

Doktori (PhD) értekezés tézisei

ON THE HOLONOMY OF
FINSLER MANIFOLDS

Hubicska Balázs Attila

Témavezető: Dr. Muzsnay Zoltán



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori
Iskola
Debrecen, 2021.

Bevezetés

A disszertáció fő témaköre Finsler-sokaságok bizonyos speciális tulajdonságainak vizsgálata. A Finsler-terek vizsgálata a geometria egy viszonylag fiatal részterülete, különösen ha differenciálgeometriai gyökereihez mérjük, nem is beszélve az emberiség több évezredes törekvéseiről, melyek világunk mélyebb megértését célozzák alakzatok, erőhatások és ezek természettel való kapcsolatának vizsgálatán keresztül.

A differenciálgeometria modern formája Gauss egy különösen tehetséges tanítványának, Bernhard Riemannnak köszönhető, aki méltán híressé vált habilitációs előadásában [40] bevezette azon objektumokat, melyeket ma Riemann-sokaságoknak, valamint ezek görbületi tenzorának nevezünk. Érdekes módon előadásában ugyan kitért olyan általánosabb metrikákra is melyek nem belső szorzatból származnak, azonban úgy gondolta az ilyen metrikák vizsgálata nem igényel esszenciálisan különböző elveket és módszereket. Ezen észrevétele többé-kevésbé napjainkban is megállja a helyét, azonban mára kiderült, hogy véleményével szemben számos Finsler-tér rendelkezik elegáns és szemléletes geometriai interpretációval.

A XX. század elején szállítás elméleti motivációknak köszönhetően megújult a Finsler-metrikák iránti érdeklődés. C. Caratheodory és az általa vezetett kutatócsoport a Riemann-geometriában sikerrel alkalmazott eszközök, többek között affin konnexiók, Jacobi vektormezők és a szekcionális görbület ezen általánosabb esetben való átültetését tűzte ki céljául. Az egyik legfontosabb lépés ebben a törekvésben P. Finsler disszertációja [12] volt, aki maga is Caratheodory tanítványa volt. Számos kitűnő matematikus munkásságának köszönhetően az elmúlt évszázad során a Finsler terek elmélete jelentős fejlődésen ment keresztül, azonban napjainkban is rengeteg még a megválaszolatlan kérdés. Az elmúlt évek során különös figyelem összpontosult a Finsler geometria természettudományok egyéb területein történő alkalmazásaira. Az általános relativitáselmélettől kezdve erdőtűzek és szeizmikus sugarak terjedésének vizsgálatán át a kvantummechanikáig számos területen alkalmazták sikerrel a Finsler geometria eszközeit [31, 45]. B. Russel és S. Stepney eredményei [41, 42] új utat nyitottak számos érdekes kvantum információelméleti jelenség geometriai vizsgálatához. Eredményeikben fontos szerepet játszott D. Bao, C. Robles és Z. Shen tétele a Zermelo navigációs probléma megoldásai és Randers-sokaságok geodetikusai közötti kapcsolatról [3].

A disszertációban Finsler-terek holonómia struktúráját vizsgálom. A holonómia struktúra egyike azon geometriai tulajdonságoknak, melyekről Finsler esetben még igen kevés információ áll rendelkezésünkre. A holonómia csoport egy rendkívül természetes geometriai objektum. Tágabb értelemben egy olyan geometriai koncepció, mely azt a jelenséget írja le, hogy egy ob-

jektumot a vizsgált tér zárt görbéi mentén "szállítva" nem feltétlenül kerül vissza a kiindulási állapotba. Ez a jelenség a fizikában is több helyen felbukkan, még a kvantummechanikában is, amit a XX. század közepéig nem tekintettek különösebben geometriai természetűnek. A holonómia megértéséhez vezető legfontosabb fogalom a párhuzamosság. Euklideszi terek esetén könnyű megfogalmazni mikor tekintünk két vektort párhuzamosnak, mivel a sokaság különböző pontjaiban vett érintőterek természetes módon beazonosíthatóak egymással. Általános esetben a párhuzamosság értelmezéséhez szükségünk van a TM érintőnyalábon értelmezett ∇ konnexióra, melyre Riemann-sokaságok esetén létezik kanonikus választás: a Levi-Civita konnexió. Egy ilyen konnexió lehetővé teszi számunkra, hogy definiálhassuk mikor nevezünk két $v \in T_pM$ és $w \in T_qM$ vektort párhuzamosnak egy p -t és q -t összekötő γ görbe mentén. Ekkor a görbe menti párhuzamos eltolás egy izomorfizmus a megfelelő érintőterek között. Ez a leképezés viszont erősen függ a görbe választásától: semmi okunk feltételezni, hogy a két pontot összekötő különböző görbék menti párhuzamos eltolás ugyanazt a vektort fogja eredményezni. Ezen a ponton jutunk el a disszertáció központi eleméhez, a holonómia csoporthoz. Ahhoz, hogy meghatározzuk a párhuzamos eltolás függését a görbétől, a $P_c : T_pM \rightarrow T_pM$ automorfizmusok halmazát vizsgáljuk, ahol p egy tetszőleges pont a sokaságon, a c görbék pedig szakaszonként sima görbék, melyek p -ből indulnak és p -ben végződnek.

Egy Riemann- vagy Finsler-sokaság esetén a holonómia csoport a sokaság párhuzamos eltolásai által generált transzformáció csoport. Riemann esetben a holonómia csoport és a sokaság geometriája

közötti összefüggéseket mélyrehatóan tanulmányozták az elmúlt évszázad során. 1952-ben A. Borel és A. Lichnerowicz bebizonyították, hogy egy egyszeresen összefüggő n -dimenziós Riemann-sokaság holonómia csoportja az ortogonális csoport zárt részcsoportja [7]. W. Ambrose és M. Singer meghatározták a holonómia és görbület kapcsolatát [1], majd néhány évvel később M. Berger megadta azon csoportok listáját, melyek előfordulhatnak Riemann-sokaságok holonómia csoportjaként [4]. Ezen eredmény után számos kiváló matematikus munkájának köszönhetően megtudtuk, hogy Berger listájának minden eleme elő is fordul bizonyos Riemann-sokaságok holonómia csoportjaként, így ma már a Riemann holonómia csoportok teljes klasszifikációja ismert. Finsler esetben azonban csak részeredményeket ismerünk: csak a Berwald, Landsberg és igen speciális görbületi tulajdonságokkal rendelkező sokaságok holonómia csoportjáról rendelkezünk információval [25, 49, 37].

1. Alapfogalmak és előzmények

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a disszertáció megértéséhez szükséges legfontosabb definíciókat. Bevezetjük a differenciálgeometria szükséges alapfogalmait, valamint a Finsler geometria nélkülözhetetlen definícióit. Egységesítjük a jelölés- és elnevezésrendszert. Vizsgálataink fő színtere a (TM, π, M) érintőnyaláb és a (TTM, τ, TM) második érintőnyaláb.

Finsler-sokaságon egy (M, \mathcal{F}) párt értünk, ahol az $\mathcal{F}: TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ normafüggvény folytonos, sima a $\hat{TM} := TM \setminus \{0\}$ hasított érintőnyalábban, minden $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}|_{T_x M}$

leszűkítése pozitív 1-homogén, valamint a

$$g_{x,y}: (u, v) \mapsto g_{ij}(x, y)u^i v^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_x^2(y + su + tv)}{\partial s \partial t} \Big|_{t=s=0}$$

szimmetrikus bilineáris forma pozitív definit minden $y \in \hat{T}_x M$ esetén.

Az (M, \mathcal{F}) geodetikusait egy (x^i, y^i) , TM -en értelmezett lokális koordináta rendszerben a $\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x}) = 0$ másodrendű közönséges differenciálegyenlet rendszer határozza meg $i = 1, \dots, n$ esetén, ahol a $G^i(x, y)$ együtthatók az alábbi módon adhatók meg:

$$G^i(x, y) := \frac{1}{4} g^{il}(x, y) \left(2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x, y) \right) y^j y^k.$$

Egy $c(t)$ görbe mentén értelmezett $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektormezőt párhuzamosnak nevezünk az asszociált *homogén (nemlineáris) konnexióra* nézve, ha

$$D_{\dot{c}} X(t) := \left(\frac{dX^i(t)}{dt} + G_j^i(c(t), X(t)) \dot{c}^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

teljesül, ahol $G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$.

Egy $\xi(x, y) = \xi^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$ vertikális vektormező *Berwald horizontális kovariáns deriváltját* az $X(x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ vektormező szerint a $\nabla_X \xi$ szimbólummal jelöljük, és lokálisan

$$\nabla_X \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - G_j^k \frac{\partial \xi^i}{\partial y^k} + G_{jk}^i \xi^k \right) X^j \frac{\partial}{\partial y^i},$$

formulával fejezhetjük ki, ahol $G_{jk}^i(x, y) := \frac{\partial G_j^i(x, y)}{\partial y^k}$.

A Finsler-sokaság *görbületi tenzormezőjét* $R = R_{jk}^i dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$ módon definiálhatjuk, a tenzorkomponenseket lokálisan a

$$R_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial G_k^i}{\partial x^j} + G_j^m G_{km}^i - G_k^m G_{jm}^i$$

formulákkal kapjuk. A *Riemannian görbületi tenzort* $R_y := R(\cdot, y)$ módon jelöljük, komponenseit a $R_j^i = R_{jk}^i y^k$ összefüggéssel határozhatjuk meg. Egy $P = \text{Span}\{y, u\} \subset T_x M$ érintősík esetén a sokaság zászlgörbületét az alábbi formula határozza meg:

$$\mathbf{K}(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}.$$

1.3.1 Definíció. Egy (M, F) Finsler-sokaság $x \in M$ pontban vett $\mathcal{H}ol_x(M, F)$ *holonómia csoportján* a sokaság x -ből induló és x -ben végződő szakaszonként sima zárt görbéi mentén vett párhuzamos eltolások által generált csoportot értjük.

Mivel a párhuzamos eltolás 1-homogén és megőrzi a Finsler normát, a holonómia csoportot tekinthetjük az indukált diffeomorfizmus csoportjának részcsoportjaként:

$$\mathcal{H}ol_x(M, F) \subset \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_x).$$

2. Diffeomorfizmus csoportok érintő Lie-algebrája és alkalmazásai a holonómia elméletben

2.1 Diffeomorfizmus csoportok érintő Lie-algebrái

A disszertáció ezen fejezetében egy diffeomorfizmus csoport részcsoportjainak érintőstruktúráit és ezek tulajdon-

ságait vizsgáljuk.

Egy $c: I \rightarrow M$ sima görbe az M sokaságon $(k-1)$ -ad rendű szingularitással rendelkezik a $t = 0$ pontban, ha deriváltjai $k-1$ -ad rendig eltűnnek, ahol $k \geq 0$. Jól ismert, hogy ha egy c görbének a $0 \in \mathbb{R}$ pontban $(k-1)$ -rendű szingularitása van, akkor a k -ad rendű deriváltja $c^{(k)}(0) = X_p$ egy érintő vektor $p = c(0)$ -ban. Ebben az esetben a c görbét a $X_p \in T_p M$ vektor k -ad rendű integrálgörbéjének nevezzük. Ezt a konstrukciót vektormezőkre kiterjesztve kapjuk az alábbi definíciót:

2.1.1 Definíció. Egy $\varphi: I \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$, C^∞ -sima görbét a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ diffeomorfizmus csoportban az $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező integrálgörbéjének nevezünk ha

- (1) $\varphi_0 = id_M$,
- (2) létezik $k \in \mathbb{N}$, hogy bármely $p \in M$ pont esetén a $t \rightarrow \varphi_t(p)$ görbe a $X(p) \in T_p M$ vektor egy k -ad rendű integrálgörbéje.

Ezt a $k \in \mathbb{N}$ számot az integrálgörbe rendjének nevezzük.

Legyen $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ diffeomorfizmus csoport egy tetszőleges részcsoportja. Felhasználva a (2.1.1) Definíció elnevezéseit bevezethetjük az alábbi definíciót:

2.1.2 Definíció. Azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező érinti a $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ részcsoportot, ha létezik X -nek integrálgörbéje \mathcal{G} -ben. \mathcal{G} érintő vektormezőinek halmazát $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ -vel jelöljük.

2.1.3 Megjegyzés. $X \in \mathcal{T}_0\mathcal{G}$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik egy C^∞ -sima görbe $\varphi: I \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$ amelyre

- (1) $\varphi_t \in \mathcal{G}$,
- (2) $\varphi_0 = id_M$,
- (3) létezik $k \in \mathbb{N}$, melyre (2.1) teljesül.

Felhívjuk a figyelmet a tényre, hogy a (2.1.2) definíció nem feltételezi \mathcal{G} -ről, hogy az a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ egy Lie-részcsoportja. A konstrukció során $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ differenciálható struktúráját használjuk a \mathcal{G} -beli görbék simaságához.

2.1.4 Tétel. Ha \mathcal{G} a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ diffeomorfizmus csoport részcsoportja, akkor $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ az $\mathfrak{X}(M)$ Lie-csoport Lie-részalgebrája.

A 2.1.4 tétel által motiválva a következő definíciót vezetjük be:

2.1.5 Definíció. $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ -t a $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ részcsoport érintő algebrájának nevezzük.

A 2.1.4 tétel egy közvetlen következménye:

2.1.6 Következmény. Legyen \mathcal{G} a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ részcsoportja, \mathcal{S} pedig $\mathfrak{X}(M)$ olyan részhalmaza, melynek elemei érintik \mathcal{G} -t. Ekkor az \mathcal{S} elemei által generált $\langle \mathcal{S} \rangle_{Lie}$ rész Lie-algebra szintén érinti \mathcal{G} -t, azaz

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_o\mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{S} \rangle_{Lie} \subset \mathcal{T}_o\mathcal{G}.$$

2.1.7 Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy [33] -ban az itt definiálttól kis mértékben eltérő érintő tulajdonság már bevezetésre került. A továbbiakban gyenge érintő tulajdonságként fogunk hivatkozni a [33, Definition 2.] -ben bevezetett, valamint erős érintő tulajdonságként a [33, Definition 4.] -ben bevezetett fogalmakra. A különböző érintőtulajdonságok közti kapcsolatot a következő állítás tisztázza:

2.1.8 Állítás. Legyen \mathcal{G} a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ egy részcsoportja és $X \in \mathfrak{X}(M)$.

(i) ha X erősen érinti a \mathcal{G} részcsoportot, akkor $X \in \mathcal{T}_o\mathcal{G}$.

(ii) ha $X \in \mathcal{T}_o\mathcal{G}$, akkor X gyengén érinti \mathcal{G} -t.

A $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ érintő algebra fontos tulajdonsága, hogy általa információt nyerhetünk a \mathcal{G} részcsoportról:

2.1.10 Tétel. Legyen \mathcal{G} a $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ egy részcsoportja, és \mathcal{G}^c ennek lezártja a C^∞ topológiában. Ekkor a $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ érintő algebra $\exp: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$ exponenciális leképezés általi képe által generált csoport a \mathcal{G}^c részcsoportja.

A 2.1.2 Definícióban bevezetett fogalom és a 2.1.4 Tétel eredményét nemcsak a diffeomorfizmus csoport részcsoportjai esetén értelmezhetjük, hanem bármely véges vagy végtelen dimenziós Lie-csoport részcsoportjaira is:

2.1.11 Definíció. Legyen \mathcal{G}_L egy Lie-csoport, $e \in \mathcal{G}_L$ a csoport egységeleme és $\mathfrak{g}_L := T_e\mathcal{G}_L$ a \mathcal{G}_L csoport Lie-algebrája. Ha $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_L$ a \mathcal{G}_L részcsoportja, akkor egy $X \in \mathfrak{g}_L$ elem érinti \mathcal{G} -t, ha létezik olyan C^∞ -sima $\varphi: I \rightarrow \mathcal{G}_L$ görbe, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- (1) $\varphi_t \in \mathcal{G}$,
- (2) $\varphi_0 = e$,
- (3) létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, melyre a $t \rightarrow \varphi_t$ leképezés az X elem k -ad rendű integrálgörbéje.

A \mathcal{G} részcsoport érintővektorainak halmazát $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ -vel jelöljük.

A 2.1.4 Tétel valamint a 2.1.10 Tétel bizonyításában használt gondolatmenethez hasonlóan adódik az alábbi eredmény:

2.1.12 Tétel. Ha \mathcal{G} a \mathcal{G}_L Lie-csoport részcsoporthja, akkor $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ a \mathfrak{g}_L Lie-részalgebrája. Ennek exponenciális képe által generált $\langle \exp(\mathcal{T}_o\mathcal{G}) \rangle$ csoport a \mathcal{G}^c csoport részcsoporthja \mathcal{G}_L -ben.

Egyszerűen látható, hogy abban az esetben, ha \mathcal{G} a \mathcal{G}_L Lie-részcsoporthja, $\mathcal{T}_o\mathcal{G} = \mathfrak{g}$ nem más, mint a \mathcal{G} részcsoporth Lie-algebrája. Ily módon a (2.1.11) Definíció általánosítja a Lie részcsoporthokhoz asszociált Lie-részalgebra klasszikus fogalmát.

2.1.13 Definíció. Egy $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ részcsoporthot végtelen dimenziósnek nevezünk, ha $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ -vel jelölt érintőalgebrája végtelen dimenziós.

2.2 A fibrált holonómia algebra és Lie-részalgebrái

A *fibrált holonómia csoport* fogalma már korábban bevezetésre került [33] -ban:

2.2.1 Definíció. Az (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság fibrált holonómia csoportján az $(\mathcal{I}M, \pi, M)$ induktrix nyaláb olyan fibrumtartó $\Phi \in \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M)$ diffeomorfizmusait tartalmazó csoportot értjük, mely elemeire tetszőleges $p \in M$ esetén teljesül, hogy a $\Phi_p = \Phi|_{\mathcal{I}_pM} \in \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_pM)$ leszűkítés benne van a $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómia csoportban.

Legyen (M, \mathcal{F}) egy kompakt Finsler-sokaság. Könnyen látható, hogy

$$\mathcal{H}ol_f(M) \subset \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M), \quad (2.15)$$

ahol $\mathcal{H}ol_f(M)$ az induktrix nyaláb diffeomorfizmus csoportjának részcsoporthja. Még nem ismert, hogy $\mathcal{H}ol_f(M)$

Lie-részcsoporthja-e a $\mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M)$ diffeomorfizmus csoportnak. A $\mathcal{H}ol_f(M)$ érintővektorainak halmazát

$$\mathfrak{hol}_f(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_f(M)) \quad (2.16)$$

módon jelöljük.

2.2.2 Definíció. A $\mathfrak{hol}_f(M)$ halmazt az (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság *fibrált holonómia algebrájának* nevezzük.

A 2.1.4 Tétel következményeként kapjuk:

2.2.3 Következmény. A $\mathfrak{hol}_f(M)$ fibrált holonómia algebra az $\mathcal{I}M$ sima vektormezőinek $\mathfrak{X}(\mathcal{I}M)$ Lie-algebrájának Lie-részalgebrája.

A görbületi tenzor segítségével bevezetjük $\mathfrak{hol}_f(M)$ két rendkívül fontos Lie-részalgebráját: a görbületi algebrát és az infinitezimális holonómia algebrát.

2.2.4 Definíció. A \mathfrak{R} *görbületi algebra* a görbületi vektormezők által generált Lie-algebra az indukált nyalábon:

$$\mathfrak{R} = \left\langle R(X^h, Y^h)|_{\mathcal{I}M} \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \right\rangle_{Lie}.$$

A görbületi tenzor definíciójából egyszerűen látszik, hogy a görbületi vektormezőket kiszámíthatjuk az alábbi formula segítségével:

$$\xi = R(X^h, Y^h) = [X^h, Y^h] - [X, Y]^h. \quad (2.17)$$

Mi több, a következő állítást is megfogalmazhatjuk:

2.2.5 Állítás. A \mathfrak{R} görbületi algebra elemei érintik a $\mathcal{H}ol_f(M)$ fibrált holonómia csoportot és az általuk generált \mathfrak{R} a $\mathfrak{hol}_f(M)$ Lie-részalgebrája.

2.2.6 Lemma. Bármely $p \in M$ pont esetén

- (1) $h_{t,p} \in \mathcal{H}ol_p(M)$,
- (2) $t \rightarrow h_{t,p}$ egy másodrendű integrálgörbéje a $\xi_p := \xi|_{\mathcal{I}_p}$
 $(\xi_p \in \mathfrak{X}(\mathcal{I}_p))$ vektormezőnek.

2.2.7 Definíció. Egy (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság $\mathfrak{hol}^*(M)$ *infinitesimalis holonómia algebráján* az $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{I}M)$ azon legszűkebb Lie-részalgebráját értjük, amely teljesíti az alábbi tulajdonságokat:

- 1) a görbületi vektormezők elemei $\mathfrak{hol}^*(M)$ -nek,
- 2) ha $\xi \in \mathfrak{hol}^*(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor a $\nabla_X \xi$ horizontális Berwald kovariáns derivált is eleme $\mathfrak{hol}^*(M)$ -nek.

2.2.8 Állítás. Az $\mathfrak{hol}^*(M)$ infinitesimalis holonómia algebra elemei érintik a $\mathcal{H}ol_f(M)$ fibrált holonómia csoportot, valamint $\mathfrak{hol}^*(M)$ a $\mathfrak{hol}_f(M)$ fibrált holonómia algebra Lie-részalgebrája.

2.3 A holonómia algebra és Lie-részalgebrái

Legyen (M, \mathcal{F}) egy Finsler-sokaság.

2.3.1 Definíció. A $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómia csoport érintő Lie-algebráját

$$\mathfrak{hol}_p(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_p(M))$$

módon definiáljuk és az (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság *holonómia algebrájának nevezzük* a $p \in M$ pontban.

2.3.2 Következmény. Egy (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság $p \in M$ -beli $\mathfrak{hol}_p(M)$ holonómia algebrája az $\mathfrak{X}(\mathcal{I}_p)$ egy Lie-részalgebrája.

2.3.3 Definíció. A $p \in M$ -beli göbületi vektormezők által generált \mathfrak{R}_p Lie-algebrát a sokaság $p \in M$ -beli *göbületi algebrájának* nevezzük:

$$\mathfrak{R}_p = \left\langle R(X_p^h, Y_p^h)|_{\mathcal{I}_p} \mid X_p, Y_p \in T_p M \right\rangle_{Lie}.$$

A \mathfrak{R}_p p -beli göbületi algebra a sokaság \mathfrak{R} göbületi algebrájának \mathcal{I}_p -re való leszűkítése.

2.3.4 Állítás. A $p \in M$ -beli \mathfrak{R}_p göbületi algebra érinti a $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómia csoportot, valamint \mathfrak{R}_p a $\mathfrak{hol}_p(M)$ holonómia algebra Lie-részalgebrája.

2.3.5 Definíció. Az (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság $p \in M$ -beli $\mathfrak{hol}^*(M)$ *infinitézimális holonómia algebráján* azt a legkisebb Lie-algebrát értjük, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- 1) Minden ξ_p göbületi vektormező eleme $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ -nak,
- 2) ha $\xi_p \in \mathfrak{hol}_p^*(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor a $(\nabla_X \xi)(p)$ horizontális Berwald kovariáns derivált is eleme $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ -nak.

2.3.6 Megjegyzés. Egy (M, \mathcal{F}) Finsler-sokaság $p \in M$ -beli infinitézimális holonómia algebráját az alábbi módon is definiálhatjuk:

$$\mathfrak{hol}_p^*(M) := \left\{ \xi|_{\mathcal{I}_p} \mid \xi \in \mathfrak{hol}^*(M) \right\}.$$

A (2.2.8) Állítás alapján kapjuk:

2.3.7 Következmény. A $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ infinitézimális holonómia algebra érinti a $\mathcal{H}ol_p(M)$ holonómia csoportot, valamint $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ holonómia algebra Lie-részalgebrája.

Megjegyezzük, hogy a 2.3.4 és 2.3.7 Állítások előrelépést jelentenek [33] eredményeihez képest, mivel az érintő tulajdonságban C^1 -simaság helyett C^∞ -simaságot kapunk.

3. Végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező Finsler-terekről

3.1 A kvantumnavigációs probléma holonómiájáról

A kvantum információ elmélet Randers modellje

Egy zárt, véges dimenziós kvantum rendszerben az állapotteret \mathbb{C}^n -el modellezhetjük valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, a fizikai állapotok pedig az alap Hilbert-tér $\mathbb{C}P^{n-1}$ projektív terének sugaraival reprezentálhatóak. A kvantumnavigációs problémában a 'navigátor' feladata, hogy megtalálja a legrövidebb útvonalat egy $|\Psi_I\rangle$ kezdeti és egy $|\Psi_F\rangle$ végállapot között. A probléma megoldása rendkívül nehéz az állapottér szintjén, azonban [9]-ben és [8]-ban a szerzők megmutatták, hogy a probléma átfogalmazható az állapotokon ható térre, mely ebben az esetben $SU(n)$. A feladat tehát ebben az értelmezésben az, hogy találjunk egy $\hat{H}_c(t)$ Hamilton-operátort az $SU(n)$ csoport $\mathfrak{su}(n)$ Lie-algebrájában, mely esetén a $\hat{H}(t) = \hat{H}_c(t) + \hat{H}_0$ operátor generálja a kezdeti állapot evolúcióját a végső állapotba egy időfüggetlen \hat{H}_0 Hamilton-operátorral kiegészítve. Ez a \hat{H}_0 operátor egy nem eliminálható külső erőhatást reprezentál, tipikusan mágneses mezőt.

2-dimenziós Kvantum Zermelo probléma

A továbbiakban egy kétállapotú kvantum rendszerrel foglalkozunk: egy mágneses mezőben vett elektron esetét vizsgáljuk. Ahogy [9]-ben, a vizsgálataink során mi is egy invariáns "szél" vektormezőt tekintünk, melyet \hat{H}_0 reprezentál a Lie-algebrában, a Riemann-metrika pedig a Killing formából származó invariáns Riemann-metrika:

$$h(\hat{A}, \hat{B}) := \text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}), \quad (3.1)$$

$\hat{A}, \hat{B} \in \mathfrak{su}(2)$. Az $\mathfrak{su}(2)$ Lie-algebrát a $\hat{E}_1 = i\sigma_1, \hat{E}_2 = -i\sigma_2, \hat{E}_3 = i\sigma_3$ vektormezőök generálják, ahol a σ_i mátrixok a Pauli mátrixokat jelölik.

A számítások során az érintőnyalábon vett (x, ξ) koordinátákkal dolgozunk, ahol $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ az $SU(2)$ csoporton vett koordináták, $(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pedig a $\mathfrak{su}(2)$ Lie-algebra invariáns koordinátái az $\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3\}$ bázisra vonatkozóan. A standard és invariáns koordináták közti kapcsolatot $TG = G \times \mathfrak{g}$ -n egyszerűen meghatározhatjuk a $\rho_{x,*}^{-1}(x, y) = (x, \xi)$ formula segítségével, ahol $\rho : SU(2) \rightarrow SU(2)$ a csoport jobb eltolása. Modulo egy merev transzformáció, feltételezhetjük, hogy $\hat{H}_0 = c\hat{E}_1$, ahol $c \in \mathbb{R}$. A (3.1) egyenlet és $W = \hat{H}_0$ alapján kiszámíthatjuk a megfelelő invariáns Randers metrikát:

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{1 - 2c^2} (\alpha_\xi + \beta_\xi), \quad (3.2)$$

ahol α egy Riemann-metrika, β pedig egy 1-forma:

$$\alpha_\xi := \sqrt{2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 4\xi_2^2 c^2 - 4\xi_3^2 c^2}, \quad \beta_\xi := -2c \xi_1. \quad (3.3)$$

Az egyszerűség kedvéért a 2-dimenziós kvantum Zermelo problémának megfelelő 3-dimenziós Finsler teret $\mathcal{Q} = (SU(2), \mathcal{F})$ módon jelöljük.

Az Euler-Lagrange egyenletek invariáns megfogalmazását Euler-Poincaré egyenletek néven ismerjük:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \xi} = -ad_{\xi}^* \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right). \quad (3.5)$$

Ezen egyenletek segítségével meghatározhatjuk a Lie-algebra geodetikus egyenleteit [13].

A görbületi algebra és a holonómia

A görbületi tenzort a spray együtthatókból határozhatjuk meg. A görbületi vektormezők első Lie-zárójelét egyszerű számítással kapjuk:

$$[R_1, R_3] = \frac{1}{\alpha_{\xi}} R_2 + \frac{2c \xi_2}{\alpha_{\xi}^2} R_3, \quad [R_2, R_3] = \frac{-1}{\alpha_{\xi}} R_1 + \frac{2c \xi_3}{\alpha_{\xi}^2} R_3. \quad (3.10)$$

Általánosabban:

3.1.1 Lemma. Legyen $L_0 = R_2$ és jelöljük $L_k = [L_{k-1}, R_3]$ módon a L_{k-1} és R_2 vektormezők Lie-zárójelét minden $k \geq 1$ esetén. Ekkor

$$L_k = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{\alpha_{\xi}^k} R_2 + 2kc \frac{\epsilon_k \xi_2}{\alpha_{\xi}^{k+1}} R_3, & \text{ha } k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{\epsilon_k}{\alpha_{\xi}^k} R_1 - 2kc \frac{\epsilon_k \xi_3}{\alpha_{\xi}^{k+1}} R_3, & \text{ha } k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (3.11)$$

ahol $\epsilon_k = -1$, ha $k = 4l + 1$ vagy $k = 4l + 2$ és $\epsilon_k = 1$, ha $k = 4l + 3$ vagy $k = 4l$ valamely $l \in \mathbb{N}$ esetén.

3.1.2 Állítás. Egy külső W erőhatás mellett a (3.2) Finsler-metrika \mathfrak{R} görbületi algebrája az indukált sima vektormezőinek $\mathfrak{X}(\mathcal{I})$ Lie-algebrájának végtelen dimenziós Lie-részalgebrája.

3.1.3 Tétel. A 2-dimenziós kvantum Zermelo probléma $\mathcal{Hol}(\mathcal{Q})$ holonómia csoportja egy külső W erőhatás esetén nem véges dimenziós.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor nincs külső erőhatás, azaz $W = 0$, a (3.2) metrika egy Riemann-metrika, az indukált $\alpha_\xi = 1$ és könnyen látható, hogy a \mathfrak{R} görbületi algebra izomorf az $\mathfrak{so}(3)$ Lie-algebrával.

3.2 Lokálisan síkprojektív, konstans zászlógörbületű Randers felületek holonómiája

Az alfejezet célja a konstans zászlógörbületű síkprojektív Randers felületek holonómia csoportjának vizsgálata. Első lépésben a \mathbb{D}^2 -n értelmezett Randers-metrika holonómiáját vizsgáljuk, ahol $a = (a_1, 0)$.

Legyen $(\mathbb{D}^2, \mathcal{F}_a)$ egy Finsler felület, ahol \mathbb{D}^2 az \mathbb{R}^2 tér nyílt körlemeze, \mathcal{F}_a pedig a

$$\mathcal{F}_a(x, y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - |x|^2} + \epsilon \left(\frac{\langle x, y \rangle}{1 - |x|^2} + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \right)$$

egyenlet alapján meghatározott Finsler függvény $a = (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ választással, ahol $|a_1| < 1$ nemnulla konstans vektor.

3.2.1 Állítás. A $(\mathbb{D}^2, \mathcal{F}_a)$ Finsler-sokaság holonómia csoportja maximális és $\mathcal{Hol}_x^c(M)$ diffeomorf $\mathcal{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -vel, az \mathbb{S}^1 egységkör irányítástartó diffeomorfizmus csoportjával.

Z. Shen Randers-sokaságokra vonatkozó klasszifikációs tételét alkalmazva kapjuk

3.2.4 Tétel. Egy egyszeresen összefüggő nem-Riemann és nemzérus konstans zászlógörbületű lokálisan síkprojektív Randers felület holonómia csoportja maximális, valamint $\mathcal{H}ol^c(M)$ diffeomorf $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ -vel, azaz

$$\mathcal{H}ol^c(M) \cong \mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1).$$

A tétel alapján a következő klasszifikációt kapjuk:

3.2.5 Következmény. Egy egyszeresen összefüggő konstans zászlógörbületű lokálisan síkprojektív Randers felület holonómia csoportjának lezártja

1. az $\{id\}$ triviális csoport, ha $\lambda = 0$;
2. az $SO(2)$ forgatás csoport, ha $\lambda \neq 0$ és a metrika Riemann;
3. az egységkör irányítástartó diffeomorfizmus csoportja $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$, ha $\lambda \neq 0$ és a metrika nem-Riemann.

4. A végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező Finsler-terek halmazának sűrűségéről

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy egy generikus Finsler-sokaság holonómia csoportja végtelen dimenziós. Pontosabban szólva a 4.4.1 Tételben megmutatjuk, hogy egy $n \geq 2$ dimenziós M sokaságon értelmezett C^∞ -sima Finsler metrikák halmazának létezik végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező olyan $\tilde{\mathcal{F}}$

részhalmlaza, mely nyílt és mindenhol sűrű bármely \mathcal{C}^m -topológiában, ahol $m \geq 8$. Ez az eredmény rávilágít, hogy a Riemann esettel szemben a legtöbb Finsler-sokaság holonómia csoportjának lezártja nem egy kompakt csoport. Hasonló eredményre jutottak a szerzők [22]-ban a *lineáris holonómia csoportra vonatkozóan*, melyet lineáris párhuzamos eltolással definiálunk.

4.1 Vektormezők 3-jet generáló Lie-alegrái

4.1.1 Definíció. Egy M sokaságon vett vektormezők $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}(M)$ halmazát

- k -jet generálónak nevezzük az $x \in M$ pontban, ha a természetes $j_x^k: \mathcal{V} \rightarrow J_x^k(\mathfrak{X}(M))$ leképezés szürjektív,
- jet generálónak nevezzük M -en, ha bármely $x \in M$ és bármely $k \geq 0$ esetén k -jet generáló.

A definíció értelmében az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ -en értelmezett vektormezők \mathfrak{g} algebráját *3-jet generálónak* nevezzük $x \in U$ -ban, ha minden vektormezőt közelíthetünk harmadrendben az algebra elemeivel az x pontban. A következő tételhez jutunk:

4.1.2 Tétel. Legyen \mathfrak{g} egy U sokaságon értelmezett vektormezők Lie-algebrája. Ha létezik olyan pont, melyben \mathfrak{g} rendelkezik a 3-jet generáló tulajdonsággal, akkor \mathfrak{g} végtelen dimenziós.

Megjegyezzük, hogy ha U dimenziója 1, az eredmény ekvivalens Sophus Lie nevezetes eredményével, lásd pl. [27, Theorem 2.70]. Ahogy a [27] végén található táblázatban szereplő példák mutatják, melyben véges dimenziós vektormező algebrák szerepelnek, a 3-jet

generáló tulajdonság fontos szereppel bír.

4.2 A Funk-metrika holonómia algebrájának 3-jet generáló tulajdonsága

Ebben a fejezetben a standard Funk-metrika holonómia struktúráját vizsgáljuk.

4.2.1 Megjegyzés. A $(\mathbb{B}^2, F_{\mathbb{B}^2})$ Finsler-sokaság holonómiáját korábban [37, Chapter 5] vizsgálta. A szerzők bebizonyították, hogy a $(\mathbb{B}^2, F_{\mathbb{B}^2})$ Finsler felület holonómia csoportjának lezártja $\mathcal{D}iff_+(\mathbb{S}^1)$, az egységkör irányítástartó diffeomorfizmus csoportjának lezártja [37, Theorem 5.2].

A fenti eredményt felhasználva kapjuk a következő állítást:

4.2.2 Állítás. A standard Funk-metrika $\mathfrak{hol}_o^*(F_{\mathbb{B}^n})$ -módon jelölt $o \in \mathbb{B}^n$ pontbeli infinitezimális holonómia algebrája rendelkezik a jet generáló tulajdonsággal az \mathcal{I}_o indikátrixon.

4.3 Finsler metrikák Funk perturbációi

Legyen (M, F) egy Finsler-sokaság, $x_0 \in M$ pedig egy rögzített pontja. Ekkor választhatunk egy olyan x_0 -ba centrált (U, x) koordináta-rendszert, melyre $x(U) \subset \mathbb{B}^n$. Az ehhez TM -en asszociált koordináta-rendszert $(\pi^{-1}(U), \chi = (x, y))$ módon jelöljük. Tekintsünk továbbá egy $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$ dudorfüggvényt, melyre $\text{supp}(\psi) \subset U$ és $\psi|_{\bar{U}} = 1$ teljesül x_0 valamely $\bar{U} \subset U$ nyílt környezetében.

Jelöljük $\bar{\psi} := \psi \circ \pi$ módon a ψ leképezés π általi visszahúzottját.

A standard Funk-norma függvényt használva bevezetünk egy új $\bar{F} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ Finsler-normát az alábbi módon:

$$\bar{F}^2 = \psi \cdot (F_{\mathbb{B}^n} \circ \chi)^2 + (1 - \psi) \cdot F^2. \quad (4.17)$$

Megjegyezzük, hogy \bar{F} a standard Funk-norma visszahúzottja $\pi^{-1}(\tilde{U})$ -n.

Felhasználva a (4.17) egyenletet, definiáljuk az F sima perturbációját F_t függvények 1-paraméteres családjaként, ahol

$$F_t^2 = (1 - t)F^2 + t\bar{F}^2, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.18)$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor minden F_t egy Finsler-norma lesz M -en.

4.3.2 Állítás. A $\mathfrak{hol}_{x_0}^*(F_t)$ infinitezimális holonómia algebra minden eleme kifejezhető t polinomjainak törtkifejezésekként, ahol a polinomok együtthatói meghatározhatóak a $j_{x_0}^k F$ és $j_{x_0}^k \bar{F}$ jetekkel valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén.

4.3.3 Állítás. Bármely $y_0 \in \mathcal{I}_o$ esetén azon $t \in [0, 1]$ paraméterek halmaza, melyekre a Funk perturbáció $\mathfrak{hol}_{x_0}^*(F_t) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{I}_{x_0}^t)$ infinitezimális holonómia algebrája nem rendelkezik a 3-jet generáló tulajdonsággal, véges.

4.4 Majdnem minden Finsler-metrika holonómia csoportja végtelen dimenziós

4.4.1 Tétel. Egy $n \geq 2$ dimenziós M sokaságon értelmezett C^∞ -sima Finsler metrikák \mathcal{F} halmazának létezik $m \geq 8$ esetén a \mathcal{C}^m -topológiában véve olyan nyílt és mindenütt sűrű részhalmaza, mely elemeinek holonómia csoportja végtelen dimenziós.

4.4.2 Megjegyzés. A 4.4.1 Tétel bizonyításában megmutattuk, hogy egy megfelelő perturbáció esetén az infinitezimális holonómia algebra egy pontban végtelen dimenziós. Ez az állítás igaz marad a pont kis környezetében.

Short thesis for the degree of doctor of
philosophy (PhD)

ON THE HOLONOMY OF
FINSLER MANIFOLDS

by Hubicska Balázs Attila

Supervisor: Dr. Zoltán Muzsnay



UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral School of Mathematical and
Computational Sciences
Debrecen, 2021.

Introduction

The main topic of this thesis is the study of some specific aspects of Finsler spaces. Finsler geometry is a relatively young area of geometric studies compared to its foundations in differential geometry, not to mention the several millenia-old urge of humanity to understand the sprawling network of shapes, forces and interactions of the world around us.

The modern form of differential geometry is the merit of a student of Gauss: Bernhard Riemann, who in his famous Habilitationsvortrag [40] introduced what we now call an n -dimensional Riemannian manifold and its curvature tensor. Interestingly the idea of more general metrics which does not come from an inner product also appeared in the lecture, but Riemann thought they does not require essentially new principles (which is more or less holds true even now) and that these more general metrics lack nice geometric interpretations.

At the beginning of the XXth century, the intensive study of Finsler metrics was motivated by the optimal transport theory. A group of mathematicians lead by C. Cartheodory aimed to adapt mathematical tools

which were effective in Riemannian geometry (such as affine connections, Jacobi vector fields, sectional curvature) for a more general situation. P. Finsler was a student of Cartheodory and his dissertation [12] is one of the important steps on this way. Since then, the theory evolved in a great amount due to the works of several outstanding mathematicians, but it is still far from being complete. In recent years more and more focus trends to the applications of Finsler geometry in several fields of natural sciences. From general relativity through wildfire spread and seismic ray modeling to quantum mechanics, a lot of different areas take advantage of the tools of Finsler geometry [31, 45]. The investigations of B. Russel and S. Stepney in [41, 42] opened a new way for the geometric investigations of several interesting phenomena in Quantum Information Processing (QIP) by the application of D. Bao, C. Robles and Z. Shen's theorem on the one-to-one correspondence between the solutions of the Zermelo navigational problem and Randers metrics [3].

One aspect of the geometric properties still to discover and describe is the holonomy structure, which will be the main focus of our investigations in this thesis. The holonomy group is a very natural geometric object. In a broader sense it is a geometric concept which refers to the property that if we transport an object along a closed path it may not return to its original state. This phenomena occurs in different areas of physics such as a theory what before the middle of the 20th century was not considered to be geometric in nature: quantum mechanics. The first key concept in understanding holonomy is how we transport objects: by parallelism. For an Euclidean space it is quite clear when do we consider

two vectors parallel since the tangent spaces at different points are naturally identified. In the Riemannian case to define parallelism we need a connection ∇ on the tangent bundle TM and there is a canonical choice for it: the Levi-Civita connection. This allows us to define when two vectors v and w at different points, say p and q respectively, will be called parallel with respect to a fixed curve γ joining the two points. Then by the parallel translation along γ we have an isomorphism between the tangent spaces $P_\gamma : T_pM \rightarrow T_qM$. This mapping however have a dependence on the curve, and there is no reason for parallel translations along different curves to coincide. This is where our main object of investigations the holonomy group appears: to describe the parallel translation's dependence on the choice of the curve, we investigate the set of automorphisms $P_c : T_pM \rightarrow T_pM$ for an initial point p , where the curves c are closed piece-wise smooth curves starting and ending at the point p .

Indeed, the holonomy group of a Riemann or Finsler manifold is the transformation group generated by parallel translation of vectors along loops. In the Riemannian case, the connection between the holonomy group and the geometry of the manifold was thoroughly investigated in the last century. In 1952 A. Borel and A. Lichnerowicz proved that the holonomy group of a simply connected n -dimensional Riemannian manifold is a closed subgroup of the orthogonal group [7]. W. Ambrose and M. Singer described the relationship between the holonomy and the curvature [1]. Few years later, M. Berger gave the list of all possible holonomy groups of Riemannian manifolds [4]. Since then, all of these groups were shown to appear as holonomy groups of some Riemannian manifolds and therefore the complete classification of Riemannian

holonomy groups is well known. In the Finslerian case, however, only partial results are known: for Berwald manifolds, Landsberg manifolds, and Finsler manifolds with very special curvature properties [25, 49, 37].

1. Basic concepts and tools

In this chapter we give the preliminaries necessary to understand the later chapters. We collect the most indispensable concepts from spray geometry and Finsler geometry. We also standardize our notation and terminology. The main scene of our investigations is the *tangent bundle* (TM, π, M) and the *second tangent bundle* (TTM, τ, TM) . A *Finsler manifold* is a pair (M, \mathcal{F}) , where the norm function $\mathcal{F}: TM \rightarrow \mathbb{R}_+$ is continuous, smooth on $\hat{T}M := TM \setminus \{0\}$, its restriction $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}|_{T_x M}$ is a positively homogeneous function of degree one and the symmetric bilinear form

$$g_{x,y}: (u, v) \mapsto g_{ij}(x, y)u^i v^j = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_x^2(y + su + tv)}{\partial s \partial t} \Big|_{t=s=0}$$

is positive definite at every $y \in \hat{T}_x M$.

Geodesics of (M, \mathcal{F}) are determined by a system of 2nd order ordinary differential equation $\ddot{x}^i + 2G^i(x, \dot{x}) = 0$, $i = 1, \dots, n$ in a usual local coordinate system (x^i, y^i) of TM , where $G^i(x, y)$ are given by

$$G^i(x, y) := \frac{1}{4} g^{il}(x, y) \left(2 \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}(x, y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}(x, y) \right) y^j y^k.$$

A vector field $X(t) = X^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ along a curve $c(t)$ is said to be parallel with respect to the associated *homogeneous*

(*nonlinear*) connection if it satisfies

$$D_{\dot{c}}X(t) := \left(\frac{dX^i(t)}{dt} + G_j^i(c(t), X(t))\dot{c}^j(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0,$$

where $G_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$.

The *horizontal Berwald covariant derivative* $\nabla_X \xi$ of $\xi(x, y) = \xi^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}$ by the vector field $X(x) = X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ is expressed locally by

$$\nabla_X \xi = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - G_j^k \frac{\partial \xi^i}{\partial y^k} + G_{jk}^i \xi^k \right) X^j \frac{\partial}{\partial y^i},$$

where we denote $G_{jk}^i(x, y) := \frac{\partial G_j^i(x, y)}{\partial y^k}$.

The *curvature tensor field* $R = R_{jk}^i dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$ has the expression

$$R_{jk}^i = \frac{\partial G_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial G_k^i}{\partial x^j} + G_j^m G_{km}^i - G_k^m(x, y) G_{jm}^i.$$

The *Riemannian curvature tensor* is $R_y := R(\cdot, y)$, its components can be obtained as $R_j^i = R_{jk}^i y^k$. For a tangent plane $P = \text{Span} \{ y, u \} \subset T_x M$, the flag curvature is defined as

$$\mathbf{K}(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2}.$$

1.3.1 Definition. The *holonomy group* $\mathcal{H}ol_x(M, F)$ of a Finsler manifold (M, F) at a point $x \in M$ is the group generated by parallel translations along piece-wise differentiable closed curves starting and ending at x .

Since the parallel translation is 1-homogeneous and preserves the norm, the holonomy group can be seen as a subgroup of the diffeomorphism group of the indicatrix:

$$\mathcal{H}ol_x(M, F) \subset \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_x).$$

2. Tangent Lie algebra of a diffeomorphism group and its application to the holonomy theory

2.1 Tangent Lie algebra of a diffeomorphism group

In this section of the thesis we investigate the tangential property and tangential structure of subgroups of the diffeomorphism group.

A smooth curve $c: I \rightarrow M$ on the manifold M has a singularity of order $(k-1)$ at $t = 0$, if its derivatives vanish up to order $k-1$, ($k \geq 0$). It is well known that if a curve c has a singularity of order $(k-1)$ at $0 \in \mathbb{R}$ then its k^{th} order derivative $c^{(k)}(0) = X_p$ is a tangent vector at $p = c(0)$. In that case, the curve c is called an integral curve of order k of the vector $X_p \in T_pM$. Extending this concept to vector fields, we can introduce the following

2.1.1 Definition. A C^∞ -smooth curve in the diffeomorphism group $\varphi: I \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$, $t \rightarrow \varphi_t$ is called an *integral curve of the vector field* $X \in \mathfrak{X}(M)$ if

- (1) $\varphi_0 = id_M$,
- (2) there exists $k \in \mathbb{N}$ such that for any point $p \in M$ the curve $t \rightarrow \varphi_t(p)$ is an integral curve of order k of $X(p) \in T_pM$.

This $k \in \mathbb{N}$ is called the *order* of the integral curve φ_t of the vector field X .

In particular, the flow φ_t^X of $X \in \mathfrak{X}(M)$ is an integral curve of order 1 of X . Moreover, if $k > 1$ and $t \rightarrow \varphi_t$ is an integral curve of order k of the vector field X then we have

$$\varphi_0 = id_M, \quad \left. \frac{\partial^i \varphi_t}{\partial t^i} \right|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^k \varphi_t}{\partial t^k} \right|_{t=0} = X, \quad (2.1)$$

where $i = 1, \dots, k - 1$. Let $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ be an arbitrary subgroup of the diffeomorphism group $\mathcal{D}iff^\infty(M)$. Using the terminology of Definition 2.1.1 we introduce the following

2.1.2 Definition. A vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ is called *tangent* to a subgroup $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$ of the diffeomorphism group if there exists an integral curve of X in \mathcal{G} . The set of tangent vector fields of \mathcal{G} is denoted by $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$.

2.1.3 Remark. We have $X \in \mathcal{T}_0\mathcal{G}$ if and only if there exists a C^∞ -smooth curve $\varphi: I \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$ such that

- (1) $\varphi_t \in \mathcal{G}$,
- (2) $\varphi_0 = id_M$,
- (3) there exists $k \in \mathbb{N}$ such that equation (2.1) is satisfied.

One can observe that in Definition 2.1.2 we do not suppose that \mathcal{G} is a Lie subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(M)$. Indeed, we use the differential structure of the later to formulate the smoothness condition on the curve in \mathcal{G} . Nevertheless, we have the following

2.1.4 Theorem. If \mathcal{G} is a subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(M)$, then $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{X}(M)$.

Motivated by the results of Theorem 2.1.4 we propose the following

2.1.5 Definition. $\mathcal{T}_0\mathcal{G}$ is called the tangent Lie algebra of the subgroup $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}iff^\infty(M)$.

As a direct consequence of Theorem 2.1.4 we get the following

2.1.6 Corollary. Let \mathcal{G} be a subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ and \mathcal{S} be a subset of $\mathfrak{X}(M)$ such that the elements of \mathcal{S} are tangent to \mathcal{G} . Then the Lie subalgebra $\langle \mathcal{S} \rangle_{Lie}$ of $\mathfrak{X}(M)$ generated by the elements of \mathcal{S} is also tangent to \mathcal{G} , that is

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_o\mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathcal{S} \rangle_{Lie} \subset \mathcal{T}_o\mathcal{G}.$$

2.1.7 Remark. Slightly different tangent properties of vector fields to a subgroup \mathcal{G} of the diffeomorphism group were already introduced in [33]. We will refer to the property [33, Definition 2.] as the *weak tangent property* and to [33, Definition 4.] as the *strong tangent property*. Our language is justified by the following proposition which is clarifying the relationship between the tangent property introduced in Definition (2.1.1) and the tangent properties introduced in [33]:

2.1.8 Proposition. Let \mathcal{G} be a subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ and $X \in \mathfrak{X}(M)$. Using the terminology of Remark (2.1.17):

- (i) if X is strongly tangent to \mathcal{G} , then $X \in \mathcal{T}_o\mathcal{G}$.
- (ii) if $X \in \mathcal{T}_o\mathcal{G}$, then it is weakly tangent to \mathcal{G} .

The main feature of $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ is that one can obtain information about the group \mathcal{G} . Indeed, one has the following

2.1.10 Theorem. Let \mathcal{G} be a subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(M)$ and \mathcal{G}^c its topological closure with respect to the C^∞ topology. Then the group generated by the exponential image of the tangent Lie algebra $\mathcal{T}_o\mathcal{G}$ with respect to the exponential map $\exp: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{D}iff^\infty(M)$ is a subgroup of \mathcal{G}^c .

The concept worked out in Definition 2.1.2 and Theorem 2.1.4 can be adapted not only for subgroups of the

diffeomorphism group but for any subgroup of any (finite or infinite dimensional) Lie group:

2.1.11 Definition. Let \mathcal{G}_L be a Lie group, $e \in \mathcal{G}_L$ is the identity element of \mathcal{G}_L and $\mathfrak{g}_L := T_e \mathcal{G}_L$ the Lie algebra of \mathcal{G}_L . If $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_L$ is a subgroup of \mathcal{G}_L , then $X \in \mathfrak{g}_L$ is called tangent to \mathcal{G} if there exist a C^∞ -smooth curve $\varphi: I \rightarrow \mathcal{G}_L$ such that

- (1) $\varphi_t \in \mathcal{G}$,
- (2) $\varphi_0 = e$,
- (3) there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $t \rightarrow \varphi_t$ is a k^{th} order integral curve of X .

The set of tangent vector of \mathcal{G} is denoted by $\mathcal{T}_o \mathcal{G}$.

Then, adapting the proof of Theorem 2.1.4 and Theorem 2.1.10 we can get the following

2.1.12 Theorem. If \mathcal{G} is a subgroup of a Lie group \mathcal{G}_L , then $\mathcal{T}_o \mathcal{G}$ is a Lie subalgebra of \mathfrak{g}_L . The group $\langle \exp(\mathcal{T}_o \mathcal{G}) \rangle$ generated by the exponential image of $\mathcal{T}_o \mathcal{G}$ with respect to the exponential map $\exp: \mathfrak{g}_L \rightarrow \mathcal{G}_L$ is a subgroup of the topological closure \mathcal{G}^c of \mathcal{G} in \mathcal{G}_L .

It is clear that in the case when \mathcal{G} is a Lie subgroup of \mathcal{G}_L , then $\mathcal{T}_o \mathcal{G} = \mathfrak{g}$ is just the usual Lie subalgebra of \mathfrak{g}_L associated to the Lie subgroup \mathcal{G} . Therefore Definition (2.1.11) generalizes the classical notion of the Lie subalgebra associated to a Lie subgroup.

2.1.13 Definition. We call a subgroup $\mathcal{G} \subset \text{Diff}^\infty(M)$ infinite dimensional, if its tangent algebra $\mathcal{T}_o \mathcal{G}$ is infinite dimensional.

2.2 The fibered holonomy algebra and its Lie subalgebras

The notion of *fibered holonomy group* $\mathcal{H}ol_f(M)$ appeared in [33]:

2.2.1 Definition. The fibered holonomy group $\mathcal{H}ol_f(M)$ of (M, \mathcal{F}) consists of fibre preserving diffeomorphisms $\Phi \in \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M)$ of the indicatrix bundle $(\mathcal{I}M, \pi, M)$ such that for any $p \in M$ the restriction $\Phi_p = \Phi|_{\mathcal{I}_p M} \in \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}_p M)$ belongs to the holonomy group $\mathcal{H}ol_p(M)$.

Let (M, \mathcal{F}) be a compact Finsler manifold. It is obvious that

$$\mathcal{H}ol_f(M) \subset \mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M), \quad (2.15)$$

where $\mathcal{H}ol_f(M)$ is a subgroup of the diffeomorphism group of the indicatrix bundle. Until now it is not known whether or not $\mathcal{H}ol_f(M)$ is a Lie subgroup of $\mathcal{D}iff^\infty(\mathcal{I}M)$. The set of tangent vector fields to the group $\mathcal{H}ol_f(M)$ denoted as

$$\mathfrak{h}ol_f(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_f(M)). \quad (2.16)$$

2.2.2 Definition. $\mathfrak{h}ol_f(M)$ is called the *fibered holonomy algebra* of the Finsler manifold (M, \mathcal{F}) .

From Theorem 2.1.4 one can obtain the following

2.2.3 Corollary. The fibered holonomy algebra $\mathfrak{h}ol_f(M)$ is a Lie subalgebra of the Lie algebra of smooth vector fields $\mathfrak{X}(\mathcal{I}M)$.

In the sequel we introduce two important Lie subalgebras of $\mathfrak{h}ol_f(M)$ using the the curvature tensor: the curvature algebra and the infinitesimal holonomy algebra.

2.2.4 Definition. The *curvature algebra* \mathfrak{R} is the Lie algebra generated on the indicatrix bundle by curvature vector fields:

$$\mathfrak{R} = \left\langle R(X^h, Y^h)|_{\mathcal{I}M} \mid X, Y \in \mathfrak{X}(M) \right\rangle_{Lie}.$$

It is not difficult to see from the definition of the curvature tensor that a curvature vector field can be calculated as

$$\xi = R(X^h, Y^h) = [X^h, Y^h] - [X, Y]^h. \quad (2.17)$$

Moreover, we have the following

2.2.5 Proposition. The elements of the curvature algebra are tangent to the group $\mathcal{H}ol_f(M)$ and the curvature algebra \mathfrak{R} is a Lie subalgebra of $\mathfrak{hol}_f(M)$.

2.2.7 Definition. The *infinitesimal holonomy algebra* $\mathfrak{hol}^*(M)$ of a Finsler manifold (M, \mathcal{F}) is the smallest Lie algebra on the indicatrix bundle which satisfies the following properties:

- 1) curvature vector fields are an element of $\mathfrak{hol}^*(M)$,
- 2) if $\xi \in \mathfrak{hol}^*(M)$ and $X \in \mathfrak{X}(M)$, then the horizontal Berwald covariant derivative $\nabla_X \xi$ is also an element of $\mathfrak{hol}^*(M)$.

We have the following

2.2.8 Proposition. The infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}^*(M)$ is tangent to $\mathcal{H}ol_f(M)$ and the infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}^*(M)$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{hol}_f(M)$.

2.3 The holonomy algebra and its Lie subalgebras

Let (M, \mathcal{F}) be a Finsler manifold.

2.3.1 Definition. The tangent Lie algebra to the group $\mathcal{H}ol_p(M)$

$$\mathfrak{hol}_p(M) := \mathcal{T}_0(\mathcal{H}ol_p(M)).$$

is called the *holonomy algebra* of the Finsler manifold (M, \mathcal{F}) at $p \in M$.

2.3.2 Corollary. The holonomy algebra $\mathfrak{hol}_p(M)$ of a Finsler manifold (M, \mathcal{F}) at $p \in M$ is a Lie subalgebra of $\mathfrak{X}(\mathcal{I}_p)$.

2.3.3 Definition. The Lie algebra \mathfrak{R}_p of vector fields generated by curvature vector fields at $p \in M$ is called the *curvature algebra at p*:

$$\mathfrak{R}_p = \left\langle R(X_p^h, Y_p^h)|_{\mathcal{I}_p} \mid X_p, Y_p \in T_p M \right\rangle_{Lie}.$$

The curvature algebra \mathfrak{R}_p is the restriction of \mathfrak{R} to the indicatrix \mathcal{I}_p

2.3.4 Proposition. The curvature algebra \mathfrak{R}_p at $p \in M$ is tangent to the group $\mathcal{H}ol_p(M)$ and the curvature algebra \mathfrak{R}_p is a Lie subalgebra of the holonomy algebra $\mathfrak{hol}_p(M)$.

2.3.5 Definition. The *infinitesimal holonomy algebra* $\mathfrak{hol}^*(M)$ of a Finsler manifold (M, \mathcal{F}) at a point $p \in M$ is the smallest Lie algebra on the indicatrix at p which satisfies the following properties:

- 1) Every curvature vector field ξ_p is an element of $\mathfrak{hol}_p^*(M)$,
- 2) if $\xi_p \in \mathfrak{hol}_p^*(M)$ and $X \in \mathfrak{X}(M)$, then the horizontal Berwald covariant derivative $(\nabla_X \xi)(p)$ is also an element of $\mathfrak{hol}_p^*(M)$.

2.3.6 Remark. The infinitesimal holonomy algebra of a Finsler manifold (M, \mathcal{F}) at a point $p \in M$ can also be considered as

$$\mathfrak{hol}_p^*(M) := \left\{ \xi|_{\mathcal{I}_p} \mid \xi \in \mathfrak{hol}^*(M) \right\}.$$

From Proposition (2.2.8) we get

2.3.7 Corollary. The infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}_p^*(M)$ is tangent to the holonomy group $\mathcal{Hol}_p(M)$ and is a Lie subalgebra of the holonomy algebra $\mathfrak{hol}_p(M)$.

We remark that the first parts of the statement of Proposition 2.3.4 and 2.3.7 are improvements of the results of [33] because the tangential property of the Lie algebra is improved: we can guaranty C^∞ -smoothness instead of C^1 -smoothness.

Chapter 3

Some results about Finsler manifolds with infinite dimensional holonomy group

3.1 Holonomy of the quantum navigation problem

Randers model of Quantum Information Processing

In a closed **finite dimensional quantum** system the state space is \mathbb{C}^n for some $n \in \mathbb{N}$ and the physical states can be identified with the rays of this space, that is the projective space $\mathbb{C}P^{n-1}$ of the underlying Hilbert space. In Quantum Information Processing (QIP) the task of the "navigator" is to find the shortest path from an initial state $|\Psi_I\rangle$ to a final state $|\Psi_F\rangle$. The problem is hard to solve on the level of state space, but in [9] and in [8] the authors showed that one can lift this problem to the space acting on the states: the special unitary group $SU(n)$. The task is then to find a control Hamiltonian $\hat{H}_c(t)$ in the Lie algebra $\mathfrak{su}(n)$ of $SU(n)$ which together with a time independent Hamiltonian \hat{H}_0 , representing the effect of the ineliminable external field, forms $\hat{H}(t) = \hat{H}_c(t) + \hat{H}_0$ and generates the evolution of our initial state to the final state.

2-dimensional quantum Zermelo problem

We consider a specific case of the two state quantum system: a single spin particle in a magnetic field. As in [9], we consider an invariant "wind" vector field, represented in the Lie algebra by \hat{H}_0 and the invariant Riemannian metric coming from the Killing form:

$$h(\hat{A}, \hat{B}) := \text{tr}(\hat{A}^\dagger \hat{B}), \quad (3.1)$$

$\hat{A}, \hat{B} \in \mathfrak{su}(2)$. The Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ is spanned by $\hat{E}_1 = i\sigma_1, \hat{E}_2 = -i\sigma_2, \hat{E}_3 = i\sigma_3$ where the sigmas are the Pauli matrices.

We will work with the coordinates (x, ξ) on the tangent bundle, where $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ are coordinates on the group $SU(2)$ and $(\xi) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ are the invariant coordinates in the Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$ with respect the basis

$\{\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3\}$. The relation between the standard coordinates and the invariant coordinates on $TG = G \times \mathfrak{g}$ can be found by $\rho_{x,*}^{-1}(x, y) = (x, \xi)$, where $\rho : SU(2) \rightarrow SU(2)$ is the right translation. Modulo a rigid transformation, we can suppose that $\hat{H}_0 = c\hat{E}_1$ with $c \in \mathbb{R}$. With (3.1) and $W = \hat{H}_0$ one can calculate Finsler function and find the corresponding invariant Randers metric:

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{1 - 2c^2} (\alpha_\xi + \beta_\xi), \quad (3.2)$$

with a Riemannian norm α and a 1-form β :

$$\alpha_\xi := \sqrt{2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 4\xi_2^2 c^2 - 4\xi_3^2 c^2}, \quad \beta_\xi := -2c \xi_1. \quad (3.3)$$

For simplicity, the 3-dimensional Finsler space corresponding to the 2-dimensional quantum Zermelo problem will be denoted by $\mathcal{Q} = (SU(2), \mathcal{F})$.

The invariant formulation of the Euler-Lagrange equations, called the Euler-Poincaré equations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \xi} = -ad_\xi^* \left(\frac{\partial E}{\partial \xi} \right), \quad (3.5)$$

can be used to determine the geodesic equation on the Lie algebra [13].

Curvature algebra and holonomy

The curvature tensor can be obtained from the spray coefficients. It is not difficult to calculate the first Lie brackets of the curvature vector fields:

$$[R_1, R_3] = \frac{1}{\alpha_\xi} R_2 + \frac{2c \xi_2}{\alpha_\xi^2} R_3, \quad [R_2, R_3] = \frac{-1}{\alpha_\xi} R_1 + \frac{2c \xi_3}{\alpha_\xi^2} R_3. \quad (3.10)$$

More generally, we have the following

3.1.1 Lemma. Let $L_0 = R_2$ and denote $L_k = [L_{k-1}, R_3]$ the Lie bracket of the vector field L_{k-1} and R_2 for $k \geq 1$. Then

$$L_k = \begin{cases} \frac{\epsilon_k}{\alpha_\xi^k} R_2 + 2kc \frac{\epsilon_k \xi_2}{\alpha_\xi^{k+1}} R_3, & \text{if } k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{\epsilon_k}{\alpha_\xi^k} R_1 - 2kc \frac{\epsilon_k \xi_3}{\alpha_\xi^{k+1}} R_3, & \text{if } k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad (3.11)$$

where $\epsilon_k = -1$, if $k = 4l + 1$ or $k = 4l + 2$ and $\epsilon_k = 1$, if $k = 4l + 3$ or $k = 4l$ for some $l \in \mathbb{N}$.

3.1.2 Proposition. In the presence of external wind W , the curvature algebra \mathfrak{R} of the Finsler metric (3.2) is an infinite dimensional Lie subalgebra of $\mathfrak{X}(\mathcal{I})$ of smooth vector fields of the indicatrix.

We remark that if there is no external wind, that is $c = 0$, then (3.2) is a Riemann metric: On the indicatrix we have $\alpha_\xi = 1$ and one can easily see that \mathfrak{R} is isomorphic to $\mathfrak{so}(3)$.

3.1.3 Theorem. The holonomy group $\mathcal{H}ol(\mathcal{Q})$ of the 2-dimensional quantum Zermelo problem in the presence of an external wind W is not a finite dimensional Lie group.

We remark that if there is no external wind W , then $\mathcal{Q} = (SU(2), \alpha)$ is a 3-dimensional Riemannian manifold and its holonomy group $\mathcal{H}ol(\mathcal{Q})$ is the 3-dimensional special orthogonal group $SO(3)$.

3.2 Holonomy of projectively flat Randers metrics of constant curvature

Our aim is to describe the holonomy structure of projectively flat non-Riemannian Randers two-manifolds with

non-zero constant flag curvature. As a first step, we investigate the holonomy of Randers metric defined on \mathbb{D}^2 with $a = (a_1, 0)$.

Let $(\mathbb{D}^2, \mathcal{F}_a)$ be the Finsler two-manifold where \mathbb{D}^2 is the unit ball in \mathbb{R}^2 and \mathcal{F}_a is the Finsler function given by

$$\mathcal{F}_a(x, y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2)}}{1 - |x|^2} + \epsilon \left(\frac{\langle x, y \rangle}{1 - |x|^2} + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle} \right)$$

where $a = (a_1, 0) \in \mathbb{R}^2$ is a nonzero constant vector with $|a_1| < 1$. We have the following

3.2.1 Proposition. The holonomy group of $(\mathbb{D}^2, \mathcal{F}_a)$ is maximal and $\mathcal{H}ol_x(M)^c$ is diffeomorphic to $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ which is the orientation preserving diffeomorphism group of \mathbb{S}^1 .

3.2.2 Lemma. For any $n \in \mathbb{N}$ we have $\Sigma_n \subset \mathfrak{hol}_0^*$.

Using Z. Shen's classification theorem of Randers manifolds we can get the following

3.2.4 Theorem. The holonomy group of a simply connected non-Riemannian projectively flat Finsler two-manifold of constant non-zero flag curvature is maximal and $\overline{\mathcal{H}ol(M)}$ is diffeomorphic to the orientation preserving diffeomorphism group of \mathbb{S}^1 , that is

$$\overline{\mathcal{H}ol(M)} \cong \mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1).$$

We can obtain the following classification:

3.2.5 Corollary. The closure of the holonomy group $\mathcal{H}ol(M)$ of a simply connected, locally projectively flat Randers two-manifold of constant flag curvature λ is

1. the trivial group $\{id\}$, when $\lambda = 0$;
2. the rotation group $SO(2)$, when $\lambda \neq 0$ and the metric is Riemannian;
3. the orientation preserving diffeomorphism group of the circle $\mathcal{D}iff_+^\infty(\mathbb{S}^1)$, when $\lambda \neq 0$ and the metric is non-Riemannian.

4. Density of Finsler metrics with infinite dimensional holonomy group

In this section we prove that for a generic Finsler manifold the holonomy group is infinite-dimensional. More precisely, we show in Theorem 4.4.1 that in the set \mathcal{F} of C^∞ -smooth Finsler metrics on a manifold M of dimension $n \geq 2$, there exists a subset $\tilde{\mathcal{F}}$ of Finsler metrics with infinite dimensional holonomy group, which is open and everywhere dense in any \mathcal{C}^m -topology, $m \geq 8$. This result implies that, in contrast to the Riemannian case, the closure of the holonomy group is not a compact group for most Finsler metric. Similar results for the *linear holonomy group* (defined via the linear parallel transport) were recently obtained in [22].

4.1 3-jet generating Lie algebras of vector fields

4.1.1 Definition. A set $\mathcal{V} \subset \mathfrak{X}(M)$ of vector fields on a manifold M is called

- k -jet generating at $x \in M$ if the natural map $j_x^k: \mathcal{V} \rightarrow J_x^k(\mathfrak{X}(M))$ is surjective, and
- jet generating on M if at any $x \in M$ and for any $k \geq 0$ it is k -jet generating.

In particular, an algebra \mathfrak{g} of vector fields on $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is called *3-jet generating* at $x \in U$, if every vector field can be approximated at x with order three by a vector field from the algebra. We have the following

4.1.2 Theorem. Let \mathfrak{g} be a Lie algebra of vector fields on a manifold U . If there exists a point where it is 3-jet generating, then \mathfrak{g} is infinite-dimensional.

We remark that if dimension U is 1, the result is known and is due to Sophus Lie, see e.g. [27, Theorem 2.70]. As examples show (see e.g. the tables at the back of [27] where vector field algebras of arbitrary finite dimension are given), the 3-jet generating property is important.

4.2 The 3-jet generating property of the Funk holonomy algebra

In this section we investigate the holonomy structure of the Funk metric.

4.2.1 Remark. The holonomy of $(\mathbb{B}^2, F_{\mathbb{B}^2})$ was investigated in [37, Chapter 5]. It was proved that the infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}_o^*(F_{\mathbb{B}^2})$ contains the Fourier algebra $F(\mathbb{S}^1)$ whose elements are vector fields $f \frac{d}{dt}$ such that $f(t)$ has finite Fourier series. One has

$$F(\mathbb{S}^1) \subset \mathfrak{hol}_o^*(F_{\mathbb{B}^2}) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1). \quad (4.11)$$

Since $F(\mathbb{S}^1)$ is dense in $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$, we get the same for $\mathfrak{hol}_o^*(F_{\mathbb{B}^2})$. Using the exponential map, one can obtain that the closure of the holonomy group of the Finsler surface $(\mathbb{B}^2, F_{\mathbb{B}^2})$ is $\mathcal{D}iff_+(\mathbb{S}^1)$, the group of orientation preserving diffeomorphisms of the circle [37, Theorem 5.2].

In [38] it was also proven that the infinitesimal holonomy algebra of locally projectively flat Finsler manifolds with constant flag curvature is infinite dimensional. The standard Funk metric $F_{\mathbb{B}^n}$ at $o \in \mathbb{R}^n$ has these special geometric properties, hence it also has infinite dimensional holonomy group.

Based on these results we have the following

4.2.2 Proposition. The infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}_o^*(F_{\mathbb{B}^n})$ of the standard Funk metric at the point $o \in \mathbb{B}^n$ has the jet generating property on the indicatrix \mathcal{I}_o .

4.3 Funk perturbation of a Finsler metric

Let (M, F) be a Finsler manifold and $x_0 \in M$ be a fixed point. We can chose an x_0 -centered coordinate system (U, x) such that $x(U) \subset \mathbb{B}^n$. The associated coordinate system on TM will be denoted by $(\pi^{-1}(U), \chi = (x, y))$. We also consider a bump function $\psi: M \rightarrow \mathbb{R}$, such that $\text{supp}(\psi) \subset U$ and $\psi|_{\tilde{U}} = 1$ for some open neighbourhood $\tilde{U} \subset U$ of x_0 . We denote by $\bar{\psi} := \psi \circ \pi$ the pull-back of ψ by the projection π .

Using the standard Funk norm function $F_{\mathbb{B}^n}$, we introduce the Finsler norm $\bar{F}: TM \rightarrow \mathbb{R}$ by the formula

$$\bar{F}^2 = \psi \cdot (F_{\mathbb{B}^n} \circ \chi)^2 + (1 - \psi) \cdot F^2. \quad (4.17)$$

We remark that \bar{F} is the pull-back of the standard Funk norm function on $\pi^{-1}(\tilde{U})$.

Using (4.17) we define a smooth perturbation of the Finsler function F as a 1-parameter family of functions F_t , where

$$F_t^2 = (1 - t)F^2 + t\bar{F}^2, \quad t \in [0, 1]. \quad (4.18)$$

Then F_t is a 1-parameter family of Finsler metrics.

4.3.2 Proposition. Any element of the infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}_{x_0}^*(F_t)$ can be expressed as an algebraic fraction of polynomials in t whose coefficients are determined by $j_{x_0}^k F$ and $j_{x_0}^k \bar{F}$ for some $k \in \mathbb{N}$.

4.3.3 Proposition. For any $y_0 \in \mathcal{I}_o$ the set of parameters $t \in [0, 1]$, where the 3-jet generating property of the infinitesimal holonomy algebra $\mathfrak{hol}_{x_0}^*(F_t) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{I}_{x_0}^t)$ of the Funk perturbation (4.18) is not satisfied, is finite.

4.4 Almost all Finsler metrics have infinite dimensional holonomy group

4.4.1 Theorem. In the set \mathcal{F} of C^∞ -smooth Finsler metrics on a manifold M of dimension $n \geq 2$, there exists a subset $\tilde{\mathcal{F}}$ of Finsler metrics with infinite dimensional holonomy group, which is open and everywhere dense in any \mathcal{C}^m -topology, $m \geq 8$.

4.4.2 Remark. In the proof of Theorem 4.4.1, it was showed that for a convenient perturbation the infinitesimal holonomy algebra at a point is infinite-dimensional. This remains valid microlocally and on the level of germs.

Bibliography

- [1] W. Ambrose and I. Singer. A theorem on holonomy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75 (3): 428–443, 1953.
- [2] D. Bao, S. Chern, and Z. Shen. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2000.
- [3] D. Bao, C. Robles, and Z. Shen. Zermelo navigation on Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 66(3):377–435, 2004.
- [4] M. Berger. Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83: 279–330, 1955.
- [5] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A392: 45–57, 1984.
- [6] L. Berwald. Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räumen auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Z.*, 25, 1926.
- [7] A. Borel and A. Lichnerowicz. Groupes d’holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234: 1835–1837, 1952.

- [8] D. C. Brody, W. Gibbons, and D. Meier. Time-optimal navigation through quantum wind. *New J. Phys.*, 17, 2015.
- [9] D. C. Brody and D. Meier. Solution to the quantum Zermelo navigation problem. *Phys.Rev. Lett.* , 114: 100502, 2015.
- [10] D. C. Brody and D. Meier. Elementary solution to the time-independent quantum navigation problem. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 48: 055302, (9pp), 2015.
- [11] S.-S. Chern and Z. Shen. *Riemann-Finsler geometry*, volume 6 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [12] P. Finsler. Ueber Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (*Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, 11*) Springer; 1951.
- [13] D. D. Holm, E. Marsden, and S. Ratiu. The Euler-Poincaré Equations and Semidirect Products with Applications to Continuum Theories. *Advances in Mathematics*, 137(1): 1–81, 1998.
- [14] J. Grifone. Structure presque-tangente et connexions. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 22(1): 287–334, 1972.
- [15] S. Gubser. Tasi lectures: special holonomy in string theory and mtheory. *CALT-68-2370*, 2002, in: *Strings, Branes and Extra Dimensions, Proceedings*, (Ed.: S. S. Gubser and J. D. Lykken), World Scientific, 2004, pp. 197—233.

- [16] C. H. C. Longuet-Higgins, U. Öpik, L. Pryce, and A. Sack. Studies of the Jahn-Teller Effect. II. The Dynamical Problem. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A244: 1–16, 1958.
- [17] B. C. Hall. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction, 2nd Edition, *Springer*, 2015.
- [18] B. Hubicska and Z. Muzsnay. The holonomy groups of projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature. *Differential Geometry and its Applications*, 73 Paper: 101677 , 9 p. 2020.
- [19] B. Hubicska and Z. Muzsnay. Tangent Lie Algebra of a Diffeomorphism Group and Application to Holonomy Theory. *The Journal of Geometric Analysis*, 13 p., Jan 2020.
- [20] B. Hubicska and Z. Muzsnay. Holonomy in the quantum navigation problem. *Quantum Information Processing*, 18 : 10 Paper: 325 , 10 p. 2019.
- [21] B. Hubicska, V. S. Matveev and Z. Muzsnay. Almost All Finsler Metrics have Infinite Dimensional Holonomy Group. *The Journal of Geometric Analysis*, 13 p. 2020.
- [22] S. Ivanov and A. Lytchak. Rigidity of Busemann convex Finsler metrics. *Comment. Math. Helv.*, 94:855–868, 2019.
- [23] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge University Press, 1976.

- [24] I. Kolar, Peter W. Michor and J. Slovák. Natural Operations in Differential Geometry. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 1993.
- [25] L. Kozma. On holonomy groups of Landsberg manifolds. *Tensor (N.S.)*, 62(1):87–90, 2000.
- [26] J. M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds *Springer-Verlag New York*, 2nd Edition, 2012.
- [27] P. Olver. Equivalence, invariants, and symmetry. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1995. xvi+525 pp. ISBN: 0-521-47811-1
- [28] L. S. Pontryagin. Topological Groups. *Gordon and Breach, New York* 1966.
- [29] V. S. Matveev. Geodesically equivalent metrics in general relativity. *J. Geom. Phys.* 62:675–691, 2012.
- [30] M. Mauhart and P. W. Michor. Commutators of flows and fields. *Arch. Math. (Brno)*, 28(3-4):229–236, 1992.
- [31] S. Markvorsen. A Finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling. *Nonlinear Analysis*, 28: 208–228, 2016.
- [32] J. Milnor. Remarks on infinite dimensional Lie groups. *Proc. Summer School on Quantum Gravity*, B. DeWitt ed., Les Houches, 1983
- [33] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Tangent Lie algebras to the holonomy group of a Finsler manifold. *Commun. Math.*, 19(2):137–147, 2011.

- [34] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy. *Houston J. Math.*, 38(1):77–92, 2012.
- [35] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Witt algebra and the curvature of the Heisenberg group. *Commun. Math.*, 20(1):33–40, 2012.
- [36] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Characterization of projective Finsler manifolds of constant curvature having infinite dimensional holonomy group. *Publ. Math. Debrecen*, 84(1-2):17–28, 2014.
- [37] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Finsler 2-manifolds with maximal holonomy group of infinite dimension. *Differential Geom. Appl.*, 39:1–9, 2015.
- [38] Z. Muzsnay and P. T. Nagy. Projectively flat Finsler manifolds with infinite dimensional holonomy. *Forum Math.*, 27(2):767–786, 2015.
- [39] G. Randers. On an Asymmetrical Metric in the Four-Space of General Relativity. *Phys. Rev. (2)*, 59:195–199, 1941.
- [40] B. Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttingen, 1854.
- [41] B. Russel and S. Stepney. Zermelo navigation and a speed limit to quantum information processing. *Phys. Rev. A*, 90, 2014.
- [42] B. Russel and S. Stepney. Zermelo navigation in the quantum brachistochrone. *Journal of Physics A*, 48, 2015.

- [43] H. Omori. *Infinite-Dimensional Lie Groups*, volume 158 of *Transl. of Math. Monogr.*, vol 158, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1997.
- [44] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [45] P. L. Antonelli, A. Bóna, M. A. Slawiński. Seismic rays as Finsler geodesics. *Nonlinear Analysis* , 4: 711–722, 2003.
- [46] Z. Shen. Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature. *Math. Ann.*, 325(1):19–30, 2003.
- [47] B. Simon. Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry’s Phase. *Phys. Rev. Lett.*, 51, 1983.
- [48] J. Szilasi, R. L. Lovas, and D. C. Kertész. *Connections, sprays and Finsler structures*. Hackensack, NJ: World Scientific, 2014.
- [49] Z. I. Szabó. Positive definite Berwald spaces. Structure theorems on Berwald spaces. *Tensor (N.S.)*, 35(1):25–39, 1981.
- [50] W. Wojtyński. *Groups of strings. J. Lie Theory* 13, no. 2:359–382, 2003.
- [51] P. Zanardi and M. Rasetti. Holonomic quantum computation. *Phys.Lett. A.*, 264: 94–99, 1999.



Nyilvántartási szám: DEENK/152/2021.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Hubicska Balázs Attila

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (4)

1. **Hubicska, B. A.**, Matveev, V. S., Muzsnay, Z.: Almost All Finsler Metrics have Infinite Dimensional Holonomy Group.
J. Geom. Anal. [Epub ahead of print], 2020. ISSN: 1050-6926.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-020-00517-9>
IF: 0.924 (2019)
2. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: Tangent Lie Algebra of a Diffeomorphism Group and Application to Holonomy Theory.
J. Geom. Anal. 30, 107-123, 2020. ISSN: 1050-6926.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-018-00138-3>
IF: 0.924 (2019)
3. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: The holonomy group of locally projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature.
Differ. Geom. Appl. 73, 1-9, 2020. ISSN: 0926-2245.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.difgeo.2020.101677>
IF: 0.556 (2019)
4. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: Holonomy in the quantum navigation problem.
Quantum Inf. Process. 18 (10), 1-10, 2019. ISSN: 1570-0755.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-019-2438-8>
IF: 2.433

A közlő folyóiratok összesített impact faktora: 4,837

A közlő folyóiratok összesített impact faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 4,837

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2021.04.06.





Registry number: DEENK/152/2021.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Balázs Attila Hubicska

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (4)

1. **Hubicska, B. A.**, Matveev, V. S., Muzsnay, Z.: Almost All Finsler Metrics have Infinite Dimensional Holonomy Group.
J. Geom. Anal. [Epub ahead of print], 2020. ISSN: 1050-6926.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-020-00517-9>
IF: 0.924 (2019)
2. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: Tangent Lie Algebra of a Diffeomorphism Group and Application to Holonomy Theory.
J. Geom. Anal. 30, 107-123, 2020. ISSN: 1050-6926.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s12220-018-00138-3>
IF: 0.924 (2019)
3. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: The holonomy group of locally projectively flat Randers two-manifolds of constant curvature.
Differ. Geom. Appl. 73, 1-9, 2020. ISSN: 0926-2245.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.difgeo.2020.101677>
IF: 0.556 (2019)
4. **Hubicska, B. A.**, Muzsnay, Z.: Holonomy in the quantum navigation problem.
Quantum Inf. Process. 18 (10), 1-10, 2019. ISSN: 1570-0755.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-019-2438-8>
IF: 2.433

Total IF of journals (all publications): 4,837

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,837

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

06 April, 2021

