Tartalomjegyzék

1. A disszertációban használt fogalmak és tételek

1.1. Csoportelméleti fogalmak.Definíciók

1.1.1. Csoport

Egy G halmaz amelyen értelmezünk egy "." belső műveletet úgy, hogy érvényesülnek a következő axiómák:

(1) A belső művelet asszociatív

(2) Létezik a G-halmazban egy e elem(amelyet identikus elemnek nevezünk) úgy, hogy minden $g \in G$-re $g.e \ = \ e.g \ = \ g$

(3) Minden $g \in G$ -re találunk G-ben egy g^{-1} el jelölt elemet úgy, hogy $g.g^{-1} \ = \ g^{-1}g \ = \ e$

Megjegyzések

a) Bizonyitható a fenti három axiómából, hogy egy csoportnak csak egy identikus eleme van illetve, hogy g^{-1} egyértelműen adódik $g \in G$ esetén.

b) Ha $ab \ = \ ba$ minden $a, \ b \in G$-re akkor a G csoportot kommutatívnak nevezzük (vagy Abel-féle csoportoknak).

1.1.2. Részcsoportok

A G csoport H részhalmaza részcsoportja a G-nek ha H zárt a G "." belső műveletével szemben illetve ha H is csoportot alkot a G-n értelmezett belső művelettel szemben.

1.1.3. Osztályok (bal és jobboldali)

Amennyiben H a G-nek részcsoportja és $g \in G$ rögzített akkor a H-nak, g elemet tartalmazó baloldali osztálya alatt a

$$gH \ = \ \{gh : \ h \in H\}$$

halmazt értjük. Hasonlóan

$$Hg \ = \ \{hg : \ h \in H\}$$

H-nak g elemet tartalmazó jobboldali osztálya.

Megjegyzések

a) Mint ismeretes a csoportelméletből a gH osztályok a G-nek egy partícióját alkotják ha g végigfut a G csoporton (azaz a $g' \sim g$ akkor és csak akkor ha $g' \in gH$, egy ekvivalenciareláció a G halmazon). Hasonló megállapítás érvényes a jobboldali osztályokra.

b) Általában $gH \neq Hg$ minden $g \in G$-re.

1.1.4. Normális részcsoport

A H normális részcsoportja G-nek ha $gH = Hg$ minden $g \in G$-re.

Megjegyzés

Ilyenkor a fentemlített $\sim$ ekvivalenciareláció (azaz $g^{'} \sim g$ akkor és csak akkor ha $g^{'} \in gH(= Hg)$) egy kongruenciareláció lesz.

A normállánc

$$G_o = \{e\} \subset G_1 \subset G_2 \subset ... \subset G_n = G$$

normállánca G-nek ha G_i normális részcsoportja G-nek $(i = 1, 2.., n - 1)$

A kompozíciólánc Egy olyan normállánc amely már tovább nem finomitható azaz nem "ékelhető" be G_j a G_i és G_{i+1} közé ($G_i \subset G_j \subset G_{i+1}$; $i = 1, 2, .., n - 1$) úgy, hogy G_j is normális részcsoportja G-nek.

1.1.5. Csoport-homomorfizmus

Ha G és K csoportok és $\phi : G \rightarrow K$ függvény olyan, hogy $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$ minden $g_1, g_2 \in G$ esetén akkor a ϕ neve csoporthomomorfizmus, amit a disszertációban röviden homomorfizmusnak nevezünk.

1.1.6. Homomorfizmus magja

Ha $\phi : G \rightarrow K$ homomorfizmus, a G-nek azt a $Ker\phi$-vel jelölt részhalmazát amelyre igaz, hogy minden $Ker\phi$-beli g elemre érvényesül a $\phi(g) = e^{'}$ összefüggés (ahol $e^{'}$ a K csoport identikus eleme) a ϕ homomorfizmus magjának nevezzük.

Megjegyzés

A $Ker\phi$ részcsoportja G-nek mégpedig normális részcsoportja.

1.1.7. A faktorcsoport és a faktorhalmaz

a) Ha N normális részcsoportja G-nek, akkor

$$(aN)(bN) = (ab)N$$

összefüggés szerint, az osztályok halmazán definiált belső művelettel szemben, az osztályok halmaza egy csoportot alkot amelyet G-nek N-szerinti faktorcsoportjának nevezzük és G/N a jelölése.

b) Ha $\sim$ egy ekvivalenciareláció az A halmazon az osztályok $A/\sim$ halmazát faktorhalmaznak nevezzük.

Megjegyzés A G/N faktorcsoport csak akkor definiálható ha N normális részcsoportja G-nek mert a fenti definició a) részében említett osztályok közötti művelet csak ez esetben jól defíniált.

1.1.8. Csoporthatás halmazon

Ha X egy halmaz és G egy csoport akkor a G-csoportnak, az X halmazon gyakorolt hatásán egy $* : G \times X \to X$ függvényt értünk amelyre teljesül a következő két axióma:

α) $ex = x$ minden $x \in X$-re.

β) $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ minden $x \in X$ és minden $g_1, g_2 \in G$

Megjegyzések

a) A G hatását az X halmazon tranzitívnek nevezzük ha minden $x_1, x_2 \in X$-re létezik $g \in G$ úgy, hogy$gx_1 = x_2$.

b) Az X halmazon gyakorolt hatása által, a G csoport egy ekvivalencia-relációt indukál az X halmazon (amelyet a $\sim_G$ jelöl) a következő megfontolásból: $x_1 \sim_G x_2$ akkor és csak akkor ha létezik $g \in G$ úgy, hogy $gx_1 = x_2$.

Valóban

1) $ex = x$ (reflexivitás)

2) ha $gx_1 = x_2$ akkor $g^{-1}x_2 = x_1$ (szimmetria)

3) ha $g_1x_1 = x_2$ és $g_2x_2 = x_3$ akkor

$$x_3 = g_2x_2 = g_2(g_1x_1) = (g_2g_1)x_1$$

ami a tranzitivítást jelenti.

c) Ha a hatás tranzitív akkor $\sim_G$ relációnak csak egy osztálya van (azaz, az $X/\sim_G$ faktorhalmaz egyelemű).

Megjegyzés

Az X halmazt szokás G-halmaznak nevezni.

1.1.9. A stabilizátor

Legyen $x \in X$ rögzített. A G csoport azon G_x részhalmazát amelyre igaz, hogy $g_x = x$ minden $g \in G_x$ az x elem stabilizátorának nevezik.

Megjegyzések

a) A csoporthatás axiómáinak felhasználásával megmutatható, hogy G_x mindig részcsoportja G-nek.

b) $|G : G_x| = |C^{\sim_G}(x)|$ ahol $C^{\sim_G}(x)$ jelöli az $x \in X$ elem osztályát és az $|\ \ |$ jel pedig az adott halmaz számosságát. Tehát a G_x bal (vagy jobb)-oldali osztályainak halmazának számossága (azaz a G_x részcsoport indexe a G csoportban) megegyezik az x elem osztályának számosságával (ha a két halmaz nem véges akkor bijekció képezhető a két halmaz között azaz a két halmaz ekvivalens).

c) Fontos megállapításként szerepel a csoportelméletben a következő: ha x_1 és x_2 azonos osztályban vannak akkor stabilizatoraik egymásnak konjugáltjai azaz $G_{x_2} = gG_{x_1}^{-1}g$ valamilyen $g \in G$-re. Speciálisan G_{x_1} akkor és csak akkor normális részcsoportja G-nek ha G_{x_1} stabilizátora az x_1 elem osztályának minden elemének.

d) A normalizátor fogalma: mint ismeretes $N(G_x)$ a G_x csoport normalizátora ha $N(G_x)$ a G-nek azon legbővebb részcsoportja melyre teljesül az a feltétel miszerint $N(G_x)$ a G_x csoportot normális részcsoportjaként tartalmazza. Tehát $G_x \subseteq N(G_x) \subseteq G$. Ha $N(G_x) = G$ akkor G_x normális részcsoportja G-nek és a fenti **c**) pont szerint G_x minden eleme invariánsan hagyja az x elem osztályának minden elemét. Ha $G_x \subset N(G_x) \subset G$ akkor G_x minden eleme az x osztályának csak azon $x^{'}$ elemeit hagyja invariánsan melyekre igaz, hogy létezik $g_n \in N(G_x)$ úgy, hogy $g_n x = x^{'}$. Ebben az esetben G_x elemei a $C^{\sim_G}(x)$ osztály csak egy valódi részhalmazát hagyja invariánsan. Végül ha $G_x = N(G_x) \subset G$ akkor x az egyetlen elem a saját osztályából melyre igaz az, hogy $g_x x = x$ minden $g_x \in G_x$-re.

e) Ha a $(G_x, N(G_x)$ páros veszi át a fent említett (x, G_x) páros szerepét azzal a különbséggel, hogy a csoporthatás az új páros esetén a konjugálás akkor eme új párosra hasonló összefüggések állapíthatók meg mint az (x, G_x) párosra.

1.2. Csoportelméleti tételek

1.2.1. Az első izomorfizmus-tétel

Legyen $\Phi\ :\ G \to G^{'}$ egy homomorfizmus melynek magja K és γ_k a kanonikus homomorfizmus azaz $\gamma_k(g) = gK$. Akkor egyetlen Ψ izomorfizmus létezik úgy, hogy

$$\Psi\ :\ G/K \to \Phi[G]$$

$$\Phi(g) = \Psi(\gamma_K(g))$$

minden $g \in G$-re.

1.2.2. Második izomorfizmus-tétel

Legyen H a G-nek egy tetszőleges részcsoportja és N egy normális részcsoportja G-nek. Akkor $HN = \{hn|h \in H \text{ és } n \in N\}$ részcsoportja G-nek (így $HN = NH$) és $(HN)/H \cong H/(H \cap N)$.

1.2.3. Harmadik izomorfizmus-tétel

Legyenek rendre H és N normális részcsoportjai a G csoportnak úgy, hogy $H \subseteq N$. Akkor

$$G/N \cong (G/H)/(H/N)$$

1.2.4. Tétel

Ha G csoportnak van kompozíciólánca és N valódi normális részcsoportja G-nek akkor létezik a G csoportban egy olyan kompozíciólánc amely tartalmazza az N részcsoportot.

1.2.5. Schreier tétele

Minden normállánc kompozíciólánccá finomitható.

1.3. Kategória-elméleti fogalmak

1.3.1. Kategória fogalma

A kategóriát $\underline{C}$ -vel szokás jelölni. Ez a fogalom a következő adatokkal adható meg:

a) Objektumok osztálya. Az objektumokat általában A, B, C, D.. nagybetükkel szokás jelölni.

b) Ha A és B a $\underline{C}$ kategóriának két tetszőleges objektuma akkor e két objektumhoz tartozik egy $\underline{C}(A, B)$ halmaz ami az A-ból a B-be való leképezések halmaza; ezen leképezéseket morfizmusoknak nevezik.

c) Ha $f \in \underline{C}(A, B)$ és $g \in \underline{C}(B, C)$ morfizmusok akkor létezik a $h = gf \in \underline{C}(A, C)$ morfizmus.

Megjegyzések

a) Használatos az $f \in \underline{C}(A, B)$ helyett az $f : A \to B$ jelölés is.

b) Mivel az objektumok nem feltétlenül halmazok ezért a morfizmusokat "általánosított függvényeknek" is szokták tekinteni.

c) Ebben a disszertációban az előforduló morfizmusok függvények lesznek.

1.3.2. Kategória axiomái

a) A $\underline{C}(A_1, B_1)$ és $\underline{C}(A_2, B_2)$ halmazok akkor és csak akkor nem diszjunktak ha $A_1 = A_2$ és $B_1 = B_2$.

b) Ha $f : A \to B$, $g : B \to C$ és $h : C \to D$ három tetszőleges morfizmus akkor érvényes az asszociativitás szabálya azaz $h(gf) = (hg)f$

c) Minden A objektumhoz létezik egy $1_A : A \to A$ morfizmus úgy, hogy ha $f : A \to B$, $g : C \to A$ tetszőleges morfizmusok a $\underline{C}(A, B)$ és a $\underline{C}(C, A)$ halmazokból akkor $f1_A = f$ és $1_A g = g$; 1_A egyértelmüen meghatározott.

1.3.3. Funktorok

Jelölje $\underline{C}$ és $\underline{D}$ két tetszőleges kategóriát. Azt mondjuk, hogy $F : \underline{C} \to \underline{D}$ a $\underline{C}$ kategóriának a $\underline{D}$ kategóriába való funktora ha teljesülnek a következő feltételek:

1) Az F funktor, a $\underline{C}$ kategóriának minden A objektumához egyértelmüen megfelelteti a $\underline{D}$ kategóriának egy FA objektumát.

2) Az F funktor, a $\underline{C}(A,B)$ minden $f : A \to B$ morfizmusának megfeleltet egy $\underline{D}(FA, FB)$-beli $Ff : FA \to FB$ morfizmust.

3) Ha a $\underline{C}$ kategóriához tartozó fg szorzat értelmezett akkor érvényes az, hogy $F(fg) = (Ff)(Fg)$ valamint $F(1_A) = 1_{FA}$

1.4. Automata-elméleti fogalmak

1.4.1. A Mealy-automata

Mealy automatán egy olyan $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ ötöst értünk ahol A az állapotok nem üres halmaza, X a bemenőjelek nem üres halmaza, Y a kimenőjelek nem üres halmaza, $\delta : A \times X \to A$ az átmeneti függvény és $\lambda : A \times X \to Y$ a kimeneti függvény.

1.4.2. Az automata-homomorfizmus

Adott két automata: $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $(A', X', Y'\delta', \lambda')$ és a következő szürjekciók:

$$f_1 : A \to A'$$

$$f_2 : Y \to Y'$$

$$\Phi : X \to X'$$

Azt mondjuk, hogy az $(A', X', Y', \delta', \lambda')$ automata homomorf képe az $(A, X, Y, \delta, \lambda,)$ automatának ha teljesülnek a következő összefüggések:

$$f_1(\delta(a, x)) = \delta'(f_1(a), \Phi(x))$$

és

$$f_2(\lambda(a, x)) = \lambda'(f_1(a), \Phi(x))$$

Megjegyzés Az $f : A \to A'$ függvény egy ekvivalencia relációt indukál az A halmazon amelyet az algebra szakirodalomban $Kerf$-nek jelölnek és amely reláció definició szerint: $aKerfb$ akkor és csak akkor ha $f(a) = f(b)$ ahol $a, b \in A$ (itt nyílván feltételezzük, hogy f értelmezett a teljes A halmazon).

1.5. Topologiai fogalmak

1.5.1. Topologikus tér

Egy tetszőleges R halmazt (melynek elemeit pontoknak nevezünk) topologikus térnek nevezünk ha teljesülnek a következő feltételek:

a) Az R minden M részhalmazához hozzárendelhető egy $\overline{M}$ halmaz amit az M halmaz lezártjának nevezünk.

b) Ha M egyelemü akkor $M = \overline{M}$

c) Ha M és N az R halmaz két tetszőleges részhalmaza akkor az uniójuk lezártja azonos a lezártak uniójával azaz

$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

d) Minden $M \subseteq R$ halmazra igaz, hogy $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

1.5.2. Zárt és nyílt halmazok

Az $M \subseteq R$ halmazt zártnak nevezzük ha $M = \overline{M}$; az N halmaz nyílt ha $R - N$ zárt halmaz.

Megjegyzés

Ismert a topológiából, hogy véges számú nyílthalmazok metszete nyílt illetve véges számú zárthalmazok uniója zárt halmaz. Hasonlóan tetszőleges számú nyílthalmazok uniója nyílthalmaz és tetszőleges számú zárthalmazok metszete szintén zárt halmaz.

1.5.3. Környezetek. Bázis

Az R topologikus tér bázisának nevezzük az R-nek nyílt részhalmazaiból álló Σ-halmazcsaládot ha az R minden nyílt részhalmaza előáll Σ-béli halmazok uniójaként. A Σ minden "elemét" (azaz minden Σ-béli nyílthalmazt) környezetnek nevezzük, mégpedig az adott halmaz bármely pontjának a környezetének nevezzük.

Megjegyzések

a) A fentemlített Σ halmazrendszert az R topologikus tér teljes környezetrendszerének nevezzük.

b) Az 1.5.1 pontban megadott definicióban szereplő lezárást más oldalról is meg lehet közelíteni, nevezetesen: ha az R tér részhalmazaiból álló Σ-halmazrendszer eleget tesz annak, hogy

I) $a, b \in R,\ a \neq b$-re létezik olyan U a Σ-ból, hogy $a \in U$ és $b \notin U$

II) ha a Σ-béli U és V halmazok tartalmazzák az a pontot akkor létezik a Σ-béli W halmaz úgy, hogy $a \in W \subset U \cap V$ akkor az $M \subset R$ lezártját úgy is lehet értelmezni, hogy $a \in \overline{M}$ akkor és csak akkor ha minden Σ-béli a-t tartalmazó halmaznak M-el való metszete nem üres halmaz. Az íly módon defíniált lezárás teljes összhangban van az 1.5.1 definicióban megadott lezárással így az R-halmaz topologikus tér és az I) és II) tulajdonságú Σ-halmazrendszer egy teljes környezetrendszere lesz (azaz bázisa).

1.5.4. Kompaktság és lokális kompaktság

a) Az R-topologikus tér M részhalmazát kompaktnak nevezzük ha az M halmaz minden végtelen N részhalmazára ($N \subset M$) igaz az, hogy létezik legalább egy $a \in M$ úgy, hogy $a \in \overline{N - a}$.

b) Az R-topologikus teret lokálisan kompaktnak nevezzük ha tetszőleges $a \in R$ pontnak van olyan környezete amelynek lezártja kompakt halmaz.

1.5.5. Szeparábilis

Egy R topologikus teret szeparábilisnak nevezünk (vagy másképp: eleget tesz a megszámlálhatóság második axiómájának) ha van olyan bázisa (teljes környezetrendszere) amely legfeljebb megszámlálhatóan végtelenül sok nyílt halmazból áll.

1.5.6. Hausdorff-tér

Az R-topologikus teret Hausdorff-térnek nevezzük ha $\forall a, b \in R,\ a \neq b$ léteznek a-nak és b-nek olyan U_a és V_b környezetei ($a \in U_a,\ b \in V_b$) úgy, hogy U_a és V_b diszjunkt halmazok.

1.5.7. Topologikus csoport

Egy R-halmazt topologikus csoportnak nevezünk ha a következő feltételek teljesülnek:

1) R elemei absztrakt csoportot alkotnak

2) R egy topologikus tér

3) Ha a és b az R-nek két eleme akkor az ab elem minden W_{ab} környezetéhez léteznek az a és b elemek U_a és V_b környezetei úgy, hogy $U_a V_b \subset W_{ab}$; ha a az R-nek tetszőleges eleme, akkor a^{-1} elem minden $V_{a^{-1}}$ környezetéhez találunk az a elemnek olyan U_a környezetét hogy $U_a^{-1} \subset V_{a^{-1}}$

(itt U^{-1} értelmezése nyílvánvalóan az, hogy U-halmaz minden elemének vesszük az inverzét és ezek az inverzek alkotják az U^{-1} halmazt).

Megjegyzés Ha G egy topológikus csoport és G/N egy faktorcsoportja, akkor ha G eleget tesz a megszámlálhatóság második axiómájának akkor ez

G/N-re is igaz, valamint ha G kompakt (lokálisan kompakt) akkor G/N is kompakt (lokálisan kompakt).

1.6. Mértékelmélettel kapcsolatos fogalmak

1.6.1. Halmazgyűrű. Halmazalgebra. σ-gyűrű

Legyen X egy halmaz. Az alábbi definiciókban szereplő halmazcsaládok "elemei" az X halmaz részhalmazai.

Halmazgyűrű

Egy $\mathbf{R}$ nem üres-halmazrendszert (halmazcsaládot) halmazgyűrűnek nevezünk ha zárt az egyesítés és a halmazkülönbség műveletekkel szemben azaz: ha $A, B \in \mathbf{R}$ akkor $A \cup B \in \mathbf{R}$ és $A - B \in \mathbf{R}$. Ha $A = B \in \mathbf{R}$ esetre alkazmazva azt kapjuk, hogy az üreshalmaz is benne van az $\mathbf{R}$-ben. Ebből a definicióbol következik, hogy $\mathbf{R}$-halmazgyűrű mindig zárt a véges egyesítéssel és metszettel szemben. Speciálisan, ha $\mathbf{R}$ olyan halmazgyűrű amely maga az X halmazt is tartalmazza, akkor az $\mathbf{R}$-halmazgyűrűt halmazalgebrának nevezzük.

σ-gyűrű

Egy $\mathbf{S}$-nem üres-halmazrendszert (halmazcsaládot) σ-gyűrűnek nevezzük ha zárt a halmazkülönbség- illetve a megszámlálhatóan végtelenül sok halmaz egyesítésének műveletével szemben, azaz: ha $A, B \in \mathbf{S}$ akkor $A - B \in \mathbf{S}$ és ha $C_i \in \mathbf{S}$ $i = 1, 2, 3...$ akkor$\cup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathbf{S}$.

Megjegyzés

A mértékelméletben bizonyított, hogy tetszőleges $\mathbf{E}$ halmazrendszer esetén létezik az egyértelműen meghatározott (legszűkebb) halmazgyűrű (illetve σ-halmazgyűrű) amely tartalmazza az $\mathbf{E}$ halmazrendszert. Ezeket rendre $\mathbf{R}(\mathbf{E})$ illetve $\mathbf{S}(\mathbf{E})$-vel szokás jelölni és az $\mathbf{E}$ halmazrendszer által generált halmazgyűrűnek (σ-gyűrűnek) nevezzük.

1.6.2. Halmazfüggvények. Mértékfüggvények

Halmazfüggvény

Olyan μ valós értékű függvény melynek értelmezési tartománya egy **R**-halmazrendszer; additívnek nevezzük a μ halmazfüggvényt (melynek értékkészlete a kiterjesztett valós számtengely (azaz a valósszámok halmazához bevesszük a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumokat is)) ha a diszjunk A és B halmazokra $A, B \in R$ $A \cup B \in \mathbf{R}$ érvényes az $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ összefüggés. Végesen additívnak nevezzük a μ halmazfüggvényt ha $E_1, E_2, ..., E_n$ páronként diszjunkt halmazok esetén érvényes az alábbi

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

összefüggés, valahányszor $\cup_{i=1}^{n} E_i \in \mathbf{R}$. Megszámlálhatóan additívnak nevezzük a μ halmazfüggvényt ha minden (páronként diszjunkt) E_n sorozat esetén melyre fennáll, hogy $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$ érvényes a következő összefüggés:

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Mértékfüggvény (röviden: mérték)

Mértékfüggvénynek (vagy röviden: mértéknek) nevezünk egy olyan μ halmazfüggvényt amely egy **R**-halmazgyűrűn van értelmezve, értékkészlete pedig a $[0; \infty[\cup \{\infty\}$, $\mu(\phi) = 0$ (azaz μ üres halmazon számított értéke 0) és amely megszámlálhatóan additív. Legyen μ egy mérték az **R** halmazgyűrűn értelmezve. Az $E \in \mathbf{R}$ halmaz mértéke véges ha $\mu(E) < \infty$. Az E halmaz mértéke σ-véges ha $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ úgy, hogy $\mu(E_n) < \infty$. Ha az **R** halmazgyűrű minden E halmaza véges (σ-véges) mértékü akkor a μ mérték véges (σ-véges).

1.6.3. Borel és Baire-féle halmazok

Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-féle tér és legyen **C** az X-tér összes kompakt részhalmazainak osztálya. Az $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ σ-gyűrű halmazait az X-tér Borel-féle halmazainak nevezzük; **U**-val szokás jelölni az $\mathbf{S}(\mathbf{C})$-béli összes nyílt halmaz osztályát. Az X-tér tetszőleges A részhalmazát G_δ halmaznak nevezik ha A előáll X-béli megszámlálhatóan végtelenül sok nyílt halmazok metszeteként: $A = \cap_{i=1}^{\infty} U_i$ (ahol $U_i \subset X$, $i = 1, 2, 3...$) az X-térnek nyílt részhalmazainak egy sorozata. Ha a fenti **C** osztály azon $\mathbf{C_o}$ részosztályát tekintjük amely G_δ halmazokat tartalmaz, akkor az $\mathbf{S}(\mathbf{C_o})$ σ-gyűrű halmazait Baire-féle halmazoknak nevezzük.

Megjegyzés

Ismert eredmény a mértékelméletben, hogy a szeparábilis és lokálisan kompakt Hausdorff terekben (pl. Euklideszi terekben) $\mathbf{C} = \mathbf{C_o}$ (mivel ilyen terekben minden kompakt halmaz G_δ halmaz is egyben) így $\mathbf{S}(\mathbf{C})$=$\mathbf{S}(\mathbf{C_o})$ azaz minden Borel halmaz egyben Baire halmaz is (fordítva nyílvánvalóan mindig igaz).

1.6.4. Borel és Baire mértékek. Reguláris mérték

Borel illetve Baire-féle mértékeknek nevezzük azt a μ illetve μ_o mértéket amelyet az $\mathbf{S}(\mathbf{C})$ σ-gyűrűn (illetve $\mathbf{S}(\mathbf{C_o})$ σ-gyűrűn) definiálunk úgy, hogy $\mu(K) < \infty$ illetve $\mu_o(K_o) < \infty$ minden $K \in \mathbf{C_o}$ illetve minden $K_o \in \mathbf{C_o}$-ra. Egy mérték reguláris ha minden értékét a topológikus tér kompakt és nyílt halmazain számított értékeivel meg tudjuk határozni.

Megjegyzés

Egy Euklideszi sík Borel-σ gyűrűjén értelmezett Lebesgue mérték (lásd 1.6.6) egyben egy reguláris Borel mérték.

1.6.5. Haar-féle mérték

A Haar-féle mérték egy μ Borel mérték amelyet egy X lokálisan kompakt topológikus csoporton értelmezünk úgy, hogy: $\mu(U) > 0$ minden Borel-féle nem üres nyílt halmazra illetve még azt is feltételezzük μ-ről, hogy balinvariáns (azaz $\mu(gE) = \mu(E)$ minden $g \in X$). A mértékelméletben bizonyított, hogy egy X lokálisan kompakt topológikus csoportban mindig létezik legalább egy, reguláris μ Haar -féle mérték és ha c egy tetszőleges pozitív valós szám akkoe μ-mellett $c\mu$ is egy reguláris Haar-mérték ugyanazon X-en.

1.6.6. Lebesgue-mérték

Jelölje $\mathbf{R}$ a valós számtengelyt, $\mathbf{P}$ az összes $[a, b)$ alakú, korlátozott intervallumok osztályát, $\mathbf{S}$ pedig a $\mathbf{P}$ által generált σ-gyűrűt és μ a $\mathbf{P}$-n értelmezett halmazfüggvényt úgy, hogy $\mu([a, b)) = b - a$; az $\mathbf{S}$ σ-gyűrű halmazait, a valós számtengely Borel-féle halmazainak nevezzük. Jelölje továbbá $\overline{\mathbf{S}}$ az $E\Delta F = (E-F)\cup(F-E)$ típusú halmazok osztályát ahol $E \in \mathbf{S}$ és $\mu(F) = 0$. Akkor $\overline{\mathbf{S}}$ egy σ-gyűrű és az $\overline{\mu}(E\Delta F) = \mu(E)$ azonossággal definiált $\overline{\mu}$ mértékfüggvényt a μ mértékfüggvény úgynevezett lezártja. Az $\overline{\mathbf{S}}$ σ-gyűrű halmazait a valós számegyenes Lebesgue-mérhető halmazainak nevezzük és a μ mértékfüggvény $\overline{\mu}$ lezártját pedig Lebesgue mértéknek nevezik.

Tétel Ha $(X, \mathbf{S}, \mu)$ és $(Y, \mathbf{T}, \nu)$ σ-véges mértékterek, akkor a λ mérték amely minden $E \subset \mathbf{S} \times \mathbf{T}$ halmazon a

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$$

összefüggéssel defíniált, egy σ-véges mérték és minden mérhető $A \times B$ "téglalap"-ra igaz, hogy

$$\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

(ezen utóbbi összefüggés egyértelműen meghatározza λ-át) ahol $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ és $E^y = \{x : (x, y) \in E\}$ a mértékelméletből ismert metszetek.

2. Történeti áttekintés

Ha a disszertáció tartalmához kulcsszavakat szeretnénk megadni, akkor a következőket sorolhatnánk:permutációk, csoport, csoporthatás halmazon (ami matematikai értelemben a szóban forgó halmaznak szintén egy permutációját jelenti), ekvivalanciareláció (speciálisan kongruenciareláció), Mealy automaták, csoport- és automatahomomorfizmusok, illetve az algebrából ismert kategória fogalma. A matematika-történetben, a permutációkkal kapcsolatos első tanulmányok, feljegyzések még a nyolcadik századot megelőző időkre vezethetők vissza. Ezek a tanulmányok a "Sefer Yetsirah", azaz a Teremtés Könyvében jelentek meg és egy ismeretlen szerzőtől valók. A szerző azt a problémát veti fel, hogy vajon hányféleképpen lehet rendezni a héber nyelv betűit? Igen érdekesnek találja a matematika-történet, hogy teljesen hasonló problémafelvetés (nevezetesen, egy nyelv betűiből alkotott rendezések számának a meghatározása) szerepel az iszlám matematikában is a nyolcadik és a kilencedik században. A tizenharmadik században már a permutáció absztrakt fogalma is megtalálható mindkét, feljebb említett kultúrában. Amint a matematika-történet azt feljegyzi, ebben a században nyert bizonyítást az a tény, miszerint az n-elemű (n véges) halmaz permutációinak száma $n! = 1 * 2 * 3 * ... * n$-el egyenlő. Ennek bizonyítása egyaránt megtalálható Abu-l-'Abbas ibn al-Banna (1256-1321) munkáiban, illetve Levi ben Gerson francia rabbi, matematikus és filozófus munkáiban egyaránt. A tizennyolcadik században Lagrange (1736-1813)-nak és más matematikusok munkásságának köszönhetően a permutáció fogalma, már egy véges halmaznak önmagára való (bijektív) leképezéseként jelenik meg, ahol a véges halmaz elemeit egy adott egyenlet gyökei jelentik. Eme gondolatmenet végén pedig felmerül Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) neves francia matematikus elévülhetetlen érdeme is, aki a permutációelmélet alaptételeit dolgozta ki és ugyancsak tőle származik a permutációnak egyik- a matematikai szakirodalomban megtalálható, jellegzetes zárójeles jelölési módja is. A permutációnak, bijektív függvénykénti értelmezése azért is adott óriási lendületet a matematikának mert a csoport, mint az algebrának egyik leghasznosabbnak bizonyult fogalma (algebrai struktúrája), mielőtt az absztrakt definícióját kapta volna, permutációkat tartalmazó egy belsőműveletes halmazként volt ismert. Példának okáért, a véges csoportok szerkezetével kapcsolatos Sylow tételek eredeti bizonyításaitt, a szerző permutációs csoportokra adta. Peter Ludwig Mejdell Sylow (1832-1918) norvég matematikus 1872-ben publikálta tételeit. Sylow tételei a következők:

Sylow első tétele Legyen G egy véges csoport úgy, hogy $|G| = p^n m$ $m, n \geq 1$ és a p prímszám nem osztója m-nek. Akkor: a) G-nek van egy p^i ($i \in \{1, 2, .., n\}$ számosságú részcsoportja.

b) Minden ilyen p^i számosságú részcsoport normális részcsoportja a p^{i+1} számosságú részcsoportnak, $i \in \{1, 2, 3, .., n-1\}$

Sylow masodik tétele Legyen G egy véges csoport úgy, hogy $|G| = p^n m$, $m, n \geq 1$ és a p prímszám nem osztója m-nek. Ha H_1 és H_2 olyan részcsoportjai G-nek, hogy teljesül az $|H_1| = |H_2| = p^n$ összefüggés (azaz H_1 és H_2 Sylow p-részcsoportok) akkor H_1 és H_2 egymásnak konjugáltjai.

Sylow harmadik tétele Ha $G = p^n m$, $n \geq 1$, a p prímszám nem osztója m-nek akkor a Sylow p-részcsoportok száma kongruens 1 mod p és osztója $|G|$-nek.

Láthatjuk, hogy a szubnormállánc fogalma megtalálható ezekben a tételekben; a másik fontos dolog, hogy a konjugálás (mint a csoporthatásnak, és így a permutációnak, speciális esete) úgyszintén megtalálható Sylow tételeiben. Sylow szakmai karrierjének túlnyomó részét középiskolai tanárként élte meg a norvégiai Haldenben. Nyolc évet életéből arra szentelt, hogy szerkessze, összegyűjtse honfitársa, Niels Henrik Abel (1802-1829) munkásságát, eredményeit.

A csoport absztrakt (axiomatikus) definícióját Walter Van Dyck 1882-ben adta meg. Öt évvel később (1887) Georg Frobenius újra bizonyítja a Sylow tételeket absztrakt csoportokra azzal a megjegyzéssel, hogy minden csoport permutációs csoportként fogható fel. Utóbbi eredmény -miszerint minden absztrakt csoport egy permutációs csoporttal izomorf- mint ismeretes, Arthur Cayley (1821-1895)-től származik, aki 1878-ban négy csoportelméleti tételt publikált és ezen cikkek egyikében publikálta a fent említett tételét. A normális részcsoport fogalmát Evariste Galois (1811-1832) francia matematikus vezette be a matematikába (pontosabban az algebrába) 1831-ben abból a célból, hogy megoldást találjon arra a problémára, miszerint megoldható-e gyökmódszerrel (megoldóképlettel) egy tetszőleges, ötödfokú racionális együtthatójú polinomegyenlet. Ma már tudjuk, hogy a válasz nemleges. A matematikatörténetben 1545-ös évre tehető az az esemény, amikor Girolamo Cardano az Ars Magna-ban elsőként publikálta a harmadfokú egyenletek megoldóképletét, noha ismert tény, hogy eme felfedezés részben Scipione del Ferro és Niccolo Tartaglia-nak is köszönhető. A negyedfokú egyenletek megoldóképletét Lodovico Ferrari adta meg aki Cardanonak tanítványa volt. Az ötödfokú egyenletek általános esetére vonatkozó megoldóképletnek a nem létezésére vonatkozó nagy áttörés Paolo Ruffininak (1765-1822) köszönhető, aki 1799-ben publikálta bizonyítását. Dolgozatában az S_5 csoport összes részcsoportját tárja fel és azt vizsgálja, hogy ezen részcsoportok hogyan hatnak az egyenlet gyökeinek racionális függvényeire. Bizonyításaiban hiányosságok is vannak. A teljes bizonyítást Niels Abel 1824 és 1826 évek között publikálta, kiegészítvén Ruffini bizonyításait és ezzel lezárt egy, több évszázados problémát. Eme disszertációban bemutatott eredmények egy részének szempontjából, a normális részcsoport fogalmának felfedezése egyúttal annak a fontos fogalomnak a bevezetését is jelentette, amit ma úgy nevezünk, hogy kongruenciareláció. Ugyanis, amikor Lagrange bebizonyította a véges csoportokra vonatkozó tételét, miszerint

Lagrange tétele Egy véges G csoport H részcsoportjának számossága mindig osztója a G számosságának

Lagrange azt a tényt használta fel, hogy egy H részcsoport egy $\sim_H$ ekvivalenciarelációt indukál a G csoporton nevezetesen: $g_1 \sim_H g_2$ $(g_1, g_2 \in G)$ akkor és csak akkor ha $g_1^{-1}g_2 \in H$ azaz $g_2 \in g_1H$. Bizonyítást nyert, hogy a $\sim_H$ reláció (diszjunkt) osztályainak számossága egyenlő a H részcsoport számosságával, amiből máris következik a Lagrange tételében megfogalmazott állítás. Ha a H részcsoport normális részcsoport, azaz $gH = Hg$ minden $g \in G$ (ezen utóbbi definicióját a normális részcsoportnak Camille Jordan francia algebrista adta, aki úgyszintén elsőként definiálta az egyszerű csoportot is) akkor a $\sim_H$ ekvivalenciareláció kongruenciareláció lesz, ami -mint ismeretes -azt jelenti, hogy akárhogyan is választunk ki egy-egy elemet a $g_1H = Hg_1$ és a $g_2H = Hg_2$ osztályokból a két kiválasztott elem szorzata a $g_1g_2H = Hg_1g_2$ osztályból való. A normális részcsoport és a kongruenciareláció (mint az ekvivalenciareláció speciális esete) hatalmas lendületet adott a matematika további fejlődésének: lehetővé vált a faktorcsoport fogalmának a felfedezése, vagy a későbbiekben az unér algebrában (ezen belül -az automataelméletben faktorautomata fogalma illetve csoport -és automatahomomorfizmusok) fogalmának a bevezetése, hogy egy néhány fontos példát említsünk. A továbbiakban tehát érdemesnek tartjuk megemlíteni (messzemenően a teljesség igénye nélkül) az automataelmélet irodalmában megtalálható néhány kongruenciarelációt. Az automata állapothalmazán értelmezett kongruenciareláció a faktorhalmazt indukálja (azaz -amint ismert az osztályok halmazát) és ez a faktorhalmaz szolgál állapothalmazként az automatahomomorfizmus által kapott új automatában (a homomorfkép automatában). Az automataelméletben az állapothalmazon értelmezett ekvivalenciarelációt ρ-val, az általa indukált osztályokat az A állapothalmazon pedig A halmaz osztályozásának nevezik és a C_ρ jelölést szokás használni. A C_ρ osztályozást a szakirodalomban kompatibilisnek nevezik, ha a fent említett ekvivalenciareláció egy kongruenciareláció. Az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata A állapothalmazán értelmezett ρ ekvivalenciareláció kongruenciareláció (és ennek megfelelően a C_ρ osztályozás pedig egy kompatibilis osztályozás), ha teljesülnek a következő feltételek: ha $a, b \in A$ és $a\rho b$ azaz $b \in C_\rho[a]$ (ahol a $C_\rho[a]$ az a elem osztályát jelöli ρ kongruencia szerint) akkor tetszőleges $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta(a, x)\rho\delta(b, x)$$

és

$$\gamma(a, x) = \gamma(b, x)$$

amit szöveggel úgy lehetne megfogalmazni, hogy az azonos osztályhoz tartozó állapotokat (a és b) szintén közös osztályhoz tartozó $\delta(a, x)$ és $\delta(b, x)$ állapotokba képezi le az átmeneti függvény minden $x \in X$ bemenő jelre illetve a kimeneti függvény ugyanazt a kimenő jelet adja. Ilyenkor-mint ismert-értelmezhető az úgynevezett faktorautomata. Erre a $(\overline{A}, X, Y, \overline{\delta}, \overline{\gamma})$ jelölés használt a szakirodalomban, ahol $\overline{A} = \{C_\rho[a] : a \in A\}$ az A/ρ faktorhalmaz és ez lesz a faktorautomata állapotainak a halmaza, X és Y változatlanul a bemenő, illetve kimenő jelek halmaza. Az új átmeneti ($\overline{\delta}$) és kimeneti ($\overline{\gamma}$) függvények értelmezése pedig:

$$\overline{\delta}(C_\rho[a], x) = C_\rho[\delta(a, x)]$$

$$\overline{\gamma}(C_\rho[a], x) = \gamma(a, x)$$

azaz $\overline{\delta}$ az $a \in A$ állapot osztályát a $\delta(a, x)$ állapot osztályára képezi le és hasonló állítás érvényes a kimenő jelekre. Az algebrából ismert úgynevezett kanonikus leképezés, (a halmazelemnek megfelelteti az őt tartalmazó osztályt) egy állapothomomorfizmust valósít meg az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ és a $(\overline{A}, X, Y, \overline{\delta}, \overline{\gamma})$ faktorautomata között. Amint ismert az automataelmélet szakirodalmából a Mealy-automatákra is (speciális esetként) megfogalmazható a Homomorfia Tétel:

Tétel Ha az $(A', X', Y', \delta', \gamma')$ automata állapothomomorf képe az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ automatának, akkor az állapothomomorfizmust megtestesítő függvény egy kongruencia relációt (és így egy kompatibilis osztályozást) indukál az A halmazon aszerint, hogy $b \in C[a]$ akkor és csak akkor ha az a és b állapothomomorfizmus szerinti képük azonos és a C által indukált faktoraautomata izomorf lesz az $(A', X', Y', \delta', \gamma')$ automatával.

Mielőtt rátérnénk az automataelmélet szakirodalmában megtalálható konkrét kongruenciarelációk megemlítésére, szeretnénk előbb feleleveníteni néhány fogalmat és jelölést a szakirodalomból. Ha X egy véges vagy végtelen halmaz, melynek elemeit betűknek nevezzük, akkor X elemeiből képezett véges láncokat X-beli szavaknak nevezik. A nullhosszúságú szót üres szónak nevezik és λ-val jelölik. Az X-beli szavak halmazát (az üres szóval együtt)

X^*-gal jelölik. Ha λ-át nem veszik be, akkor X^+-al jelölik az X-beli szavak halmazát. Az $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatának minden $a \in A$ állapotához hozzárendelnek egy leképezést amit ϕ_a-val jelölnek a következőképpen:

$$\phi_a : X^* \to Y^*$$

$$\phi_a(p) = \gamma(a, p)$$

minden $p \in X^*$. Ezt a leképezést az a állapot által indukált leképezésnek nevezik. Iniciális $(A, a_o, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata esetén (az automata működésének kezdő pillanatában az a_o kezdő állapotban van) az a_o kezdőállapot által indukált leképezést az automata leképezésének nevezik. Az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ automata állapotai által indukált $F = \{\phi_a | a \in A\}$ leképezések halmazát a szóban forgó automata által indukált leképezések családjának nevezik a szakirodalomban. Egyik konkrét kongruenciareláció, amellyel az automataelmélet szakirodalmában találkozunk, az azzal a problémával kapcsolatos, hogy hogyan lehet megadni egy véges automatához tartozó, azt a minimális állapotszámú automatát (amit az előző automatához tartozó redukált automatának neveznek), amely ugyanazt a leképezés családot állítja elő, mint az eredeti automata. A szakirodalomban, a redukált automatát előállító eljárást minimalizálásnak, a redukált automatát pedig minimális automatának nevezik. A véges automaták minimalizálására vonatkozó algoritmust D.D. Aufenkamp és F.E. Hohn dolgozták ki és Aufenkamp-Hohn Minimalizációs Algoritmusként ismert az automataelméletben. Az általuk kidolgozott algoritmus azon alapszik, hogy az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ automata A halmazán értelmeztek egy ekvivalenciarelációt a következőképpen: $a, b \in A$, $a\rho b$ akkor és csak akkor ha $\gamma(a, p) = \gamma(b, p)$ minden $p \in X^*$. Az előzőekben, a Mealy automaták állapothalmazán értelmezett kongruenciareláció és a fenti ρ definíciójából következik, hogy ez a ρ reláció egy kongruenciareláció. A redukált automata nem lesz más, mint a ρ kongruencia szerinti faktorautomata. Az Aufenkamp-Hohn féle Algoritmus lényege az, hogy a ρ kongruenciarelációhoz tartozó C kompatibilis osztályozást több lépésben konstruálja meg azáltal, hogy kompatibilis osztályozások $C_1, C_2, ...$ véges sorozatát definiálja (a $C_1, C_2, ...$ sorozat végessége végső soron azzal függ össze, hogy az $(A, X, Y, \delta, \gamma)$ Mealy-automata állapotainak A halmaza véges). Az algoritmus szerint a C_i-k definicoója a következő:

$$\forall a, b \in A : \; C_1[a] = C_1[b]$$

akkor és csak akkor ha $\forall x \in X \; \gamma(a, x) = \gamma(b, x)$.

$$i \geq 1 \; : C_{i+1}[a] = C_{i+1}[b]$$

akkor és csak akkor ha $C_i[a] = C_i[b]$ és $C_i[\delta(a, x)] = C_i[\delta(b, x)]$ minden $x \in X$. A számítástudományban (amelynek az automataelmélet nyilvánvalóan részét képezi) nemcsak automaták állapothalmazain definiáltak kongruenciarelációkat, hanem az X-halmaz betűiből képezett X-béli szavak X^* halmazán (amely mint ismert egy egységelemes félcsoport, λ az üres szó képezi az egységelemet). Az X^* halmazon értelmezett ρ ekvivalenciarelációt jobbkongruenciának nevezik, ha tetszőleges $p, q, r \in X^*$-ra érvényesül a következő implikáció: $p\rho q$-ból következik $pr\rho qr$. Hasonlóan definiálják a balkongruenciát is: $p\rho q$-ból következik $rp\rho rq$. Ha a ρ reláció egyidejűleg balkongruencia is és jobbkongruencia is, akkor ρ-t az X^*-on definiált kongruenciának nevezik. Végül említést teszünk a Myhill-Neroda féle kongruenciára is, amelyet az X^* monoidon definiálnak annak kapcsán, hogy $p, q \in X^*$ akkor és csak akkor vannak egy közös osztályban ha egy kimenő jel nélküli iniciális véges automata bármely állapotát, a p és q szavak, az automatának ugyanabba az állapotába transzformálják (az átmeneti függvény által). Ebben a disszertációban, Mealy-automata állapothalmazán definiált kongruenciarelációt, az állapothalmazon tranzitíven ható csoport valódi normális részcsoportjának elemei hatása indukálja. Az osztályok közötti átmenetet-a fizikából átvett szóvalkölcsönhatásnak fogjuk nevezni. Hangsúlyozzuk azonban, hogy tisztán matematikai fogalomról van szó, csak az elnevezést kölcsönöztük a fizikából. Az elnevezést a következőképpen indokoljuk. Az osztályok közötii átmenet a kanonikus függvény értékének nyilvánvaló változását erdményezi, hasonlóan egy kölcsönhatásban lévő fizikai rendszer esetéhez, amikor a rendszer állapotát jellemző valamilyen fizikai mennyiség változik. Egy másik szempont az az, hogy a kanonokus függvényt, éppen az osztályokat létrehozó normális részcsoport elemeinek hatása hagyja invariánsan, hasonlóan Emmy Noether (1882-1935) tételéhez miszerint a megmaradási tételek a fizikában mindig valamilyen szimmetriának a következményei (a mi esetünkben az osztályokat létrehozó normális részcsoport testesíti meg a megfelelő szimmetriát). Példának okáért, Emmy Noether tételéből következik-az elméleti fizikából ismert tény-, hogy a tér homogenitásának következménye a lendületmegmaradásának a törvénye, a tér izotrópiájából a perdület megmaradásának törvénye, az idő homogenitásából az energia megmaradásának a törvénye. A kategóriaelmélet születése, a matematika különböző fejezeteiből merített példák nyomán történhetett meg. Mint ismert a szakirodalomból a kategóriaelmélet születéséhez olyan, a matematikából merített példák vezettek el, amely példák közös vonása olyan matematikai szerkezetek feltárása, melyekben úgynevezett objektumok és az azok között létesíthető leképezések található. Például csoportok -mint objektumok-és közöttük definiált homomorfizmusok- mint leképezések; a példák lajstroma nagyon gazdag. matematikatörténeti szempontból, ennek a viszonylag fiatal ágazatnak úttörői Eilenberg és McLane voltak, akik 1945-ben publikálták a "General theory of natural equivalences" című dolgozatukat, amellyel megalapozták a kategóriaelméletet. Ebben a disszertációban két kategóriát definiálunk nevezetesen egy G-csoport hatásai által indukált $C^{\sim}(x)$ osztály az X halmazon ($x \in X$, tetszőleges) és a $C^{\sim}(x)$ elemeihez tartozó $C^{\cong}(G_x)$ osztály, azaz a stabilizátorok osztálya. Az első kategóriában a morfizmusokat a G-csoport elemeinek hatásai valósítják meg míg a másik kategóriában a morfizmusokat a G csoport elemeivel képezett konjúgációk. Végül pedig egy funktort definiálunk a két kategória között: a funktor egyik leképezése a $C^{\sim}(x)$ és $C^{\cong}(G_x)$ halmazok elemeit felelteti meg egymásnak ($x \in C^{\sim}(x)$ elemhez hozzárendeli a $G_x \in C^{\cong}(G_x)$ stabilizátorát), míg a definiált funktor másik leképezése a két kategóriához tartozó morfizmusok közötti megfeleltetésért a felelős. Az algebrából ismert stabilizátor fogalma végső soron a szimmetria fogalmát hordozza magában: valamilyen matematikai objektum (legyen az egy alakzat vagy egy halmaz stb.) invarianciája valamilyen transzformációkkal szemben. Egy szabályos sokszög szimmetriáját egy véges csoport testesíti meg (ismert, hogy a szabályos n-szög invariáns a $2n$ elemet tartalmazó D_n diéder-csoport transzformációival szemben). Mit mondhatunk a kör szimmetriájáról? A kört nemcsak $k2\pi/n$ ($k = 0, 1, ..., n-1$) szöggel forgathatjuk el a középpontján áthaladó és a körlapra merőleges tengely körül, hogy önmagába transzformálodjon hanem végtelenül kicsiny szöggel is; ugyanakkor minden átmérője szimmetriatengelye a körnek. Tehát a kör szimmetriáját megvalósító transzformációs csoport egy folytonos csoport. A topológia a matematikának az a fejezete, amely az alakzatok azon tulajdonságait tanulmányozza, amelyek megmaradnak (invariánsak) az úgynevezett homeomorf (más szóval topologikus) transzformációkkal szemben (ezek olyan transzformációk (leképezések), amelyek bijektívek, folytonosak és az inverzük is folytonos). Az első eredmények Leonhard Euler (1707-1783)-től származnak az úgynevezett poliéder-tétel megfogalmazásával:

$$n_e + n_f = n_k + 2$$

ahol n_e, n_f, n_k rendre a csúcsok, határolólapok illetve az élek számát jelölik. A matematikai szakirodalomban az $n_e + n_f - n_k$ számot Euler-féle karakterisztikának nevezik. Mint ismert az Euler-féle karakterisztika 2-vel egyenlő minden olyan alakzatra amely topologikusan ekvivalens a gömbbel. Később Louis Poinsot (1777-1859) francia matematikus elsőként általánosította Euler tételét 1810-ben publikált "Sur les polygones et les polyédres" című munkájában amelyben négy szabályos csillagtesttel foglalkozik (ezeket a szakirodalom Poinsot-testeknek nevezi) és amelyekre Poinsot megállapítja, hogy az Euler-féle karakterisztika -6-al egyenlő. Látni tehát, hogy a Poinsot-testek és azok az alakzatok amelyek Euler-féle karakterisztikája 2 (ilyen például a kocka vagy a szabályos tetraéder) topologiailag nem ekvivalensek, hiszen topologikus transzformációkkal szemben az Euler-féle karakterisztika-amint ez ismert-invariáns kell legyen. Voltaképpen ezekből topologiatörténeti példákból is felismerhetjük az ekvivalenciarelációk fontosságát:a 2-es Euler-féle karakterisztikájú alakzatokat egy közös osztályba míg a Poinsot-testeket egy másik osztályba sorolhatjuk. Topologikus leképezésekkel csak osztályon belül maradunk, osztályok közötti átmenet nem valósítható meg topologikus leképezésekkel: ahhoz amolyan "kölcsönhatás"-szerű leképezésre van szükség, amely "átvisz" egyik osztályból a másikba. Ílyen szemlélettel ezeket a példákat is kapcsolatba hozhatjuk azokkal a gondolatokkal, amelyekről már szó esett az előbbiekben annak kapcsán, hogy Mealy-automaták állapothalmazán indukált kongruenciareláció osztályai közötti átmenetet nevezzük kölcsönhatásnak ebben a disszertációban. Mint ismert az általános topológia abból a megfontolásból született, hogy a folytonosság és a kongruencia fogalmát illetve minden velük kapcsolatos matematikai eredményt ne csak a számegyenesen értelmezett egyváltozós függvényekre, illetve a síkon értelmezett kétváltozós függvényekre lehessen értelmezni, hanem kivánalom volt e két fent említett fogalom és velük kapcsolatos eredményeknek a tetszőleges halmazokra való általánosítása. E tekintetben úttörő munkát végzett Maurice René Fréchet (1878-1973) aki 1903-ban elsőként vezette be a metrikus tér fogalmát a matematikában. Ezzel máris megtörtént az a nagy előrelépés, hogy a folytonosság és a kongruencia fogalmát metrikus terekben értelmezte. Elokvens példa metrikus térre a Hilbert-tér (David Hilbert (1862-1943) világhírű német matematikus tiszteletére). A tér pontjai olyan $\{x_i\}$ valós számsorozatok amelyekre igaz, hogy az $\Sigma_{i=1}^{\infty} x_i^2$ sor konvergens, így a tér két pontja közötti távolságot a következőképpen definiálják:

$$d(x, y) = (\Sigma_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2)^{1/2}$$

ahol $x = \{x_i\}$ és $y = \{y_i\}$ a térnek a szóban forgó két pontja.Riesz Frigyes (1880-1956) magyar származású világhírű matematikus elsőként fejlesztette tovább a metrikus terek elméletét. A következő nagy áttörés Hausdorff német matematikusnak munkásságának köszönhető aki felismerte, hogy a szóban forgó általánosítás tovább folytatható, amikor a konvergenciát és a folytonosságot a környezet bevezetésével értelmezte. Hausdorffnak köszönhető az absztrakt topologikus tér fogalmának a bevezetése (1914-ben) ezért őt tekintik az általános topológia megalalpozójának. Hausdorff-nak, a topologikus térre vonatkozó definíciója (és amely a környezet fogalmán alapszik) a következő:

Definíció (Topologikus tér) Egy S halmaz topologikus teret alkot ha minden x eleméhez hozzárendelnek, az S halmaznak részhalmazainak olyan rendszerét (ezek az x elem környezetei) amely rendszer halmazai megfelelnek az alábbi axiómáknak:

a) az x elem megtalálható minden környezetében.

b) x elem két környezetének metszete is egy környezete x-nek.

c) ha U_x halmaz x-nek egy környezete úgy, hogy $U_x \subseteq V$ akkor V is egy környezete x-nek.

d) ha $y \in U_x$ ami x-nek egy környezete akkor létezik y-nak egy olyan V_y környezete amelyre fennáll, hogy$V_y \subseteq U_x$

A matematikusok hozzáadtak a fenti axiómákhoz úgynevezett szétválasztási axiómákat. A teljesség igénye nélkül három ilyen példát említünk meg:

Kolmogorov-féle szétválasztási axióma: ha $x, y \in S$ és $x \neq y$ akkor valamelyik pontnak van olyan környezete amely nem tartalmazza a másik pontot.

Fréchet-féle szétválasztási axióma: ha $x, y \in S$ és $x \neq y$ akkor van az x-nek olyan környezete amely nem tartalmazza az y-t és fordítva.

Hausdorff-féle szétválsztási axióma: ha $x, y \in S$ és $x \neq y$ akkor van x-nek egy U_x és y-nak egy V_y környezete úgy, hogy U_x és V_y diszjunktak.

Amint ismert a topológia szakirodalmából, a felsorolt három példában megadott szétválasztásu axiómával kiegészített topologikus tereket rendre T_o, T_1 és T_2-topológiának nevezik és viszonyuk: T_2-ből következik T_1 és T_1-ből következik a T_o-topológia.

Marius Sophus Lie (1842-1899) norvég matematikus vizsgélta a folytonos csoportokat. Példának okáért Lie-től származik a folytonos transzformációcsoport fogalmának a megalkotása (1873). Felix Christian Klein (1849-1925) német matematikus ismerte fel elsőként ugyancsak ezekben az években, hogy az egyes geometriatípusokhoz egy-egy folytonos transzformációcsoport tartozik és azt, hogy a geometria tárgya, az adott geometriának a hozzá tartozó folytonos transzformációcsoporttal szembeni invariáns tulajdonságainak a kutatása. A folytonos csoportok további általánosításainak állomásaiként említésre méltó Georg Bernard Dantzig (1914-) coloradoi matematikus munkássága, aminek köszönhetően általánosításra kerül a Lie-féle folytonos csoport. Végül pedig a topologikus csoport megjelenése jelenti a következő láncszemet eme matematikatörténeti gondolatmenetben. Ezen a területen is büszkék lehetünk világhírű magyar származású matematikusok eredményeire: Neumann János (1903-1957) aki egy integrálelméletet dolgozott ki olyan kompakt topologikus csoportokon amelyek eleget tesznek a megszámlálhatóság második axiómájának. Haar Alfréd (1885-1933) lokálisan kompakt topologikus csoportokon konstruált meg egy- a tiszteletére elnevezett- mértékfüggvényt. Mértékelméletből ismert eredmények :

Tétel Minden lokálisan kompakt topologikus csoporton létezik legalább egy reguláris Haar-féle mértékfüggvény.

Tétel Ha μ és ν két reguláris mértékfüggvény az X lokálisan kompakt csoporton akkor létezik egy c pozitív valós szám úgy, hogy minden Borel-féle

E halmazra fennáll az

$$\mu(E) = c\nu(E)$$

egyenlőség.

Haar Alfréd és Riesz Frigyes 1922-ben alapították a Szegeden megjelenő Acta Stientiarum Mathematicarum című folyóiratot.

Személyes tapasztalatom gyanánt szeretném megjegyezni, hogy az izoperimetrikus probléma (amely a variációszámítás első, híres problémái közé tartozott, még az ókori görögöghöz vezethető vissza) és annak megoldása, számomra egy új probléma felvetésének a lehetőségét hordozta magában, nevezetesen: a szimmetria és a szélsőérték közötti kapcsolatnak a problémáját. Úgy gondoltam, hogy léteznie kell egy elvnek, amely feltárja eme szoros kapcsolatot és amely speciális esetként tartalmazza az izoperimetrikus problémát. A variációszámítás elnevezés Lagrange-tól származik. A matematika e fejezetét, a funkciónálanalízis részének tekintik. Adott egy funkciónál, amely például függhet egy egyvátozós függvénytől, annak első illetve esetleg magasabb rendű deriváltjaitól és a függvény változójától expliciten is. A feladat az, hogy megtalálni azt a konkrét függvényt, amelyre az adott funkciónál (problémától függően) minimum vagy maximum értéket vesz fel. Ílyen probléma volt a Johann Bernoulli által felvetett úgynevezett brachisztokron-feladat; a feladatban Johann Bernoulli azt a célt tűzte ki magának, hogy megadja két, különböző magasságban, nem azonos függőlegesben levő pontot összekötő görbe egyenletét, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy csupán a gravitációs erő hatására a görbén mozgó anyagi pont a lehető legrövídebb idő alatt érjen a magasabb pontból az alacsonyabban levő pontba. Lagrange és Euler egy differenciálegyenlet megoldására vezették vissza a variációszámítási problémákat: a szélsőértékre vonatkozó, a differenciálszámítás elméletéből ismert eredményeket alkalmazták. Eme disszertáció "A szimmetria-szélsőérték elve" című fejezetében azt kiséreltük meg, hogy a szimmetria és a szélsőérték kapcsolatát egy monoton növekvő számsorozattal adjuk meg, amely sorozat a következő tulajdonsággal bír: a sorozat tagjai valamilyen mértékfüggvénynek, jólmeghatározott stabilizátorral rendelkező halmazon vett értékei, a sorozat indexének a növelésével növekszik a halmazok szimmetriája (egyre bővűlő stabilizátorok) és a rajtuk számított mérték értéke is. Speciálisan, tekintjük az azonos kerületű, 3.2^n oldalú szabályos sokszögeket és megmutatjuk, hogy ezek területe egy szigorúan növekvő sorozatot alkotnak miközben a

$$D_3 \subset D_{3.2^1} \subset D_{3.2^2} \subset ... \subset D_{3.2^n} \subset ...\overline{H} = \cup_{j=0}^{\infty} D_{3.2^j}$$

növekvő szimmetriasorozat a kör $\overline{H}$ szimmetriájába torkollik. Általunk bemutatott eljárás előnye, hogy nincs szükség a differenciálszámítás módszereire.

3. Csoporthatások halmazokon és automataelmélet

3.1. Bevezetés

Ez a fejezet három alfejezetből áll, mely alfejezetek célkitűzései rendre a következök: **a)** A bevezető részben, az **1.1.9 A stabilizátor**-címü paragrafusban említett fogalmak közötti összefüggések további részletezéséről lesz szó; **b)** csoport hatások halmazokon és kategóriaelmélet kapcsolatának a vizsgálata, illetve **c)** az X halmazra úgy tekintünk mint egy fizikai rendszer (automata) összes állapotának a halmazára, javasoljuk a kölcsönhatás fogalmát a rendszer számára és végül egy princípium megfogalmazására kerül sor, amely princípium uralja a fent említett kölcsönhatási folyamatot.

A kölcsönhatásnak, ebben a disszertációban megadott megközelítését lehet tisztán (önálló) matematikai fogalomnak is tekinteni, de lehet ugyanakkor fizikainak is, tekintettel arra, hogy a fentebb említett princípium a fizikából ismert szimmetriasérülés gondolatát is tartalmazza (a disszertáció során a hangsúly a matematikai értelmezésen van: itt arra gondolok, hogy ha X egy G-halmaz és G-nek egy N normális részcsoportja az X halmazon gyakorolt hatásaival indukálja az X-en az $\sim_N$ kongruenciarelációt, akkor G-nek egy olyan hatása, amely a $\sim_N$ kongruenciareláció különböző osztályaihoz tartozó X-béli elemeket "köt össze", szimmetriasérülést valósit meg, nevezetesen az N csoport által képviselt szimmetriának a sérülését; ilyenkor, matematikailag adódik, hogy az automata a homomorf automatává alakul át (új rendszer) és a sérülő szimmetria beágyazódik (beépül) az új rendszer állapotainak a stabilizátorába (más szóval szimmetriájába) -amint ez bizonyítást nyer a későbbiek során). Itt érdemes viszont egy mondat erejéig megemlíteni azt, hogy ez a beágyazódás (mint matematikai tény, törvényszerűség) összhangban van a fizikából ismert szimmetriasérüléses esetekkel. Ebben a disszertációban a kölcsönhatás a következő megfontolásból nyer értelmezést (később sor kerül a pontos formális definícióra): a rendszer kölcsönhatásban vesz részt, ha valamilyen f fizikai mennyiség értéke változik (azaz, f a rendszer állapotainak a halmazán értelmezett függvény, a kölcsönhatás pedig a $Ker f =\sim_N$ kongruenciareláció osztályai közötti átmenetként értelmezhető). Az a) és b) részben S_X jelöli az X halmaz teljes szimmetrikus csoportját míg c) részben S_X-ről nem feltételezzük, hogy tartalmazza az X halmaz összes permutációját (ennek ellenére továbbra is használjuk a szimmetrikus csoport elnevezést) hanem csak annyit kell feltételezni, hogy tranzitíven hat X-en és van egy nem triviális kompozíciólánca (azaz S_X nem egyszerű csoport). Az S_X-egyszerű csoport esete is említést nyer a disszertációban bemutatott kölcsönhatáselméleten belül.

3.2. Csoporthatások halmazokon elmélettel kapcsolatos eredmények

1. Tétel

Legyen X egy G-halmaz és x egy tetszőleges eleme. Ha $N(G_x) \subset G$ akkor $N(G_{x'}) \subset G$ $\forall x' \in C^{\sim}(x)$. Speciálisan ha G véges akkor a $G_x \subset N(G_x)$ összefüggés a hasonló $G_{x'} \subset N(G_{x'})$ összefüggést implikálja és $G_x = N(G_x)$-ből az $G_{x'} = N(G_{x'})$ $\forall x' \in C^{\sim}(x)$ összefüggés következik.

Bizonyítás

Ha $N(G_{x'}) = G$ akkor $G_{x'}$ normális részcsoportja G-nek emiatt $G_x = g^{-1}G_{x'}g = G_{x'}$ $(x' = gx)$ így $N(G_x) = G$ ami ellentmond annak, hogy $N(G_x)$ valódi részcsoportja G-nek. Legyen G véges. Ha $G_x \subset N(G_x)$ és $G_{x'} = N(G_{x'})$ akkor $G_x \cong G_{x'} \cong N(G_{x'}) \cong N(G_x)$ (itt felhasználásra kerültek azon ismert eredményeket miszerint G_x és $G_{x'}$ egymásnak konjugáltjai illetve $N(G_x)$ és $N(G_{x'})$ úgyszintén egymásnak konjugáltjai). Viszont nincs olyan véges csoport amely valódi részcsoportjával lenne izomorf. Ezért $G_{x'} \subset N(G_{x'})$ úgyszintén. Ha $G_x = N(G_x)$ akkor $G_{x'} = N(G_{x'})$ összefüggés is teljesül. $\square$

2. Tétel

Legyen X egy G-halmaz és x egy tetszőleges eleme. Feltételezzük, hogy $G_x = N(G_x) \subset G$ (ami egyben azt is jelenti a **1.1.9 b)** paragrafusa alapján, hogy $C^{\sim}(x)$ számossága nagyobb mint 1) továbbá legyen $x' \in C^{\sim}(x), x' \neq x$ akkor $G_x \neq G_{x'}$. Ha G véges akkor $G_{x_1} \neq G_{x_2} \forall x_1, x_2 \in C^{\sim}(x), x_1 \neq x_2$.

Bizonyítás

Ha $G_x = N(G_x)$ akkor x az egyetlen olyan elem $C^{\sim}(x)$-ből amelyre igaz az, hogy $g_x x = x \forall g_x \in G_x$. Viszont ha $G_x = G_{x'}$ akkor $G_x = G_x \cap G_{x'}$ azaz minden G_x-béli g_x elem x'-t is invariánsan hagyja. Mivel $x' \neq x$ ezért $G_{x'} \neq G_x$. A tétel második része (vagyis véges G esetére,$G_{x_1} \neq G_{x_2}$ ha $x_1 \neq x_2 \forall x_1, x_2 \in C^{\sim}(x)$) következik a tétel első részéből és az **1. Tétel**-ből. $\square$

Következmény

Ha S_X véges és ha $G_x = N(G_x)$ az S_X valamilyen tetszőleges stabilizátor részcsoportjára (x tetszőleges X-ben) akkor $G_x \neq G_{x'} \forall x, x' \in X,\ x \neq x'$ (ahol G_x és $G_{x'}$ továbbra is az x illetve x' elemek stabilizátorait jelölik).

Bizonyítás A **2. Tétel** második részéből következik a $G = S_X$ és $C^{\sim}(x) = X$ választás mellett. $\square$

Az előzőek alapján G_x izomorf $G_{x'}$ ha $x' \in C^{\sim}(x)$. Mivel az izomorfizmus, $\cong$, egy ekvivalencia reláció a csoportok halmazán, egy megfeleletetés létesíthető $C^{\sim}(x)$ (mint X halmaznak osztálya) és $C^{\cong}(G_x)$ (mint a G csoport részcsoportjainak halmazán értelmezett osztály) között ($gg_x x = x'$ $\forall gg_x \in gG_x,\ gx = x',\ g \in G$) egy Φ_x függvénnyel a következőképpen :

$$x \longrightarrow^{gg_x} x' \text{ a } C^{\sim}(x) - \text{ben}$$

$$G_x \longrightarrow^{f_{gg_x}} G_{x'} \text{ a } C^{\cong}(G_x) - \text{ben}$$

$$\Phi_x(x^*) = G_{x^*} \text{ ahol } x^* \in C^{\sim}(x) \text{ illetve } G_{x^*} \in C^{\cong}(G_x)$$

(könnyen belátható, hogy a gg_x elemhez tartozó

$$f_{gg_x} : G_x \to G_{x'},\ f(g_x^*) = (gg_x)g_x^*(gg_x)^{-1}$$

leképezés egy izomorfizmus).

Érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor Φ_x bijekció. Előzőek alapján Φ_x akkor és csak akkor bijekció ha minden $x^* \in C^{\sim}(x)$-re igaz az, hogy $G_{x^*} = N(G_{x^*})$. Ha G véges, Φ_x akkor és csak akkor bijekció ha létezik $x^* \in C^{\sim}(x)$ úgy, hogy $G_{x^*} = N(G_{x^*})$.

Mint minden függvény esetén Φ_x-re is értelmezhető a $C^{\sim}(x)$ halmazon a $Ker\Phi_x$ ekvivalencia reláció nevezetesen $x_1 Ker\Phi_x x_2$ akkor és csak akkor, ha $\Phi_x(x_1) = \Phi_x(x_2),\ (x_1, x_2 \in C^{\sim}(x))$. Jelölje $\mathbf{G}$, a G csoport összes G_x stabilizátor részcsoportjának a halmazát és Φ^* egy függvényt a következőképpen definiálva:

$$\Phi^*\ :\ X \longrightarrow \mathbf{G}\ ;\ y \in X$$

$$\Phi^*(y) = \Phi_{x_1}(y) \text{ ha } y \in C^{\sim}(x_1),\ \Phi^*(y) = \Phi_{x_2}(y) \text{ ha } y \in C^{\sim}(x_2)\ ...$$

ahol $x_1, x_2 ...$ a $\sim$ reláció különböző osztályaiból valóak. Ha $x, y \in X$ akkor definiálhatjuk $Ker\Phi^*$ relációt: $xKer\Phi^* y$ akkor és csak akkor ha $x \sim y$ és $\Phi_x(x) = \Phi_x(y)$ (azaz ha $y \in C^{\sim}(x)$ és $\Phi_x(x) = \Phi_x(y)$). Nyílvánvaló, hogy $Ker\Phi^* \subseteq \sim$. Ha teljesül a $G_x \subseteq N(G_x) = G$ feltétel minden $C^{\sim}(x)$ osztályra akkor $Ker\Phi^* = \sim$. Viszont, ha $G_{x^*} = N(G_{x^*}) \subsetneq G$ feltétel teljesül az $\sim$ reláció minden osztályára akkor **2. Tétel**-ből következik $xKer\Phi^* y \leftrightarrow x = y\ \forall x, y \in X$ (azaz $Ker\Phi^*$ az X halmaz identikus relációja). Különben

$$\text{identikus reláció} \subset Ker\Phi^* \subset \sim$$

A $G = S_X$ esetben (azaz $C^{\sim}(x) = X$) a **2. Tétel** következményéből nyerjük a következő tételt.

3. Tétel

Legyen $\mathbf{G}$ a G csoport összes G_x stabilizátor részcsoportjának halmaza. Az X halmaz akkor és csak akkor ágyazható $\mathbf{G}$-be ha $G_x = N(G_x) \subset G$ minden $x \in X$-re. Ha S_X véges az X halmaz akkor és csak akkor ágyazható $\mathbf{G}$-be ha $G_x = N(G_x)$ valamilyen tetszőleges $x \in X$-re.

3.3. Csoporthatások halmazokon és a kategóriaelmélet kapcsolatával összefüggő eredmények

A következőkben két kategória és egy összekötő funktor definiálására kerül sor. $C^{\sim}(x)$ elemeire úgy tekintünk mint egy kategória objektumaira és ha $x \neq x'$ két különböző objektum $C^{\sim}(x)$-ből akkor a gG_x osztály elemei (ahol $g \in G$ és $gx = x'$) lesznek az x objektumot x' objektumba leképező morfizmusok.

Ismert a kategória elméletből, hogy ha $\underline{C}$ egy kategóriát jelöl melynek objektumai A, B, C,... akkor, többek között, a következő axiómának kell teljesülnie: ha $\underline{C}(A, B)$ jelöli az A objektumot a B objektumba leképező morfizmusok halmazát, a $\underline{C}(A_1, B_1)$ és $\underline{C}(A_2, B_2)$ halmazok, akkor és csak akkor nem diszjunktak ha $A_1 = A_2$ és $B_1 = B_2$. Ezt a feltétel kerül ellenőrzésre a $\underline{C} = C^{\sim}(x)$ kategória esetén melynek objektumai $x, x', x''...(gx = x')$ és $\underline{C}(x, x') = gG_x$. Legyen $x^* \neq x,\ x^* \in C^{\sim}(x)$. Megvizsgáljuk a G-béli g elem hatását az x^*-on ($gx = x'$): $gx^* = x^{*'}$. Viszont $\underline{C}(x^*, x^{*'}) = gG_{x^*}$ és $x^* \neq x$. Ezért ha a fenti axióma teljesül akkor $\underline{C}(x, x')$ és $\underline{C}(x^*, x^{*'})$ diszjunktak kell legyenek (azaz gG_x és gG_{x^*} diszjunkt osztályoknak kell lenniök). Ez viszont nem teljesül mert $g = ge$ csoportelem mindkét osztályban megtalálható mivel G_x és G_{x^*} a G csoportnak részcsoportjai. Igy a kategóriaelmélet egyik alapvető axiómája nem teljesül. Ezen nehézségen úgy lépünk át, hogy minden gG_x osztályhoz hozzárendelünk egy $f_x^{gG_x}$ függvényt a következőképpen:

$$f_x^{gG_x}\ : \{x\} \longrightarrow \{x'\},\ f_x^{gG_x}(x) = x'$$

($gx = x',\ g \in G,\ f_x^{gG_x}(x) = (gG_x)x = gx = x';\ x \in C^{\sim}(x)$). Azt állítjuk, hogy $C^{\sim}(x)$ az $x, x', x''..$ objektumaival az $f_x^{gG_x}$ függvényekkel mint morfizmusokkal, egy kategóriát alkotnak. Ennek belátására ellenőrizzük a kategóriák definíciójába foglalt követelményeket és axiómákat:

- a $C^{\sim}(x)$ minden két objektumához hozzá kell rendelni legalább egy morfizmust amely egyik objektumot a másikba transzformálja. Ha $x_1, x_2 \in C^{\sim}(x)$ akkor $x_1 \sim x_2$ azaz létezik $g_{12} \in G :\ g_{12}x_1 = x_2$ ezért az $f_{x_1}^{g_{12}G_{x_1}} = x_2$ nyílvánvalóan teljesül.

- ha $x_1, x_2, x_3 \in C^{\sim}(x)$ az $f_{x_1}^{g_{12}G_{x_1}}$ és $f_{x_2}^{g_{23}G_{x_2}}$ megfelelő morfizmusokkal (az első x_1-et x_2-be, a második x_2-t x_3-ba transzformálja) léteznie kell legalább egy morfizmusnak amely x_1-et x_3-ba transzformálja. Utóbbi, nyílvánvalóan a fenti kettő kompozíciójából adódik:

$$g_{12}x_1 = x_2;\ g_{23}x_2 = x_3;\ x_3 = g_{23}(g_{12}x_1) = (g_{23}g_{12})x_1$$

ezért $g_{13} = g_{23}g_{12} \in G$. Tehát $f_{x_1}^{g_{13}G_{x_1}}(x_1) = x_3$.

A továbbiakban sor kerül a kategóriákra vonatkozó axiómák ellenőrzésére.

-$\underline{C}(x,x')$ és $\underline{C}(x^*,x^{*'})$ $(x,x',x^*,x^{*'} \in C^{\sim}(x))$ akkor és csak akkor nem diszjunktak ha $x = x^*$ és $x' = x^{*'}$. Ebben az esetben $\underline{C}(x,x') = \{f_x^{gG_x}\}$, $(gx = x')$ és $\underline{C}(x^*,x^{*'}) = \{f_{x^*}^{g^*G_{x^*}}\}$, $(g^*x^* = x^{*'})$. Igy a két halmaz akkor és csak akkor nem diszjunkt ha $x = x^*$ és $gG_x = g^*G_{x^*} = g^*G_x$. Ez viszont azt jelenti, hogy $x' = x^{*'}$ úgyszintén. Tehát teljesül az első axióma.

-a morfizmusok asszociativitására vonatkozó axióma, a függvények kompozíciójára érvényes asszociativitásból következik.

-minden $x \in C^{\sim}(x)$ objektum esetén léteznie kell egy identikus morfizmusnak: $f_x^{eG_x} = f_x^{G_x}$ amely az egyetlen ilyen az x számára és ha $f_x^{gG_x}$ morfizmus x-et x'-be transzformálja akkor $f_x^{gG_x}[f_x^{G_x}] = x'$ azaz $f_x^{gG_x}f_x^{G_x} = f_x^{gG_x}$.Hasonlóan, ha $f_{x''}^{g'G_{x''}}$ $(g'x'' = x)$ x''-t x-be transzformálja akkor

$$f_x^{G_x}[f_{x''}^{g'G_{x''}}(x'')] = x \ azaz \ f_x^{G_x}f_{x''}^{g'G_{x''}} = f_{x''}^{g'G_{x''}}$$

Ezzel bizonyítást nyert, hogy $C^{\sim}(x)$ valóban kategória ahol az x, x', x'',.. elemei az objektumok és az $f_x^{gG_x}$ függvények pedig a morfizmusok. Továbbiakban megmutatjuk, hogy a $C^{\cong}(G_x)$ osztály is egy kategória ahol a $G_x, G_{x'}, G_{x''}$,.. stabilizátorok az objektumok. A megfelelő morfizmusok a következőképpen definiálhatók: ha $G_x, G_{x'}$ a $C^{\cong}(G_x)$ két objektuma akkor a gG_x $(gx = x', g \in G)$ osztályhoz hozzárendeljük a következő függvényt, mint morfizmust:

$$f_{gG_x} : \{G_x\} \longrightarrow \{G_{x'}\}, \ f_{gG_x} = gG_xg^{-1} = G_{x'}$$

A morfizmusok kompozícióját az alábbiakban adjuk meg. Legyen $G_x, G_{x'}$ és végül $G_{x''}$ három objektum a $C^{\cong}(G_x)$-ből és így x, x', x'' három objektum a $C^{\sim}(x)$-ből, $x' = gx$; $x'' = g'x')$. Akkor $x'' = g'x' = g'(gx) = (g'g)x$. Ezért az a morfizmus amely G_x-et $G_{x''}$-be transzformálja nem más mint $f_{(g'g)G_x}$ mert $f_{(g'g)G_x}(G_x) = (g'g)G_x(g'g)^{-1} = G_{x''}$. Ismét ellenőrizzük a kategória axiómáit ebben az új esetben.

-$\underline{C}(G_x, G_{x'}) = \{f_{gG_x}\}$ és $\underline{C}(G_{x^*}, G_{x^{*'}}) = \{f_{g^*G_{x^*}}\}$
$(G_x, G_{x'}, G_{x^*}, G_{x^{*'}} \in C^{\cong}(G_x))$ akkor és csak akkor nem diszjunktak ha $G_x = G_{x^*}, \ G_{x'} = G_{x^{*'}}$.

- a morfizmusok kompozíciójának asszociativitása a következő számításból adódik.

Legyen $f_{gG_x}(G_x) = G_{x'}$; $f_{g'G_{x'}}(G_{x'}) = G_{x''}$ illetve $f_{g''G_{x''}}(G_{x''}) = G_{x'''}$ $(gx = x', g'x' = x'', g''x'' = x''')$. Akkor

$$f_{g''G_{x''}}\{f_{g'G_{x'}}[f_{gG_x}(G_x)]\} = f_{g''G_{x''}}[f_{g'G_{x'}}(gG_xg^{-1})] =$$

$$= f_{g''G_{x''}}[(g'g)G_x(g'g)^{-1}] = g''[(g'g)G_x(g'g)^{-1}]g''^{-1} =$$
$$= \{[g''(g'g)]G_x[g''(g'g)]^{-1}\} = \{[(g''g')g]G_x[(g''g')g]^{-1}\} =$$
$$= (g''g')[gG_xg^{-1}](g''g')^{-1} = f_{(g''g')G_{x'}}(G_{x'}) =$$
$$= f_{g''G_{x''}}[f_{g'G_{x'}}](G_{x'}) = \{f_{g''G_{x''}}[f_{g'G_{x'}}]\}[f_{gG_x}(G_x)]$$

-minden $G_x \in C^{\cong}(G_x)$ objektum számára létezik egy f_{eG_x} identikus morfizmus amely az egyetlen ilyen: $f_{eG_x}(G_x) = eG_xe^{-1} = G_x$. Tovább ha f_{gG_x} egy morfizmus amely G_x-et $G_{x'}$-be transzformálja akkor$f_{gG_x}[f_{eG_x}](G_x) = f_{gG_x}[f_{eG_x}(G_x)]$ így $f_{gG_x}f_{eG_x} = f_{gG_x}$. Hasonlóan ha $f_{g^*G_{x^*}}$ a G_{x^*}-ot G_x-be transzformálja ($g^*x^* = x$) akkor

$$\{f_{eG_x}[f_{g^*G_{x^*}}]\}(G_{x^*}) = f_{eG_x}[f_{g^*G_{x^*}}(G_{x^*})] =$$
$$= f_{eG_x}(G_x) = G_x = f_{g^*G_{x^*}}(G_{x^*})$$

azaz $f_{eG_x}f_{g^*G_{x^*}} = f_{g^*G_{x^*}}$. Tehát $C^{\cong}(G_x)$ is egy kategóriát alkot ahol $G_x, G_{x'}$, $G_{x''}$, ... az objektumok és az f_{gG_x} függvények pedig a morfizmusok.

A két fent definiált kategóriák közötti funktor definiálásának érdekében visszatérünk a már említett $\Phi_x\ :\ C^{\sim}(x) \longrightarrow C^{\cong}(G_x)$ függvényhez; $\Phi_x(x^*) = G_{x^*}\ , \forall x^* \in C^{\sim}(x)$. Tekintsük azt az esetet amikor Φ_x bijektív (azaz amikor $G_{x^*} = N(G_{x^*})$ minden $x^* \in C^{\sim}(x)$). Legyen Ψ_x a következő függvény:

$$\Psi_x\ :\ \{f_{x^*}^{g^*G_{x^*}}\ :\ x^* \in C^{\sim}(x),\ g^* \in G\} \rightarrow \{f_{g^*G_{x^*}}\ :\ x^* \in C^{\sim}(x),\ g^* \in G\}$$

A keresett F funktor a (Φ_x, Ψ_x) függvény-pár lesz: Φ_x az objektumok közötti megfeleltetésekért felelős mig Ψ_x a morfizmusok közötti megfeleltetésekért. Csupán annyit kell megmutatni, hogy a morfizmusok kompozíciójának képe a $C^{\sim}(x)$-ben megegyezik a képek kompozíciójával a $C^{\cong}(G_x)$-ben. Legyenek $f_{x_1}^{g_{12}G_{x_1}}$ és $f_{x_2}^{g_{23}G_{x_2}}$ két morfizmus úgy, hogy $f_{x_1}^{g_{12}G_{x_1}}(x_1) = x_2$; $f_{x_2}^{g_{23}G_{x_2}}(x_2) = x_3$. Akkor $f_{x_1}^{(g_{23}g_{12})G_{x_1}}(x_1) = x_3$. Viszont

$$\Psi_x[f_{x_1}^{(g_{23}g_{12})G_{x_1}}] = f_{(g_{23}g_{12})G_{x_1}}\ ;\ f_{(g_{23}g_{12})G_{x_1}}(G_{x_1}) =$$
$$= (g_{23}g_{12})G_{x_1}(g_{23}g_{12})^{-1} = G_{x_3};\ f_{(g_{23}g_{12})G_{x_1}} = f_{g_{23}G_{x_2}}(f_{g_{12}G_{x_1}}) =$$
$$= \Psi_x(f_{x_2}^{g_{23}G_{x_2}})[\Psi_x(f_{x_1}^{g_{12}G_{x_1}})]$$

Az identikus morfizmusokra: $f_x^{eG_x} = x$; $f_{eG_x}(G_x) = eG_xe^{-1} = G_x$ így $\Psi_x(f_x^{eG_x}) = f_{eG_x}$. Tehát $F = (\Phi_x, \Psi_x)$ valóban egy funktor a $C^{\sim}(x)$ és a $C^{\cong}(G_x)$ kategóriák között.

3.4. Kölcsönhatáselmélettel kapcsolatos eredmények

A továbbiakban valahányszor a "fizikai rendszer", illetve "fizikai rendszer állapotai" kifejezéseket használjuk, tulajdonképpen formálisan mindig Mealy automatát és annak állapothalmazát értjük ezen kifejezések alatt (mivelhogy ez egy matematikai értekezés). Amint már említettük a bevezető részben, a sérülő szimmetria beágyazódása az új rendszer állapotainak a szimmetriájába összhangban van a fizikai esetekkel. Tekintsünk X-re mint egy adott fizikai rendszer állapotainak halmazára és legyen $G_x = G_{x'} = \overline{G}_X$ $\forall x, x' \in X$ (itt, a felülvonásnak nincs köze a topológiából ismert lezáráshoz); ilyenkor $\overline{G}_X$ normális részcsoportja S_X-nek (lásd az **1.1.9 c)** paragrafust), amely S_X-ről feltételezzük, hogy tranzitíven hat az X halmazon és van egy kompozíciólánca. Az S_X egyszerű csoport esetét külön megemlítjük a későbbiekben. Legyen

$$\{e\} \subseteq \overline{G}_X = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = S_X$$

az a kompozicióránc amely tartalmazza $\overline{G}_X$-et (ismert a szakirodalomból, hogy ha $\overline{G}_X$ normális részcsoportja az S_X-nek és ha S_X-nek van egy normállánca, akkor van az S_X-nek egy olyan normállánca amely tartalmazza $\overline{G}_X$-et és az is ismert, hogy egy normállánc mindig kompoziciólánccá finomítható (Schreier tétele). Nyilvánvaló, hogy $S_X/\overline{G}_X$ hűen hat az X halmazon. Jelölje $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ azt az ekvivalenciarelációt, amelyet a $G_1/\overline{G}_X$ csoport hatásai generálnak az X halmazon. $G_1/\overline{G}_X$ normális részcsoportja $S_X/\overline{G}_X$ csoportnak és mint ismeretes

$$(S_X/\overline{G}_X)/(G_1/\overline{G}_X) \cong S_X/G_1$$

Ha x és $s_X G_1$ az X illetve S_X/G_1 tetszőleges elemei akkor $[(s_X G_1)x] \in C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x)$ ($s_X \in G_1$ mellett) illetve $[(s_X G_1)x] \notin C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x)$ (amennyiben $s_X \notin G_1$). Nyílvánvaló, hogy S_X/G_1 hűen hat az $X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ halmazon.

1. Definició(kölcsönhatásé) Jelölje f_1 valamilyen fizikai mennyíséget (voltaképpen egy függvény), amely az X halmaz minden x elemén (állapotán) értelmezett, és amelyre érvényes a $Kerf_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}$ összefüggés. Az $[X; S_X/\overline{G}_X]$ rendszer kölcsönhatásban vesz részt, ha a rendszer $S_X/\overline{G}_X$ csoportja S_X/G_1 csoportra transzformálódik (csoporthomomorfizmus által) és az X állapothalmaz az $X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ halmazra transzformálódik (szürjekció által).

Megjegyzés Ebben a kölcsönhatásban az f_1 értéke változik (mert S_X/G_1 "nem triviális" elemeinek hatása az $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ osztályai közötti átmeneteket valósítják meg). Ugyanakkor az állapotok szimmetriája növekszik, mert az X halmaz elemeinek stabilizátora $\overline{G}_X$ míg az új $X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ állapothalmaz elemeinek stabilizátora G_1 ($\overline{G}_X \subset G_1$).

A fenti definició és az azt követő megjegyzés indokolását a következőképpen adjuk meg. Jelölje

$$(X, S_X/\overline{G}_X, X/Kerf_1, \delta, \lambda)$$

illetve

$$(X/Kerf_1, S_X/G_1, (X/Kerf_1)/Kerf_2, \delta', \lambda')$$

két Mealy automatát melyek állapothalmazai rendre X és $X/Kerf_1$, bemenőjelek halmazai rendre $S_X/\overline{G}_X$ illetve S_X/G_1 és a kimenőjelek halmazai rendre $X/Kerf_1$, illetve $(X/Kerf_1)/Kerf_2$. Az átmenet $\delta, \delta', \lambda, \lambda'$ függvényeket az $S_X/\overline{G}_X$ illetve S_X/G_1 csoportok elemeinek hatásaik alapján definiáljuk:

$$f_1 : X \to X/Kerf_1;\ \Phi_1 : S_X/\overline{G}_X \to S_X/G_1;\ Kerf_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}$$

$$f_1(x) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x);\ f_2 : X/Kerf_1 \to (X/Kerf_1)/Kerf_2;\ Kerf_2 = \sim_{G_2/G_1}$$

$$f_2[C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x)] = C^{\sim_{G_2/G_1}}[C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x)];\ \Phi_1(g\overline{G}_X) = gG_1$$

$$\delta(x, g\overline{G}_X) = (g\overline{G}_X)x = (gx);$$

$$\delta'(C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x), gG_1) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx);$$

$$\lambda(x, g\overline{G}_X) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx);$$

$$\lambda'(C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x), gG_1) = C^{\sim_{G_2/G_1}}[C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx)];$$

Igy

$$f_1[\delta(x, g\overline{G}_X)] = f_1(gx) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx) =$$

$$= \delta'(C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x), gG_1) = \delta'(f_1(x), \Phi_1(g\overline{G}_X))$$

Hasonlóan

$$f_2[\lambda(x, g\overline{G}_X)] = f_2[C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx)] = C^{\sim_{G_2/G_1}}[C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(gx)] =$$

$$= \lambda'(C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x), gG_1) = \lambda'(f_1(x), \Phi_1(g\overline{G}_X))$$

Tehát az adódik, hogy

$$f_1[\delta(x, g\overline{G}_X)] = \delta'(f_1(x), \Phi_1(g\overline{G}_X))$$

és

$$f_2[\lambda(x, g\overline{G}_X)] = \lambda'(f_1(x), \Phi_1(g\overline{G}_X))$$

Felhasználva az automataelméletből ismert automata homomorfizmus fogalmát azt kapjuk, hogy az $(X/Kerf_1, S_X/G_1, (X/Kerf_1)/Kerf_2, \delta', \lambda')$ automata az $(X, S_X/\overline{G}_X, X/Kerf_1, \delta, \lambda)$ automatának homomorf képe.

Mint ismeretes, egy normális részcsoport hatásai kongruenciarelációt indukálnak az adott halmazon. Ez a tény, a disszertációban bemutatott elmélet esetében a következőképpen formalizálható: Ha x_1 és x_2 az X állapothalmaz két tetszőleges eleme úgy, hogy $x_1 \sim_{G_1/\overline{G}_X} x_2$ és $g_2 \in G_i$ $(G_1 \subset G_2 \subseteq G_i)$ akkor $[(g_2\overline{G}_X)x_1] \sim_{G_1/\overline{G}_X} [(g_2\overline{G}_X)x_2]$ (azaz $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ kongruencia). Ennek az állításnak a megfordítása is igaz (az alábbi **Következmény** bizonyítása után teszünk erről említést).

Következmény Minden $x_1 \to (g_2\overline{G}_X)x_1$ és $x_2 \to (g_2\overline{G}_X)$ átmenet ahol

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_2) \neq$$

$$\neq C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2\overline{G}_X)x_1] = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2\overline{G}_X)x_2]$$

az $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ osztályai között az $(X, S_X/\overline{G}_X, X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, \delta, \lambda)$ automata esetén, egy és ugyanazt az $C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) \to C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}[(g_2G_1)x_1]$ átmenetet indukálja az $(X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}, S_X/G_1, (X/\sim_{G_1/\overline{G}_X})/\sim_{G_2/G_1}, \delta', \lambda')$ automata (rendszer) állapotai között.

Bizonyítás

$$\delta(x_1, g_2\overline{G}_X) = (g_2\overline{G}_X)x_1 = g_2x_1$$

$$\delta(x_2, g_2\overline{G}_X) = (g_2\overline{G}_X)x_2 = g_2x_2$$

Ezért

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_1) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(x_2)$$

$$C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(g_2x_1) = C^{\sim_{G_1/\overline{G}_X}}(g_2x_2), \ \Phi_1(g_2\overline{G}_X) = g_2G_1$$

□

Mint ismert, a fent említett állításnak a megfordítása is igaz. Nevezetesen, ha $(g_1\overline{G}_X)x_1 = x_2$ és ha létezik $g^* \in G_1$ úgy, hogy

$$(g^*\overline{G}_X)[(g_2\overline{G}_X)x_1] = (g_2\overline{G}_X)x_2 \ \forall g_1 \in G_1 \ \forall g_2 \in S_X$$

(azaz ha $\sim_{G_1/\overline{G}_X}$ egy kongruencia, vagyis ha egy adott $g_2\overline{G}_X$ bemenőjel az f_1 mennyiségnek ugyanakkora változását idézi elő (ahol $Kerf_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}$) akkor G_1 normális részcsoportja S_X-nek. Mindet egybevetve tehát, amikor az

$$(X, S_X/\overline{G}_X, X/Kerf_1, \delta, \lambda)$$

automata (rendszer) kölcsönhatásban vesz részt (amely kölcsönhatást az $\sim_{G_1/\overline{G}_X} = Kerf_1$ osztályai közötti átmenet jelenti) a szóban forgó automatánk (rendszerünk) az

$$(X/Kerf_1, S_X/G_1, (X/Kerf_1)/Kerf_2, \delta', \lambda')$$

automatává (rendszerré) alakul át amely utóbbi automata az előzőnek homomorf képe.

Definició 1'(kölcsönhatásé) Legyen X illetve $S_X/\overline{G}_X$ egy fizikai rendszer állapotainak halmaza, illetve a rendszer szimmetrikus csoportja. A rendszer részt vehet kölcsönhatásban, ha léteznek a (ϕ_1, f_1) és (ϕ_2, f_2) függvénypárok, ahol ϕ_1 és ϕ_2 rendre az $S_X/\overline{G}_X$-en illetve az S_X/G_1-en értelmezett csoport homomorfizmusok

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \to S_X/G_1;\ \phi_2 : S_X/G_1 \to S_X/G_2;$$

$$(Ker\phi_1 = G_1/\overline{G}_X,\ \overline{G}_X \subset G_1;\ Ker\phi_2 = G_2/G_1,\ G_1 \subset G_2)$$

$$f_1 : X \to X/Kerf_1;\ f_2 : X/Kerf_1 \to (X/Kerf_1)/Kerf_2$$

úgy, hogy az f_1 és f_2-re teljesülnek a

$$Kerf_1 = \sim_{Ker\phi_1} = \sim_{G_1/\overline{G}_X};\ Kerf_2 = \sim_{Ker\phi_2} = \sim_{G_2/G_1}$$

feltételek. Ebben a kölcsönhatásban az f_1 értéke változik és az

$$(X, S_X/\overline{G}_X, X/Kerf_1, \delta, \lambda)$$

rendszer (automata) az

$$(X/Kerf_1, S_X/G_1, (X/Kerf_1)/Kerf_2, \delta', \lambda')$$

rendszerré (automatává) transzformálódik mely utóbbi rendszer állapotainak a G_1 szimmetriája magasabb, mint az előző rendszer (automata) állapotainak a $\overline{G}_X$ szimmetriája ($\overline{G}_X \subset G_1$).

Továbbléphetünk és a kölcsönhatássorozat definícióját is megadhatjuk. Jelölje $f_1, f_2, f_3, .., f_{n-1}, f_n$ valamilyen fizikai mennyiségek (függvények) sorozatát úgy, hogy

$$Kerf_1 = \sim_{G_1/\overline{G}_X}; Kerf_2 = \sim_{G_2/G_1}; ..; Kerf_{n-1} = \sim_{G_{n-1}/G_{n-2}}; Kerf_n = \sim_{G_n/G_{n-1}}$$

és f_1 az X-en, f_2 az $X/\sim_{G_1/\overline{G}_X}$-en,..,$f_{n-1}$ az $(..(X/..)/\sim_{G_{n-2}/G_{n-3}})$-on értelmezett. Végül a rendszer (automata) szimmetrikus csoportja az S_X/G_{n-1} lesz, az állapotok halmaza az $(..(X/\sim_{G_1/\overline{G}_X})/\sim_{G_2/G_1})..)\sim_{G_{n-1}/G_{n-2}}) =$ az f_n értelmezési tartománya és a kimenőjelek halmaza pedig a

$$(..(X/\sim_{G_1/\overline{G}_X})/\sim_{G_2/G_1})..)/\sim_{G_n/G_{n-1}})$$

halmaz. Az állapotok szimmetriája (stabilizátora) maximális lesz (nevezetesen G_{n-1}) és a rendszer (automata) S_X/G_{n-1} szimmetrikus csoportja pedig egyszerű. Ebben az utóbbi esetben a rendszer egy stabil rendszer (már nem vesz részt további kölcsönhatásban).

2. Definició(kölcsönhatás sorozaté)

Legyenek $f_1, f_2, .., f_n$ a rendszerhez asszociált fizikai mennyiségek úgy, hogy

$$Kerf_1 =\sim_{G_1/\overline{G}_X}; Kerf_2 =\sim_{G_2/G_1}; ..; Kerf_{n-1} =\sim_{G_{n-1}/G_{n-2}}; Kerf_n =\sim_{G_n/G_{n-1}}$$

$$f_i : (..(X/../)/ \sim_{G_{i-1}/G_{i-2}}) \to (..(X/../)/ \sim_{G_{i-1}/G_{i-2}})/ \sim_{G_i/G_{i-1}} \quad (i = 1, n)$$

és $\phi_1, \phi_2, .., \phi_{n-1}$ homomorfizmusok úgy, hogy

$$\phi_1 : S_X/\overline{G}_X \to S_X/G_1; \phi_2 : S_X/G_1 \to S_X/G_2; ..; \phi_{n-1} : S_X/G_{n-2} \to S_X/G_{n-1}$$

$$Ker\phi_1 = G_1/\overline{G}_X; Ker\phi_2 = G_2/G_1; ..; Ker\phi_{n-1} = G_{n-1}/G_{n-2}$$

A (ϕ_1, f_1),(ϕ_2, f_2),..,(ϕ_{n-1}, f_{n-1}) függvénypárok, ahol $Kerf_i =\sim_{Ker\phi_i}$ $(i = 1, n-1)$, a rendszernek egy kölcsönhatási sorozatát valósitják meg melyben a rendszer részt vehet. Ha $Kerf =\sim_{S_X/\overline{G}_X}$ akkor nincs olyan kölcsönhatás a rendszer számára amely kölcsönhatás által az f fizikai mennyiség (függvény) értéke megváltozna.

Az egyszerűség kedvéért legyen $\overline{G}_X = \{e\}$. Legyenek H_i és G_j az S_X-nek két normális részcsoportjai, illetve f és g két fizikai mennyiség úgy, hogy

(a) $Kerf =\sim_{H_i/(H_i \cap G_j)}$

(b) $Kerg =\sim_{G_j/(H_i \cap G_j)}$

$f : Y \to Y/Kerf$, $g : Y \to Y/Kerg$ ahol Y egy (faktor)halmaz és $(H_i \cap G_j)$ az Y halmaz minden elemének a stabilizátora (más szavakkal fogalmazva tekintsük az $(Y, S_X/[H_i \cap G_j]$ rendszert). Ennek megfelelően vegyük szemügyre az S_X-nek két kompozició láncából a következő részleteket:

$$... \subset [H_i \cap G_j] \subset H_i \subset [H_iG_j] \subset ... \subset S_X$$

$$... \subset [H_i \cap G_j] \subset G_j \subset [H_iG_j] \subset ... \subset S_X$$

Ismert, hogy (a csoportelmélet második izomorfizmustételéből)

(I) $H_iG_j/G_j \cong H_i/[H_i \cap G_j]$

(II) $H_iG_j/H_i \cong G_j/[H_i \cap G_j]$

Az (I)-el jelölt izomorf csoportok az $Y/Kerg$ illetve az Y halmazon fejtik ki hatásukat míg a (II)-es izomorf csoportjai pedig rendre az $Y/Kerf$ illetve az Y halmazon. Nyilvánvaló, hogy $Kerf \cap Kerg =$ identikus reláció az Y halmazon. Megállapítható még, hogy $|Y| = |S_X/(H_i \cap G_j)|, |Y/Kerg| =$

$|S_X/G_j|$ és $|Y/Kerf| = |S_X/H_i|$. Úgyszintén ha y_1, y_2 az Y halmaz tetszőleges elemei, $Z \in Y/Kerg$ és $T \in Y/Kerf$ akkor

$$(I')\ |(C^{\sim_{H_i/H_i \cap G_j}}(y_1)| = |(C^{\sim_{H_iG_j/G_j}}(Z))| =$$

$$= |(H_i/H_i \cap G_j)| = |(H_iG_j/G_j)|$$

(mert G_j az $Y/Kerg$ halmaz minden elemének a stabilizátora)

$$(II')\ |C^{\sim_{G_j/H_i \cap G_j}}(y_2)| = |C^{\sim_{H_iG_j/H_i}}(T)| =$$

$$= |(G_j/H_i \cap G_j)| = |(H_iG_j/H_i)|$$

(mert H_i az $Y/Kerf$ minden elemének a stabilizátora).

Definiáljuk f'-t az $Y/Kerg$ halmazon úgy, hogy

(c) $Kerf' =\sim_{H_iG_j/G_j}$ az $Y/Kerg$ halmazon és g'-t az $Y/Kerg$ halmazon úgy, hogy

(d) $g'(C^{\sim_{H_iG_j/G_j}}(y)) = g(y)$ $(y \in Y, y \in Z; Z \in Y/Kerg; Z \subset Y)$ azaz g' injektív az $Y/Kerg$ halmazon. Hasonlóan, definiáljuk f'' függvényt az $Y/Kerf$ halmazon úgy, hogy

$$f''(C^{\sim_{H_iG_j/H_i}}(t)) = f(t), t \in Y, t \in V; V \in Y/Kerf; V \subset Y$$

f'' injektív függvény az $Y/Kerf$ halmazon. Ha szemügyre vesszük azon két kölcsönhatást melyeket az $H_i/H_i \cap G_j$ hatásai valósítanak az Y halmazon illetve a H_iG_j/G_j csoport hatásai az $Y/Kerg$ halmazon akkor az $(I), (I'), (a)-(d)$ összefüggésekből az adódik, hogy ezen két kölcsönhatás teljesen megkülönböztethetetlen mert a g mennyiség egyik kölcsönhatás szerinti invarianciája - bijekció erejéig azonos - a g' mennyiség másik kölcsönhatás szerinti invarianciájával és úgyanúgy az f mennyiség változása azonos - bijekció erejéig - f' mennyiség változásával. Hasonlóan megkülönböztethetelen az a két másik kölcsönhatás is melyeket $G_j/H_i \cap G_j$ hatásai valósítanak meg az Y halmazon illetőleg a H_iG_j/H_i az $Y/Kerf$-en.

Jelölje rendre α és β az első illetve a második kölcsönhatás-párost, akkor a következő lehetséges kölcsönhatások adódnak:

$$(III)\ (Y, S_X/H_i \cap G_j) \to^{\alpha} (Y/Kerf, S_X/H_i) \to^{\beta} ((Y/Kerf)/Kerg'', S_X/H_iG_j)$$

$$(III')(Y, S_X/H_i \cap G_j) \to^{\beta} (Y/Kerg, S_X/G_j) \to^{\alpha} ((Y/Kerg)/Kerf', S_X/H_iG_j)$$

(ahol g'' az $Y/Kerf$-en definiált úgy, hogy $Kerg'' =\sim_{H_iG_j/H_i}$). Az is nyílvánvaló, hogy

$$|[(Y/Kerf)/Kerg'']| = |[(Y/Kerg)/Kerf']| = |(S_X/H_iG_j)|$$

mivel a H_iG_j csoport stabilizátora az $(Y/Kerf)/Kerg''$ és a $(Y/Kerg)/Kerf'$ halmaz minden elemének.

Összefoglalva:
(IV_1) α kölcsönhatás során a (III)-ban: f változik, g invariáns

(IV_2) α kölcsönhatás során a (III')-ben: f' változik, g' invariáns

(IV_3) β kölcsönhatás során a (III')-ben: g változik, f invariáns

(IV_4) β kölcsönhatás során a (III)-ban: g'' változik, f'' invariáns. Tehát azt a fontos következtetés vonható le, hogy egy kölcsönhatási lánchoz valóban indokolt hozzárendelni egy kompozicióláncot; a kompoziciólánc faktorcsoportjai meghatározzák a kölcsönhatások típusait (az izomorf faktorcsoportok pedig megkülönböztethetetlen kölcsönhatásokat képviselnek).

3.5. Alkalmazás a radioaktív bomlásra

(Sejtés a radioaktív atommagokról)

Tekintsük a Th (thórium) bomlási láncát.

$$Th \to^{\alpha} Ra \to^{\beta} Ac \to^{\beta} Th \to^{\alpha} Ra \to^{\alpha} Rn \to^{\alpha} Po \to^{\alpha} Pb \to^{\beta} Bi \to^{\alpha} Tl \to^{\beta} Pb$$
$$\to^{\beta} Bi \to^{\beta} Po \to^{\alpha} Pb$$

Megfigyelhető, hogy az utolsó két lépés hasonló a (III) és (III')-ben előforduló transzformációkhoz. Ezért a következő megsejtést javasoljuk: minden atommag a láncból Mealy automataként értelmezhető úgy, hogy egy közbenső atommag az előzőnek egy automataelméleti értelemben vett homomorf képe megnövekedett állapotszimmetriával az előző atommag állapotainak szimmetriájához képest. A lánc végén álló atommag állapotainak szimmetriája a legmagasabb és egyben ez az atommag stabil.

Ha G_α, G_β és G egyszerű csoportok úgy, hogy $G_\alpha \cap G_\beta = \{e\}$ és

$$G_\alpha \cong H_i/H_i \cap G_j \cong H_iG_j/G_j; \; G_\beta \cong G_j/H_i \cap G_j \cong H_iG_j/H_i$$

akkor

$$S_X \cong G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta \times G_\alpha \times G_\alpha \times G_\alpha \times G_\alpha \times G_\beta \times G_\alpha \times G_\beta \times G \times$$
$$\times G_\beta \times G_\alpha \times G$$

és a thórium bomlási láncához rendelt kompozició lánc

$$\{e\} \subset G_\alpha \subset G_\alpha \times G_\beta \subset G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta \subset G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta \times G_\alpha \subset .. \subset S_X$$

ahol a faktorcsoportok $G_\alpha/\{e\} \cong G_\alpha$; $G_\alpha \times G_\beta/G_\alpha \cong G_\beta$; $G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta/G_\alpha \times G_\beta \cong G_\beta$; $G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta \times G_\alpha/G_\alpha \times G_\beta \times G_\beta \cong G_\alpha$ és így tovább.

Végűl a rendszer szimmetrikus csoportja a G csoporttal lesz izomorf. Az f, f', f'', g, g'' stb. függvények az X halmazon definiáltak vagy pedig ennek valamilyen faktorhalmazán (amit Y-al jelölünk) úgy, hogy

$$Kerf = \sim_{H_\alpha} \; ; \; Kerg = \sim_{H_\beta}$$

H_α és H_β ugyanazon (faktor)halmazon hat és izomorf rendre G_α vagy G_β-val. (IV_1)-(IV_4)- ből kapjuk, hogy az f, f', f'' mennyíségek megegyezhetnek és rendre az $Y, Y/Kerg, Y/Kerf$ különböző halmazokon definiáltak (f meg nem maradásának elve α bomláskor viszont megmarad β bomláskor) és g, g', g'' mennyiségek is azonosak lehetnek az $Y, Y/Kerg, Y/Kerf$ különböző halmazokon definiálva úgyszintén és invariánsak α bomláskor de változnak β bomláskor (g meg nem maradásának elve β bomláskor).

Eddig, a disszertációban bemutatott kölcsönhatáselméleti eredményeink a következő princípiumba foglalhatóak össze:

Princípium(állapotok szimmetriájának elve) Minden rendszer, (azaz Mealy-automata) melyre igaz, hogy állapotai azonos szimmetriájúak, (azonos a stabilizátoruk) "kölcsönhatás sorozatban" vehet részt, míg az állapotok szimmetriája maximális lesz és a rendser stabillá válik. Ebben az esetben a rendszer különböző állapotainak száma minimális. Minden közbenső rendszer (Mealy-automata) az előzőnek a homomorf képe.

3.6. A kölcsönhatás és a szimmetria-sérülés ekvivalenciája

Amint már szó esett róla, egy fizikai rendszer (automata) kölcsönhatásban vesz részt, ha a rendszer állapotainak halmazán egy olyan átmenet valósul meg, amely átmenet valamilyen csoport hatásai által indukált ekvivalenciareláció osztályai között valósul meg. Viszont egy ilyen tipusú átmenet egyben szimmetria-sérülést valósít meg (és fordítva, egy szimmetria-sérüléssel párosuló folyamat kölcsönhatást is jelent egyben), nevezetesen, azon szimmetria sérüléséről van szó, amelyet a szóban forgó ekvivalenciarelációt indukáló csoport képvisel. Formálisan, ha az $\sim_G$ ekvivalenciareláció (azaz a G csoport hatásai által, a rendszer állapotainak a halmazán indukált ekvivalenciareláció) osztályai közötti átmenetet tekintem, akkor a G csoport által képviselt szimmetria sérül. Ez által arra következtetünk, hogy a természetben lejátszódó bizonyos kölcsönhatások "mechanizmusa" az, hogy "feláldozni" egy adott szimmetriát és ezáltal egy magasabb állapotszimmetriát nyerni és ezzel egyidejüleg átalakítani a rendszert egy optimális(abb) és stabil(abb) rendszerré (automata homomorfizmus által). Arra következtetünk, hogy a kölcsönhatás és a szimmetria-sérülés fogalmak ekvivalens fogalmak (mindegyik implikálja a másikat). Példának okáért léteznek a természetben szimmetriasérüléssel párosuló kölcsönhatások és ilyen kölcsönhatások felfedezéséért Chen Ning Yang és Tsung Dao Lee fizikusokat Nobel díjjal tüntették ki 1957-ben (hasonlóan James W. Cronin és Val L. Fitch fizikusokat 1980-ban). Összefoglalva tehát azt állíthatjuk, hogy a kölcsönhatások olyan folyamatok, amely folyamatok alatt érvényesül az állapotok szimmetriájának elve és amely elv megmutatja, hogyan alakulnak át a rendszerek (automaták) optimálisabb és stabilabb rendszerekké kölcsönhatások által (amint láttuk automata homomorfizmus érvényesülése által).

4. A szimmetria - szélsőérték elve

4.1. Bevezetés

Számtalan példa szemlélteti a számunkra azt, hogy a szimmetria és a szélsőérték fogalmak között valamilyen kapcsolat sejthető, azaz, amikor egy "objektum" magas szimmetriával rendelkezik, akkor az objektum valamilyen tulajdonságával kapcsolatos mennyiség szélsőértéket vesz fel. Ilyenkor elég a jól ismert izoperimetrikus problémára gondolni. Tehát az említett mennyiség alatt egy mértéket sejtünk egy σ-gyűrűn definiálva. A továbbiakban a szimmetria-szélsőérték kapcsolatának vizsgálatára kerül sor és végül, a bemutatott eredmények lényegét egy elv (princípium) megfogalmazásával foglaljuk össze amelyet, a **Szimmetria-szélsőérték elve** névvel látjuk el.

4.2. Összefüggés a szimmetria és a szélsőérték között

Tekintsünk az (X, S, μ)-hármast ahol X egy szeparábilis lokálisan kompakt Haussdorf-féle mértéktér S a Bair-féle halmazok σ-gyűrűje, amely ebben az esetben azonos a Borel-féle halmazok σ-gyűrűjével és μ egy Bair mérték S-en definiálva. Legyen G egy kompakt topologikus csoport úgy, hogy X egy G-halmaz. (G részcsoportja F-nek ahol F-el jelöltem az X összes topologikus automorfizmusának csoportját, azaz $g \in G$ hatása az X-en nem más, mint az X topologikus térnek önmagára való topologikus leképezése). Feltételezzük, hogy S és μ balinvariáns, azaz ha $E \in S$ és $g \in G$ akkor $gE = \{gx : x \in E\} \in S$ és $\mu(E) = \mu(gE)$ $\forall E \in S$ és $\forall g \in G$. Előbb megmutatjuk, hogy G elemeinek hatása az X részhalmazain szintén csoporthatás:

$$eE = \{ex : x \in E\} = \{x : x \in E\} = E$$

$$(g_1 g_2)E = \{(g_1 g_2)x : x \in E\} = \{g_1(g_2 x) : x \in E\} = g_1\{g_2 x : x \in E\} = g_1(g_2 E)$$

Ha X egy lokálisan kompakt topologikus csoport, akkor μ a Haar mérték lehet és G az X-nek egy kompakt topologikus részcsoportja; ha X egy euklideszi tér, μ betöltheti a terület szerepét, illetve a térfogat szerepét két- illetve háromdimenziós tér esetén és G valamilyen távolságtartó transzformációk kompakt topologikus csoportja.

Mindenekelőtt tekintsük az F-en értelmezett topológiát. Legyen $g \in F$ és $x \in X$. Legyen V_x az x-nek egy környezete. Akkor gV_x a gx-nek lesz egy környezete amit V_{gx}-el jelölök. A V_{gx} környezethez asszociáljuk az F-nek egy V_g részhalmazát a következőképpen:

$$V_g = \{g' : g'x \in V_{gx} = gV_x\}$$

Mivel x tetszőleges volt, ezért arra következtetünk, hogy ha $g' \in V_g$ akkor $g'(\overline{g}x) \in gV_{\overline{g}x} = g(\overline{g}V_x)$ valamilyen $\overline{g} \in F$. Tehát V_g független az $x \in X$ választásától. Megmutatjuk, hogy a V_g halmazok, az F-nek egy teljes környezetrendszerét alkotják. Ha $g_1 \neq g_2$ akkor létezik $x \in X$ úgy, hogy $g_1x \neq g_2x$. Ezért létezik V_{g_1x} úgy, hogy $g_2x \notin V_{g_1x}$. Jelölje V_{g_1} az F azon részhalmazát amit a V_{g_1x}-hez asszociálunk. Akkor $g_2 \notin V_{g_1}$ mert ha $g_2 \in V_{g_1}$ így a $g_2x \in V_{g_1x}$ eredmény adódik ami ellentmond a V_{g_1x} választásának. Jelölje U_g és V_g a g-nek két környezetét. Fentiek szerint ez azt jelenti, hogy U_g valamilyen U_{gx}-hez, V_g pedig valamilyen V_{gx}-hez asszociált. Viszont létezik $W_{gx} \subset U_{gx} \cap V_{gx}$. Legyen $W_g \subset F$, $W_g = \{g' :\ g'x \in W_{gx}\}$. Igy $g'x \in U_{gx}$ azaz $g' \in U_g$ és $g'x \in V_{gx}$ azaz $g' \in V_g$. Ezért $W_g \subset U_g \cap V_g$.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy F egy topologikus csoport a fenti topologiával szemben. Legyen $g_1g_2 = g$ és V_g a g-nek egy tetszőleges környezete. Azt kell megmutatni, hogy létezik V_{g_1} és V_{g_2} a g_1 illetve g_2-nek környezetei úgy, hogy $V_{g_1}V_{g_2} \subset V_g$. Mivel $g_1g_2 = g$ ezért $(g_1g_2)x = gx\ \forall x \in X$. Legyen $x \in X$ tetszőlegesen kiválasztva, V_{gx} a gx-nek egy tetszőleges környezete és V_g a g elemnek a V_{gx}-hez asszociált környezete. Igy V_g valóban tetszőleges környezete lesz a g elemnek. Ha $g' \in V_g$ akkor

$$g'x \in V_{gx} = gV_x = (g_1g_2)V_x = \{(g_1g_2)x' :\ x' \in V_x\} = V_{(g_1g_2)x}$$

Legyen $V_{g_2} = \{g_2' :\ g_2'x \in V_{g_2x}\}$. Viszont $V_{g_2x} = V_{g_2'x}$. Továbbá, tekintsük a g_1 elemnek azt a V_{g_1} környezetét amelyet a $V_{g_2x} = V_{g_2'x}$ környezethez asszociálunk úgy, hogy

$$V_{g_1} = \{g_1' :\ g_1'(g_2'x) \in V_{g_1(g_2'x)} = V_{g_1(g_2x)} = V_{(g_1g_2)x}\}$$

mivel $g_1V_{g_2x} = V_{(g_1g_2)x}$ tartalmazza $g_1(g_2'x)$-et és így úgy tekintünk a V_{gx} környezetre mint a $g_1(g_2'x)$ környezetére. Tehát $V_{g_1}V_{g_2} \subset V_g$. Végül megmutatjuk, hogy amennyiben $V_{g^{-1}}$ a $g^{-1} \in F$ elemnek tetszőleges környezetét jelöli akkor létezik a $g \in F$ elemnek egy V_g környezete úgy, hogy $V_g^{-1} \subset V_{g^{-1}}$. Legyenek $x \in X$ és $g \in F$ tetszőlegesen kiválasztva. Jelölje V_x az x-nek egy környezetét és

$$V_{g^{-1}} = \{g'' :\ g''(gx) \in g^{-1}V_{gx} = V_{g^{-1}(gx)} = V_x\}$$

és legyen

$$V_g = \{g' :\ g'x \in gV_x = V_{gx}\}$$

Ezért $V_g^{-1} = \{g'^{-1} :\ g' \in V_g\}$. Mivel g^{-1} egy topologikus leképezés ezért $g^{-1}(g'x) \in g^{-1}(gV_x) = V_x$ minden $g' \in V_g$ esetén. Tehát $(g^{-1}g')x \in V_x$ ami azt jelenti, hogy $g^{-1}g' \in$ a V_x stabilizátorának. Mivel minden "objektum" stabilizátora (így V_x stabilizátora is) egy csoport ezért azt kapjuk, hogy $(g^{-1}g')^{-1} = g'^{-1}g$ szintén a V_x stabilizátorából való és így $g'^{-1}(gx) \in V_x$ (minden $g' \in V_g$). Igy $V_g^{-1} \subset V_{g^{-1}}$.

Legyen $G_1 = \{e\} \subset G_2 \subset .. \subset G_i \subset G_{i+1} \subset .. \subset H = \cup_{i=1}^{\infty} G_i \subset G$ ahol $G_1, G_2..$ véges csoportok, G_i $(i \geq 2)$ valódi részcsoportja G_{i+1}-nek úgy, hogy $|(G_{i+1} : G_i)| = k \geq 2, \ \forall i = 1, 2..$ (példának okáért $G_{i+1} = D_{2n}, \ G_i = D_n$ és $k = 2$). Egyszerü belátni, hogy H egy csoport. Ugyanis ha $g_1, g_2 \in H$ akkor $g_1 \in G_s, \ g_2 \in G_q$ ahol $s \leq q$ azaz $g_1 \in G_q$ és $g_1 g_2 \in G_q \subset H$. Ha $g_1, g_2, g_3 \in H$ akkor $g_1 \in G_s, g_2 \in G_q, g_3 \in G_p$ ahol $s \leq q \leq p$ azaz $g_1, g_2, g_3 \in G_p \subset H$ és az asszociativitás teljesül mert G_p csoport. Végül ha $g \in H$ akkor $g \in G_s$ és $g^{-1} \in G_s \subset H$; az is nyilvánvaló, hogy $e \in H$.

Jelölje $A_1 \in S$ egy véges mértékű halmazt azaz $0 < \mu(A_1) < \infty$. Származtatjuk a következő A_2 halmazt: $A_2 = \cup_{g \in G_2} g A_1$. Mivel S balinvariáns és σ-gyűrű ezért $A_2 \in S$. Nyilvánvalóan teljesül az $A_1 \subset A_2$ és így $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. Megmutatjuk, hogy az A_2 halmaz G_2-invariáns. Valóban, ha $g' \in G_2$ akkor

$$g' A_2 = g'(\cup_{g \in G_2} g A_1) = \cup_{g \in G_2} g' g A_1 = A_2$$

Hasonlóan $A_3 = \cup_{g \in G_3} g A_2$ és ha $g' \in G_3$ akkor $g' A_3 = g'(\cup_{g \in G_3} g A_2) = \cup_{g \in G_3} g' g A_2 = A_3$ azaz A_3, G_3-invariáns. Ha $A_{i+1} = \cup_{g \in G_{i+1}} g A_i, \ i \geq 1$ akkor nyilvánvaló, hogy az A_{i+1} halmaz G_{i+1}-invariáns. Ezzel konstruáltunk, mérhető halmazok egy növekvő sorozatát:

$$A_1 \subset A_2 \subset .. \subset A_i \subset A_{i+1} \subset .. \subset B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j = lim_{j \to \infty}(A_j)$$

Mivel $A_j \in S, \ j = 1, 2..$ és mivel S egy σ-gyűrű ezért $B \in S$. Tekintettel arra, hogy μ egy mérték ezért

$$\mu(A_1) \leq \mu(A_2) \leq .. \leq \mu(A_i) \leq \mu(A_{i+1}) \leq .. \leq \mu(B)$$

és

$$\mu(B) = \mu(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(lim_{j \to \infty} A_j) = lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$$

(ahol az utolsó egyenlőség ismert a mértékelméletből).

A következő lépésben megmutatjuk, hogy a $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ halmaz $H(= \cup_{j=1}^{\infty} G_i)$-invariáns. Ezért legyen $g \in H$ tetszőlegesen kiválasztva. Igy létezik $G_i \subset H$ úgy, hogy $g \in G_i$. Viszont $B = A_i \cup_{j=i+1}^{\infty} A_j$. Az előzőek szerint A_i egy G_i-invariáns halmaz és az A_j $(j > 1)$ halmazok G_j-invariánsak lévén ezért G_i-invariánsak is mivel $G_i \subset G_j$. Tehát

$$gB = g(A_i \cup_{j=i+1}^{\infty} A_j) = gA_i \cup_{j=i+1}^{\infty} gA_j = A_i \cup_{j=i+1}^{\infty} A_j = B$$

Hasonlóan egy másik halmazsorozat is származtatható csak nem a halmazegyesítéssel hanem a metszettel:

$$A_1' = A_1; \ A_2' = \cap_{g \in G_2} g A_1; ..; A_{i+1}' = \cap_{g \in G_{i+1}} g A_i'; ..$$

Egyszerű belátni, hogy az A'_i halmaz G_i-invariáns $\forall i = 1, 2..$ és definiáljuk a $B' = \cap_{j=1}^{\infty} A'_j = lim_{j\to\infty} A'_j$; akkor

$$B' \subset .. \subset A'_{j+1} \subset A'_j \subset A'_{j-1} \subset .. \subset A'_1 = A_1$$

$$0 \le \mu(B') \le .. \le \mu(A'_{j+1}) \le \mu(A'_j) \le .. \le \mu(A'_1) = \mu(A_1) < \infty$$

Tehát $\mu(B')$ véges, ugyanakkor érvényes, hogy $B' \subset A'_1 = A_1 \subset B$ ahol B' és B H-invariánsak.

A továbbiakban $\mu(B)$ végességét vizsgáljuk. $\mu(B)$ akkor és csak akkor véges ha $\mu(A_j)$ egy Cauchy sorozat vagyis akkor és csak akkor ha

$$lim_{j\to\infty}[\mu(A_{j+1}) - \mu(A_j)] = 0$$

azaz ha

$$\mu[(A_{j+1} - A_j) \cup (A_j - A_{j+1})] = d(A_{j+1}, A_j) \to 0 \ (j \to \infty)$$

ahol

$$d(E, F) = \mu(E\Delta F) = \mu[(E - F) \cup (F - E)]$$

mint ismeretes azt a távolságfüggvényt jelöli amit a véges mértékű halmazok metrikus terében szokás definiálni.

$$\mu(A_{j+1} - A_j) = \mu(\cup_{g\in G_{j+1}} gA_j - A_j) = \mu(\cup_{g\in G_{j+1}}(gA_j - A_j))$$

Ha $g_2^* \in g_1G_j$ $(g_1, g_2^* \in G_{j+1})$ akkor $g_2^*A_j = (g_1g_j)A_j = g_1(g_jA_j) = g_1A_j$. Mivel az A_j halmaz G_j invariáns azt kapjuk, hogy

$$\mu(\cup_{g\in G_{j+1}}(gA_j - A_j)) \le \mu(g_1A_j - A_j) + .. + \mu(g_{k-1}A_j - A_j)$$

ahol $g_1, g_2, .., g_{k-1} \in G_{j+1} - G_j$ és $g_mG_j \ne g_nG_j$ $(m \ne n,\ m, n = 1, 2, .., k-1)$. Ebből arra következtetünk, hogy

$$(\mu(g_1A_j - A_j) + .. + \mu(g_{k-1}A_j - A_j)) \longrightarrow 0 \ (j \to \infty)$$

elégséges feltétel a $\mu(A_j)$ sorozat konvergenciájához (és így $\mu(B)$ végességéhez). Lagrange tételéből (miszerint véges csoport részcsoportjának elemeinek száma osztója a teljes csoport elemeinek számának) viszont az adódik, hogy

$$|G_j| \to \infty \ (j \to \infty) \ (|G_j| \ge j \ge 1)$$

Viszont egy elégséges feltétel az $\Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(g_mA_j - A_j) \to 0$ határérték teljesüléséhez az az, hogy

$$\mu(gA_j - A_j) \le c/(|G_j|^{\alpha}) \ \forall g \in G_{j+1}, j = 1, 2..$$

ahol α és c pozitív valós számok. Ebben az esetben ugyanis

$$\mu(A_{j+1} - A_j) \leq (k-1)c/(|G_j|^{\alpha}) \leq (k-1)c/j^{\alpha} \to 0 \ (j \to \infty)$$

(az utóbbi határérték az analízisből ismert és triviális; hangsúlyozzuk ugyanakkor, hogy k és c j-től független állandók).

Megjegyzések

(a) μ-balinvariáns ezért

$$\mu(gA_j - A_j) = \mu[g(A_j - g^{-1}A_j)] = \mu(A_j - g^{-1}A_j)$$

Tehát ha $\mu(gA_j - A_j) \to 0$ akkor $\mu(A_j - g^{-1}A_j)$ úgyszintén.

(b) Abban az esetben amikor G_j normális részcsoportja G_{j+1}-nek, $j = 1, 2..$ (például $k = 2$ esetben) érvényes az alábbi összefüggés

$$\Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(g_m A_j - A_j) = \Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(A_j - g_m^{-1}A_j) = \Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(A_j - g_m A_j)$$

Valóban, mivel $g_m \notin g_n G_j$ ezért $g_m^{-1} \notin g_n^{-1}G_j$ (különben $g_m^{-1} = g_n^{-1}g_j$ és így $g_m = g_j^{-1}g_n = g_n g_j' \in g_n G_j$ ami nyílvánvaló ellentmondás). Ezért, ha $\Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(g_m A_j - A_j) \to 0$ $(j \to \infty)$ akkor $\Sigma_{m=1}^{k-1}\mu(A_j - g_m A_j)$ úgyszintén és mivel μ nemnegatív, a $\mu(gA_j - A_j) \to 0$ igazságából a $\mu(A_j - gA_j) \to 0$ $(j \to \infty)$ igazságára következtetünk. Viszont

$$d(gA_j, A_j) = \mu[(gA_j - A_j) \cup (A_j - gA_j)] = \mu(gA_j - A_j) + \mu(A_j - gA_j); g \in G_{j+1}$$

ezért $d(gA_j, A_j) \to 0$ akkor és csak akkor igaz, ha $\mu(gA_j - A_j) \to 0$ $(j \to \infty)$

(c) $\mu(B)$ végességére lehet következtetni ha

$$d(gA_j, A_j) \leq 2c/(|G_j|_{\alpha}); \ (g \in G_{j+1}, \ \alpha > 0, \ j = 1, 2..)$$

$$d(A_{j+1}, A_j) = \mu(A_{j+1} - A_j) = \mu(A_{j+1}) - \mu(A_j) \leq (k-1)c/(j^{\alpha}) \to 0 \ (j \to \infty)$$

4.3. A szimmetria-optimum eset

Térjünk vissza a már említett

$$A_1 \subset A_2 \subset .. \subset A_i \subset A_{i+1} \subset .. \subset B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j = lim_{j\to\infty}(A_j) \qquad (1)$$

sorozathoz ahol a tagok mérhető halmazok és feltételezzük, hogy ν szintén az S-en értelmezett mérték úgy, hogy teljesülnek az alábbi feltételek :

$$0 < \mu(A_1) < \mu(A_2) < .. < \mu(A_i) < .. < \mu(B) = lim_{j\to\infty}\mu(A_j) < \infty \qquad (2)$$

$$0 < \nu(A_1) < \nu(A_2) < .. < \nu(A_i) < .. < \nu(B) = lim_{j\to\infty}\nu(A_j) < \infty \qquad (3)$$

Akkor $lim_{j\to\infty}[\nu(A_j)/\mu(A_j)] = [\nu(B)/\mu(B)]$. Tehát ha $[\nu(A_j)/\mu(A_j)]$ egy csökkenő sorozat (azaz $\mu(A_j)$ gyorsabban növekszik mint $\nu(A_j)$) akkor $[\nu(B)/\mu(B)]$ minimális (úgy tekintünk rá mint egy optimum esetre). Ha úgy tekintünk az A_j sorozatra mint egy "standard" sorozatra abban az értelemben, hogy ha C_j egy másik S-béli sorozat amelyre igaz az, hogy C_j halmaz úgyszintén G_j-invariáns és

$$C_1 \subset C_2 \subset .. \subset C_i \subset C_{i+1} \subset .. \subset B = lim_{j\to\infty}C_j$$

akkor $lim_{j\to\infty}[\nu(C_j)/\mu(C_j)] = [\nu(B)/\mu(B)]$.

Mivel G kompakt, ha $\{g_j\}_{j\in N} \subset H$, akkor $\{g_j\}_{j\in N}$ konvergensnek tekinthető és G zárt lévén, így $lim_{j\to\infty}g_j = g \in G$. Mivel $\overline{H}$ (ahol a felülvonás a topológiai zárást jelenti) zárt részhalmaza a kompakt G-nek, ezért $\overline{H}$ is kompakt és G-nek topologikus részcsoportja (amint ez ismert a topologikus részcsoportokról). Azt állítjuk, hogy $\overline{B}$ egy $\overline{H}$-invariáns halmaz. Valóban, legyen $g \in \overline{H}$ és $x \in B$. Igy $x \in A_j$ valamilyen $j \in N$ indexre. Ekkor $gx = lim_{j\to\infty}g_jx \in \overline{B}$ (az alábbiakban fogom indokolni). Ha $y \in \overline{B}$, akkor $y = lim_{i\to\infty;x_i\in B}x_i$ és így $gy = lim_{i\to\infty}gx_i \in \overline{B}$ (mivel $\overline{B}$ lezártja önmaga $\overline{B}$). Most indokoljuk a feljebb felhasznált összefüggést, nevezetesen: $gx = lim_{j\to\infty}g_jx$ (ahol $g = lim_{j\to\infty}g_j$). Azt kell megmutatni, hogy ha V_{gx} a gx-nek egy környezete, létezik $g_jx \in V_{gx}$ valamilyen j indexértékre. Legyen tehát V_x az x-nek egy tetszőleges környezete és így $gV_x = V_{gx}$ a gx-nek egy tetszőleges környezete. Legyen V_g a g-nek azon környezete amit a V_{gx}-hez asszociálunk. Mivel $g = lim_{j\to\infty}g_j$ ezért létezik $g_j \in V_g$ úgy, hogy $g_jx \in V_{gx}$ ami azt jelenti, hogy $gx = lim_{j\to\infty}g_jx$. Abban a partikuláris esetben, amikor $\overline{B}$ egy kör az euklideszi síkban, $\overline{H}$ a kör teljes szimmetriáját megtestesítő csoportot jelenti.

4.4. Az "izoperimetrikus" probléma

Az alábbiakban feltételezzük, hogy μ és ν olyan mértékek amelyekre teljesül a következő két feltétel:

(a) Ha $\{A_n\}_{n\in N}$ az (1) alatti sorozat úgy, hogy (2) és (3) feltételek teljesülnek akkor $[\nu(A_n)]^s/\mu(A_n)$ egy csökkenő sorozat ahol $s \geq 1$ valós szám (az $s = 0$ eset triviális hiszen $\mu(A_n)$ növekvő).

(b) T egy olyan topológikus részcsoportja F-nek amely izomorf $\mathbf{R}^+$-al ($t_{c_1}t_{c_2} = t_{c_1c_2}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^+$) úgy, hogy az S σ-gyűrű T-invariáns is (azaz $t_cP \in S$ $\forall P \in S$ és $c \in \mathbf{R}^+$), T kommutál H-val és $\nu(t_cP) = c\nu(P)$ illetve $\mu(t_cP) = c^s\mu(P)$.

Például T betöltheti a középpontos hasonlóság szerepét az euklideszi síkban, amelyre $s = 2$ valamint ν és μ rendre a kerületet, illetve a területet jelentik. Megmutatjuk, hogy P és t_cP ugyanazzal a szimmetriával bír a H-ban: ha a P halmaz G_j-invariáns akkor t_cP is az és forditva. Ugyanis, ha $g_jP = P$ akkor $g_j(t_cP) = t_c(g_jP) = t_cP$. Megforditva ha $g_j(t_cP) = t_cP$ akkor

$$g_jP = g_j[t_c^{-1}(t_cP)] = t_c^{-1}[g_j(t_cP)] = t_c^{-1}[t_cP] = P$$

Most megmutatjuk, hogy $[\nu(A_j)]^\beta/\mu(A_j)$ csökkenő $0 \leq \beta < s$ (a $\beta = s$ esetről már az (a) pontban feltételeztük, hogy igaz):

$$[\nu(A_{j+1})]^\beta/\mu(A_{j+1}) : [\nu(A_j)]^\beta/\mu(A_j) =$$

$$= [\nu(A_{j+1})/\nu(A_j)]^\beta[\mu(A_j)/\mu(A_{j+1})] <$$

$$< [\nu(A_{j+1})/\nu(A_j)]^s[\mu(A_j)/\mu(A_{j+1})] < 1$$

A továbbiakban megfogalmazunk egy "izoperimetrikus" problémát. Ha S, ν és μ eleget tesz a már említett két feltételnek és ha $\mathbf{E} \subset S$ egy olyan halmazcsaládot jelöl, amelyre igaz, hogy a család minden tagjára a ν értéke azonos: $\nu(A) = l = const. > 0$ akkor $\mu(A)$ maximális ha A szimmetriája maximális.

Visszatérünk az (1) alatti sorozatra, amely eleget tesz a (2) és (3)-ban leírt feltételeknek. Legyen $c_j \in \mathbf{R}^+$ úgy, hogy $c_j\nu(A_j) = l$ $\forall j = 1, 2, ..$ Igy

$$[c_j\nu(A_j)]/[c_j^s\mu(A_j)] = l/[c_j^s\mu(A_j)] = [\nu(t_{c_j}A_j)]/[\mu(t_{c_j}A_j)] =$$

$$= l/[\mu(t_{c_j}A_j)] = [\nu(A_j)]^s/[l^{s-1}\mu(A_j)]$$

amely utóbbi sorozat csökkenő, amint ezt az (a) feltételben már megfogalmaztuk. Ezért $\mu(t_{c_j}A_j)$ sorozat egy növekvő sorozat, és mivel A_j és az $\mathbf{E}$-béli $t_{c_j}A_j$ halmazok szimmetriája azonos, arra következtetünk, hogy a $B_j = t_{c_j}A_j \in \mathbf{E}$ ($\nu(B_j) = l = const.$) sorozat esetén $\mu(B_j)$, akkor maximális, ha a szimmetria is maximális.

Megjegyzés

Ha $\overline{B} = B \in S$ akkor $\mu(B) = \mu(\overline{B})$ és így az adódik, hogy μ maximális értékét a $\overline{H}$ által megszabott maximális szimmetria esetén veszi fel.

Tekintsük a következő kis alkalmazást egy diéder csoportok sorozatára:

$$G_1 = D_3 \subset G_2 = D_6 \subset G_3 = D_{12} \subset .. \subset G_j = D_{3.2^{j-1}} \subset$$

$$\subset G_{j+1} = D_{3.2^j} \subset G_{j+2} = D_{3.2^{j+1}} \subset .. \subset H = \cup_{j=1}^{\infty} G_j \quad (4)$$

Ebben az esetben $k = |G_{j+1}|/|G_j| = 2$ és $|G_j| = 3.2^j,\ j \geq 1$. Észrevenni, hogy

$$\mu(A_{j+1}) - \mu(A_j) = \mu(A_{j+1} - A_j) = \mu(A_j \cup gA_j - A_j)_{(g \in G_{j+1} - G_j)} = \mu(gA_j - A_j)$$

Ezért, ha a növekvő A_j sorozat (ahol A_j, G_j-invariáns:$j = 1, 2..$) eleget tesz a már említett feltételnek, miszerint $\mu(gA_j - A_j) \leq c/(|G_j|^\alpha)$, $(g \in G_{j+1}, \alpha > 0, j = 1, 2, ..)$ akkor $\mu(B) = \mu(lim_{j\to\infty} A_j) = lim_{j\to\infty}\mu(A_j)$ véges lesz. Mindez arra késztetett, hogy A_1-nek a szabályos háromszöget, A_2-nek a szabályos hatszöget,.., A_j-nek a szabályos 3.2^{j-1}-sokszöget válasszam és így tovább, amely sokszögeket az R sugarú körbe írjuk (μ jelöli az ábrák területét az euklideszi síkban). Igy gA_j, $g \in (G_{j+1} - G_j)$ az A_j ábrának $\pi/(3.2^{j-1})$ szöggel való elforgatását jelenti. Ha $n = 3.2^{j-1}$ akkor

$$\mu(gA_j - A_j) = nR^2(1 - cos(\pi/n))^2/tg(\pi/n)$$

amire egy megközelítő becslést lehet adni:

$$nR^2\pi^4/[(2!)^2 n^4 tg(\pi/n)] \leq nR^2\pi^4/(4n^4\pi/n) =$$

$$= \pi^3 R^2/(2n)^2 = \pi^3 R^2/|G_j|^2 \ (\alpha = 2)$$

Ha $\nu(A_j)$ az A_j síkidom kerülete, nyílvánvaló, hogy $\nu(A_j)$ szintén konvergens sorozat. Valóban, egy hasonló számítással az adódik, hogy

$$\nu(gA_j - A_j) = 4nRsin[\pi/(2n)]\{1/cos[\pi/(2n)] - cos[\pi/(2n)]\} \to 0 \ (j \to \infty)$$

Erre az esetre $s = 2$ és

$$x_n = [\nu(A_n)]^2/\mu(A_n) = 4ntg(\pi/n)_{n\geq 3}$$

Felhasználva a $tg(x)$ függvény Taylor sorbafejtését, az adódik, hogy $x_{n+1} - x_n < 0$ azaz x_n sorozat csökkenő. Tehát ha $c_j\nu(A_j) = l = const.$ akkor - tekintettel arra, hogy $B = \overline{B} =$ kör és $\overline{H}$ a kör szimmetriáját jelenti - azt az eredményt kapjuk, hogy a körnek lesz a legnagyobb területe ($\overline{H}$ valóban a kör szimmetriáját jelenti, hiszen a (4)-ből látni, hogy tetszőleges szöggel való elfordulás valamilyen H-béli sorozat határértékeként áll elő).

Megjegyzések

(a) A $[\nu(A_n)]^s/\mu(A_n)$ sorozat nem lehet csökkenő minden $s \in \mathbf{R}^+$-ra (azaz megállapítható egy felső határ az s értékére), hiszen

$$[\nu(A_{j+1})]^s/\mu(A_{j+1}) : [\nu(A_j)]^s/\mu(A_j)] =$$

$$[\nu(A_{j+1})/\nu(A_j)]^s[\mu(A_j)/\mu(A_{j+1})] >$$

$$> [\mu(A_1)/\mu(B)][\nu(A_{j+1})/\nu(A_j)]^s \to \infty \ (s \to \infty)$$

(b) Az említett összefüggésben, nevezetesen $\nu(t_cP) = c\nu(P)$ és $\mu(t_cP) = c^s\mu(P)$, az R^n szorzattér esetén $s = 2/1$ a (kerület,terület) párosra, $s = 3/2$ a (terület,térfogat) párosra és általában $s = n + 1/n \to 1(n \to \infty)$. Ezen utóbbi esetben az "izoperimetrikus" probléma minden értelmét veszti és legfeljebb csak szimmetria-optimum eset áll elő (itt megjegyzem azt, hogy amennyiben egy (ν, μ) "izoperimetrikus" problémának van megoldása, akkor mindig beszélhetünk egyben egy szimmetria-optimum esetről is hiszen ha $[\nu(A_j)]^s/\mu(A_j)$ $(s > 1)$ csökkenő, akkor $\nu(A_j)/\mu(A_j)$ úgyszintén az.

Összefoglalva tehát, konstruáltunk - csoporthatások által - egy $\{A_j\}_{j\in N}$ halmazsorozatot, melyre igaz az, hogy A_{j+1} szimmetriája magasabb, mint A_j szimmetriája, a $\nu(A_j)$ és $\mu(A_j)$ sorozatok konvergenciája csoport (azaz szimmetria)-függő és ha az "izoperimetrikus" probléma (a) és (b) feltételei teljesülnek, ami az (X, S, ν, μ)-től függ, akkor, amint ezt láttuk - egy szoros kapcsolatot lehet feltárni a szimmetria és a szélsőérték között: a maximális szimmetria egy szélsőértéket implikál. Ez a kapcsolat testesíti meg a **szimmetria-szélsőérték** elvét.

4.5. Az állapotok szimmetriájának az elvének és a szimmetria-szélsőérték elvének kapcsolata

Vizsgáljuk meg a két elv kapcsolatát! Mindkét esetben egyre növekvő szimmetria-sorozatról van szó, hiszen $C^{\sim_G}(x) = \cup_{g\in G} g\{x\}$ az x osztálya és hasonlóan $A_{j+1} = \cup_{g\in G} gA_j = C^{\sim_G}(A_j)$ az A_j-nek osztálya és így $C^{\sim_G}(x)$ illetve, $C^{\sim_G}(A_j)$ osztályok G-invariánsak. Azonban, a véges csoportok azon sorozata, amely szerepel a szimmetria-szélsőérték elvét kifejtő elméletben, nem szükséges, hogy normállánc legyen, ezért a szimmetria-szélsőérték elve a másik elv általánosításaként is értelmezhető. Másrészről viszont az állapotok szimmetriájának az elvét származtató elméletben nem feltétlenül szükséges definiálni (értelmezni) semmilyen mértéket az elemek osztályain. Ezért, ebből a szempontból megállapítom, hogy a szimmetria-szélsőérték elve speciális esetként áll elő az állapotok szimmetriája elvének.

5. Az eredmények összefoglalása

Csoporthatás halmazokon és automataelmélet-című fejezet eredményeinek az összefoglalása.

A fejezet három alfejezetre bontott. A **Csoporthatások halmazokon elmélettel kapcsolatos eredmények** című alfejezetben levő megállapítások, egy X, mint G-halmaz ugyanazon $C^{\sim}(x)$ osztályához tartozó elemek stabilizátorai, és ezek $N(G_x)$, illetve $N(G_{x'})$ normalizátoraira vonatkozó összefüggéseket tartalmazzák. Ezen összefüggések egy része a fent említett osztály elemeihez asszociált stabilizátorok normalizátorai és a teljes G csoport viszonyát vizsgálja (ha $N(G_x) \subset G$, akkor $N(G_{x'}) \subset G$ úgyszintén minden $x' \in C^{\sim}(x)$), egy másik része pedig az elemek stabilizátorai és ezek normalizátorainak viszonyát (ha $G_x = N(G_x) \subset G$ és $x' \in C^{\sim}(x)$, $x' \neq x$ akkor $G_x \neq G_{x'}$). Külön megfogalmazásra kerülnek olyan eredmények, amelyek G véges számossága esetén érvényesek. Az alfejezet végén megfogalmazunk egy beágyazási tételt, nevezetesen, megfogalmazzuk annak feltételét, hogy az X halmaz beágyazható legyen a G csoport összes G_x stabilizátor részcsoportjának halmazába.

A **Csoporthatások halmazokon és kategóriaelmélet kapcsolatával összefüggő eredmények** című alfejezetben két kategóriát definiálunk, nevezetesen: az $x \in X$, $C^{\sim}(x)$ osztályát, melynek objektumai az osztály elemei, a morfizmusokat a G csoport elemeinek a hatásai valósítják meg, és a másik kategória pedig a $C^{\cong}(G_x)$ osztály (ahol az objektumok a $C^{\sim}(x)$ elemeinek stabilizátorai) a morfizmusok pedig a G elemeivel képezett gG_xg^{-1} konjugálások. Ellenőrizzük a kategória axiómáit. Végül megmutatjuk, hogy konstruálható egy funktor a két kategória között.

A **Kölcsönhatáselmélettel kapcsolatos eredmények** című alfejezetben Mealy- automaták állapothalmazain (az állapotok közötti átmenetet csoporthatások valósítják meg; a kérdéses csoportról csak annyit feltételezünk, hogy tranzitíven hat az állapothalmazon és van egy nem triviális kompozíciólánca) normális részcsoportok elemeinek hatásai által indukált kongruenciarelációt értelmezünk. A fizikából kölcsönzött szóval, a kölcsönhatást definiáljuk a Mealy-automata számára: az automata akkor vesz részt kölcsönhatásban, ha az állapothalmazán a fent említett kongruencia osztályai között történik az átmenet. Felhasználva a csoportelmélet izomorfizmustételeit illetve az automata-homomorfizmus fogalmát megmutatjuk, hogy a kölcsönhatásban résztvevő automata a homomorfkép automatára transzformálódik; a gondolatmenet folytatható az új automatára (tehát kölcsönhatássorozatot értelmezünk az automaták eme sorozatán). Végül egy szimmetriaelvet fogalmazunk meg a fent említett kölcsönhatássorozatra amely az "Állapotok szimmetriájának az elve" elnevezést kapta.

A **Szimmetria-szélsőérték elve** című fejezetben - amint azt már említettük a **Történeti áttekintés** című fejezetben - a szimmetria és a szélsőérték kapcsolatát kutatjuk abból a célból, hogy a klasszikus izoperimetrikus problémát egy másik oldalról közelítsük meg: a probléma eredménye által sugallt szimmetria-szélsőérték kapcsolatának az oldaláról.

Ebben a fejezetben is a kulcsszó a csoporthatás de nem halmazelemeken hanem egy egész halmazon (végülis a transzformált halmaz - hasonlóan a csoportok részhalmazainak balról (jobbról) való szorzásához - úgy áll elő, hogy elemeit a régi halmaz elemeiből kapjuk azáltal, hogy egy adott csoportelem hatást gyakorol ezeken az elemeken):

$$gE \;=\; \{gx \;:\; x \in E\}$$

ahol g egy csoportelem. Triviálisan kövezkezik, hogy $eE = E$ és az asszociatívításra vonatkozó összefüggés is. Az X tér amelyen dolgozunk egy szeparábilis, lokálisan kompakt Hausdorff-tér; S a Baire-féle halmazok σ-gyűrűje (amely - mint ismert a mértékelméletből - az ilyen terekben egybeesik a Borel-féle halmazok σ-gyűrűjével. Feltételezzük S-ről, hogy balinvariáns azaz ha $E \in S$ akkor $gE \in S$ úgyszintén.

Jelölje μ egy Baire-féle mértéket az S-en (mint ismert, az euklideszi sík Borel=(Baire) σ-gyűrűjén értelmezett Lebesgue-féle mérték egy Borel-féle reguláris mérték lesz (azaz a Borel mérték egybeesik a Baire mértékkel amely - mint úgyszintén ismert mindig reguláris)). A fent említett téren konstruálunk egy $\{A_n\}_{n\in N}$ mérhető halmazok sorozatát a következő eljárással. Legyen

$$G_1 = \{e\} \subset G_2 \subset ... \subset G_i \subset G_{i+1} \subset ... \subset H = \cup_{j=1}^{\infty} G_j \subset G$$

ahol $G_1, G_2, ..$ véges csoportok úgy, hogy $|(G_{i+1} : G_i| = k \geq 2 \; \forall i = 1, 2..$ (például $G_{i+1} = D_{2n}$ és $G_i = D_n$) és G egy kompakt topologikus részcsoportja az X-tér önmagára való összes topologikus leképezések F csoportjának. Jelölje $A_1 \in S$; $A_2 = \cup_{g\in G_2} gA_1$; ..;. Tehát adott a

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_i \subset A_{i+1} \subset ... \subset B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j = lim_{j\to\infty}(A_j);$$

mérhető halmazok sorozata, ahol A_i nyilvánvalóan G_i-invariáns. A fejezet elején vizsgáljuk annak feltételeit, hogy $\mu(B) = lim_{j\to\infty}\mu(A_j)$ véges legyen. Legyen ν egy másik mérték az S-en. A következő **hipotézisekből** indulunk ki:

$\mu(B)$ és $\nu(B)$ véges;

$[\nu(A_j)]^s/\mu(A_j)$ egy csökkenő sorozat, ahol s egy nem negatív valós szám, $s \geq 1$

T az $\mathbf{R}^+$-al izomorf ($t_{c_1}t_{c_2} = tc_1c_2$) (c_1, c_2 pozitív valós számok), T az F-nek topologikus részcsoportja úgy, hogy S T-invariáns úgyszintén, valamint T felcserélhető H-val;

$\nu(t_cP) = c\nu(P)$ és $\mu(t_cP) = c^s\mu(P)$ minden $P \in S$;

$\mathbf{E}\subset S$ olyan halmazosztály amelyre érvényes, hogy $\nu(A) = l = const > 0\ \forall A \in \mathbf{E}$;

Akkor:

P és t_cP szimmetriája azonos H-ban; (t_c hatása olyan mint egy középpontos hasonlóság c paraméterrel)

$\mu(A)$ értéke maximális ha A szimmetriája maximális;

$\overline{B}$ halmaz $\overline{H}$ invariáns (ahol a felülvonások a lezárást jelölik az X-ben illetve az F-ben);

ha B zárt, azaz $\overline{B} = B \in S$, akkor $\mu(B) = \mu(\overline{B})$ és μ a maximális értékét a maximális $\overline{H}$ szimmetria esetén veszi fel;

Ez testesíti meg a szimmetria-szélsőérték elvet. A fejezet végén alkalmazzuk a fenti eredményeket az euklideszi síkban: μ és ν rendre a terület és a kerületet jelöli. A csoportsorozatunk a következő:

$$G_1 = D_3 \subset G_2 = D_6 \subset G_3 = D_{12} \subset .. \subset G_j = D_{3.2^{j-1}} \subset .. \subset H = \cup_{j=1}^{\infty} G_j$$

Tehát A_j az R sugarú körbeírt 3.2^{j-1} oldalú szabályos sokszög ($j = 1, 2..$). Most $s = 2$ és az

$$x_n = [\nu(A_n)]^2/\mu(A_n) = 4ntg(\pi/n)_{n\geq 3}$$

csökkenő sorozat. Így arra következtetünk, hogy ha $c_j\nu(A_j) = l = const$, akkor a körnek lesz maximális területe, mert $B = \overline{B}$ =kör és $\overline{H}$ a kör szimmetriája, mivel minden forgatás (tetszőleges szöggel) előállítható valamilyen H-beli sorozat határértékeként (tehát visszaköszön az izoperimetrikus probléma eredménye mint a szimmetria-szélsőérték elvének egy speciális esete).

Irodalom

[1] J. Benkő, A topológia elemei, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1975.

[2] P. J. Cameron, Permutation Groups, Cambridge University Press, 1999.

[3] P. Dömösi, F. Attila, G. Horváth, Z. Mecsei, Formális Nyelvek és Automaták, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, Informatikai Intézet, Debrecen, 2003.

[4] L. Filep, A tudományok királynője (A matematika fejlődése), Typotex, Budapest, Bessenyei Kiadó-Nyíregyháza, 1997.

[5] J. B. Fraleigh, A first Course in Abstract Algebra, 5th ed., Addision-Wesley, Reading, MA, 1994.

[6] F. Gécseg, I. Peák, Algebraic Theory of Automata, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972.

[7] P. R. Halmos, Measure Theory, Springer, Berlin, 1950.

[8] Gy. Maurer, I.Virág, Bevezetés a struktúrák elméletébe, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1976.

[9] L. Pontrjagin, Topological Groups, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1946.

[10] F. Reinhardt-H. Soeder, SH atlasz, Matematika, Springer-Verlag, Budapest, 1993.

[11] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, Inc., New York (Hungarian Translation), Walter Rudin, A Matematikai Analízis Alapjai, Műszaki Könyvkiadó Budapest, 1978.

[12] M. Sain, Matematikatörténeti ABC, Ötödik, átdolgozott éstett kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

[13] M. Sain, Nincs királyí út!, Matematikatörténet, Gondolat. Budapest, 1986.

[14] E. T. Schmidt, Algebra, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[15] M. Suzuki, Group Theory, Springer Berlin, 1986.

[16] L. A. Veress, Group actions on sets and automata theory, Applied Mathematics and Computation, 113(2000)289-304.

[17] L. A. Veress, Symmetry principles via interactions and symmetry-violations, Applied Mathematics and Computation, 134(2003)567-575.

[18] L. A. Veress, The principle of symmetry-extremity, Applied Mathematics and Computation, 137(2003)293-301.

[19] L. A. Veress, Newton's laws, symmetry, and the three basic interactions of the nature, Applied Mathematics and Computation, 146(2003)73-80.

[20] L. A. Veress, Has the nature its own philosophy?, Applied Mathematics and Computation, 150(2004)347–350.