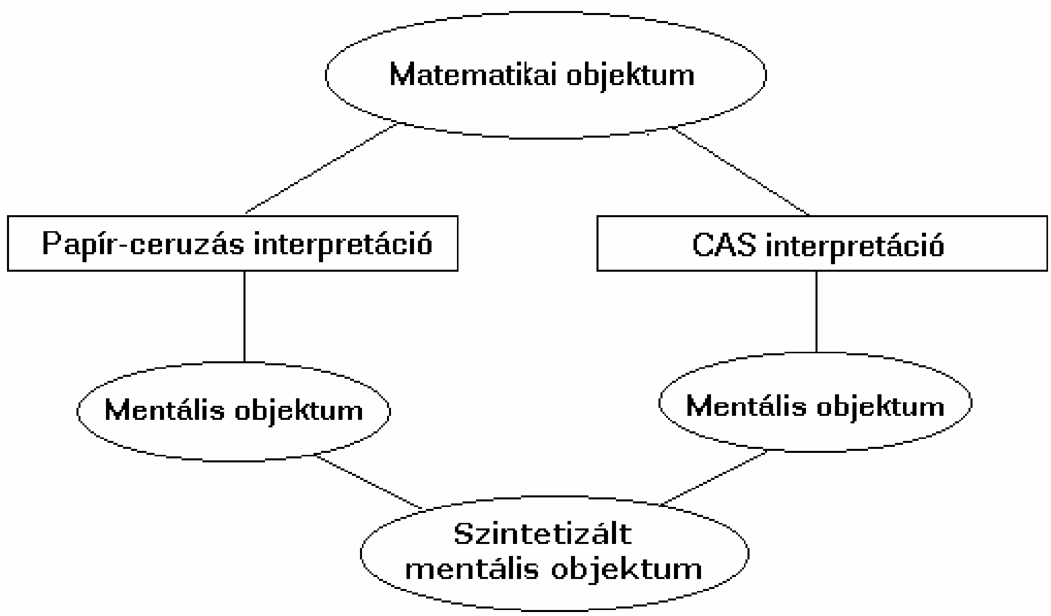
A vizsgák szervezésénél lényegében a zárthelyiknél leírt modellek szerint jártunk el. A vizsgákra való felkészülést a tematika közreadása mellett azzal is igyekszünk segíteni, hogy a hálózaton elérhetővé tesszük a megelőző évek számos vizsgadolgozatát, némelyiket a megoldással és a pontozással együtt. A vizsgakérdéseket úgy állítjuk össze, hogy a CAS nélkül és a CAS használatával megoldandó rész azonos súllyal szerepeljen. A dolgozatok összeállatásánál emellett igyekszünk érvényesíteni a Smith-féle taxonómiában is megfogalmazott elvet: szerepeljen a lehetőség mértékéig mindhárom szintű (A, B, C) feladat, s a képzés előre haladtával az arány tolódjék el a magasabb szintű (B, C) típusú kérdések irányába. (Példa a függelékben, 1. zárthelyi dolgozat)

10. Nehézségek, problémák, akadályok

A fejezet címét alkotó három szó is jelzi, hogy többféle megközelítésben vizsgálhatók és vizsgálandók azok a csak részben a didaktika tárgykörébe sorolható tényezők, jelenségek, amelyek a CAS-nek a matematikaoktatásba történő integrálása során, megoldandó feladatot, kezelendő problémát jelentenek. Mindenekelőtt, vállalva a teljességre nem feltétlenül törekvő osztályozás esetét is, három fő csoportba sorolhatjuk a korlátozó tényezőket:

- **Társadalmi tényezők**: Az oktatásba belépő hallgatók előképzettsége, munkamorálja, célorientációja. Ez a tényezőcsoport lassan változtatható, s bár sok nehézség éppen az itt fellépő negatív jelenségekre vezethető vissza, kezelésük túlmutat az adott kurzus, s általában egy-egy adott intézmény keretén.
- **Technikai, anyagi tényezők:** Ezek jelentősen korlátozták tevékenységünket. A Maple újabb verzióinak beszerzése több éves küzdelem ellenére sem volt lehetséges. Ez többszörösen is feszültségek forrása volt és ma is az. Egyrészt nem tudjuk az oktatásban az újabb verziók nyújtotta lehetőségeket (Maplet-ek, tutoráló funkció) alkalmazni, másrészt a régebbi verziók az újabb operációs rendszerek némelyikével ütköznek. Emiatt sok esetben a hallgatók otthon az újabb, az iskolában a régebbi változattal dolgoznak, ami konverziós problémákat okoz. Részleteiben ezzel a problémakörrel sem foglalkozunk, mert az ebben a dimenzióban elénk kerülő akadályok leküzdésére szolgáló eszközök nincsenek a birtokukban
- **A számítógép-algebrai rendszer természetéből adódó nehézségek, akadályok**. A saját gyakorlatunkban is fellépő problémák elemzését összekötjük a M. Artigue [41] által leírt, több átfogó kutatási project során megfigyelt, didaktikai jelenségek taglalásával. Artigue az insrumentalizációs folyamat során fellépő, a folyamat komplexitására jellemző, és a problémák gyökerét alkotó didaktikai jelenségeket gyűjtötte csokorba. Ezeket két csoportba sorolja. Az **első csoportba** a **számítógép alapú ismeretátvitelhez** kapcsolódó jelenségek tartoznak:
    a. *A pszeudo-traszparencia jelensége* az írásos és a számítógép képernyőjén megjelenő információk közötti, az érzékelés számára sokszor rendkívül nehezen áthatolható, szakadékra vonatkozik.
    b. *A kettős referencia jelensége* a problémák kettős- a papír-ceruzás és a számítógépes –környezetben történő reprezentációjából származik.

    A két egymáshoz kapcsolódó jelenség gyakorlatunkban is sűrűn jelentkező, és sokféle arcot öltő probléma forrása. A nehézséget az jelenti, hogy a többféle mediális eszköz által indukált mentális objektum szintézise, tehát a sokszínű, többrétegű, de egyetlen objektum létrejötte nem feltétlenül megy végbe. (28. ábra)



28. ábra

Vizsgálataink szerint a tudati szintézis folyamatát, tehát a szintetizált mentális objektum létrejöttét, a következők segíthetik elő:

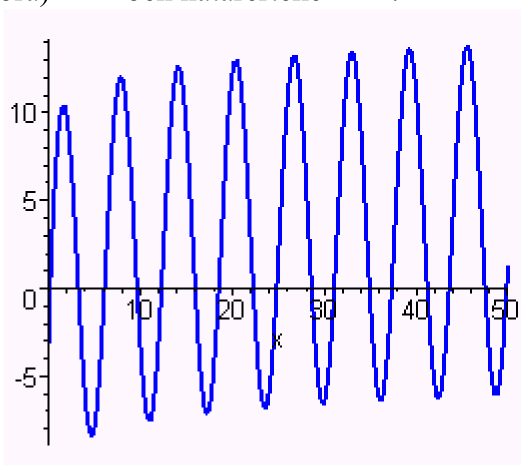
- *Több reprezentáció alkalmazása.* Peirce szerint a perspektivikus reprezentációk sorozata hivatott az aperspektivikus objektum lehető legjobb megközelítésére. (Lásd 4.1). Az adott matematikai toposz, jelenség több reprezentációval történő megjelenítése azonban csak akkor vezet valóban eredményre, ha tudatos tanári munkával segítjük a reprezentációk értelmezését, és könnyítjük meg a reprezentációk közötti váltást. Maróti [42] megfogalmazásában biztosítanunk kell a reprezentációk közötti átjárhatóságot. (Lásd még 8. 1. 4.)
- *A kognitív folyamatok törvényszerűségeinek figyelembe vétele.* A reprezentációk bemutatásánál tekintettel kell lennünk az agyi folyamatok sajátszerűségére. Tehát ügyelni kell arra, hogy a CAS „minden túl gyorsan készen van” effektusát csökkentsük. Tehát az elsődleges interpretáció mindig igazodjék gondolati folyamatok, a felfogás sebességéhez! Miután az adott ismeretelemnek a tudásreprezentációs hálóba való elsődleges beágyazódása megtörtént, már bátrabban élhetünk az egyes részleteket kiemelő, míg másokat eltakaró, tömörítő reprezentációkkal.
- *A modularizáció okszerű alkalmazása.* A pszeudotranszparencia ill. a transzparencia hiányának kezelését a modularizáció kérdésének megfelelő kezelésétől várhatjuk. Minden olyan esetben, amikor az adott eljárás, az adott modulba sűrített matematikai tartalom részletes ismerete a curriculumban később szereplő ismeretek feldolgozásához szükséges, a white box /black box típusú modularizációt kell alkalmaznunk.

- *A jelölésekre fordított fokozott figyelem.* A jelölési rendszerekben, a szimbólumok szintaktikájában mutatkozó eltérés tudatosítása segíthet abban, hogy a különböző jelölések használata ne lassítsa lényegesen a gondolkodási folyamatot, s a jel hatékonyan tölthesse be a Peirce által megfogalmazott funkcióját.

Az iméntiek figyelembe vételével elgondolásunk szerint a különböző médiumok által generált reprezentációk interferenciája révén reális esély nyílik az elkülönült mentális objektumok szintézisére, tehát a sokszínű, többrétegű, de egyetlen objektum létrejöttére.

A második csoportba Artigue **a tanulók adaptációs folyamatához társítható** jelenségeket sorolta.

a. *A perceptív adaptáció jelensége* a számítógépes grafikus megjelenítés lehetőségeihez kapcsolódik. A jelenség szemléltetésére Artigue Guin és Trouche [43] vizsgálataiból idézi a következő példát.
   Igaz-e a következő állítás: Az $f(x) = \ln(x) + 10\sin(x)$ függvény (29. ábra) $+\infty$ -ben határértéke $+\infty$?



29. ábra

   A grafikus kalkulátorral dolgozó tanulók 25%-a válaszolt nemmel, míg a kalkulátort nem használóknak csupán 5%-a.

b. *A „halászó” viselkedés.* A hallgatók jelentős része a CAS utasítások, eljárások könnyű elérhetőségére számítva nem fordít különösebb gondot e jelenségek valódi megismerésére, a tevékenység megtervezésére. Ellenőrzés nélküli, irányítatlan próbálkozások sorozata jellemzi ezt a munkastílust.

c. *Az automatikus előállítás érzetének jelensége.* Azon a hiedelmen alapszik, hogy elég csupán bevinni a számítógépbe az adatokat, és a megoldás automatikusan adódik.

d. *A lokalizált hajlíthatatlanság jelensége* a szemiotikus regiszter váltásának nehézségéhez kötődik. A hallgatók igen nehezen tudnak a különböző CAS funkciók egyikéről egy másikra áttérni, ezeket nehézkesen tudják munkafolyamatba szervezni.

Ezekkel a nehézségekkel mi is találkoztunk oktatási gyakorlatunk során. Az ebbe a csoportba tartozó nehézségek kezelésére, akadályok leküzdésére, hasonlóan az előző csoportba tartozó jelenségekhez generális eszközként

- *A tanulói instrumentális genezis külső, tanári irányítása* mutatkozik a leghatékonyabb didaktikai eszköznek. Erre vonatkozóan, az irodalommal (D. Guin & L. Trouce [43], M. Artigue [2], Trouche[5]) egybevágó, bár kezdeti, kedvező tapasztalatokról tudunk beszámolni. A két tanár által tartott laboratóriumi gyakorlat növelte ennek hatékonyságát. A két tanár egyike a munkafolyamat egészének irányítását, a különböző irányítási módok váltogatását végzi elsősorban, míg kollégája elsősorban a hallgatói tevékenység részleteit követi nyomon, s ez által biztosítja az azonnali visszacsatolást. Így lehetőség nyílik a kivetítő alkalmazásával a figyelmet érdemlő szép megoldásrészletek bemutatására és a hibák kijavítására.
- A perceptív adaptáció jelensége nehezen kezelhető. Bizonyos eredményeket a több reprezentáció egyidejű alkalmazásával sikerült elérnünk. Beidegzett és belső motiváltságú gyakorlattá kellene tennünk, hogy a hallgatók az adott reprezentáció segítségével nyert eredményt más reprezentációval ellenőrizzék. Ezt igyekeztük rendszeresen megkövetelni, de az ilyen igény belsővé válását nem sikerült még elérnünk.
- A „halászó” viselkedés, tehát a tervezetlen, véletlenszerű próbálgatások segítségével operáló CAS használat csökkenését elérendő a főbb tevékenységekre vonatkozó terv készítését szorgalmazzuk, igyekszünk a spontaneitás megőrzése mellett rövidebb kísérletező munkafázisokat definiálni, ezek rendszerének irányított alkalmazásával. Komoly sikereket ezen a téren csak a CAS megnövelt időkeretben történő alkalmazása esetén várhatunk.
- Az automatikus előállítással kapcsolatos téves hiedelmek feloldását elsősorban olyan feladatok kitűzésével próbáljuk elérni, amelyeket a Maple önállóan, felhasználói beavatkozás nélkül vagy nem tud megoldani, vagy a kapott eredmény „emberi fogyasztásra” alkalmatlan. Ilyenek például egyes integrálási feladatok (parciális integrálás, helyettesítés módszerével megoldható feladatok)
- A különböző CAS-funkciók hajlékony használatának elősegítésére, a szemiotikus regiszter váltásának könnyebbé tételére igazi megoldást az jelentene, ha sikerülne elérnünk, hogy a CAS a matematikai tevékenység állandó elemévé váljon. Tehát szükség lenne bevezető kurzusra. Általánossá kellene tenni a kitűzött feladatok rendszerét, és nem utolsó sorban, a szaktárgyakban való alkalmazást is motiváltabbá kéne tennünk

A hallgatói megismerés, CAS-használat melletti eredményes tanulás akadályainak több projekt eredményén nyugvó összefoglaló elemzését adja P. Drivers [44]. Az általa megfigyelt és leírt akadályok közül több, helyenként a mi gyakorlatunkban is tetten érhető. Ezek, helyenként módosult esetei, a következők:

- *A CAS objektumok készség szintű alkalmazásának problematikája*. Az egyik legnagyobb problémát a kifejezés és a függvény, mint CAS objektum, közti különbségnek a megértése, és ezen objektumok okszerű használata jelenti. A beépített állandók helytelen kezelése is igen sok hibát okoz. A CAS rendszerek az **e** számot, s ez a nagy pontosságú számítások végezhetőségének alapja, eljárással generálják. A hallgatók ehhez igen nehezen szoktathatók hozzá.
- *A különbség a CAS által nyújtott és a hallgatók által egyszerűnek tartott reprezentációk között*. A kifejezések átalakítása igen összetett probléma. Nehezen definiálható az egyszerűség fogalma. Bár a Maple és más rendszerek igen hatékony eszközökkel rendelkeznek a kifejezések átalakítására, a kapott eredmény nagyon sokszor eltér a várttól. Csak a kézi- és a gépi munkavégzés rugalmas kombinációja segíthet az ilyen jellegű nehézségek leküzdésében.
- *A kifejezések fogalmának leszűkített, statikus értelmezéséből a*dódó akadályok, problémák. Több szerző rámutat a kifejezések kettős, proceduális és strukturális, szemléletének szükségességére (Sfard [45]; Tall & Thomas [46]; Tall & al. [47]). A kifejezések e kettős természetének hajlékony kezelése rendkívül fontos algebrai készség. A hallgatók jelentős hányada a kifejezéseket csupán a kalkulációs folyamat leírásának eszközeként tekinti. Nem ismeri fel a kifejezések, mint kompakt egység helyettesíthetőségét, mozgatható voltát
- A *CAS alkalmazhatóságnak*, adott probléma kezelésére való bevethetőségének megítélésében mutatkozó hiányosságok.
- *A CAS black-box karakteréből adódó nehézségek*. A hallgatók sokszor kiszolgáltatottságot éreznek a CAS-szel kapcsolatban, hisz nem tudják eldönteni, hogy valóban korrekt eredményhez jutottak-e. A többféle eszközzel történő szimultán problémamegoldás, a modularizáció megfelelő kezelése enyhítheti ezt az érzetet. Törekednünk kell arra, hogy lehetőleg minél több olyan eljárást használjunk, amelynek működésmódja legalább a lényegi elemeket tekintve ismert a hallgatók számára. Minél több olyan módszert ismerjenek meg a hallgatók, amelyekkel ellenőrizhetik munkájukat.
- *A CAS-output interpretációjának nehézsége*. A számítógép-algebrai rendszer, de a kézzel kapott eredmény interpretációja sem egyszerű feladat. Sok esetben ez komoly transzformációs tevékenységet igényel. A matematikai eljárás eredményét a kitűzött probléma megoldásának szemszögéből kell értékelni. Kezelni kell a technikai és a fogalmi megközelítés közti relációt. Ráadásul a CAS output megszokottól eltérő jellege is nehézségek forrása. A hallgatók, visszatérő tapasztalatunk szerint általában nem érzik szükségesnek a kapott eredmény szöveges

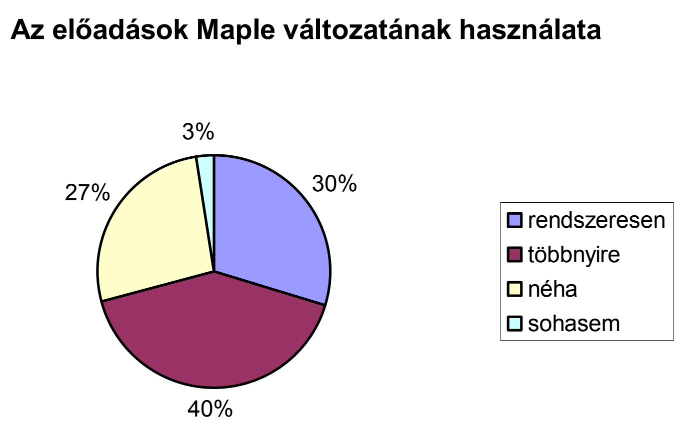
megfogalmazását, sok esetben nem is képesek erre megfelelő színvonalon. Ez utóbbi hiányosság azonban már mélyen gyökeredző okokra vezethető vissza, elemzése túlnyúlik az értekezés tárgyán.

Áttekintve a főbb akadályokat, nehézségeket, még egy fontos megjegyzés kívánkozik ide. A CAS használata során felmerülő akadályok, nehézségek elemzése azért is nagyon fontos, mert csak ennek révén tárhatjuk fel a CAS, mint technikai eszköz valódi képességeit. A fellépő problémák sokszor a CAS nélküli környezetben is jelentkeznek, de nem artikulálódnak kellően, a háttérben maradnak. A számfogalom terén, a számok interpretációjánál, a numerikus és algebrai formátumú eredmények adekvát módon való kezelésénél például sok korábban is létező problémára éppen a CAS bevetésével derült fény.

11. Vizsgálati eredmények

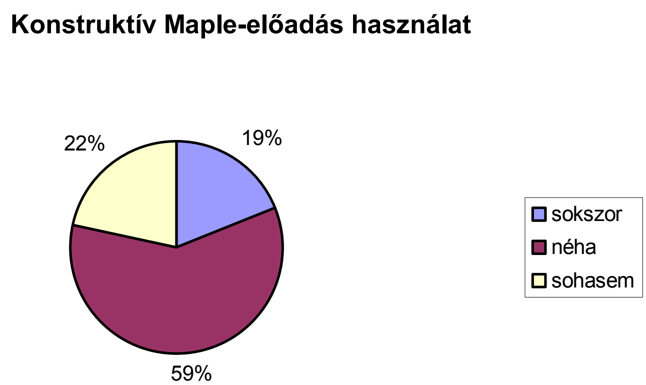
11. 1. A tanítási-tanulási folyamat kérdőíves hallgatói értékelése

A Maple használata mellett kivitelezett matematikai kurzusok végén 3 alkalommal kérdőíves felmérést végeztünk. (Függelék: Kérdőív a Maple használatáról) 1999-ben a Matematika 3. kurzus befejezése után, a szigorlat előtt, 2001-ben és 2002-ben a Matematika 2. kurzus befejezése után. A kérdőíveket rendre 56, 49, 56 hallgató töltötte ki. Az 1999-es felmérés azokra a hallgatókra is kiterjedt, akik csak az előadásokon találkoztak a Maple rendszerrel, a másik két felmérésben csak azok vettek részt, akik a gyakorlatokon is használták a rendszert.
A hallgatók túlnyomó többsége (kb. 90%-a) – a kérdőívek tanulsága szerint – a Főiskolán kívül is rendelkezik Internet hozzáféréssel, s így a kurzus anyagát folyamatosan eléri. Ez a tény is aláhúzza az időközben létesített E-learning Internetes portál jelentőségét.
A kérdések közül három az előadások és Maple használat kapcsolatára vonatkozott. Az előadások Maple változatát a hallgatók nagyobb része használta otthoni munkája során. A három felmérés összesített adatai alapján a hallgatók 70%-a általában használta otthoni munkája során az előadások Maple változatát.(30. ábra)



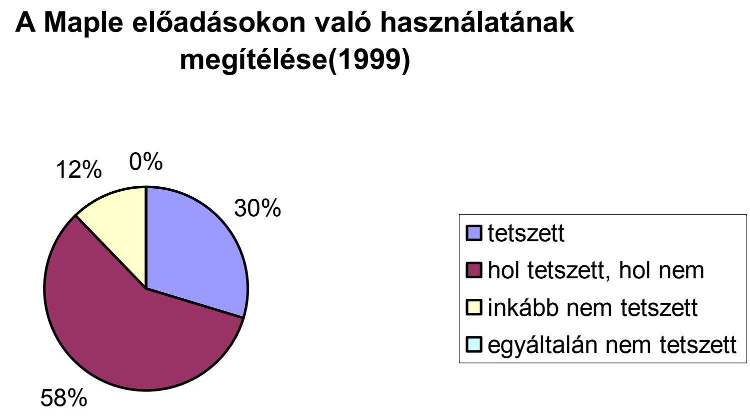
30. ábra

Kérdést tettünk föl a használat módjára vonatkozólag is. A Maple munkalapokkal akkor hasznosak igazán, ha a felhasználók nem statikus ismerethordozóként kezelik azokat. A paraméterek változtatgatásával, a kidolgozotthoz hasonló feladat elvégzésével, a grafikus ábrázolás különböző módjainak kipróbálásával válnak a munkalapok igazán hatékonyakká. A kérdést a következőképpen tettük föl: Használta-e úgy az előadás Maple változatát úgy, hogy a benne szereplő utasításokat változtatgatta? Az összesített értékelés ezúttal nem tartalmazza azokat a hallgatókat, akiknek a gyakorlatait Maple használata nélkül tartottuk. (31. ábra)



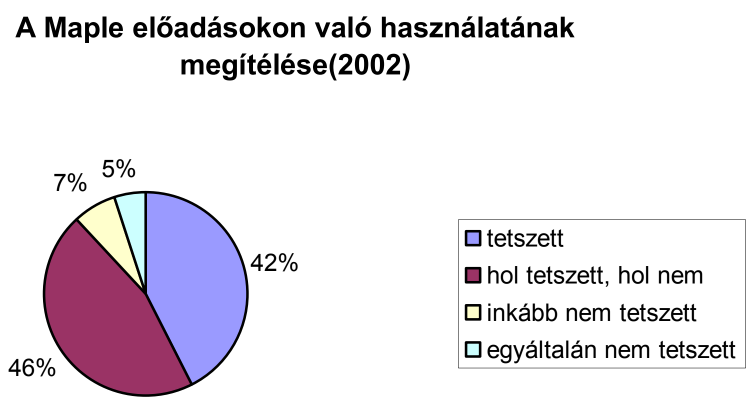
31. ábra

Az eredménnyel természetesen nem lehetünk elégedettek. Bár a hallgatók túlnyomó többsége legalább alkalmanként használta konstruktív módon is az előadások Maple változatát, nagyon kevesen tették ezt rendszeresen. Ma már meg tudjuk foglalkozni ennek egyik, talán döntő, okát: általában hiányzott a konkrét tennivalókat tartalmazó motiváció. Csak akkor várhatunk el ilyen jellegű kreatív tevékenységet, ha ehhez irányítást adunk és a munkavégzés előnyös volta a hallgatók számára nyilvánvalóvá válik.
A következő kérdés azt tudakolta, hogy milyen mértékben tetszett a hallgatóknak a Maple előadásokon való használata. Az első felmérés adatai nem túl hízelgőek! Bár kevés olyan hallgató volt, akinek nem tetszett a felhasználás módja, mindössze 30% válaszolt egyértelmű tetszés megjelölésével. (32. ábra)



32. ábra

A második felmérés (2001) adatai az elsőhöz hasonlóak voltak, a harmadik azonban már az előzőknél jóval kedvezőbb visszhangról tanúskodik (33. ábra)



33. ábra

A magyarázat kézenfekvő. A tanár számára nagy kihívást jelent a rendszer okszerű használata. Nem kevés idő szükséges ahhoz, hogy az előadásokon való felhasználás didaktikailag minden szempontból kielégítő legyen. Az általunk nyílván többször is elkövetett hibák közül a fontosabbak:

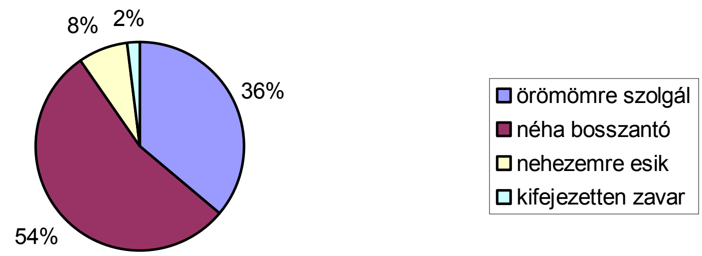
- túlzásba vitt, „moziszerű” használat,
- túlzsúfolt ábrák,
- a normális felfogóképességet meghaladó tempó,
- a részletes- és a teljes megértéshez szükséges- számítások, magyarázat mellőzése,

* nincs tisztázva a reprezentációnak az előadásban betöltött szerepe, az azzal történő további munkavégzés módja.

A tananyag hiperlinkes változatban való állandó elérhetőségének lehetősége- talán természetes módon-nagyon tetszik a hallgatóknak, 83%-uk érezte ennek kifejezetten előnyös voltát.

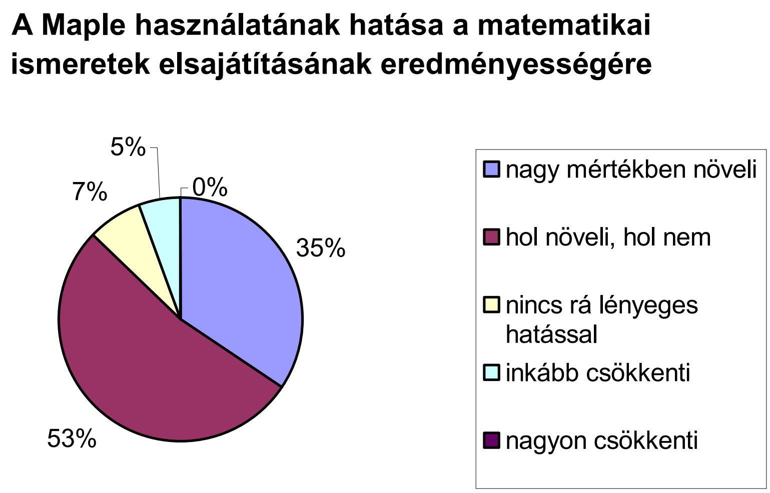
Megkérdeztük a hallgatókat arról is, hogy mennyire szeretnek a Maple-vel dolgozni. Ebben a felmérésben természetesen csak azok vettek részt, akik a gyakorlatokon is használták a rendszert. A három felmérés egyesített adatai azt mutatják, hogy a hallgatók döntő többsége általában szeret a rendszerrel dolgozni, bár jelentős részük küszködik időnként nehézségekkel.(34. ábra)

A Maple-vel való tanulás megítélése



34. ábra

A Maple használatának a matematikai ismeretek elsajátítására gyakorolt hatásáról mindhárom alkalommal megkérdeztük a hallgatókat. A felmérések eredményei fokozatosan javultak. Az utolsó felmérés alkalmával a válaszadók 35 % szerint a Maple használata nagymértékben növeli az eredményességet, 53 % szerint hol növeli, hol nem. A válaszadóknak mindössze 7 %-a vélekedett úgy, hogy a Maple használatával inkább csökken az eredményesség, és nem volt olyan válaszadó, aki szerint csökken jelentősen. (35. ábra)



35. ábra

Az iméni kérdésre kapott válaszok eloszlása közel áll a Perjésiné Hámori I. által végzett felmérés adatsorához. [48]

A CAS oktatásban való használatát illető megítélés további javulása két dologtól várható elsősorban:

- a felhasználást segítő segédletek közreadásától,
- a képzés időkeretének megnövelésétől.

A két megállapítást a felmérés közvetlenül is alátámasztotta. A hallgatók 60%-a szeretné azt, hogy a Maple-t önálló kurzus keretében is oktassuk. Hasonló arányban kívánatosnak tartanák azt, ha a matematika óraszámát megnövelnénk a számítógépes algebrai rendszer használatának eredményesebbé tétele, a többletfeladatok sikeresebb elvégzése érdekében.

Megkérdeztük azt is, hogy a CAS eszközrendszeréből mi tetszett legjobban. A három „legnépszerűbb” képesség sorrendben: a grafikai lehetőségek, a nagy pontosságú számítások elvégezhetősége, a szimbolikus számítások elvégezhetősége. Figyelemre méltó, hogy a változtatgatható tananyag népszerűsége a legutolsó felmérésnél számottevően növekedett. A zárt választás kiegészítéseként többen említették a következőket: gyors feladatmegoldás, a feladatok ellenőrzése, javítja a zárthelyi dolgozatok eredményét, sokat tud a rendszer, jó HELP-je. Többeknek tetszett az animációs lehetőség, említették a nagymértékben összetett, vagy manuálisan nem megoldható feladatok kezelhetőségét is.

A rendszer használatával kapcsolatos nehézségek közül legtöbben az utasítások összetettségét, nehéz megjegyezhetőségét, az angol nyelvi nehézségeket említették. A matematikában megszokottól eltérő szintaktikai elemek is nehézségek forrásai voltak. Felmerült a hibaüzenetek nehéz értelmezhetősége, a súgó gyengesége is. Többen említették a szűk időkeretet, számos hallgató több tanári magyarázatot igényelne.

A számítógépes algebrai rendszer használatának hasznosságát megítélő hallgatói vélekedést minden bizonnyal kifejezi a következő kédésre adott válasz: Ha most kezdené a főiskolai matematika tanulását, s választhatna, olyan csoportba jelentkezne, amelyikben használják a Maple rendszert, vagy amelyikben nem használják? A kérdésre a három felmérés összesítését illetően a hallgatók 78%-a úgy válaszolt, hogy a Maple-t használó csoportba menne, az utolsó felmérésnél pedig már 87% válaszolt így.
Vizsgáltuk a tantárgyi koncentrációt is. Ezen a téren sok a teendő, hisz nagyon alacsony értékeket kaptunk. A hallgatók közül csak minden harmadik válaszolt úgy, hogy más tárgyakkal kapcsolatban is használta, legalább néhányszor, a számítógépes algebrai rendszert.
Főiskolánkon nem magas a speciálkollégiumokon részt vevők számaránya. Ezért sikerként könyvelhető el, hogy a hallgatók többsége (82%) a második- ill. harmadik félév végén úgy nyilatkozott, hogy elképzelhető az, hogy részt venne a Maple használatát is feltételező speciálkollégiumon.

11. 2. A hallgatói teljesítmények összehasonlító vizsgálatai

A számítógép-algebrai rendszer a tanulási környezet új eleme. A tanulói teljesítmények javulása önmagában attól, hogy CAS-t alkalmazunk nem várható. A képzési idő megnövelése, a CAS-re vonatkozó ismeretek kellően mély tárgyalása szükséges ahhoz, hogy mérhető teljesítménynövekedést regisztrálhassunk. Véleményünket megerősíti a hallgatói teljesítmények vizsgálata.

11. 2. 1. Féléves kurzust átívelő vizsgálat

A vizsgálat kezdő lépéseként a Matematika II. kurzus hallgatóival a kurzus kezdetén felmérő dolgozatot írattunk.(Lásd a függelékben) Az összehasonlítás alapjául a félév során írt két zárthelyi dolgozat és a vizsgánnyújtott teljesítmények szolgáltak. A zárthelyi dolgozatot és a vizsgadolgozatot (Lásd a függelékben) a Maple-csoportok két változatban írták meg. Az első a teljes évfolyam számára összeállított dolgozat, a második a Maple használatával megírt dolgozat volt. Teljesítményüket a két dolgozat számtani középértéke alapján értékeltük. Az alapfelmérő dolgozatot a teljes évfolyammal megírattuk. A vizsgálatot végül azokra a hallgatókra végeztük el, akik eljutottak addig, hogy legalább egy vizsgát tegyenek. Összesen 77 ilyen hallgató volt, közülük 34-en Maple használata mellett tanultak, 43 hallgató alkotta a kontroll-csoportot. A teljesítmények álagát mutatja az 2. táblázat. A teljesítmények minden esetben %-ban értendők.

	Felmérő	I. Zárthelyi	II. Zárthelyi	Vizsga
Maple-csoport	38,75	50,4	53,12	49,12
Kontroll-csoport	36,21	53,1	49,91	48,84

2. táblázat

A Maple alkalmazásával és a nélküle tanulók teljesítménye nem mutat lényeges különbséget.

A felmérő dolgozatot 2,5 %-kal magasabb átlaggal megíró Maple-csoport a vizsgán alig mérhetően mutatott jobb eredményt. A zárthelyi dolgozatok eredménye érdekesen és jellemzően alakult. A Maple elemeinek megtanulása jelentős energiaráfordítást követel, tehát törvényszerűnek mondható, hogy kezdetben ez a teljesítmény csökkenésével jár együtt. Az első zárthelyit a Maple-csoport jelentősen gyengébb eredménnyel írta meg, míg a második dolgozatnál már megmutatkozott a Maple rendszer teljesítményt növelő hatása. A zárthelyi dolgozatok a vizsgához képest jóval nagyobb arányban tartalmaztak gyakorlati, számításokat igénylő, problémákat. Ezzel a ténnyel is magyarázható, hogy a vizsga esetében nem tapasztalhattunk értékelhető különbséget a két csoport között.

11. 2. 2. Egy témakör feldolgozására kiterjedő vizsgálat.

A vizsgálatot a 2004. februártól kezdődő oktatási szemeszterben végeztük, a Matematika II. kurzus hallgatói körében. Ebben a félévben a 10 csoport közül két csoportban tanulták a matematikát a hallgatók a Maple rendszer használata mellett. A hallgatók a félév kezdetén kezdtek megismerkedni a Maple-vel. A két csoport közül az egyiket kísérleti Maple-csoportnak tekintettük. A Maple nélkül tanuló csoportok közül is kiválasztottunk egyet, találomra, kontroll-csoportként. Így három különböző csoport teljesítményét hasonlíthattuk össze. A kísérleti, normál Maple és Maple nélkül tanuló csoportok létszáma rendre 18, 13, 35 fő volt. A szemeszter során a következő újításokat vezettük be:

- Az E-Learning rendszert először alkalmaztuk teljes komplexitásában.
- Bevezettük az E-Learning rendszer SysTeMat szolgáltatását. Segítségével a hallgatók áttekinthetik a kiválaszott témakörhöz tartozó tananyagelemeket, kijelölhetik közülük azokat, amelyeket el akarnak menteni, s a kiválasztott fájlcsoportot a rendszer segítségével elmenthetik.
- *A kísérleti csoportban* megvalósítottuk az instrumentális orkesztrációt a 9. 5.- ben leírtak szerint. Kiemeljük, hogy ebben a csoportban két tanár tartotta egyidejűleg a gyakorlatokat.
- *A kísérleti csoportban* az első téma értékelését két tevékenységre alapoztuk. A zárthelyi dolgozat eredménye alapján szerezhették meg a hallgatók az elérhető pontszám 60%-át, míg a maradék 40 %-ot a beadandó feladatok alapján. Ezek a feladatok személyre szólóak voltak, minden hallgató négy feladatot kapott. A feladatok kidolgozásához konzultációkon segítséget nyújtottunk. Ezzel a lehetőséggel azonban csak a hallgatók töredéke élt.

A kísérlettel a következő kérdésekre kerestünk választ:

1. Milyen hatással van az instrumenális orkesztráció általunk bevezetett változata a hallgatói munkavégzésre, a CAS elsajátításának eredményességére?
2. Okoz-e mérhető változást a különböző tudáselemek elsajátításának mértékében és arányában a CAS, a hálózati kommunikáció együttes alkalmazása?
3. Növeli-e a hallgatók motiváltságát a személyenként eltérő, beadandó feladatok rendszere?

A tananyag a differenciálszámítás alkalmazásait tartalmazta. A szemeszter elején felmérő dolgozatot írtak a hallgatók. Ennek kérdései a differenciálás alapvető fogalmaira és technikájára vonatkoztak. A felmérő eredménye azt mutatta, hogy a csoportok induló tudásszintje között nincs lényeges különbség. (3. táblázat)

Csoport	Kísérleti	Normál Maple	Maple nélkül
Teljesítmény (%)	24,3	27.1	26.5

3. táblázat

A témát záró dolgozat 6 feladatból állt, az első feladattól eltekintve több részfeladat szerepelt (Lásd a függelékben) Az 1. és a 3. feladat a fogalmi ismereteket mérte és ezek közvetlen alkalmazását követelte meg. Ezek a Smith-féle taxonomia szerint A szintű feladatok voltak. A 2. feladat a követelte a legmagasabb fokú kreativitást. A grafikus reprezentációval megfogalmazott információk alapján kellett a hallgatóknak a derivált tulajdonságai alapján a függvény tulajdonságaira következtetniük. Ez a kérdés a C típusba sorolható. A 4. és a 6. kérdés a fogalomrendszer áttekintő alkalmazását követelte meg, a 4. 3. alkérdés az A típusba volt sorolható, a többi, a B típusba. Az 5. kérdés első fele a B típusba, második fele a C típusba sorolható.
A Maple csoportba tartozó hallgatók a 4-6-dik feladatok kidolgozásánál használhatták a Maple rendszert.
Az elért eredmények, hasonlóan a felmérő dolgozatokéhoz, az összteljesítményt tekintve nem mutatnak érdemi különbséget. A beadandó feladatok nélkül, tehát csak a dolgozatban elért eredményeket tartalmazza a 4. táblázat.

Csoport	Kísérleti	Normál Maple	Maple nélkül
Teljesítmény (%)	41.7	41.5	42.0

4. táblázat

A kísérleti csoportban, mint azt már említettük a téma végeredménye a dolgozat és az otthoni munka együttes, értékelésével alakult ki, az összteljesítmény 60 %-át a dolgozattal, 40 %-át a beadandó feladattal lehetett megszerezni. A beadandó feladatban leírtakat a hallgatóknak röviden ismeretniük kellett. A beadandó feladatok átlaga 43,1 %-os eredményt adott. Ezt is beszámítva a kísérleti csoport eredménye 42.1 %-ra emelkedett.

Az eredmények megfeleltek a várakozásunknak. A Maple használatával tanulók eredménye nem rosszabb, mint a rendszert nem használóké. Ugyanakkor néhány hét alatt sikerült a CAS használatának alapjait elsajátítaniuk. Képesek a rendszer önálló használatára is. Ez azt jelenti, hogy számukra olyan anyagrészek feldolgozása is lehetővé válik, amellyel a rendszert nem használók érdemben nem tudnak a kurzus keretei között foglalkozni. Mindez azt jelenti, hogy alapjaiban teljesültek a didaktikai alaphipotézisben (1. hipotézis) foglaltak.

Érdekes képet mutat a dolgozat egyes feladatainál elért eredmények analízise. A kísérleti csoportnak a 2. feladatban nyújtott teljesítménye jelentősen -6 illetve 8 %-kal- meghaladja a többiekét. Ez azt mutatja, hogy a különböző reprezentációk közötti váltásra, egyáltalán ezek kezelésére vonatkozó készség fejlesztése a CAS alkalmazásával eredményesebbé vált. Ugyanakkor a szöveges szélsőérték feladat megoldásában a kísérleti csoport teljesítménye elmaradt a többiekétől. Az ilyen feladatoknál a CAS használata csak fejlettebb eszközhasználat esetén jelenthet előnyt. Ugyanakkor azt is el kell ismernünk, hogy éppen a CAS-re vonatkozó ismeretek elsajátítása miatt kevesebb idő jutott az ilyen természetű problémák részletezésére. Tehát az alaphipotézis azon kitétele, amely szerint igazi teljesítménynövekedést csak a képzésre fordított idő növelése mellett várhatunk, láthatóan teljesült.

Csak kis mértékben teljesült az a várakozásunk, amely szerint a beadandó feladatok növelik a hallgatók érdeklődését. Eredményként könyvelhető el ugyanakkor, hogy a kísérleti csoportban jobb volt a munkafegyelem, mint a másik két csoportnál és, jóval kevesebb volt a hiányzás. A hallgatók többsége ebben a csoportban eleget tett a házi feladatokra vonatkozó elvárásoknak, és az E-Learning rendszer segítségével rendszeresen beadta ezeket. Tehát, bár a csoport teljesítménye nem különbözött lényegesen a többiétől, jelentősen több munkát végeztek.

11. 3. Oktató kollégák véleménye a CAS segítségével történő oktatásról

Munkánk eredményének differenciáltabb értékelésének támogatására és a továbblépés érdekében felmérést végeztünk a műszaki főiskolákon tanító kollégák körében a CAS intézményük matematikaoktatásában játszott szerepéről és a CAS oktatási hatékonyságáról. A kollégákat az alábbi kérdőív kitöltésére kértük:

Kérdőív a számítógépes algebrai rendszerek (CAS) oktatásban való alkalmazásáról

A választ adó

intézménye:

	Igen	Nem
1. Az Ön intézményében használják-e valamelyik CAS-t a matematika oktatásban?	☐	☐
2. Használja-e Ön, a CAS-t a matematika oktatásban?	☐	☐
3. Melyik CAS-t használják az Ön intézményében? Maple Más:		
4. Mely foglalkozásokon használják? csak gyakorlatokon		
5. Készültek-e a CAS bevonásával matematikai oktatási anyagok?	☐	☐
6. A helyi hálózaton elérhetők-e CAS segítségével készült oktatási anyagok?	☐	☐
7. Az ellenőrzés folyamatába bevonják-e a CAS-t?	☐	☐
8. A CAS-t milyen módon célszerű alkalmazni a matematika oktatás során? az alapkurzus részeként: ☐ kiegészítő kurzusként: ☐ nem célszerű alkalmazni: ☐		

Véleménye szerint a CAS alkalmazásával oktatott évfolyamokon (csoportokban) a CAS használata nélküli oktatáshoz képest?

	jelentősen nőtt		válto-zatlan	jelentősen csökkent	
9. a hallgatói aktivitás	☐	☐	☐	☐	☐
10. a hallgatók matematikai igényessége	☐	☐	☐	☐	☐
11. a fogalmak megértése	☐	☐	☐	☐	☐
12. a problémamegoldó képesség	☐	☐	☐	☐	☐

13. általában a hallgatók tudásszintje	☐	☐	☐	☐	☐
14. a matematika tanulásával kapcsolatos örömérzés	☐	☐	☐	☐	☐
15. a tanári felkészülés időigényessége - beleszámítva az oktatási anyagok előállítására fordított időt	☐	☐	☐	☐	☐
16. a tanári felkészülés időigényessége - a tananyagok előállítása nélkül	☐	☐	☐	☐	☐
17. az Ön oktatási sikerekkel kapcsolatos elégedettsége	☐	☐	☐	☐	☐

Elküldés

Az Interneten is közzétett http://matserv.pmmf.hu/caskerdoiv/

kérdőíveket 13 főiskolán töltötték ki. A válaszokat az alábbiakban részletezzük:

http://matserv.pmmf.hu/caskerdoiv/stat

A jelmagyarázat: I: igen; N:nem; T:tartózkodom. A válaszok a 2002-2003-as év állapotát tükrözik.

1. Az Ön intézményében használják-e valamelyik CAS-t a matematika oktatásban?
I=38% N=46% T=15%
2. Használja-e Ön, a CAS-t a matematika oktatásban?
I=38% N=38% T=23%
3. Melyik CAS-t használják az Ön intézményében?
Maple=61% Mathematica=0% Derive=0% Más=38%
4. Mely foglalkozásokon használják?
gyakon=61% előadásokon=15% gyak+előadás=7%

5. Készültek-e a CAS bevonásával matematikai oktatási anyagok?
I=38% N=30% T=30%
6. A helyi hálózaton elérhetők-e CAS segítségével készült oktatási anyagok?
I=15% N=53% T=30%
7. Az ellenőrzés folyamatába bevonják-e a CAS-t?
I=23% N=46% T=30%
8. A CAS-t milyen módon célszerű alkalmazni a matematika oktatás során?
alap=53% kieg.=15% nem=0%

Véleménye szerint a CAS alkalmazásával oktatott évfolyamokon (csoportokban) a CAS használata nélküli oktatáshoz képest?

9. a hallgatói aktivitás
(>>)=15% (>)=7% (=)=7% (<)=7% (<<)=0%
10. a hallgatók matematikai igényessége
(>>)=15% (>)=7% (=)=0% (<)=15% (<<)=0%
11. a fogalmak megértése
(>>)=15% (>)=15% (=)=0% (<)=15% (<<)=0%
12. a problémamegoldó képesség
(>>)=15% (>)=7% (=)=15% (<)=7% (<<)=0%
13. általában a hallgatók tudásszintje
(>>)=15% (>)=7% (=)=15% (<)=0% (<<)=0%
14. a matematika tanulásával kapcsolatos örömérzés
(>>)=15% (>)=15% (=)=0% (<)=7% (<<)=0%
15. a tanári felkészülés időigényessége - beleszámítva az oktatási anyagok előállítására fordított időt
(>>)=30% (>)=0% (=)=0% (<)=0% (<<)=7%
16. a tanári felkészülés időigényessége - a tananyagok előállítása nélkül
(>>)=0% (>)=7% (=)=15% (<)=0% (<<)=15%
17. az Ön oktatási sikerekkel kapcsolatos elégedettsége
(>>)=23% (>)=7% (=)=0% (<)=0% (<<)=7%

A CAS-t a matematikaoktatásban a műszaki főiskoláknak csupán kb. 40%-ában használják. A hálózaton csak az intézmények 15 %-ában érhető el a CAS felhasználásával készült tananyag. A CAS-t az ellenőrzés során csak az intézmények negyed részében használják.
A kollégák megítélése szerint a CAS használata a hallgatói aktivitásra, a matematikai igényességre jótékony hatással van. Általában úgy vélekednek, hogy a problémamegoldó képesség, a fogalmak megértése javul a rendszer alkalmazásával. Egyeten kolléga sem számolt be arról, hogy a CAS alkalmazása a tudásszint csökkenésével járna.
A kollégák döntő többsége számára –saját tapasztalatunkkal egyezően- a CAS felhasználásával megvalósított tananyagok elkészítése jelentős többletterhelést jelent. A válaszadók többsége szerint a CAS felhasználása az alapkurzus keretében célszerű.

12. Eredmények a hipotézisekkel összevetve

1. Eredmény a didaktikai alaphipotézissel összefüggésben:

Az 1997-98-as tanévtől kezdődően létrehoztuk, megalkottuk a CAS felhasználásán alapuló, az informatikus hallgatók teljes képzési anyagát felölelő tananyagot. Az elkészült tananyagot elhelyeztük először a Főiskola helyi hálózatán, majd az Interneten is. A tananyagot folyamatosan alakítjuk, bővítjük. A CAS beépített eljárásait egyre növekvő mértékben saját készítésű eljárásokkal egészítjük ki. Ezek az eljárások hozzájárulnak a CAS hatékonyabb oktatási alkalmazásához. A számítógép-algebrai rendszert a tanulási-tanítási folyamat minden elemében alkalmazzuk. A használat eredményességét folyamatosan mérjük. Ennek eredményeként ma már elmondhatjuk, hogy a CAS-nek, mint a matematikai kurzus egyik médiumának és generátorának alkalmazása tartalmi és minőségi értéktöbbletet eredményez. A CAS felhasználásával történő tanulás motiváltabb, a rendszer használata –körültekintő tanári munka esetén- vonzó a hallgatók többsége számára. A rendszer alkalmazása megnöveli a tanulás időszükségletét. Célszerű a számítógépes algebrai rendszer használatát szervezetten, esetleg külön kurzus keretében is tanítani. A befektetett idő azonban többszörösen megtérül.

A hallgatói vélemények alátámasztják hipotézisünket, hiszen a hallgatók nagy többsége számára vonzó a számítógépes algebrai rendszer használata. Szívesen vállalnának több munkát is annak érdekében, hogy a rendszer használatában rejlő adottságokat teljesebben kihasználhassák. A többlet idő ráfordítása esetén mindenképpen megnőne azok aránya, akik szakmai munkájuk során alkalmazzák a számítógépes algebrai rendszert.

2. Eredmény a tanulási nehézségek kezelésével kapcsolatban

Az instumentális orkesztráció többszintű megvalósítása hozzájárul ahhoz, hogy a CAS anyagi objektumból pszichológiai konstrukcióvá, és így a vele végzett munka a tanulói aktivitás szerves részévé váljék. Ez egyszeresmind azt is jelenti, hogy a korábbi technikacentrikus paradigmát gyakorlatunkban az emberközpontú megközelítés váltja fel. A módszert a gyakorlati foglalkozások szervezésének, vezetésének rendszeresen alkalmazott módszerévé tettük. Az instumentális orkesztrációt visszacsatolás, a metakogníció, a kognitív önszabályozás fontos eszközének is tekintjük. Természetesen csak kezdeti eredményekről beszélhetünk, hisz a módszer a nemzetközi gyakorlatban is új, s mi tudatosan csupán 2004-től alkalmazzuk. Curriculum szintű megvalósítása és a kommunikációs csatornák bevonása saját kezdeményezésünk, és tartalmasabbá tétele folyamatos feladatunk.

3. Eredmény a CAS használatára vonatkozó didaktikai törvényszerűségek feltárása terén

A *többszörös reprezentáció* az ember-gép interakció szemiotikai keretelméletének tekintett triadikus reprezentációelmélet és az antropológiai megközelítés szemszögéből nézve egyaránt a matematikai fogalamak tudati megragadásának alapvető eszköze. Oktatási anyagunk kidolgozása során a többszörös reprezentáció szemiotikai és episztemológiai szempontrendszerét állandóan figyelembe vettük. A többszörös reprezentáció a fogalomalkotás hatékony eszközének bizonyult.

A *modularizáció* a számítógép-algebrai rendszerek oktatásban való alkalmazásának egyik alapvető, folytonosan új válaszokat követelő kérdése. A CAS modulokat több szempontból rendszereztük. Áttekintettük, a felhasználás módjával összefüggésben, az irodalomban uralkodó álláspontokat, amelyek a white box/ black box elmélet és az principle of outsourcing (kiülepítési elv), mint

két pólus körük kristályosodnak. Ezzel kapcsolatos álláspontunkat a curriculum alapú modularizáció fogalmomrendszerében ítruk le.
Vizsgáltuk az *algoritmusok* CAS környezetben való alkalmazását, erre módszert adtunk.
Példákat hoztunk a *problémamegoldó gondolkodás* CAS segítségével való támogatására.

4. Eredmény a médium-rendszerrel kapcsolatosan

Ezen a területen első eredményünk a tananyag hiperlinkes tartalomjegyzékkel ellátott változatának a *helyi hálózat*on való elhelyezése és karbantartása tekinthető. Ezáltal, nézetünk szerint nem történt más, mint a CAS természetes medium funkciójának kiterjesztése.
Második lépésként létrehoztuk az *E-Learning* elnevezésű *web-portál*t. Így most már az Internet segítségével térben és időben is korlátlanul elérhető a teljes tananyag. Az E-Learning emellett számos fontos kommunikációs feladatot is betölt: tematikusan strukturált tananyagletöltést tesz lehetővé, a tanítási folyamat dokumentálásának színhelye. Ez utóbbi úgy valósul meg, hogy a hallgatók a gyakorlatokon készített munkalapokat és beadandó- valamint házi feladataikat elmentik.
A médiumrendszer bővülésének is tekinthető a Tight VNC (Virtual Network Computing) csomag segítségével megvalósított hálózati táv képernyő kontroll (remote network access to graphical desktops). Ez a rendszer döntő szerepet játszik a tanulói instrumentális genezis tanári irányításában. A SysTeMath rendszerrel sikerült megoldani a matematika moduláris egységei, a curriculum modulok és a megfelelő Maple munkalapok egymáshoz rendelését, és az így létrejött struktúra folyamatos fejlesztését.

5. A tanári szerep változásával kapcsolatos eredmény

Mindenekelőtt a változás szó egyértelműen bővülést jelent. Modellünk egészében a hagyományos eszközökkel folyó matematikaoktatás médiális bővüléseként értelmezhető. Ennél annyiban tágabb, hogy a CAS nem csak médiuma, de generátora is a matematikai ismeretszerzésnek. A tanár minden járulékos tennivalója ennek a szerepnek a minél adekvátabb eljátszásához kapcsolódik. A feladat kettős, egyrészt az *új médium didaktikai feltárása*, másrészt *illesztése a korábbi didaktikai környezethez*.
Főbb területei:

- A matematikai, médiális és curriculum modulok integrált fejlesztésén alapuló, a CAS eszközeinek optimális felhasználását biztosító *tananyagfejlesztés.*
- Az *értékelés CAS-környezetben* adekvát formáinak kifejlesztése, a különböző médiumok használatával megvalósított tudásmérések didaktikai egyenértékűségének biztosítása.
- A tananyag *médiális artikuláció*jának folyamatos fejlesztése.

- Az *instrumentális orkesztráció* intenzitásának növelése, új változatainak felkutatása, alkalmazása és értékelése.

6. Eredmény a tanulói attitűd változásával összefüggésben

Kisebb részben eredményről, nagyobb részben megoldandó feladatokról számolhatunk be. Eredményként könyvelhetjük el a következőket:

- Sikerült megoldanunk, hogy a hallgatók változatlan képzési időben a matematikai fogalomalkotás lényeges károsodása nélkül elsajátítsák egy számítógép-algebrai rendszer elemeit, és ezt alkalmazzák a matematika tanulása során.
- A hallgatók tanulási tevékenységének, ha nem is kellően szerves, részévé vált a többforrású tananyagfeldolgozás.
- A hallgatók megfelelő színvonalon alkalmazzák a hálózatok adta lehetőségeket.

Az eredmények elérésében jelentős tényezőként említhetjük, hogy informatikus hallgatókról van szó.

7. A tanítható tananyag változása, bővülése

A Maple alkalmazásának köszönhetően a tananyag mélységében és terjedelmileg is előnyösen változott. Ennek alapján a matematika alapozó tárgy szerepkörét hatékonyabban töltheti be és hatékonyabban segíti a problémamegoldó képesség fejlesztését.
A CAS alkalmazása mindennapossá tette az olyan kérdéseket, mint: Szükség van ennek az ismeretelemnek a részletes tárgyalására? Milyen új ismeretek megtanítására nyit ajtót a CAS egy-egy adott fejezet során? Milyen változtatások szükségesek ennek, vagy annak az eljárásnak a tanítása során? A tanári attitüd változása itt is tetten érhető.

13. Összegzés, kitekintés

Kutató-fejlesztő munkánk célja a **számítógép-algebrai rendszernek** a műszaki informatika szakos hallgatók oktatásába történő **bevonása** volt. Ehhez át kellett tekintenünk a CAS oktatásban való alkalmazásának didaktikai alapelveit, és ezeket adaptálni kellett saját oktatási gyakorlatunkhoz. Ez, több esetben, az irodalomban fellelt **módszerek továbbfejlesztését** jelentette. A következő részfeladat CAS alkalmazásával megvalósítandó kurzusok tananyagának megírása volt. A tananyag helyi hálózaton és Interneten történő elérhetőségének biztosítása és az instrumentális orkesztráció módszerének alkalmazása hozzájárult az eredményes tanulás feltételeinek megteremtéséhez. Bár a kidolgozott tananyag hatékonyságát mérésekkel is vizsgáltuk, ezen a téren még nagyon sok tennivaló van.

Elmondhatjuk, hogy **oktatási kísérletünk eredményes volt**, kitűzött céljainkat megvalósítottuk. A CAS didaktikai megfontolásokat figyelembe vevő alkalmazásával a tanítható tananyag minőségileg és mennyiségileg is gyarapodott. A CAS segítségével tanuló hallgatók csoportjainak eredményei lényegében azonosak a kontroll-csoport eredményével, tudásuk azonban összetettebb, későbbi munkájukban várhatóan hatékkonyabb lesz.

Az általunk bevezetett módszer a jelenleginél nagyságrendben hatékonyabbá válhat akkor, ha, az oktatás időkeretét megnövelhetnénk. Szükség lenne arra, hogy a hallgatók legalább felsőfokú tanulmányaik kezdetétől a számítógép-algebrai rendszer alapjait elsajátíthassák. Ezt leghatékonyabban az első matematikai szemeszterrel párhuzamosan elvégzendő alapozó kurzus keretében tehetnék meg.

A CAS-nek hazai felsőoktatásban történő, a jelenleginél kiterjedtebb és hatékonyabb alkalmazása megkövetelné, hogy több intézményre kiterjedő, a tananyag szerkezetére, az alkalmazás feltételrendszerére, az alkalmazás didaktikai alapelveinek finomítására vonatkozó kutatás induljon meg. Jövőbeli fő feladatunknak ennek előmozdítását látjuk.

Summary

Teaching mathematics to undergraduates in majoring in information technology has been assisted by the Maple Computer Algebra System since 1997-98 at the University of Pécs, Pollák Mihály College of Technology. Students majoring in information technology study mathematics for three semesters (Mathematics I.-II.-III.), which involves a 2-hour lecture and 2-hour laboratory session each week. In the first semesters we are limited to using the Computer Algebra System only at lectures, but from the second semester some of the students have access to it for the rest of their studies.

In addition to the availability of the computer algebra system, the educational environment also includes a local computer network and internet access. A natural need for the didactic study of how to use these new tools has arisen. Our research activity involves two complementary and supplementary parts:

- **Developing teaching material** for computer algebra system aided mathematics curriculum, trials for testing them, and the continuous assessment of their effectiveness. Meanwhile, we had to develop a complete syllabus based on the system of Maple CAS worksheets for the courses, also we had to secure the conditions of network access.
- . The surveying of international research results published on the didactic problem system of the application of CAS in the methodology of mathematics teaching, followed by further **theoretical research** in the field. It involves the critical analysis of existing research data, along with their improvement.

During the course of our **research** we focused on **the following questions**:

- What are the main international tendencies regarding the integration of CAS into education syllabuses?
- How can CAS improve the efficiency of mathematics teaching?
- How the local network could be utilised as a knowledge base for mathematics?
- What supplementary formal and organisational elements may CAS contribute to the enrichment of mathematics education?
- What general didactic principles are to be drawn regarding the application of CAS in mathematics education?
- How modern didactic paradigms succeed in CAS assisted mathematics teaching?
- What effect does CAS have on the attitude of students as compared to traditional teaching methods?
- How does the role and methods of the instructor change in the new educational environment?
- What possible solutions are there for the adequate assessment of performance?

- What changes and enrichment of content are traceable in CAS assisted mathematics teaching?
- What dangers may the application of CAS cause?
- How do students see CAS assisted mathematics learning?
- What do colleagues think about the usage of CAS?
- To what extent has CAS been spread in technical college education in Hungary?

The optimisation of the usage of computer algebra systems in mathematics teaching requires the **didactic analysis** of the extended educational environment. Our study discusses four components in detail.

- **Multiple-representation**

  Studying, thinking and communication in terms of mathematics, needs some kind of representation of the elements of mathematical structures, as well as the structures themselves. Communication requires *external representation* in the form of language elements, written symbols, figures, formulas or objects. When talking about thinking, we refer to *internal representation*, which takes place in the mind. It is possible to represent mathematical structures in different ways. The four generally accepted representation methods are descriptive, algebraic (analytic), graphic and numeric representations. In our study we sum up the epistemological and semiotic grounds multi-representation, we discuss the didactic functions of multi-representation in computer algebra system aided mathematics teaching.

- **Modularization**

  Probably the most basic, most complex and, from a didactic point of view very critical question about the usage of computer algebra systems concerns the usage of the modules. In our study we introduce a classification system of modules which we developed ourselves. We will specify the motivation system behind the modularization of CAS, and introduce our concept on curriculum-based modularization. We will illustrate the application of the modules through examples from our practical routine.

- **Learning through experimenting**

  CAS becoming an integrated element of the mathematical environment has two major advantages. In one respect CAS executes the majority of the operative activities, on the other hand it renders different delineation and representation methods in quick and easy access. Due to these two functions, experiment-based, explorative learning gains more importance in education. In our study we will demonstrate how CAS can aid students to re-explore mathematical rules, regularities and connections, to find out about the function of different operations. We also consider how computer algebra systems can help students elaborate on conjectures more efficiently.

- **Problem solving with the help of algorithms**

  Probably the most frequent partial function during mathematical problem solving is the formation and use of algorithms. Therefore one of the most important points of our theoretical considerations and teaching routine is the development of a methodology for the efficient use of algorithms in the CAS environment. We have provided a model for converting algorithms from the mathematics curriculum into CAS algorithms.

Our teaching model combines the tools of traditional methods with the involvement of computer algebra systems, the local network and Internet. Besides the classic tools such as blackboard and chalk, paper and pencil, **CAS provides a new element.** We keep all the elements used in "face to face" teaching, and with the help of the networks we compliment them with elements **characteristic to distance learning.**
The following **didactic motivations for the usage of CAS** appeared in our teaching routine:

Considerable gains in curriculum design, development and updating

- The syllabus is flexible, easy to modify and edit.
- Provides a well-connected, comprehensive knowledge system.
- Permanent access to the syllabus, possibility for online connection with the teachers.

Surplus in representational value

- Richer applicability of graphic representations.
- Higher numbers of numeric calculations results in more precise results.
- More efficient symbolic calculations.

Supporting cognitive operations

- Aiding inductive approaches.
- Helping explorative learning and constructive scepticism.
- Exploring generalisation and analogies.
- Possibility for the more efficient usage of heuristic strategies.

Changes and enrichment in the structure, content and scope of the curriculum

- Possibility for in-depth discussion of topics.
- Possibility for the introduction of new topics.

Motivation components of mathematics learning, work manner

- Strengthening the function of mathematics as a primary subject.
- Multi-channel knowledge processing

During the integration of CAS, specifically the Maple system, **into our curriculum**, we followed an anthropocentric, psycho-didactically motivated approach, and tried to keep away from techno centric views. Introduction to the usage of the system and its application was by a **series of cyclic activities.** The cycles consist of the following elements:

- Analysis of the limitations and conditions.
- Integration into the educational environment.
- Analysis of the application.
- Definition of new specifications.

Curriculum resources are accessible from both **the local network** and **the Internet**. The curriculum has a modular structure, and is available predominantly in Maple worksheet format and partly in html format. The advantages of Maple worksheets are that they are editable, ready to run and both their format and content is easy to change.
We have created an **Internet Portal called E-Learning.** The main functions of the portal:

- Course material resource.
- Providing resources for the thematic choice of course material.
- Feedback and documentation.
- Contacts and interaction.

We consider the external management of instrumental genesis – **instrumental orchestration** – as the basic didactic aid of maths courses based on multi-channel knowledge processing, and we use it at various levels.

- Instrumental orchestration in laboratory sessions
- Instrumental orchestration at the curriculum level
- Instrumental orchestration on the level of communication channels

We have also used **interactive tasks generated by the ToolBox author's system** together with CAS to assist laboratory sessions and exam preparation. According to our experience, the joint usage of CAS with author's systems produces several didactical benefits. For example:

- Familiarisation with the structure of algorithms and the acquisition of basic operative skills.
- Documented assessment and feedback.

The usage of CAS and its supporting instrumental system resulted in significant **changes in** the discussible scope of **the curriculum**. The types of changes are classified as follows:

- **The system of notions** related to the given field **will basically remain unchanged.** Their deeper acquisition is due to increasing the number of representations, and changes in the method of representation.
- **The content** of the given chapter **has been enriched**, it contains new procedures and new problem solving methods which previously were not applicable.
- **Topics** which were left out of the former curriculum due to their "**non-discussible nature**" within the given representation system, could now enter the new curriculum.

The major motivation behind the integration of CAS into the curriculum was to strengthen the role of mathematics as a cognitive force, and to promote its more effective role as a primary subject.

The most critical, therefore most demanding aspect of the application of CAS in education is probably **assessment**. Our main standpoints regarding assessment are the following:

- Our aim with assessing students is to reflect their degree of mathematical understanding as restrictively as possible.
- We provide the students with the choice of using either traditional tools or technical tools - primarily CAS.
- At each phase of assessment (test-papers, home assignments, exams) we include two types of tasks: ones which can be processed more efficiently with the help of CAS, and other tasks that students have to solve without the help of CAS.
- During the assessment of CAS worksheets, besides making references to insufficient mathematical competence, we also reflect on mistakes and deficiencies in program-technology and syntax.
- Our aim is to make it possible for students to give evidence of their knowledge in the most varied forms possible, for example, they are given tasks which they need to work out as a home assignment.

At the end of the Maple aided mathematics courses we carried out **three** separate **surveys**. Along with several other questions we asked for students opinion about the usage of Maple at lectures. Although we did not receive an overall negative response, and opinions were more positive in the third survey than the previous ones, we should not leave the most important critical observations out of consideration. These include:

- excessive “movie-like” usage,
- overcrowded figures,
- fast tempo beyond the limits of normal comprehension,
- lack of calculations and explanations necessary for both partial and comprehensive understanding,
- the function of the representation in the context of the lecture is left unclear, so students are unsure how to use them in their future work.

Students were asked their opinion about the effect of Maple on the acquisition of mathematical problems in each survey. The questionnaire results gradually improved. In the last survey 35% of the questioned students said that Maple enhanced efficiency a great deal, 53% said that it only occasionally does. Only 7% of the students surveyed thought that Maple reduces efficiency, and none of the students said that Maple would significantly hinder it. More positive opinions on the application of CAS in education can be expected primarily from two conditions:

- accessibility of resources to help application,
- increasing the time frame of the curriculum.

The two presumptions were directly supported by the survey among the students. 60% of them would appreciate Maple to be taught as an independent course as well. A similar percentage of students thinks that the time frame of the math syllabus should be increased in order to make the usage of mathematical computer systems and solving extra tasks more effective.

We have made two **control group** studies. The **first study** continued through a whole semester. As the first stage of the study, we had the students in a Maths II class write an entrance test at the beginning of the course. We compared them against two progress tests written during the semester and also to their end-of-term exam results. The test at the beginning of the course was written by the whole year. There was a total number of 77 student as such, 34 of which did a Maple assisted course, leaving 43 students in the control group. There was no significant difference seen between the achievement of the two groups.

Although the Maple-group achieved 2.5% better results at the entry test, and at the exam they had a slightly better performance, this was hardly detectable. The results of the I. and II. (progress) tests however, are interesting and illustrative. Learning the elements of Maple requires time, and students put a great deal of energy into it. In consequence, to start up with, using Maple naturally entails a decline in achievement. The Maple-group achieved significantly weaker results at the first achievement test, however, at the second, the beneficial effects of Maple are clearly visible. Progress tests in general, have a lot more practical tasks proportionately which need more calculations than exam papers do. This fact may

also explain why we could not see a significant difference between the achievement of the two groups at the exam.
The **second study** was conducted among students attending Maths II courses in the semester starting in February 2004. In this semester 2 out of the 10 groups learnt mathematics using Maple. Students started their familiarisation with Maple at the beginning of the semester. One of the two Maple-groups was considered as a pilot Maple-group. Out of the standard groups we randomly selected one to be a control group. This way we gained data for comparison from three different groups. The number of students in the pilot Maple-group was 18, in the normal Maple-group 13, in the control group 35. During the semester we introduced the following innovations:

- The E-Learning system was first used in its full complexity.
- We introduced the SysTeMat service of the E-Learning system. With its help students can have an overview on the available resource materials for a chosen field, they can select the elements they want to save, and they can also save the selected files with the help of the system.
- *In the pilot Maple-group* we put instrumental orchestration into practice in an advanced way. We should also point out that in this group two teachers simultaneously instructed the practical sessions.
- *In the pilot Maple-group* the assessment of the given topics was based on two different assignments. Points to be obtained through the in-class papers amounted to 60% of the total points, while the remaining 40% was assessed through home assignments.

The syllabus covered the uses of differential calculus. At the beginning of the semester all students wrote an entrance test. The questions in the paper related to the basic ideas and techniques of differential calculus. According to the results of the assessment, initially there was no significant difference between the competence of the different groups

The test consisted of 6 tasks, in addition to the first task, all of them involved several smaller tasks. Members of the Maple-group were allowed to use the Maple-system in the solution of tasks 4-6.
The results of the test, in common with the results of the entrance test, did not show significant differences in respect to total output. Table 1 shows the results of in-class tasks only, and does not include home assignments.

Group	Pilot	Normal Maple	Control
Achievement (%)	41.7	41.5	42.0

Table 1

In the pilot group the final result of the achievement test was made up by the result of the in-class paper and the home-assignment. Students had to give a brief summary of their home assignment. The average of the result of the home assignments was 43.1%. So the added final result of the pilot group rose to 42.1%. The results were up to our expectations. The achievement of students using Maple was not any worse than those who did not. At the same time, they managed to acquire the basics of CAS application in a few weeks, and were also able to use the system unaided. This means, that they had the opportunity to extend their curriculum with topics that students not using CAS could not discuss in the course of their studies.

We can assert that our **experimental education programme was successful**, and we achieved our goals. The discussible curriculum obtained a richer content and higher standards due to the circumspect didactical considerations of the employment of CAS. The achievements of groups using the aid of CAS were essentially the same as the results of the control groups, however, their understanding is more complex and they are likely to become more efficient in their later work.

The system we have introduced has the potential to become far more efficient, provided the available time in the curriculum could increase. Undergraduate students should start to learn the basics of the computer algebra system from the beginning of their studies at higher education if not before. An introductory course parallel to the first maths semester would be the most efficient solution.

The more general and efficient use of CAS in Hungarian higher education would require more research into the structure and orchestration of the curriculum, and also into the refinement of its didactical principles with the involvement of different educational institutions. We consider its promotion as our major task in the future.

Irodalomjegyzék

Referenciák

[1] http://www.uni-bielefeld.de/idm/semiotik/Positionspapier_AG-Semiotik.html#Peirce
[2] Artigue, M. (2001*): Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work*
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/freudenthal/
[3] Bosch M. & Chevallard Y. (1999*): La sensibilité de l'activité mathématiqueaux ostensifts. Objet d'étude et problématique*. Recherches en Didaktique des Mathématiques, 19/1, 77-111.
[4] Sierpinska A. & Lermann S. (1996).:*Epistemologies of mathematics and mathematics education*, In: Bishop & al. (eds), Handbook of Research in Mathematics Education, p. 827-876, Kluwer academic publishers, Dordrecht.
[5] Trouche L. (2003): *Managing The Complexity of Human/Machine Interaction in a Computer Based Learning Environment (CBLE) : Guiding Student's Process Command Through Instrumental Orchestrations,*
http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/index.html
[6] Karl Popper : Test és elme. Az interakció védelmében, TYPOTEX Kiadó, 1998.
[7] Glasersfeld, E. V. (1995): *Radical Constructivism. A Way of Knowing and Learning*. The Palmer Press, London, Washington D. C.
[8] Glasersfeld, E. V. (1991*): Constructivism in Education*. In : Lewy, Arieh (eds) : The International Encyclopedia of Curriculum. Pergamon Press, Oxford etc. 31-32.
[9] Réthy Endréné : Az oktatási folyamat, In : Didaktika. Elméleti alapok a tanítás tanulásához, szerk. : Falus Iván, 221-271.
[10] Gagné, E. D. (1985): *The cognitive psychology of school learning*, Little, Blown and Company, Boston.
[11] Vásárhelyi, Éva (2003): *Bemerkungen zur Prototypentheorie*, Appendix 1.
http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/vasar/proto.pdf
[12] Lesh R., Post, T. & Behr, M. (1987) : *Representations and translations among representations in mathematics teaching and problem solving*. In : Janvier, C. (eds) : Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. 33-40.
[13] Piaget, J. (1973): *To understand is to invent*. Grossman, New York.
[14] Resnick, L. B. (1982): *The role of invention in the development of mathematical competenc*e. In : Kluwe, R. H. & Spada, H. (eds) : Development models of thinking. Academic Press, New York, 213-244.
[15] Kaput, J. J. (1992): *Technology and matematics education*. In: D.A.Grouws(Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, New York: Macmillan, 515-556.
[16] Goldenberg, Paul (1995*) Multiple representations: A vehicle for understanding*. In Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies, edited by David N. Perkins, Judah L. Schwarz, Mary Maxwell West and Martha Stone, 155-171. Oxford: Oxford University Press.

[17] Larkin, J. H. & Simon, H. A. (1987): *Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words*, Cognitive Science, 11, 65-99.
[18] Duval, R. (1999): *Representation, vision, and visualisation: Cognitive functions in mathematical thinking.* In: Hitt, Fernando & Santos, Manuel [Eds.], Proceedings of the Twenty-first Annulal Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3-26. Columbus, Ohio: Eric Clearinghous for Science, Mathematics, and Environmental Education.
[19] Schneider, E and Peschek, W. (2001): *Computer Algebra Systems (CAS) and Mathematical Communication.* The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, **9 No. 3**, 229-242.
[20] Canet, J. F. (1996*): CAS as a tool to view multiple representations.* International Derive Journal*,* **3 No. 3**, 21-34.
[21] Yerushalmy, M. (1991): *Student peceptions of aspects of algebraic function using multiple representation software*. Journal of Computer Assisted Learning, **7**, 42-57:
[22] Dörfler, W. (1991): Der *Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium.* In: Dörfler, W./Schneider, E./Wegenkittl, K. (Hrsg): Computer-Mensch-Mathematik. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 51-75.
[23] R. Pavelle: *Problems sent to the USENET sci.math.symbolic bulletin board*, Archived in the REDUCE network library, 1989.
[24] Nahalka I. (2002): *Hogyan alakul ki a tudás a gyerekekben*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 75. oldal
[25] Heugl, H. (1996): *Symbolic computation systems int he classroom*, The International DERIVE Journal, Vol. **3, No. 1**,1-10.
[26] Pléh Csaba (1998, 2003): *Bevezetés a megismeréstudományba*, Typotex, Budapest, 2003, 193-216.
[27] Buchberger, B (1989): *Why Should Students Learn Integration Rules?* RISC Linz, Technical Report No. 89-7.0, University of Linz.
[28] Peschek, W. (1998): *Mathematical Concepts and New Technology*. In: Proceedings of the International Conference on the Teaching of Matematics in Samos. Wiley & Sons, 242-244.
[29] Schneider, E. (2000*): Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht*, Habilitationsschrift, Klagenfurt, 2000.
[30] Taba, H., *Curriculum Development: Theory and Practice*. Harcourt, Brace and World, New York, 1962.
[31] Sárvári, Csaba (2002): *CAS-basierte Lehrplan, Lehrplan-basierte Modularisierung mit CAS*, VISIT- ME-2002. bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-31, IBSN 3-9011769-49-8,Wien, 2002.
[32] Sárvári, Csaba (2001*): Rolle der Computer Algebra Systeme in der Entwicklung des mathematischen Denkens*. In: (Hrsg) Gabriele Kaiser.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001. Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin.
[33] Sárvári, Csaba (2003*): Network based Math teaching using CAS*, ZDM, Volume 35. Nr.2.
[34] Karsai, J.: How Do (Not) Use Computers in the Mathematics Classroom http://www.km.sjf.stuba.sk/Aplimat/English/index_A.html
[35] Lagrange J.-B. & Py D. (2002): *Développer un environnement d'apprentissage utilisant le calcul formel. Hypothéses, méthode, premiére*

rélaisation, in J.-F. Nicaud, E. Delozanne & Grugeon (eds), Logiciels pour l'apprentissage de l'algébre, Sciences et Technigues Educatives, vol. 9 (1-2), 91-120.
[36] Csaba Sárvári, M. Klincsik, I. Hámori(2001): *How can we combine the CAS with authoring system tools to create a flexible learning environment*, ICTMT 5, Klagenfurt, 2001. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Technology in Mathematics Teaching, 203-206
[37] Búvári A.: *Tanulástechnikai és tanuláspszichológiai útmutatás az önálló tanulási fázisban.* BME Tanárképző és Pedagógiai Intézet 1979. 50 p.
[38] Jones, P. (1995): *Graphics Calculators in Traditional Year 12 Mathematics Testing*, Proceedings of the 15th Biennal Conference of The AAMT, 221-227.
[39] Kokol-Voljc, V. (2000): *Exam Questions when using CAS for School Mathematics Teaching*, International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, = No.1, 63-76.
[40] Smith, G., Wood, L., Coupland, M., Stephenson, B., Crawford, K., Ball, G., 1996, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol*., **27**, 65-77.
[41] Artigue, M. (1997): *Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomés didactiques liés á utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage*. In: Educational Studies in Mathematics 33(2), 133-169.
[42] György Maróti (2003): *Illustrated analysis of Rule of Four using Maple*, Teaching Mathematics and Computer Science 1/2, 383-404.
[43] Guin, D.; Trouche L. (eds) (2002): *Calculatrices symboliques, faire D'un outil un instrument du travail mathématique, un probléme didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
[44] Drijvers, P. (2002): *Learning mathematics in a computer algebra environment : obstacles are opportunities*.- In: ZDM Vol. 34 (5), 221-228.
[45] Sfard, A. (1991): *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*.-In: Educational Studies in Mathematics 22, 1-36.
[46] Tall, D.; Thomas, M. (1991): *Encouraging versatile thinking in algebra using the computer*.-In: Educational Studies in Mathematics 22, 125-147.
[47] Tall, D.; Thomas, M; Gary Davis; Gray, E.: Simpson, A. (2000): *What is the Object of the Encapsulation of a Process?* - In: Journal of Mathematical Behaviour, 223-241.
[48] Perjésiné Hámori Ildikó (2003): *Az internet és a komuter-algebrai rendszerek bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába,* PhD értekezés, Debreceni Egyetem Természettudományi Kar, Debrecen, p. 57.
[49] Klincsik M., Maróti Gy. (1995): Maple 8 tételben, a matematikai problémamegoldás művészetéről, NOVODAT
[50] Sárvári, Cs. (2003): Konstruktivistische Annäherungen mit CAS. In Beiträge zum Mathematikunterricht, Dortmund 2003

A szerző publikációs jegyzéke

Referált publikációk

[1] J. Fehér, B. Kovács and Cs. Sárvári: *On additive decompositions with uniqueness properties of rational integers*, Publicationes Mathematical, Debrecen 46. (1995)

[2] Cs. Sárvári: *On integervalued generalised q-additive solutions of linear recursions*, Publicationes Mathematical, Debrecen 48. (1996)

[3] Csaba Sárvári: *Network based Math teaching using CAS*, ZDM, Volume 35. N. 2.,56-62.

[4] Csaba Sárvári and Mihály Klincsik: *From iteration to one-dimensional discrete dynamical systems using CAS*. Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen, 1(2003)2 ,271-296.

[5] Csaba Sárvári: *Report on „The Computer Algebra- and Dynamical Geometry Systems, as the catalists of the Mathematics Education",*Conference, 6-7 June, Pécs, Hungary, Teaching Mathematics and Computer Science, Debrecen 1(2003)2 ,259-270.

Tankönyv, jegyzet

[6] Achs Ágnes, Fekete Mária, Sárvári Csaba: *Matematikai példatár és feladatgyűjtemény* (Társszerzők:) Jegyzet. (első kiadás 1979.)

[7] Ágnes, Fekete Mária, Sárvári Csaba, Tóth Julianna: *Tanulásirányító a matematikához II.* Jegyzet. PMMF 1983.

Referált konferencia kiadványok

[8] Mihály Klincsik, Csaba Sárvári: *Modelling the Open and Distance Learning Methods in a Face-to-Face Mathematical Teaching Environment* In.: Proceedings of the 1998 EDEN Conference, Bologna, Volume 2, 524-527

[9] Klincsik, M., Sárvári, Cs*.: Modelling the Open and Distance Learning Methods based on a Computer Algebraic System* EDEN PRAGUE RESEARCH WORKSHOP 2000, 166-168

[10] Klincsik, M., Sárvári, Cs.: University *Mathematics in Distance Learning Environment using Computer Algebraic System* ODL Networking for Quality Learning Conference, Lisszabon, 2000

[11] Cs. Sárvári: *Syllabus and Computer Algebrai System in Higher Mathematics*. Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education. 2000, Miskolc, 107-110.

[12] Sárvári, Csaba*: Rolle der Computer Algebra Systeme in der Entwicklung des mathematischen Denkens*. In.: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, 528-531..

[13] Csaba Sárvári, Mihály Klincsik ,I. Hámori: Combining CAS with authoring systems to create a flexible learning environment, ICTMT 5, Klagenfurt, 2001. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Technology in Mathematics Teaching, 203-206.

[14] Sárvári, Csaba: *Zu Möglichkeiten der flexiblen, transferreichen Erlernung mit Hilfe von CAS. In: Beiträge zum Mathematikunterricht* .Klagenfurt, 2002, 431-434.
[15] Csaba Sárvári, Ildikó H. Perjési, Mihály klincsik: *Application of CAS System of Teaching of Mathematics with Help of Computer Networks* Proceedings of ITHET, Budapest, 89-92, 2002.
[16] Mihály Klincsik, Csaba Sárvári: *How an we combine the CAS with authoring system tools to create a learning environment containing flexible feedback opportunities*. , VISIT- ME -2002. bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-31, IBSN 3-9011769-49-8, Wien , 2002

[17] Csaba Sárvári: *CAS-basierte Lehrplan, Lehrplan-basierte Modularisierung mit CAS*, VISIT- ME-2002. bk teachware Schriftenreihe Nr. SR-31, IBSN 3-9011769-49-8, Wien , 2002

[18] Sárvári ,Csaba: *Konstruktivistische Annäherungen mit CAS*. In Beiträge zum Mathematikunterricht Dortmund 2003, 561-564.

[19] Csaba Sárvári, Mihály Klincsik*: From iteration to discrete dynamical systems using CAS in discovering manner*. In: Technology in Mathematics Teaching, Proceedings of the 6 th International Conference, VOLOS-Greece, 2003, 357-364.
[19] Ildiko H. Perjési, Csaba. Sárvári, Mihály Klincsik: *Using CAS and Internet In Teaching Mathematics at University of Pécs* (Hungary) International Conference on Education and Information Systems: Technologies and Applications July 31 – August 2. 2003. Orlando, Florida, Proceedings, 17-23.
[20] Sárvári, Csaba*: Wie beeinflusst der Gebrauch von Computer Algebra Systemen (CAS) die Problemstellung und Lösungsstrategien?* In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Augsburg 2004.

Egyéb publikációk

[21] Sárvári Csaba: *Tanulásirányítás a levelező oktatásban*. Tanulmány. Felsőoktatási Szemle 1981. 11. szám
[22] Sárvári Csaba: *A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében*, Iskolakultúra 01/3, 20-27. Pécs, 2001.
[23] Sárvári Csaba: *Számítógéppel segített matematikaoktatás egy világkonferencia tükrében*, Iskolakultúra Pécs 01/11, 65-68. Pécs, 2001.

Konferencia előadások

[24] Klincsik Mihály, Sárvári Csaba: *Kísérletek nyitott- és távoktatási módszerek modellezésére a nappali tagozatos matematikaoktatásban*, Konferenciakötet, 32-36. Könnyűipari Műszaki Főiskola, 1998.
[25] Klincsik Mihály, Sárvári Csaba: *A számítógép-algebrai rendszerrel támogatott matematika oktatás didaktikai problémái*, Főiskolai Matematika-, Fizika- és Informatikaoktatás XXIII. Országos Konferenciája, 18-30. Dunaújváros, 1999.

[26] Sárvári Csaba: *Matematika-oktatás Maple felhasználásával* (UNIVERSITY OF MISKOLC) No. 99-06., 1999, 34-42.

[27] Sárvári Csaba: *Matematikaoktatás a Maple-rendszer felhasználásával*. Jubileumi Tudományos Ülésszak Kiadványa, 154-158. o., Pécs, 2000.

[28] Klincsik Mihály, Sárvári Csaba*: Gyökkereső iterációk számítógép-algebrai környezetben.* Főiskolák Matematika- Fizika- és Számítástechnika Oktatóinak XXVII. Országos Konferenciája,.Székesfehérvár, 2003. CD.

[29] Klincsik Mihály, Sárvári Csaba: *Az interaktív matematikai példatár néhány vonatkozása*. Konferenciaelőadás, Multimédia az oktatásban, BME, 1997.

[30] Klincsik Mihály, Sárvári Csaba: *Az interaktív matematikai példatár néhány didaktikai vonatkozása.* Matematika-Fizika-Számítástechnika Oktatók Országos Tanácskozása, Győr, 1997.

[31] Sárvári Csaba: A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében. Pszichológia 2000, a Magyar Pszichológia Társaság XIV. Országos Tudományos Nagygyűlése)

[32] Sárvári Csaba: *A számítógép-algebrai rendszerek és a műszaki matematika oktatása.* Főiskolák Matematika- Fizika- és Számítástechnika Oktatóinak XXIV. Országos Konferenciája. Kaposvár, 2000.

[33] Sárvári Csaba: *A számítógép-algebrai rendszerek szerepe a főiskolai matematikatanításban*. Főiskolák Matematika- Fizika- és Számítástechnika Oktatóinak XXV. Országos Konferenciája, Zalaegerszeg, 2001.

[34] Sárvári Csaba: *Modularizáció a számítógépes algebrai rendszer segítségével megvalósított oktatásban*. Főiskolák Matematika- Fizika- és Számítástechnika Oktatóinak XXVI. Országos Konferenciája, Szombathely, 2002.

Poszter

[35] Mihály Klincsik, Csaba Sárvári: *The Role of Computer Algebraic Systems* In. Engineer's teaching of higher mathematics, "Interactive Computer Aided Learning", ICL 2000, Villach, 2000. 09. 28.-09. 29.

1. függelék

Néhány, a dolgozat szövegében szereplő, Maple-eljárás kódja

```
 regressziosegy:=proc()
  # Eljárás a regressziós egyenes  meghatározására
   local n,i,X2,X,XY,Y,p1,p2,Xert;
 global a,b;    #Az egyenes paraméterei globálisak,így
      az             eljáráson kívül is elérhetők
   n:=nops(args[1]);
   for i from 1 to n do
     x||i:=op(1,args[1][i]);
     y||i:=op(2,args[1][i]);
   od;
 X2:=sum('x||i^2','i'=1..n):   #Rendre kiszámítjuk az x
        értékek eltéréseinek  négyzetösszegét
  X:=sum('x||i','i'=1..n):      #Az x értékek összegét
  XY:=sum('x||i*y||i','i'=1..n):#A szorzatösszeget
  Y:=sum('y||i','i'=1..n):      # Az y értékek összegét
  a:=(n*XY-X*Y)/(n*X2-X^2):     #Az egyenes meredeksége
  b:=(X2*Y-X*XY)/(X2*n-X^2):    #Az y tengellyel való
metszéspont második koord.
 print(`Az eltérések négyzetösszege`,evalf(sum('(y||i-
              a*x||i-b)^2','i'=1..n)));
  print(`A regressziós egyenes`,a*x+b);
  p1:=plot(args,style=point,symbol=circle,color=red):
  Xert:=NULL:
  for i to nops(args) do
   Xert:=Xert,op(1,op(i,args))
  od:
  p2:=plot(a*x+b,x=min(Xert)-
0.1..max(Xert)+0.1,thickness=2,color=blue):
  plots[display]({p1,p2});
end:

kiegyenlit:=proc()
  # eljárás regressziós polinom meghatározására
  local n,i,n_para,n_ert,fuggv,F,p1,p2,mego;
  global pol;
  n:=nops([args]):
  n_para:=n-2:
  n_ert:=nops(args[n]):
  fuggv:=args[1]:
    for i from 1 to n_para
```

```
   do var||i:=args[i+1] od:

  for i from 1 to n_ert
  do x||i:=op(1,args[n][i]):
     y||i:=op(2,args[n][i]): od:
   # távolságnégyzetek
  F:=sum('(subs(x=x||i,fuggv)-y||i)^2','i'=1..n_ert):
  for i from 1 to n_para
   do eq||i:=diff(F,var||i)=0 od:

mego:=solve({seq(eq||i,i=1..n_para)},{seq(var||i,i=1..n
_para)});
 print(`A regressziós polinom`,subs(mego,fuggv));
 print(`Az eltérések
négyzetösszege`,evalf(subs(mego,F)));
 pol:=unapply(subs(mego,fuggv),x):
 p1:=plot(args[n],style=point,symbol=circle,color=red):

p2:=plot(subs(mego,fuggv),x=x||1..x||n_ert,color=blue,t
hickness=2):
 plots[display]({p1,p2});
 end:
```

```
 monoton:=proc(f,a,b,n)
  local
Rajzok,h,vp,k,hossz,val,kp,pont,maxi,mini,also,also1,fe
lso,felso1,poli,kep,fv,i,j,szel,A,B,C;
   Rajzok:=NULL:
   h:=(b-a)/n:
   vp:=a:k:=0:
   hossz:=0:
   while vp+h<=b do
    val:=evalf(rand()/10^12); k:=k+1:
    kp:=vp:vp:=kp+val*h:
    if (vp-kp)>hossz then hossz:=vp-kp:pont:=kp: fi;
      maxi:=evalf(max(f(kp),f(vp))):
      mini:=evalf(min(f(kp),f(vp))):
      if not iscont(f(x),x=kp..vp) then
      also:=[evalf(min(f(kp),f(vp)))]:
      also1:=select(type,also,realcons):
      mini:=also1[1]:
      felso:=[evalf(max(f(kp),f(vp)))]:
      felso1:=select(type,felso,realcons):
      maxi:=felso1[1]:
```

```
    fi:
    poli:=[[kp,mini],[vp,mini],[vp,maxi],[kp,maxi]]:
    rajz||k:=poli:
    kep:=polygonplot(poli,color=blue):
    Rajzok:=kep,Rajzok
    od:
    if vp<b then val:=evalf(rand()/10^12);
     k:=k+1;
     if (b-vp)>hossz then hossz:=b-vp:pont:=vp: fi;
    maxi:=evalf(max(f(vp),f(b))):
     mini:=evalf(min(f(vp),f(b))):
    poli:=[[vp,mini],[b,mini],[b,maxi],[vp,maxi]]:
     rajz||k:=[[vp,mini],[b,mini],[b,maxi],[vp,maxi]]:
    kep:=polygonplot(poli,color=blue):
    Rajzok:=kep,Rajzok fi:
   fv:=plot(f(x),x=a..b,discont=true):
   for j to k do
     szel:=rajz||j[2,1]-rajz||j[1,1]:

rajz||j:=[[pont,rajz||j[1,2]],[pont+szel,rajz||j[1,2]],
[pont+szel,rajz||j[3,2]],[pont,rajz||j[3,2]]];
  od:
   A:=display({Rajzok,fv}):
  for i to k do
   abra||i:=polygonplot(rajz||i,color=green):
  od:
      maxi:=evalf(max(f(a),f(b))):
      mini:=evalf(min(f(a),f(b))):
      if not iscont(f(x),x=a..b) then
      also:=[evalf(min(f(a),f(b)))]:
      also1:=select(type,also,realcons):
      mini:=also1[1]:
      felso:=[evalf(max(f(a),f(b)))]:
      felso1:=select(type,felso,realcons):
      maxi:=felso1[1]:
      fi:
 B:=polygonplot([[pont-
0.005,mini],[pont+hossz,mini],[pont+hossz,maxi],[pont-
0.005,maxi]],color=red,style=line):
 C:=display(B):
 display([abra||(1..k)],A,C);
 end:
```

```
Riemann:=proc(f,a,b,n)
    local h,Rajzok,fvert,val,kp,vp,poli,kep,i,fv;
   Rajzok:=NULL:
   h:=(b-a)/n;
   vp:=a:
   while vp+h<=b do
     val:=evalf(rand()/10^12):
    kp:=vp:vp:=kp+val*h:
       val:=evalf(rand()/10^12);
    fvert:=f(kp+val*(vp-kp)):
    poli:=[[kp,0],[vp,0],[vp,fvert],[kp,fvert]];
    kep:=polygonplot(poli,color=magenta):
    Rajzok:=kep,Rajzok
    od:
    if vp<b then val:=evalf(rand()/10^12);
    fvert:=f(vp+(b-vp)*val);
    poli:=[[vp,0],[b,0],[b,fvert],[vp,fvert]];
    kep:=polygonplot(poli,color=magenta):
    Rajzok:=kep,Rajzok fi;
   fv:=plot(f(x),x=a..b,color=blue,thickness=2):
   display({Rajzok,fv});
 end:
```

```
 kritikus:=proc()
local dfx,dfy,L,fv,var1,var2,i:
global critpts:
fv:=args[1]:var1:=args[2]:var2:=args[3]:
dfx:=diff(fv,var1):
 dfy:=diff(fv,var2);
critpts:=[solve({dfx=0,dfy=0})];
if has(critpts,RootOf) then
 critpts:=evalf(map(allvalues,critpts));
fi;
L:=NULL:
for i to nops(critpts) do
 if type(rhs(critpts[i][1]),realcons) and
type(rhs(critpts[i][2]),realcons)
  then
  L:=L,critpts[i]
 fi
od;
critpts:={L};
critpts:=convert(critpts,list);
```

```
end:

 ertek:=proc()
local i,critpts,dfxx,dfyy,dfxy,
delta0,disc,fv,var1,var2:

fv:=args[1]:var1:=args[2]:
var2:=args[3]:critpts:=args[4];
dfxx:=diff(fv,var1$2);
dfyy:=diff(fv,var2$2);
dfxy:=diff(fv,var1,var2);
disc:=simplify(dfxx*dfyy-dfxy^2):
for i to nops(critpts) do
 delta0:=evalf(subs(critpts[i],disc)):
 if delta0>0 then lprint(Az  ,critpts[i],`pontban helyi
szélsőérték van,`):
  if evalf(subs(critpts[i],dfxx))>0 then lprint(`  s
mivel f_xx>0, ez helyi minimum`):
  else lprint( `  s mivel f_xx<0, ez helyi maximum.`):
  fi:
 elif delta0=0 then lprint(`A diszkrimináns 0,igy nem
tudjuk eldönteni,`):
 lprint(`hogy az`,critpts[i],`pontban van-e helyi
szélsőérték`):
 else lprint(Az  ,critpts[i],`pontban nyeregpont
van.`):
fi:
od:
end;



 szélsőérték:=proc()
local
dfx,dfy,dfxy,dfxx,dfyy,delta0,L,disc,i,var1,var2,fv,cri
tpts:

fv:=args[1]:var1:=args[2]:var2:=args[3]:
dfx:=diff(fv,var1):
dfy:=diff(fv,var2);
critpts:=[solve({dfx=0,dfy=0})];
if has(critpts,RootOf) then
 critpts:=evalf(map(allvalues,critpts));
fi;
```

```
L:=NULL:
for i to nops(critpts) do
 if type(rhs(critpts[i][1]),realcons) and
type(rhs(critpts[i][2]),realcons)
  then
  L:=L,critpts[i]
 fi
od;
critpts:={L};
critpts:=convert(critpts,list);
dfxx:=diff(fv,var1$2);
dfyy:=diff(fv,var2$2);
dfxy:=diff(fv,var1,var2);
disc:=simplify(dfxx*dfyy-dfxy^2):
for i to nops(critpts) do
 delta0:=evalf(subs(critpts[i],disc)):
  if delta0>0 then lprint(Az  ,critpts[i],`pontban
helyi szélsőérték van,`):
   if evalf(subs(critpts[i],dfxx))>0 then lprint(`  s
mivel f_xx>0, ez helyi minimum`):
    else lprint( `  s mivel f_xx<0, ez helyi
maximum.`):
   fi:
  elif delta0=0 then lprint(`A diszkrimináns 0,igy nem
tudjuk eldönteni,`):
  lprint(`hogy az`,critpts[i],`pontban van-e helyi
szélsőérték`):
  else lprint(Az  ,critpts[i],`pontban nyeregpont
van.`):
  fi:
od:
end:

 ICO1:=proc(seed::integer)
   local sentinel,count,sorozat;
   count:=0:
   sentinel:=seed:
   sorozat:=sentinel:
   while  sentinel<>1 and count<100 do
     sentinel:=Collatz(sentinel);
     sorozat:=sorozat,sentinel:
     count:=count+1;
   od;
   RETURN(sorozat);
```

```
 end:

 IC:=proc(seed::integer)
   local senitel,lista,a,j,jel,t,k ;
   global i,senit,teljes,ciklus,periodus;
   senitel:=seed; senit[0]:=seed: i:=1:a:=1:
   periodus:=0:
   while senitel<>1 and a<>0 and i<100^10 do
     senit[i]:=Collatz(senitel);
     a:=a*product((senit[i]-senit[k]),k=0..i-1):
     senitel:=senit[i];
     i:=i+1;
   od;
 if a=0 then
   for j from 0 to i-2 do if senit[j]- senit[i-1]=0
then periodus:=i-1-j; jel:=j: fi; od:
    lista:=NULL: for t from jel to i-1 do
lista:=lista,senit[t]: od:ciklus:=lista; fi:
    if senitel=1 then lista:=NULL: for t from 0 to i-1
do lista:=lista,senit[t]:
  od:
    ciklus:=lista:
    periodus:=2:
  fi:
 if senitel<>1 and a<>0 then print(`Nem ciklikus`) else
teljes:=NULL:
  for t from 0 to i-1 do teljes:=teljes,senit[t] od:
  fi:
 end:

 Trapez:=proc(L::listlist,s::posint)
   local i;
   (L[s][1]-L[1][1])/(2*(s-1))*
   (2*sum(L[i][2],i=2..s-1)+L[1][2]+L[s][2]);
  end:

 Simpson:=proc(L::listlist,s::posint)
  local i;
   if type(s,even) then RETURN(`Páros számú
részintervallum kell`) fi:
   (L[s][1]-L[1][1])/(3*(s-1))*
   (2*sum(L[2*i+1][2],i=1..(s-
3)/2)+4*sum(L[2*i][2],i=1..(s-1)/2)+L[1][2]+L[s][2]);
  end;
```

A legkisebb négyzetek módszere kapcsán szeretnénk példát adni arra, hogy miként teszi lehetővé a CAS a számolásigényes témakörök intenzív feldolgozását. Azokról a főbb kérdéskörökről, amelyek a számítógépes algebrai rendszerek használata során alapvetők, szeretnénk keresztmetszetet adni. Ez a fejezet- eltekintve az elméleti alapoktól és néhány apró alkalmazástól- tulajdonképpen fel sem dolgozható a CAS igénybevétele nélkül.
A számítógépes algebrai rendszereknek a tananyag-feldolgozásában betöltött szerepét az alábbi főbb szempontok figyelembe vételével vizsgáljuk:

- **A speciális adatszerkezetek, utasítások**
  A numerikus jellegű témakörök feldolgozása során különös jelentősége van az adatstruktúráknak és azok kezelésének. A lineáris regresszió tárgyalása során a listák és a segítségükkel létrehozható összetett adatszerkezetek készség szintű kezelésének elsajátítása döntő jelentőségű.
- **A CAS mint a hatékony motiváció eszköze**
  A motiváció az hatékony tanulás-tanítás egyik legfontosabb eszköze. A CAS segítségével a tárgyalandó ismeretkör időtakarékos és mégis látványos bevezetését végezhetjük el.
- **A modulok szerepe a feldolgozásban**
  A modulok készítése és használata különösen fontos szerepet kap ennél az ismeretkörnél. A részletszámítások hatékonyan, gyorsan elvégezhetők a modulok alkalmazásával . A modulok kapcsolt felhasználása, a felhasználás forgatókönyvszerű gyakoroltatása megnöveli a felhasználás hatékonyságát.
- **Modellképzés**
  A regressziós egyenes fogalmának bevezetését a feldolgozáshoz szükséges előismeretek összefoglalásával és a kellő motivációt biztosító probléma tárgyalásával készítjük elő. A regressziós egyenes együtthatóinak meghatározása után eljárást készítünk az egyenes meghatározásához. Megmutatjuk, hogy miként lehet ebből saját könyvtári eljárást készíteni. Ezután a módszer hatókörének kiterjesztése következik: az empirikus képletek tárgyalása. Az empirikus képletek alkalmazására több példát adunk. A CAS segítségével történő matematikai modellalkotást az összetett illesztési feladattal mutatjuk be. A feldolgozás ismertetése során kitérünk a modularizáció, a többszörös reprezentáció alkalmazásaira is.

1. A feldolgozáshoz szükséges előismeretek

A CAS használatával az előzetes ismeretek felelevenítése, összefoglalása lényegesen egyszerűbbé és teljesebbé válik. A hivatkozások, linkek használata mellett a felidézendő ismereteket tartalmazó munkalap változtatható voltát kell kiemelnünk.

1. 1. Listák kezelése

A Maple plot utasítása rendezett párok listáinak listájával dolgozik. Ismételjük át röviden, amire a listák területén szükségünk lesz.

Példa

Készítsünk értéktáblázatot az $f(x) = x^2 - 2x$ függvényhez! Ábrázoljuk a kapott értékpároknak megfelelő pontokat!

Megoldás

Vegyük föl mindenekelőtt a függvényt:

```
> restart:
> f:=x->x^2-2*x;
```

$f := x \to x^2 - 2\,x$

Legyen először az értelmezési tartomány az 5-nél nem nagyobb egészek halmaza! Ezeket a seq utasítással állíthatjuk elő és egy listában helyezzük el az értékeket.

```
> X:=[seq(i,i=-5..5)];
```

$X := [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

Mint tudjuk a lista kifejezések rendezett sorozata, tehát elemei indexezettek, egyenként elérhetők:

```
> X[3];
```

-3

A map utasítással előállíthatjuk a függvényértékek listáját...

```
> Y:=map(x->f(x),X);
```

$Y := [35, 24, 15, 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8, 15]$

A két listát a zip utasítás segítségével egyesíthetjük:

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[-5, 35], [-4, 24], [-3, 15], [-2, 8], [-1, 3], [0, 0], [1, -1], [2, 0], [3, 3], [4, 8], [5, 15]]$

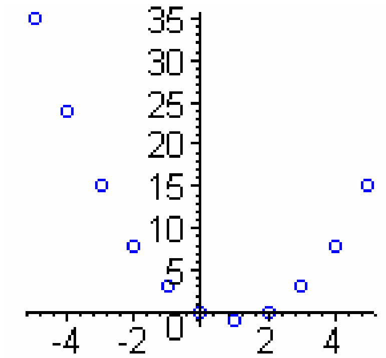
Ilyen módon a rendezett párokból álló listához jutottunk. Természetesen másképpen is eljuthattunk volna ide. Az alábbi megoldás közvetlenül a rendezett párok listáinak listáját adja.

```
> [seq([i,f(i)],i=-5..5)];
```

$[[-5, 35], [-4, 24], [-3, 15], [-2, 8], [-1, 3], [0, 0], [1, -1], [2, 0], [3, 3], [4, 8], [5, 15]]$

A pontok közvetlenül ábrázolhatók:

```
> plot(pontok,style=point,symbol=circle,color=blue);
```



1. 2. A kétváltozós függvény szélsőértéke

Közvetlenül a kétváltozós függvény helyi szélsőértékének létezésének létezésére vonatkozó szükséges feltételt használjuk föl:

Tétel

Ha a kétváltozós f függvény a $P_0(x_0, y_0)$ pontban mindkét változója szerint parciálisan deriválható és a függvénynek a P_0-ban helyi szélsőértéke van, akkor szükségképpen.

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0 \quad \textbf{és} \quad \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0\,.$$

Így az f(x,y) helyi szélsőértékhelyeit az

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x, y) = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{f}(x, y) = 0$$

egyenletrendszert kielégítő $\mathrm{P}(x, y)$ pontok között kell keresni. (kritikus pontok vagy másképp stacionárius pontok)

Megjegyezzük, hogy az elsőrendű parciális deriváltak zérus volta csak szükséges, de nem elegendő feltétele a helyi szélsőérték létezésének.

2. Motiváció

Probléma

Gazdasági fejlesztési tervek kidolgozása során gyakran merül föl az a kérdés, hogy vajon egy adott folyó vízhozama elegendő-e egy öntözési rendszer vagy vízierőmű-rendszer létesítéséhez, vagy, hogy mekkora gátra vagy tároló medencére van szükség az árvíz megelőzéséhez. A legjobb gátat gyakran olyan helyen kell megépíteni, ahol eddig kevés, vagy egyáltalán semmi vízhozam adatot sem mértek. Amint lehetővé válik a vizsgálat, felállítanak egy vízhozam-mérő állomást, hogy néhány évre - mondjuk 5-10 évre - szóló adatokhoz jussanak. A túl rövid időre szóló adatok általánosítására közelítő módszereket alkalmaznak. Nézzünk erre egy konkrét példát! A példa, mivel egy amerikai szerző könyvéből való (M. Ezekiel- K. Fox: Korreláció- és regresszióanalízis; a példát Achs Ágnes

Numerikus matematika című jegyzetében idézi), egy amerikai folyó vízhozamára vonatkozik.
Valamikor terveztek egy gátat a Kootenai folyón Newgate-nél, közel ahhoz a helyhez, ahol a folyó keresztezi az amerikai határt, de a vízhozamok feljegyzését csak 1931-ben kezdték meg. Hosszabb periódusra vonatkozó, Libby-nél (Montana) felvett feljegyzések viszont rendelkezésre álltak. (Ez a hely lejjebb fekszik a folyó mentén.) Hogyan lehet megbecsülni a vízhozam nagyságát Newgate-nél a Libby-ben mért értékekből?

Megoldás

Természetesnek tűnik a gondolat, hogy az azonos évre vonatkozó adatokból értékpárokat készítsünk, az értékpároknak megfelelő pontokat ábrázoljuk. Mivel a newgate-i vízhozamokat akarjuk becsülni a Libby-beliek alapján, a newgate-i mennyiségeket kel függő változónak, a Libby-belit pedig független változónak tekinteni.A pontok elhelyezkedése alapján valamelyes képet kaphatunk a függvénykapcsolat jellegéről.

Az adatokat ($\frac{m^3}{s}$) az 1. táblázat tartalmazza.

	A	B	C	
1	*Év*	*Libby*	*Newgate*	
2	1931	27.1	19.7	
3	1932	20.9	18.0	
4	1933	33.4	26.1	
5	1934	77.6	44.9	
6	1935	37.0	26.1	
7	1936	21.6	19.9	
8	1937	17.6	15.7	
9	1938	35.1	27.6	
10	1939	32.6	24.9	
11	1940	26.0	23.4	
12	1941	27.6	23.1	
13	1942	38.7	31.3	
14	1943	27.8	23.8	

1.táblázat

A táblázatból -kijelölve azokat és másolva - kinyerhetjük az adatokat, mátrix formában:

```
> M:=MATRIX([[27.1, 19.7], [20.9, 18.0], [33.4, 26.1], [77.6, 44.9], [37.0, 26.1], [21.6, 19.9], [17.6, 15.7], [35.1, 27.6], [32.6, 24.9], [26.0, 23.4], [27.6, 23.1], [38.7, 31.3], [27.8, 23.8]]):
```

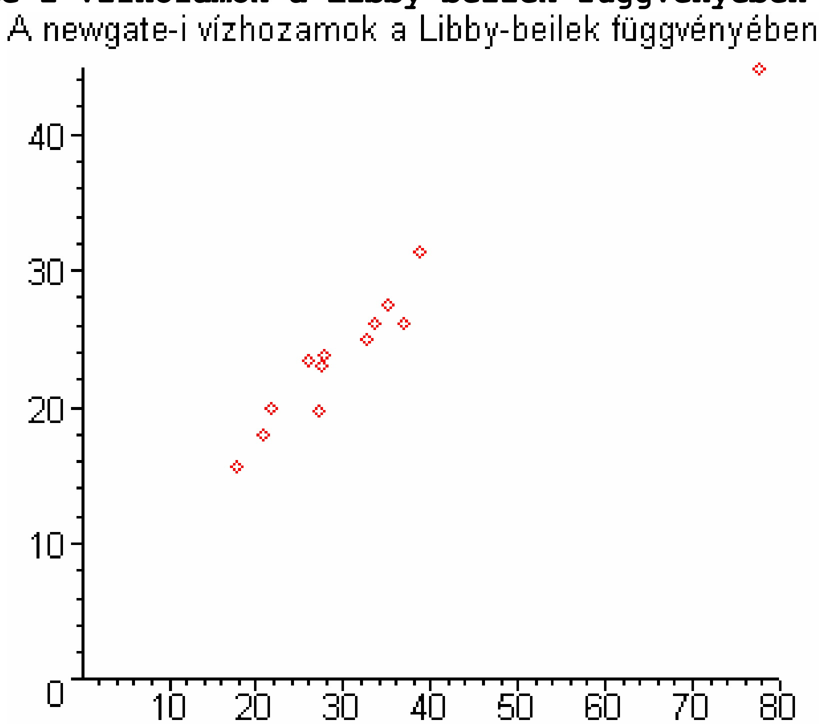
A mátrix egyetlen operandusa a pontok (ezek kételemű listák) listája, s ez közvetlenül ábrázolható!

```
> pontok:=op(M);
```

$$pontok := [[27.1, 19.7], [20.9, 18.0], [33.4, 26.1], [77.6, 44.9], [37.0, 26.1], [21.6, 19.9], [17.6, 15.7], [35.1, 27.6], [32.6, 24.9], [26.0, 23.4], [27.6, 23.1], [38.7, 31.3], [27.8, 23.8]]$$

Ábrázoljuk a kapott pontokat, tehát a vízhozamok közötti összefüggést!

```
> plot(pontok,style=point,view=[0..80,0..45],title=`A newgate-i vízhozamok a Libby-beilek függvényében`);
```




```
> f:=unapply(a*x+b,x);
```

$$f := x \to a\,x + b$$

A vízhozamok közti összefüggést egyenes vonallal lehet jellemezni, tehát meg kell határoznunk azt a lineáris függvényt, amely a "legjobban illeszkedik" a tekintett értékpárokhoz. Ilyen jellegű problémákkal foglalkozunk ebben a fejezetben.

3. Lineáris regresszió

3. 1. A regressziós egyenes meghatározása

Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor **a közelítő függvény (empirikus függvény) elsőfokú polinom,** azaz lineáris függvény. Az alkalmazott eljárás pedig az un. **legkisebb négyzetek módszere** lesz.

Legyenek a mért értékpárok: $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, . . . , $[x_n, y_n]$.

A keresett közelítő függvény legyen $y = a\,x + b$ alakú.

Az x_k értékekhez tartozó y_k értékek és a keresett lineáris közelítő függvény értékeinek eltérései:

$$d_k = y_k - (m\,x_k + b)$$

Az eltérések ellentétes előjel esetén kiolthatják egymást, ezért az eltérések négyzetösszegét , azaz az

$$\mathrm{f}(a, b) = (y_1 - a\,x_1 - b)^2 + (y_2 - a\,x_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - a\,x_n - b)^2$$

függvény értékét szeretnénk minimalizálni.

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak 0 értékűek legyenek,azaz:

$$\frac{\partial}{\partial a} f = \sum_{k=1}^{n} 2\,(y_k - a\,x_k - b)\,(-x_k) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} f = \sum_{k=1}^{n} (-2\,(y_k - a\,x_k - b)) = \mathbf{0} \qquad \mathbf{(2)}$$

teljesüljön.

Az (1) -ből és (2)-ből rendezéssel adódik :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k = a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \qquad \mathbf{(1')}$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + b\,n \qquad \mathbf{(2')}$$

Az egyenletrendszert a-ra és b-re kell megoldanunk. Ezt már bízzuk a Maple-re! Nyugodtan megtehetjük ezt, mert az ilyen egyenletrendszerek megoldása rutinfeladatnak számít. Ugyanakkor az együtthatók terjedelmes volta miatt ezzel jelentős munka- és időmegtakarítást érhetünk el.

```
> restart:
```
Vegyük fel a megoldandó egyenleteket:

```
>
e1:=sum(x[k]*y[k],k=1..n)=a*sum(x[k]^2,k=1..n)+b*sum(x[
k],k=1..n);
```

$$e1 := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

```
> e2:=sum(y[k],k=1..n)=a*sum(x[k],k=1..n)+b*n;
```

$$e2 := \sum_{k=1}^{n} y_k = a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + b\,n$$

A solve utasítás megoldja az egyenletrendszert:

```
> solve({e1,e2},{a,b});
```

$$\left\{ a = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2},\ b = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \right\}$$

```
> assign(%);
```
A legjobban közelítő, un. regressziós egyenes paraméterei tehát:

```
> 'a'=a;
```

$$a = \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}$$

```
> 'b'=b;
```

$$b = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}$$

A regresszió szó a latin regredior igével hozható kapcsolatba, ami visszamegy, visszatér jelentésű. Arról van szó, hogy az összetartozó értékpárokhoz illesztett egyenes módot nyújt a kapott függvény "múltbeli" ill jövőbeli" értékeinek meghatározására. Ilyen módon a folyamat "múltja" és "jövője" becsülhető!
A regressziós egyenes felírása sok számolással jár. Írjunk ezért eljárást a kiszámítására!

3. 2. Eljárás a regressziós egyenes meghatározására

Az eljárás az előző paragrafusban levezetettek alapján kiszámítja a regressziós egyenes felírásához szükséges alapmennyiségeket, majd ezek segítségével az egyenes paramétereit. Megadja a regressziós egyenest, ábrázolja azt és kiszámítja az eltérések négyzetösszegét is. A modularizáció szemszögéből nézve: a tanár által készített, a kiszámítást megkönnyítő (tk. lehetővé tevő) modulról van szó. Az eljárást lényegét illetően a white box/ black box elv alapján használjuk. Azért csak lényegileg, mert néhány technikai részletet nem feltétlenül tisztázunk (pl. az argumentumok kezelése), de ez az eljárás lényegét nem érinti. A **regressiosegy** eljárás a feldolgozás alapvető eszköze, alapeljárás. Megadja a regressziós egyenes egyenletét, az eltérések négyzetösszegét és ábrázolja a pontokat, valamint a regressziós egyenest. Ilyen módon az illesztés jóságáról numerikusan és grafikus módon is meggyőződhetünk. Az eljárást bőségesen elláttuk kommentárokkal, ezáltal is közelebb hozzuk a matematikai tartalmat és a szintaktikai elemeket.

```
> regressziosegy:=proc()
> # Eljárás a regressziós egyenes  meghatározására
>  local n,i,X2,X,XY,Y,p1,p2,Xert;
> global a,b;   #Az egyenes paraméterei globálisak,így
az   eljáráson kívül is elérhetők
>  n:=nops(args[1]);
>  for i from 1 to n do
>   x||i:=op(1,args[1][i]);
>   y||i:=op(2,args[1][i]);
>  od;
>  X2:=sum('x||i^2','i'=1..n):    #Rendre kiszámítjuk az
x értékek eltéréseinek négyzetösszegét
>  X:=sum('x||i','i'=1..n):      #Az x értékek összegét
>  XY:=sum('x||i*y||i','i'=1..n):#A szorzatösszeget
>    Y:=sum('y||i','i'=1..n):          #  Az  y  értékek
összegét
>     a:=(n*XY-X*Y)/(n*X2-X^2):              #Az   egyenes
meredeksége
>  b:=(X2*Y-X*XY)/(X2*n-X^2):    #Az y tengellyel való
metszéspont második koord.
```

```
> print(`Az eltérések négyzetösszege`,evalf(sum('(y||i-a*x||i-b)^2','i'=1..n)));
> print(`A regressziós egyenes`,a*x+b);
> p1:=plot(args,style=point,symbol=circle,color=red):
> Xert:=NULL:
> for i to nops(args) do
> Xert:=Xert,op(1,op(i,args))
> od:
> p2:=plot(a*x+b,x=min(Xert)-0.1..max(Xert)+0.1,thickness=2,color=blue):
> plots[display]({p1,p2});
> end:
> pontok:=[[27.1, 19.7], [20.9, 18.0], [33.4, 26.1], [77.6, 44.9], [37.0, 26.1], [21.6, 19.9], [17.6, 15.7], [35.1, 27.6], [32.6, 24.9], [26.0, 23.4], [27.6, 23.1], [38.7, 31.3], [27.8, 23.8]];
```

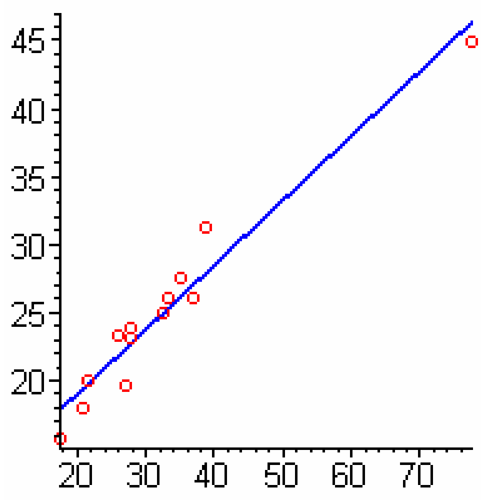
pontok := [[27.1, 19.7], [20.9, 18.0], [33.4, 26.1], [77.6, 44.9], [37.0, 26.1], [21.6, 19.9], [17.6, 15.7], [35.1, 27.6], [32.6, 24.9], [26.0, 23.4], [27.6, 23.1], [38.7, 31.3], [27.8, 23.8]]

Számítsuk ki a bevezető példa pontjaihoz tartozó regressziós egyenest. Az eljárást a listák listájaként megadott **pontok** paraméterrel hívhatjuk meg.

```
> regressziosegy(pontok);
```

Az eltérések négyzetösszege, 35.05298187

A regressziós egyenes, 0.4747559050 x + 9.513711706



Láthatóan a kapcsolat jó közelítéssel lineáris, a Libby-beli vízhozamból következtethetünk a Newgate-belire!

A következő példa nem pusztán a regressziós egyenes fogalmának elmélyítését szolgálja. Bemutatjuk ugyanis, hogyan lehet véletlenszerűen generált pontokat készíteni. Így figyelemmel kísérhetjük azt, hogy milyen hibával, milyen "jósággal" közelíti meg az "elrontott függvényt" a regressziós egyenes!

Példa

Határozzuk meg a következő, véletlenszerűen generált második koordinátájú pontokhoz tartozó regressziós egyenest!

Legyen az értelmezési tartomány a következő:

```
> X:=[seq(i,i=-5..5)];
```

$X := [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

A pontok második koordinátáját úgy hozzuk létre, hogy adott lineáris függvény értékeit hibával terheljük meg. Ezt a rand() utasítással tehetjük meg.

A rand() véletlenszerűen választott, 12 jegyű, nemnegatív egészet ad meg:

```
> rand();
```

313746086538

Ezt 10 alkalmas hatványával osztva kellően kis számot generálhatunk

```
> evalf(rand()/10^12);
```

0.005862664913

A rand() mod 2 segítségével elérhetjük az előjel véletlenszerű váltakozását is: A rand() mod 2 értékét 2-vel szorozva 0 ill. 2 adódik, ebből egyet levonva -1 ill. 1.

```
> seq(2*(rand() mod 2)-1,i=1..10);
```

-1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -1

Legyen a lineáris függvény a következő:

```
> f:=x->2*x-1;
```

$f := x \rightarrow 2\,x - 1$

Képezzük a map utasítással a megfelelő függvényértékek listáját

```
> Y:=map(x->f(x)+(2*(rand() mod 2)-1)*evalf(rand()/10^13)*5,X);# *
```

$Y := [-10.50405072, -8.829596136, -6.685260065, -4.799202647, -2.542587432, -0.7729496274, 1.040351556, 2.723539395, 5.310162414, 7.262858991, 8.509254236]$

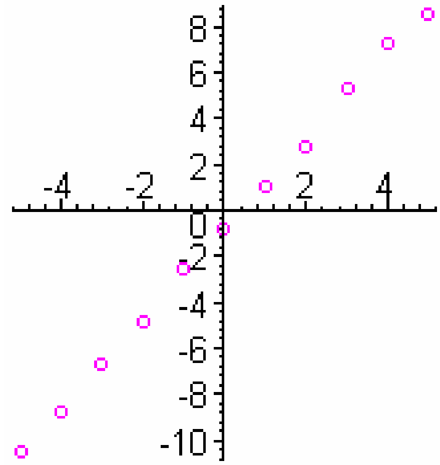
A zip segítségével létrehozzuk a pontokat (számpárokat)

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[-5, -10.50405072], [-4, -8.829596136], [-3, -6.685260065], [-2, -4.799202647], [-1, -2.542587432], [0, -0.7729496274], [1, 1.040351556], [2, 2.723539395], [3, 5.310162414], [4, 7.262858991], [5, 8.509254236]]$

Készítsünk a pontokról ábrát....

```
> plot(pontok,style=point,symbol=circle,color=magenta);
```

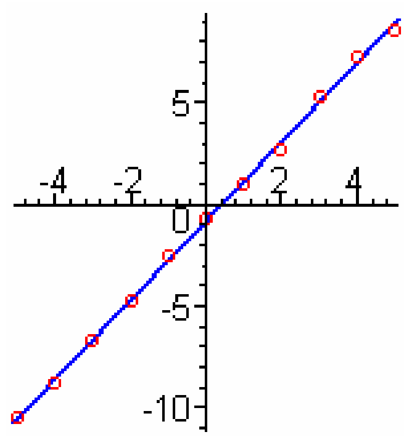


A pontok valóban egyenest közelítenek meg. Hívjuk meg az eljárást!

```
> regressziosegy(pontok);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.5710075946

A regressziós egyenes, 1.945918507 x – 0.8443163678



A várakozásnak megfelelően az "elrontott" egyenestől kevéssel eltérő egyenest kaptunk

Feladat

Változtassuk meg a pontok generálását, vagyis az Y értékeket, úgy, hogy a lineáris függéstől való eltérés kisebb ill. nagyobb legyen! Figyeljük meg, milyen nagyságrendben változik eközben az eltérések négyzetösszege!

3. 3. Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg a regressziós egyenest, ha a mért adatok:

a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6

y_i	2.1	0.81	-0.5	-2.1	-3.4	-4.3	-5.8

b)

x_i	1.5	1.8	2.4	3.0	3.5	4.0	4.5	6.0
y_i	1.9	2.1	2.8	3.4	4.0	4.1	5.1	6.1

2. Hubble törvénye az Univerzum tágulásáról a következőképpen szól:

Sebesség = Hubble-állandó*távolság,

vagy

$$v = H\,x$$

Ez azt fejezi ki, hogy az a sebesség, amellyel a galaxis tőlünk távolodni látszik, arányos a galaxis távolságával. Minél messzebb van tőlünk a galaxis, annál gyorsabban távolodik.

Ha a sebességet $km\,s^{(-1)}$ -ben, a távolságot pedig millió fényévekben mérjük, akkor a Hubble-állandótkm/s/millio fényévben kapjuk. A H értéke az Universum tágulásának mértéke.

Az alábbi táblázat öt galaxis adatait tartalmazza:

Galaxis	A	B	C	D	E
Megfigyelt távolság(10^6 fényév)	500	1400	2100	2900	3000
Távolodási sebesség (km/s)	9000	22000	39000	51000	49000

"Fedezzük fel" Hubble törvényét, keressük meg a legkisebb négyzetek módszerével a
mért értékekhez tartozó regressziós egyenest!

Megjegyzés: A H értékéül vegyük az adódó meredekség értékének egészekre kerekített értékét.

A b 0-tól különböző értéke a mérési hibákból és az adatok kis számából adódik.

4. Empirikus képletek

4. 1. Bevezetés, alapeljárás

A regressziós egyenes meghatározásának jelentősége azért is nagy, mert a műszaki életben s másutt is gyakran fellépő függvények többségét valamilyen transzformációval linearizálni lehet, azaz ezek lineáris függvényként kezelhetők. Ebben a fejezetben a legfontosabb empirikus képletek közül néhányat tárgyalunk. A munka során a regressziosegy eljárást használjuk.

4. 2. Logaritmikus illesztés

A mért értékekre

$$f(x) = a\ln(x) + b$$

alakú illesztést keresünk. Bevezetjük a $z = \ln(x)$ helyettesítést. A mért x értékeknek vesszük a logaritmusát és az (x_i, y_i) értékpárokról áttérünk az ($\ln(x_i), y_i$) értékpárokra (i = 1, . . . , n) Ezekkel az adatokkal meghatározzuk a regressziós egyenest, a az adódó együtthatók segítségével a keresett logaritmikus függvényt.

Fogalmazzuk meg lépésenként a tennivalókat! A követendő út általában az itt leírt lépésekből áll. Lényegesnek tartjuk ilyen lépéssorozatok tudatosítását. Ezek a sémák a téma feldolgozásának alapját képezik.

1. Az értékeket listákban tároljuk, a zip utasítással előállítjuk az összetartozó értékpárok listáját:

```
> X:=[seq(i,i=1..6)];
```

$X := [1, 2, 3, 4, 5, 6]$

```
>Y:=[1.557258033,3.228601822,4.070962393,4.785270808,
5.362137759, 5.747027974];
```

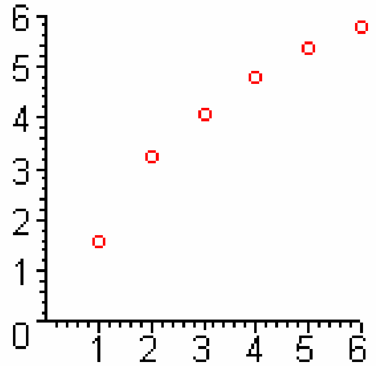
$Y := [1.557258033, 3.228601822, 4.070962393, 4.785270808,$
$5.362137759, 5.747027974]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[1, 1.557258033], [2, 3.228601822], [3, 4.070962393],$
$[4, 4.785270808], [5, 5.362137759], [6, 5.747027974]]$

2. Ábrázoljuk a **pontok**at és megpróbáljuk megállapítani a megfelelő képlettípust:

```
plot(pontok,style=point,symbol=circle,color=red,view=[0
..6,0..6]);
```



3. Elvégezzük a megfelelő transzformációt:

Itt $f(x) = a\ln(x) + b$ alakú függvény illesztése várható, ezért az $u = \ln(x)$ transzformációt kell elvégeznünk. Ezt az **X** lista elemeire a map utasítással tehetjük meg

```
> X1:=evalf(map(ln,X));
```

$X1 := [0., 0.6931471806, 1.098612289, 1.386294361, 1.609437912, 1.791759469]$

4. Létrehozzuk a transzformáció utáni értékpárok listáját és meghatározzuk a **regressziosegy** eljárással a regressziós egyenest.

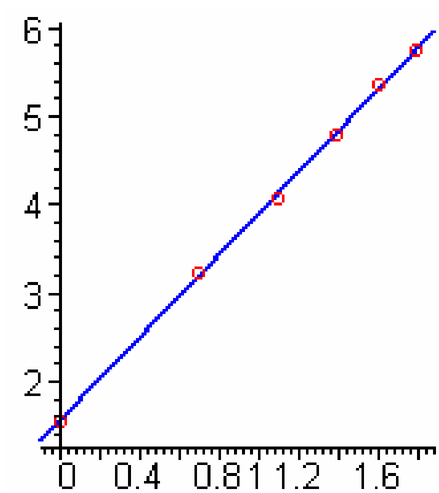
```
> pontokln:=zip((x,y)->[x,y],X1,Y);
```

$pontokln := [[0., 1.557258033], [0.6931471806, 3.228601822], [1.098612289, 4.070962393], [1.386294361, 4.785270808], [1.609437912, 5.362137759], [1.791759469, 5.747027974]]$

```
> regressziosegy(pontokln);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.007413776187

A regressziós egyenes, $2.336902565\, x + 1.562698290$



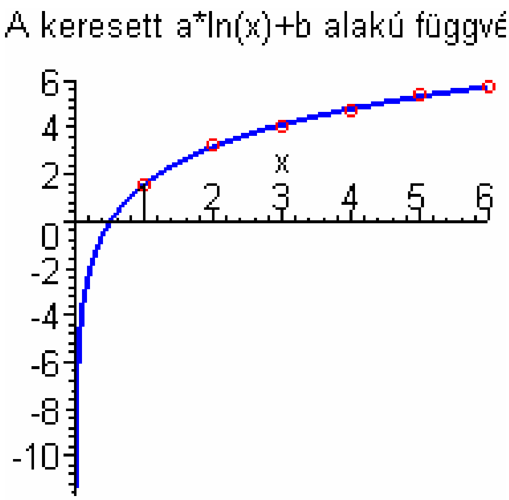
5. Létrehozzuk a keresett függvényt. A regressziosegy globális változói, az a és a b a megfelelő együtthatók A keresett logaritmus-függvény a meghatározott együtthatókkal:

```
> f:=unapply(a*ln(x)+b,x);
```

$f := x \to 2.336902565 \ln(x) + 1.562698290$

6. Ábrázoljuk a pontokat és a közelítő függvényt. A **grafikus reprezenzáció** segítségével **ellenőrzés**t végzünk.

```
> abra:=plot(f(x),x=op(1,X)-1..op(nops(X),X),color=blue,thickness=2):
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle):
> plots[display]({abra,kep},title=`A keresett a*ln(x)+b alakú függvény`);
```



7. Kiszámítjuk az eltérések négyzeteit, majd az eltérések négyzetösszegét. Ilyen módon **algebrai úton** is meggyőződünk az **illesztés jóságáról!**

```
> seq(evalf((f(X[i])-Y[i])^2),i=1..nops(X));
```

0.00002959639623, 0.002123929351, 0.003491128571, 0.0002911231050, 0.001469946705, $0.8052058888\ 10^{-5}$

```
> Sum('((f(X[i])-Y[i])^2)',i=1..nops(X))=sum('evalf((f(X[i])-Y[i])^2)',i=1..nops(X));
```

$$\sum_{i=1}^{6} (\mathrm{f}(X_i) - Y_i)^2 = 0.007413776187$$

4. 3. Exponenciális illesztés

Exponenciális illesztés esetén

$$\mathrm{f}(x) = B\,\mathrm{e}^{(A\,x)}$$

alakú függvényt keresünk. Képezzük az

$$y = B\,\mathrm{e}^{(A\,x)}$$

logaritmusát:

$$\ln(y) = \ln(B) + A\,x \;=\; a\,x + b\,,$$

ahol $A = a$ és $B = \mathrm{e}^b$

Az (x_i, y_i) mért értékekről áttérünk az

$$(\;x_i, \ln(y_i)\,)$$

értékpárokra és meghatározzuk az a és a b értékét. Ezután $A = a$ és $B = \mathrm{e}^b$

Példa

Határozza meg az alábbi pontokra megfelelően illeszkedő, $y = a\,e^{(b\,x)}$ típusú függvényt!

x_i	0	1	2	3
y_i	4.9	1.85	1.08	0.71

Megoldás

```
> X:=[seq(i,i=0..3)];
```

$X := [0, 1, 2, 3]$

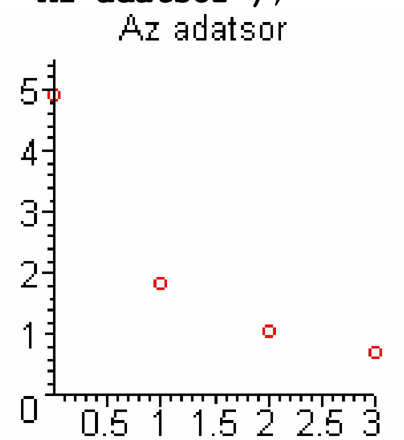
```
> Y:=[4.9,1.85,1.08,0.71];
```

$Y := [4.9, 1.85, 1.08, 0.71]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[0, 4.9], [1, 1.85], [2, 1.08], [3, 0.71]]$

```
>
plot(pontok,style=point,view=[0..3,0..5.5],color=red,sy
mbol=circle,title=`Az adatsor`);
```




```
> Yln:=map(ln,Y);# Az y értékek logaritmusát kell venni
```

$Yln := [1.589235205, 0.6151856391, 0.07696104114, -0.3424903089]$

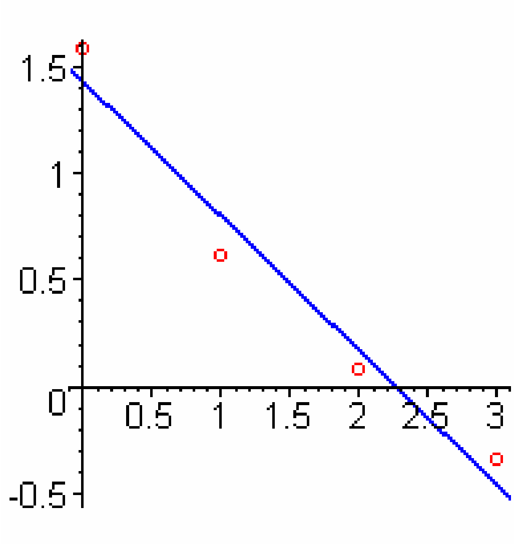
```
> pontok1:=zip((x,y)->[x,y],X,Yln);
```

$pontok1 := [[0, 1.589235205], [1, 0.6151856391], [2, 0.07696104114],$
$[3, -0.3424903089]]$

```
> regressziosegy(pontok1);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.08192088496

A regressziós egyenes, $-0.6333401140\,x + 1.434733064$



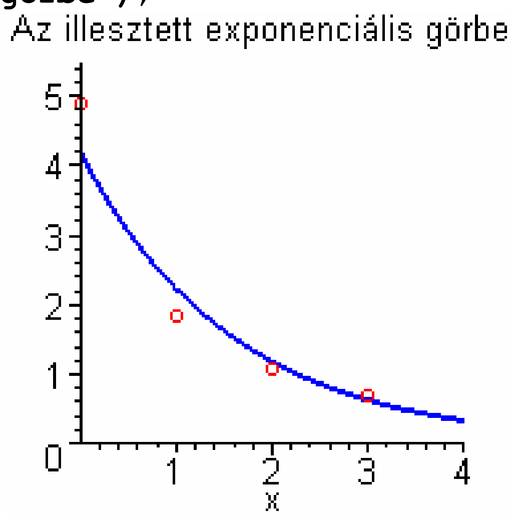
Mivel $f(x) = B\,e^{(A\,x)}$,ahol $A = a$ és $B = e^b$, a regressziós egyenes egyenlete: $y = a\,x + b$

```
> f:=unapply(exp(b)*exp(a*x),x);
```

$$f := x \to 4.198524122\,e^{(-0.6333401140 x)}$$

Ábrázoljuk a pontokat és a közelítő függvényt:

```
> abra:=plot([f(x)],x=-0.5..6,view=[0..4,0..5.5],color=[blue,green],thickness=[2,1]):
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle):
> plots[display]({abra,kep},title=`Az illesztett exponenciális görbe`);
```



Algebrai ellenőrzésként számítsuk ki az eltérések négyzeteit, majd az eltérések négyzetösszegét!

```
> seq(evalf((f(X[i])-Y[i])^2),i=1..nops(X));
```
0.4920684074, 0.1433706396, 0.01060881748, 0.006731434271

```
> Sum('((f(X[i])-Y[i])^2)',i=1..nops(X))=sum('evalf((f(X[i])-Y[i])^2)',i=1..nops(X));
```
$$\sum_{i=1}^{4} (\mathrm{f}(X_i) - Y_i)^2 = 0.6527792988$$

Feladat

Tekintsük az $\mathrm{f}(x) = 1.3\,\mathrm{e}^{(.56\,x)}$ függvényt. A függvény néhány pontját a rand függvénnyel tegyük "pontatlanná", majd az így nyert pontokra illesszünk $y = a\,\mathrm{e}^{(b\,x)}$ alakú függvényt! Ábrázolja az eredeti és az illesztett függvényt közös koordinátarendszerben!

Megoldás

```
> X:=[seq(i,i=-2..4)];
```
$X := [-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]$

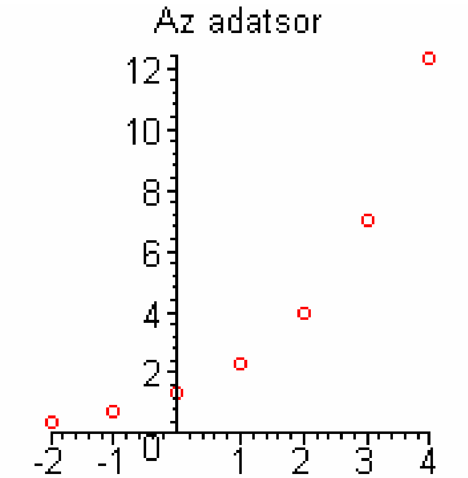
```
> f1:=x->1.3*exp(0.56*x);
```
$f1 := x \rightarrow 1.3\,\mathrm{e}^{(0.56\,x)}$

```
> Y:=map(x->f1(x),X);
```
$Y := [0.4241637330, 0.7425717829, 1.3, 2.275874250, 3.984310464, 6.975222762, 12.21133067]$

```
> Ymod:=map(x->x+rand()/10^13*(2*(rand() mod 2)-1),Y);
```
$Ymod := [0.3828187761, 0.7268090318, 1.333906289, 2.287826409, 3.969245374, 6.966941164, 12.27948925]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Ymod);
```
$pontok := [[-2, 0.3828187761], [-1, 0.7268090318], [0, 1.333906289], [1, 2.287826409], [2, 3.969245374], [3, 6.966941164], [4, 12.27948925]]$

```
> plot(pontok,style=point,view=[-2..4,0..12.5],color=red,symbol=circle,title=`Az adatsor`);
```




```
> Yln:=map(ln,Ymod);# Az y értékek logaritmusát kell venni
```

$Yln := [-0.9601935712, -0.3190915157, 0.2881116969, 0.8276022004, 1.378575995, 1.941176271, 2.507930330]$

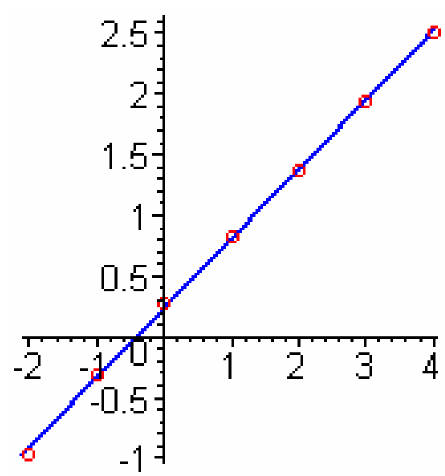
```
> pontok1:=zip((x,y)->[x,y],X,Yln);
```

$pontok1 := [[-2, -0.9601935712], [-1, -0.3190915157], [0, 0.2881116969], [1, 0.8276022004], [2, 1.378575995], [3, 1.941176271], [4, 2.507930330]]$

```
> regressziosegy(pontok1);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.006477942756

A regressziós egyenes, $0.5719775566\, x + 0.2371812158$

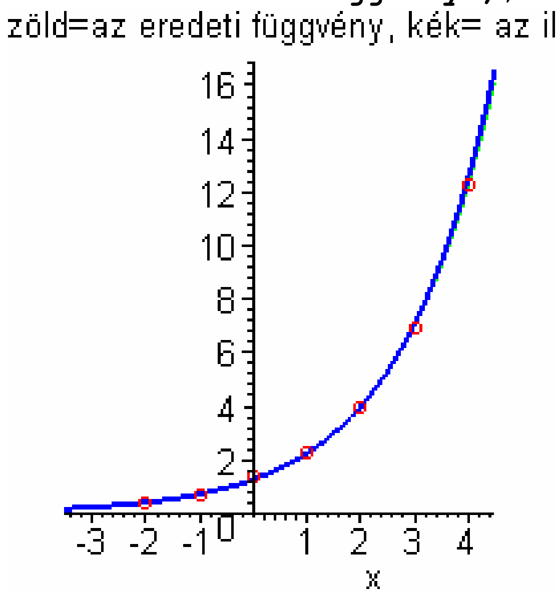



```
> f:=unapply(exp(a*x)*exp(b),x);
```

$f := x \to 1.267670819\, \mathrm{e}^{(0.5719775566\, x)}$

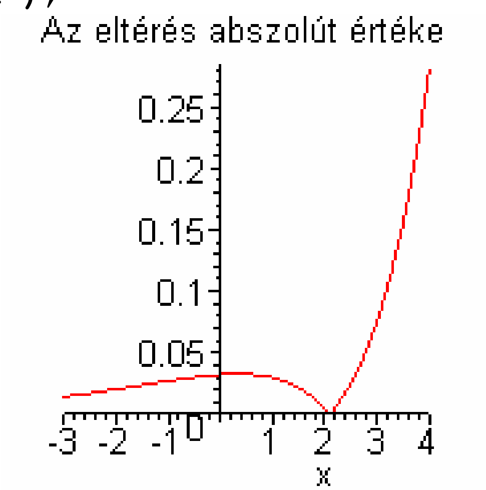
Ábrázoljuk a pontokat az eredeti függvényt és a közelítő függvényt:

```
> abra:=plot([f(x),f1(x)],x=-3.5..4.5,color=[blue,green],thickness=[2,1]):
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle):
> plots[display]({abra,kep},title=`zöld=az eredeti függvény, kék= az illesztett függvény`);
```



Az eredeti és a regresszióval nyert közelítő függvény ábránkon lényegében egybeesik. Jobban érzékelhetjük a köztük lévő különbséget, ha az eltérésük abszolút értékét ábrázoljuk!

```
> plot(abs(f(x)-f1(x)),x=-3..4,title=`Az eltérés abszolút értéke`);
```



4. 4. Hatványfüggvény illesztése

Hatványfüggvény alakú, azaz

$$f(x) = B\,x^A$$

illesztést keresünk. Ekkor képezzük az

$$y = B\,x^A$$

mindkét oldalának logaritmusát:

$$\ln(y) = \ln(B) + A\,\ln(x)$$

Az (x_i, y_i) mért értékekről áttérünk az

$$(\ \ln(x_i), \ln(y_i)\ )$$

értékpárokra és meghatározzuk az

$$y = a\,x + b$$

regressziós egyenest, ahol $b = \ln(B)$, ebből $B = e^b$ és $A = a$.

Példa

Tekintsük a következő adatokat:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	3.1	5.6	9.1	12.9

Ábrázoljuk a pontokat és illesszünk rájuk megfelelő típusú függvényt!

Megoldás

```
> X:=[seq(i,i=1..5)];
```

$X := [1, 2, 3, 4, 5]$

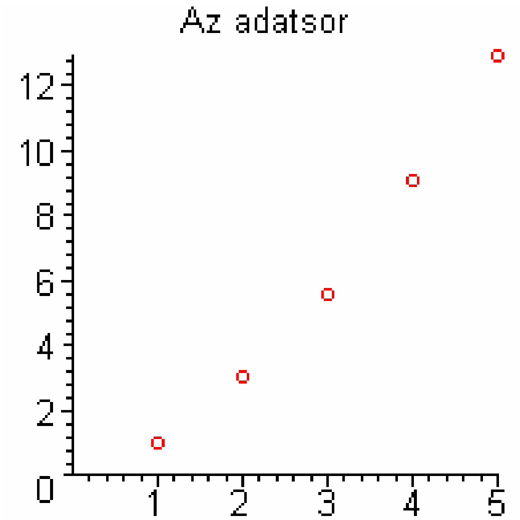
```
> Y:=[1.0,3.1,5.6,9.1,12.9];
```

$Y := [1.0, 3.1, 5.6, 9.1, 12.9]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[1, 1.0], [2, 3.1], [3, 5.6], [4, 9.1], [5, 12.9]]$

```
>
plot(pontok,style=point,view=[0..5,0..13],color=red,sym
bol=circle,title=`Az adatsor`);
```

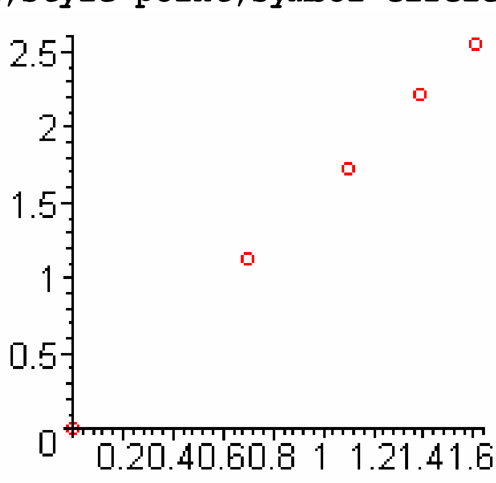


Az ábrázolt pontok alapján reális az illesztendő függvényt $f(x) = a\,x^b$ alakban keresnünk.

```
> X1:=evalf(map(ln,X));
```
$X1 := [0., 0.6931471806, 1.098612289, 1.386294361, 1.609437912]$

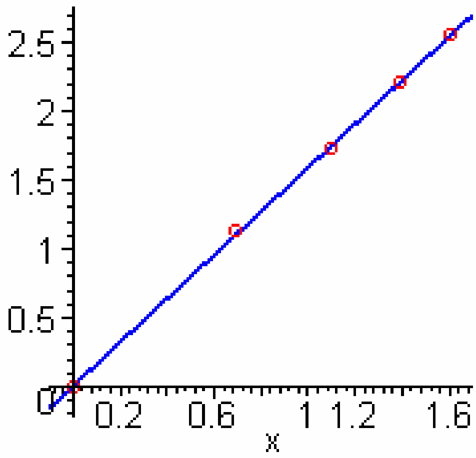
```
> Y1:=map(ln,Y);
```
$Y1 := [0., 1.131402111, 1.722766598, 2.208274414, 2.557227311]$

```
> pontokln:=zip((x,y)->[x,y],X1,Y1);
```
$pontokln := [[0., 0.], [0.6931471806, 1.131402111], [1.098612289, 1.722766598], [1.386294361, 2.208274414], [1.609437912, 2.557227311]]$

```
> plot(pontokln,style=point,symbol=circle);
```



```
> regressziosegy(pontokln);
```
Az eltérések négyzetösszege, 0.001375027305

A regressziós egyenes, $1.583468446\, x + 0.007765666067$




```
> B:=exp(b);A:=a;
```

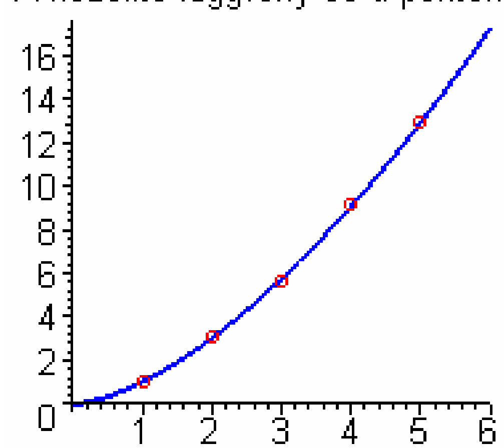
$B := 1.007795897$

$A := 1.583468446$

```
> f:=unapply(B*x^A,x);# A keresett függvény
```

$f := x \to 1.007795897\, x^{1.583468446}$

```
>
abra:=plot(f(x),x=0..op(nops(X),X)+1,color=blue,thickne
ss=2):
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle):
> plots[display]({abra,kep},title=`A közelítő függvény
és a pontok`);
```



4. 5. Példák

A példákkal azt mutatjuk meg, hogy az előzőktől eltérő esetekben is sikeres lehet a linearizálás módszere. Egyuttal bemutatjuk, hogyan alkalmazható a módszer a konkrét problémák megoldásra. Mindkét példánál prognózist is kell adnunk, azaz olyan függvényértéket kell megbecsülnünk, amelyhez tartozó változóérték kívül esik a megadott, mért értékek tartományán!

Példa

A piacon a gyümölcs ára fordítottan arányos a felhozatal mennyiségével. Az elmúlt időben a gyümölcsmennyiség és az árak a következőképpen változtak:
Amikor 5 q almát hoztak, akkor kilóját 22 Ft-ért árulták,

Felhozatal (q)	5	10	16	20	30	40
Ár (Ft/kg)	45	41	38	37	36	35

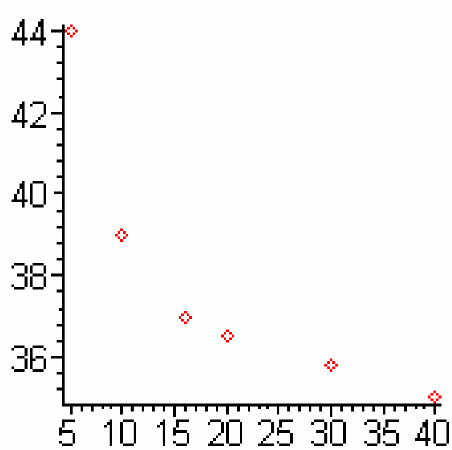
a) Határozzuk meg az árfüggvényt!
b) Körülbelül mekkorára várható az alma ára, ha 120 mázsát hoznak?

Megoldás

```
> X:=[5,10,16,20,30,40];
```
$X := [5, 10, 16, 20, 30, 40]$

```
> Y:=[44,39,37,36.5,35.8,35];
```
$Y := [44, 39, 37, 36.5, 35.8, 35]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```
$pontok := [[5, 44], [10, 39], [16, 37], [20, 36.5], [30, 35.8], [40, 35]]$

```
> plot(pontok,style=point);
```


Az ábra alapján $y = \frac{a}{x} + b$ alakú illesztést várhatunk. Ezért a linearizáló transzformáció:

$u = \frac{1}{x}$. Végezzük el a transzformációt a map utasítás segítségével:

```
> Xuj:=map(x->1/x,X);
```

$$Xuj := \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}\right]$$

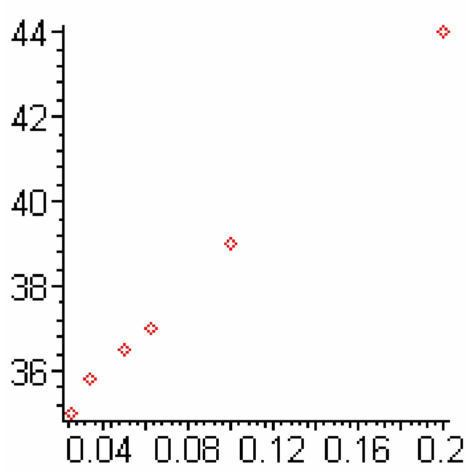
Létrehozzuk a transzformáció utáni értékpárokat:

```
> pontokuj:=zip((x,y)->[x,y],Xuj,Y);
```

$$pontokuj := \left[\left[\frac{1}{5}, 44\right], \left[\frac{1}{10}, 39\right], \left[\frac{1}{16}, 37\right], \left[\frac{1}{20}, 36.5\right], \left[\frac{1}{30}, 35.8\right], \left[\frac{1}{40}, 35\right]\right]$$

Készítsük el a transzformáció után kapott pontok ábráját:

```
> plot(pontokuj,style=point);
```

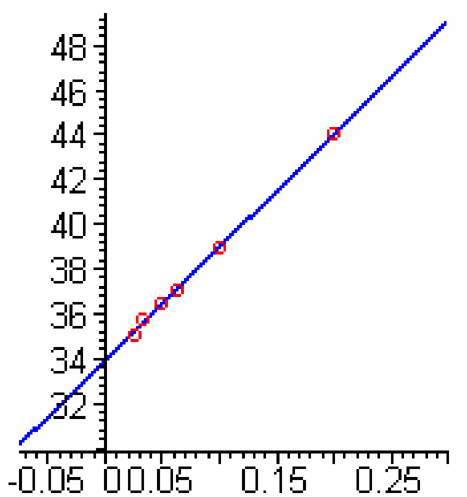


A linearizálás láthatóan jól sikerült. Meghatározzuk a regressziós egyenest:

```
> regressziosegy(pontokuj);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.08204777906

A regressziós egyenes, $50.44095537\,x + 33.92511946$

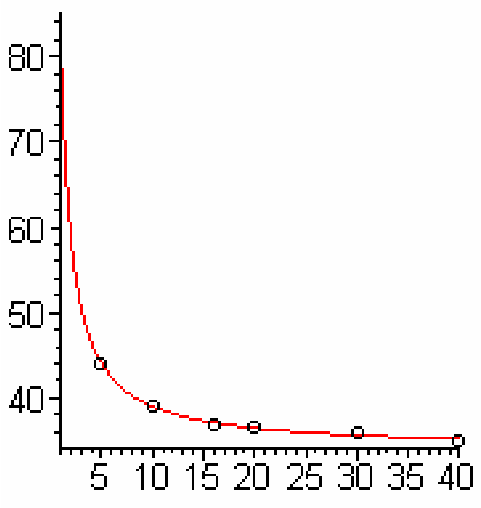


A keresett függvény:

```
> f:=unapply(a/x+b,x);
```

$$f := x \rightarrow \frac{50.44095537}{x} + 33.92511946$$

```
> kep:=plot(pontok,style=point,symbol=circle,color=black):
> abra:=plot(f(x),x=pontok[1][1]-4..pontok[nops(pontok)][1]):
> plots[display]({%,%%});
```




```
> `A várható ár 120 q felhozatalakor`=evalf(f(120),2)*Ft/kg;
```

$$\textit{A várható ár 120 q felhozatalakor} = \frac{34.\ Ft}{kg}$$

Példa

Eldoradóban két kormányzójelölt van, P és Q. A választási hadjárat kezdetekor, február 1-jén (0. hónap) és ettől kezdve félhavonként közvélemény-kutatást tartanak, amelyek Q népszerűségének növekedését mutatják: az egyes felmérésekkor a lakosság

6.5; 6.6; 7.2; 8.9; 12.1; 17.5 %-a szavazna rá.

1. Állapítsuk meg Q népszerűségi görbéjét a legkisebb négyzetek módszere alapján! A közelítő függvény legyen

$$y = A\ x^3 + B$$

alakú!

2. "Jósoljuk meg", hogy, hogy ha a választás "május 35-én" (4. hónap) van, akkor az előzetes becslések alapján ki várható kormányzónak! (A kormányzóság elnyeréséhez a szavazatok 51%-a szükséges)

Megoldás

```
> X:=[seq((i-1)*1/2,i=1..6)];
```

$$X := \left[0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right]$$

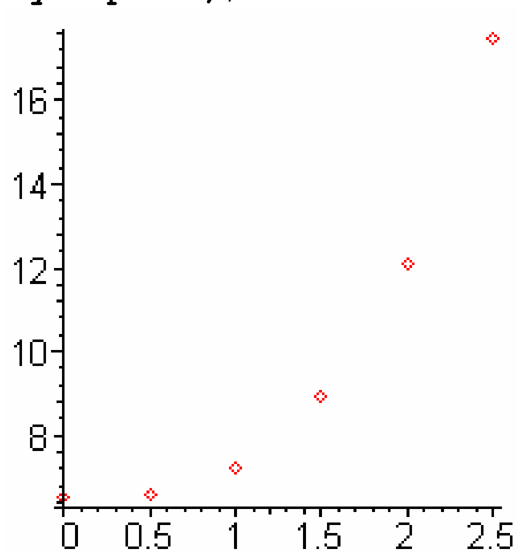
```
> Y:=[6.5,6.6,7.2,8.9,12.1,17.5];
```

$$Y := [6.5, 6.6, 7.2, 8.9, 12.1, 17.5]$$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$$pontok := \left[[0, 6.5], \left[\frac{1}{2}, 6.6\right], [1, 7.2], \left[\frac{3}{2}, 8.9\right], [2, 12.1], \left[\frac{5}{2}, 17.5\right]\right]$$

```
> plot(pontok,style=point);
```



Az $y = A\,x^3 + B$ alakú függvénykapcsolat azt jelenti, hogy az x^3 és az y között a kapcsolat lineáris. Képezzük tehát rendre az X elemeinek a harmadik hatványát:

```
> Xu:=map(x->x^3,X);
```

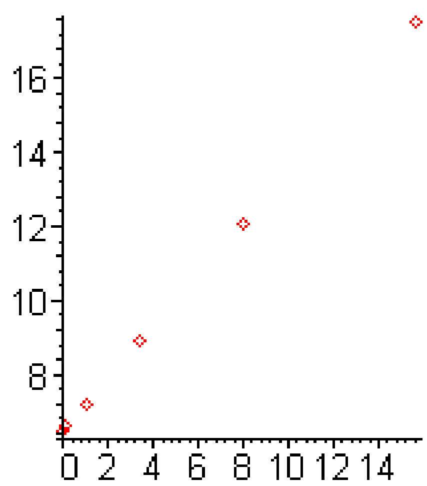
$$Xu := \left[0, \frac{1}{8}, 1, \frac{27}{8}, 8, \frac{125}{8}\right]$$

Képezzük az így nyert változóértékekből és a hozzájuk tartozó függvényértékekből az összetartozó értékpárokat, tehát a pontokat:

```
> pontok1:=zip((x,y)->[x,y],Xu,Y);
```

$$pontok1 := \left[[0, 6.5], \left[\frac{1}{8}, 6.6\right], [1, 7.2], \left[\frac{27}{8}, 8.9\right], [8, 12.1], \left[\frac{125}{8}, 17.5\right]\right]$$

```
> plot(pontok1,style=point);
```

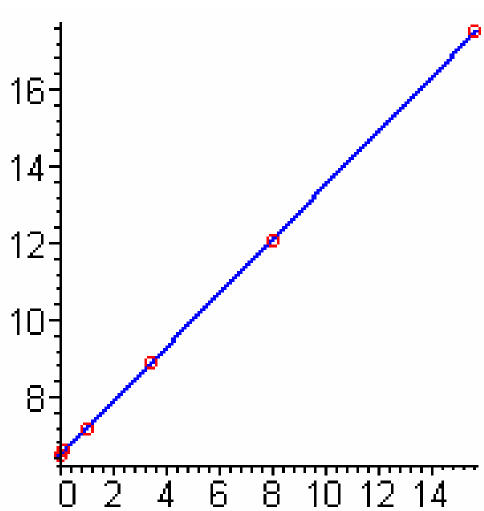


A nyert értékpárok közötti kapcsolat láthatóan lineáris. Határozzuk meg a linráris függvénykapcsolatot!

```
> regressziosegy((pontok1));
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.001593044918

A regressziós egyenes, $0.7030594080\, x + 6.504409025$



A keresett függvény:

```
> fv:=unapply(a*x^3+b,x);
```

$fv := x \rightarrow 0.7030594080\, x^3 + 6.504409025$

```
> fv(4);
```

51.50021114

Ez azt jelenti, hogy Q nyeri a választást!

4. 6. Feladatok

Az összetartozó értékpárok ábrázolásával állapítsuk meg az empirikus képlet típusát, majd linearizálással ellenőrizzük választásunk helyességét és adjuk meg a pontokra jól illeszkedő függvényt!

1.

x_i	-3	- 2	-1	0	1	2	3
y_i	11.32	6.40	3.73	2.08	1.20	0.72	0.41

2. A pontok első koordinátái:

$$X := \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, 3, \frac{13}{4}, \frac{7}{2}, \frac{15}{4}, 4\right];$$

A pontok második koordinátái:

$$Y := [-2.73, -1.14, -.650\text{e-}1, .548, 1.18, 1.55, 1.97, 2.16, 2.48, 2.77, 3.01, 3.13, 3.34, 3.57, 3.64, 3.91]$$

3. A pontok első koordinátái:

$$X := [.50, 1., 1.5, 2., 2.5, 3., 3.5, 4.];$$

A pontok második koordinátái:

$$Y := [.321, 1.25, 3.57, 7.35, 12.8, 20.3, 29.7, 41.7]$$

5. Magasabb fokú regressziós polinom

A lineáris regresszió módszere általánosítható.A legkisebb négyzetek módszerét polinomfüggvénnyel alkalmazva adódik a következő **kiegyenlit** eljárárás. Paraméterei: a közelítő polinom, a polinom együtthatói,a pontok listája. Megadja a keresett fokú regressziós polinomot, az eltérések négyzetösszegét és felrajzolja a pontokat és a közetítő polinomot.

```
> restart:
> kiegyenlit:=proc()
>  # eljárás regressziós polinom meghatározására
>  local n,i,n_para,n_ert,fuggv,F,p1,p2,mego;
>  global pol;
>  n:=nops([args]):
>  n_para:=n-2:
>  n_ert:=nops(args[n]):
>  fuggv:=args[1]:
>
>  for i from 1 to n_para
>   do var||i:=args[i+1] od:
>
```

```
> for i from 1 to n_ert
> do x||i:=op(1,args[n][i]):
>    y||i:=op(2,args[n][i]): od:
>
> # távolságnégyzetek
> F:=sum('(subs(x=x||i,fuggv)-y||i)^2','i'=1..n_ert):
> for i from 1 to n_para
>  do eq||i:=diff(F,var||i)=0 od:
>mego:=solve({seq(eq||i,i=1..n_para)},{seq(var||i,i=1..
n_para)});
>print(`A regressziós polinom`,subs(mego,fuggv));
>                    print(`Az                    eltérések
négyzetösszege`,evalf(subs(mego,F)));
>pol:=unapply(subs(mego,fuggv),x):
>
p1:=plot(args[n],style=point,symbol=circle,color=red):
>p2:=plot(subs(mego,fuggv),x=x||1..x||n_ert,color=blue,
thickness=2):
>plots[display]({p1,p2});
>end:
```

Példa

Az alábbi pontok második koordinátája véletlenszerűen választott. Illesszünk az így adódó pontokra megfelelően közelítő polinomot!

Megoldás

```
>X:=[seq(i*5,i=0..10)];
```

$X := [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50]$

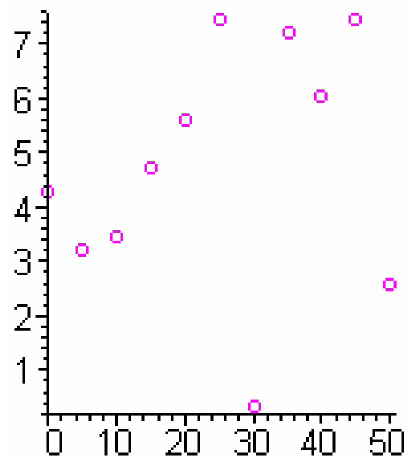
```
>Y:=[seq(evalf(rand()/10^11),i=0..10)];
```

$Y := [4.274196691, 3.211106933, 3.436330737, 4.742561436, 5.584587190, 7.467538305, 0.3206222208, 7.229741218, 6.043056139, 7.455800374, 2.598119527]$

```
>pontok:=zip((x,y)->[x,y],X,Y);
```

$pontok := [[0, 4.274196691], [5, 3.211106933], [10, 3.436330737], [15, 4.742561436], [20, 5.584587190], [25, 7.467538305], [30, 0.3206222208], [35, 7.229741218], [40, 6.043056139], [45, 7.455800374], [50, 2.598119527]]$

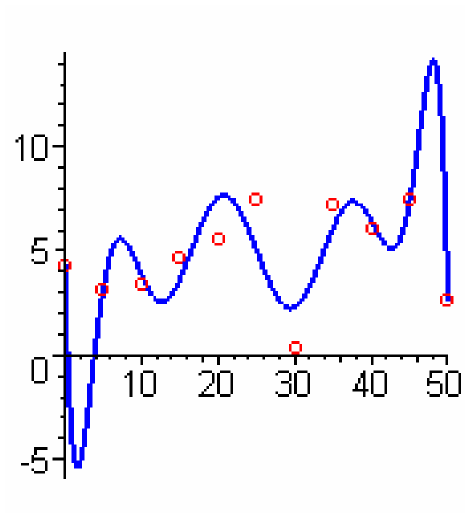
```
>plot(pontok,style=point,symbol=circle,color=magenta);
```




```
> n:=9:i:='i':
>
kiegyenlit(sum(a[i]*x^i,i=0..n),seq(a[i],i=0..n),pontok
);
```

A regressziós polinom, $4.283698109 - 14.16879500\,x + 6.843596540\,x^2 - 1.291760420\,x^3 + 0.1260022341\,x^4 - 0.007045761901\,x^5 + 0.0002344141595\,x^6 - 0.4583789793\;10^{-5}\,x^7 + 0.4861739061\;10^{-7}\,x^8 - 0.2157556901\;10^{-9}\,x^9$

Az eltérések négyzetösszege, 16.60648563

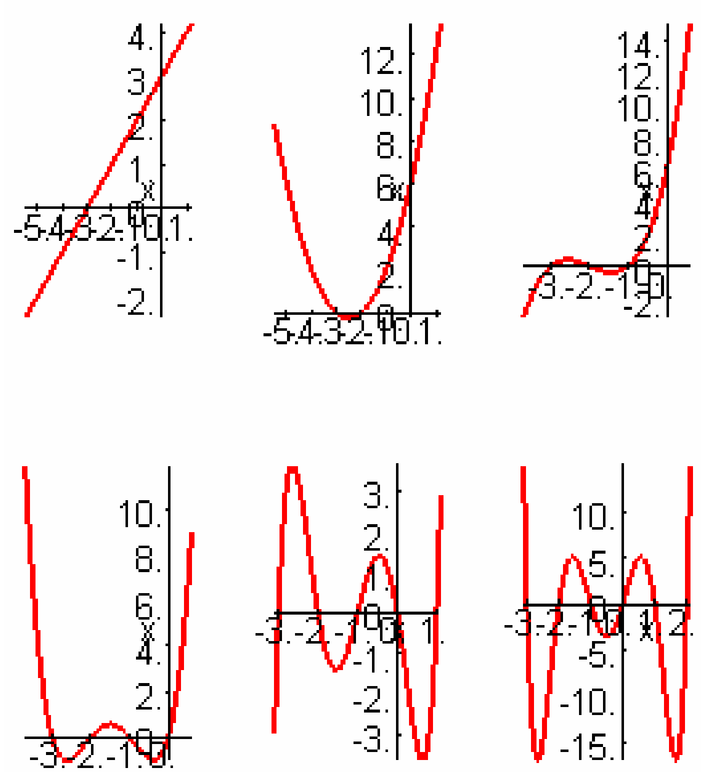



```
> pol(x);
```

$$4.283698109 - 14.16879500\,x + 6.843596540\,x^2 - 1.291760420\,x^3 + 0.1260022341\,x^4 - 0.007045761901\,x^5 + 0.0002344141595\,x^6 - 0.4583789793\;10^{-5}\,x^7 + 0.4861739061\;10^{-7}\,x^8 - 0.2157556901\;10^{-9}\,x^9$$

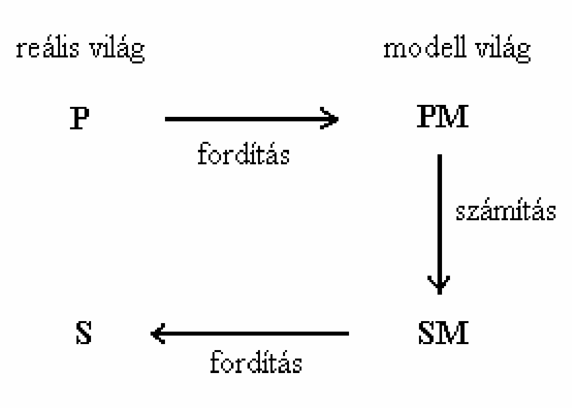
Ha polinomiális illesztést keresünk, akkor tisztában kell lennünk a különböző fokszámú polinomok jelleggörbéjével.
Az 1-6-ig terjedő fokszámú **polinomok tipikus ábrái** láthatók az alábbiakban:

```
> for i from 1 to 6 do
> if i<3 then
> abra||i:=plot(product((x-k),k=-3..i-4),x=-
5.5..1.2,thickness=2):
> elif i<=4 then
> abra||i:=plot(product((x-k),k=-3..i-4),x=-
3.7..0.6,thickness=2):
> elif i=5 then
> abra||i:=plot(product((x-k),k=-3..i-4),x=-
3.1..1.1,thickness=2):
> else
> abra||i:=plot(product((x-k),k=-3..i-4),x=-
3.1..2.1,thickness=2):
> fi:
> od:
> A:=plots[display]([abra||(1..6)],insequence=true):
> plots[display](A);
```



6. Modellképzés

A következő három példával elsősorban a modellalkotás fontosságára és lehetőségére szeretnénk rámutatni. Azt szeretnénk demonstrálni, hogy az előzőkben kidolgozott és a különböző számítógépes algebrai rendszerekben rendelkezésre álló eljárásokat felhasználva összetett a matematikai modellalkotás hatékony módon végezhető. B. Kutzler (http://www.kutzler.com/article/art_alge/ped-tool.html) szerint a problémamegoldás terén a fő probléma, hogy a problémamegoldásra fordított idő 80 %-a a kiszámításra, kalkulációra megy el, s csak 20 % jut a valódi modellalkotásra, a reális világbeli probléma lefordítására, a matematikai modell megalkotására. (1. ábra)



1. ábra

Az ábrán P a problémát, PM a modell-problémát, SM a modell-megoldást, S a megoldást jelöli.
Ezen a nem túl kedvező arányon jelentősen javíthatunk a számítógépes algebrai rendszerek alkalmazásával. Ennél - bizonyos vonatkozásban- több is igaz. A probléma megoldása sokszor nem is volna lehetséges a CAS alkalmazása nélkül, hisz az elvégzendő számítások kézzel csak nehézkesen kivitelezhetők, és a rendelkezésre álló idő általában igen szűkös. Két példát mutatunk saját oktatási gyakorlatunkból.

6. 1. Kepler harmadik törvénye

1601-ben, Tycho Brache halála után A német csillagász és science-fiction író, Johann Kepler lett a prágai csillagvizsgáló igazgatója. Kepler előzőleg Brache asszisztense volt, s 13 évig gyüjtött adatokat a Mars relatív mozgásáról. 1609-ben fogalmazta meg a bolygók Nap körüli mozgását leíró törvényei közül az első kettőt:
(1) A bolygók ellipszis alakú pályán keringenek a Nap körül, és a Nap az ellipszis egyik gyújtópontjában van.
(2) A Napot a bolygóval összekötő szakasz (vezérsugár) azonos idő alatt azonos területet súrol, vagyis a pálya menti mozgás napközelben nagyobb sebességű.
Kepler az elkövetkező évtizedet az előbbi törvények igazolásának és a keringési idő és a közepepes naptávolság közötti kapcsolat feltárásának szentelte. Harmadik törvényét 1619-ben alkotta meg, a Haronices Mundi című művében közölte. Az alábbi mérési adatok alapján határozzuk meg Kepler harmadik törvényét!

Bolygó	Keringési idő (napokban)	Közepes naptávolság ($km\ 10^6$)
Merkur	88	57.9
Vénusz	225	108.2
Föld	365	149.6

Mars	687	227.9
Jupiter	4329	778.3
Szaturnusz	10753	1427
Uránusz	30660	2870
Neptunusz	60150	4497
Pluto	90670	5907

Vegyük föl az adatokat, majd ábrázoljuk a keringési idő empirikus adatait (T) a közepes naptávolság (R) adatai fügvényében.
függvényében.

```
> restart:
>
Ri:=[57.9,108.2,149.6,227.9,778.3,1427,2870,4497,5907];
```

$Ri := [57.9, 108.2, 149.6, 227.9, 778.3, 1427, 2870, 4497, 5907]$

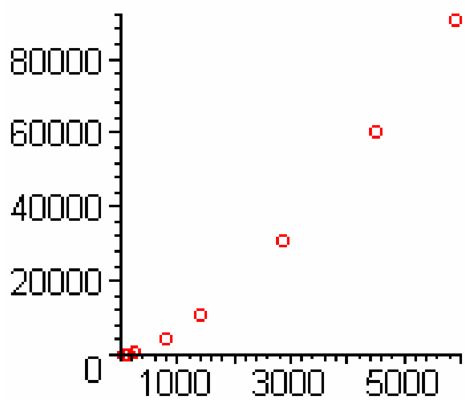
```
> Ti:=[88,225,365,687,4329,10753,30660,60150,90670];
```

$Ti := [88, 225, 365, 687, 4329, 10753, 30660, 60150, 90670]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],Ri,Ti);
```

$pontok := [[57.9, 88], [108.2, 225], [149.6, 365], [227.9, 687], [778.3, 4329], [1427, 10753], [2870, 30660], [4497, 60150], [5907, 90670]]$

```
> plot(pontok,style=point,symbol=circle);
```



Hatványfüggvény alakú, azaz

$$T = K\,R^{\alpha}$$

illesztés tűnik valószínűnek. Képezzük ezért az egyenlet

mindkét oldalának logaritmusát:

$$\ln(T) = \ln(K) + \alpha\,\ln(R)$$

Az (R_i, T_i) mért értékekről áttérünk az

$$(\ln(R_i), \ln(T_i))$$

értékpárokra és meghatározzuk az

$$y = A\,x + B$$

regressziós egyenest, ahol $\alpha = A$, $K = e^B$.

```
> T:=unapply(K*R^alpha,R);
```

$T := R \rightarrow K\,R^{\alpha}$

```
> Rln:=evalf(map(ln,Ri));
```

$Rln :=$ [4.058717385, 4.683981366, 5.007965066, 5.428906936, 6.657112054, 7.263329617, 7.962067309, 8.411165787, 8.683893367]

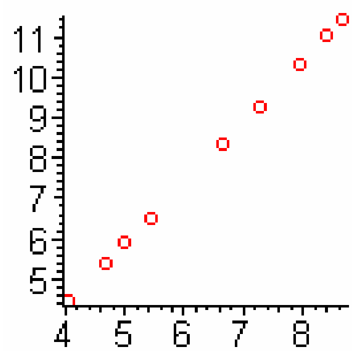
```
> Tln:=evalf(map(ln,Ti));
```

$Tln :=$ [4.477336814, 5.416100402, 5.899897354, 6.532334292, 8.373091847, 9.282940064, 10.33071415, 11.00459672, 11.41498182]

```
> pontokln:=zip((x,y)->[x,y],Rln,Tln);
```

$pontokln :=$ [[4.058717385, 4.477336814], [4.683981366, 5.416100402], [5.007965066, 5.899897354], [5.428906936, 6.532334292], [6.657112054, 8.373091847], [7.263329617, 9.282940064], [7.962067309, 10.33071415], [8.411165787, 11.00459672], [8.683893367, 11.41498182]]

```
> plot(pontokln,style=point,symbol=circle);
```



Használjuk a regressziosegy eljárást. Ehhez be kell töltenünk a többváltozós nevű saját csomagot (vagy az eljárást, utalva a csomagra)

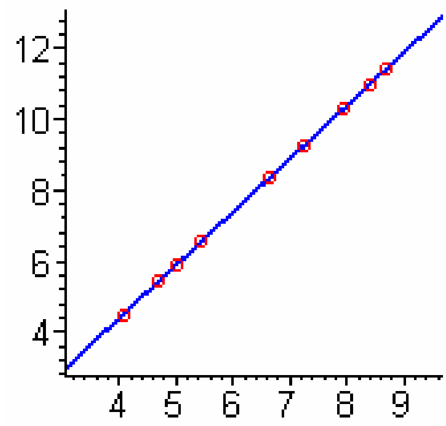
```
> with(tobbvaltozos);
```

[*kiegyenlit*, *regressziosegy*]

```
> regressziosegy(pontokln);
```

Az eltérések négyzetösszege, 0.5203112431 10^{-5}

A regressziós egyenes, $1.499737562\, x - 1.609827985$



A visszatranszformálást elvégezve

```
> K:=exp(b);
```

$K := 0.1999220007$

```
> alpha:=a;
```

$\alpha := 1.499737562$

A keresett függvénykapcsolat:

```
> T=T(R);
```

$T = 0.1999220007\, R^{1.499737562}$

Ez pedig megfelel Kepler harmadik törvényének, amely szerint:
A bolygók keringésidejének négyzete arányos a közepes naptávolság köbével.

6. 2. Összetett illesztési feladat

Példa

A cégek figyelemmel kísérik az eladási árak és a költségek alakulását. Egy cég a hetente eladott termék darabszáma és az eladási egységár között a következő kapcsolatot rögzítette. (2. táblázat)

Eladott darabszám	Eladási ár ($/db)
40	1720
80	1638
120	1557
160	1490
200	1405
240	1311
280	1236
320	1168

360	1080
400	990

2. táblázat

A termelési költségek és az előállított darabszám közötti összefüggésre az alábbi adatsor áll rendelkezésre. (3. táblázat)

Előállított darabszám	Termelési összköltség ($)
50	1073.1
100	1190.7
150	1373.9
200	1609.0
250	1870.7
300	2196.7
350	2574.4
400	2992.1
450	3471.1
500	3997.1

3. táblázat

Határozzuk meg az eladásból származó egységárat, a termelési költséget leíró függvényt és a nyereségfüggvényt. Mekkora a maximális nyereség és hány darab értékesítése esetén valósul ez meg, ha a cég jelenleg hetente 600 darabot képes gyártani?

Megoldás

Jelöljük x-szel a termék darabszámát, legyen $\mathrm{p}(x)$ az eladási egységár. Ekkor az eladásból származó bevétel $x\,\mathrm{p}(x)$.

A költségfüggvény legyen $\mathrm{C}(x)$, (x db gyártásának költsége), ekkor a nyereségfüggvény (profit)

$$\mathrm{P}(x) = x\,\mathrm{p}(x) - \mathrm{C}(x)$$

Vizsgáljuk először a hetente eladott termék darabszáma és az eladási egységár közötti kapcsolatot. Az adatokat listákban fölvéve:

```
> xk:=[seq(40*i,i=1..10)];
```

$xk := [40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, 320, 360, 400]$

```
> pk:=[1720, 1638, 1557, 1490, 1405, 1311, 1236, 1168,
1080, 990];
```

$pk := [1720, 1638, 1557, 1490, 1405, 1311, 1236, 1168, 1080, 990]$

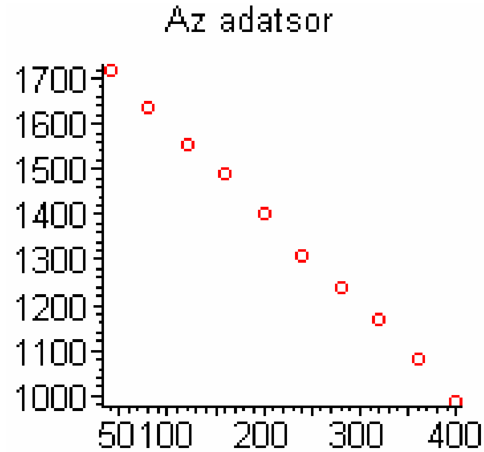
A listákból előállítjuk az értékpárokat:

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],xk,pk);
```

$pontok := [[40, 1720], [80, 1638], [120, 1557], [160, 1490], [200, 1405], [240, 1311], [280, 1236], [320, 1168], [360, 1080], [400, 990]]$

Ábrázoljuk a pontokat:

```
>
plot(pontok,style=point,color=red,symbol=circle,title=`
Az adatsor`);
```

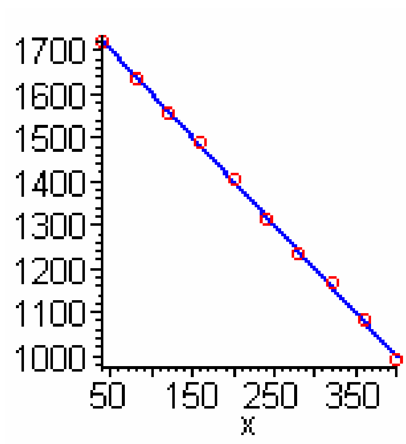


A kapcsolat láthatóan lineáris. A *regressziosegy* eljárással meghatározzuk a $p(x)$ függvényt:

```
> regressziosegy(pontok);
```

Az eltérések négyzetösszege, 378.5333333

A regressziós egyenes, $-\frac{1207\,x}{600} + \frac{27031}{15}$



Tehát a $p(x)$ függvény:

```
> p:=unapply(evalf(a*x+b),x);
```

$p := x \rightarrow -2.011666667\,x + 1802.066667$

Most vizsgáljuk a termelt darabszám és a termelési összköltség közötti kapcsolatot:

```
> xc:=[seq(50*i,i=1..10)];
```

$xc := [50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500]$

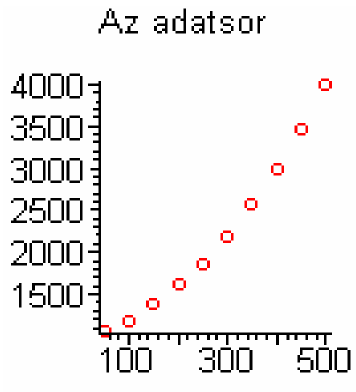
```
> Cm:=[1073.1, 1190.7, 1373.9, 1609.0, 1870.7, 2196.7,
2574.4, 2992.1, 3471.1, 3997.1];
```

$Cm := [1073.1, 1190.7, 1373.9, 1609.0, 1870.7, 2196.7, 2574.4, 2992.1, 3471.1, 3997.1]$

```
> pontok:=zip((x,y)->[x,y],xc,Cm);
```

$pontok := [[50, 1073.1], [100, 1190.7], [150, 1373.9], [200, 1609.0], [250, 1870.7], [300, 2196.7], [350, 2574.4], [400, 2992.1], [450, 3471.1], [500, 3997.1]]$

```
>
plot(pontok,style=point,color=red,symbol=circle,title=`
Az adatsor`);
```



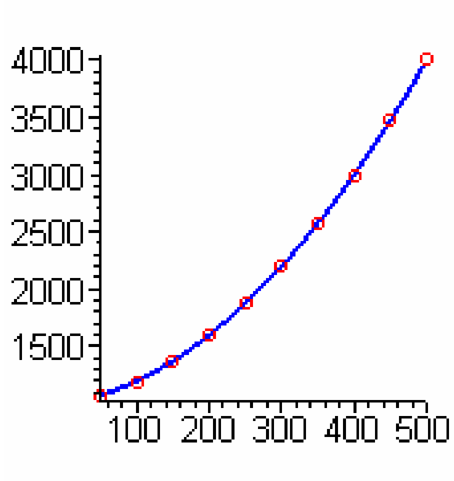
Úgy tűnik, hogy a kapcsolat másodfokú polinommal írható le. Használjuk most a *kiegyenlít* eljárást!

```
> n:=2: # Másodfokú illesztést keresünk
>
kiegyenlit(sum(a[i]*x^i,i=0..n),seq(a[i],i=0..n),pontok
);
```

A regressziós polinom,

$995.0633333 + 1.030166667\, x + 0.009937878788\, x^2$

Az eltérések négyzetösszege, 203.4011487




```
> pol(x);
```

$995.0633333 + 1.030166667\, x + 0.009937878788\, x^2$

Hozzuk létre a $\mathrm{C}(x)$ függvényt:

```
> C:=unapply(pol(x),x);
```

$C := x \to 995.0633333 + 1.030166667\, x + 0.009937878788\, x^2$

Így a keresett $\mathrm{P}(x)$ nyereségfüggvény (profitfüggvény):

```
> P:=unapply(x*p(x)-C(x),x);
```

$$P := x \to x\,(-2.011666667\, x + 1802.066667) - 995.0633333 - 1.030166667\, x - 0.009937878788\, x^2$$

Vagy egyszerűbb alakra hozva:

```
> simplify(P(x));
```

$-2.021604546\, x^2 + 1801.036500\, x - 995.0633333$

Másodfokú függvényről lévén szó a maximumhelyet és a maximum értékét teljes négyzetté alakítással egyszerűen megkaphatjuk:

```
> student[completesquare](P(x),x);
```

$-2.021604546\, (x - 445.4472818)^2 + 400138.3434$

Tehát 445 db termelése és értékesítése esetén maximális a nyereség. A maximális nyereség 400138 $.

2. függelék

Kérdőív a Maple használatáról

1.Maple elérési lehetősége a Főiskola laboratóriumán kívül van nincs

2. Az előadások Maple változatát használta: rendszeresen
többnyire
néha
sohasem

3. Használta-e úgy a Maple-s előadás változatot úgy, hogy a benne szereplő utasításokat változtatgatta sokszor
néha
sohasem

4. A Maple előadásokon való használata tetszett
hol tetszett, hol nem
inkább nem tetszett
egyáltalán nem tetszett

5. A Maple használata Ön szerint a matematikai ismeretek elsajátításának eredményességét
nagy mértékben növeli
hol növeli, hol nem
nincs rá lényeges hatással
inkább csökkenti
nagyon csökkenti.

6. Kellene-e Maple ismereteket önálló kurzus keretében is oktatni?
igen nem nem tudok dönteni

7. Növelni kéne-e a matematika óraszámát a számítógépalgebrai rendszer támogatásával megvalósuló oktatás jobb kivitelezhetősége érdekében?
igen nem nem tudok dönteni

8. Érezte-e előnyét annak, hogy a matematikai ismeretek -részben hyperlinkes változatban is- a hálózaton elérhetők? igen nem nem találkoztam vele

9.Használta -e a Maple-t más tárgyakkal kapcsolatban?
sokszor néhányszor soha

10.A Maple rendszer lehetőségei közül mi tetszett legjobban
a nagy pontosságú számítások lehetősége
a grafikai adottságok
a szimbolikus számítások elvégezhetősége
a változtatgatható tananyag
más:..
semmi sem ragadott meg belőle

11. A Maple-vel való tanulás
örömömre szolgál
néha bosszantó
nehezemre esik
kifejezetten zavar
nem dolgoztam vele

12. Egy Maple használatát is feltételező speciálkollégiumon
részt vennék
talán részt vennék
nem vennék részt.

13. Milyen nehézségek léptek föl a Maple-vel történő matematika tanulás során a számítógéppel (hálózattal) kapcsolatban?

14. Milyen a Maple-programból adódó tényezők nehezítették a munkavégzést?

15. Használt-e valamilyen Maple-s szakkönyvet igen nem

16. Mennyire szereti most a matematikát:
jobban, mint a főiskola előtt
kevésbé,mint korábban
nem változott

17. Érzése szerint a Maple-t a jövőben használni fogja igen nem nem tudom.

18. Ha most kezdené a föiskolai matematika tanulását, s választhatna, milyen csoportba menne:
amelyikben használják a Maple-t
amelyikben nem használják

Írja le, ha van kedve azt, ami Ön szerint a kérdésekből kimaradt. Tehát, javaslatot, kritikát, mindent, ami segíthet a Maple- és a matematika oktatásában:

3. függelék

A féléves kurzust átívelő vizsgálat (11. 2. 1.) dokumentumai

Tudásmérő teszt

Név: csoport

1. Melyik elemmel folytatná a következő sorozatot:

1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .

(A) 11 (B) 13 (C) 8 (D) 9 (E) 40

2. Egy tanár a következőt mondta egy tanulónak: Ha legalább közepes lesz az utolsó dolgozata, akkor nem bukik meg. Tegyük föl, hogy a diák megbukott.Melyik következmény igaz?

(A) A diák utolsó dolgozata legalább közepes lett.
(B) A diák utolsó dolgozata közepesnél roszabb lett.
(C) A diák utolsó dolgozata elégtelen lett.
(D) Ha a diák nem bukott meg, akkor az utolsó dolgozata legalább közepes volt.
(E) Egyik sem érvényes.

3. Jancsi azt mondja Juliskának: Ha esik, akkor nem teniszezem. Tegyük föl, hogy nem esett. Melyik következtetés a helyes:

(A) Jancs teniszezett. (B) Jancsi nem teniszezett . (C) Ha Jancsi teniszezett, akkor esett.
(D) Nem esett és Jancsi teniszezett. (E) Egyik sem érvényes.

4. Tudjuk, hogy minden számítógép logikai eszköz, és a legtöbb számítógép Neumann-elvű.
Melyik következtetés érvényes?

(A) Minden logikai eszköz Neumann-evű. (B) Minden számítógép Neumann-elvű.
(C) Némely számítógép nem logikai eszköz. (D) Némely logikai eszköz számítógép.
(E) Egyik sem érvényes.

5. A Binári-szigeteken kétféle ember él: az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Két szigetlakóval találkozunk: Abával és Buluval. Aba azt mondja: "Legalább az egyikünk hazudós." Milyen emberek ők?

(A) Mindketten igazmondók. (B) Mindketten hazudósok. (C) Aba igazmondó, Bulu hazudós.
(D) Aba hazudós, Bulu igazmondó. (E) A kijelentés alapján nem dönthető el.

6. A Rubik-kockát (27 darab kis kockából álló kocka) egy rögzített külső pontból nézve legföljebb hány kis kockát láthatunk?

(A) 9 (B) 12 (C) 18 (D) 19 (E) 21

7. Ha egyből kivonva az $1-x$ reciprokát a kapott eredmény nagyobb az $1-x$ reciprokánál, akkor

(A) Az x bármely 1-től különböző szám lehet (B) Az x nagyobb 1-nél. (C) Az $|x|$ nagyobb 1-nél.
(D) Az x kisebb -1-nél. (E) Semmilyen x értékre nem teljesül

8. Mennyi az $\left(x^{(-2)}+y^{(-2)}\right)\left(x^{(-4)}-y^{(-4)}\right)^{(-1)}$ kifejezés legegyszerűbb alakja:

(A) $x^2\,y^2\,(y^2-x^2)^{(-1)}$ (B) x^2-y^2 (C) $2\,(x^2-y^2)$
(D) $x^2\,y^2\,(y^2-x^2)$ (E) $x^2\,y^2\,(x^2-y^2)$.

9. Ha $\mathrm{f}(x)=5^{(3\,x)}$ és $\mathrm{f}(x)^2=\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))$, akkor $\mathrm{g}(x)$

(A) $6\,x$ (B) $9\,x^2$ (C) x^2 (D) $2\,x$ (E) $3\,x$.

10. Mennyi az $x^3-2\,x^2=x-2$ egyenlet valós gyökeinek szorzata?

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2.

11. A 2^{1996} szám utolsó (az egyesek helyén álló) számjegye:

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8.

12. Legyen × a pozitív valós számokon értelmezett következő művelet:

$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\dfrac{A\,B}{A+B}$. Ekkor a 4×(4×4) =

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) 1 (C) $\dfrac{4}{3}$ (D) 2 (E) $\dfrac{16}{3}$.

13. A $\{-1, 0, 2, 3\}$ halmaz hány elemét írhatjuk a k helyébe úgy, hogy a $k\,x^2+6\,x+2=0$ egyenletnek két különböző valós gyöke legyen?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1.

14. Mennyi az $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x^2-6\,x+9}-6$ függvény görbéje és az x tengely által közbezárt síkidom területe?

(A) 54 (B) 36 (C) 27 (D) 18 (E) 6.

15. Melyik állítás igaz az $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x}$ függvény deriváltjára:

(A) Nincs zérushelye. (B) Van olyan egész szám, amelyre értéke negatív.
(C) Minden pozitív egészre pozitív. (D) Véges hosszúságú intervallumon negatív értékű.
(E) Semmilyen x értékre sem negatív.

16. Hány pozitív egész megoldása van a

$$\log_{\frac{1}{2}}(x)<\log_{\frac{1}{2}}(2\,x-3)$$

egyenlőtlenségnek:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) végtelen sok

17. A p paraméter mely értékére osztható az $x^4+p\,x^3-3\,x^2+8\,x-4$ polinom $x+2$ -vel:

(A) 0 (B) -5 (C) -2 (D) 2 (E) 3.

18. Mennyi az $\mathrm{f}(x)=\sin\left(3\,x+\dfrac{\pi}{2}\right)-1$ függvény periódusa?

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) $2\,\pi$ (D) $6\,\pi$ (E) Egyik sem

2. Zárthelyi dolgozat

2002. május 17.

1.Melyik függvény integrálközelítő összege a $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i (x_i - x_{i-1})}{e^{\xi_i}}$ összeg? (

ahol $x_{i-1} \le \xi_i$, $\xi_i \le x_i$, i = 1,2, . . . , n)
Létezik-e tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén a $\lim_{n \to \infty} \sigma_n$ határérték?

($a = x_0$, $b = x_n$). Válaszát indokolja!

max($x_i - x_{i-1}$)->0

2.Tekintsük az $(x+3)\left(\frac{\partial}{\partial x} y\right) - y^2 = 1$ differenciálegyenletet!

2.1. Osztályozza a differenciálegyenletet a tanult szempontok szerint!
2.2 Mutassa meg, hogy az $y = \mathrm{tg}(\ln(|x+3|))$ függvény megoldása a differenciálegyenletnek!

2.Határozza meg a következő két görbe közötti területet:

$$y = x^2 - 1 \quad ; \quad y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Készítsen ábrát is!

3. Számítsa ki az $\mathrm{f}(x) = x\sqrt{\sin(x)}$ függvény $[1, \pi]$ intervallumra eső ívének az x tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát!

4.Számítsa ki a következő integrálok számértékét:

4.1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$; 4.2. $\int_1^{e} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} dx$.

5. **Tekintsük** az $\mathrm{f}(x, y) = 3\sqrt{x^2 + 2y^2}$ függvényt , ahol az x és az y tetszőleges valós szám.

5.1. Határozza meg a $\mathrm{P}(2, 4)$ pontban az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ irányú iránymenti deriváltat!

5.2. A P(2,4) pontban melyik irányban változik a leggyorsabban a függvény és mennyi ez a változási sebesség ?
6. Vizsgálja meg szélsőérték szempontjából az

$$\mathrm{f}(x, y) = x^3 + y^3 - 4x - 2y$$

függvényt!

2. Zárthelyi dolgozat (Maple)

2002. május 21.

1. Az összetartozó értékpárok ábrázolásával *állapítsa meg* az empirikus képlet típusát, majd linearizálással *ellenőrizze* választása helyességét és adja meg a pontokra jól illeszkedő függvényt! Ábrázolja a kapott függvényt és a pontokat közös koordinátarendszerben!

$X := [.2500000000, .5000000000, .7500000000, 1., 1.250000000, 1.500000000, 1.750000000, 2., 2.250000000, 2.500000000, 2.750000000, 3., 3.250000000, 3.500000000, 3.750000000, 4.]$

;

$Y := [-7.434198773, -4.997883646, -3.529983813, -2.539487289, -1.908149094, -1.089586699, -.5965973850, -.1326399111, .2224930059, .5731112730, .9525553510, 1.260208103, 1.517010888, 1.716511807, 2.049255865, 2.233199998]$

;

2. *Számítsa ki* az $f(x) = 2\cos(x)$ és a $g(x) = x^4 - 2x^3$ függvények görbéi által közbezárt területet!

3. Forgassuk meg az $f(x) = x\left(\sin(x) - \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ függvény görbéjének az $[a, b]$ intervallumra eső ívét az x tengely körül, ahol az a és a b az f függvény két legkisebb pozitív zérushelye. *Ábrázolja* a keletkezett forgástestet és *számítsa ki* a térfogatát!

4. *Határozza meg* az $\int_0^1 x\, e^{(-x^3)}\, dx$ integrál értékét a Simpson szabály alkalmazásával. A részintervallumok száma legyen először n =10! *Becsülje meg* az elkövetett hibát! Hány részre kell az intervallumot felosztanunk, ha azt akarjuk, hogy az elkövetett hiba $10^{(-6)}$ alatt maradjon?

5. *Határozza meg* az $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$ függvény szélsőértékeit! A számításokat részletezze! Ábrázolja a függvényt a szélsőértékeket tartalmazó tartományon! Az eredményt ellenőrizze az "automatizált" eljárásokkal!

Vizsgadolgozat

2002. június 11.

1. Döntse el, hogy igazak, vagy hamisak-e az alábbi állítások!

1.1. A (0,1) nyílt intervallum bármely elemére $x^2 < \operatorname{arcsinh}\left(\frac{e^x - e^{(-x)}}{2}\right)$;

1.2. Az [a,b] intervallumon deriválható függvény az [a,b]-n integrálható.

1.3. Ha az $f(x, y)$ kétváltozós függvény parciális deriváltjai a P(x,y) pontban 0 értékűek, akkor ebben a pontban f-nek szélsőértéke van.

2.Írja föl a helyettesítéses integrál alapformuláit, s hozzon mindegyikre példát!

3.Vezesse le a trapéz-formulát!.

4.Tekintsük az f : **R->R** , f(x) = $e^{(x^3)}$ függvényt.

4.1. Az f [0,1] intervallumra eső határozott integrálját a $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i)}{n}$ összeggel közelítjük, ahol $\xi_i = \frac{i}{n}$. (i = 1,2, ... ,n). **Döntse el**, hogy a valóságosnál nagyobb, vagy kisebb értéket kapunk! Döntését **indokolja**!

4.2. Az f [0, b] ($0 < b$) intervallumra eső integrálját a trapéz-szabállyal közelítjük. A valóságosnál nagyobb vagy kisebb értéket kapunk? (A kerekítési hibákat figyelmen kívül hagyjuk.)

5. Mutassa meg, hogy létezik a $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}\, dx$ integrál!

Vizsgadolgozat (Maple)

2002. június 11.

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat! A számításokat részletezze! Az eredményt ellenőrizze!

1.1. $\displaystyle\int \frac{\ln(\cos(x))}{\cos(x)^2}\,dx$; 1.2. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)\cos(x)^3}{1+\cos(x)^2}\,dx$

2. Határozza meg az $\displaystyle\int_5^9 \frac{x}{(100+x^3)^{\left(\frac{1}{4}\right)}}\,dx$ értékét a Simpson formulával $10^{(-6)}$ pontossággal! Legalább hány részre kell ekkor osztani az intervallumot?

3. Illesszünk a következő adatlistákból képezhető pontokra $y = B\,e^{(A\,x)}$ alakú függvényt a legkisebb négyzetek módszerével:

$X := [.2500, .5000, .7500, 1., 1.250, 1.500, 1.750, 2., 2.250, 2.500, 2.750, 3.]$;

$Y := [.6964, .9854, 1.370, 1.929, 2.709, 3.791, 5.301, 7.441, 10.44, 14.62, 20.47, 28.70]$
.

4. Határozza meg az $f(x) = e^{(-x)}$ és a $g(x) = \sin(x)$ két legkisebb abszcisszájú metszéspontjának koordinátáit. Számítsa ki a két görbe közti területet ezen metszéspontok között!

5. Egy rézdarab ρ sűrűségét a felhajtóerő-módszer segítségével a következőképpen határozhatjuk meg: Legyen a tömeg a levegőn m_l a vízben m_v , ekkor:

$$\rho = \frac{m_l}{m_l - m_v} \quad .$$

Mekkora a ρ relatív hibája, ha $m_l = 100$ +- $5\ 10^{(-3)}$ g , $m_v = 88$ +- $8\ 10^{(-3)}$ g .

4. **függelék**

Az egy témakör feldolgozására kiterjedő vizsgálat (11. 2. 2) dokumentumai

Zárthelyi dolgozat (Mat. 2.)

2004. március 26

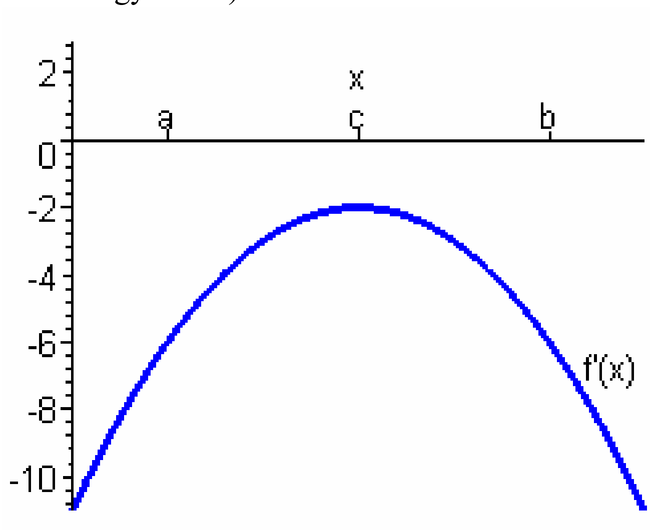
Megjegyzés: Az A, B, C a Smith-féle taxonómiában szereplő kategóriák.

1. Mutassa meg, hogy az $y = \mathbf{e}^{(-\mathrm{tg}(x))} + \mathrm{tg}(x) - 1$ függvény kielégíti az

$\mathbf{y}' \cos^2 \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathrm{tg}(x)$

egyenletet! (**A**)

2.Legyen az f függvény az $[a, b]$ intervallumon legalább kétszer differenciálható. Az alábbi ábrán az **f első deriváltját** látjuk (a görbe szimmetrikus az $x = c$ egyenesre)



A következő kérdések mindegyike az $[a, b]$ intervallummal kapcsolatosan értendő:

2.1. Rajzolja fel az f második deriváltját!

2.2. Mit mondhatunk az f függvényről konvexitás szempontjából?

2.3. Mit mondhatunk az f függvényről monotonitás szempontjából?

2.4. Van-e olyan pont, ahol a leggyorsabban, ill. leglassabban változik a függvény? Milyen irányú ez a változás? (**C**)

Válaszait indokolja!

3.1. Milyen feltételek mellett alkalmazható a

$$\lim_{x \to a} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}$$

határérték kiszámítására a L'Hospital szabály? Hogyan szól a szabály? (**A**)

3.2.A feltételek vizsgálata után számítsa ki a

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 + x - 2}$$

határértéket! (A)

4. Tekintsük az $f(x) = 2 - x^2 - 2\ln(x)$ függvényt

4.1. Mutassa meg, hogy a függvénynek egyetlen zérushelye van! (**B**)

4.2. Igazolja, hogy a gyököt tartalmazó alkalmas intervallumban teljesülnek a Newton -féle érintőmódszer alkalmazásának feltételei! (**B**)

4.3. Határozza meg a zérushelyet két tizedesjegy pontossággal! (**A**)

5. Egy felül nyitott, henger alakú 1 dm^3 térfogatú edényt akarunk készíteni.

5.1. Hogyan válasszuk meg az edény alapsugarát és magasságát, hogy minél kevesebb lemezt használjunk föl, és mennyi lesz ez a felhasznált lemezmennyiség? (**B**)

5.2.* Tegyük föl, hogy az edény fenekét alkotó anyag egységára kétszer akkora, mint a palástot alkotó anyagé! Milyen méretek mellett minimális az anyagköltség! (**C**)

6. Tekintsük az $f(x) = x^3 e^{(-x)}$ függvényt!

6.1.Vizsgálja meg a függvényt monotonitás és szélsőérték szempontjából!

6.2*. Jellemezze a függvényt konvexitás szempontjából! (**B**)

Megjegyzés: Az 5.2* és a 6.2* részfeladatokért többletpont jár!