



DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR  
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

KÖZÖNSÉGES  
MAGASABBRENDŰ DIFFERENCIÁL-  
EGYENLETEK  
ÉS ALKALMAZÁSAIK



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debrecen University Press

2019

Lektorálta:

Dr. Nagy Gergő  
egyetemi adjunktus  
Debreceni Egyetem TTK Analízis Tanszék

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-831-6

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press  
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi  
Nyomdai munkálatokat  
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben  
[dupress.unideb.hu](http://dupress.unideb.hu)



## 1. Alapfogalmak

1.1. **Megjegyzés.** Jelen jegyzet közvetlen folytatása a korábban megjelent „Közösleges elsőrendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik” oktatási segédanyag, amely jelöléseire, ismereteire hivatkozni fogunk.

Ebben a jegyzetben magasabbrendű (közösleges) differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni. Vizsgálatainkban kitüntetett szerepet kapnak a másodrendű differenciálegyenletek, így a bevezető fogalmakat általánosan,  $n$ -edrendű differenciálegyenletekre mondjuk ki, majd speciálisan másodrendű differenciálegyenletekre is külön ismertetjük.

Amennyiben mást nem mondunk, úgy a továbbiakban  $I$  egy rögzített nyílt intervallumot jelöl.

1.2. **Definíció.** *Differenciálegyenletnek* nevezünk egy olyan egyenletet, melyben szerepel egy vagy több (független) változó, azoknak valamilyen ismeretlen függvénye és annak derivált függvényei. Ha az ismeretlen függvény egyváltozós, akkor *közösleges differenciálegyenletről* beszélünk, ha többváltozós, akkor *parciális differenciálegyenletről*.

1.3. **Definíció.** Egy differenciálegyenlet *rendje* az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált rendje. Ha egy közösleges differenciálegyenletben a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve a változó és a többi derivált függvényeként, akkor *explicit* egyenletről beszélünk, ellenkező esetben *implicit* egyenletről szólunk.

1.4. **Példa.** Ha  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

egyenlet  $n$ -edrendű, explicit, közösleges differenciálegyenlet.

Speciálisan, ha  $D \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmaz és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor az

$$y''(x) = f(x; y(x); y'(x))$$

differenciálegyenlet másodrendű, explicit, közösleges differenciálegyenlet.

1.5. **Példa.** Az

$$y''(x) = x^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x)$$

egyenlet közösleges másodrendű explicit differenciálegyenlet.

1.6. **Megjegyzés.** Amennyiben egyértelmű a differenciálegyenletben szereplő függvény változója, úgy azt elhagyhatjuk, vagyis az

$$y''(x) = x^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x)$$

egyenlet helyett alkalmazható az

$$y'' = x^2 \cdot y' + 2x \cdot y$$

írás mód is.

1.7. **Megjegyzés.** Amennyiben a differenciálegyenletben szereplő függvény változója időt jelöl, úgy a változót  $t$ -vel, a deriváltat ponttal szokás jelölni. Például az

$$\ddot{s}(t) = t + 2$$

egy mozgás hely-idő függvényére felírt differenciálegyenlet, ahol  $\dot{s}$  a  $t \mapsto s(t)$  függvény deriváltját jelöli.

1.8. **Példa.** Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével, ami általános esetben függhet az időtől, a helytől és a sebességtől, azaz felírható az

$$F(t; s(t); v(t)) = m \cdot a(t)$$

differenciálegyenlet.

Felhasználva, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja, valamint a gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja, ezért az előbbi egyenletet az

$$F(t; s(t); \dot{s}(t)) = m \cdot \ddot{s}(t)$$

alakban is felírhatjuk, amit  $m$ -el elosztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t; s(t); \dot{s}(t)),$$

ami egy közönséges másodrendű explicit differenciálegyenlet.

1.9. **Definíció.** Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy a  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *megoldásfüggvénye* vagy *megoldása* az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

$n$ -edrendű, explicit differenciálegyenletnek, ha

- $\varphi$   $n$ -szer differenciálható függvény az  $I$  intervallumon;
- minden  $x \in I$  esetén  $(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$ ;

- minden  $x \in I$  esetén  $\varphi^{(n)}(x) = f(x; \varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x))$ .

Tehát azt mondjuk, hogy egy függvény megoldása a fenti differenciálegyenletnek, ha  $n$ -szer differenciálható és behelyettesítve az eredeti egyenletbe igaz egyenlőséget kapunk (feltéve, hogy a behelyettesítésnek van értelme).

**1.10. Megjegyzés.** Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmaz. A  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldásfüggvénye (vagy röviden megoldása) az

$$y''(x) = f(x; y(x); y'(x))$$

differenciálegyenletnek, ha

- $\varphi$  differenciálható függvény az  $I$  intervallumon;
- minden  $x \in I$  esetén  $(x; \varphi(x); \varphi'(x)) \in D$ ;
- minden  $x \in I$  esetén  $\varphi''(x) = f(x; \varphi(x); \varphi'(x))$ .

**1.11. Példa.** Az

$$y''(x) = 2y(x) + 2x \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletnek a

$$\varphi(x) = e^{x^2}$$

függvény megoldásfüggvénye, ugyanis

a bal oldal

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= (e^{x^2})'' = (e^{x^2} \cdot 2x)' = \\ &= e^{x^2} \cdot 4x^2 + e^{x^2} \cdot 2; \end{aligned}$$

a jobb oldal

$$\begin{aligned} 2 \cdot \varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x) &= 2e^{x^2} + 2x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \\ &= 2e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2}. \end{aligned}$$

Így

$$\varphi''(x) = 2 \cdot \varphi(x) + 2x \cdot \varphi'(x),$$

vagyis a  $\varphi$  függvény megoldása az

$$y''(x) = 2y(x) + 2x \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletnek.

**1.12. Definíció.** Egy differenciálegyenlet *általános megoldásán* a differenciálegyenlet összes megoldásfüggvényének halmazát értjük.

1.13. **Megjegyzés.** Egy  $n$ -edrendű differenciálegyenlet általános megoldása  $n$  darab tetszőleges, egymástól független konstans tartalmaz.

1.14. **Definíció.** Egy  $n$ -edrendű differenciálegyenlet *partikuláris megoldásán* olyan megoldást értünk, amely legfeljebb  $n - 1$  darab tetszőleges, egymástól független konstans tartalmaz.

1.15. **Megjegyzés.** Egy másodrendű differenciálegyenlet általános megoldása 2 tetszőleges konstans tartalmaz.

Egy másodrendű differenciálegyenlet partikuláris megoldása legfeljebb egy tetszőleges konstans tartalmaz.

1.16. **Példa.** Az

$$y''(x) - y(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása a

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{3x},$$

ahol  $c_1$  és  $c_2$  tetszőleges valós számok.

Az

$$y''(x) - y(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\varphi(x) = e^{3x}.$$

1.17. **Definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz és  $(x_0; y_0; \dots; y_{n-1}) \in D$ . Az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

differenciálegyenletre vonatkozó *kezdetiérték problémán*, *kezdetiérték feladaton*, *Cauchy-problémán* vagy *Cauchy-feladaton* azt a feladatot értjük, amelyben az egyenlet azon  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldásfüggvényét keressük, amelyre teljesül, hogy

$$(1) \ x_0 \in I;$$

$$(2) \ \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Ilyenkor a  $\varphi$  függvényt a kezdetiérték probléma *megoldásának* vagy *megoldásfüggvényének* nevezzük.

A kezdetiérték probléma megoldása során tehát a differenciálegyenlet olyan megoldását keressük, amely eleget tesz további, úgynevezett kezdetiérték feltétel(ek)nek is.

**1.18. Megjegyzés.** A kezdetiérték feltételek száma megegyezik a differenciálegyenlet rendjével. Speciálisan egy másodrendű differenciálegyenlet esetén 2 kezdetiérték feltételt írunk elő.

**1.19. Megjegyzés.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmaz és  $(x_0; y_{0_1}; y_{0_2}) \in D$ . Az

$$y'(x) = f(x; y(x); y'(x))$$

differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték problémán (kezdetiérték feladaton), vagy Cauchy-feladaton azt a feladatot értjük, amelyben az egyenlet azon  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldását keressük, melyre

$$(1) x_0 \in I;$$

$$(2) \varphi(x_0) = y_{0_1}, \varphi'(x_0) = y_{0_2}.$$

**1.20. Példa.** Az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

feladat kezdetiérték feladat. Ennek megoldása

$$\varphi(x) = e^{3x} + e^{-2x}.$$

Ugyanis  $\varphi$  deriváltja

$$\varphi'(x) = 3e^{3x} - 2e^{-2x},$$

$\varphi$  másodrendű deriváltja

$$\varphi''(x) = 9e^{3x} + 4e^{-2x},$$

így

$$\begin{aligned} \varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) &= 9e^{3x} + 4e^{-2x} - 3e^{3x} + 2e^{-2x} - \\ &\quad - 6e^{3x} - 6e^{-2x} = 0, \end{aligned}$$

másrészt

$$\varphi(0) = 2$$

és

$$\varphi'(0) = 1.$$

**1.21. Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x),$$

differenciálegyenletet  $n$ -edrendű közönséges *lineáris differenciálegyenletnek* nevezzük. Ha egy közönséges differenciálegyenlet nem ilyen alakú, akkor azt mondjuk, hogy az egyenlet *nem lineáris*.

**1.22. Megjegyzés.** Egy differenciálegyenlet lineáris, ha a differenciálegyenlet egyik oldala az ismeretlen függvény és annak deriváltjainak lineáris kombinációja, a másik pedig egy, csak a független változótól függő kifejezés.

**1.23. Példa.** Az

$$y''(x) = x^3 \cdot y'(x) + y(x)$$

egyenlet lineáris, míg az

$$y''(x) = \cos y(x)$$

egyenlet nem lineáris.

**1.24. Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x)$$

lineáris differenciálegyenletet *homogénnek* nevezzük, ha  $b$  az azonosan zéró függvény. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *inhomogén*.

**1.25. Megjegyzés.** Egy lineáris differenciálegyenletet homogén, ha minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt, vagy annak valamely deriváltját. Ellenkező esetben az egyenlet inhomogén.

**1.26. Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. A

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x)$$

lineáris differenciálegyenletet *konstansegyütthatós*nak vagy más szóval *állandó együtthatós*nak nevezzük, ha minden  $i \in \{0; 1; \dots; n\}$  esetén az  $a_i$  függvények konstans függvények. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az egyenlet *függvényegyütthatós*.

**1.27. Megjegyzés.** Ha egy lineáris differenciálegyenletben az ismeretlen függvény együtthatója és az ismeretlen függvény deriváltjainak együtthatója is konstans, úgy az egyenlet konstansegyütthatós, ellenkező esetben függvényegyütthatós.

**1.28. Példa.** Az

$$y''(x) + 3y'(x) - 5y(x) = 0$$

differenciálegyenlet *konstansegyütthatós*, míg az

$$x \cdot y''(x) + 3x \cdot y(x) = 5$$

differenciálegyenlet *függvényegyütthatós*.

1.29. **Példa.** Az

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenlet homogén, míg az

$$y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = x^2$$

differenciálegyenlet inhomogén.

1.30. **Példa.** Az

$$y''(x) = \cos x - x^2 \cdot y'(x)$$

differenciálegyenlet

- közönséges;
- másodrendű;
- lineáris;
- inhomogén;
- függvényegyütthatós;
- explicit.

1.31. **Definíció.** Legyen  $I$  egy intervallum. Az  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineárisan függetlenek a valós számok halmaza fölött, ha a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő, azaz ha

$$\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(x) = 0,$$

akkor

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Egy függvényrendszer lineárisan függő, ha nem lineárisan független, vagyis az  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineárisan függők, ha léteznek olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  nem mind nulla skalárok, hogy

$$\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(x) = 0.$$

1.32. **Példa.** Az

$$\{1; x; x^2\}$$

függvényrendszer lineárisan független, ugyanis ha

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0,$$

akkor

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot x^2,$$

vagyis

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

1.33. **Példa.** Tekintsük a

$$\{\sin^2 x; \cos^2 x; 1\}$$

függvényrendszert!

Mivel

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

ezért

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0,$$

így a zérusvektort nem csak csupa nulla együtthatóval állítják elő a függvények, vagyis a

$$\{\sin^2 x; \cos^2 x; 1\}$$

függvényrendszer lineárisan függő.

1.34. **Megjegyzés.** Ha az  $f_1$  és  $f_2$  függvények lineárisan függők, akkor

$$\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) = 0$$

teljesül úgy, hogy  $\alpha_1 \neq 0$  vagy  $\alpha_2 \neq 0$ . Ekkor felírható, hogy

$$f_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot f_2(x)$$

vagy

$$f_2(x) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot f_1(x).$$

Tehát két függvény pontosan akkor lineárisan függő, ha valamelyik felírható a másik konstansszorosaként.

1.35. **Definíció.** Legyenek  $f_1, f_2, \dots, f_n$  legalább  $(n - 1)$ -szer differenciálható függvények az  $I$  intervallumon. Az ezen függvényekből képzett függvényrendszer *Wronski-determinánsa* a

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

mennyiség.

1.36. **Példa.** Az

$$\{1; x; x^2\}$$

függvényrendszer Wronski-determinánása

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

1.37. **Megjegyzés.** A Wronski-determináns értéke a függvények lineáris függőségéről, függetlenségéről ad információt.

1.38. **Tétel.** Legyenek  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  legalább  $(n-1)$ -szer differenciálható lineárisan függő függvények. Ekkor a függvényekből képzett függvényrendszer Wronski-determinánása azonosan 0, azaz  $\det W(x) = 0$  minden  $x \in I$  esetén.

*Bizonyítás:* Mivel az  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények lineárisan függők, ezért léteznek olyan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  nem mind nulla skalárok, hogy

$$\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(x) = 0.$$

Képezzük ezen egyenlet elsőrendű, másodrendű,  $\dots$ ,  $(n-1)$ -edrendű deriváltját. Ekkor a

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 \cdot f_1'(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2'(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n'(x) & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot f_1''(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2''(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 \cdot f_1^{(n-1)}(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2^{(n-1)}(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array} \right\}$$

homogén lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Az előbbi  $n$  egyenletből álló egyenletrendszer alapmátrixának determinánása

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

ami éppen az  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  függvényrendszerből képzett Wronski-determináns. Mivel a homogén lineáris egyenletrendszernek van nem triviális (azaz

nem csupa nulla számokból álló) megoldása, ezért az alapmátrixának determinánsa nulla, tehát  $\det W(x) = 0$ , amivel igazoltuk az állítást. ■

1.39. **Példa.** Láttuk, hogy a

$$\{\sin^2 x; \cos^2 x; 1\}$$

függvényrendszer lineárisan függő. Az előbbi tétel szerint a Wronski-determinánsa 0. Ez valóban igaz, hiszen ha kiszámoljuk a Wronski-determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin 2x & -\sin 2x & 0 \\ 2 \cos 2x & -2 \cos 2x & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

1.40. **Megjegyzés.** Az előbbi tétel megfordítása nem igaz, azaz abból, hogy egy függvényrendszerből képzett Wronski-determináns azonosan zérus még nem következik, hogy a függvények lineárisan függetlenek. Erre Peano adott először példát. Tekintsük az  $f_1(x) = x^2$  és  $f_2(x) = x \cdot |x|$  függvényeket. Ekkor a Wronski-determináns

$$\det W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix}, & \text{ha } x \geq 0; \\ \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ 2x & -2x \end{vmatrix}, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

A Wronski-determináns értéke zérus minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén, azonban az  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  függvények lineárisan függetlenek. Ugyanis, ha

$$\alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot x \cdot |x| = 0,$$

akkor

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \begin{cases} -1, & \text{ha } x > 0 \\ 1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

tehát a 0-t tartalmazó bármely intervallumon nincs nemtriviális megoldása az előbbi egyenletnek, így a függvények valóban lineárisan függetlenek.

1.41. **Megjegyzés.** Vannak olyan feltételek, amelyek mellett a Wronski-determináns zérus voltából már következik a függvények lineáris függősége. Például, ha a függvényrendszert alkotó függvények analitikusak (lokálisan Taylor-sorba fejthetők) és a függvényrendszerből képzett Wronski-determináns azonosan nulla, akkor a függvények lineárisan függők.

**1.42. Tétel.** Legyenek  $f_1, f_2, \dots, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  legalább  $(n-1)$ -szer differenciálható függvények. Ha a függvényekből képzett függvényrendszer Wronski-determinánsa  $I$  legalább egy pontjában nem nulla, akkor a függvények az  $I$  intervallumon lineárisan független függvényrendszert alkotnak.

*Bizonyítás:* Legyen  $x_0 \in I$  olyan pont, amelyre  $\det(W(x_0)) \neq 0$ . Ha valamely  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  együtthatókra

$$\alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(x) = 0$$

minden  $x \in I$  esetén, akkor speciálisan  $x_0 \in I$  esetén is

$$\alpha_1 \cdot f_1(x_0) + \alpha_2 \cdot f_2(x_0) + \dots + \alpha_n \cdot f_n(x_0) = 0,$$

továbbá teljesül az

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 \cdot f_1'(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2'(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n'(x) & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot f_1''(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2''(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n''(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 \cdot f_1^{(n-1)}(x) & + & \alpha_2 \cdot f_2^{(n-1)}(x) & + & \dots & + & \alpha_n \cdot f_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer, vagyis az  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  megoldása a

$$\begin{pmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \dots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \dots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek. Mivel ezen egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa nem nulla, ezért az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van, így

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0,$$

tehát az

$$\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

függvényrendszer lineárisan független. ■

**1.43. Megjegyzés.** Az állítás megfordítás általános esetben nem igaz.

**1.44. Megjegyzés.** A függvények lineáris függetlensége eldöntése fontos szerepet játszik a magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek elméletében.

1.45. **Tétel.** Ha egy homogén  $n$ -edrendű lineáris differenciálegyenletnek

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

lineárisan független megoldásfüggvényei, akkor megadható az egyenlet általános megoldása. Az általános megoldás

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x),$$

ahol  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

1.46. **Megjegyzés.** Az előző tétel állítása azt jelenti, hogy ha ismerjük egy  $n$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet  $n$  darab lineárisan független megoldását, akkor ezen megoldások lineáris kombinációja megadja az általános megoldást.

1.47. **Definíció.** Egy  $n$ -edrendű lineáris homogén differenciálegyenlet esetén a megoldásfüggvények vektorterének tetszőleges bázisát *alaprendszernek* nevezük.

1.48. **Példa.** Megmutatjuk, hogy az

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek  $\{e^x; e^{3x}\}$  egy alaprendszere.

Az  $e^x$  függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$e^x - 4 \cdot e^x + 3e^x = 0.$$

Az  $e^{3x}$  függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mert

$$9e^x - 12 \cdot e^x + 3e^x = 0,$$

valamint az  $e^x, e^{3x}$  függvényekből képzett Wronski-determináns

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{3x} \\ e^x & 3e^{3x} \end{pmatrix} = 2e^{4x} \neq 0,$$

így  $e^x$  és  $e^{3x}$  lineárisan független függvények.

Tehát  $e^x$  és  $e^{3x}$  lineárisan független megoldásai a differenciálegyenletnek, így alaprendszert alkotnak.

**1.49. Tétel. (Cauchy-Peano)**

Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz és tekintsük az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt és az  $(x_0; y_0; y_1; \dots; y_{n-1}) \in D$  pontot! Az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0; y'(x_0) = y_1; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

kezdetiérték feladat megoldható, ha az  $f$  függvény folytonos egy olyan  $D$ -beli tartományon, amelynek  $(x_0; y_0; y_1; \dots; y_{n-1})$  belső pontja.

**1.50. Példa. Az**

$$\begin{aligned} y''(x) &= 2 \sin(y'(x) \cdot y(x)) + y^2(x) \cdot (\sin x + \cos(y(x))) \\ y(0) &= 0; y'(0) = 2 \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak létezik megoldása, mert az

$$f(u; v; w) = 2 \sin(v \cdot w) + v^2 \cdot (\sin u + \cos w)$$

függvény folytonos az  $\mathbb{R}^3$  tartomány minden pontjában, így a  $P = (0; 0; 2)$  pontot tartalmazó valamely nyílt környezetben is.

**1.51. Tétel. (Picard-Lindelöf)**

Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz és tekintsük az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt és az  $(x_0; y_0; y_1; \dots; y_{n-1}) \in D$  pontot! Az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= y_0; y'(x_0) = y_1; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható, ha az  $f$  függvény folytonos egy olyan  $D$ -beli tartományon, amelynek  $(x_0; y_0; y_1; \dots; y_{n-1})$  belső pontja és az  $f$  függvény a második változótól kezdve minden változó szerint parciálisan differenciálható és a parciális deriváltak korlátosak.

**1.52. Példa. Az**

$$y''(x) = x \cdot y^2(x) + \sin(y'(x)), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható, mert az

$$f(u; v; w) = u \cdot v^2 + \sin(w)$$

függvény folytonos  $\mathbb{R}^3$  minden pontjában, így speciálisan a  $P = (0; 0; 1)$  pontot tartalmazó valamely nyílt környezetben is, továbbá

$$f'_v(u; v; w) = 2uv \quad \Rightarrow \quad f'_v(0; 0; 1) = 0$$

és

$$f'_w(u; v; w) = \cos w \quad \Rightarrow \quad f'_w(0; 0; 1) = \cos 1,$$

így léteznek a megfelelő parciális deriváltak és korlátosak a  $P$  pontban.

## 2. Közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenletek

**2.1. Definíció.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az  $y''(x) = f(x)$  alakú differenciálegyenletet *közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenletnek* nevezzük.

**2.2. Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény.

Egy kétszer differenciálható  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény pontosan akkor megoldása az

$$y''(x) = f(x)$$

egyenletnek, ha

$$y(x) = F(x) + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges és  $F$  az  $f$  függvény egy primitív függvényének primitív függvénye, vagyis

$$F(x) = \int \left( \int f(x) dx \right) dx.$$

*Bizonyítás:* Mivel  $f$  folytonos, ezért integrálható.

Az  $y''(x) = f(x)$  egyenlet mindkét oldalát  $x$  szerint integrálva

$$y'(x) = \int f(x) dx$$

adódik, így

$$y'(x) = F_1(x) + c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  és  $F_1$  az  $f$  függvény egy primitív függvénye.

A kapott egyenlet mindkét oldalát integrálva azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \int F_1(x) + c_1 dx = F(x) + c_1 \cdot x + c_2,$$

ahol  $F$  az  $F_1$  egy primitív függvénye és  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges konstansok. ■

**2.3. Megjegyzés.** A közvetlenül integrálható differenciálegyenlet megoldását lényegében úgy kapjuk meg, hogy az explicit alakban megadott differenciálegyenlet jobb oldalán szereplő  $f$  függvényt kétszer integráljuk.

**2.4. Példa.** Az

$$y''(x) = 6x$$

közvetlenül integrálható differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 3x^2 + c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

Ismét mindkét oldalt integrálva

$$y(x) = x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

adódik, ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**2.5. Tétel.** Legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény,  $x_0 \in I$ . Az

$$y''(x) = f(x), \quad y(x_0) = y_{01}, \quad y'(x_0) = y_{02}$$

kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = y_{01} + \int_{x_0}^x \left( y_{02} + \int_{x_0}^t f(s) \, ds \right) dt.$$

*Bizonyítás:* Legyen az  $F_1$  függvény az  $f$  függvény azon primitív függvénye, amelyre teljesül, hogy  $F_1(x_0) = y_{02}$ . Ekkor

$$F_1(t) - F_1(x_0) = \int_{x_0}^t f(s) \, ds,$$

tehát

$$y'(t) - y_{02} = \int_{x_0}^t f(s) \, ds,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$y'(t) = y_{02} + \int_{x_0}^t f(s) \, ds.$$

Legyen  $F$  az  $F_1$  egy primitív függvénye. Ekkor

$$y(x) - y_{01} = \int_{x_0}^x \left( y_{02} + \int_{x_0}^t f(s) \, ds \right) dt,$$

vagyis

$$y(x) = y_{0_1} + \int_{x_0}^x \left( y_{0_2} + \int_{x_0}^t f(s) ds \right) dt,$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

2.6. **Példa.** Tekintsük az

$$y''(x) = 6x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot! A feladatot kétféleképpen oldjuk meg.

### 1. Megoldás:

Az előző tétel alapján

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \int_0^x \left( 3 + \int_0^t 6s ds \right) dt = 1 + \int_0^x 3 + [3s^2]_0^t dt = \\ &= 1 + \int_0^x 3 + 3t^2 dt = 1 + [3t + t^3]_0^x = 1 + 3x + x^3. \end{aligned}$$

### 2. Megoldás:

Mivel

$$y''(x) = 6x,$$

ezért

$$y'(x) = \int 6x dx = 3x^2 + c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Ezt integrálva

$$y(x) = \int 3x^2 + c_1 dx = x^3 + c_1 \cdot x + c_2.$$

Mivel  $y'(0) = 3$ , ezért

$$3 = 3 \cdot 0^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3.$$

Mivel  $y(0) = 1$ , ezért

$$1 = 0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^3 + 3x + 1.$$

DUPress

### 3. Az $y''(x) = f(x; y'(x))$ alakú differenciálegyenletek

3.1. **Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  pozitív hosszúságú intervallumok és legyen továbbá  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az

$$y''(x) = f(x; y'(x))$$

alakú differenciálegyenlet megoldása visszavezethető két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására.

*Bizonyítás:* Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor

$$p'(x) = y''(x),$$

így az

$$y''(x) = f(x; y'(x))$$

alakú egyenlet

$$p'(x) = f(x; p(x))$$

alakú lesz. Ezen elsőrendű differenciálegyenlet megoldásával megkapjuk a  $p$  függvényt, majd az

$$y'(x) = p(x)$$

közvetlenül integrálható differenciálegyenlet megoldásával meghatározható a keresett  $y$  függvény. ■

3.2. **Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Oldjuk meg az

$$y''(x) = 2x \cdot (y'(x))^2$$

differenciálegyenletet!

**Megoldás:**

Vezessük be a

$$p(x) = y'(x)$$

függvényt! Ekkor nyilvánvalóan

$$p'(x) = y''(x).$$

Elvégezve a helyettesítést a differenciálegyenlet

$$p'(x) = 2x \cdot p^2(x)$$

alakú lesz, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a  $g(x) = 2x$  és  $h(p) = p^2$  függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(p)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(p)} dp = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk a  $p$  ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p^2} dp = \int 2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{p} = x^2 + c_1$$

adódik, amiből

$$p(x) = -\frac{1}{x^2 + c_1},$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Mivel  $p(x) = y'(x)$ , ezért

$$\begin{aligned} y(x) &= \int -\frac{1}{x^2 + c_1} dx = -\int \frac{\frac{1}{c_1}}{\frac{x^2}{c_1} + 1} dx = \\ &= -\frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{c_1}} \right) \cdot \sqrt{c_1} + c_2 = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{c_1}} \right) + c_2, \end{aligned}$$

ahol  $c_1 \geq 0$  és  $c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

#### 4. Az $y''(x) = f(y(x); y'(x))$ alakú differenciálegyenletek

4.1. **Tétel.** Legyenek  $I$  és  $J$  pozitív hosszúságú intervallumok és legyen továbbá  $f: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az

$$y''(x) = f(y(x); y'(x))$$

alakú differenciálegyenlet megoldása visszavezethető két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására.

*Bizonyítás:* Elsőként meghatározzuk azokat a  $p$  függvényeket, amelyekkel az egyenlet  $y$  megoldásfüggvényei eleget tesznek az

$$y'(x) = p(y(x))$$

összefüggésnek. Ezekre

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Ezt követően az eredeti egyenlet megoldásai az

$$y'(x) = p(y(x))$$

elsőrendű differenciálegyenlet megoldásával adódnak. ■

4.2. **Példa.** Oldjuk meg az

$$y''(x) = 2y'(x) \cdot y(x)$$

differenciálegyenletet!

**Megoldás:**

Alkalmazzuk az

$$y'(x) = p(y(x))$$

helyettesítést. Ekkor

$$y''(x) = p'(y(x)) \cdot y'(x) = p'(y(x)) \cdot p(y(x)).$$

Végrehajtva a helyettesítést a

$$p'(y) \cdot p(y) = 2p(y) \cdot y$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Látható, hogy  $p = 0$  megoldás. Ekkor  $y'(x) = 0$ , így  $y = c$ , ahol  $c \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Most tegyük fel, hogy  $p \neq 0$ . Ekkor az előbbi egyenletet explicit alakban írva

$$p'(y) = 2y$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$p(y) = y^2 + c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  tetszőleges. Mivel  $y' = p(y)$ , ezért az

$$y'(x) = y^2(x) + c_1$$

egyenlethez jutunk, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet. Ennek megoldásához tekintsük az

$$\int \frac{1}{y^2 + c_1} dy = \int 1 dx.$$

egyenletet. A bal oldalt átalakítva, majd elvégezve az integrálást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 + c_1} dy &= \frac{1}{c_1} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{c_1}}\right)^2 + 1} dy = \frac{1}{c_1} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c_1}} \right) \cdot \sqrt{c_1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c_1}} \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c_1}} \right) = x + c_2.$$

Kifejezve  $y$ -t

$$y = \sqrt{c_1} \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{c_1} \cdot x + \sqrt{c_1} \cdot c_2) = C_1 \cdot \operatorname{tg}(C_1 \cdot x + C_2).$$

## 5. Másodrendű lineáris konstansegyütthetős homogén differenciálegyenletek

5.1. **Definíció.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$ . Az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletén* a

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

5.2. **Példa.** Az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

5.3. **Tétel.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet!

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van és ezek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa nulla, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek egy (kétszeres multiplicitású) valós megoldása van és ez  $\lambda$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, azaz ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex megoldása van (amelyek egyébként egymás konjugáltjai) és az egyik megoldás  $\lambda$ , melynek valós része  $\alpha$  és képzetes része  $\beta$ , vagyis  $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

*Bizonyítás:* A differenciálegyenlet megoldását

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + p \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + q \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0.$$

Kiemelve  $e^{\lambda \cdot x}$ -et azt kapjuk, hogy

$$e^{\lambda \cdot x} \cdot (\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) = 0.$$

Mivel  $e^{\lambda \cdot x} \neq 0$ , ezért

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0,$$

ami éppen a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete.

Ha a másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, vagyis  $p^2 - 4q > 0$ , akkor az egyenletnek két megoldása van. Legyenek ezek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ . Az

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 \cdot x}$$

és

$$y_2(x) = e^{\lambda_2 \cdot x}$$

függvények lineárisan függetlenek, mert

$$\det(W(x)) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot x} & e^{\lambda_2 \cdot x} \\ \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} & \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{(\lambda_2 + \lambda_1) \cdot x} \neq 0.$$

A konstrukció miatt nyilván  $e^{\lambda_1 \cdot x}$  és  $e^{\lambda_2 \cdot x}$  megoldásai a differenciálegyenletnek, így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}.$$

Ha a

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla, vagyis  $p^2 - 4q = 0$ , akkor az egyenletnek egy (kétszeres multiplicitású) megoldása van. Legyen ez  $\lambda$ . Az

$$y_1(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

és

$$y_2(x) = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

függvények lineárisan függetlenek, mert

$$\det(W(x)) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda \cdot x} & x \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} & (1 + \lambda x) \cdot e^{\lambda \cdot x} \end{pmatrix} = e^{2\lambda \cdot x} \neq 0.$$

A konstrukció miatt  $y_1(x) = e^{\lambda \cdot x}$  megoldása a differenciálegyenletnek. Ellenőrizzük, hogy  $x \cdot e^{\lambda \cdot x}$  is megoldása. Mivel

$$y_2'(x) = e^{\lambda \cdot x} + (x \cdot \lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x} = (1 + \lambda x) \cdot e^{\lambda \cdot x},$$

így

$$\begin{aligned} y_2''(x) &= \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + \lambda \cdot (\lambda x + 1) \cdot e^{\lambda \cdot x} = \\ &= (\lambda^2 \cdot x + 2\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0$$

és mivel a másodfokú egyenlet diszkriminánsa nulla, ezért

$$p^2 - 4q = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{p}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + p = 0,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x) &= \\ &= (\lambda^2 \cdot x + 2\lambda) \cdot e^{\lambda \cdot x} + p \cdot (1 + \lambda x) \cdot e^{\lambda \cdot x} + \\ &+ q \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} = \\ &= (\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} + (2\lambda + p) \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0. \end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

A harmadik esetet nem igazoljuk. Az előző két esethez hasonló számolással végezhető a bizonyítás. ■

**5.4. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Az

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) = 25 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

vagyis az egyik megoldás  $\lambda_1 = 3$ , a másik  $\lambda_2 = -2$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**5.5. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Az

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0,$$

így egyetlen valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

miatt  $\lambda = -1$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda x} = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**5.6. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Az

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4,$$

így az egyenletnek két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai.

A megoldások

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Elegendő az egyik komplex számmal tovább dolgozni, válasszuk a  $\lambda = -2 + i$  megoldást.

Jelöljük a komplex szám valós részét  $\alpha$ -val, képzetes részét  $\beta$ -val. Ekkor azt kapjuk, hogy  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ . A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),$$

vagyis

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} \cdot \cos x + c_2 \cdot e^{-2x} \cdot \sin x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**5.7. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

kezdetiérték feladatot!

A differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa

$$D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0,$$

így a karakterisztikus egyenletnek két valós megoldása van. Ezek

$$\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2},$$

vagyis az egyik megoldás  $\lambda_1 = -5$ , a másik  $\lambda_2 = -2$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} = c_1 \cdot e^{-5x} + c_2 \cdot e^{-2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

A  $c_1$  és  $c_2$  kiszámolásához szükségünk lesz az  $y'$  függvényre is:

$$y'(x) = -5c_1 \cdot e^{-5x} - 2c_2 \cdot e^{-2x}.$$

A kezdetiérték feltételek miatt egyrészt

$$2 = y(0) = c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} + c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt

$$5 = y'(0) = -5c_1 \cdot e^{-5 \cdot 0} - 2c_2 \cdot e^{-2 \cdot 0} = -5c_1 - 2c_2.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  értékét az

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -5c_1 - 2c_2 &= 5 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Az első egyenletet kétszer szorozva, majd a két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy  $-3c_1 = 9$ , amiből  $c_1 = -3$  adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy  $c_2 = 5$ . Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = -3e^{-5x} + 5e^{-2x}.$$

## 6. Másodrendű lineáris konstansegyütthetős inhomogén differenciálegyenletek megoldása konstansvariálással

6.1. **Tétel.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$  tetszőleges,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és tegyük fel, hogy  $f$  nem azonosan nulla függvény. Az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

homogén egyenlet általános megoldásának és az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege.

6.2. **Tétel.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$  tetszőleges,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos. Az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x),$$

ahol  $y_1$  és  $y_2$  a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása és  $y_p$  az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

6.3. **Eljárás.** Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását meghatározhatjuk a *konstansvariálás* módszerével.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol  $y_1$  és  $y_2$  a megfelelő homogén egyenlet két lineárisan független megoldása. Ezt a megoldásfüggvényt az eredeti

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

inhomogén egyenletbe behelyettesítve szeretnénk meghatározni a  $c_1$  és  $c_2$  függvényeket. Azonban két ismeretlenünk van, és a behelyettesítés után csak egy egyenletet kapnánk, ezért az egyértelmű megoldás meghatározása érdekében egy tetszőleges további feltételt is elő kell írunk a  $c_1$  és  $c_2$  függvényekre vonatkozóan. Legyen ez a feltétel az, hogy

$$c'_1(x) \cdot y_1(x) + c'_2(x) \cdot y_2(x) = 0.$$

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y_p'(x) = c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Felhasználva, hogy

$$c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) = c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x).$$

Az  $y_p$  függvény második deriváltja

$$y_p''(x) = c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x).$$

Az  $y_p$  függvényt behelyettesítve az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

egyenletbe

$$\begin{aligned} & c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_1(x) \cdot y_1''(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) + c_2(x) \cdot y_2''(x) + \\ & + p \cdot (c_1(x) \cdot y_1'(x) + c_2(x) \cdot y_2'(x)) + \\ & + q \cdot (c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)) = f(x). \end{aligned}$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & c_1(x) \cdot y_1''(x) + p \cdot c_1(x) \cdot y_1'(x) + q \cdot c_1(x) \cdot y_1(x) + \\ & + c_2(x) \cdot y_2''(x) + p \cdot c_2(x) \cdot y_2'(x) + q \cdot c_2(x) \cdot y_2(x) + \\ & + c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x). \end{aligned}$$

Mivel  $y_1$  és  $y_2$  megoldása a homogén egyenletnek, ezért

$$c_1(x) \cdot (y_1''(x) + p \cdot y_1'(x) + q \cdot y_1(x)) = 0$$

és

$$c_2(x) \cdot (y_2''(x) + p \cdot y_2'(x) + q \cdot y_2(x)) = 0.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = f(x).$$

Vagyis  $c_1'$ -re és  $c_2'$ -re egy lineáris egyenletrendszert kaptunk:

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\}.$$

Ennek az alaplátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Ezen mátrix determinánása

$$\det(W(x)) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x),$$

ami éppen a Wronski-determináns, amely nem nulla, hiszen az  $y_1$  és  $y_2$  függvények analitikusak és lineárisan függetlenek. Ez azt jelenti, hogy az egyenletrendszer például Cramer-szabállyal egyértelműen megoldható. Legyen

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

valamint

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\det(W_1(x)) = -f(x) \cdot y_2(x)$$

és

$$\det(W_2(x)) = f(x) \cdot y_1(x),$$

így

$$c_1'(x) = \frac{\det(W_1(x))}{\det(W(x))} = \frac{-f(x) \cdot y_2(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)}$$

és

$$c_2'(x) = \frac{\det(W_2(x))}{\det(W(x))} = \frac{f(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)}.$$

Tehát

$$c_1(x) = \int \frac{-f(x) \cdot y_2(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)} dx$$

és

$$c_2(x) = \int \frac{f(x) \cdot y_1(x)}{y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)} dx.$$

A kapott  $c_1$  és  $c_2$  függvényekkel az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**6.4. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 48x + 96, \quad y(0) = 42, \quad y'(0) = 18$$

kezdetiérték feladatot a konstansvariálás módszerével, majd kiszámoljuk például az  $y(1)$  függvényértéket.

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 5y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

vagyis  $\lambda_1 = 4$ , illetve  $\lambda_2 = 1$ .

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$$

alakban keressük, ahol  $y_1(x) = e^{4x}$  és  $y_2(x) = e^x$ . A  $c_1$  és  $c_2$  ismeretlen függvények deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) &= 48x + 96 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg. Behelyettesítve az  $y_1$  és  $y_2$  függvényeket, valamint azok deriváltjait az

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{4x} + c_2'(x) \cdot e^x &= 0 \\ c_1'(x) \cdot 4 \cdot e^{4x} + c_2'(x) \cdot e^x &= 48x + 96 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezen egyenletrendszer alapmátrixa

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & e^x \\ 4e^{4x} & e^x \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa (vagyis a Wronski-determináns)

$$\det(W(x)) = -3e^{5x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det(W_1(x))}{\det(W(x))},$$

ahol

$$W_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & e^x \\ 48x + 96 & e^x \end{pmatrix} = -e^x \cdot (48x + 96),$$

így

$$c_1'(x) = \frac{-e^x \cdot (48x + 96)}{-3e^{5x}} = (16x + 32) \cdot e^{-4x}.$$

Szintén a Cramer-szabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$c_2'(x) = \frac{\det(W_2(x))}{\det(W(x))},$$

ahol

$$W_2(x) = \begin{pmatrix} e^{4x} & 0 \\ 4e^{4x} & 48x + 96 \end{pmatrix} = e^{4x} \cdot (48x + 96),$$

így

$$c_2'(x) = \frac{e^{4x} \cdot (48x + 96)}{-3e^{5x}} = (-16x - 32) \cdot e^{-x}.$$

Mivel ismerjük a  $c_1'$  és  $c_2'$  függvényeket, ezért integrálással meghatározhatók a  $c_1$  és  $c_2$  függvények.

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int (16x + 32) \cdot e^{-4x} dx = \\ &= (16x + 32) \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} - \int 16 \cdot \frac{e^{-4x}}{-4} dx = \\ &= (-4x - 8) \cdot e^{-4x} + \int 4 \cdot e^{-4x} dx = \\ &= (-4x - 8) \cdot e^{-4x} - e^{-4x} = e^{-4x} \cdot (-4x - 9). \end{aligned}$$

Szintén a parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int (-16x - 32) \cdot e^{-x} dx = \\ &= (-16x - 32) \cdot \frac{e^{-x}}{-1} - \int -16 \cdot \frac{e^{-x}}{-1} dx = \\ &= (16x + 32) \cdot e^{-x} - \int 16 \cdot e^{-x} dx = \\ &= (16x + 32) \cdot e^{-x} + 16 \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (16x + 48). \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) = \\ &= e^{-4x} \cdot (-4x - 9) \cdot e^{4x} + e^{-x} \cdot (16x + 48) \cdot e^x = \\ &= -4x - 9 + 16x + 48 = 12x + 39. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x + 12x + 39.$$

Az  $y$  függvény deriváltja

$$y'(x) = 4c_1 \cdot e^{4x} + c_2 \cdot e^x + 12.$$

Mivel  $y(0) = 42$ , ezért

$$42 = c_1 + c_2 + 39.$$

Mivel  $y'(0) = 18$ , ezért

$$18 = 4c_1 + c_2 + 12.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  konstansok meghatározásához a

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + 39 &= 42 \\ 4c_1 + c_2 + 12 &= 18 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszert átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ 4c_1 + c_2 &= 6 \end{aligned} \right\}.$$

A második egyenletből kivonva az első  $c_1 = 1$  adódik, majd ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy  $c_2 = 2$ .

Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{4x} + 2e^x + 12x + 39.$$

Az  $y(1)$  függvényérték

$$y(1) = e^4 + 2e + 12 + 39.$$

DUPress

## 7. Másodrendű lineáris konstansegyütthetős inhomogén differenciálegyenletek megoldása próbafüggvénnyel

**7.1. Definíció.** Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$  tetszőleges,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, nem azonosan nulla függvény. Tekintsük az

$$y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = f(x)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenletet. Ekkor az  $f$  függvényt *zavaró függvénynek* is szokás nevezni.

**7.2. Megjegyzés.** Ebben a fejezetben másodrendű konstansegyütthetős lineáris inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásának meghatározására ismertetünk egy módszert, amelyet *próbafüggvény módszernek* szokás nevezni.

**7.3. Eljárás.** (próbafüggvény)

Abban az esetben, ha a másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet konstansegyütthetős, továbbá a zavaró függvény speciális alakú, nevezetesen polinom-, exponenciális-, szinusz-, vagy koszinuszfüggvény, továbbá ezek összege (vagy különbsége), akkor a differenciálegyenlet partikuláris megoldása a zavaró függvényhez hasonló szerkezetű lesz.

Az alábbi táblázatokban összefoglaljuk, hogy az egyes esetekben milyen úgynévezett próbafüggvényt használhatunk a partikuláris megoldás meghatározásához.

Ha a zavaró függvényben nincs olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása lenne, akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot \sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x)$

Ha a zavaró függvényben van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása és  $\alpha$  egyszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletének (a második

sorban azt is feltéve, hogy  $\alpha = 0$ ), akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben úgynevezett *rezonanciáról* beszélünk.

Ha a zavaró függvényben van olyan tag, ami a homogén egyenlet megoldása és  $\alpha$  kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletének (a második sorban azt is feltéve, hogy  $\alpha = 0$ ), akkor

zavaró függvény	a partikuláris megoldás általános alakja
$a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$	$x^2 \cdot (A_n \cdot x^n + \dots + A_1 \cdot x + A_0)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$A \cdot x^2 \cdot e^{\alpha x}$
$a \cdot \sin(\alpha x)$	$A \cdot x^2 \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$
$a \cdot \cos(\alpha x)$	$A \cdot x^2 \cdot (\sin(\alpha x) + B \cdot \cos(\alpha x))$

Ebben az esetben úgynevezett *másodrendű rezonanciáról* beszélünk.

**7.4. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4 \sin x + 2 \cos x$$

differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerrel.

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis  $\lambda_1 = 3$ , illetve  $\lambda_2 = 1$ .

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 + B \cdot x + C + D \cdot e^{2x} + E \cdot \sin x + F \cdot \cos x$$

alakban keressük.

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y_p'(x) = 2A \cdot x + B + 2D \cdot e^{2x} + E \cdot \cos x - F \cdot \sin x.$$

Az  $y_p$  függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = 2A + 4D \cdot e^{2x} - E \cdot \sin x - F \cdot \cos x.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & 2A + 4D \cdot e^{2x} - E \cdot \sin x - F \cdot \cos x - \\ & - 4 \cdot (2A \cdot x + B + 2D \cdot e^{2x} + E \cdot \cos x - F \cdot \sin x) + \\ & + 3 \cdot (A \cdot x^2 + B \cdot x + C + D \cdot e^{2x} + E \cdot \sin x + F \cdot \cos x) = \\ & = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4 \sin x + 2 \cos x, \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} & 3A \cdot x^2 + (3B - 8A) \cdot x + 3C - 4B + 2A - D \cdot e^{2x} + \\ & + (2E + 4F) \cdot \sin x + (2F - 4E) \cdot \cos x = \\ & = 3x^2 + 10x + 19 - e^{2x} + 4 \sin x + 2 \cos x. \end{aligned}$$

A megfelelő tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\left. \begin{array}{rcl} 3A & & = 3 \\ -8A + 3B & & = 10 \\ 2A - 4B + 3C & & = 19 \\ & - D & = -1 \\ & & 2E + 4F = 4 \\ & & - 4E + 2F = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy  $A = 1$ . Ezt behelyettesítve a második egyenletbe  $B = 6$  adódik. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy  $C = \frac{41}{3}$ . A negyedik egyenletből  $D = 1$  adódik. Ha az ötödik

egyenlet kétszeresét hozzáadjuk a hatodik egyenlethez, akkor azt kapjuk, hogy  $F = 1$ , végül ezt visszahelyettesítve az ötödik egyenletbe  $E = 0$  adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x^2 + 6x + \frac{41}{3} + e^{2x} + \cos x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^x + x^2 + 6x + \frac{41}{3} + e^{2x} + \cos x.$$

**7.5. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 16e^{2x} + 8x$$

differenciálegyenletet a próbafüggvény módszerrel.

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet egyetlen megoldása  $\lambda = 2$  kétszeres multiplicitással (vagyis  $\lambda_1 = 2$  és  $\lambda_2 = 2$ ).

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő  $16e^{2x}$  tag megoldása a homogén egyenletnek és 2 kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért másodrendű rezonancia lép fel, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{2x} + B \cdot x + C$$

alakban keressük.

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y'_p(x) = A \cdot (2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}) + B.$$

Az  $y_p$  függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = A \cdot (2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x^2 e^{2x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & A \cdot (2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x \cdot e^{2x} + 4x^2 e^{2x}) - \\ & - 4A \cdot (2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}) - 4B + \\ & + 4A \cdot x^2 \cdot e^{2x} + 4B \cdot x + 4C = 16 \cdot e^{2x} + 8x, \end{aligned}$$

vagyis

$$2A \cdot e^{2x} + 4B \cdot x - 4B + 4C = 16 \cdot e^{2x} + 8x,$$

így egyrészt  $2A = 16$ , vagyis  $A = 8$ , másrészt  $4B = 8$ , amiből azt kapjuk, hogy  $B = 2$ . Végül  $-4B + 4C = 0$ , amiből  $C = 2$  adódik.

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 8x^2 \cdot e^{2x} + 2x + 2.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} + 8x^2 \cdot e^{2x} + 2x + 2 = \\ &= (c_1 + c_2 \cdot x + 8x^2) \cdot e^{2x} + 2x + 2. \end{aligned}$$

**7.6. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 4 \cdot e^{3x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot a próbafüggvény módszerrel.

Az inhomogén egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Ezen homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

azaz

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

Tehát a karakterisztikus egyenlet egyetlen megoldása  $\lambda = 3$  kétszeres multipllicitással (vagyis  $\lambda_1 = 3$  és  $\lambda_2 = 3$ ).

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Mivel az inhomogén egyenlet jobb oldalán szereplő  $4 \cdot e^{3x}$  tag megoldása a homogén egyenletnek és 3 kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ezért másodrendű rezonancia lép fel, így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x^2 \cdot e^{3x}$$

alakban keressük.

Az  $y_p$  függvény deriváltja

$$y_p'(x) = A \cdot (2x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x}).$$

Az  $y_p$  függvény másodrendű deriváltja

$$y_p''(x) = A \cdot (2e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 9x^2 \cdot e^{3x}).$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & A \cdot (2e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} + 9x^2 \cdot e^{3x}) - \\ & - 6A \cdot (2x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x}) + 9A \cdot x^2 \cdot e^{3x} = \\ & = 4 \cdot e^{3x}, \end{aligned}$$

vagyis

$$2A \cdot e^{3x} = 4 \cdot e^{3x},$$

így  $A = 2$ .

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 2x^2 \cdot e^{3x}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot x \cdot e^{3x} + 2x^2 \cdot e^{3x} = (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot e^{3x}.$$

Az  $y$  függvény deriváltja

$$y'(x) = (c_2 + 4x) \cdot e^{3x} + (c_1 + c_2 \cdot x + 2x^2) \cdot 3e^{3x}.$$

Mivel  $y(0) = 0$ , ezért

$$0 = c_1.$$

Mivel  $y'(0) = 2$ , ezért

$$2 = c_2 + 3c_1,$$

vagyis  $c_2 = 2$ . Azt kaptuk tehát, hogy a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (2x^2 + 2x) \cdot e^{3x}.$$

## 8. Másodrendű lineáris konstansegyütthatós inhomogén differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

8.1. **Definíció.** Az  $f: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  függvény *Laplace-transzformáltjának* nevezük az

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

függvényt amennyiben az előbbi improprius integrál véges. Ilyenkor az  $f$  függvényt *generátorfüggvénynek* is mondjuk. Az  $f$  függvény Laplace-transzformáltját  $\mathcal{L}[f]$  módon is szokás jelölni.

Ha ismerjük egy generátorfüggvény Laplace-transzformáltját, akkor a generátorfüggvényt *inverz Laplace-transzformációval* kapjuk meg a Laplace-transzformáltból. Az  $F$  függvény inverz Laplace-transzformáltját  $\mathcal{L}^{-1}[F]$  módon jelöljük.

8.2. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy a fenti integrál  $s > 0$  esetén lesz konvergens, így a fejezet további részeiben feltesszük, hogy  $s > 0$ .

8.3. **Tétel.** A Laplace-transzformáció additív tulajdonságú. Ez azt jelenti, hogy  $f, g: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  esetén

$$\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g].$$

*Bizonyítás:* Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és az integrál additív tulajdonságát, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f + g] &= \int_0^{\infty} (f + g)(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt + \\ &+ \int_0^{\infty} g(t) \cdot e^{-st} dt = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g], \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

8.4. **Tétel.** A Laplace-transzformáció homogén tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy  $f: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f].$$

*Bizonyítás:* Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és az integrál homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f] = \int_0^{\infty} (\alpha \cdot f)(t) \cdot e^{-st} dt = \alpha \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = \alpha \cdot \mathcal{L}[f],$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**8.5. Következmény.** A Laplace-transzformáció lineáris tulajdonságú, ami azt jelenti, hogy  $f, g: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f] + \beta \cdot \mathcal{L}[g].$$

*Bizonyítás:* Mivel a Laplace-transzformáció additív és homogén, ezért

$$\mathcal{L}[\alpha \cdot f + \beta \cdot g] = \mathcal{L}[\alpha \cdot f] + \mathcal{L}[\beta \cdot g] = \alpha \cdot \mathcal{L}[f] + \beta \cdot \mathcal{L}[g],$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**8.6. Tétel.** (Derivált függvény Laplace-transzformáltja)

Ha  $f: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény, akkor

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0).$$

*Bizonyítás:* Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és a parciális integrálás tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f'(t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{f(c)}{e^{s \cdot c}} - f(0) - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**8.7. Tétel.** (csillapítási tétel)

Tekintsük az  $f: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt és legyen  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ekkor

$$\mathcal{L} \left[ e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t) \right] (s) = \mathcal{L}[f](s + \lambda).$$

*Bizonyítás:* Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \cdot f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\lambda+s) \cdot t} dt = \\ &= \mathcal{L}[f](\lambda + s),\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**8.8. Tétel.** Ha  $f: [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  a pozitív félegyenesen szakaszonként folytonos és exponenciálisan felülről korlátos, azaz van olyan  $M > 0$  és  $s_0$  valós szám, hogy

$$f(t) \leq M \cdot e^{s_0 \cdot t},$$

akkor az  $f$  függvénynek létezik Laplace-transzformáltja.

**8.9. Tétel.** Az  $f(t) = 1$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

*Bizonyítás:* A Laplace-transzformált definíciója szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s},\end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást. ■

**8.10. Tétel.** Az  $f(t) = t$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

*Bizonyítás:* A Laplace-transzformált definícióját és a parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c t \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ t \cdot \frac{e^{-s \cdot t}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left( c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2},\end{aligned}$$

ugyanis

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} = 0$$

és a L'Hospital-szabály szerint

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow \infty} c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{s \cdot c} \cdot s} = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{s \cdot c} \cdot s^2} = 0.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

**8.11. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ . Az  $f(t) = t^n$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

**8.12. Példa.** Az

$$f(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t^3 - t^2 + 5t + 2] = \mathcal{L}[t^3] - \mathcal{L}[t^2] + 5\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[2] = \\ &= \frac{3!}{s^4} - \frac{2!}{s^3} + 5 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \\ &= \frac{6 - 2s + 5s^2 + 2s^3}{s^4} = \frac{2s^3 + 5s^2 - 2s + 6}{s^4}.\end{aligned}$$

8.13. **Tétel.** Legyen  $a \in \mathbb{R}$ . Az  $f(t) = e^{at}$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

*Bizonyítás:* A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s)c}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

8.14. **Példa.** Az

$$f(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[e^{2t} + e^{-3t}] = \mathcal{L}[e^{2t}] + \mathcal{L}[e^{-3t}] = \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+3+s-2}{(s-2) \cdot (s+3)} = \frac{2s+1}{s^2+s-6}. \end{aligned}$$

8.15. **Tétel.** Legyen  $\omega \in \mathbb{R}$ . Az  $f(t) = \sin(\omega \cdot t)$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

*Bizonyítás:* A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a  $\sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$  függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \left( \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} + \int \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1\right) \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left( \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\omega \cdot c)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot c)}{s^2}\right) \cdot e^{-sc} + \frac{\omega}{s^2} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{\omega}{s^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

**8.16. Tétel.** Legyen  $\omega \in \mathbb{R}$ . Az  $f(t) = \cos(\omega \cdot t)$  függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

*Bizonyítás:* A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a  $\cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$  függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \int \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \left( \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} - \int \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1\right) \cdot \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2}\right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left( \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\omega \cdot c)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot c)}{s^2}\right) \cdot e^{-sc} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást. ■

**8.17. Példa.** Az

$$f(t) = -2 \cos 6t + 5 \sin 6t$$

függvény Laplace-transzformáltjára a linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi két tétel állítását azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[-2 \cos 6t + 5 \sin 6t] = -2\mathcal{L}[\cos 6t] + 5\mathcal{L}[\sin 6t] = \\ &= -2 \cdot \frac{s}{s^2 + 36} + 5 \cdot \frac{6}{s^2 + 36} = \frac{-2s + 30}{s^2 + 36}. \end{aligned}$$

**8.18. Tétel.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$  és  $a \in \mathbb{R}$ . Az

$$f(t) = t^n \cdot e^{at}$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[f] = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}.$$

**8.19. Megjegyzés.** A Laplace-transzformáció alkalmazható többek között konstansegyütthetős lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat megoldására is. Laplace-transzformációval az említett típusú differenciálegyenlet egy algebrai egyenletté transzformálható, amely egyenletből meghatározható az ismeretlen függvény Laplace-transzformáltja, amiből megadható a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye.

**8.20. Példa.** Legyen  $t \geq 0$ . Megoldjuk Laplace-transzformációval az

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y''] - 3\mathcal{L}[y'] + 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2},$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0) - 3 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

algebrai egyenletté.

Mivel  $y(0) = 0$  és  $y'(0) = 0$ , ezért

$$s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 3s \cdot \mathcal{L}[y] + 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{s-2}$$

adódik, amiből kifejezve a  $\mathcal{L}[y]$  kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2 - 3s + 2) \cdot (s - 2)}.$$

Az  $s^2 - 3s + 2$  polinom gyökei  $s_1 = 1$  és  $s_2 = 2$ , így a szorzattá alakított alakja

$$s^2 - 3s + 2 = (s - 1) \cdot (s - 2),$$

tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s - 1) \cdot (s - 2)^2}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{1}{(s - 1) \cdot (s - 2)^2} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{(s - 2)^2}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (s - 2)^2 + (s - 2) \cdot (s - 1) \cdot B + (s - 1) \cdot C.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + B) \cdot s^2 + (-4A - 3B + C) \cdot s + 4A + 2B - C = 1$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -4A - 3B + C = 0 \\ 4A + 2B - C = 1 \end{array} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszer Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 4-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor  $-4$ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor kétszeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B & = & 0 \\ B + C & = & 0 \\ C & = & 1 \end{array} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkaptuk, hogy  $C = 1$ . Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy  $B = -1$ . Végül az első egyenletből  $A = 1$  adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = e^t - e^{2t} + t \cdot e^{2t}$$

adódik.

## 9. Cauchy-Euler differenciálegyenlet

**9.1. Definíció.** Legyen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , továbbá  $k, l \in \mathbb{R}$  és  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az

$$x^2 \cdot y''(x) + k \cdot x \cdot y'(x) + l \cdot y(x) = f(x)$$

differenciálegyenletet *Euler-féle* vagy *Cauchy-Euler-féle differenciálegyenlet*-nek nevezzük.

**9.2. Motiváció.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ , továbbá  $k, l \in \mathbb{R}$ . Az

$$x^2 \cdot y''(x) + k \cdot x \cdot y'(x) + l \cdot y(x) = 0$$

homogén Euler-féle differenciálegyenlet megoldását

$$y(x) = x^m$$

alakban keressük. Ekkor

$$y'(x) = m \cdot x^{m-1}$$

és

$$y''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}.$$

Ezeket visszahelyettesítve a homogén Euler-féle differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} + k \cdot x \cdot m \cdot x^{m-1} + l \cdot x^m = 0,$$

vagyis

$$(m \cdot (m-1) + k \cdot m + l) \cdot x^m = 0.$$

**9.3. Definíció.** Legyen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , továbbá  $k, l \in \mathbb{R}$ . Az

$$x^2 \cdot y''(x) + k \cdot x \cdot y'(x) + l \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletén* az

$$m \cdot (m-1) + k \cdot m + l = 0$$

másodfokú egyenletet értjük.

**9.4. Tétel.** Legyen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , továbbá  $k, l \in \mathbb{R}$ . Ha az

$$x^2 \cdot y''(x) + k \cdot x \cdot y'(x) + l \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének két különböző valós gyöke van és azok  $r_1$  és  $r_2$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{r_1} + c_2 \cdot x^{r_2},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Ha a karakterisztikus egyenletnek egy valós gyöke van (kétszeres multiplicitással) és az  $r$ , akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^r + c_2 \cdot x^r \cdot \ln x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

Ha a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van (amelyek egyébként egymás konjugáltjai) és azok  $\alpha \pm i \cdot \beta$  alakúak, akkor a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^\alpha \cdot \cos(\ln x^\beta) + c_2 \cdot x^\alpha \cdot \sin(\ln x^\beta).$$

**9.5. Példa.** Legyen  $x > 0$ . Megoldjuk az

$$x^2 \cdot y''(x) - 3x \cdot y'(x) + 3y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} - 3x \cdot m \cdot x^{m-1} + 3 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) - x^m \cdot 3m + 3 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 - 4m + 3) = 0.$$

Mivel  $x > 0$ , ezért  $x^m \neq 0$ , így

$$m^2 - 4m + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

vagyis  $m_1 = 1$  és  $m_2 = 3$ . Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^3,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**9.6. Példa.** Legyen  $x > 0$ . Megoldjuk az

$$x^2 \cdot y''(x) + 5x \cdot y'(x) + 4y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} + 5x \cdot m \cdot x^{m-1} + 4 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) + x^m \cdot 5m + 4 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 + 4m + 4) = 0.$$

Mivel  $x > 0$ , ezért  $x^m \neq 0$ , így

$$m^2 + 4m + 4 = 0,$$

vagyis  $m = -2$ . Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-2} + c_2 \cdot x^{-2} \cdot \ln x = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2 \cdot \ln x}{x^2},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**9.7. Példa.** Legyen  $x > 0$ . Megoldjuk az

$$x^2 \cdot y''(x) + 5x \cdot y'(x) + 5y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} + 5x \cdot m \cdot x^{m-1} + 5 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) + x^m \cdot 5m + 5 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 + 4m + 5) = 0.$$

Mivel  $x > 0$ , ezért  $x^m \neq 0$ , így

$$m^2 + 4m + 5 = 0,$$

vagyis  $m = -2 \pm i$ . Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-2} \cdot \cos \ln x + c_2 \cdot x^{-2} \cdot \sin \ln x,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**9.8. Tétel.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ , továbbá,  $k, l \in \mathbb{R}$  és  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Az

$$x^2 \cdot y''(x) + k \cdot x \cdot y'(x) + l \cdot y(x) = f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

ahol  $y_h$  a homogén egyenlet általános megoldása és  $y_p$  az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását meghatározhatjuk például konstansvariálással.

**9.9. Példa.** Legyen  $x > 0$ . Oldjuk meg az

$$x^2 \cdot y''(x) + 6x \cdot y'(x) + 4y(x) = x + 1$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$x^2 \cdot y''(x) + 6x \cdot y'(x) + 4y(x) = 0.$$

A megoldásfüggvényt keressük

$$y(x) = x^m$$

alakban! Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 \cdot m \cdot (m - 1) \cdot x^{m-2} + 6x \cdot m \cdot x^{m-1} + 4 \cdot x^m = 0.$$

Elvégezve az összevonásokat

$$x^m \cdot (m^2 - m) + x^m \cdot 6m + 4 \cdot x^m = 0$$

adódik, azaz

$$x^m \cdot (m^2 + 5m + 4) = 0.$$

Mivel  $x > 0$ , ezért  $x^m \neq 0$ , így

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$m_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2},$$

vagyis  $m_1 = -1$  és  $m_2 = -4$ . Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{-4} = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x + B$$

alakban keressük. Ekkor  $y_p'(x) = A$  és  $y_p''(x) = 0$ . Ezt felhasználva

$$6x \cdot A + 4 \cdot (A \cdot x + B) = x + 1,$$

vagyis

$$10x \cdot A + 4B = x + 1.$$

Tehát

$$A = \frac{1}{10}$$

és

$$B = \frac{1}{4},$$

így az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y_p(x) = \frac{1}{10} \cdot x + \frac{1}{4}.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^4} + \frac{1}{10} \cdot x + \frac{1}{4},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 10. Függvényegyütthatós másodrendű lineáris differenciálegyenletek

10.1. **Tétel.** Legyenek  $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + y_p(x),$$

ahol  $y_1$  és  $y_2$  a homogén egyenlet két lineárisan független megoldása és  $y_p$  az inhomogén egyenlet egy megoldása, továbbá  $c_1$  és  $c_2$  tetszőleges valós számok.

10.2. **Tétel.** (Abel formula)

Legyen  $I$  nyílt intervallum, valamint  $p$  és  $q$  az  $I$ -n értelmezett valós értékű folytonos függvények. Tekintsük továbbá az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet! A differenciálegyenlet  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan független megoldásfüggvényeiből képzett Wronski-determinánsra teljesül a

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

összefüggés, ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

*Bizonyítás:* Az  $y_1$  és  $y_2$  függvényekből képzett Wronski-determináns

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x).$$

A  $W$  függvény deriváltja

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1'(x) \cdot y_2'(x) + y_1(x) \cdot y_2''(x) - \\ &\quad - y_2'(x) \cdot y_1'(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x) = \\ &= y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x). \end{aligned}$$

Mivel  $y_1$  megoldásfüggvénye az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenletnek, ezért

$$y_1''(x) = -p(x) \cdot y_1'(x) - q(x) \cdot y_1(x).$$

Mivel  $y_2$  megoldásfüggvénye az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenletnek, ezért

$$y_2''(x) = -p(x) \cdot y_2'(x) - q(x) \cdot y_2(x).$$

Ezeket behelyettesítve a

$$W'(x) = y_1(x) \cdot y_2''(x) - y_2(x) \cdot y_1''(x)$$

összefüggésbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W'(x) &= y_1(x) \cdot (-p(x) \cdot y_2'(x) - q(x) \cdot y_2(x)) - \\ &\quad - y_2(x) \cdot (-p(x) \cdot y_1'(x) - q(x) \cdot y_1(x)) = \\ &= y_2(x) \cdot p(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot p(x) \cdot y_2'(x) = \\ &= p(x) \cdot (y_2(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot y_2'(x)) = \\ &= -p(x) \cdot W(x). \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$W'(x) = -p(x) \cdot W(x).$$

Átrendezve

$$W'(x) + p(x) \cdot W(x) = 0$$

adódik, amely egy elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenlet, így

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ . ■

**10.3. Következmény.** Legyen  $I$  nyílt intervallum, valamint  $p$  és  $q$  az  $I$ -n értelmezett valós értékű folytonos függvények. Tekintsük továbbá az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet!

A differenciálegyenlet  $y_1$  és  $y_2$  lineárisan független megoldásfüggvényeiből képzett Wronski-determinánsra minden  $x_0 \in I$  esetén teljesül, hogy

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}$$

ahol  $c \in \mathbb{R}$ .

**10.4. Következmény.** Az előbbi állítás közvetlen következménye, hogy egy másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet megoldásfüggvényei által meghatározott Wronski-determináns értéke vagy mindenütt nulla vagy sehol sem nulla, vagyis, ha a Wronski-determináns egyetlen pontban nem nulla, akkor sehol sem nulla, illetve ha a Wronski-determináns egyetlen pontban zérus, akkor minden pontban zérus.

**10.5. Tétel.** Legyen  $n$  természetes szám és  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 0, \dots, n$ ) folytonos függvények úgy, hogy  $a_n$  nem azonosan nulla. Tegyük fel, hogy  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  megoldásai a

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x)$$

differenciálegyenletnek. Adott  $j = 1, \dots, n$ ;  $x \in I$  esetén legyen

$$\Phi_j(x) = \begin{pmatrix} \varphi_j(x) \\ \varphi_j'(x) \\ \vdots \\ \varphi_j^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- (1) Létezik olyan  $x_0 \in I$ , amelyre  $\Phi_1(x_0), \dots, \Phi_n(x_0)$  lineárisan függetlenek.
- (2) A differenciálegyenlet tetszőleges megoldása  $\sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j$  alakú, ahol  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .
- (3) Minden  $x \in I$  esetén  $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$  lineárisan függetlenek.

*Bizonyítás:* A (3)  $\Rightarrow$  (1) implikáció nyilvánvaló.

Az (1)  $\Rightarrow$  (2) belátásához vegyük észre, hogy mivel az egyenlet megoldásai vektorteret alkotnak, így minden (2)-beli alakú függvény megoldás. Megfordítva, legyen  $\varphi$  megoldás és legyen

$$\Phi(x_0) = \begin{pmatrix} \varphi(x_0) \\ \varphi'(x_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

vektort. Az (1) állítás miatt az  $n$  darab  $\Phi_1(x_0), \dots, \Phi_n(x_0)$  vektor generálja az  $\mathbb{R}^n$  teret, így vannak olyan  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  skalárok, melyekre

$$\Phi(x_0) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \Phi_j(x_0).$$

Ezt az egyenlőséget koordinátánként kiírva kapjuk, hogy

$$\varphi^{(i)}(x_0) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j^{(i)}(x_0)$$

minden  $i = 0, \dots, n-1$  esetén. Legyen  $\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j$ . Ekkor  $\tilde{\varphi}$  megoldás, továbbá az előbbi egyenlőségekben a differenciálás linearitását használva adódik, hogy

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(x_0) = \varphi^{(i)}(x_0)$$

minden  $i = 0, \dots, n-1$  esetén. Tekintsük azt a Cauchy-feladatot, melyet úgy kapunk egyenletünkől, hogy hozzávesszük az

$$y(x_0) = \varphi(x_0), y'(x_0) = \varphi'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0)$$

kezdeti feltételeket. Az eddigiek alapján ennek  $\varphi$  és  $\tilde{\varphi}$  megoldásai. A közös lineáris differenciálegyenletekre vonatkozó Cauchy-feladat megoldásának egyértelműsége alapján így  $\tilde{\varphi} = \varphi$ , azaz

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j,$$

tehát  $\varphi$  (2)-beli alakú. Ezzel a kívánt implikációt beláttuk.

Hátravan még a (2)  $\Rightarrow$  (3) igazolása. Ehhez legyen  $x_0 \in I$  rögzített szám,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

pedig egy tetszőleges vektor. Az előbbi típusú Cauchy-feladatok megoldásának létezése és egyértelműsége miatt létezik egy és csak egy olyan  $\varphi$  megoldása az egyenletnek, melyre teljesülnek a

$$\varphi(x_0) = u_1, \varphi'(x_0) = u_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = u_n$$

kezdetiérték feltételek. A (2) állítás szerint ekkor léteznek olyan  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  skalárok, melyekre

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j.$$

Ezt az egyenlőséget oldalanként  $i$ -szer deriválva kapjuk, hogy

$$\varphi^{(i)} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \varphi_j^{(i)}$$

teljesül minden  $i = 0, \dots, n - 1$  esetén. Ezen reláció oldalait  $x_0$ -ban kiértékelve, s használva a  $\varphi$ -re vonatkozó kezdeti feltételeket, majd a kapott egyenletrendszert vektor alakban írva a tételbeli jelölésekkel, az adódik, hogy

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \Phi(x_0).$$

Ez az egyenlőség mutatja, hogy  $u$  lineáris kombinációja a  $\Phi_1(x_0), \dots, \Phi_n(x_0)$  vektoroknak, s mivel  $\mathbb{R}^n$  tetszőleges eleme volt, így az utóbbi vektorok generálják az  $\mathbb{R}^n$  teret, amiből kapjuk, hogy lineárisan függetlenek. ■

**10.6. Megjegyzés.** Az első fejezetben megmutattuk, hogy a Wronski-determinánsnak a lineáris függőséggel, lineáris függetlenséggel való kapcsolatára általános esetben nem mondható ki szükséges és elégséges feltétel. Azonban, ha  $y_1$  és  $y_2$  egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásfüggvényei, akkor kimondhatjuk azt az állítást, hogy  $y_1$  és  $y_2$  akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a függvényekből képzett Wronski-determináns valamely pontban nem zérus.

**10.7. Megjegyzés.** A függvény együtthatós másodrendű egyenletek megoldására általános módszer nem létezik, azonban vannak módszerek, amelyek speciális esetben alkalmazhatóak.

Ha a homogén egyenlet egy  $y_1$  partikuláris megoldását ismerjük, akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását  $y_1 \cdot v$  alakban kereshetjük, amely egy hiányos másodrendű egyenletet ad a  $v$  függvényre nézve.

Vagy szintén ha a homogén egyenlet egy  $y_1$  megoldását ismerjük, akkor az  $y_2$  megoldás meghatározható a konstansvariálás módszerével (egy ismeretlen függvénnyel), és ezután  $y_p$  szintén konstansvariálással (két ismeretlen függvénnyel).

Illetve alkalmazható az előbbi Abel-formula is a másodrendű függvényegyütt-hatós lineáris differenciálegyenletek megoldására.

**10.8. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tekintsük az

$$x \cdot y''(x) - (1+x) \cdot y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenletet. Tudjuk, hogy  $y_1(x) = e^x$  megoldása az egyenletnek. A Wronski-determináns segítségével meghatározzuk egy  $y_1$ -től független megoldásfüggvényt, majd megadjuk az általános megoldást!

Mivel  $x \neq 0$ , ezért az egyenletet oszthatjuk  $x$ -szel, így azt kapjuk, hogy

$$y''(x) - \frac{1+x}{x} \cdot y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = 0.$$

Az Abel formula szerint az

$$y''(x) + p(x) \cdot y'(x) + q(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet két lineárisan független megoldásfüggvényéből képzett Wronski-determinánusra fennáll, hogy

$$W(x) = c \cdot e^{-\int p(x) dx},$$

vagyis jelen esetben

$$\begin{aligned} W(x) &= c \cdot e^{-\int -\frac{1+x}{x} dx} = c \cdot e^{\int \frac{1}{x} + 1 dx} = \\ &= c \cdot x \cdot e^x. \end{aligned}$$

Másrészt a Wronski-determináns definíciója szerint

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & y_2(x) \\ e^x & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Kiszámolva a determinánst és felhasználva, hogy

$$W(x) = c \cdot x \cdot e^x$$

azt kapjuk, hogy

$$y_2'(x) \cdot e^x - y_2(x) \cdot e^x = c \cdot x \cdot e^x.$$

Az általánosság sérelme nélkül tekinthetjük a  $c = 1$  esetet, így az

$$y_2'(x) \cdot e^x - y_2(x) \cdot e^x = x \cdot e^x,$$

vagyis az

$$e^x \cdot (y_2'(x) - y_2(x)) = x \cdot e^x,$$

tehát az

$$y_2'(x) - y_2(x) = x$$

inhomogén elsőrendű differenciálegyenlet egy megoldását kell megkeresnünk.

A megfelelő homogén egyenlet

$$y_2'(x) - y_2(x) = 0.$$

Ennek az általános megoldása

$$y_{2,h}(x) = c \cdot e^{-\int -1 dx} = c \cdot e^x.$$

Tehát

$$y_{2,h} = c \cdot e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstanvariálással határozzuk meg.

Legyen

$$y_{2,p} = c(x) \cdot e^x.$$

Ezt behelyettesítve az

$$y_2'(x) - y_2(x) = x$$

inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x,$$

amiből

$$c'(x) = x \cdot e^{-x}$$

adódik, így

$$\begin{aligned} c(x) &= \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = e^{-x} \cdot (-x - 1). \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy megoldása

$$y_2(x) = e^x \cdot e^{-x} \cdot (-x - 1) = -x - 1.$$

Tehát az

$$x \cdot y''(x) - (1 + x) \cdot y'(x) + y(x) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot (-x - 1).$$

## 11. Harmadrendű és magasabbrendű lineáris konstansgyütthetős differenciálegyenletek megoldása

11.1. **Definíció.** Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tetszőleges valós számok. Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

$n$ -edrendű homogén lineáris konstansgyütthetős differenciálegyenlet *karaktérisztikus egyenletén* a

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0$$

$n$ -edfokú algebrai egyenletet értjük.

11.2. **Tétel.** Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tetszőleges valós számok. Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0$$

$n$ -edrendű homogén lineáris konstansgyütthetős differenciálegyenlet alaplendszere megadható a karakterisztikus egyenlet megoldásainak segítségével.

Legyen  $j \in \{1; 2; \dots; n\}$ . Ha  $\lambda_j$  valós szám és  $m_j$ -szeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor az alaplendszerbe az

$$e^{\lambda_j \cdot x}; x \cdot e^{\lambda_j \cdot x}; \dots; x^{m_j-1} \cdot e^{\lambda_j \cdot x}$$

függvényeket kell bevenni.

Ha  $\lambda_j$  komplex szám és az  $m_j$ -szeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek, akkor ugyanez teljesül  $\overline{\lambda_j}$ -ra is. Ebben az esetben, ha

$$\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}),$$

, akkor az alaplendszerbe az

$$e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos(\beta_j \cdot x); x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos(\beta_j \cdot x); \dots; x^{m_j-1} \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \cos(\beta_j \cdot x) \\ e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin(\beta_j \cdot x); x \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin(\beta_j \cdot x); \dots; x^{m_j-1} \cdot e^{\alpha_j \cdot x} \cdot \sin(\beta_j \cdot x)$$

függvényeket kell bevenni.

11.3. **Tétel.** Legyenek  $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények és  $f$  nem azonosan nulla függvény. Az

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

$n$ -edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x) + y_p(x),$$

ahol

$$\{y_1; y_2; \dots; y_n\}$$

az

$$y^{(n)}(x) + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet alrendszerére és  $y_p$  az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

**11.4. Megjegyzés.** Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tetszőleges valós számok és legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  nem azonosan nulla folytonos függvény. Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

$n$ -edrendű inhomogén lineáris konstansegyütthatós differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldását meghatározhatjuk a másodrendű konstansegyütthatós lineáris differenciálegyenleteknél bemutatott módszerek (próbafüggvény, konstansvariálás) értelemszerű általánosításával.

**11.5. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek  $\lambda = 1$  megoldása, hiszen

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

polinom osztható  $\lambda - 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\
 - (\lambda^3 - \lambda^2) \\
 \hline
 \phantom{(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)} - 5\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\
 - (-5\lambda^2 + 5\lambda) \\
 \hline
 \phantom{(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)} \phantom{- 5\lambda^2} 6\lambda - 6 \\
 - (6\lambda - 6) \\
 \hline
 \phantom{(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6)} \phantom{- 5\lambda^2} \phantom{6\lambda} 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda^2 - 5\lambda + 6) \cdot (\lambda - 1).$$

Vagyis a

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \cdot (\lambda - 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot e^{3x},$$

ahol  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**11.6. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y'''(x) - 3y''(x) + 4y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek  $\lambda = -1$  megoldása, hiszen

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$$

polinom osztható  $\lambda + 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ - (\lambda^3 + \lambda^2) \\ \hline - 4\lambda^2 + 4 \\ - (-4\lambda^2 - 4\lambda) \\ \hline 4\lambda + 4 \\ - (4\lambda + 4) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \cdot (\lambda + 1).$$

Mivel

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 2)^2,$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 2$ . Tehát a  $\lambda_1 = -1$  egyszeres multiplicitású, míg a  $\lambda_2 = 2$  kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek.

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{2x} + c_3 \cdot x \cdot e^{2x},$$

ahol  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**11.7. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y'''(x) - 3y''(x) + 3y'(x) - y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0.$$

Mivel

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3,$$

ezért a karakterisztikus egyenletnek egyetlen gyöke van  $\lambda = 1$ , háromszoros multiplicitással.

Ezt felhasználva, a differenciálegyenlet általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x + c_3 \cdot x^2 \cdot e^x = \\ &= (c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot x^2) \cdot e^x, \end{aligned}$$

ahol  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**11.8. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^4 - 16 = 0.$$

Mivel

$$\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4) \cdot (\lambda^2 + 4),$$

ezért

$$(\lambda^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 4$$

és

$$(\lambda^2 + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -4$$

miatt a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-2x} + c_3 \cdot \cos 2x + c_4 \cdot \sin 2x,$$

ahol  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

**11.9. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y'''(x) + 9y''(x) + 26y'(x) + 24y(x) = 24x + 2$$

differenciálegyenletet!

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'''(x) + 9y''(x) + 26y'(x) + 24y(x) = 0.$$

A karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek  $\lambda = -2$  megoldása, hiszen

$$(-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 + 26 \cdot (-2) + 24 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24$$

polinom osztható  $\lambda + 2$ -vel. A polinomosztást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 7\lambda + 12 \\ - (\lambda^3 + 2\lambda^2) \\ \hline 7\lambda^2 + 26\lambda + 24 \\ - (7\lambda^2 + 14\lambda) \\ \hline 12\lambda + 24 \\ - (12\lambda + 24) \\ \hline 0 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = (\lambda^2 + 7\lambda + 12) \cdot (\lambda + 2).$$

Mivel a

$$(\lambda^2 + 7\lambda + 12) = 0$$

egyenlet megoldásai

$$\lambda_{2,3} = \frac{-7 \pm 1}{2},$$

ezért a harmadfokú egyenlet megoldásai  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-4x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$y_p(x) = A \cdot x + B$$

alakban keressük. Ekkor az  $y_p$  deriváltja

$$y_p'(x) = A,$$

másodrendű deriváltja  $y_p''(x) = 0$ , harmadrendű deriváltja  $y_p'''(x) = 0$ . Ezeket visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$26A + 24A \cdot x + 24B = 24x + 2,$$

így  $A = 1$  és

$$26A + 24B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x - 1.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} + c_3 \cdot e^{-4x} + x - 1.$$

**11.10. Megjegyzés.** Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tetszőleges valós számok és legyen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  nem azonosan nulla folytonos függvény, továbbá  $x_0 \in I$ . Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

$$y(x_0) = y_{01}; \quad y'(x_0) = y_{02}; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n}$$

$n$ -edrendű inhomogén lineáris konstanssegélytűthetős differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat megoldható Laplace-transzformációval is.

**11.11. Példa.** Legyen  $t \geq 0$ . Megoldjuk Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{aligned} y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t) &= 0 \\ y(0) = 9, \quad y'(0) = 20, \quad y''(0) &= 50 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték feladatot!

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'''(t) - 6y''(t) + 11y'(t) - 6y(t)] = \mathcal{L}[0].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'''] - 6\mathcal{L}[y''] + 11\mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[0]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'''] = s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0),$$

és

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0),$$

valamint

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0),$$

továbbá

$$\mathcal{L}[0] = 0,$$

ezért az eredeti kezdetiérték feladat átírható az

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) - \\ & - 6 \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - s \cdot y(0) - y'(0)) + \\ & + 11 \cdot (s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)) - 6\mathcal{L}[y] = 0 \end{aligned}$$

algebrai egyenletté.

Mivel  $y(0) = 9$ ,  $y'(0) = 20$  és  $y''(0) = 50$ , ezért

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot \mathcal{L}[y] - 9s^2 - 20s - 50 - 6 \cdot (s^2 \cdot \mathcal{L}[y] - 9s - 20) + \\ & + 11(s \cdot \mathcal{L}[y] - 9) - 6\mathcal{L}[y] = 0. \end{aligned}$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) - 9s^2 - 20s + 54s - 50 + 120 - 99 = 0,$$

vagyis

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) - 9s^2 + 34s - 29 = 0$$

adódik, amiből kifejezve a  $\mathcal{L}[y]$  kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{9s^2 - 34s + 29}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6}.$$

Következő lépésben a nevezőt szorzattá alakítjuk. Az  $s^3 - 6s^2 + 11s - 6$  polinomnak az  $s = 1$  gyöke, így osztható  $s - 1$ -gyel. A polinomosztást elvégezve

azt kapjuk, hogy

$$\begin{array}{r}
 (s^3 - 6s^2 + 11s - 6) : (s - 1) = s^2 - 5s + 6 \\
 - (s^3 - s^2) \\
 \hline
 - 5s^2 + 11s - 6 \\
 - (-5s^2 + 5s) \\
 \hline
 6s - 6 \\
 - (6s - 6) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = (s^2 - 5s + 6) \cdot (s - 1).$$

Vagyis a

$$(s^2 - 5s + 6) \cdot (s - 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldásai

$$s_{2,3} = \frac{5 \pm 1}{2}.$$

Tehát a harmadfokú egyenlet megoldásai  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 3$ , így

$$s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = (s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3).$$

Tehát

$$\mathcal{L}[y] = \frac{9s^2 - 34s + 29}{(s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{9s^2 - 34s + 29}{(s - 1) \cdot (s - 2) \cdot (s - 3)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2} + \frac{C}{s - 3}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$9s^2 - 34s + 29 = A \cdot (s - 2) \cdot (s - 3) + B \cdot (s - 1) \cdot (s - 3) + C \cdot (s - 1) \cdot (s - 2).$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + B + C) \cdot s^2 + (-5A - 4B - 3C) \cdot s + 6A + 3B + 2C = 9s^2 - 34s + 29$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 9 \\ -5A - 4B - 3C &= -34 \\ 6A + 3B + 2C &= 29 \end{aligned} \right\}.$$

A kapott lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának 5-szörösét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor  $-6$ -szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -5 & -4 & -3 & -34 \\ 6 & 3 & 2 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & -25 \end{array} \right).$$

Most a második sor 3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & -4 & -25 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right).$$

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrix segítségével felírva az egyenletrendszert

$$\left. \begin{aligned} A + B + C &= 9 \\ B + 2C &= 11 \\ 2C &= 8 \end{aligned} \right\}$$

adódik. Az utolsó egyenletből tehát megkaptuk, hogy  $C = 4$ . Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy  $B = 3$ . Végül az első egyenletből  $A = 2$  adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s-3}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására

$$y(t) = 2e^t + 3e^{2t} + 4 \cdot e^{3t}$$

adódik.

## 12. Differenciálegyenlet-rendszerek

**12.1. Megjegyzés.** Azok a differenciálegyenlet-rendszerek, amelyek nem lineárisak, csak nagyon speciális esetben oldhatóak meg elemi módszerekkel. Emiatt jelen jegyzetben a lineáris differenciálegyenlet-rendszerekkel foglalkozunk részletesebben.

**12.2. Megjegyzés.** Ebben a fejezetben erősen építeni fogunk bizonyos lineáris algebrai ismeretekre, így a fejezetet azzal kezdjük, hogy röviden összegezzük a legfontosabb olyan lineáris algebrai fogalmakat, tételeket, amiket alkalmazni fogunk.

**12.3. Lineáris algebrai ismeretek.** A továbbiakban, ha mást nem mondunk az  $A$  mátrix négyzetes mátrix.

Az  $r \neq 0$  vektort az  $A$  mátrix *sajátvektor*ának nevezzük, ha létezik olyan  $\lambda \in \mathbb{R}$ , hogy

$$A \cdot r = \lambda \cdot r.$$

Ilyenkor  $\lambda$ -t az  $A$  mátrix *sajátérték*ének hívjuk, és azt mondjuk, hogy  $r$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor.

Ha az  $A$  mátrixnak az  $r \neq 0$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektora, akkor teljesül, hogy

$$A \cdot r = \lambda \cdot r.$$

Megmutatható, hogy minden szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós szám.

A

$$\det(A - \lambda \cdot E_n)$$

polinomot az  $A$  mátrix *karakterisztikus polinom*jának nevezzük, míg a

$$\det(A - \lambda \cdot E_n) = 0$$

egyenletet az  $A$  mátrix *karakterisztikus egyenlet*ének nevezzük. Itt  $E_n$  az  $n$ -edrendű egységmátrixot jelöli.

A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei.

A sajátvektorok az

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Mivel ezen egyenletrendszer alapmátrixának determinánása definíció szerint 0, ezért végtelen sok megoldása van, így egy sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozik.

Egy adott sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmazát az adott sajátértékhez tartozó *sajátaltér*nek is nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a  $\lambda$  sajátérték  $k$ -szoros *algebrai multiplicitású* sajátértéke az  $A$  mátrixnak, ha  $\lambda$  a karakterisztikus egyenletnek  $k$ -szoros gyöke.

Azt mondjuk, hogy a  $\lambda$  sajátérték  $k$ -szoros *geometriai multiplicitású* sajátértéke az  $A$  mátrixnak, ha a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója  $k$ .

Az  $r \neq 0$  vektort az  $A$  mátrix *általánosított sajátvektorának* nevezzük, ha valamilyen  $k$  természetes számra

$$(A - \lambda \cdot E_n)^k \cdot r = 0.$$

Ha speciálisan  $k = 1$ , akkor  $r$  sajátvektor.

Az általánosított sajátvektorokból álló  $r^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) láncot *Jordan-láncnak* nevezzük, ha

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot r^{(i)} = r^{(i-1)}$$

és

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot r^{(1)} = 0.$$

Ezen  $r^{(i)}$  vektorok segítségével egy sajátvektorokból álló bázist kapunk. Tehát sajátvektorokból álló bázis nem mindig létezik (akkor és csak akkor van sajátvektorokból álló bázis, ha minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő), azonban általánosított sajátvektorokból álló bázis mindig létezik.

**12.4. Definíció.** Legyen  $x_0 \in I$  és  $a_{ij}, f_j: I \rightarrow \mathbb{R}$  minden  $i, j = 1, \dots, n$  esetén adott függvények. Az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n(x) + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) + f_n(x) \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert *n-dimenziós elsőrendű függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszernek* vagy másképp *n egyenletből álló elsőrendű függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszernek* nevezzük. Amennyiben az  $f_j$  függvények minden  $j = 1, \dots, n$  esetén azonosan nullák, úgy *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén* egyenletrendszerről beszélünk. Ha az  $a_{ij}$  együtthatók valós számok, akkor *konstansegütthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer*ről beszélünk.



ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , ugyanis mivel

$$\varphi_1'(t) = c_1 \cdot e^{2t} + 2c_2 \cdot e^{2t} - 2c_2 \cdot e^t$$

és

$$\varphi_2'(t) = c_2 \cdot e^t$$

miatt

$$\begin{aligned} 2c_1 \cdot e^{2t} + 4c_2 \cdot e^{2t} - 2c_2 \cdot e^t &= \\ = 2c_1 \cdot e^{2t} + 4c_2 \cdot e^{2t} - 4c_2 \cdot e^t + 2c_2 \cdot e^t & \end{aligned}$$

és

$$c_2 \cdot e^t = c_2 \cdot e^t.$$

**12.9. Megjegyzés.** Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 2x \cdot y_1(x) + x^2 \cdot y_2(x) + e^x \\ y_2'(x) &= 5x \cdot y_1(x) + x^3 \cdot y_2(x) + x + 2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer! Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}$$

és az

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

illetve

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$





mátrix determinánsát a *megoldások Wronski-determinánsának* nevezzük.

**12.16. Definíció.** Legyen  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) \end{array} \right\}$$

homogén lineáris egyenletrendszer  $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$  megoldásai pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a megoldásfüggvények által alkotott Wronski-determináns nem azonosan nulla az  $I$  intervallumon.

**12.17. Tétel.** Legyen  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) \end{array} \right\}$$

homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása  $n$  darab lineárisan független megoldás lineáris kombinációja.

**12.18. Példa.** Megmutatjuk, hogy az  $\{y^{(1)}(x); y^{(2)}(x)\}$ , ahol

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix}$$

és

$$y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} y_1^*(x) \\ y_2^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} \\ 2e^{-3x} \end{pmatrix}$$

alaprendszere az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = -y_1(x) - y_2(x) \\ y_2'(x) = 2y_1(x) - 4y_2(x) \end{array} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszernek. Ehhez két dolgot kell belátnunk. Egyrészt azt, hogy  $y^{(1)}$  és  $y^{(2)}$  megoldásai az egyenletrendszernek, másrészt azt, hogy lineárisan függetlenek.

Mivel

$$y_1'(x) = -2e^{-2x}$$

és

$$y_2'(x) = -2e^{-2x},$$

ezért

$$-2e^{-2x} = -e^{-2x} - e^{-2x}$$

és

$$-2e^{-2x} = 2e^{-2x} - 4e^{-2x},$$

ezért  $y^{(1)}(x)$  megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel

$$y_1^{\star'}(x) = -3e^{-3x}$$

és

$$y_2^{\star'}(x) = -6e^{-3x},$$

ezért

$$-3e^{-3x} = -e^{-3x} - 2e^{-3x}$$

és

$$-6e^{-3x} = 2e^{-3x} - 8e^{-3x},$$

ezért  $y^{(2)}(x)$  megoldása az egyenletrendszernek.

Mivel

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ e^{-2x} & 2e^{-3x} \end{pmatrix} = e^{-5x} \neq 0,$$

ezért  $y^{(1)}$  és  $y^{(2)}$  lineárisan függetlenek.

Tehát  $\{y^{(1)}; y^{(2)}\}$  alaprendszer a differenciálegyenlet-rendszernek. Ez azt is jelenti, hogy az egyenletrendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot y^{(1)}(x) + c_2 \cdot y^{(2)}(x),$$

vagyis

$$y(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-2x} + c_2 \cdot e^{-3x} \\ c_1 \cdot e^{-2x} + 2c_2 \cdot e^{-3x} \end{pmatrix},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges.

### 12.19. Tétel. (Liouville-formula)

Legyen  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  folytonos függvény és tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} y_1'(x) = a_{11}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{1n}(x) \cdot y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}(x) \cdot y_1(x) + \dots + a_{nn}(x) \cdot y_n(x) \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  megoldásai az egyenletrendszernek és legyen  $\Phi(x) = (\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x))$ . Legyen

$$\operatorname{tr} A(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(x)$$

az  $A$  mátrix nyoma. Ekkor

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x \operatorname{tr} A(\xi) d\xi}$$

minden  $x, x_0 \in I$  esetén.

**12.20. Példa.** Legyen  $x \in ]0; \infty[$ . Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x) \\ y_2'(x) &= (1+x) \cdot y_1(x) - y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert!

Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

és az

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer tömörebb formában is felírható az

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x)$$

alakban. Ekkor

$$\operatorname{tr} A(x) = 1 + (-1) = 0.$$

Az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

megoldása az egyenletrendszernek. Az alaprendszer

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & 1 \\ y_2(x) & x \end{pmatrix}.$$

A  $\Phi(x)$  determinánsa

$$\det \Phi(x) = x \cdot y_1(x) - y_2(x).$$

Az előbbi tétel szerint

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^x 0 \, d\xi} = c_1,$$

így

$$x \cdot y_1(x) - y_2(x) = c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$ .

Mivel az eredeti egyenletrendszer első egyenlete szerint

$$y_1'(x) = y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x),$$

ezért

$$y_1'(x) = y_1(x) - \frac{1}{x} \cdot y_2(x) = \frac{x \cdot y_1(x) - y_2(x)}{x} = \frac{c_1}{x},$$

vagyis

$$y_1'(x) = \frac{c_1}{x},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$y_1(x) = c_1 \cdot \ln x + c_2,$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Ekkor

$$y_2(x) = x \cdot y_1(x) - c_1 = c_1 \cdot x \cdot \ln x + c_2 \cdot x - c_1.$$

Tehát egy alaprendszer

$$\begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \cdot \ln x - 1 & x \end{pmatrix}.$$

12.21. **Tétel.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és tekintsük az

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

konstansegyütthatós homogén lineáris egyenletrendszer!

Ha  $\lambda$  az  $A$  mátrixnak  $m$ -szeres algebrai multiplicitású valós gyöke,  $m$  geometriai multiplicitással és  $s_1, \dots, s_m$  a  $\lambda$ -hoz tartozó  $m$  darab lineárisan független sajátvektor, akkor az alarendszerbe az

$$e^\lambda \cdot s_1; \dots; e^\lambda \cdot s_m$$

vektorokat kell bevenni.

Ha  $\alpha \pm i \cdot \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) az  $A$  mátrixnak  $m$ -szeres algebrai multiplicitású komplex sajátértékei, melyek geometriai multiplicitása is  $m$ , továbbá  $s_1, \dots, s_m$  az  $\alpha + i \cdot \beta$ -hoz tartozó  $m$  darab lineárisan független sajátvektor, akkor az alarendszerbe az

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1);$$

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1);$$

⋮

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_m) - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_m);$$

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_m) + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_m);$$

vektorokat kell bevenni.

Ha  $\lambda$  az  $A$  mátrixnak  $m$ -szeres algebrai multiplicitású valós sajátértéke, és a  $\lambda$  geometriai multiplicitása  $m$ -nél kisebb, akkor van olyan  $m$  tagú lineárisan független vektorrendszer, mely  $\lambda$ -hoz tartozó általánosított sajátvektorokból álló, diszjunkt Jordan-láncok uniója. Ha  $s_1, \dots, s_l$  egy ilyen lánc egy ilyen rendszerben, akkor az alarendszerbe az

$$e^{\lambda \cdot x} \cdot s_1$$

$$x \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot s_1 + e^{\lambda \cdot x} \cdot s_2$$

⋮

$$\frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot s_1 + \dots + e^{\lambda \cdot x} \cdot s_l$$

vektorokat kell bevenni.

Ha  $\alpha \pm i \cdot \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) az  $A$  mátrixnak  $m$ -szeres algebrai multiplicitású komplex sajátértékei, és a geometriai multiplicitásuk  $m$ -nél kisebb, akkor van olyan  $m$  tagú lineárisan független vektorrendszer, mely  $\alpha + i \cdot \beta$ -hoz tartozó általánosított sajátvektorokból álló, diszjunkt Jordan-láncok uniója. Ha  $s_1, \dots, s_l$  egy ilyen lánc egy ilyen rendszerben, akkor az alapszisztembe az

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1); \\
 & e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1); \\
 & x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) \\
 & + e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_2) - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_2); \\
 & x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) + x \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) \\
 & + e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_2) + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_2); \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \left( \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) \right) + \\
 & \quad \dots + \left( e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_l) - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_l) \right); \\
 & \left( \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) + \frac{x^{l-1}}{(l-1)!} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) \right) + \\
 & \quad \dots + \left( e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s_l) + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s_l) \right)
 \end{aligned}$$

vektorokat kell bevenni.

**12.22. Következmény.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  és tekintsük az

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

konstansegyütthatós homogén lineáris egyenletrendszer! Ha  $A$  sajátértékei a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  páronként különböző valós számok, melyekhez tartozó sajátvektorok rendre  $s_1, \dots, s_n$ , akkor a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \cdot s_1 + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x} \cdot s_n,$$

ahol  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

*Bizonyítás:* Az állítás az előző tétel közvetlen következménye. Azonban adunk egy bizonyítást direkt úton.

A megoldást

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot s$$

alakban keressük, ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$ , és  $s \in \mathbb{R}^n$ . Ekkor

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot s.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot s = A \cdot e^{\lambda \cdot x} \cdot s,$$

vagyis

$$\lambda \cdot s = A \cdot s,$$

így

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot s = 0,$$

ahol  $E$  az  $n$ -edrendű egységmátrix. Ezzel azt kaptuk, hogy  $\lambda$  sajátértéke az  $A$  mátrixnak és  $s$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel feltétel szerint a sajátértékek különbözőek, ezért a hozzájuk tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Korábban azonban láttuk, hogy az általános megoldás  $n$  darab lineárisan független megoldás lineáris kombinációja, amivel igazoltuk az állítást. ■

Az alábbi következményben megfogalmazzuk kétdimenziós esetre a (12.21) tételt.

**12.23. Következmény.** Legyen  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  és tekintsük az

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

konstansegyütthatós homogén lineáris egyenletrendszer!

Alapvetően 4 esetet különböztetünk meg.

Ha az  $A$  mátrixnak két különböző valós sajátértéke van és ezek  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ , melyekhez tartozó egy-egy sajátvektor rendere  $s_1$  és  $s_2$ , akkor a homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot s_2.$$

Ha az  $A$  mátrixnak egy valós sajátértéke van és ez  $\lambda$ , és a  $\lambda$  sajátérték geometriai multiplicitása 2, akkor létezik két lineárisan független sajátvektor a  $\lambda$ -hoz,

melyek legyenek  $s_1$  és  $s_2$ . Ekkor a homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot s_2.$$

Tegyük fel, hogy az  $A$  mátrixnak egy valós sajátértéke van és ez  $\lambda$ , és a  $\lambda$  sajátérték geometriai multiplicitása 1. Egy sajátvektor legyen  $s_1$  és egy általánosított sajátvektor legyen  $s_2$ . Ekkor a homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot s_1 + c_2 \cdot \left( x \cdot e^{\lambda x} \cdot s_1 + e^{\lambda x} \cdot s_2 \right).$$

Ha az  $A$  mátrix sajátértékei komplex számok és ezek

$$\lambda = \alpha \pm i \cdot \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

továbbá  $s$  a  $\lambda$  sajátértékhez tartozó sajátvektor, akkor a a homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) = & c_1 \cdot (e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s) - \\ & - e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s)) + \\ & + c_2 \cdot (e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Im}(s) + \\ & + e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot \operatorname{Re}(s)). \end{aligned}$$

**12.24. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában  $y'(x) = A \cdot y(x)$ , ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az  $A$  mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az  $A$  mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz vagyis az

$$(1 - \lambda)^2 - 4$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$(1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - \lambda)^2 = 4$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldása

$$1 - \lambda = 2$$

$$1 - \lambda = -2,$$

vagyis  $\lambda_1 = -1$ , illetve  $\lambda_2 = 3$ .

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Először meghatározzuk a  $\lambda_1 = -1$  sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A + 1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor kétszerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$2r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például  $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor  $r_2 = -2t$ . Tehát a  $\lambda_1 = -1$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \left( \begin{array}{c} t \\ -2t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \left( \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \left( \begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array} \right).$$

Meghatározzuk a  $\lambda_2 = 3$  sajátértékhez tartozó sajátvektorokat. Ehhez tekintsük az

$$A - 3 \cdot E_2 = \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right) - \left( \begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{array} \right)$$

mátrixot. Ezután a

$$\left( \begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix második sora az első sor  $-2$ -szerese, így az elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-2r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például  $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor  $r_2 = 2t$ . Tehát a  $\lambda_2 = 3$  sajátértékhez tartozó sajátaltér:

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \left( \begin{array}{c} t \\ 2t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right).$$

Az alaprendszer

$$\begin{aligned}\Phi &= (s_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} \quad s_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}) = \\ &= \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} \right) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -2e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -2e^{-x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

azaz

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x} \\ -2c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{3x}$$

$$y_2(x) = -2c_1 \cdot e^{-x} + 2c_2 \cdot e^{3x}.$$

**12.25. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) \\ y_2'(x) &= 2y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában  $y'(x) = A \cdot y(x)$ , ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az  $A$  mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az  $A$  mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(2 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) = (2 - \lambda)^2$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(2 - \lambda)^2 = 0$$

egyenlet, melynek megoldása  $\lambda = 2$ .

Ehhez létezik két lineárisan független sajátvektor, melyek

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

és

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{2x} \cdot s_2,$$

vagyis

$$y_1(x) = c_1 \cdot e^{2x}$$

$$y_2(x) = c_2 \cdot e^{2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

12.26. **Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ y_2'(x) &= -y_1(x) + 3y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában  $y'(x) = A \cdot y(x)$ , ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az  $A$  mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az  $A$  mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz vagyis az

$$(1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, vagyis jelen esetben  $\lambda = 2$  kétszeres multiplicitású gyöke a karakterisztikus egyenletnek. A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják, ami jelen esetben

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tehát a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-r_1 + r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például  $r_1 = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor  $r_2 = t$ . Tehát a  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Ez azt jelenti, hogy a  $\lambda = 2$  sajátérték geometriai multiplicitása 1. Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel nem létezik ettől lineárisan független sajátvektor, hiszen a  $\lambda = 2$  sajátérték geometriai multiplicitása egy, ezért egy általánosított sajátvektort kell bevezetnünk. Ehhez tekintsük az

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot r = s_1$$

egyenletrendszert.

$$A - 2 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixot. Tehát a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Vegyük észre, hogy az alapmátrix első és második sora megegyezik, így az egyik sor elhagyható. Tehát a megoldandó lineáris egyenletrendszer

$$-r_1 + r_2 = 1.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például  $r_1 = t \in \mathbb{R}$ . Ekkor  $r_2 = t - 1$ . Tehát a  $\lambda = 2$  sajátértékhez tartozó általánosított sajátaltér kétdimenziós, melyet  $S_\lambda$  és  $S_\lambda^*$  generál, ahol

$$S_\lambda^* = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a differenciálegyenlet-rendszernek egy, a korábbtól lineárisan független megoldása

$$x \cdot s_1 \cdot e^{\lambda x} + s_2 \cdot e^{\lambda x},$$

ami jelen esetben

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} = e^{2x} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}.$$

Tehát az alapszisztem

$$\Phi(x) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \quad \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x} \right).$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot x \cdot e^{2x} \\ c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot (x+1) \cdot e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{2x}$$

$$y_2(x) = (c_1 + c_2 \cdot (x+1)) e^{2x},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

12.27. **Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 5y_1(x) + 5y_2(x) \\ y_2'(x) &= -2y_1(x) + 7y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

A differenciálegyenlet-rendszer mátrixos alakja

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tömörebb formában  $y'(x) = A \cdot y(x)$ , ahol egyrészt

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix},$$

másrészt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

és

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Első lépésben meghatározzuk az  $A$  mátrix sajátértékeit. A mátrix karakterisztikus polinomja a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2)$$

polinom. Behelyettesítve az  $A$  mátrixot és a másodrendű egységmátrixot a

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 5 \\ -2 & 7 - \lambda \end{pmatrix}$$

determinánshoz jutunk, melyet kiszámolva, majd elvégezve a zárójelfelbontásokat a

$$(5 - \lambda) \cdot (7 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - 12\lambda + 45$$

polinomhoz jutunk. A karakterisztikus egyenlet a

$$\det(A - \lambda \cdot E_2) = 0$$

egyenlet, ami jelen esetben a

$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0$$

másodfokú egyenlet. A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, így az

$$\lambda^2 - 12\lambda + 45 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenlet megoldása

$$\lambda_{1;2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{-36}}{2} = 6 \pm 3i,$$

vagyis  $\lambda_1 = 6 + 3i$ , illetve  $\lambda_2 = 6 - 3i$ . Legyen  $\alpha = 6$  és  $\beta = 3$ .

A sajátvektorokat az

$$(A - \lambda \cdot E_2) \cdot r = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Elegendő meghatározni a  $\lambda_1 = 6 + 3i$  sajátértékhez tartozó sajátvektorokat:

$$A - (6+3i) \cdot E_2 = 0 \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6+3i & 0 \\ 0 & 6+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix}.$$

Tehát az

$$\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két sor közül az egyik elhagyható, így

$$(-1 - 3i) \cdot r_1 + 5r_2 = 0.$$

Az egyik ismeretlent szabad paraméternek választhatjuk.

Legyen például  $r_1 = 5t$ , ahol  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ekkor  $r_2 = (1 + 3i) \cdot t$ . Tehát a  $\lambda_1 = 6 + 3i$  sajátértékhez tartozó összes sajátvektorok halmaza (vagyis a sajátaltér):

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 5t \\ (1+3i) \cdot t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Legyen egy konkrét sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Az alaprendszer

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) - e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1); \\ e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot \operatorname{Im}(s_1) + e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot \operatorname{Re}(s_1) \end{pmatrix}$$

Tehát az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \left( e^{6x} \cdot \cos(3x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{6x} \cdot \sin(3x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) + \\ + c_2 \cdot \left( e^{6x} \cdot \cos(3x) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{6x} \cdot \sin(3x) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Tehát azt kaptuk, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása

$$y_1(x) = 5c_1 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) + 5c_2 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x),$$

illetve

$$y_2(x) = c_1 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) - 3c_1 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x) + \\ + 3c_2 \cdot e^{6x} \cdot \cos(3x) + c_2 \cdot e^{6x} \cdot \sin(3x).$$

**12.28. Tétel.** Legyen  $A: I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  és  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény. Tegyük fel, hogy az

$$y'(x) = A \cdot y(x)$$

homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot y^{(1)}(x) + \dots + c_n \cdot y^{(n)}(x),$$

ahol  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Ekkor az

$$y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$$

inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

ahol  $y_p$  az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása.

**12.29. Megjegyzés.** Az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldását meghatározhatjuk a konstansvariálás módszerével. Ilyenkor az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + \dots + c_n(x) \cdot y^{(n)}(x)$$

alakban keressük. Ekkor teljesül, hogy

$$c_1'(x) \cdot y^{(1)}(x) + \dots + c_n'(x) \cdot y^{(n)}(x) = f(x),$$

n amely összefüggésekből a

$$c'_1(x), \dots, c'_n(x)$$

függvények meghatározhatóak, majd azokból integrálással a  $c_1, \dots, c_n$  függvényeket kapjuk.

**12.30. Példa.** Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y'_1(x) &= 3y_1(x) + 2y_2(x) + e^x \\ y'_2(x) &= 4y_1(x) + y_2(x) + e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert és legyen  $y_1(0) = \frac{17}{18}$  és  $y_2(0) = -\frac{5}{9}$ .

Az egyenletrendszer felírható

$$\begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

alakban. Bevezetve az

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

és

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \end{pmatrix},$$

valamint az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$f(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^{-x} \end{pmatrix}$$

jelöléseket az egyenletrendszer az

$$y'(x) = A \cdot y(x) + f(x)$$

formában írható fel.

Az  $A$  mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (3 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 8, \end{aligned}$$

vagyis

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

amelynek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2},$$

azaz  $\lambda_1 = 5$  és  $\lambda_2 = -1$ .

A  $\lambda_1 = 5$  sajátérték esetén

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

így a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} -2r_1 + 2r_2 &= 0 \\ 4r_1 - 4r_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

vagyis  $r_1 = r_2$ , így például egy  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektor

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda_2 = -1$  sajátérték esetén

$$A + E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

így a megoldandó egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} 4r_1 + 2r_2 &= 0 \\ 4r_1 + 2r_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

vagyis  $r_2 = -2r_1$ , így például egy  $\lambda_2$ -höz tartozó sajátvektor

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tehát a homogén egyenletrendszer általános megoldása

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{5x} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{-x} \cdot s_2,$$

vagyis

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{5x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$y_h(x) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x} \\ c_1 \cdot e^{5x} - 2c_2 \cdot e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg, vagyis egy megoldását

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + c_2(x) \cdot y^{(2)}(x)$$

alakban keressük, ahol

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

és

$$y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Ekkor teljesülnie kell a

$$\left. \begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{5x} + c_2'(x) \cdot e^{-x} &= e^x \\ c_1'(x) \cdot e^{5x} - 2c_2'(x) \cdot e^{-x} &= e^{-x} \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek. Ez egy lineáris egyenletrendszer a  $c_1'(x)$  és  $c_2'(x)$  ismeretlenekre vonatkozóan. Az egyenletrendszer alapmátrixa

$$M = \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ e^{5x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

A mátrix determinánása

$$\det M = -3e^{4x}.$$

Legyen

$$M_1 = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}$$

és

$$M_2 = \begin{pmatrix} e^{5x} & e^x \\ e^{5x} & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\det M_1 = -2 - e^{-2x}$$

és

$$\det M_2 = e^{4x} - e^{6x}.$$

A Cramer-szabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$c_1'(x) = \frac{\det M_1}{\det M} = \frac{-2 - e^{-2x}}{-3e^{4x}} = \frac{2}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-6x},$$

illetve

$$c_2'(x) = \frac{\det M_2}{\det M} = \frac{e^{4x} - e^{6x}}{-3e^{4x}} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

Ezekből

$$c_1(x) = \int \frac{2}{3}e^{-4x} + \frac{1}{3}e^{-6x} dx = -\frac{1}{6}e^{-4x} - \frac{1}{18}e^{-6x},$$

és

$$c_2(x) = \int -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{2x} dx = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}e^{2x}.$$

Ezeket felhasználva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \cdot y^{(1)}(x) + c_2(x) \cdot y^{(2)}(x) = \\ &= \left( -\frac{1}{6}e^{-4x} - \frac{1}{18}e^{-6x} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix} + \\ &+ \left( -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}e^{2x} \right) \cdot \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -2e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} + \frac{1}{6}e^x \\ -\frac{1}{6}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} - \frac{1}{3}e^x \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ -\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{5x} + c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ c_1 \cdot e^{5x} - 2c_2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mivel  $y_1(0) = \frac{17}{18}$ , ezért

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Mivel  $y_2(0) = -\frac{5}{9}$ , ezért

$$c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = -\frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad c_1 - 2c_2 = 0.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A két egyenletet kivonva egymásból  $c_2 = \frac{1}{3}$  adódik, így  $c_1 = \frac{2}{3}$ . Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left( \begin{array}{l} \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} \\ \frac{2}{3}e^{5x} - \frac{2}{3} \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x} \end{array} \right),$$

vagyis

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{1}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x} = \\ &= \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{5}{18}e^{-x} - \frac{1}{3}x \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

és

$$y_2(x) = \frac{2}{3}e^{5x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{13}{18}e^{-x} + \frac{2}{3}x \cdot e^{-x}.$$

**12.31. Megjegyzés.** A konstansegyütthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó kezdetiérték feladatot megoldhatjuk Laplace-transzformációval is. Ekkor minden differenciálegyenletnek vesszük a Laplace-transzformáltját. Ekkor kapunk egy algebrai egyenletrendszert az ismeretlen függvények Laplace-transzformáltjaira. Ezt megoldva, majd alkalmazva az inverz Laplace-transzformációt megkapjuk a differenciálegyenlet-rendszer megoldását.

**12.32. Példa.** Legyen  $t > 0$ . Megoldjuk Laplace-transzformációval az

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= 2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= 3x(t) + 4y(t) \end{aligned} \right\},$$

$x(0) = 1$ ;  $y(0) = 0$  kezdetiérték-feladatot.

Ha vesszük az első egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(x) - x(0) = 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y).$$

Mivel  $x(0) = 1$ , ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(x) - 1 = 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y).$$

Ha vesszük a második egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját, akkor azt kapjuk, hogy

$$s \cdot \mathcal{L}(y) - y(0) = 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y).$$

Mivel  $y(0) = 0$ , ezért

$$s \cdot \mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y).$$

Tehát az alábbi algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} s \cdot \mathcal{L}(x) - 1 &= 2\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \\ s \cdot \mathcal{L}(y) &= 3\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(y) \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(y) = (s - 2) \cdot \mathcal{L}(x) - 1.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$(s - 4) \cdot [(s - 2) \cdot \mathcal{L}(x) - 1] = 3\mathcal{L}(x)$$

adódik, amiből

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{(s - 4) \cdot (s - 2) - 3},$$

vagyis

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{s^2 - 6s + 5}.$$

Ezt felhasználva

$$\mathcal{L}(y) = (s - 2) \cdot \frac{s - 4}{s^2 - 6s + 5} - 1 = \frac{s^2 - 6s + 8 - s^2 + 6s - 5}{s^2 - 6s + 5},$$

tehát

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3}{s^2 - 6s + 5}.$$

A kapott törtek nevezőit szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s - 4}{(s - 1) \cdot (s - 5)}$$

és

$$\mathcal{L}(y) = \frac{3}{(s - 1) \cdot (s - 5)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontjuk. Az

$$\frac{s-4}{(s-1) \cdot (s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5}$$

egyenletet a közös nevezővel szorozva és a tagokat fokszám szerint rendezve

$$(A+B) \cdot s - 5A - B = s - 4$$

adódik. A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 1 \\ -5A - B = -4 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy  $A = \frac{3}{4}$ , majd az első egyenletből azt, hogy  $B = \frac{1}{4}$ .

Tehát

$$\mathcal{L}(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-5}.$$

A

$$\frac{3}{(s-1) \cdot (s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5}$$

egyenletet a közös nevezővel szorozva és a tagokat fokszám szerint rendezve

$$(A+B) \cdot s - 5A - B = 3$$

adódik. A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -5A - B = 3 \end{array} \right\}.$$

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy  $A = -\frac{3}{4}$ , majd az első egyenletből azt, hogy  $B = \frac{3}{4}$ .

Tehát

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-5}.$$

Az  $\mathcal{L}(x)$ -re és  $\mathcal{L}(y)$ -ra kapott eredményt felhasználva a differenciálegyenlet-rendszer megoldására azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-5} \right) = \\ &= \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left( -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s-5} \right) = \\ &= -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t}.\end{aligned}$$

DUPress

### 13. Átviteli elv

#### 13.1. Tétel. (átviteli elv)

Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nem üres, nyílt halmaz és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Tegyük fel, hogy a  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

$n$ -edrendű differenciálegyenletnek. Ekkor a

$$\psi(x) = (\varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x))$$

módon definiált  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x; y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Az előbbi tétel megfordítása is igaz.

#### 13.2. Tétel. (átviteli elv 2)

Ha a  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x; y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszernek, akkor a  $\psi_1 = \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény (vagyis a  $\psi$  függvény első koordináta függvénye) megoldása az

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x))$$

$n$ -edrendű differenciálegyenletnek.

**13.3. Megjegyzés.** Az átviteli elv szerint bármely  $n$ -edrendű differenciálegyenlet ekvivalens egy alkalmasan megkonstruált  $n$  darab egyenletből álló elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel.

**13.4. Példa.** Az

$$y''(x) + \sin(y(x)) = 0$$

másodrendű differenciálegyenlet ekvivalens az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= -\sin y_1(x) \end{aligned} \right\}$$

differenciálegyenlet-rendszerrel.

**13.5. Tétel.** (átviteli elv kezdetiérték feladatra)

Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nem üres, nyílt halmaz és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , valamint  $x_0 \in I$ . Tegyük fel, hogy a  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= k_0, y'(x_0) = k_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1} \end{aligned}$$

kezdetiérték feladatnak. Ekkor a

$$\psi(x) = (\varphi(x); \varphi'(x); \dots; \varphi^{(n-1)}(x))$$

módon definiált  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x; y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)) \end{aligned} \right\}$$

$$y_1(x_0) = k_0, y_2(x_0) = k_1, \dots, y_n(x_0) = k_{n-1}$$

kezdetiérték feladatnak.

Az előbbi tétel megfordítása is igaz.

**13.6. Tétel.** (átviteli elv 2 kezdetiérték feladatra)

Ha a  $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény megoldása az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x; y_1(x); y_2(x); \dots; y_n(x)) \end{aligned} \right\}$$

$$y_1(x_0) = k_0, y_2(x_0) = k_1, \dots, y_n(x_0) = k_{n-1}$$

kezdetiérték feladatnak, akkor a  $\psi_1 = \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény (vagyis a  $\psi$  függvény első koordináta függvénye) megoldása az

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) &= f(x; y(x); y'(x); \dots; y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) &= k_0, y'(x_0) = k_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1} \end{aligned}$$

$n$ -edrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladatnak.

**13.7. Megjegyzés.** Bármely  $n$ -edrendű differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat ekvivalens egy alkalmasan megkonstruált  $n$  darab egyenletből álló elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladattal.

**13.8. Tétel.** (átviteli elv lineáris eset)

Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Legyen továbbá az  $A(x)$  mátrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

és az  $F(x)$  vektor

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

$n$ -edrendű differenciálegyenlet ekvivalens az

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + F(x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel.

**13.9. Példa.** Legyen  $x \in \mathbb{R}$ . Tekintsük az

$$y''(x) - 7y'(x) + 6y(x) = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet!

Az átviteli elvet alkalmazva, ha a lineáris differenciálegyenlet

$$y''(x) + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = 0$$

alakú, akkor átírható

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

alakúvá, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Tehát a másodrendű differenciálegyenlet ekvivalens az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= && y_2(x) \\ y_2'(x) &= -6y_1(x) + 7y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerrel.

13.10. **Példa.** Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} y_1'(x) &= 2y_1(x) + 2y_2(x) \\ y_2'(x) &= 2y_1(x) + 5y_2(x) \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert! Az első egyenletet deriválva azt kapjuk, hogy

$$y_1''(x) = 2y_1'(x) + 2y_2'(x).$$

A második egyenletből behelyettesítjük  $y_2'(x)$ -et, így

$$y_1''(x) = 2y_1'(x) + 4y_1(x) + 10y_2(x)$$

adódik. Az első egyenletből kifejezzük  $y_2(x)$ -et és azt behelyettesítjük az előbbi egyenletbe. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$y_1''(x) = 2y_1'(x) + 4y_1(x) + 5y_1'(x) - 10y_1(x).$$

Tehát

$$y_1''(x) - 7y_1'(x) + 6y_1(x) = 0.$$

Az eredeti egyenletrendszer ekvivalens a kapott másodrendű differenciálegyenlettel.

13.11. **Tétel.** (átviteli elv lineáris eset kezdetiérték feladatra)

Legyen  $x_0 \in I$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Legyen továbbá az  $A(x)$  mátrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

az  $F(x)$  vektor

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

és

$$k = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

$$y(x_0) = k_0, y'(x_0) = k_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

kezdetiérték feladat ekvivalens az

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x) + F(x)$$

$$Y(x_0) = k$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó kezdetiérték feladattal.

**13.12. Tétel.** Legyenek  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  és  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Legyen továbbá az  $A$  mátrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

és az  $F(x)$  vektor

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Az

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

$n$ -edrendű differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének és az

$$Y'(x) = A \cdot Y(x) + F(x)$$

elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer  $A$  mátrixa karakterisztikus egyenletének gyökei ugyanazok.

DUPRESS

## 14. Magasabbrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

**14.1. Newton II. törvénye.** Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével, ami általános esetben függhet az időtől, a helytől és a sebességtől, azaz felírható az

$$F(t; s(t); v(t)) = m \cdot a(t)$$

differenciálegyenlet.

Figyelembe véve, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja, továbbá a gyorsulás-idő függvény a hely-idő függvény második deriváltja, ezért az előbbi egyenletet az

$$F(t; s(t); \dot{s}(t)) = m \cdot \ddot{s}(t)$$

alakban is felírhatjuk, amit  $m$ -el elosztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{m} \cdot F(t; s(t); \dot{s}(t)),$$

ami egy közönséges, másodrendű, explicit differenciálegyenlet.

**14.2. Mozgási feladatok.** Egy pontszerű test egyenes pályán mozog  $a$  állandó gyorsulással. Tudjuk továbbá, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a test sebessége  $v(0) = v_0$ , továbbá a  $t = 0$  időpillanatban a megfigyelés helyén van, azaz  $s(0) = s_0$ . Meghatározzuk a sebesség-idő és a hely-idő függvényeket.

Mivel

$$a(t) = a \quad \Rightarrow \quad \ddot{s}(t) = a,$$

ezért ez egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int a \, dt = a \cdot t + c_1,$$

ahol  $c_1 \in \mathbb{R}$  adódik. Mivel  $\dot{s}(t) = v(t)$ , ezért azt is kaptuk, hogy

$$v(t) = \int a \, dt = a \cdot t + c_1,$$

Mivel  $v(0) = v_0$ , ezért

$$v_0 = a \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0,$$

így a sebesség-idő függvény

$$v(t) = a \cdot t + v_0.$$

Tehát

$$\dot{s}(t) = a \cdot t + v_0.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$s(t) = \int a \cdot t + v_0 \, dt = a \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol  $c_2 \in \mathbb{R}$ . Mivel  $s(0) = s_0$ , ezért

$$s_0 = a \cdot \frac{0^2}{2} + v_0 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = s_0,$$

így azt kaptuk, hogy a hely-idő függvény

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

**14.3. Példa.** Egy gépkocsi  $54 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$  sebességről  $5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$  lassulással egyenletesen fékez. Kiszámoljuk, hogy mekkora a fékút.

Mivel

$$v(0) = v_0 = 54 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 15 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

és  $a = -5 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ , ezért az előbbi modell szerint a hely-idő függvénye

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t + s_0,$$

sebesség-idő függvénye

$$v(t) = -5t + v_0 = -5t + 15.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor a gépkocsi megáll, vagyis azt a  $t$  értéket, melyre  $v(t) = 0$ , így a

$$0 = 15 - 5t$$

egyenletet kell megoldanunk, amelyre azt kapjuk, hogy  $t = 3$ .

Ha feltesszük, hogy  $s_0 = 0$ , akkor a mozgás hely-idő függvénye

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t.$$

Tehát

$$s(3) = -2,5 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 22,5 \text{ [m]},$$

így a fékút  $22,5 \text{ [m]}$ .

**14.4. Szabadesés közegellenállás nélkül.** Jelölje  $h(t)$  annak a testnek a magasságát a  $t$  időpillanatban, melyet a  $t = 0$  időpillanatban  $h(0) = h_0$  magasságról,  $v(0) = v_0$  kezdősebességgel ejtünk el.

Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a testre ható erők eredőjével. Jelen esetben a közegellenállástól eltekintünk, így a testre csak egy  $m \cdot g$  nagyságú súlyerő hat, tehát az

$$m \cdot a = -m \cdot g$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja azt kapjuk, hogy

$$m \cdot \dot{v}(t) = -m \cdot g, \quad \text{azaz} \quad \ddot{s}(t) = -g.$$

Ez egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = -g \cdot t + c_1 \quad \Rightarrow \quad v(t) = -g \cdot t + c_1$$

adódik. Mivel  $v(0) = v_0$ , ezért  $c_1 = v_0$ , így

$$v(t) = -g \cdot t + c_1$$

Felhasználva, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = -g \cdot t + v_0.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + c_2$$

adódik. Mivel  $h(0) = h_0$ , ezért  $c_2 = h_0$ , így

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0.$$

**14.5. Példa.** Függőlegesen felfelé kilövünk egy nyílpuskából egy nyílvesszőt. Legyen a nyílvessző kezdősebessége  $v_0 = 49 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ . Meghatározzuk, hogy a kilövés után mennyi idő múlva tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére, ha a közegellenállástól eltekintünk.

A függőlegesen kilőtt nyílvessző hely-idő függvénye az előbbi modell szerint

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t = -4,9t^2 + 49t.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor  $h(t) = 0$ , így a

$$-4,9t^2 + 49t = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. A bal oldalt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$4,9t \cdot (-t + 10) = 0,$$

amiből az egyenlet megoldásaira  $t_1 = 0$ , illetve  $t_2 = 10$  adódik.

Tehát azt kaptuk, hogy a kilövés után 10 másodperccel tér vissza a nyílvesző a kilövés helyére.

**14.6. Megjegyzés.** Ha a közegellenállástól eltekintünk, akkor egy szabadon eső test talajra érésének időpontja nem függ a test tömegétől. Ezzel kapcsolatban végeztek kísérleteket a Holdon, ahol igazolták, hogy ez valóban így van.

A Holdnak nincs számottevő légköre, és a nehézségi gyorsulás is lényegesen kisebb, mint a Földön, így ideális helyszín annak bemutatására, hogy az egyszerűen elejtett, szabadon eső testek tömegüktől függetlenül, azonosan mozognak és egyszerre érnek a talajra. A kísérletet 1971. augusztus 2-án David Scott, az Apollo 15 űrhajósa ténylegesen is elvégezte a Holdon.

**14.7. Szabadelés közegellenállással.** Felírjuk egy szabadon eső test hely-idő függvényét, ha a közegellenállástól nem tekintünk el.

Jelölje  $h(t)$  egy szabadon eső testnek a Föld felszínétől mért távolságát a  $t$  időpillanatban.

Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével. A testre két erő hat: egy  $m \cdot g$  nagyságú gravitációs erő és egy közegellenállási erő, amely a mozgás irányával ellentétes irányú és nagysága (tapasztalatok szerint) a sebesség négyzetével arányos.

Tehát az alábbi differenciálegyenlet írható fel:

$$m \cdot a(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t),$$

ahol  $k$  az úgynevezett *közegellenállási együttható*.

Mivel  $a(t) = \ddot{h}(t)$ , ezért az

$$m \cdot \ddot{h}(t) = m \cdot g - k \cdot (\dot{h})^2(t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{h}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot (\dot{h}(t))^2$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Mivel  $v(t) = \dot{h}(t)$ , ezért az

$$m \cdot \dot{v}(t) = m \cdot g - k \cdot v^2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) = g - \frac{k}{m} \cdot v^2(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez az egyenlet szeparábilis.

Tekintsük a  $z(v) = g - \frac{k}{m} \cdot v^2$  és a  $g(t) = 1$  függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{z(v)} dv = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk a  $v$  ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} dv = \int 1 dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálás:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g - \frac{k}{m} \cdot v^2} dv &= \frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v\right)^2} = \\ &= \frac{1}{g} \cdot \operatorname{arth} \left( \sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v \right) \cdot \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő integrálás:

$$\int 1 dt = t + c.$$

Tehát az

$$\frac{1}{g} \cdot \operatorname{arth} \left( \sqrt{\frac{k}{g \cdot m}} \cdot v \right) \cdot \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}} = t + c$$

egyenletet kell megoldanunk az ismeretlen  $v$  függvényre, amire azt kapjuk, hogy

$$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot (t + c) \right).$$

Ha feltesszük, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a sebesség  $v(0) = v_0 = 0$ , akkor  $c = 0$  adódik. Ekkor a sebesség-idő függvény

$$v(t) = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}} \cdot \operatorname{th} \left( \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t \right).$$

Mivel a  $\operatorname{th}$  függvény végtelenbeli határértéke 1, ezért a végsebesség

$$v_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}}.$$

Mivel

$$\operatorname{th} \alpha = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha},$$

a hely-idő függvény

$$h(t) = \int v(t) dt = \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{m}{g \cdot k}} \cdot \ln \operatorname{ch} \left( \left| \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t \right| \right) + c,$$

így

$$h(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln \operatorname{ch} \left( \left| \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t \right| \right) + c.$$

Ha feltesszük, hogy  $h(0) = 0$ , akkor  $c = 0$ , így ebben az esetben

$$h(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln \operatorname{ch} \left( \left| \sqrt{\frac{g \cdot k}{m}} \cdot t \right| \right).$$

**14.8. Példa.** Egy ping-pong labda sugara 2 [cm], tömege 3 [g], a közegellenállási tényező értéke 0,2. A levegő sűrűsége 1 000  $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ . Mivel

$$A = 0,02^2 \cdot \pi = 1,26 \cdot 10^{-3} [\text{m}^2],$$

ezért a közegellenállási együttható értéke

$$k = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot C \cdot A = 0,126 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right],$$

így a (függőleges irányú) végsebesség

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{g \cdot m}{k}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,003}{0,126}} = 0,48 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

A sebesség-idő függvény

$$v(t) = 0,48 \cdot \operatorname{th} 20,3t.$$

**14.9. Lejtőre helyzetett test modellje.** Amikor egy testet egy lejtőre helyezünk azt tapasztaljuk, hogy az elkezd lecsúszni rajta. Tapasztalataink alapján kijelenthetjük, hogy ha a test és a lejtő között nincs súrlódás (ami a valóságban ritkán forduló elő), akkor a test sokkal hamarabb fog a lejtő aljára érni, mint akkor, ha a lejtő és a test között súrlódás is fellép.

Ennek igazolásához egy egyszerű modellt fogunk felépíteni. Legyen a test tömege  $m$ , a nehézségi gyorsulás  $g$ , a test által megtett út az idő függvényében

$s(t)$ . Tegyük fel, hogy ismerjük a lejtőalap és a lejtővonal által bezárt úgynevezett lejtőszöget, melyet most jelöljünk  $\alpha$ -val.

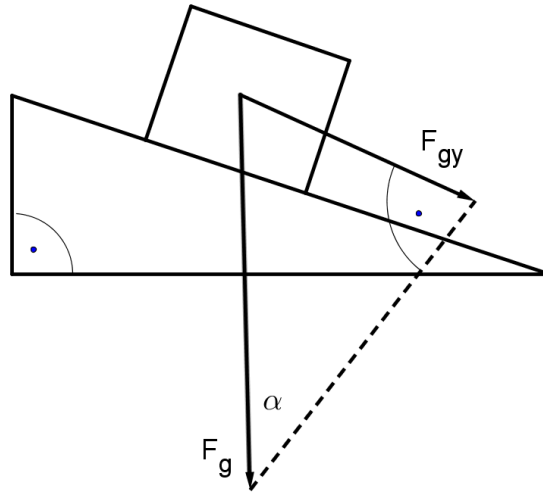
Newton II. törvénye szerint egy test gyorsulása azonos irányú a rá ható erők  $F$  eredőjével, míg nagysága egyenesen arányos az eredő erő nagyságával és fordítottan arányos a test tömegével, így

$$m \cdot a(t) = F \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{F}{m}.$$

Mivel a test gyorsulása adott  $t$  időpillanatban megegyezik a test kitérés-idő függvényének második deriváltjával a  $t$  időpillanatban, így

$$\ddot{s}(t) = \frac{F}{m}.$$

Már csak azt kell tudnunk, hogy milyen erők hatnak erre az  $m$  tömegű testre. Először tekintsük azt az esetet, amikor a test és a lejtő között fellépő súrlódástól eltekintünk, azaz a  $\mu$  súrlódási együttható értékét nullának tekintjük.



Ekkor a testre ható  $F_{gy}$  gyorsító erőt az

$$F_{gy} = F_g \cdot \sin \alpha$$

összefüggéssel számolhatjuk ki, ahol  $F_g$  a nehézségi erő. Mivel  $F_g = m \cdot g$ , ezért a test kitérés-idő függvényét leíró differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy}}{m} = \frac{F_g \cdot \sin \alpha}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{m} = g \cdot \sin \alpha,$$

tehát

$$\ddot{s}(t) = g \cdot \sin \alpha,$$

amely egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = g \cdot t \cdot \sin \alpha + c_1.$$

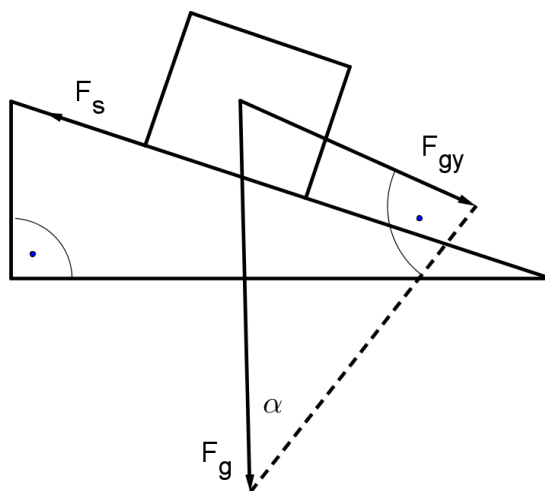
Ismét integrálva

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin \alpha + c_1 \cdot t + c_2$$

adódik, ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Ha feltesszük, hogy  $s(0) = s_0$  és  $\dot{s}(0) = v_0$ , akkor

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot t + s_0.$$

Most nézzük meg, hogy miben különbözik az az eset, amikor a modellünket kiegészítjük a test és a lejtő között fellépő súrlódással, azaz a súrlódási együttható értéke  $\mu > 0$ .



Ekkor a testre ható eredő erő az  $F_{gy}$  gyorsulási erő és az  $F_s$  súrlódási erő különbsége adja, ahol

$$F_s = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha.$$

Tehát a hely-idő függvényre vonatkozó differenciálegyenlet

$$\ddot{s}(t) = \frac{F_{gy} - F_s}{m} = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha}{m},$$

tehát

$$\ddot{s}(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha).$$

Ez az egyenlet is egy közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenlet.

Mindkét oldalt integrálva

$$\dot{s}(t) = \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) dt = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1$$

adódik. Ismét mindkét oldalt integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(t) &= \int g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot t + c_1 dt = \\ &= g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 \cdot t + c_2, \end{aligned}$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Ha  $s(0) = s_0$  és  $\dot{s}(0) = v_0$ , akkor a hely-idő függvény

$$s(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0.$$

A két eset megoldását összehasonlítva észrevehetjük azt, hogy a test valóban gyorsabban fog leérni a lejtő aljára abban az esetben, ha a súrlódási együttható értékét nullának tekintjük.

**14.10. Példa.** Egy  $\alpha = 30^\circ$ -os lejtőn  $v_0 = 10 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$  kezdősebességgel elindul egy test. Tudjuk, hogy  $s_0 = 50 \text{ [m]}$ . Tegyük fel, hogy  $\mu = 0$ . Ekkor a test hely-idő függvénye

$$s(t) = g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot \sin \alpha + v_0 \cdot t + s_0,$$

vagyis

$$s(t) = 2,4525t^2 + 10t + 50 \text{ [m]}.$$

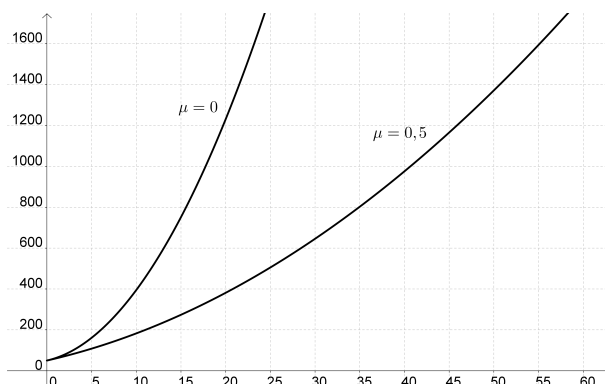
Megoldjuk ugyanezt a feladatot abban az esetben is, ha a súrlódási együttható értéke  $\mu = 0,5$ . Ekkor

$$s(t) = g \cdot (\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot t + s_0,$$

tehát

$$s(t) = 0,3286t^2 + 10t + 50.$$

A hely-idő függvénye:



**14.11. Gerjesztés nélküli csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás.** A harmonikus rezgőmozgást a pont egyensúlyi helyzetétől mért kitérésével egyenesen arányos, és azzal ellentétes irányú erő, az úgynevezett harmonikus erő hozza létre:

$$F = -D \cdot x,$$

ahol  $D$  az úgynevezett *rugóállandó* vagy *direkciós állandó*. Mivel Newton második törvénye szerint

$$F = m \cdot a$$

és  $a = \ddot{x}(t)$ , ezért az  $x$  kitérés-idő függvényre felírható az

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t),$$

vagyis az

$$m \cdot \ddot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0$$

másodrendű konstansegyütthatós lineáris homogén differenciálegyenlet.

Mivel  $m \neq 0$ , ezért az egyenlet átírható az

$$\ddot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$$

alakúra. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + \frac{D}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{D}{m},$$

így a karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot i.$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right).$$

Ha bevezetjük az

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

jelölést, akkor a kitérés-idő függvény

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  tetszőleges. A kapott eredményt átalakítva

$$x(t) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right).$$

Legyen

$$\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \sin \varphi.$$

Ekkor

$$\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \cos \varphi.$$

Tehát

$$x(t) = A \cdot (\sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t) + \cos \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t)),$$

ahol  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Megjegyezzük, hogy

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{c_1}{c_2}\right).$$

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

azt kapjuk, hogy

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

ahol  $A$  az amplitúdó,  $\omega$  a körfrekvencia és  $\varphi$  a fázisszög. A periódusidő

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega}.$$

A sebesség-idő függvény

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi).$$

A gyorsulás-idő függvény

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

A sebesség maximális nagysága  $A \cdot \omega$ , a gyorsulás maximális értéke  $A \cdot \omega^2$ .

14.12. **Példa.** Egy  $m$  tömegű testet  $D$  rugóállandójú rugóra függesztünk. A rugót megnyújtjuk  $10$  [cm]-rel, majd elengedjük. Tekintsük azt a rezgést, amikor  $m = 0,5$  [kg] és  $D = 50$   $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$ . Ekkor az

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

differenciálegyenletben

$$\omega = \sqrt{\frac{50}{0,5}} \left[\frac{1}{\text{s}}\right] = 10 \left[\frac{1}{\text{s}}\right],$$

így az

$$\ddot{x}(t) + 100x(t) = 0$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 10i,$$

így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(10t) + c_2 \cdot \sin(10t).$$

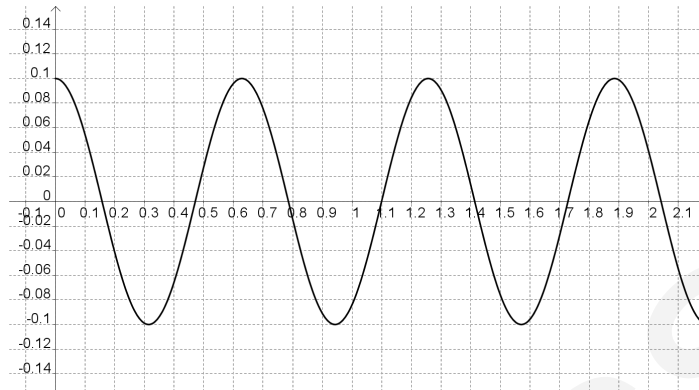
Ekkor

$$\dot{x}(t) = -10c_1 \cdot \sin(10t) + 10c_2 \cdot \cos(10t).$$

Felhasználva, hogy  $x(0) = 0,1$  azt kapjuk, hogy  $0,1 = c_1$ . Mivel  $\dot{x}(0) = 0$ , ezért  $0 = c_2$ . Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$x(t) = 0,1 \cos(10t).$$

A függvény grafikonja:



14.13. **Gerjesztés nélküli, csillapított harmonikus rezgőmozgás.** Jelölje  $x(t)$  az egyensúlyi helyzettől való kitérést az idő függvényében, továbbá legyen  $k$  a csillapítási tényező,  $D, m > 0$  a rugóállandó. Ekkor a Newtoni-egyenlet

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot \dot{x}(t) - D \cdot x(t),$$

vagyis

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0.$$

Bevezetve a

$$\frac{k}{2m} = \kappa$$

és

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \omega$$

jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0.$$

Ez egy másodrendű konstansgyütthatós lineáris differenciálegyenlet, melynek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\kappa \cdot \lambda + \omega^2 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet megoldásai

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\kappa \pm \sqrt{4\kappa^2 - 4\omega^2}}{2} = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}.$$

A differenciálegyenlet megoldása attól függ, hogy a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív, nulla vagy negatív-e.

Ha  $\kappa > \omega$ , akkor *nagy csillapításról* beszélünk. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van, így a differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot e^{(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}) \cdot t} + c_2 \cdot e^{(-\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega^2}) \cdot t},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha  $\kappa < \omega$ , akkor *kis csillapításról* beszélünk. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek komplex megoldása van, így a differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-\kappa \cdot t} \cdot \cos(\sqrt{\omega^2 - \kappa^2} \cdot t) + c_2 \cdot e^{-\kappa \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{\omega^2 - \kappa^2} \cdot t),$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Ha  $\kappa = \omega$ , akkor *határesetről* vagy *aperiodikus esetről* beszélünk. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek egy valós megoldása van kétszeres multiplicitással, így a differenciálegyenlet megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-\kappa \cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\kappa \cdot t},$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**14.14. Példa.** Egy gépkocsi futóművét egy próbapadon vizsgálják. A vizsgálat során a futóművet függőleges irányú lengésbe hozzák. A lengetés megszűntével a futómű csillapodó lengőmozgást végez, mozgásegyenlete

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0.$$

Legyen  $x(0) = -0,06$  [m], illetve  $v(0) = 0$  [ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ]. Legyen  $m = 400$  [kg] az üres gépkocsi rugózott felépítményének egy kerékre eső tömege,  $k = 800$  [ $\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}$ ] a lengéscsillapító csillapítási tényezője,  $D = 2000$  [ $\frac{\text{N}}{\text{m}}$ ] a rugóállandó.

Ekkor

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot \dot{x}(t) + D \cdot x(t) = 0$$

egyenlet mindkét oldalát  $m$ -el osztva azt kapjuk, hogy

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0,$$

vagyis

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = 0,$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{5}$$

és

$$\frac{k}{2m} = \frac{800}{800} = 1.$$

Tehát a differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5 \cdot x(t) = 0.$$

A differenciálegyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Mivel az egyenlet gyökei komplex számok, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi alakban áll elő:

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t),$$

ahol  $\alpha$ , illetve  $\beta$  a másodfokú egyenlet valamely komplex gyökének valós, illetve képzetes része. Behelyettesítve az  $\alpha$  és  $\beta$  értékeket azt kapjuk, hogy

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

Az  $x(t)$  függvény deriváltja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) - 2c_1 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) - \\ &\quad - c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t). \end{aligned}$$

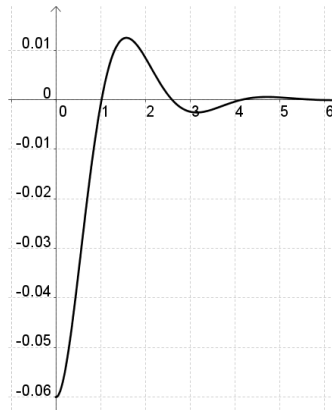
Mivel  $x(0) = -0,06$  és  $\dot{x}(0) = 0$ , ezért

$$\begin{aligned} -0,06 &= c_1 \\ 0 &= -c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásával  $c_2 \approx -0,03$  adódik. A kitérés-idő függvény tehát:

$$x(t) = -0,06 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) - 0,03 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

A kitérés-idő függvény grafikonja:



**14.15. Csillapított harmonikus rezgőmozgás gerjesztéssel.** Tegyük fel, hogy a rezgést valamilyen külső hatás folyamatosan gerjeszti is, akkor gerjesztett rezgőmozgásról beszéltünk. Jelöljük a gerjesztő erőt  $F_{\text{gerj}}$  módon. A korábbi jelöléseket megtartva a kitérés-idő függvényre az

$$\ddot{x}(t) + 2\kappa \cdot \dot{x}(t) + \omega^2 \cdot x(t) = F_{\text{gerj}}(t)$$

másodrendű lineáris konstans együtthatós inhomogén differenciálegyenlethez jutunk.

**14.16. Példa.** Egy  $1 \text{ [kg]}$  tömegű test  $D = 5 \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$  rugóállandójú rugóra van rögzítve. A rendszer csillapítási tényezője  $k = 2 \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \right]$ . Tegyük fel, hogy  $x(0) = 52 \text{ [m]}$  és  $v(0) = -39 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ . A rendszert gerjesztő erő legyen

$$F(t) = 10 \cos t.$$

Ekkor

$$\kappa = \frac{k}{2m} = 1$$

és

$$\omega^2 = \frac{D}{m} = 5.$$

A megoldandó differenciálegyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 10 \cos t.$$

A megfelelő homogén egyenlet

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 5x(t) = 0.$$

Ennek a karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Legyen  $\alpha = -1$  és  $\beta = 2$ . A homogén egyenlet általános megoldása

$$x_h(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t).$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását

$$x_p(t) = A \cdot \cos t + B \cdot \sin t$$

alakban keressük. Ekkor

$$\dot{x}_p(t) = -A \cdot \sin t + B \cdot \cos t$$

és

$$\ddot{x}_p(t) = -A \cdot \cos t - B \cdot \sin t.$$

Ezeket behelyettesítve az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\sin t \cdot (-B - 2A + 5B) + \cos t \cdot (-A + 2B + 5A) = 10 \cos t,$$

vagyis

$$\sin t \cdot (-2A + 4B) + \cos t \cdot (4A + 2B) = 10 \cos t.$$

Tehát teljesül az

$$\left. \begin{array}{l} -2A + 4B = 0 \\ 4A + 2B = 10 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy  $A = 2B$ , amit a második egyenletbe behelyettesítve  $B = 1$  adódik, így  $A = 2$ . Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$x_p(t) = 2 \cos t + \sin t.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) + 2 \cos t + \sin t$$

vagy másképp

$$x(t) = e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t)) + 2 \cos t + \sin t.$$

Az  $x(t)$  függvény deriváltja

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos(2t) + c_2 \cdot \sin(2t)) + \\ &+ e^{-t} \cdot (-2c_1 \cdot \sin(2t) + 2c_2 \cdot \cos(2t)) - 2 \sin t + \cos t. \end{aligned}$$

Mivel  $x(0) = 52$ , ezért

$$c_1 + 2 = 52 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 50.$$

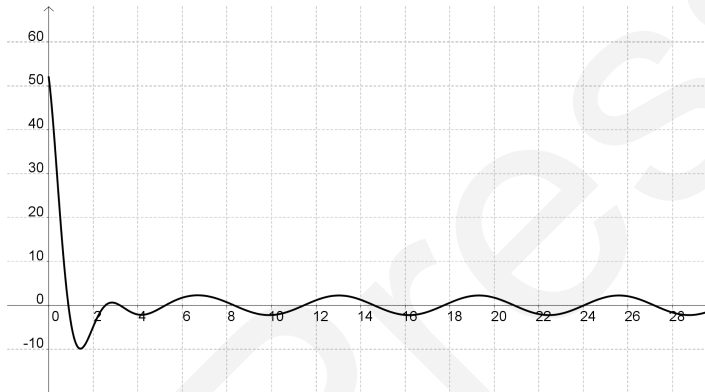
Mivel  $v(0) = \dot{x}(0) = -39$ , ezért

$$-c_1 + 2c_2 + 1 = -39.$$

Ezen egyenletekből  $c_2 = 5$  és  $c_1 = 50$  adódik, így a kitérés-idő függvény

$$x(t) = e^{-t} \cdot (50 \cos(2t) + 5 \sin(2t)) + 2 \cos t + \sin t,$$

melynek grafikonja:



**14.17. Az inga matematikai modellje.** Vizsgáljuk meg azt, hogyan lehet modellezni egy inga mozgását! Tekintsük azt a modellt, amikor egy  $l > 0$  hosszúságú kötélen egyik végét rögzítettük a plafonra, a másik végére egy  $m > 0$  tömegű testet helyeztünk.

A modell felállítása során csak a gravitációs erőt vesszük figyelembe, az esetleges légellenállást most figyelmen kívül hagyjuk. A tapasztalataink alapján azt várjuk, hogy az inga sebessége a nulla és egy maximális érték között váltakozzon periodikusan.

A differenciálegyenlet felírásához ismét Newton II. törvényét használjuk, miszerint

$$a(t) = \frac{F(t)}{m},$$

vagyis

$$a(t) = \frac{\ddot{s}(t)}{m}.$$

Ekkor

$$F = F_g \cdot \sin \varphi = -m \cdot g \cdot \sin \varphi,$$

ahol az  $F_g$  nehézségi erő azért kapott negatív előjelet, mert lefelé hat. Tehát az

$$\ddot{s}(t) = \frac{-m \cdot g \cdot \sin \varphi}{m} = -g \cdot \sin(\varphi(t))$$

differenciálegyenletet kapjuk. Felhasználva, hogy

$$s(t) = l \cdot \varphi(t)$$

azt kapjuk, hogy

$$\ddot{s}(t) = l \cdot \ddot{\varphi}(t),$$

vagyis a

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t))$$

differenciálegyenlethez jutunk, amely egy másodrendű nem lineáris differenciálegyenlet. A differenciálegyenlet analitikus megoldása nem ismert. Általános esetben közelítő módszereket kell alkalmaznunk. Ha azonban a  $\varphi$  szög „kicsi”, akkor  $\sin \varphi$  jól közelíthető a  $\varphi$  értékével, így ilyenkor az

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \cdot \varphi(t)$$

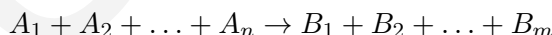
egyenlethez jutunk, amely egy hiányos másodrendű differenciálegyenlet, így megoldható például az  $\dot{\varphi}(t) = \varphi(t)$  helyettesítéssel.

**14.18. Kémiai reakcióegyenletek.** A gyakorlati tapasztalatok azt mutatják, hogy a kémiai reakciók sebessége és a reakciókban részt vevő komponensek koncentrációja között összefüggés van.

A reakciók sebessége az egymásra ható, kiindulási anyagok koncentrációjával arányos.

Az  $A$  anyag koncentrációját  $C_A$  vagy  $[A]$  módon jelöljük.

A fentiek szerint az



reakció esetén valamely

$$f: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvény segítségével a reakciósebességi egyenlet minden  $i \in \{1; 2; \dots; m\}$  esetén

$$C'_{A_i}(t) = -k \cdot f(C_{A_1}; C_{A_2}; \dots; C_{A_n}; C_{B_1}; C_{B_2}; \dots; C_{B_m}),$$

illetve

$$C'_{B_i}(t) = k \cdot f(C_{A_1}; C_{A_2}; \dots; C_{A_n}; C_{B_1}; C_{B_2}; \dots; C_{B_m}),$$

alakban írható fel, ahol  $k > 0$  egy arányossági tényező.

A legegyszerűbb (de a gyakorlatban sokszor előforduló) esetekben a reakciósebességi egyenletben szereplő  $f$  függvény

$$\begin{aligned} f(C_{A_1}; C_{A_2}; \dots; C_{A_n}; C_{B_1}; C_{B_2}; \dots; C_{B_m}) &= \\ &= -k \cdot C_{A_1}^{r_1} \cdot C_{A_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot C_{A_n}^{r_n} \cdot C_{B_1}^{s_1} \cdot C_{B_2}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{B_m}^{s_m} \end{aligned}$$

alakú, vagyis ekkor a reakciósebességi egyenlet

$$\begin{aligned} C'_{B_i}(t) &= -k \cdot C_{A_1}^{r_1} \cdot C_{A_2}^{r_2} \cdot \dots \cdot C_{A_n}^{r_n} \cdot \\ &\quad \cdot C_{B_1}^{s_1} \cdot C_{B_2}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{B_m}^{s_m}. \end{aligned}$$

A reakciósebességi egyenletben szereplő koncentrációk hatványkitevőinek összegét a reakció (*kinetikus*) *rendjének* nevezzük. Az előző általános egyenletben szereplő reakció kinetikus rendje

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n + s_1 + s_2 + \dots + s_m.$$

A  $k$  tényezőt (*reakció*)*sebességi együtthatónak* hívjuk.

Az egy lépésben lejátszódó reakciókat *elemi reakcióknak* nevezzük, a többlépésben lejátszódókat *összetett* vagy *sorozatos* reakcióknak mondjuk.

Kémiai reakciók szempontjából egy reakció lehet *monomolekuláris* (más szóval *unimolekuláris*), *bimolekuláris* vagy *polimolekuláris* aszerint, hogy a reakció lejátszódásához egy, kettő vagy kettőnél több molekula ütközése szükséges.

Ha az  $A + B \rightarrow D$  kémiai reakció másodrendű és a kiindulási anyagok koncentrációja nem azonos, akkor a reakciósebességi egyenletek

$$\begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t) \\ \dot{C}_B(t) &= -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t). \end{aligned}$$

Valójában itt egy differenciálegyenlet rendszert kellene megoldani, azonban a probléma redukálható egy differenciálegyenletté.

Legyen  $x$  a kiindulási anyagok elbomlott koncentrációja. Ekkor egyrészt

$$C_A(t) = C_{A_0} - x(t),$$

másrészt

$$C_B(t) = C_{B_0} - x(t).$$

Továbbá

$$\dot{C}_A(t) = \frac{d}{dt}(C_{A_0} - x(t)) = -\dot{x}(t)$$

és

$$\dot{C}_B(t) = \frac{d}{dt}(C_{B_0} - x(t)) = -\dot{x}(t).$$

Ezeket az eredményeket felhasználva az

$$\dot{x}(t) = k \cdot (C_{A_0} - x(t)) \cdot (C_{B_0} - x(t))$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Vezessük be a  $g(t) = k$  és  $h(x) = (C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)$  függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)} dx = \int k dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálást parciális törtekre bontás módszerével végezhethjük el.

Tekintsük az

$$\frac{1}{(C_{A_0} - x) \cdot (C_{B_0} - x)} = \frac{L}{C_{A_0} - x} + \frac{M}{C_{B_0} - x}$$

előállítást. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd rendezve a jobb oldalon szereplő tagokat azt kapjuk, hogy

$$1 = L \cdot (C_{B_0} - x) + M \cdot (C_{A_0} - x)$$

$$1 = x \cdot (-L - M) + L \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0}.$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagokat összehasonlítva az

$$\left. \begin{aligned} -L - M &= 0 \\ L \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0} &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Azt első egyenletből azt kapjuk, hogy  $L = -M$ . Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-M \cdot C_{B_0} + M \cdot C_{A_0} = 1,$$

így

$$M \cdot (C_{A_0} - C_{B_0}) = 1,$$

tehát

$$M = \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}}.$$

Ezt felhasználva

$$L = \frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}}.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}} \cdot \frac{1}{C_{A_0} - x} + \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \frac{1}{C_{B_0} - x} dx = \int k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_{B_0} - C_{A_0}} \cdot \ln |C_{A_0} - x| - \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln |C_{B_0} - x| = k \cdot t + c$$

adódik, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} = k \cdot t + c$$

Felhasználva, hogy  $x(0) = 0$  azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} = c.$$

Tehát

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} = \frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \left( \ln \frac{C_{A_0} - x}{C_{B_0} - x} - \ln \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \right) = k \cdot t,$$

vagyis

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{(C_{A_0} - x(t)) \cdot C_{B_0}}{(C_{B_0} - x(t)) \cdot C_{A_0}} = k \cdot t.$$

Felhasználva a

$$C_{A_0} - x(t) = C_A(t)$$

$$C_{B_0} - x(t) = C_B(t)$$

összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{C_{A_0} - C_{B_0}} \cdot \ln \frac{C_A(t) \cdot C_{B_0}}{C_B(t) \cdot C_{A_0}} = k \cdot t.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{C_A(t)}{C_B(t)} = \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}$$

adódik. Mivel ez az egyenlet az  $A$  és  $B$  anyag koncentrációját is tartalmazza és mi elsőként az  $A$  koncentrációját szeretnénk megkapni az idő függvényében, ezért az alábbi átalakítással élünk:

$$C_B(t) = C_{B_0} - x(t) = C_{B_0} - C_{A_0} + C_{A_0} - x(t) = C_{B_0} - C_{A_0} + C_A(t).$$

Ezt felhasználva

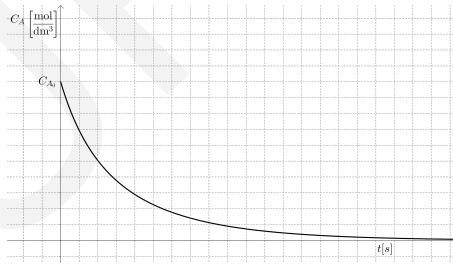
$$\frac{C_A(t)}{C_{B_0} - C_{A_0} + C_A(t)} = \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C_A(t) - \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t} \cdot C_A(t) &= \\ &= (C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}, \end{aligned}$$

így az  $A$  anyag koncentrációja az idő függvényében

$$\begin{aligned} C_A(t) &= \frac{(C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}}{1 - \frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t}} = \\ &= \frac{(C_{B_0} - C_{A_0})}{\frac{C_{B_0}}{C_{A_0}} \cdot e^{(C_{B_0} - C_{A_0}) \cdot k \cdot t} - 1}. \end{aligned}$$



Az előzőhöz hasonló számolással adódik, hogy a  $B$  anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_B(t) = \frac{(C_{A_0} - C_{B_0})}{\frac{C_{A_0}}{C_{B_0}} \cdot e^{(C_{A_0} - C_{B_0}) \cdot k \cdot t} - 1}.$$

Az elemi reakciókat a „Közönséges elsőrendű differenciálegyenletek és alkalmazásaik” című jegyzetben részletesen tárgyaltuk. Most az összetett kémiai

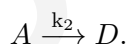
reakciók elméletébe szeretnénk betekintést nyújtani. A következő gondolatokban erősen támaszkodunk a [10] jegyzetre.

A valóságban zajló kémiai folyamatok esetén ritka az az eset, amikor egyetlen elemi reakció, vagyis egyetlen ütközés, illetve egyetlen átmeneti állapotú molekula létrejöttével játszódik le a reakció. Általában több elemi reakció eredményezi a folyamatok végtermékeit, amelyek valamilyen módon azért kapcsolódnak egymáshoz. Ahogyan azt korábban írtuk, az adott folyamatban szereplő elemi reakciók összességét hívjuk az *összetett reakciónak*.

A mechanizmust alkotó elemi reakciók csak kevés különböző kapcsolódási lehetőség szerint csatolódnak.

A reakciók lejátszódhatnak *párhuzamosan*, vagyis ugyanabból a reaktánsból kiindulva különböző termék képződésével; lejátszódhatnak *sorozatosan*, vagyis egymást követően, illetve lejátszódhatnak olyan módon, hogy ugyanaz a reakció mindkét irányban lejátszódhat, amely kapcsolódási módot *reverzibilis* reakció néven szokás említeni.

A legegyszerűbb példa párhuzamos reakcióra, amikor egy reaktánsból két különböző termék keletkezik unimolekulás reakcióban. Ezt úgy írhatjuk le, hogy



Ebben az esetben a reakciósebességi differenciálegyenlet-rendszer

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -k_1 \cdot C_A(t) - k_2 \cdot C_A(t) \\ \dot{C}_B(t) &= k_1 \cdot C_A(t) \\ \dot{C}_D(t) &= k_2 \cdot C_A(t) \end{aligned} \right\}.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\dot{C}_A(t) = (-k_1 - k_2) \cdot C_A(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, melynek megoldása az

$$\int \frac{1}{C_A} dC_A = \int -k_1 - k_2 dt$$

egyenlet megoldásával adódik. Mivel

$$\int \frac{1}{C_A} dC_A = \ln C_A + K_1$$

és

$$\int -k_1 - k_2 dt = (-k_1 - k_2) \cdot t + K_2,$$

ezért

$$C_A(t) = K \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t},$$

ahol  $K \in \mathbb{R}$ . Ha feltesszük, hogy a  $t = 0$  időpillanatban a  $D$  termék nem volt a reakcióelegyben, csak az  $A$  komponens  $C_{A_0}$  koncentrációban (vagyis a  $B$  és  $C$  komponens kezdeti koncentrációja zérus), akkor

$$C_A(t) = C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}.$$

Mivel

$$\dot{C}_B(t) = k_1 \cdot C_A(t),$$

ezért

$$\dot{C}_B(t) = k_1 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}.$$

Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, melynek megoldása a

$$C_B(t) = \int k_1 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t} dt = \frac{k_1 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}}{-k_1 - k_2} + K_3.$$

Mivel  $C_B(0) = 0$ , ezért

$$0 = \frac{k_1 \cdot C_{A_0}}{-k_1 - k_2} + K_3 \quad \Rightarrow \quad K_3 = \frac{k_1 \cdot C_{A_0}}{k_1 + k_2}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$C_B(t) = \frac{k_1 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}}{-k_1 - k_2} + \frac{k_1 \cdot C_{A_0}}{k_1 + k_2},$$

vagyis

$$C_B(t) = C_{A_0} \cdot \frac{k_1}{k_1 + k_2} \cdot \left(1 - e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}\right).$$

Mivel

$$\dot{C}_D(t) = k_2 \cdot C_A(t),$$

ezért

$$\dot{C}_D(t) = k_2 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}.$$

Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, melynek megoldása a

$$C_D(t) = \int k_2 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t} dt = \frac{k_2 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}}{-k_1 - k_2} + K_4.$$

Mivel  $C_D(0) = 0$ , ezért

$$0 = \frac{k_2 \cdot C_{A_0}}{-k_1 - k_2} + K_4 \quad \Rightarrow \quad K_4 = \frac{k_2 \cdot C_{A_0}}{k_1 + k_2}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$C_D(t) = \frac{k_2 \cdot C_{A_0} \cdot e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}}{-k_1 - k_2} + \frac{k_2 \cdot C_{A_0}}{k_1 + k_2},$$

vagyis

$$C_D(t) = C_{A_0} \cdot \frac{k_2}{k_1 + k_2} \cdot \left(1 - e^{(-k_1 - k_2) \cdot t}\right).$$

A

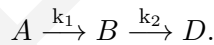
$$\frac{k_1}{k_1 + k_2}$$

és a

$$\frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

hányadosokat *elágazási arányoknak* is nevezzük. Az első azt mutatja meg, hogy milyen arányban keletkezik a termékek között a  $B$ , a második pedig azt, hogy milyen arányban keletkezik a  $D$  komponens.

Most tekintsük azt a sorozatos reakciót, amely két egymást követő unimolekulás lépésből áll:



Ekkor a reakciósebességi egyenletrendszer

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_A(t) &= -k_1 \cdot C_A(t) \\ \dot{C}_B(t) &= k_1 \cdot C_A(t) - k_2 \cdot C_B(t) \\ \dot{C}_D(t) &= k_2 \cdot C_B(t) \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer felírható a

$$\begin{pmatrix} \dot{C}_A(t) \\ \dot{C}_B(t) \\ \dot{C}_D(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_A(t) \\ C_B(t) \\ C_D(t) \end{pmatrix}$$

alakban. Az

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékei a

$$\det \begin{pmatrix} -k_1 - \lambda & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 - \lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

vagyis a

$$(-k_1 - \lambda) \cdot (-k_2 - \lambda) \cdot (-\lambda) = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -k_1 \\ \lambda_3 &= -k_2. \end{aligned}$$

A  $\lambda_1 = 0$  sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. A egyenletrendszer részletesebben felírva

$$\left. \begin{aligned} -k_1 \cdot r_1 &= 0 \\ k_1 \cdot r_1 - k_2 \cdot r_2 &= 0 \\ k_2 \cdot r_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

alakú, melynek megoldása  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = t$ , ahol  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . A sajátaltér tehát

$$S_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

így egy sajátvektor például

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda_2 = -k_1$  sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 + k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & k_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. A egyenletrendszer részletesebben felírva

$$\left. \begin{aligned} k_1 \cdot r_1 + (k_1 - k_2) \cdot r_2 &= 0 \\ k_2 \cdot r_2 + k_1 \cdot r_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldásához legyen  $r_1 = t$  ( $t \neq 0$ ). Ekkor

$$k_1 \cdot r_1 + (k_1 - k_2) \cdot r_2 = 0,$$

amiből

$$r_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot t.$$

Ezt felhasználva

$$k_2 \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot t + k_1 \cdot r_3 = 0,$$

amiből

$$r_3 = \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot t.$$

A sajátaltér tehát

$$S_{\lambda_2} = \left\{ \left( \begin{pmatrix} t \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot t \\ \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right) \right\},$$

így egy sajátvektor például

$$s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1} \\ \frac{k_2}{k_1 - k_2} \end{pmatrix}.$$

A  $\lambda_3 = -k_2$  sajátértékhez tartozó sajátaltér a

$$\begin{pmatrix} -k_1 + k_2 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszer megoldása. A egyenletrendszer részletesebben felírva

$$\left. \begin{aligned} (-k_1 + k_2) \cdot r_1 &= 0 \\ k_1 \cdot r_1 &= 0 \\ k_2 \cdot r_2 + k_2 \cdot r_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Ekkor  $r_1 = 0$ . Legyen  $r_3 = t$  ( $t \neq 0$ ). Ekkor  $r_2 = -t$ . A sajátaltér tehát

$$S_{\lambda_3} = \left\{ \left( \begin{array}{c} 0 \\ -t \\ t \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

így egy sajátvektor például

$$s_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\begin{pmatrix} C_A(t) \\ C_B(t) \\ C_D(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot s_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot s_2 + c_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} \cdot s_3.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} C_A(t) \\ C_B(t) \\ C_D(t) \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-k_1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k_1}{k_2 - k_1} \\ \frac{k_2}{k_1 - k_2} \end{pmatrix} + c_3 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy  $C_A(0) = C_{A_0}$ ,  $C_B(0) = 0$  és  $C_D(0) = 0$ . Ekkor  $C_A(0) = C_{A_0}$  miatt azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = c_2 \cdot e^{-k_1 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad c_2 = C_{A_0},$$

így

$$C_A(t) = C_{A_0} \cdot e^{-k_1 \cdot t}.$$

Másrészt

$$C_B(t) = c_2 \cdot e^{-k_1 \cdot t} \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} - c_3 \cdot e^{-k_2 \cdot t},$$

így  $C_B(0) = 0$  miatt

$$0 = c_2 \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} - c_3,$$

így

$$c_3 = \frac{C_{A_0} \cdot k_1}{k_2 - k_1},$$

tehát

$$C_B(t) = C_{A_0} \cdot e^{-k_1 \cdot t} \cdot \frac{k_1}{k_2 - k_1} - \frac{C_{A_0} \cdot k_1}{k_2 - k_1} \cdot e^{-k_2 \cdot t}.$$

Továbbá

$$C_D(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-k_1 \cdot t} \cdot \frac{k_2}{k_1 - k_2} + c_3 \cdot e^{-k_2 \cdot t}.$$

Mivel  $C_D(0) = 0$ , ezért

$$0 = c_1 + C_{A_0} \cdot \frac{k_2}{k_1 - k_2} + \frac{C_{A_0} \cdot k_1}{k_2 - k_1},$$

így

$$c_1 = \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot C_{A_0} - \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot C_{A_0} = C_{A_0},$$

tehát

$$C_D(t) = C_{A_0} + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot C_{A_0} \cdot e^{-k_1 \cdot t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot C_{A_0} \cdot e^{-k_2 \cdot t},$$

vagy másképp felírva

$$C_D(t) = C_{A_0} \cdot \left( 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \cdot t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot e^{-k_2 \cdot t} \right).$$

## Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Csank Lajos – Nagy Attila – Szép Gabriella – Zibolen Bence, *Matematika feladatgyűjtemény III.*, Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [2] Bajcsay Pál – Frey Tamás, *Közönséges differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, 1962.
- [3] Bajcsay Pál, *Matematika III.*, Műegyetemi Kiadó, 1996.
- [4] Bajcsay Pál – Frey Tamás, *Közönséges differenciálegyenletek (második rész)*, Tankönyvkiadó, 1966.
- [5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [6] C. Henry Edwards, David E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 2008.
- [7] Farkas Miklósné, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.
- [9] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [10] Keszei Ernő, *A reakciókinetika alapjai*, ELTE, Budapest, 2015.
- [11] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [12] Kovács Márton, *Reakciókinetika feladatgyűjtemény*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [13] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [14] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [15] Lökös Sándor, *Differenciálegyenletek környezettan alapszakos hallgatóknak*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [16] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [17] Ósz Katalin, *Fizikai kémia II. példatár*, elektronikus jegyzet, <http://web.unideb.hu/uh9v32/peldatar.html>, 2019.
- [18] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [19] K. K. Ponomarjov, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása*, Tankönyvkiadó, 1969.
- [20] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [21] Rujp Veronika, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása fizikai példákon keresztül*, ELTE, szakdolgozat, 2013.
- [22] Scharnitzky Viktor, *Differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, 2001.
- [23] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [24] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [25] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
- [26] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.
- [27] Tóth János – Simon L. Péter – Csikja Rudolf, *Differenciálegyenletek feladatgyűjtemény*, TypoTex, 2011.
- [28] Turányi Tamás, *Fizikai kémiai előadások (reakciókinetika)*, ELTE, Kémiai Intézet, 2018.

**Tartalomjegyzék**

1. Alapfogalmak	4
2. Közvetlenül integrálható másodrendű differenciálegyenletek	18
3. Az $y''(x) = f(x; y'(x))$ alakú differenciálegyenletek	22
4. Az $y''(x) = f(y(x); y'(x))$ alakú differenciálegyenletek	24
5. Másodrendű lineáris konstansgyütthetős homogén diff.egyenletek	26
6. Másodr. lin. konstansseh. inhom. diff.egyenletek megoldása konstansvariálással	32
7. Másodr. lin. konstansseh. inhom. diff.egyenletek megoldása próbafüggvénnyel	39
8. Másodr. lin. konstansseh. inhom. diff.egyenletek megoldása Laplace-transzformációval	45
9. Cauchy-Euler differenciálegyenlet	55
10. Függvénygyütthetős másodrendű lineáris differenciálegyenletek	60
11. Harmadr. és magasabbrendű lin. konstansseh. diff.egyenletek megoldása	67
12. Differenciálegyenlet-rendszerek	77
13. Átviteli elv	109
14. Magasabbrendű differenciálegyenletek alkalmazásai	116

