

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Lineáris rekurzív sorozatok és faktoriálisok

Szakács Tamás

Témavezető: Dr. Liptai Kálmán
főiskolai tanár



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2024

1 | Bevezetés

A dolgozatban a lineáris rekurzív sorozatok és faktoriálisok témakörében született saját eredmények szerepelnek, beágyazva az adott terület már ismert eredményei, illetve nyitott kérdései közé.

Ezen dolgozat második fejezetében lineáris rekurzív sorozatokkal foglalkozunk. Először olyan sorozatokat tekintünk, melyek szomszédos tagjainak hányadosából képzett sorozatok az aranyarányhoz tartanak. Ezt követően azt vizsgáljuk, hogy racionális polinomok és Fibonacci-számok lineáris kombinációja milyen feltételek mellett alkot egész tagú sorozatot. Végül másodrendű rekurzív sorozatok konvolúciójával foglalkozunk, megemlítve néhány nevezetes sorozatot, mint például a Fibonacci, Lucas, Pell, Mersenne és Jacobsthal.

A harmadik fejezet faktoriálisok szorzataként előálló faktoriálisok témakörét mutatja be, középpontba állítva az $A!B! = C!$ egyenletet.

A dolgozatban szereplő jelölések és fogalmak tisztázása érdekében először áttekintjük a témához kapcsolódó legfontosabb definíciókat és tétteleket.

Legyenek A_0, A_1, \dots, A_{k-1} adott valós számok, $A_{k-1} \neq 0$, ahol $k \geq 2$ előre rögzített egész szám. Az alábbi rekuzióval definiált $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot k -ad rendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük

$$G_n = A_0 G_{n-1} + A_1 G_{n-2} + \dots + A_{k-1} G_{n-k} \quad (n \geq k),$$

ahol G_0, G_1, \dots, G_{k-1} rögzített valós számok lesznek a kezdőelemek, és $|G_0| + |G_1| + \dots + |G_{k-1}| \neq 0$. A

$$p(x) = x^k - A_0 x^{k-1} - A_1 x^{k-2} - \dots - A_{k-2} x - A_{k-1}$$

polinomot a sorozat karakterisztikus polinomjának nevezzük, a gyökeit α_i -vel jelöljük ($1 \leq i \leq k$). Legyen a legnagyobb abszolút értékű gyök α_1 , azaz $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0$, és legyen a multiplicitása 1. Az ilyen gyököt a szakirodalom domináns gyöknek nevezi. Ha a különböző α_i gyökök multiplicitását m_i -vel jelöljük ($1 \leq i \leq l$, $\sum_{i=1}^l m_i = k$), akkor a sorozathoz tartozó Binet-formulát a következő egyenlőség adja meg

$$G_n = a\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + p_3(n)\alpha_3^n + \dots + p_l(n)\alpha_l^n,$$

ahol a p_i polinomok foka ($2 \leq i \leq l$) kisebb, mint m_i . Az a ($a \neq 0$) konstans és a p_i polinomok a $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)[x]$ gyűrű elemei.

A $k = 2$ esetben másodrendű lineáris rekurzív sorozatot kapunk

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

ahol használatos a $G_n(G_0, G_1, A, B)$ jelölés is. A sorozat generátor függvényének szokás nevezni a következő függvényt

$$g(x) = \frac{G_0 + (G_1 - AG_0)x}{1 - Ax - Bx^2}.$$

Ha a kezdőelemek $R_0 = 0$ és $R_1 = 1$, akkor az $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatot elsőfajú Lucas-sorozatnak nevezzük, és Binet-formulája

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Ezen sorozat asszociáltja a $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ másodfajú Lucas-sorozat, melynek kezdőtagjai $V_0 = 2$ és $V_1 = A$, ekkor a Binet-formula a következő

$$V_n = \alpha^n + \beta^n.$$

A következő táblázatban áttekintjük néhány nevezetes első-, és másodfajú Lucas-sorozat (Fibonacci, Pell, Jacobsthal, Mersenne, és asszociált sorozataik) alapadatait, mint a kezdőtagok, súlyok, karakterisztikus polinom és generátor függvény.

| Név | $G_n(G_0, G_1, A, B)$ | Karakterisztikus p. | Generátor fv. |
|------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------|
| Fibonacci | $F_n(0, 1, 1, 1)$ | $p(x) = x^2 - x - 1$ | $g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ |
| Pell | $P_n(0, 1, 2, 1)$ | $p(x) = x^2 - 2x - 1$ | $g(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$ |
| Jacobsthal | $J_n(0, 1, 1, 2)$ | $p(x) = x^2 - x - 2$ | $g(x) = \frac{x}{1-x-2x^2}$ |
| Mersenne | $M_n(0, 1, 3, -2)$ | $p(x) = x^2 - 3x + 2$ | $g(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}$ |
| Lucas | $L_n(2, 1, 1, 1)$ | $p(x) = x^2 - x - 1$ | $g(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$ |
| P-Lucas | $p_n(2, 2, 2, 1)$ | $p(x) = x^2 - 2x - 1$ | $g(x) = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$ |
| J-Lucas | $j_n(2, 1, 1, 2)$ | $p(x) = x^2 - x - 2$ | $g(x) = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$ |
| M-Lucas | $m_n(2, 3, 3, -2)$ | $p(x) = x^2 - 3x + 2$ | $g(x) = \frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$ |

Table 1.1: Nevezetes sorozatok

2 | Lineáris rekurzív sorozatok

2.1 | Az aranyarány

Az egyik leghíresebb ilyen másodrendű sorozat a Fibonacci-sorozat, amely Leonardo Pisano nevéhez fűződik és már több, mint 800 éve izgalommal tölti el a kutatóit. A sorozat kezdőtagjai $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, és

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

A karakterisztikus polinom domináns gyöke $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ami a jól ismert aranyarány, a másik gyök pedig $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Továbbá, ha megvizsgáljuk a szomszédos tagok hányadosának sorozatát, akkor azt tapasztaljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

A konvergenciagyorsasághoz a következő definíciót vesszük alapul: Legyenek $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergens valós számsorozatok $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_n = z$, azt mondjuk, hogy $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ gyorsabban konvergál z -hez, mint $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - z}{x_n - z} = 0.$$

Olyan $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ k -ad rendű lineáris rekurzív sorozatokat vizsgálunk, ahol a $\left\{\frac{G_{n+1}}{G_n}\right\}$ sorozat gyorsabban konvergál az aranyarányhoz, mint a Fibonacci-számokból álló $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$. A G_n taghoz tartozó Binet-formula a következő:

$$G_n = a\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + p_3(n)\alpha_3^n + \cdots + p_l(n)\alpha_l^n,$$

ahol $\alpha_1 = \varphi$ a domináns gyök, vagyis az aranyarány.

Tétel 1 (T. Szakács [44], 2017). *Legyen $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ k -ad rendű lineáris rekurzív sorozat, karakterisztikus polinomjának domináns gyöke φ , többi gyöke pedig α_i . A $\left\{\frac{G_{n+1}}{G_n}\right\}$ sorozat gyorsabban konvergál az aranyarányhoz, mint $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$, ha $|\alpha_i| < |\psi|$, $i = 2, 3, \dots, l$.*

2.2 | Fibonacci-számokon alapuló egész sorozatok

Számos kombinatorikai probléma megoldása felírható az alábbi alakban:

$$W_n = u(n)F_n + v(n)F_{n-1} + c(n),$$

ahol $u(x)$, $v(x)$ és $c(x)$ racionális polinomok. Nem tűnik nyilvánvalónak, hogy milyen feltételek mellett lesznek a $\{W_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat tagjai egészek. Például az $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat $n + 1$ összes 1-mentes partíciójában szereplő tagok számát adja meg:

$$A_n = \frac{2n+3}{5}F_n - \frac{n}{5}F_{n-1},$$

mely sorozat szerepel az OEIS-ben [35] a következő azonosítóval: A010049. Itt $u(x) = (2x+3)/5$ és $v(x) = -x/5$ polinomok mindegyike nem egész együtthatós lineáris polinom ($c(x)=0$), mégis $\{A_n\}$ egész tagú sorozat.

Németh [34] egy hasonló kérdéssel foglalkozott, az úgynevezett séták a négyzetekkel és dominókkal (1×2 -es téglalapokkal) csempézett négyzetrácsos táblákon. Többek között bebizonyította, hogy csak dominókat használva az un. $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ csempézés-sétálás sorozat egy hatodrendű rekurzív sorozattal adható meg, amelynek explicit alakja

$$r_n = \frac{4n}{5}F_{n+1} + \frac{3n+3}{5}F_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n. \quad (2.1)$$

Ez az A054454 azonosítójú sorozat az OEIS-ben [35]. A következő sorozatoknál

$$W_n = (an+b)F_n + (cn+d)F_{n-1} + e + f(-1)^n,$$

ahol az a, b, \dots, f együtthatók racionális számok, azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett lesznek $\{W_n\}$ tagjai egészek.

Tétel 2 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács és L. Szalay [26], 2024). *Legyenek*

a W_0, W_1, \dots, W_5 kezdőtagok egészek. Ha

$$\begin{aligned} a &= \frac{3W_0 + 2W_1 - 7W_2 - W_3 + 4W_4 - W_5}{5}, \\ b &= \frac{-3W_0 - 2W_1 - 3W_2 + 6W_3 + 6W_4 - 4W_5}{5}, \\ c &= \frac{-4W_0 - W_1 + 11W_2 - 2W_3 - 7W_4 - 3W_5}{5}, \\ d &= 2W_1 + W_2 + 2W_3 - W_4, \\ e &= \frac{W_0 + 3W_1 + W_2 - 3W_3 - W_4 + W_5}{2}, \\ f &= \frac{W_0 + W_1 - 3W_2 - W_3 + 3W_4 - W_5}{2}, \end{aligned}$$

akkor $W_n = (an + b)F_n + (cn + d)F_{n-1} + e + f(-1)^n$ egész tagú sorozat. Az állítás megfordítása is igaz.

Példaképpen legyen $W_0 = 0, W_1 = 1, W_2 = 2, W_3 = 6, W_4 = 12, W_5 = 26$. Ekkor

$$W_n = \frac{4n-4}{5}F_n + \frac{3n}{5}F_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

Ez egybeesik (2.1) alakjával, mivel $r_n = W_{n+1}$.

Legyenek $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s$ nemnegatív egészek, és $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x) \in \mathbb{Q}[x]$ racionális polinomok, ahol $\deg(p_i(x)) = d_i$. Definiáljuk a $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatot a következőképpen

$$W_n = p_1(n)F_{n-j_1} + p_2(n)F_{n-j_2} + \dots + p_s(n)F_{n-j_s}.$$

Megadunk néhány speciális esetben feltételeket a $p_i(x)$ polinomokra vonatkozóan úgy, hogy $\{W_n\}$ sorozat egész tagú legyen.

1. eset: $s = 2, j_1 = 0, j_2 = 1, d_1 = d_2 = 1$

Tétel 3 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács és L. Szalay [26], 2024). A

$$W_n = (an + b)F_n + (cn + d)F_{n-1}$$

sorozat tagjai akkor és csakis akkor egész számok, ha d egész és

$$a = \frac{-z_1 - 3z_2 + 2z_3}{5}, \quad b = \frac{6z_1 + 3z_2 - 2z_3}{5}, \quad c = \frac{-2z_1 + 4z_2 - z_3}{5},$$

ahol z_1, z_2, z_3 szintén egészek.

Ha az előző sorozathoz úgy választjuk meg a kezdőértékeket, hogy $d = 0$, $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 3$, akkor a következő egész tagú sorozatot kapjuk

$$W_n = \frac{2n+3}{5}F_n - \frac{n}{5}F_{n-1},$$

amely sorozat megtalálható az OEIS-ben [35] a következő azonosítóval: A010049.

2. eset: $s = 2$, $j_1 = 0$, $j_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 2$

Tétel 4 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács és L. Szalay [26], 2024). *Az a, b, c, d, e és f racionális együtthatók egész tagú sorozatokat határoznak meg a következő alakban*

$$W_n = (an^2 + bn + c)F_n + (dn^2 + en + f)F_{n-1}$$

akkor és csak akkor, ha $f \in \mathbb{Z}$ és

$$\begin{aligned} a &= \frac{-z_1 + 3z_2 + z_3 - 3z_4 + z_5}{10}, \\ b &= \frac{-5z_1 - 75z_2 + 15z_3 + 45z_4 - 17z_5}{50}, \\ c &= \frac{30z_1 + 30z_2 - 10z_3 - 15z_4 + 6z_5}{25}, \\ d &= \frac{3z_1 - 4z_2 - 3z_3 + 4z_4 - z_5}{10}, \\ e &= \frac{-45z_1 + 80z_2 + 15z_3 - 40z_4 + 11z_5}{50}, \end{aligned}$$

ahol z_1, z_2, z_3, z_4 és z_5 tetszőleges egészek.

Legyen például $f = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 4$, $z_4 = 12$, és $z_5 = 31$. Ebben az esetben egész tagú sorozatot kapunk

$$W_n = \frac{5n^2 - n - 4}{25}F_n + \frac{5n^2 + n}{50}F_{n-1},$$

amely megegyezik az A129707 sorozattal az OEIS-ben [35].

3. eset: $s = 2, j_1 = 0, j_2 = 1, d_1 = 2, d_2 = 1$

Tétel 5 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács és L. Szalay [26], 2024). *Az a, b, c, d és e racionális együtthatók egész tagú sorozatokat határoznak meg a következő alakban*

$$W_n = (an^2 + bn + c)F_n + (dn + e)F_{n-1}$$

akkor és csak akkor, ha $e \in \mathbb{Z}$ és

$$\begin{aligned} a &= \frac{2z_1 - z_2 - 2z_3 + z_4}{10}, \\ b &= \frac{-56z_1 - 7z_2 + 66z_3 - 23z_4}{50}, \\ c &= \frac{48z_1 + 6z_2 - 28z_3 + 9z_4}{25}, \\ d &= \frac{-6z_1 + 18z_2 - 9z_3 + 2z_4}{25}, \end{aligned}$$

ahol z_1, z_2, z_3 és z_4 tetszőleges egészek.

Ha például $e = z_1 = z_2 = z_3 = 1$ és $z_4 = 2$, akkor a

$$W_n = \frac{5n^2 - 43n + 88}{50}F_n + \frac{14n + 50}{50}F_{n-1}$$

sorozat szintén egész tagú, és nem szerepel az OEIS-ben.

$$\{W_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, 1, 2, 2, 4, 7, 15, 32, 69, 146, 303, \dots\}$$

2.3 | Rekurzív sorozatok konvolúciója

Tekintsük a $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot, mint két másodrendű lineáris rekurzív sorozat konvolúcióját a következő alakban

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k},$$

ahol $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ első-, illetve másodfajú Lucas-sorozatok. Több különböző eset adódik attól függően, hogy a karakterisztikus polinomoknak hány közös gyöke van, illetve mely típusú sorozatok konvolúcióját írjuk fel. Minden esetben megadjuk a konvolúciós formulát, amelyek csak a

sorozatok kezdőtagjaitól és a karakterisztikus polinomok gyökeiktől függenek. Az egyes formulák után megmutatunk egy speciális esetet, felhasználva néhány nevezetes sortozatot, mint például a Fibonacci-, Pell-, Jacobsthal-, Mersenne-, Lucas-, P-Lucas-, J-Lucas-, és M-Lucas-sorozatokat. További speciális esetek a disszertáció azonos sorszámú fejezetében találhatóak. Ezen alfejezet tételeinél a következő jelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned} a &= (A_1 - A_2)\alpha + B_1 - B_2, \\ b &= (A_1 - A_2)\beta + B_1 - B_2, \\ c &= (A_2 - A_1)\gamma + B_2 - B_1, \\ d &= (A_2 - A_1)\delta + B_2 - B_1, \end{aligned}$$

ahol $bd \neq 0$, valamint α, β a $G_n(G_0, G_1, A_1, B_1)$ és γ, δ a $H_n(H_0, H_1, A_2, B_2)$ sorozatok $p(x) = x^2 - A_1x - B_1$ és $q(x) = x^2 - A_2x - B_2$ karakterisztikus polinomjainak gyökei.

A karakterisztikus polinomoknak nincs közös gyöke

Tegyük fel, hogy a karakterisztikus polinomoknak nincs közös gyöke, és minden gyök valós. A következő tétel két különböző elsőfajú Lucas-sorozat konvolúciójával foglalkozik.

Tétel 6 (T. Szakács [42], 2016). *A $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ és $H_n(0, 1, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója a következő alakban írható.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{a} - \frac{\beta^{n+1}}{b}}{\alpha - \beta} + \frac{\frac{\gamma^{n+1}}{c} - \frac{\delta^{n+1}}{d}}{\gamma - \delta}.$$

Következmény 1. *A Fibonacci- és Pell-számok konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k P_{n-k} = P_n - F_n.$$

A következő tétel egy első-, és egy másodfajú Lucas-sorozat konvolúcióját mutatja be.

Tétel 7 (T. Szakács [42], 2016). A $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ és $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója a következő alakban írható.

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^{n+1}(2\alpha-A_2)}{a} - \frac{\beta^{n+1}(2\beta-A_2)}{b}}{\alpha - \beta} + \frac{\frac{\gamma^{n+1}(2\gamma-A_2)}{c} - \frac{\delta^{n+1}(2\delta-A_2)}{d}}{\gamma - \delta}. \end{aligned}$$

Következmény 2. A Fibonacci- és P-Lucas-számok konvolúciója:

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k p_{n-k} = p_n - F_{n-1}.$$

Az alábbi tétel két különböző másodfajú Lucas-sorozat konvolúcióját adja meg.

Tétel 8 (T. Szakács [42], 2016). A $G_n(2, A_1, A_1, B_1)$ és $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója az alábbi képlettel adható meg.

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^{n+1}(2\alpha-A_1)(2\alpha-A_2)}{a} - \frac{\beta^{n+1}(2\beta-A_1)(2\beta-A_2)}{b}}{\alpha - \beta} + \\ &+ \frac{\frac{\gamma^{n+1}(2\gamma-A_1)(2\gamma-A_2)}{c} - \frac{\delta^{n+1}(2\delta-A_1)(2\delta-A_2)}{d}}{\gamma - \delta}. \end{aligned}$$

Következmény 3. A Lucas- és J-Lucas-számok konvolúciója:

$$C_n = \sum_{k=0}^n L_k j_{n-k} = 9J_{n+1} - 5F_{n+1}.$$

A karakterisztikus polinomoknak egy közös gyöke van

Ebben a részben legyen $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$, $p(\beta) = 0$, $q(\beta) \neq 0$, és $q(\delta) = 0$, $p(\delta) \neq 0$, vagyis β és δ különböző gyökök, míg α a közös. A következő tétel két különböző elsőfajú Lucas-sorozat konvolúciójával foglalkozik.

Tétel 9 (T. Szakács [43], 2017). *A $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ és $H_n(0, 1, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója felírható a következő alakban.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\alpha^n(n+1) + \alpha^n \frac{B_1+B_2-2\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} - \beta^{n+1} \frac{\alpha-\delta}{b} - \delta^{n+1} \frac{\alpha-\beta}{d}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}.$$

Következmény 4. *A Jacobsthal- és Mersenne-számok konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n J_k M_{n-k} = \frac{2n + (2n-3)M_n - J_n}{6}.$$

A következő tételben első-, és másodfajú Lucas-sorozat konvolúciójára adunk képletet.

Tétel 10 (T. Szakács [43], 2017). *A $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ és $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója az alábbi alakban írható.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\alpha^n(n+1)(2\alpha - A_2) + \alpha^n \frac{B_1-B_2}{\alpha-\beta} - \beta^{n+1} \frac{(\alpha-\delta)(2\beta-A_2)}{b} - \delta^{n+1} \frac{(\alpha-\beta)(2\delta-A_2)}{d}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}.$$

Következmény 5. *A Jacobsthal- és M-Lucas-számok konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n J_k m_{n-k} = \frac{2n + (2n+3)M_n + 5J_n}{6}.$$

A következő tétel két különböző másodfajú Lucas-sorozat konvolúcióját adja meg.

Tétel 11 (T. Szakács [43], 2017). *A $G_n(2, A_1, A_1, B_1)$ és $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ sorozatok konvolúciója az alábbi alakba írható.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \alpha^n(n+1) + \alpha^n \frac{B_1 + B_2 + 2\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} - \beta^{n+1} \frac{2\beta - A_2}{(\alpha-\beta)(A_1 - A_2)} + \delta^{n+1} \frac{2\delta - A_1}{(\alpha-\delta)(A_1 - A_2)}.$$

Következmény 6. *A J-Lucas- és M-Lucas-számok konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n j_k m_{n-k} = \frac{n+1 + (n+2)M_{n+1} + 5J_{n+1}}{2}.$$

A karakterisztikus polinomoknak két közös gyöke van

Ebben az esetben $p(x) = q(x)$, azaz $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$, $p(\beta) = q(\beta) = 0$. A következő tétel elsőfajú Lucas-sorozat önmagával vett konvolúcióját adja meg.

Tétel 12 (T. Szakács [43], 2017). *Az $R_n(0, 1, A_1, B_1)$ sorozat önmagával vett konvolúciója az alábbi alakba írható.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n R_k R_{n-k} = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left((n+1)V_n - 2R_{n+1} \right),$$

ahol $\{V_n\}$ az $\{R_n\}$ sorozat asszociáltja.

Következmény 7. *A Fibonacci-számok önmagukkal vett konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k F_{n-k} = \frac{1}{5} \left((n+1)L_n - 2F_{n+1} \right).$$

A következő tétel egy elsőfajú Lucas-sorozat és asszociáltjának konvolúcióját adja meg.

Tétel 13 (T. Szakács [43], 2017). *Az $R_n(0, 1, A_1, B_1)$ és $V_n(2, A_1, A_1, B_1)$ sorozatok konvolúciója az alábbi alakba írható.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n R_k V_{n-k} = (n+1)R_n.$$

Következmény 8. *A Fibonacci- és Lucas-számok konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k L_{n-k} = (n+1)F_n.$$

A következő tétel egy másodfajú Lucas-sorozat önmagával vett konvolúciójával foglalkozik.

Tétel 14 (T. Szakács [43], 2017). *A $V_n(2, A_1, A_1, B_1)$ sorozat önmagával vett konvolúciója az alábbi képlettel adható meg.*

$$C_n = \sum_{k=0}^n V_k V_{n-k} = (n+1)V_n + 2R_{n+1},$$

ahol $\{V_n\}$ az $\{R_n\}$ asszociáltja.

Következmény 9. *A Lucas-számok önmagukkal vett konvolúciója:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n L_k L_{n-k} = (n+1)L_n + 2F_{n+1}.$$

3 | Faktoriálisok

Legyenek n, a_1, \dots, a_r pozitív egészek $a_1 \geq \dots \geq a_r > 1$ feltétellel, ahol $r \geq 2$. Tekintsük a következő egyenletet

$$n! = \prod_{i=1}^r a_i! \quad (3.1)$$

Surányi sejtése szerint, (3.1) egyetlen nem triviális megoldása $r = 2$ esetén a $10! = 7!6!$. Hickerson kiterjesztette a sejtést, mely szerint a fenti egyenlet összes nem triviális megoldása: $9! = 7!3!2!$, $10! = 7!6! = 7!5!3!$, $16! = 14!5!2!$ (lásd pl. Erdős [10], 27-28. oldal). Ezen sejtéseket sikerült $n \leq 10^6$ esetben igazolnia Caldwellnek [7]. Erdős ([10], 2. tétel) bizonyította, hogy ha $P(m)$ az m pozitív egész legnagyobb prímosztója (azzal a megállapodással, hogy $P(1) = 1$), akkor az

$$P(n(n+1)) > 4 \log n \quad (3.2)$$

állítás azt eredményezné, hogy a (3.1) egyenletnek csak véges sok nem triviális megoldása van - azonban, (3.2) összefüggést még nem sikerült igazolni (lásd pl. [13], 70. oldal). Luca [28] igazolta, hogy ha az abc -sejtés igaz, akkor (3.1) egyenletnek csak véges sok nem triviális megoldása lehet. Ezen eredményt pontosította Luca, Saradha és Shorey [29].

A dolgozatban az $r = 2$ esettel foglalkozunk, és az (3.1) egyenletet a következő alakban tekintjük

$$A!B! = C!, \quad (3.3)$$

ahol A, B, C pozitív egészek, $C \geq B \geq A > 1$ feltétellel. Ezen egyenlet összes megoldásának megtalálása még mindig nyitott probléma. Erdős [11] egy eredménye szerint, elég nagy C esetén $C - B \leq 5 \log \log C$. Ezt a becslést élesztette Bath és Ramachandra [5] tetszőleges $\varepsilon > 0$, és $C > C_\varepsilon$ esetén úgy, hogy $C - B \leq ((1 + \varepsilon) / \log 2) \log \log C$. Luca korábban említett eredménye szerint, feltéve az abc -sejtést, $C - B = 1$, ha C elég nagy. Azonban, ha feltesszük, hogy $C - B = 2$, a (3.3) egyenlet megoldásait megtalálni még mindig nehéz probléma. (Lásd pl. Luca [27] cikkét, és a benne szereplő hivatkozásokat).

Célunk a (3.3) egyenlet megoldásaira, rögzített $k = B - A$ esetén véghatár állítást igazolni. A fő eredményünk, hogy explicit felső korlátot adunk C -re k függvényében. Természetesen ez azonnal maga után vonja, hogy rögzített k esetén az egyenletnek csak véges sok megoldása lehet. Továbbá megmutatjuk, hogy az egyetlen nem triviális megoldás $k \leq 10^6$ esetén a már korábban is említett $10! = 7!6!$.

Tétel 15 (L. Hajdu, Á. Papp és T. Szakács [20], 2018). *Tekintsük az $A!B! = C!$ egyenletet, és legyen $k = B - A$. Minden olyan nem-triviális megoldásra, amely különbözik $(A, B, C) = (6, 7, 10)$ -től igaz, hogy $C < 5k$. Továbbá, ha $k \leq 10^6$, akkor az egyenlet egyetlen nem-triviális megoldása az $(A, B, C) = (6, 7, 10)$.*



Nyilvántartási szám: DEENK/529/2024.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Szakács Tamás

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10047519

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. **Szakács, T.:** Convolution of second order linear recursive sequences I.

Ann. Math. Inform. 46, 205-216, 2016. ISSN: 1787-5021.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (5)

2. Liptai, K., Németh, L., **Szakács, T.**, Szalay, L.: On certain Fibonacci representations.

Fibonacci Q. [Accepted by publisher] (-), 1-9, 2024. ISSN: 0015-0517.

IF: 0.4 (2023)

3. Hajdu, L., Papp, Á., **Szakács, T.:** On the equation $A!B! = C!$

J. Number Theory. 187, 160-165, 2018. ISSN: 0022-314X.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2017.10.020>

IF: 0.684

4. **Szakács, T.:** Convolution of second order linear recursive sequences II.

Commun. Math. 25 (2), 137-148, 2017. ISSN: 1804-1388.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1515/cm-2017-0011>

5. **Szakács, T.:** k-Order Linear Recursive Sequences and the Golden Ratio.

Fibonacci Q. 55 (5), 186-191, 2017. ISSN: 0015-0517.

6. **Szakács, T.:** Multiplying balancing numbers.

Acta Univ. Sapientiae, Mathematica. 3 (1), 90-96, 2011. ISSN: 1844-6094.





További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

7. Ruzsa, Z., Parisek, Z., Király, R., Tómacs, T., **Szakács, T.**, Hajagos, H.: Building of a mathematics-based RFID localization framework.

Ann. Math. Inform. 44, 165-176, 2015. ISSN: 1787-5021.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,084

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapján szolgáló közleményekre):
1,084**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2024.10.28.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy
(PhD)

Linear recursive sequences and factorials

by Tamás Szakács

Supervisor: Dr. Kálmán Liptai



UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
Debrecen, 2024

1 | Introduction

The thesis presents own results in the field of linear recursive sequences and factorials, embedded among the already known results and open questions of the given topics.

In the second chapter of this work, we examine linear recursive sequences, with numerous results on Fibonacci numbers. We present theorems concerning recursive sequences in which the ratio of adjacent terms approaches the golden ratio. Later, integer sequences are constructed as linear combinations of Fibonacci numbers and rational polynomials. Finally, the chapter deals with the convolution of second-order linear recursive sequences, featuring Fibonacci numbers and other named sequences.

In the third chapter, we discuss the question of finding all products of factorials yielding a factorial, considering the equation as $A!B! = C!$.

To establish a foundation for our discussion, we will first review the key definitions and theorems related to the topics. Let A_0, A_1, \dots, A_{k-1} be given real numbers with $A_{k-1} \neq 0$, where $k \geq 2$ fixed integer. A linear recursive sequence $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ of order k is defined by the recurrence

$$G_n = A_0G_{n-1} + A_1G_{n-2} + \dots + A_{k-1}G_{n-k} \quad (n \geq k),$$

where the initial terms G_0, G_1, \dots, G_{k-1} are fixed real numbers with $|G_0| + |G_1| + \dots + |G_{k-1}| \neq 0$. The polynomial

$$p(x) = x^k - A_0x^{k-1} - A_1x^{k-2} - \dots - A_{k-2}x - A_{k-1}$$

is said to be the characteristic polynomial of the sequence $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$, the roots of the equation $p(x) = 0$ are denoted by α_i 's ($1 \leq i \leq k$). The root α_1 is of the largest absolute value, that is, $|\alpha_1| > |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0$ and the multiplicity of α_1 is 1. According to the literature, α_1 is called as the dominant root, and if we denote by m_i the multiplicity of the distinct α_i 's ($1 \leq i \leq l, \sum_{i=1}^l m_i = k$) then the Binet's formula for the term G_n is as follows

$$G_n = a\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + p_3(n)\alpha_3^n + \dots + p_l(n)\alpha_l^n,$$

where the degree of the polynomial p_i ($2 \leq i \leq l$) is less than m_i . The constant $a \neq 0$ and the polynomials p_i belong to the ring $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)[x]$.

In the special case $k = 2$, we get the second order linear recursive sequence $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ defined by the recurrence relation

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Sometimes the following notation $G_n(G_0, G_1, A, B)$ is used, too. The generating function of $\{G_n\}$ is

$$g(x) = \frac{G_0 + (G_1 - AG_0)x}{1 - Ax - Bx^2}.$$

If $R_0 = 0$ and $R_1 = 1$ then $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ is known as Lucas sequence of the first kind with its Binet's formula

$$R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

while if $V_0 = 2$ and $V_1 = A$ then the sequence is known as Lucas sequence of the second kind $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ with its Binet's formula

$$V_n = \alpha^n + \beta^n.$$

There are some well-known Lucas sequences of the first kind, such as Fibonacci, Pell, Jacobsthal, Mersenne, and their associate sequences. The following table contains the initial terms, characteristic polynomials and generating functions of these sequences.

| Name | $G_n(G_0, G_1, A, B)$ | Charact. polynom. | Gen. function |
|------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------|
| Fibonacci | $F_n(0, 1, 1, 1)$ | $p(x) = x^2 - x - 1$ | $g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ |
| Pell | $P_n(0, 1, 2, 1)$ | $p(x) = x^2 - 2x - 1$ | $g(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$ |
| Jacobsthal | $J_n(0, 1, 1, 2)$ | $p(x) = x^2 - x - 2$ | $g(x) = \frac{x}{1-x-2x^2}$ |
| Mersenne | $M_n(0, 1, 3, -2)$ | $p(x) = x^2 - 3x + 2$ | $g(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}$ |
| Lucas | $L_n(2, 1, 1, 1)$ | $p(x) = x^2 - x - 1$ | $g(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$ |
| P-Lucas | $p_n(2, 2, 2, 1)$ | $p(x) = x^2 - 2x - 1$ | $g(x) = \frac{2-2x}{1-2x-x^2}$ |
| J-Lucas | $j_n(2, 1, 1, 2)$ | $p(x) = x^2 - x - 2$ | $g(x) = \frac{2-x}{1-x-2x^2}$ |
| M-Lucas | $m_n(2, 3, 3, -2)$ | $p(x) = x^2 - 3x + 2$ | $g(x) = \frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$ |

Table 1.1: Named sequences

2 | Linear recursive sequences

2.1 | The golden ratio

The Fibonacci numbers were obtained when solving a 13th-century problem, which can be given as follows. Let $n \geq 2$, the initial terms are $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, and

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

which is the well known Fibonacci sequence. The dominant root of the characteristic polynomial is $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, the golden ratio, and the other root is $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. We also know that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

Let $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ be convergent sequences of real numbers with $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y_n = z$, we say that $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges quicker than $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - z}{x_n - z} = 0.$$

We investigate linear recursive sequences $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ of order k , where the sequences $\left\{ \frac{G_{n+1}}{G_n} \right\}$ converge quicker to the golden ratio than $\left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}$. The Binet's formula for the term G_n is the following:

$$G_n = a\alpha_1^n + p_2(n)\alpha_2^n + p_3(n)\alpha_3^n + \cdots + p_l(n)\alpha_l^n,$$

where $\alpha_1 = \varphi$ is the dominant root, and is equal to the golden ratio.

Theorem 1 (T. Szakács [44], 2017). *Let $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a linear recursive sequence of order k , the dominant root of the characteristic polynomial be φ , and the other roots be α_i . The sequence $\left\{ \frac{G_{n+1}}{G_n} \right\}$ converges quicker to the golden ratio than $\left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n} \right\}$, if $|\alpha_i| < |\psi|, i = 2, 3, \dots, l$.*

2.2 | On certain Fibonacci representations

Several problems in combinatorics have solutions of the form

$$W_n = u(n)F_n + v(n)F_{n-1} + c(n),$$

where $u(x)$, $v(x)$ and $c(x)$ are rational polynomials of the variable x . It is not immediately obvious that the terms of $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ are integers, as the coefficient polynomials are rational. For example, if $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ gives the number of parts in all compositions of $n + 1$ with no 1's, then

$$A_n = \frac{2n+3}{5}F_n - \frac{n}{5}F_{n-1},$$

as given in sequence A010049 in OEIS [35]. Here $u(x) = (2x+3)/5$ and $v(x) = -x/5$ are linear polynomials with non-integer rational coefficients (and $c(x)$ vanishes), yet $\{A_n\}$ forms an integer sequence.

Németh [34] investigated a related question, namely the problem of walks on tiled square boards, and proved, among others, that the tiling-walking sequence $\{r_n\}$ of the $(2 \times n)$ -board with only dominoes is recursively given by a sixth order recurrence having explicit form

$$r_n = \frac{4n}{5}F_{n+1} + \frac{3n+3}{5}F_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n. \quad (2.1)$$

This is sequence A054454 in OEIS [35]. Our purpose now is to examine the sequence

$$W_n = (an+b)F_n + (cn+d)F_{n-1} + e + f(-1)^n,$$

where the coefficients a, b, \dots, f are rational numbers again in order to have integrity condition for $\{W_n\}$.

Theorem 2 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács and L. Szalay [26], 2024).

Let the initial values W_0, W_1, \dots, W_5 be integers. If

$$\begin{aligned} a &= \frac{3W_0 + 2W_1 - 7W_2 - W_3 + 4W_4 - W_5}{5} \\ b &= \frac{-3W_0 - 2W_1 - 3W_2 + 6W_3 + 6W_4 - 4W_5}{5} \\ c &= \frac{-4W_0 - W_1 + 11W_2 - 2W_3 - 7W_4 - 3W_5}{5} \\ d &= 2W_1 + W_2 + 2W_3 - W_4 \\ e &= \frac{W_0 + 3W_1 + W_2 - 3W_3 - W_4 + W_5}{2} \\ f &= \frac{W_0 + W_1 - 3W_2 - W_3 + 3W_4 - W_5}{2}, \end{aligned}$$

then $W_n = (an + b)F_n + (cn + d)F_{n-1} + e + f(-1)^n$ is an integer sequence. The reversal of the statement is also true.

As an example, let $W_0 = 0, W_1 = 1, W_2 = 2, W_3 = 6, W_4 = 12, W_5 = 26$. Then

$$W_n = \frac{4n-4}{5}F_n + \frac{3n}{5}F_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n.$$

This coincides with (2.1) via $r_n = W_{n+1}$.

Let $0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s$ be nonnegative integers, and $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s(x) \in \mathbb{Q}[x]$ such that $\deg(p_i(x)) = d_i$. Define the sequence $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ by

$$W_n = p_1(n)F_{n-j_1} + p_2(n)F_{n-j_2} + \dots + p_s(n)F_{n-j_s}.$$

We give conditions for the rational functions $p_i(x)$ to guarantee sequence $\{W_n\}$ to be integer.

Case $s = 2, j_1 = 0, j_2 = 1, d_1 = d_2 = 1$

Theorem 3 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács and L. Szalay [26], 2024).
The terms

$$W_n = (an + b)F_n + (cn + d)F_{n-1}$$

form an integer sequence $\{W_n\}$ if and only if d is integer and

$$a = \frac{-z_1 - 3z_2 + 2z_3}{5}, \quad b = \frac{6z_1 + 3z_2 - 2z_3}{5}, \quad c = \frac{-2z_1 + 4z_2 - z_3}{5},$$

where z_1, z_2, z_3 are integers, too.

For example, let $d = 0$, moreover $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 3$. In this case, we get the integer sequence

$$W_n = \frac{2n+3}{5}F_n - \frac{n}{5}F_{n-1},$$

which is the sequence A010049 in the OEIS [35].

Case $s = 2$, $j_1 = 0$, $j_2 = 1$, $d_1 = d_2 = 2$

Theorem 4 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács and L. Szalay [26], 2024).
The rational coefficients a, b, c, d, e and f determine integer sequences in the form

$$W_n = (an^2 + bn + c)F_n + (dn^2 + en + f)F_{n-1}$$

if and only if $f \in \mathbb{Z}$ and a, b, c, d, e are given as

$$\begin{aligned} a &= \frac{-z_1 + 3z_2 + z_3 - 3z_4 + z_5}{10}, \\ b &= \frac{-5z_1 - 75z_2 + 15z_3 + 45z_4 - 17z_5}{50}, \\ c &= \frac{30z_1 + 30z_2 - 10z_3 - 15z_4 + 6z_5}{25}, \\ d &= \frac{3z_1 - 4z_2 - 3z_3 + 4z_4 - z_5}{10}, \\ e &= \frac{-45z_1 + 80z_2 + 15z_3 - 40z_4 + 11z_5}{50}, \end{aligned}$$

where z_1, z_2, z_3, z_4 and z_5 are arbitrary integer parameters.

For example, let $f = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 4$, $z_4 = 12$, and $z_5 = 31$. In this particular case, we get the integer sequence

$$W_n = \frac{5n^2 - n - 4}{25}F_n + \frac{5n^2 + n}{50}F_{n-1},$$

which is equivalent to the sequence A129707 given in OEIS [35].

Case: $s = 2, j_1 = 0, j_2 = 1, d_1 = 2, d_2 = 1$

Theorem 5 (K. Liptai, L. Németh, T. Szakács and L. Szalay [26], 2024). *The rational coefficients a, b, c, d and e determine integer sequence in the form*

$$W_n = (an^2 + bn + c)F_n + (dn + e)F_{n-1}$$

if and only if $e \in \mathbb{Z}$ and a, b, c, d are given as

$$\begin{aligned} a &= \frac{2z_1 - z_2 - 2z_3 + z_4}{10}, \\ b &= \frac{-56z_1 - 7z_2 + 66z_3 - 23z_4}{50}, \\ c &= \frac{48z_1 + 6z_2 - 28z_3 + 9z_4}{25}, \\ d &= \frac{-6z_1 + 18z_2 - 9z_3 + 2z_4}{25}, \end{aligned}$$

where z_1, z_2, z_3 and z_4 are arbitrary integer parameters.

For example, let $e = z_1 = z_2 = z_3 = 1$ and $z_4 = 2$. In this particular case, we get the integer sequence

$$W_n = \frac{5n^2 - 43n + 88}{50}F_n + \frac{14n + 50}{50}F_{n-1}.$$

This sequence $\{W_n\}_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 2, 2, 4, 7, 15, 32, 69, 146, 303, \dots)$ does not appear in OEIS.

2.3 | Convolution

We consider the sequence $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ given by the convolution of two second order linear recursive sequences $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ as

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k},$$

where $\{G_n\}$ and $\{H_n\}$ are Lucas sequences of the first or second kind. The methods applied in the proofs require distinguishing between cases where the characteristic polynomials have 0, 1, or 2 common roots. We provide

convolution formulas for each case, with the formulas depending solely on the initial terms and the roots of the characteristic polynomial. In every case, we demonstrate a corollary using well-known sequences, such as the Fibonacci, Pell, Jacobsthal, Mersenne, Lucas, P-Lucas, J-Lucas, and M-Lucas sequences. See the dissertation for all the remaining corollaries. In the following, we will use the following notations:

$$\begin{aligned}a &= (A_1 - A_2)\alpha + B_1 - B_2, \\b &= (A_1 - A_2)\beta + B_1 - B_2, \\c &= (A_2 - A_1)\gamma + B_2 - B_1, \\d &= (A_2 - A_1)\delta + B_2 - B_1,\end{aligned}$$

where $bd \neq 0$, α, β and γ, δ are the roots of the characteristic polynomials $p(x) = x^2 - A_1x - B_1$ and $q(x) = x^2 - A_2x - B_2$ of $G_n(G_0, G_1, A_1, B_1)$ and $H_n(H_0, H_1, A_2, B_2)$, respectively.

The characteristic polynomials have no common root

We suppose that all the roots are real numbers and the characteristic polynomials have no common roots. The following theorem deals with the convolution of two different Lucas sequences of the first kind.

Theorem 6 (T. Szakács [42], 2016). *The convolution of $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ and $H_n(0, 1, A_2, B_2)$ can be written as*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{a} - \frac{\beta^{n+1}}{b}}{\alpha - \beta} + \frac{\frac{\gamma^{n+1}}{c} - \frac{\delta^{n+1}}{d}}{\gamma - \delta}.$$

Corollary 1. *The convolution of Fibonacci and Pell numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k P_{n-k} = P_n - F_n.$$

In the following theorem, we deal with the convolution of a Lucas sequence of the first and second kind.

Theorem 7 (T. Szakács [42], 2016). *The convolution of $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ and $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ can be written as*

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^{n+1}(2\alpha-A_2)}{a} - \frac{\beta^{n+1}(2\beta-A_2)}{b}}{\alpha - \beta} + \frac{\frac{\gamma^{n+1}(2\gamma-A_2)}{c} - \frac{\delta^{n+1}(2\delta-A_2)}{d}}{\gamma - \delta}. \end{aligned}$$

Corollary 2. *The convolution of Fibonacci and P-Lucas numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k p_{n-k} = p_n - F_{n-1}.$$

In the following theorem, we deal with the convolution of two Lucas sequences of the second kind.

Theorem 8 (T. Szakács [42], 2016). *The convolution of $G_n(2, A_1, A_1, B_1)$ and $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ can be written as*

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \\ &= \frac{\frac{\alpha^{n+1}(2\alpha-A_1)(2\alpha-A_2)}{a} - \frac{\beta^{n+1}(2\beta-A_1)(2\beta-A_2)}{b}}{\alpha - \beta} + \\ &+ \frac{\frac{\gamma^{n+1}(2\gamma-A_1)(2\gamma-A_2)}{c} - \frac{\delta^{n+1}(2\delta-A_1)(2\delta-A_2)}{d}}{\gamma - \delta}. \end{aligned}$$

Corollary 3. *The convolution of Lucas and J-Lucas numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n L_k j_{n-k} = 9J_{n+1} - 5F_{n+1}.$$

The characteristic polynomials have one common root

We suppose that $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$, $p(\beta) = 0$, $q(\beta) \neq 0$, while $q(\delta) = 0$, $p(\delta) \neq 0$, that is, β and δ are distinct roots, while α is the common root. In the following theorem, we deal with the convolution of two different Lucas sequences of the first kind.

Theorem 9 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ and $H_n(0, 1, A_2, B_2)$ is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\alpha^n(n+1) + \alpha^n \frac{B_1+B_2-2\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} - \beta^{n+1} \frac{\alpha-\delta}{b} - \delta^{n+1} \frac{\alpha-\beta}{d}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}.$$

Corollary 4. *The convolution of Jacobsthal and Mersenne numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n J_k M_{n-k} = \frac{2n + (2n-3)M_n - J_n}{6}.$$

In the following theorem, we deal with the convolution of a Lucas sequence of the first and second kind.

Theorem 10 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $G_n(0, 1, A_1, B_1)$ and $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \frac{\alpha^n(n+1)(2\alpha - A_2) + \alpha^n \frac{B_1-B_2}{\alpha-\beta} - \beta^{n+1} \frac{(\alpha-\delta)(2\beta-A_2)}{b} - \delta^{n+1} \frac{(\alpha-\beta)(2\delta-A_2)}{d}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}.$$

Corollary 5. *The convolution of Jacobsthal and M -Lucas numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n J_k m_{n-k} = \frac{2n + (2n+3)M_n + 5J_n}{6}.$$

In the following theorem, we deal with the convolution of two different Lucas sequences of the second kind.

Theorem 11 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $G_n(2, A_1, A_1, B_1)$ and $H_n(2, A_2, A_2, B_2)$ is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n G_k H_{n-k} = \alpha^n(n+1) + \alpha^n \frac{B_1 + B_2 + 2\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)} - \beta^{n+1} \frac{2\beta - A_2}{(\alpha-\beta)(A_1 - A_2)} + \delta^{n+1} \frac{2\delta - A_1}{(\alpha-\delta)(A_1 - A_2)}.$$

Corollary 6. *The convolution of J -Lucas and M -Lucas numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n j_k m_{n-k} = \frac{n+1 + (n+2)M_{n+1} + 5J_{n+1}}{2}.$$

The characteristic polynomials have two common roots

That is, $p(x) = q(x)$ and so $p(\alpha) = q(\alpha) = 0$, $p(\beta) = q(\beta) = 0$. In the following theorem, we deal with the convolution of a Lucas sequence of the first kind with itself. Zhang W. in [47] has generalized this type of problem, now we give different formulas.

Theorem 12 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $R_n(0, 1, A_1, B_1)$ with itself is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n R_k R_{n-k} = \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left((n+1)V_n - 2R_{n+1} \right),$$

where $\{V_n\}$ is the associate sequence of $\{R_n\}$.

Corollary 7. *The convolution of Fibonacci numbers with themselves:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k F_{n-k} = \frac{1}{5} \left((n+1)L_n - 2F_{n+1} \right).$$

In the following theorem, we deal with the convolution of a Lucas sequence of the first and second kind.

Theorem 13 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $R_n(0, 1, A_1, B_1)$ and $V_n(2, A_1, A_1, B_1)$ is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n R_k V_{n-k} = (n+1)R_n.$$

Corollary 8. *The convolution of Fibonacci and Lucas numbers is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n F_k L_{n-k} = (n+1)F_n.$$

In the following theorem, we deal with the convolution of a Lucas sequence of the second kind with itself.

Theorem 14 (T. Szakács [43], 2017). *The convolution of $V_n(2, A_1, A_1, B_1)$ with itself is*

$$C_n = \sum_{k=0}^n V_k V_{n-k} = (n+1)V_n + 2R_{n+1},$$

where $\{V_n\}$ is the associate sequence of $\{R_n\}$.

Corollary 9. *The convolution of Lucas numbers with themselves is:*

$$C_n = \sum_{k=0}^n L_k L_{n-k} = (n+1)L_n + 2F_{n+1}.$$

3 | Factorials

Let n, a_1, \dots, a_r be positive integers, with the following condition $a_1 \geq \dots \geq a_r > 1$, where $r \geq 2$. Consider the equation

$$n! = \prod_{i=1}^r a_i! \tag{3.1}$$

According to a conjecture of Surányi, the only non-trivial solution to (3.1) with $r = 2$ is $10! = 7!6!$, while a conjecture of Hickerson predicts that the only non-trivial solutions to (3.1) are given by $9! = 7!3!3!2!$, $10! = 7!6! = 7!5!3!$, $16! = 14!5!2!$ (see e.g. Erdős [10], pp. 27-28). These conjectures have been checked for $n \leq 10^6$ by Caldwell [7]. Erdős [10] (see Theorem 2) proved that writing $P(m)$ for the largest prime factor of the positive integer m (with the convention $P(1) = 1$), the assertion

$$P(n(n+1)) > 4 \log n \tag{3.2}$$

would imply that equation (3.1) has only finitely many non-trivial solutions - however, (3.2) is far from being established. (See also [13], p. 70.) Luca [28] proved that assuming the *abc*-conjecture, (3.1) has only finitely many solutions. This result (beside obtaining other related theorems) has been made more explicit by Luca, Saradha and Shorey [29].

We consider the case $r = 2$, and rewrite equation (3.1) as

$$A!B! = C! \tag{3.3}$$

with positive integers A, B, C satisfying $C \geq B \geq A > 1$. As we noted already, the problem of finding all solutions to equation (3.3) is still open. Beside the results mentioned so far, we recall a theorem of Erdős [11] saying that in all solutions of (3.3) with C large enough, we have $C - B \leq 5 \log \log C$. This result has been recently sharpened by Bath and Ramachandra [5] to $C - B \leq ((1 + \varepsilon) / \log 2) \log \log C$ for $C > C_\varepsilon$, with arbitrary $\varepsilon > 0$. Recalling the result of Luca, under the *abc*-conjecture we have $C - B = 1$ for C large enough. Note that, however, if we would assume that say $C - B = 2$, equation (3.3) would still remain very hard to solve. In this direction, we only refer to a paper of Luca [27] and the references there.

Our purpose is to show the finiteness of the solutions to (3.3) with $k = B - A$ bounded. Our main result provides an explicit upper bound for C in terms of k . Certainly, this immediately implies that for any fixed k , (3.3) has only finitely many solutions. Further, we show that the only non-trivial solution to (3.3) with $k \leq 10^6$ is the well-known $10! = 7!6!$, mentioned earlier.

Theorem 15 (L. Hajdu, Á. Papp and T. Szakács [20], 2018). *Writing $k = B - A$ for all non-trivial solutions of equation (3.3) different from $(A, B, C) = (6, 7, 10)$ we have $C < 5k$. Further, if $k \leq 10^6$, then the only non-trivial solution to (3.3) is given by $(A, B, C) = (6, 7, 10)$.*



Registry number: DEENK/529/2024.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Tamás Szakács

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10047519

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. **Szakács, T.:** Convolution of second order linear recursive sequences I.

Ann. Math. Inform. 46, 205-216, 2016. ISSN: 1787-5021.

Foreign language scientific articles in international journals (5)

2. Liptai, K., Németh, L., **Szakács, T.**, Szalay, L.: On certain Fibonacci representations.

Fibonacci Q. [Accepted by publisher] (-), 1-9, 2024. ISSN: 0015-0517.

IF: 0.4 (2023)

3. Hajdu, L., Papp, Á., **Szakács, T.:** On the equation $A!B! = C!$

J. Number Theory. 187, 160-165, 2018. ISSN: 0022-314X.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2017.10.020>

IF: 0.684

4. **Szakács, T.:** Convolution of second order linear recursive sequences II.

Commun. Math. 25 (2), 137-148, 2017. ISSN: 1804-1388.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1515/cm-2017-0011>

5. **Szakács, T.:** k-Order Linear Recursive Sequences and the Golden Ratio.

Fibonacci Q. 55 (5), 186-191, 2017. ISSN: 0015-0517.

6. **Szakács, T.:** Multiplying balancing numbers.

Acta Univ. Sapientiae, Mathematica. 3 (1), 90-96, 2011. ISSN: 1844-6094.





List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

7. Ruzsa, Z., Parisek, Z., Király, R., Tómacs, T., **Szakács, T.**, Hajagos, H.: Building of a mathematics-based RFID localization framework.

Ann. Math. Inform. 44, 165-176, 2015. ISSN: 1787-5021.

Total IF of journals (all publications): 1,084

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,084

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

28 October, 2024



Irodalomjegyzék/References

- [1] ATANASSOV, K.T., *On two new combined 3-Fibonacci sequences. Part 3*, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, **28(1)** (2022), 143-146.
- [2] A. BAKER AND G. WÜSTHOLZ, *Logarithmic forms and group varieties*, J. Reine Angew. Math. **442** (1993), 19-62.
- [3] A. BEHERA AND G. K. PANDA, *On the square roots of triangular numbers*, The Fibonacci Quart. **37** (1999), 98-105.
- [4] A. BÉRCZES, K. LIPTAI AND I. PINK, *On Generalized Balancing Sequences*, The Fibonacci Quart. **48** (2010), 121-128.
- [5] K. G. BHAT AND K. RAMACHANDRA, *Remark on Factorials that are Products of Factorials*, Math. Notes **88** (2010), 317-320.
- [6] W. BOSMA, J. CANNON AND C. PLAYOUST, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235-265.
- [7] C. CALDWELL, *The Diophantine equation $A!B! = C!$* , J. Recreational Math. **26** (1994), 128-133.
- [8] L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers*, Vol. I, Chelsea Publ. Company, New York, (1952).
- [9] M. EL BACHRAOUI, *Primes in the Interval $[2n, 3n]$* , Int. J. Contemp. Math. Sci. **1** (2006), 617-621.
- [10] P. ERDŐS, *Problems and results on number theoretic properties of consecutive integers and related questions*, Congressus Numerantium XVI (Proc. 5th Manitoba Conf. Numer. Math.) (1975), 25-44.
- [11] P. ERDŐS, *A consequence of a factorial equation*, The American Mathematical Monthly **100** (1993), 407-408.
- [12] P. ERDŐS AND R. L. GRAHAM, *On products of factorials*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **4** (1976), 337-355.

- [13] P. ERDŐS AND R. L. GRAHAM, *Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory*, L'Enseignement Mathématique, Imprimerie Kundig, Geneva, (1980).
- [14] P. ERDŐS AND J.L. SELFRIDGE, *The product of consecutive integers is never a power*, Illinois J. Math. **19** (1975), 292-301.
- [15] G. EVEREST, A. VAN DER POORTEN, I. SHPARLINSKI AND T. WARD, *Recurrence Sequences*, American Mathematical Soc., (2015).
- [16] R. P. FINKELSTEIN, *The House problem*, American Math. Monthly **72** (1965), 1082-1088.
- [17] F. GATTA AND A. D'AMICO, *Sequences $\{H_n\}$ for which H_{n+1}/H_n approaches the Golden Ratio*, The Fibonacci Quart. **46/47** (2008/2009), no. 4, 346-349.
- [18] M. GRIFFITHS AND A. BRAMHAM, *The Jacobsthal numbers: Two results and two questions*, The Fibonacci Quart. **53** (2015), 147-151.
- [19] R. K. GUY, *Unsolved Problems in Number Theory*, Third Edition, Springer, (2004).
- [20] L. HAJDU, Á. PAPP AND T. SZAKÁCS, *On the equation $A!B!=C!$* , Journal of Number Theory **187** (2018), 160-165.
- [21] T. KOMATSU, *Sequences $\{H_n\}$ for which H_{n+1}/H_n approaches an irrational number*, The Fibonacci Quart. **48** (2010), no. 3, 265-275.
- [22] T. KOVÁCS, K. LIPTAI AND P. OLAJOS, *On (a, b) -balancing numbers*, Publicationes Mathematicae Debrecen **77** (2010), 485-498.
- [23] K. LIPTAI, *Fibonacci balancing numbers*, The Fibonacci Quart. **42** (2004), 330-340.
- [24] K. LIPTAI, *Lucas balancing numbers*, Acta Math. Univ. Ostrav **14** (2006), 43-47.
- [25] K. LIPTAI, F. LUCA, Á. PINTÉR AND L. SZALAY, *Generalized balancing numbers*, Indag. Math. **20** (2009), 87-100.

-
- [26] K. LIPTAI, L. NÉMETH, T. SZAKÁCS, L. SZALAY *On certain Fibonacci representations*, The Fibonacci Quart. Manuscript accepted for publication.
- [27] F. LUCA, *The diophantine equation $P(x) = n!$ and a result of M. Overholt*, Glansk Matematikački **37** (2002), 269-273.
- [28] F. LUCA, *On factorials which are products of factorials*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **143** (2007), 533-542.
- [29] F. LUCA, N. SARADHA AND T. N. SHOREY, *Squares and factorials in products of factorials*, Monatsh. Math. **175** (2014), 385-400.
- [30] F. MÁTYÁS, *Recursive formulae for special continued fraction convergents*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae **26** (1999), 49-55.
- [31] F. MÁTYÁS, *Sequence transformations and linear recurrences of higher order*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis **9** (2001), 45-51.
- [32] F. MÁTYÁS, *Linear recurrences and rootfinding methods*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae **28** (2001), 27-34.
- [33] H. L. MONTGOMERY AND R. C. VAUGHAN, *The large sieve*, Mathematika **20** (1973), 119-134.
- [34] L. NÉMETH, *Walks on tiled square boards*, submitted to Math. Slovaca.
- [35] OEIS FOUNDATION INC. (2011), *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://oeis.org>.
- [36] G. K. PANDA, *Sequence balancing and cobalancing numbers*, The Fibonacci Quart. **45** (2007), 265-271.
- [37] G.K. PANDA AND P.K. RAY, *Cobalancing numbers and cobalancers*, Int. J. Math. Math. Sci. **8** (2005), 1189-1200.
- [38] H. ROBBINS, *A remark on Stirling's formula*, The American Mathematical Monthly **62** (1955), 26-29.
- [39] B. ROSSER AND L. SCHOENFELD, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

- [40] T.N. SHOREY AND R. TIJDEMAN, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press (Cambridge Tracts in Mathematics), (1986).
- [41] T. SZAKÁCS, *Multiplying balancing numbers* , Acta Univ. Sapientiae Mathematica **3** (2011), 90-96.
- [42] T. SZAKÁCS, *Convolution of second order linear recursive sequences I.*, Annales Mathematicae et Informaticae **46** (2016), 205-216.
- [43] T. SZAKÁCS, *Convolution of second order linear recursive sequences II.*, Communications in Mathematics **25** (2017), 137-148.
- [44] T. SZAKÁCS, *k-order linear recursive sequences and the golden ratio*, The Fibonacci Quart. **55** (2017), 186-191.
- [45] L. SZALAY, *On the resolution of simultaneous Pell equations*, Annales Mathematicae et Informaticae **34** (2007), 77-87.
- [46] S. VAJDA, *Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section*, Ellis Horwood Books In Mathematics And Its Application, (1989).
- [47] W. ZHANG, *Some Identities Involving the Fibonacci Numbers*, The Fibonacci Quart. **35** (1997), 225-229.
- [48] Z. ZHANG AND P. HE, *The Multiple Sum on the Generalized Lucas Sequences*, The Fibonacci Quart. **40** (2002), 124-127.

Publikációs lista/List of publications

1. K. LIPTAI, L. NÉMETH, T. SZAKÁCS, L. SZALAY *On certain Fibonacci representations*, The Fibonacci Quart. Manuscript accepted for publication.
2. L. HAJDU, Á. PAPP AND T. SZAKÁCS *On the equation $A!B!=C!$* , Journal of Number Theory Vol. 187, (2018), 160-165.
3. T. SZAKÁCS, *k-order linear recursive sequences and the golden ratio*, The Fibonacci Quart. **55** (2017), 186-191.
4. T. SZAKÁCS, *Convolution of second order linear recursive sequences II.*, Communications in Mathematics **25** (2017), 137-148.
5. T. SZAKÁCS, *Convolution of second order linear recursive sequences I.*, Annales Mathematicae et Informaticae **46** (2016), 205-216.
6. Z. RUZSA, ZS. PARISEK, R. KIRÁLY, T. TÓMÁCS, T. SZAKÁCS, H. HAJAGOS, *Building of a mathematics-based RFID localization framework*, Annales Mathematicae et Informaticae **44** (2015), 165-176.
7. T. SZAKÁCS, *Multiplying balancing numbers*, Acta Univ. Sapientiae Mathematica **3** (2011), 90-96.

Előadáslista/List of talks

1. *Repdigits in named sequences*, 25th Central European Number Theory Conference, Sopron (Hungary), August 28 - September 01, 2023.
2. *Convolution of second order linear recursive sequences*, 23rd Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice (Czech Republic), August 28 - September 01, 2017.
3. *k-order linear recursive sequences and the Golden Ratio*, 17th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Caen (France), June 27 - July 02, 2016.
4. *On the equation $A!B!=C!$* , Komáromi Számelméleti és Kriptográfiai Napok, Komárno (Slovak Republic), May 23 - May 25, 2014.
5. *On the equation $A!B!=C!$* , 21st Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice (Czech Republic), September 02 - September 06, 2013.
6. *Multiplying balancing numbers*, 15th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Eger (Hungary), June 25 - June 30, 2012.